Análise no $\mathbb{R}^n$ II
Definições e teoremas

2º quadrimestre - 2023

Yuri Alexandre Aoto

Definição 1. *Um* intervalo compacto *em* $\mathbb{R}^n$ *é um conjunto do tipo:*

$$\begin{aligned} I =& I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \\ =& [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ =& \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in I_i\} \ , \end{aligned} \tag{1}$$

onde cada $I_i = [a_i, b_i]$ *(*$a_i, b_i \in \mathbb{R}$*) é um intervalo real.*

Observação 2. *A definição acima se estende naturalmente para intervalos abertos, semi-abertos e não-limitados.*

Definição 3. *A medida (n-dimensional) do intervalo compacto* $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$*, onde* $I_i = [a_i, b_i]$ *(*$a_i, b_i \in \mathbb{R}$*), é*

$$\begin{aligned} \mu(I) =& \mu(I_1)\mu(I_2)\cdots\mu(I_n) \\ =& (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n) \, . \end{aligned} \tag{2}$$

Definição 4. *a) Uma partição do intervalo* $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *é um conjunto finito* $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ *tal que*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\,. \tag{3}$$

b) Uma partição do intervalo $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ *é o produto cartesiano*

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \times \cdots \times \mathcal{P}_n\,, \tag{4}$$

onde cada $\mathcal{P}_i = \{x_{0_i}, x_{1_i}, \cdots, x_{m_i}\}$ *é uma partição de* I_i.

Observação 5. *a) O conjunto de todas as partições do intervalo* $I \subset \mathbb{R}^n$ *é representado por* $\mathfrak{p}(I)$*;*

b) Se $\mathcal{P}$ *e* $\mathcal{P}'$ *são partições de* I *tais que* $\mathcal{P}' \supseteq \mathcal{P}$*, dizemos que* $\mathcal{P}'$ *é uma partição* mais fina *que (ou um* refinamento *de)* $\mathcal{P}$*;*

c) Se $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ *é uma partição do intervalo* $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$*, essa partição divide* I *em* $k = m_1 m_2 \cdots m_n$ *subintervalos de* $\mathbb{R}^n$*, onde* m_i *é o número de pontos na partição* $\mathcal{P}_i = \{x_{0_i}, x_{1_i}, \cdots, x_{m_i}\}$*. Cada um desses subintervalos é do tipo:*

$$\mathcal{I}_\alpha = [x_{j_1-1}, x_{j_1}] \times [x_{j_2-1}, x_{j_2}] \times \cdots \times [x_{j_n-1}, x_{j_n}]\,, \tag{5}$$

onde $\alpha \in \{1, ..., k\}$ *para alguma ordem dos multi-índices* $\{j_1\, j_2 \ldots j_n\}$*.*

Definição 6. *Sejam $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ função limitada. Se $\mathcal{P}$ é uma partição de I, sejam $\mathcal{I}_\alpha$ os k subintervalos correspondentes (como na Observação 5). Se, para cada α, tomamos $x_\alpha \in \mathcal{I}_\alpha$, o número real*

$$\mathcal{S}(\mathcal{P}, f) = \sum_{\alpha=1}^{k} f(x_\alpha)\mu(\mathcal{I}_\alpha)\,, \tag{6}$$

é uma soma de Riemann *para f com relação à partição $\mathcal{P}$. Além disso, se considerarmos*

$$m_\alpha(f) = \inf\{f(x) : x \in \mathcal{I}_\alpha\} \tag{7}$$

e

$$M_\alpha(f) = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{I}_\alpha\}\,, \tag{8}$$

os seguintes números são chamados de somas de Riemann inferior e superior, *respectivamente:*

$$s(\mathcal{P}, f) = \sum_{\alpha=1}^{k} m_\alpha(f)\mu(\mathcal{I}_\alpha) \tag{9}$$

$$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{\alpha=1}^{k} M_\alpha(f)\mu(\mathcal{I}_\alpha)\,. \tag{10}$$

Definição 7 (Função integrável por Riemann)**.** *Sejam $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ função limitada. Dizemos que f é* integrável por Riemann *(ou que é* Riemann-integrável*) se existe $A \in \mathbb{R}$ tal que, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\mathcal{P}_\varepsilon \in \mathfrak{p}(I)$ tal que se $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_\varepsilon$, teremos*

$$|\mathcal{S}(\mathcal{P}, f) - A| < \varepsilon\,, \tag{11}$$

para qualquer soma de Riemann $\mathcal{S}(\mathcal{P}, f)$.

