

Анализ популяционной модели Базыкина «хищник-жертва»

Белов Тимофей Викторович
Крутовский Данил Александрович

24 декабря 2021 г.

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи работы	3
3	Описание модели	4
4	Детерминированные свойства модели	5
4.1	Точки покоя и их устойчивость	5
4.2	Бифуркационные диаграммы	6
4.2.1	Типы фазовых портретов	6
4.2.2	Аттракторы и репеллеры	8
4.2.3	Атлас фазовых портретов	9
4.3	Предельные циклы	16
4.3.1	Орбиты	17
4.3.2	График периода	18
5	Стохастические свойства модели	20
5.1	Моделирование случайных возмущений	20
5.2	Возмущения в окрестности устойчивой точки покоя . .	21
5.3	Матрица ковариации	23
5.4	Стохастический переход между аттракторами	24
5.5	Возмущения в окрестности предельного цикла	25
6	Заключение	28
7	Библиография	29

1 Введение

Построение и анализ математических моделей являются важными инструментами научного исследования различных явлений, в том числе физических и химических. В настоящее время существует возможность эффективно применять методы исследования моделей, опирающиеся на применение компьютерных технологий для постановки численных экспериментов и обработки их результатов. В частности представляет интерес исследование с помощью таких методов моделей биологических процессов, каковой является и популяционная модель Базыкина «хищник-жертва».

Модель хищник-жертва – это особая взаимосвязь хищника с жертвой, в результате которой выигрывают оба. Выживают наиболее здоровые и приспособленные особи к условиям среды обитания, т.е. все это происходит благодаря естественному отбору. В той среде где нет возможности для размножения, хищник рано или поздно уничтожит популяцию жертвы, в последствии чего вымрет и сам.

Данная модель является обобщением модели Лотки-Вольтерра, учитывающей важные биологические факторы: насыщение хищников, внутривидовую конкуренцию. Модель имеет большое значение для понимания процессов, происходящих в различных популяционных системах, их биологических потенциалов и влиянии друг на друга.

2 Постановка задачи работы

Целью работы является исследование детерминированных и стохастических свойств математической модели «хищник-жертва» Базыкина. В работе предполагается проведение бифуркационного анализа детерминированной системы и построение бифуркационной диаграммы, анализ восприимчивости к случайным возмущениям на основе прямого численного моделирования.

3 Описание модели

Модель Базыкина «хищник-жертва» воспроизводит периодический колебательный режим, возникающий в результате межвидовых взаимодействий в природе:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - cx^2 - a\frac{xy}{1+x} \\ \dot{y} = -y + b\frac{xy}{1+x}, \end{cases} \quad (1)$$

где:

x — численность жертв

y — численность хищников

a — коэффициент смертности жертвы при столкновении с хищником

b — коэффициент насыщаемости хищника при столкновении с жертвой

c — коэффициент внутривидовой конкуренции между жертвами

$a, b, c > 0$

$a = 2, c = 0.1, b > 1$

4 Детерминированные свойства модели

Для исследования детерминированных свойств модели воспользуемся теоремой Гробмана-Хартмана, утверждающей, что в окрестности неподвижной точки поведение исследуемой системы совпадает с поведением ее линеаризации. Из этого следует, что в некоторой окрестности неподвижной точки фазовый портрет системы (1) совпадает с портретом линеаризованной системы, в случае, если система (1) имела портрет типа «узел», «фокус» или «седло».

4.1 Точки покоя и их устойчивость

Вычислим точку покоя для исследуемой модели из условий равенства нулю производных:

$$\begin{cases} 0 = x - cx^2 - a \frac{xy}{1+x} \\ 0 = -y + b \frac{xy}{1+x} \end{cases}$$

