Algorytmy Numeryczne – Zadanie 2
Falowanie

Laura Grzonka Łukasz Kuszner

24 marca 2025

Wprowadzenie

Równaniem różniczkowym nazywamy równanie, w którym niewiadomą jest funkcja oraz niewiadoma funkcja występuje pod znakiem pochodnej. Jeśli ta niewiadoma funkcja jest funkcją jednej zmiennej, to równanie takie nazywamy *równaniem różniczkowym zwyczajnym*.

Przykład 1. *Szukana jest funkcja rzeczywista $z : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$ spełniająca równanie*

$$\sin(t) \cdot z'(t) - \cos(t)z(t) = -1 \tag{1}$$

W powyższym równaniu niewiadoma funkcja z występuje tylko w pierwszej pochodnej i dlatego takie równanie nazywamy *równaniem pierwszego rzędu.*

Rozważmy równanie (1) na przedziale $I = [0, \pi/2]$ z dodatkowymi warunkami:

$$z(0) = 1$$
$$z(\pi/2) = 0$$

W tej sytuacji mówimy o *zagadnieniu brzegowym* (szukana funkcja jest określona na brzegach[1] rozważanego przedziału).

Można zgadnąć, że rozwiązaniem tego zagadnienia jest funkcja $\bar{z}(t) = \cos(t)$. Istotnie, spełnione są warunki brzegowe, a wstawiając tę funkcję do równania otrzymujemy tożsamość:

$$\sin(t) \cdot -sin(t) - \cos(t) \cdot \cos(t) = -1$$

znaną jako *jedynka trygonometryczna.* Oczywiście odgadnięcie rozwiązania nie świadczy o tym, że jest to jedyne rozwiązanie danego zagadnienia brzegowego.

Rozwiązanie numeryczne

Analityczne rozwiązanie zagadnienia brzegowego może nie być łatwe. Spróbujmy więc powyższy przykład rozwiązać numerycznie.

Podzielmy najpierw rozważany przedział I na N części: $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\ldots [t_{N-1}, t_N]$, gdzie $t_k < t_{k+1}$. Zbiór $\{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ nazywamy *siatką* na przedziale I. Jeśli dodatkowo

[1]Pojęcie brzegu zbioru jest dobrze zdefiniowane na gruncie topologii. Na potrzeby tego zadania wystarczy intuicyjne jego rozumienie.

powstałe fragmenty są tej samej długości ($t_{k+1} - t_k = h$), to mówimy o *siatce jednostajnej*, a liczbę h nazywamy *krokiem* siatki.

Szukana funkcja z powinna spełniać równanie w każdym punkcie siatki. Przypuśćmy, że $\bar{z}$ jest taką funkcją, wtedy:

$$\sin(t_k) \cdot \bar{z}'(t_k) - \cos(t_k)\bar{z}(t_k) = -1$$

Zastępując teraz wartości pochodnych przez ilorazy różnicowe:

$$\bar{z}'(t_k) \approx \frac{\bar{z}(t_{k+1}) - \bar{z}(t_{k-1})}{2h}$$

otrzymujemy układ $N+1$ równań z $N+1$ niewiadomymi, gdzie niewiadome to wartości funkcji $\bar{z}$ w punktach t_0, t_1, t_2, $\ldots t_N$. W układzie tym pierwsze i ostatnie równania pochodzą z wartości określonych na brzegach przedziału, a pozostałe równania mają postać:

$$\sin(t_k)\bar{z}(t_{k-1}) + 2h\cos(t_k)\bar{z}(t_k) - \sin(t_k)\bar{z}(t_{k+1}) = 2h.$$

Dla $N = 6$ po zaokrągleniu elementów macierzy do 3 miejsc po przecinku otrzymamy następujący układ równań (https://ideone.com/gRIauu):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.259 & -0.506 & 0.259 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & -0.453 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.707 & -0.37 & 0.707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.866 & -0.262 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.966 & -0.136 & 0.966 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.524 \\ -0.524 \\ -0.524 \\ -0.524 \\ -0.524 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Czy rozwiązanie tak skonstruowanego układu równań da przybliżenie wartości szukanej funkcji w punktach siatki? – To ciekawe pytanie. Teraz zauważmy jedynie, że w każdym równaniu występują co najwyżej trzy niezerowe współczynniki niezależnie od wartości N. A więc, przy odpowiednio dużych N, w macierzy głównej układu jest wiele elementów zerowych a stosunkowo mało niezerowych.