Observação 8. *Usamos as possíveis notações para o valor A da Definição 7:*

$$\begin{aligned} A &= \int_I f \\ &= \int_I f(x)dx \\ &= \int_I f(x_1, x_2, \ldots, x_n)d(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= \int_I f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2 \ldots dx_n \end{aligned} \tag{12}$$

Observação 9. *O conjunto de todas as funções integráveis por Riemann definidas no interválo I será denotado por $\mathfrak{R}(I)$.*

Definição 10. *Sejam* $I \subset \mathbb{R}^n$ *intervalo compacto e* $f : I \to \mathbb{R}$ *função limitada. Os números*

$$\underline{\int}_I f = \sup\{s(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P} \in \mathfrak{p}(I)\} \tag{13}$$

e

$$\overline{\int}_I f = \inf\{S(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P} \in \mathfrak{p}(I)\}\,, \tag{14}$$

são chamados de integrais inferior e superior*, respectivamente, da função f.*

Observação 11. *Notações análogas às descritas na Observação 8 valem para as ingrais superior e inferior.*

Definição 12 (Condição de Riemann)**.** *Sejam* $I \subset \mathbb{R}^n$ *intervalo compacto e* $f : I \to \mathbb{R}$ *função limitada. Dizemos que* f *satisfaz a* condição de Riemann *em* I *se, para qualquer* $\varepsilon > 0$*, existe* $\mathcal{P}_\varepsilon \in \mathfrak{p}(I)$ *tal que se* $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_\varepsilon$ *então*

$$S(\mathcal{P}, f) - s(\mathcal{P}, f) < \varepsilon\,. \tag{15}$$

Teorema 13. *Sejam $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ função limitada. As seguintes condições são equivalentes:*

i) *f satisfaz a condição de Riemann em I;*

ii) $\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$;

iii) $f \in \mathfrak{R}(I)$.

Definição 14 (Conjuntos com medida zero)**.** *Dizemos que um conjunto $T \subset \mathbb{R}^n$ tem* medida n-dimensional zero *(ou simplesmente* medida zero*, ou ainda* medida nula*) se, para qualquer $\varepsilon > 0$, T pode ser coberto com uma coleção enumerável de intervalos abertos de dimensão n, cujas medidas somem um valor menor que ε:*

$$\forall \, \varepsilon > 0 \, , \quad \exists \, \{I_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ com } T \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad : \quad \sum_{i=0}^{\infty} \mu(I_k) < \varepsilon \, .$$

Teorema 15. *Dada uma coleção enumerável de conjuntos, $\{T_1, T_2, \dots\}$, cada um com medida zero, então a sua união, $\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$, possui medida zero. Isto é, a união enumerável de conjuntos de medida zero possui medida zero.*

Definição 16. *Sejam $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ função limitada.*

a) Dado $T \subseteq I$, o número

$$\Omega_f(T) = \sup\{f(x) - f(y) : x \in T, y \in T\} \tag{16}$$

é a oscilação *de f em T;*

b) Dado $x \in I$, o número[1]

$$\omega_f(x) = \lim_{h \to 0+} \Omega_f(B(x, h) \cap I) \tag{17}$$

é a oscilação *de f em x.*

Teorema 17. *Sejam $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto, $f : I \to \mathbb{R}$ função limitada, e $\varepsilon > 0$. Suponha que $\omega_f(x) < \varepsilon$ para todo $x \in I$. Então, existe $\delta > 0$ (que depende apenas de ε), tal que para cada subintervalo fechado $T \subset I$ com lado máximo menor que δ tem-se $\Omega_f(T) < \varepsilon$.*

Teorema 18. *Sejam $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ função limitada. Para cada $\varepsilon > 0$, o conjunto*

$$D_\varepsilon = \{x \in I : \omega_f(x) \geq \varepsilon\} \tag{18}$$

é fechado.