Решив систему, получим следующие точки покоя:

$$M_0 = (0, 0)$$

$$M_1 = \left(\frac{1}{c}, 0 \right)$$

$$M_2 = \left(\frac{1}{b-1}, \frac{(b-c-1)b}{a(b-1)^2} \right)$$

Составим матрицу Якоби:

$$\begin{pmatrix} -2cx + 1 - \frac{ay}{(x+1)^2} & -\frac{ax}{x+1} \\ \frac{by}{(x+1)^2} & -1 + \frac{bx}{x+1} \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен матрицы:

$$\lambda^2 + \left(2cx + \frac{ay - bx(x+1)}{(x+1)^2} \right) \lambda + \left(2cx + \frac{ay + bx(x+1)}{(x+1)^2} \right) - \left(2cx \frac{bx}{x+1} + 1 \right)$$

Рассмотрим точки покоя по отдельности:

В точке M_0 корни характеристического многочлена имеют вид $\lambda = \pm 1$. Из этого делаем вывод, что тип фазового портрета - *Saddle*.

$$\begin{aligned} \text{В точке } M_1: b \in & \begin{cases} (1, 1+c) \Rightarrow \textit{Stable Node} \\ (c+1, +\infty) \Rightarrow \textit{Saddle} \end{cases} \\ \text{В точке } M_2: b \in & \begin{cases} (1, c+1) \Rightarrow \textit{Saddle} \\ \left(c+1, \frac{c}{2(\sqrt{2}-1)} + 1\right) \Rightarrow \textit{Node (stable)} \\ \left(\frac{c}{2(\sqrt{2}-1)} + 1, \frac{2}{1-c} - 1\right) \Rightarrow \textit{Focus (stable)} \\ \left(\frac{2}{1-c} - 1, +\infty\right) \Rightarrow \textit{Focus (unstable)} \end{cases} \end{aligned}$$

4.2 Бифуркационные диаграммы

4.2.1 Типы фазовых портретов

В точке M_0 вне зависимости от параметров системы тип фазового портрета всегда будет «Седлом».

$$\text{В точке } M_1: b \in \begin{cases} (1, 1+c) \Rightarrow \textit{Stable Node} \\ (c+1, +\infty) \Rightarrow \textit{Saddle} \end{cases}$$

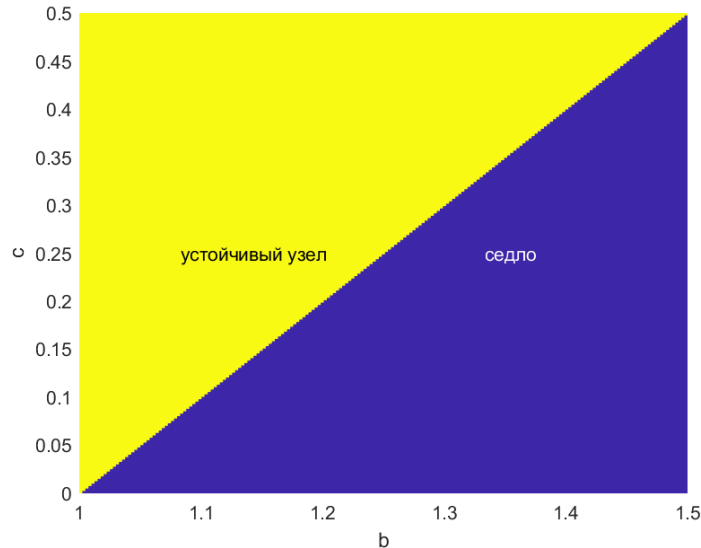


Рис. 1: Двупараметрическая бифуркационная диаграмма для M_1

В точке $M_2: b \in \begin{cases} (1, c+1) \Rightarrow Saddle \\ \left(c+1, \frac{c}{2(\sqrt{2}-1)} + 1\right) \Rightarrow Node (stable) \\ \left(\frac{c}{2(\sqrt{2}-1)} + 1, \frac{2}{1-c} - 1\right) \Rightarrow Focus (stable) \\ \left(\frac{2}{1-c} - 1, +\infty\right) \Rightarrow Focus (unstable) \end{cases}$