Macierze rzadkie

Jeśli wiele elementów macierzy to zera, a stosunkowo niewiele elementów jest od zera różnych, to takie macierze nazywamy rzadkimi (ang. sparse). Dla macierzy rzadkich mamy zarówno możliwość optymalizacji użycia pamięci jak i czasu działania algorytmów.

Elementy macierzy możemy zapamiętywać tylko wtedy, gdy są różne od zera. Można to zrobić na wiele sposobów, przykładowe metody zapamiętania macierzy rzadkiej:

DS1: słownik (ang. map), w którym kluczem jest para (r, c) opisująca numer wiersza (ang. row) i kolumny (ang. column) a wartością jest wartość elementu;

DS2: lista (lub tablica), w której każdy element opisuje jeden wiersz macierzy, przy czym wiersz macierzy może być kolejną listą lub słownikiem;

DS3: lista (lub tablica), w której każdy element opisuje jedną kolumnę macierzy, przy czym kolumna macierzy może być kolejną listą lub słownikiem;

DS4: inne wybrane, w tym połączenia powyższych metod.

Istnieją też biblioteki, gdzie macierze rzadkie są już zaimplementowane wraz z popularnymi algorytmami, które na nich operują.

Zagadnienia brzegowe dla równania różniczkowego drugiego rzędu

Teraz rozważymy przykład, gdzie w równaniu występuje również pochodna drugiego rzędu.

Przykład 2. *Szukana jest funkcja rzeczywista* $z : [1, e] \mapsto \mathcal{R}$ *spełniająca równanie*

$$z''(t) + \frac{z'(t)}{t} = \frac{1}{t^2} \tag{2}$$

z warunkiem brzegowym: $z(1) = 0$, $z(e) = 1/2$.

Można zauważyć, że rozwiązaniem tego równania jest funkcja $\bar{z}(t) = \ln^2(t)/2$. Istotnie, warunki brzegowe są spełnione. Ponadto wiedząc że $\bar{z}'(t) = \ln(t)/t$, a $\bar{z}'' = (1 - \ln(t))/t^2$ po wstawieniu tej funkcji do równania otrzymujemy tożsamość:

$$\frac{1 - \ln(t)}{t^2} + \frac{\ln(t)}{t^2} = \frac{1}{t^2}.$$

Rozwiązanie numeryczne

Wprowadźmy siatkę jednostajną $\{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ z krokiem h. Ponownie funkcja spełniająca równanie musi spełniać równanie w każdym punkcie siatki. Zastosujmy przybliżenie pochodnej w punkcie siatki tak jak w Przykładzie 1 a drugą pochodną w punkcie t_k przybliżmy ilorazem:

$$\bar{z}''(t_k) \approx \frac{\bar{z}(t_{k+1}) - 2\bar{z}(t_k) + \bar{z}(t_{k-1})}{h^2}.$$

W naszym przykładzie dla $N = 6$ po zaokrągleniu elementów macierzy do 3 miejsc po przecinku otrzymamy następujący układ równań (https://ideone.com/GCgwhh):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.889 & -2 & 1.111 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.909 & -2 & 1.091 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.923 & -2 & 1.077 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.933 & -2 & 1.067 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.941 & -2 & 1.059 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.05 \\ 0.033 \\ 0.024 \\ 0.018 \\ 0.014 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Funkcje wielu zmiennych

Jeśli równanie funkcyjne zawiera pochodne cząstkowe rzędu nie większego niż k, to równanie takie nazywamy *równaniem różniczkowym cząstkowym* rzędu k (ang. partial differential equation).

Równanie Laplace'a

Dla funkcji rzeczywistej wielu zmiennych $z : \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^k \mapsto \mathcal{R}$ równanie Laplace'a ma postać:

$$\Delta z(x) = 0,$$

gdzie Δ to operator Laplace'a (laplasjan), który oznacza sumę wszystkich czystych pochodnych cząstkowych drugiego rzędu funkcji z.