[1] $B(x, h) = \{y \in \mathbb{R}^n : ||x - y|| < h\}$ é a bola aberta de centro x e raio h.

Teorema 19. *Sejam $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ função limitada. Seja D o subconjunto de I onde f é descontínua. Então, f é integrável por Riemann se, e somente se, D tem medida zero.*

Teorema 20 (Integração repetida)**.** *Sejam $I_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $I_2 \subset \mathbb{R}^m$ intervalos compactos e*

$$\begin{aligned} f : I = I_1 \times I_2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

função limitada. Então

$$\underline{\int}_I f(x,y)d(x,y) \le \underline{\int}_{I_1} \left[\underline{\int}_{I_2} f(x,y)dy \right] dx \le \overline{\int}_{I_1} \left[\underline{\int}_{I_2} f(x,y)dy \right] dx \le \overline{\int}_I f(x,y)d(x,y)\,, \tag{19}$$

e

$$\underline{\int}_I f(x,y)d(x,y) \le \underline{\int}_{I_1} \left[\overline{\int}_{I_2} f(x,y)dy \right] dx \le \overline{\int}_{I_1} \left[\overline{\int}_{I_2} f(x,y)dy \right] dx \le \overline{\int}_I f(x,y)d(x,y)\,. \tag{20}$$

Se f for integrável em I, então as seguintes funções são integráveis:

$$\begin{aligned} \phi : I_1 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \underline{\int}_{I_2} f(x,y)dy \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi : I_1 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \overline{\int}_{I_2} f(x,y)dy \end{aligned}\,.$$

E vale:

$$\int_I f(x,y)d(x,y) = \int_{I_1} \phi(x)dx = \int_{I_1} \psi(x)dx\,, \tag{21}$$

isto é:

$$\int_I f(x,y)d(x,y) = \int_{I_1} \left[\underline{\int}_{I_2} f(x,y)dy \right] dx = \int_{I_1} \left[\overline{\int}_{I_2} f(x,y)dy \right] dx\,. \tag{22}$$

Valem também os resultados análogos para a integração primeiro em I_1. Finalmente, se f for contínua em I:

$$\int_I f(x,y)d(x,y) = \int_{I_1} \left[\int_{I_2} f(x,y)dy \right] dx = \int_{I_2} \left[\int_{I_1} f(x,y)dx \right] dy\,. \tag{23}$$

Definição 21. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Seja I um intervalo compacto de $\mathbb{R}^n$ tal que $A \subset \operatorname{int}(I)$ e defina:*

$$\begin{aligned} \tilde{f} : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} . \end{aligned}$$

Então, definimos as integrais inferior e superior *de f por:*

$$\underline{\int}_A f = \underline{\int}_I \tilde{f} \quad e \quad \overline{\int}_A f = \overline{\int}_I \tilde{f}\,. \tag{24}$$

respectivamente. Se $\underline{\int}_A f = \overline{\int}_A f$, diremos que f é integrável por Riemann *e chamamos esse valor comum de* integral *da função f, denotado por $\int_A f$.*

Observação 22. *a) Essa definição não depende da escolha de I;*

b) Se f for integrável então

$$\int_A f = \int_I \tilde{f}\,. \tag{25}$$

Definição 23. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado. Os* conteúdos interno e externo *de A são definidos por*

$$\underline{c}(A) = \underline{\int}_A 1 = \underline{\int}_I \chi_A \quad e \quad \overline{c}(A) = \overline{\int}_A 1 = \overline{\int}_I \chi_A\,, \tag{26}$$

onde I é um intervalo cujo interior contém A e χ_A é função característica *do conjunto A, definida por*

$$\begin{aligned} \chi_A : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} . \end{aligned}$$

Definição 24 (Conjunto J-mensurável e conteúdo de Jordan)**.** *Um conjunto limitado $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito ser* J-mensurável *se $\overline{c}(A) = \underline{c}(A)$. O valor comum $c(A) = \overline{c}(A) = \underline{c}(A)$ é chamado de* conteúdo de Jordan *de A.*

Teorema 25. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado. Então A é J-mensurável se e somente se a fronteira de A tem medida nula.*

Teorema 26. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto J-mensurável. Então $f : A \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, o conjunto $D = \{x \in A \subset \mathbb{R}^n : f \text{ não é contínua em } x\}$ tem medida nula.*

Observação 27.

a) Em geral não nos importaremos em integrar funções que não estejam definidas em um conjunto J-mensurável;

b) Se A é J-mensurável, denotaremos por $\mathfrak{R}(A)$ o conjunto das funções definidas em A que são integráveis por Riemann.