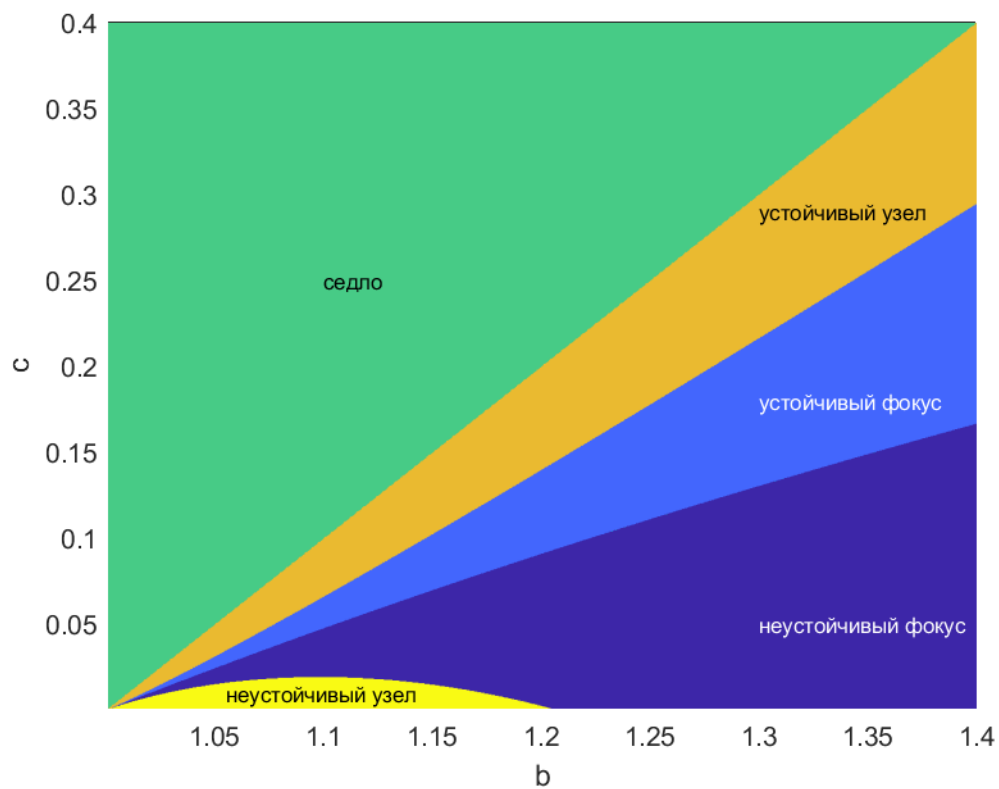


Рис. 2: Двупараметрическая бифуркационная диаграмма для M_2

4.2.2 Аттракторы и репеллеры

Построим бифуркационную диаграмму с описанием аттракторов(репеллеров), зафиксировав параметры $a = 2, c = 0.1$:

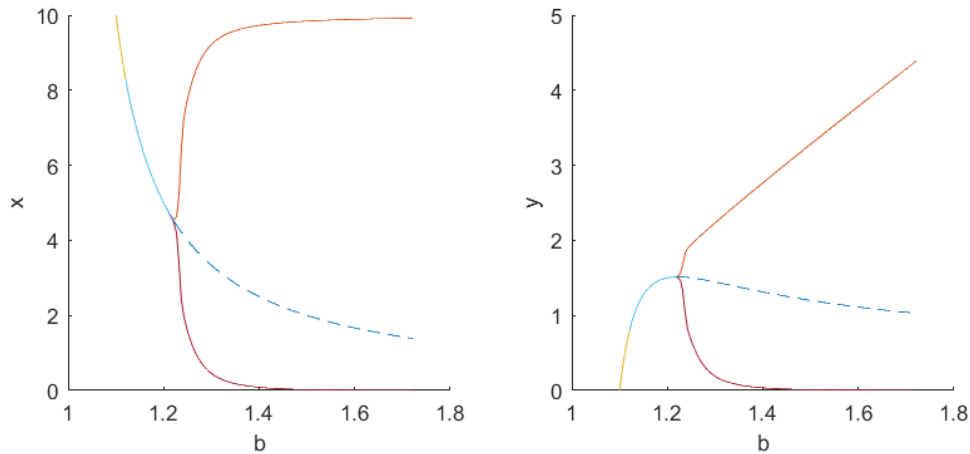


Рис. 3: Супремумы координат X и Y

Анализ интервалов по параметру b :

- На $[1.1 = 1 + c, \frac{2}{1-c} - 1 = \frac{11}{9}]$ равновесие устойчиво и является единственным аттрактором.
- На $[\frac{11}{9}, 1.7]$ предельный цикл является единственным аттрактором.