Przykład 3. *Funkcja rzeczywista $z(x, y) = x^2 - y^2$ spełnia równanie Laplace'a, które dla funkcji rzeczywistej dwóch zmiennych przyjmuje postać:*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \tag{3}$$

Spróbujmy odtworzyć tę funkcję numerycznie na pewnym określonym obszarze, dokładając warunek brzegowy. Niech tym obszarem będzie trójkąt o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$.

Niech siatką będzie zbiór $\{(hi, hj) : i, j \geqslant 0, i + j \leqslant N\}$, gdzie $h = 1/N$. Przyjmujemy, że wartości szukanej funkcji dla elementów siatki leżących na brzegu obszaru (na bokach trójkąta) mają znane wartości:

$$\begin{aligned} z(0, hi) &= -(hi)^2, \\ z(hi, 0) &= (hi)^2, \\ z(hi, h(N - i)) &= 2hi - 1. \end{aligned}$$

Tak jak poprzednio wartości pochodnych cząstkowych zastępujemy ilorazami różnicowymi:

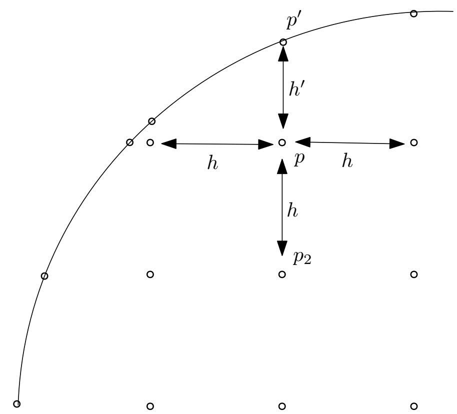
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x^2}(hi, hj) &\approx \frac{\bar{z}(h(i+1), hj) - 2\bar{z}(hi, hj) + \bar{z}(h(i-1), hj)}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial y^2}(hi, hj) &\approx \frac{\bar{z}(hi, h(j+1)) - 2\bar{z}(hi, hj) + \bar{z}(hi, h(j-1))}{h^2}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że aby efektywnie zbudować układ równań, musimy ponumerować punkty siatki, tak aby każdemu numerowi odpowiadała zmienna, której wartość przybliża wartość funkcji w tym punkcie. Program, który buduje układ równań według tego opisu, jest dostępny tutaj: https://ideone.com/m6HCQU. Problem związany z numerowaniem elementów siatki w obszarze trójkątnym został rozwiązany przy pomocy dwóch słowników, z których jeden łączy numer zmiennej z indeksami punktu w siatce, a w drugim odwrotnie: kluczem jest para indeksów, a wartością numer zmiennej.

Obszar opisany krzywą*

W poprzednim przykładzie mieliśmy nieco ułatwione zadanie, gdyż wszystkie punkty siatki albo leżały na brzegu obszaru, albo miały za sąsiadów inne punkty siatki. Może się jednak zdarzyć, że nie da się wprowadzić siatki jednostajnej w taki sposób. Rozważmy tę samą funkcję co w przykładzie 3, ale określoną na kole jednostkowym o środku w punkcie $(0, 0)$.

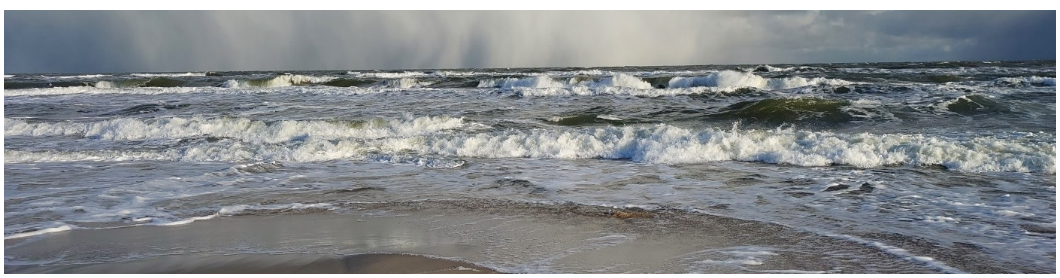
Przykład 4. *Funkcja rzeczywista $z(x, y) = x^2 - y^2$ jest określona na kole jednostkowym o środku w punkcie $(0, 0)$. Brzegiem jest zatem okrąg jednostkowy, a warunek brzegowy jest określony dla punktów (x, y) dla których $x^2 + y^2 = 1$.*