Definição 28. *Seja* $A \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto J-mensurável. Uma coleção finita* $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha=1}^k$ *de conjuntos J-mensuráveis é dita ser uma* decomposição *de* A *se:*

a) $A = \bigcup_{\alpha=1}^k \mathcal{A}_\alpha$*,*

b) $\mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{A}_\beta \subset \partial\mathcal{A}_\alpha \cup \partial\mathcal{A}_\beta$ *quando* $\alpha \neq \beta$*.*

Além disso, se $\mathcal{D} = \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha=1}^k$ *é uma decomposição de* A*, chamamos de* norma *de* $\mathcal{D}$ *o número* $|\mathcal{D}| = \max_\alpha\{\mathrm{diam}(\mathcal{A}_\alpha)\}$*, onde* $\mathrm{diam}(X) = \sup\{||x-y|| : x, y \in X\}$ *é o* diâmetro *do conjunto* X*.*

Definição 29. *Sejam* $A \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto J-mensurável,* $\mathcal{D}(A)$ *o conjunto de todas as decomposições de* A*, e*

$$\begin{aligned} X : \mathcal{D}(A) &\to \mathbb{R} \\ \mathcal{D} &\mapsto X(\mathcal{D}) \end{aligned}$$

uma função real definida em $\mathcal{D}(A)$*. Chamamos de* o limite de X quando $|\mathcal{D}|$ tende a zero*, indicado por*

$$\lim_{|\mathcal{D}| \to 0} X(\mathcal{D}) \, ,$$

o número $a \in \mathbb{R}$ *(se existir) tal que, dado qualquer* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que se* $|\mathcal{D}| < \delta$*, então* $|a - X(\mathcal{D})| < \varepsilon$*.*

Definição 30. *Sejam* $A \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto J-mensurável e* $\mathcal{D} = \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha=1}^k$ *uma decomposição de* A*. Se, para cada* α*, tomamos* $x_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$*, o número real*

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}, f) = \sum_{\alpha=1}^{k} f(x_\alpha) c(\mathcal{A}_\alpha) \, , \tag{27}$$

é uma soma de Riemann *para* f *com relação à decomposição* $\mathcal{D}$*. Além disso, se considerarmos*

$$m_\alpha(f) = \inf\{f(x) : x \in \mathcal{A}_\alpha\} \tag{28}$$

e

$$M_\alpha(f) = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{A}_\alpha\} \, , \tag{29}$$

os seguintes números são chamadas de somas de Riemann inferior e superior*, respectivamente:*

$$s(\mathcal{D}, f) = \sum_{\alpha=1}^{k} m_\alpha(f) c(\mathcal{A}_\alpha) \tag{30}$$

$$S(\mathcal{D}, f) = \sum_{\alpha=1}^{k} M_\alpha(f) c(\mathcal{A}_\alpha) \, . \tag{31}$$

Teorema 31. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto J-mensurável e $f : A \to \mathbb{R}$ função limitada. Então*

$$\underline{\int_A} f = \lim_{|\mathcal{D}| \to 0} s(\mathcal{D}, f) = \sup\{s(\mathcal{D}, f) : \mathcal{D} \in \mathcal{D}(A)\} \tag{32}$$

e

$$\overline{\int_A} f = \lim_{|\mathcal{D}| \to 0} S(\mathcal{D}, f) = \inf\{S(\mathcal{D}, f) : \mathcal{D} \in \mathcal{D}(A)\}\,. \tag{33}$$

Além disso, f é integrável se, se somente se, $\lim_{|\mathcal{D}| \to 0} \mathcal{S}(\mathcal{D}, f)$ existe, e então

$$\int_A f = \lim_{|\mathcal{D}| \to 0} \mathcal{S}(\mathcal{D}, f)\,. \tag{34}$$

Teorema 32. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto J-mensurável e suponha que $A = A_1 \cup A_2$, onde A_1 e A_2 são conjuntos J-mensuráveis de modo que A_1 e A_2 não tenham pontos interiores em comum. Então, $f : A \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, $f|_{A_1}$ e $f|_{A_2}$ são integráveis, com*

$$\int_A f = \int_{A_1} f|_{A_1} + \int_{A_2} f|_{A_2}\,. \tag{35}$$

Observação 33. *Em geral, simplificamos a notação por $\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f$.*

Lema 34 (Usado na demonstração dos teoremas anteriores)**.** *Sejam $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos J-mensuárveis, com $c(Y) = 0$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\mathcal{D}$ é uma decomposição de X com $|\mathcal{D}| < \delta$, então a soma dos conteúdos dos conjuntos $\mathcal{A}_\alpha \in \mathcal{D}$ tais que $d(\mathcal{A}_\alpha, Y) < \delta$ é menor que ε:*

$$\sum_{\substack{\alpha: \\ d(\mathcal{A}_\alpha, Y) < \delta}} c(\mathcal{A}_\alpha) < \varepsilon \tag{36}$$

Teorema 35 (Teorema do valor médio para integrais múltiplas)**.** *Sejam* $A \subset \mathbb{R}^n$ *conjunto J-mensurável,* $f : A \to \mathbb{R}$ *e* $g : A \to \mathbb{R}$ *funções integráveis em* A*, com* $g(x) > 0\ \forall x \in A$*. Sejam também* $m = \inf f(A)$ *e* $M = \sup f(A)$*. Então existe* $\lambda \in [m, M]$ *tal que*

$$\int_A fg = \lambda \int_A g\,. \tag{37}$$

Além disso, se A *for conexo e* f *for contínua, existe* $\tilde{x} \in A$ *tal que:*

$$\int_A fg = f(\tilde{x}) \int_A g\,. \tag{38}$$

Em particular, tomando $g(x) = 1$,

$$mc(A) \leq \int_A f \leq Mc(A)\,, \tag{39}$$

existe $\lambda \in [m, M]$ *tal que*

$$\int_A f = \lambda c(A)\,, \tag{40}$$

e, se A *for conexo e* f *for contínua, existe* $\tilde{x} \in A$ *tal que:*

$$\int_A f = f(\tilde{x}) c(A)\,. \tag{41}$$

Definição 36. *Seja* $\mathcal{V}$ *um espaço vetorial de dimensão* n *sobre* $\mathbb{R}$ *e denotemos* $\overbrace{\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}}^{k \text{ vezes}}$ *por* $\mathcal{V}^k$. *Uma função* $T : \mathcal{V}^k \to \mathbb{R}$ *é dita ser* multilinear *se*

$$T(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_k) = T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + T(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_k) \tag{42}$$

e

$$T(v_1, \ldots, \alpha v_i, \ldots, v_k) = \alpha T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) \tag{43}$$

para quaisquer $v_i, v_i' \in \mathcal{V}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $1 \leq i \leq k$. *Uma tal função multilinear é chamada de* tensor *de ordem* k, *ou um* k-tensor. *O conjunto de todos os* k*-tensores é denotado por* $\mathcal{T}^k(\mathcal{V})$.

Definição 37. *Sejam* $\mathcal{V}$ *um espaço vetorial de dimensão* n *sobre* $\mathbb{R}$, $S \in \mathcal{T}^k(\mathcal{V})$ *e* $T \in \mathcal{T}^l(\mathcal{V})$. *Definimos o* produto tensorial *entre* S *e* T *como sendo o elemento* $S \otimes T \in \mathcal{T}^{k+l}(\mathcal{V})$ *tal que:*

$$(S \otimes T)(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = S(v_1, \ldots, v_k) T(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}). \tag{44}$$