Podobnie jak poprzednio zakładamy, że znamy wartość funkcji na brzegu obszaru (czyli tutaj na okręgu), ustalamy krok siatki $h = 2/N$, co pozwala równo podzielić odcinki leżące na osiach układu i ustalić siatkę jednostajną wewnątrz okręgu. Punkty brzegowe dopasowujemy do tego podziału jak na rysunku powyżej. Ponieważ blisko brzegu obszaru siatka nie jest jednostajna, to dopasowujemy do tej sytuacji przybliżenia drugiej pochodnej cząstkowej. Przykładowo dla punktu p, którego sąsiadem na brzegu jest p' a sąsiadem na dole jest punkt p_2 bierzemy[2]:

$$\frac{\partial^2 \bar{z}(p)}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h}\left(\frac{\partial \bar{z}(p)}{\partial y} - \frac{\partial \bar{z}(p_2)}{\partial y}\right) \approx \frac{1}{h}\left(\frac{\bar{z}(p') - \bar{z}(p)}{h'} - \frac{\bar{z}(p) - \bar{z}(p_2)}{h}\right).$$

Fale na morzu

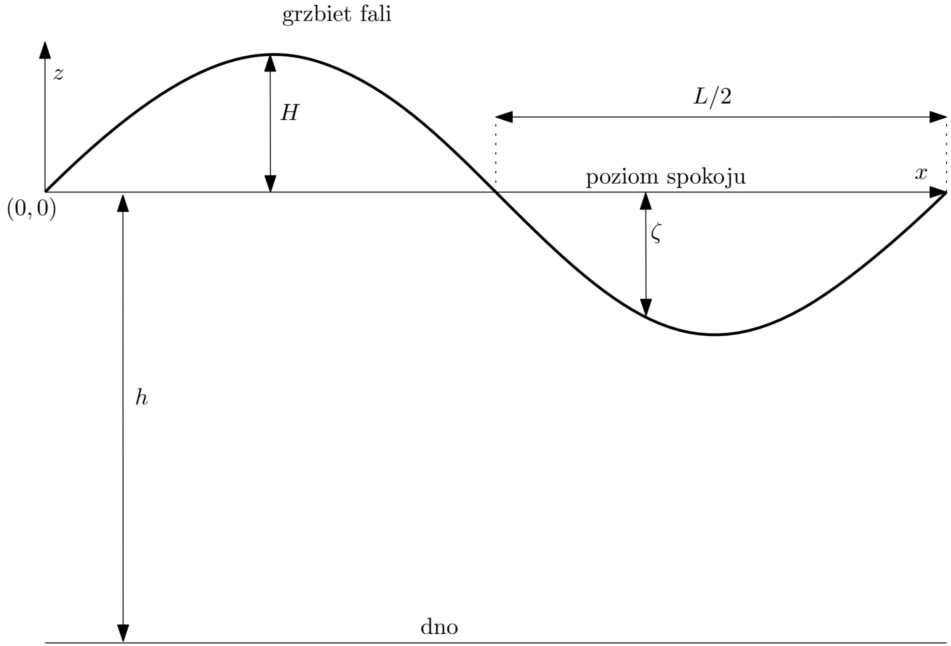


Powstawanie fal na powierzchni morza ma różne przyczyny, a samo zjawisko jest trudne do modelowania. Dlatego też na potrzeby tego zadania przyjmiemy szereg uproszczeń.

Fale na powierzchni morza o stałej głębokości według teorii małej amplitudy [2]

Założymy, że ruch elementów płynu jest niewirowy, co umożliwia wprowadzenie funkcji potencjału prędkości pojedynczej cząstki płynu $\phi(x, z, t)$ w przekroju płaszczyzną prostopadłą do kierunku rozchodzenia się fali.

[2]Więcej na temat postępowania w przypadku nieregularnych obszarów wraz z dokładniejszym wyjaśnieniem można znaleźć w [1], podpunkt "Aproksymacja różnicowa zagadnienia Dirichleta".



Ponadto założymy, że falowanie jest jednorodne (przekrój powierzchni styku pomiędzy wodą a powietrzem tworzy sinusoidę) i nie zanika (falowanie jest okresowe). Woda ma stałą głębokość ($h = \text{const.}$), wysokość fal jest mała w stosunku do głębokości ($H/h \ll 1$), oraz w stosunku do ich długości ($H \ll L$).