Teorema 38. *Seja* $\mathcal{V}$ *um espaço vetorial de dimensão* n *sobre* $\mathbb{R}$. *Então* $\mathcal{T}^k(\mathcal{V})$ *é um espaço vetorial com as operações*

$$(T_1 + T_2)(v_1, \ldots, v_k) = T_1(v_1, \ldots, v_k) + T_2(v_1, \ldots, v_k) \tag{45}$$

e

$$(\alpha T)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(T(v_1, \ldots, v_k)). \tag{46}$$

Além disso, o produto tensorial satisfaz:

$$(S_1 + S_2) \otimes T = S_1 \otimes T + S_2 \otimes T \tag{47}$$

$$S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2 \tag{48}$$

$$(\alpha S) \otimes T = S \otimes (\alpha T) = \alpha(T \otimes S) \tag{49}$$

$$(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U) \tag{50}$$

Teorema 39. *Sejam* $\mathcal{V}$ *um espaço vetorial de dimensão* n *sobre* $\mathbb{R}$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *uma base de* $\mathcal{V}$ *e* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *a sua base dual. Então, o conjunto de todos os tensores formados por produtos de* k *elementos da base dual:*

$$\left\{\varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_k}\right\}_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} \tag{51}$$

é uma base para $\mathcal{T}^k(\mathcal{V})$ *que então tem dimensão* n^k

Definição 40. *Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$. Um k-tensor $\omega \in \mathcal{T}^k(\mathcal{V})$ é dito ser alternante se*

$$\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)\,, \tag{52}$$

para quaisquer $v_i \in \mathcal{V}$. Um k-tensor alternante é dito ser um k-vetor *O conjunto de todos os k-vetores é denotador por $\bigwedge^k(\mathcal{V})$.*

Teorema 41. *Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$. $\bigwedge^k(\mathcal{V})$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{T}^k(\mathcal{V})$.*

Definição 42. *Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$. Definimos o* alternador, Alt*, por*

$$(\mathrm{Alt}(T))(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\,, \tag{53}$$

onde S_k é o conjunto das permutações de $\{1, \ldots, k\}$ e $\mathrm{sgn}(\sigma)$ é o sinal da permutação σ: $+1$ para permutação par e -1 para permutação ímpar.

Teorema 43. *Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$. Então*

a) Se $T \in \mathcal{T}^k(\mathcal{V})$, então $\mathrm{Alt}(T) \in \bigwedge^k(\mathcal{V})$;

b) Se $\omega \in \bigwedge^k(\mathcal{V})$, então $\mathrm{Alt}(\omega) = \omega$;

c) Se $T \in \mathcal{T}^k(\mathcal{V})$, então $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(T)) = \mathrm{Alt}(T)$

Definição 44. *Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$, $\omega \in \bigwedge^k(\mathcal{V})$ e $\eta \in \bigwedge^l(\mathcal{V})$. Definimos o* produto exterior *entre ω e η, $\omega \wedge \eta \in \bigwedge^{k+l}(\mathcal{V})$, por:*

$$(\omega \wedge \eta) = \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta) \tag{54}$$

Teorema 45 (Propriedades do produto exterior)**.** *Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$. Então:*

$$(\omega_1 + \omega_1) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta \tag{55}$$

$$\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2 \tag{56}$$

$$(\alpha\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (\alpha\eta) = \alpha(\eta \wedge \omega) \tag{57}$$

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega \tag{58}$$

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) \tag{59}$$

Teorema 46. *Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathcal{V}$ e $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ a sua base dual. Então, o conjunto de todos os k-vetores formados por produtos exteriores, com índices em ordem estritamente crescente, de k elementos da base dual:*

$$\{\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \tag{60}$$

é uma base para $\bigwedge^k(\mathcal{V})$, que então tem dimensão $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Teorema 47. *Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathcal{V}$ e $\omega \in \bigwedge^k(\mathcal{V})$. Se $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, são n vetores de $\mathcal{V}$, então:*

$$\omega(w_1, \ldots, w_n) = \det(a_{ij}) \omega(v_1, \ldots, v_n)\,. \tag{61}$$

Definição 48 (Pullback para tensores)**.** *Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma transformação linear. Definimos*

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{T}^k(\mathcal{W}) &\to \mathcal{T}^k(\mathcal{V}) \\ T &\mapsto f^*T \quad \textit{tal que} \quad f^*T(v_1, \ldots, v_k) = T(f(v_1), \ldots, f(v_k)) \end{aligned}, \tag{62}$$

e chamamos f^*T de o pullback *de T por f.*

Teorema 49. *Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma transformação linear. Então f^* é uma transformação linear e valem:*

$$f^*(S \otimes T) = (f^*S) \otimes (f^*T) \tag{63}$$

$$f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta) \tag{64}$$

onde $S \in \mathcal{T}^k(\mathcal{W})$, $T \in \mathcal{T}^l(\mathcal{W})$, $\omega \in \bigwedge^k(\mathcal{W})$ e $\eta \in \bigwedge^k(\mathcal{W})$.

Observação 50. *Por comodidade, assumiremos a partir daqui, a menos que dito o contrário, que* função diferenciável *se refere a uma função infinitamente diferenciável.*

Definição 51. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$. Uma k-*forma diferencial *ω em U é uma função definida em U do tipo:*

$$\omega : U \to \coprod_{p \in U} \bigwedge^k T_pU \quad \textit{com} \quad \omega(p) \in \bigwedge^k T_pU\,, \tag{65}$$

onde $\coprod$ denota a união disjunta. O conjunto das k-formas diferenciais em U é denotado por $\Omega^k(U)$.

Observação 52. *Identificamos $\bigwedge^0(\mathcal{V})$ com $\mathbb{R}$ e então $\Omega^0(U) = C^\infty(U, \mathbb{R})$, o conjunto das funções diferenciáveis de U em $\mathbb{R}$.*

Definição 53. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$. Operações de soma entre formas e multiplicação de formas por funções $f : U \to \mathbb{R}$ são definidas em cada ponto de U como as operações correspondentes em $\bigwedge^k T_pU$*

Teorema 54. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$. O conjunto $\Omega^k(U)$ forma um espaço vetorial com as operações de soma e multiplicação por escalar como definidas na Definição 53.*

Observação 55. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a base canônica de T_pU para cada $p \in U$. As formas diferenciais associadas aos elementos da base dual são denotadas por dx^1, dx^2, $\ldots$, dx^n. Em $\mathbb{R}^3$ costumam ser denotadas por dx, dy e dz.*

Teorema 56. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}$ função diferenciável. Então*

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\mathrm{d}x^n\,, \tag{66}$$

onde $\mathrm{d}f = f' \in \Omega^1(U)$ é a diferencial, ou derivada, da função f.

Definição 57 (Pullback para formas)**.** *Sejam $D \subset \mathbb{R}^d$ e $U \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $\phi : D \to U$ uma função diferenciável e $\omega \in \Omega^k(U)$, com $0 \leq k \leq n$. Então, definimos $\phi^*\omega \in \Omega^k(D)$ por:*

$$(\phi^*\omega)(y) = (\mathrm{d}\phi)^*\omega(\phi(y))\,, \tag{67}$$

para cada $y \in D$. Isto é:

$$\begin{aligned}(\phi^*\omega)(y)(v_1, \ldots, v_k) =& [(\mathrm{d}\phi)^*\omega(\phi(y))](v_1, \ldots, v_k) \\ =& \omega(\phi(y))(\mathrm{d}\phi\,(y)(v_1), \ldots, \mathrm{d}\phi\,(y)(v_k))\,,\end{aligned} \tag{68}$$

para cada $y \in D$ e $v_i \in T_yD$. O operador ϕ^* é chamado de o pullback através de *ϕ.*

Teorema 58 (Propriedades do pullback)**.** *Sejam $D \subset \mathbb{R}^d$, $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ abertos, $\phi : D \to U$ e $\psi : U \to V$ funções diferenciáveis, $\omega \in \Omega^k(U)$, $\eta \in \Omega^l(U)$, $g : U \to \mathbb{R}$ função diferenciável. Então:*

a) $\phi^*(dx^i) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j$;

b) $\phi^*(\omega_1 + \omega_2) = \phi^*\omega_1 + \phi^*\omega_2$;

c) $\phi^*(g \cdot \omega) = (g \circ \phi) \cdot \phi^*\omega$;

d) $\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*\omega \wedge \phi^*\eta$;

e) $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.