W każdej chwili czasu, funkcja potencjału spełnia warunek Laplace'a dla wymiarów przestrzennych:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \tag{4}$$

Na powierzchni (dla $z = 0$) spełniony jest warunek:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

Zakładamy również, że dno jest nieprzepuszczalne, czyli dla $z = -h$ mamy:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

Ten ostatni warunek interpretujemy jako zerową prędkość pionową płynu przy dnie.

Rozwiązaniem tego zagadnienia jest funkcja:

$$\phi(x, z, t) = \frac{gH}{2\omega}\frac{\cosh(k(z + h))}{\cosh(kh)}\sin(kx - \omega t), \tag{7}$$

gdzie liczba falowa $k = 2\pi/L$, częstotliwość kołowa $\omega = 2\pi/T$ a g to przyspieszenie ziemskie.

Zadanie

Z1: Proszę zaimplementować metodę eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego (obowiązkowe).

Z2: Proszę zbudować układ równań liniowych w zależności od zadanego parametru N opisujący funkcję $\phi(x, z, t)$ zgodnie z opisem powyżej i go rozwiązać (obowiązkowe).

Z3: W implementacji proszę uwzględnić, że macierze występujące w zadaniu są macierzami rzadkimi i zapamiętywać wyłącznie elementy niezerowe (+20% – nieobowiązkowe).

Z4: Proszę porównać swoją implementację rozwiązywania układu równań z gotową implementacją biblioteczną (+10% – nieobowiązkowe).

Z5: Proszę przygotować animację pokazującą w jaki sposób porusza się płyn według obliczonej funkcji potencjału (+10% – nieobowiązkowe).

Z6*: Proszę rozwiązać zadanie bez założenia $H \ll h$ (+10% – nieobowiązkowe). Tutaj sytuacja się nieco komplikuje, gdyż nie możemy korzystać z warunku 5. Zamiast tego mamy dwa inne warunki:

1. *Warunek dynamiczny* wyrażający założenie, że napięcie powierzchniowe jest pomijalnie małe i zmiany ciśnienia powietrza są nieistotne ze względu na znacznie mniejszą jego gęstość w porównaniu do wody. Zatem ciśnienie powietrza tuż nad powierzchnią wody i ciśnienie wody tuż przy powierzchni są sobie równe:
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\zeta(x, t) = 0. \tag{8}$$
2. *Warunek kinematyczny*, który interpretujemy w taki sposób, że cząstka płynu, która znajduje się na powierzchni, już na niej pozostanie (oczywiście będzie się poruszać wskutek ruchu falowego, lecz będzie wracać na powierzchnię po zatoczeniu koła lub elipsy; nie powędruje w głąb kolumny wody):
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \tag{9}$$

W powyższych wzorach nie przyjmujemy warunku brzegowego $z = 0$. Zamiast tego uwzględniamy, że powierzchnia wody ma nieregularny kształt opisany funkcją $\zeta(x, t)$, patrz przykład 4.

Sprawozdanie

W sprawozdaniu proszę przedstawić argumenty za poprawnością wykonanej implementacji rozwiązywania układu równań, a dla otrzymanej funkcji potencjału porównać otrzymane rozwiązanie ze znanym rozwiązaniem analitycznym.

Ocena

Poprawnie wykonany projekt w wersji obowiązkowej (Z1 + Z2) jest wart 80% punktów. Można otrzymać ponad 100.

Praca zespołowa

Zadanie można wykonać w zespole dwu- lub trzyosobowym. W takim przypadku proszę dokładnie oznaczyć, jaki był zakres pracy członków zespołu. W oddaniu projektu musi uczestniczyć cały zespół.

Wskazówki

W1: Zadanie łączy w sobie kilka elementów, z których każdy może sprawiać trudność. Sugeruję w miarę możliwości traktować je osobno.

W2: Poprawna budowa układu równań będzie łatwiejsza po analizie przykładów podanych we wprowadzeniu. Sugeruję zapoznać się z nimi i odtworzyć samodzielnie rozwiązanie.

Literatura

[1] Z. Fortuna, B. Macukow, J.Wąsowski, *Metody numeryczne*, WNT, Warszawa 2002.

[2] Stanisław R. Massel, *Procesy hydrodynamiczne w ekosystemach morskich*, WUG, Gdańsk, 2010.