Teorema 59. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável. Então*

$$\phi^*(h\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n) = (h \circ \phi)(\det \mathrm{d}f)\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \tag{69}$$

Definição 60 (Derivada exterior)**.** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e*

$$\omega = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} w_{i_1\, i_2\, \dots\, i_k}\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \ , \tag{70}$$

uma k-forma em U. Definimos então a derivada exterior *de ω como sendo $k+1$ forma $\mathrm{d}\omega \in \Omega^{k+1}(U)$ por:*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} (\mathrm{d}w_{i_1\, i_2\, \dots\, i_k})\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \\ &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial w_{i_1\, i_2\, \dots\, i_k}}{\partial x^j})\, \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \ . \end{aligned} \tag{71}$$

Teorema 61. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $\omega \in \Omega^{k-1}$, $p \in U$, e $v_1, \dots, v_k \in T_pU \cong \mathbb{R}^n$. Então:*

$$\mathrm{d}\omega\,(p)(v_1, \dots, v_k) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \mathrm{d}\big(\omega[v_1, \dots, \hat{v_j}, \dots, v_k]\big)(x)(v_j)\,, \tag{72}$$

onde, fixados $w_1, \dots, w_{k-1} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \omega[w_1, \dots, w_{k-1}] : U &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \omega(x)(w_1, \dots, w_{k-1})\,. \end{aligned} \tag{73}$$

Teorema 62 (Propriedades da derivada exterior)**.** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(U)$, $\eta \in \Omega^l(U)$ e $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável. Então:*

a) $\mathrm{d}(\omega_1 + \omega_2) = \mathrm{d}\omega_1 + \mathrm{d}\omega_2$;

b) $\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta$;

c) $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$, *isto é,* $\mathrm{d}^2 = 0$;

d) $\mathrm{d}(\phi^*\omega) = \phi^*(\mathrm{d}\omega)$, *isto é, a derivada exterior e o pullback comutam.*

Definição 63 (Integral de uma forma)**.** *Assumindo $0 \leq k \leq n$, sejam $D \subset \mathbb{R}^k$ um conjunto J-mensurável, $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\phi : D \to U$ função diferenciável, e $\omega \in \Omega^k(U)$ uma k-forma. Definimos a* integral orientada *de ω sobre ϕ por:*

$$\begin{aligned} \int_\phi \omega &= \int_D (\phi^*\omega)(y)(e_{(1,\ldots,k)})dy \\ &= \int_D \omega(\phi(y))(\mathrm{d}\phi(e_1), \ldots, \mathrm{d}\phi(e_k))dy \,, \end{aligned} \tag{74}$$

onde $e_{(1,\ldots,k)} = \{e_1, \ldots, e_k\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^k$. Se ϕ for um mergulho, a integral orientada de ω sobre a variedade $X = \phi(D)$ é definida como

$$\int_X \omega = \int_\phi \omega \,. \tag{75}$$

Definição 64. *Seja $I^k = [0,1]^k \subset \mathbb{R}^k$. Os conjuntos*

$$I^k_{(i,0)} = \left\{(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^i, \ldots, x^{k-1}) \in \mathbb{R}^k : x = (x^1, \ldots, x^{k-1}) \in I^{k-1}\right\}, \tag{76}$$

e

$$I^k_{(i,1)} = \left\{(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^i, \ldots, x^{k-1}) \in \mathbb{R}^k : x = (x^1, \ldots, x^{k-1}) \in I^{k-1}\right\}, \tag{77}$$

são denominadas por face $(i,0)$ e face $(i,1)$*, respectivamente, de I^k. A* fronteira *de I^k é definida como a seguinte combinação linear formal (uma* cadeia*):*

$$\partial I^k = \sum_{i=1}^k \sum_{p \in \{0,1\}} (-1)^{i+p} I^k_{(i,p)} \,. \tag{78}$$

Teorema 65 (Teorema de Stokes)**.** *Assumindo $0 \leq k \leq n$, sejam $I^k = [0,1]^k \subset \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\phi : I^k \to U$ função diferenciável, $\omega \in \Omega^{k-1}(U)$ uma $(k-1)$-forma. Então:*

$$\int_\phi \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\phi} \omega \,. \tag{79}$$