В нашей системе, M_0 и M_1 являются «седлами», они и задают минимум и максимум по координате x и зафиксированы при больших параметрах b . Также, при росте b наблюдается рост предельного цикла по координате y . Таким образом, мы можем быть уверены, что на бесконечности для обеих координат при данном c сохранится поведение, как на интервале $[\frac{11}{9}, 1.7]$

Весь интервал является зоной моностабильности.

4.2.3 Атлас фазовых портретов

Зеленая зона: Точка M_2 в данной конфигурации не существует M_1 – устойчивый узел.

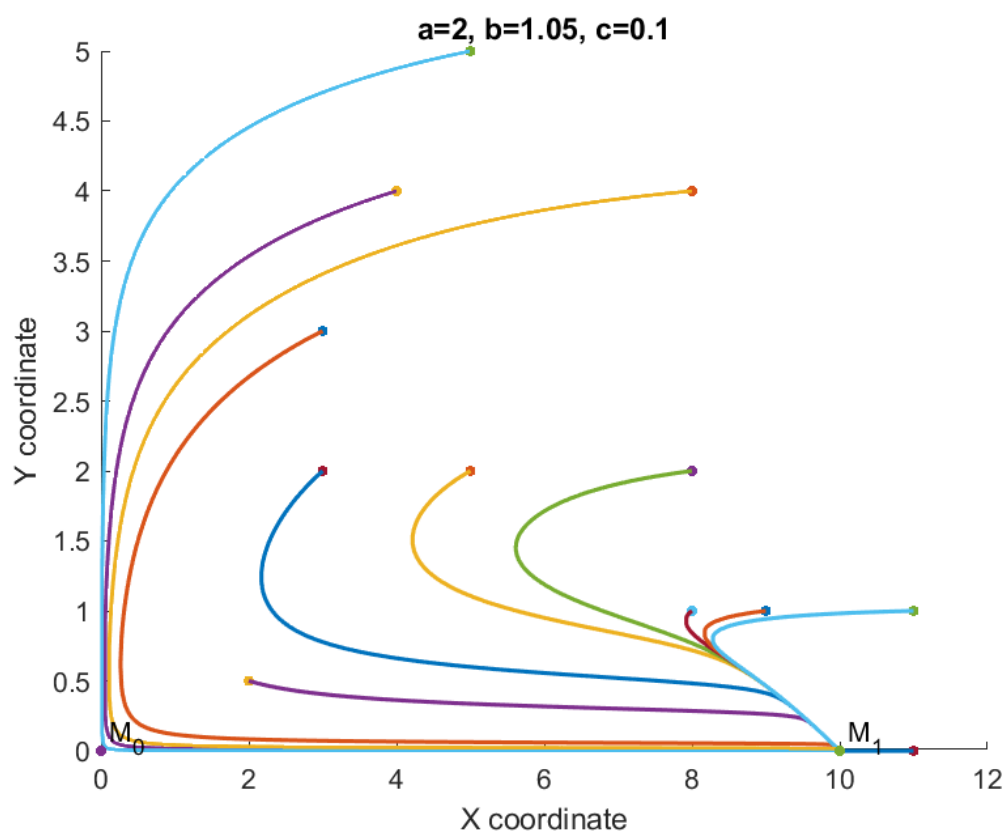


Рис. 4: $a = 2; b \in (1, 1 + c); c = 0.1$

Переход между зеленой и оранжевой областями: $M_1=M_2$ – устойчивые узлы.

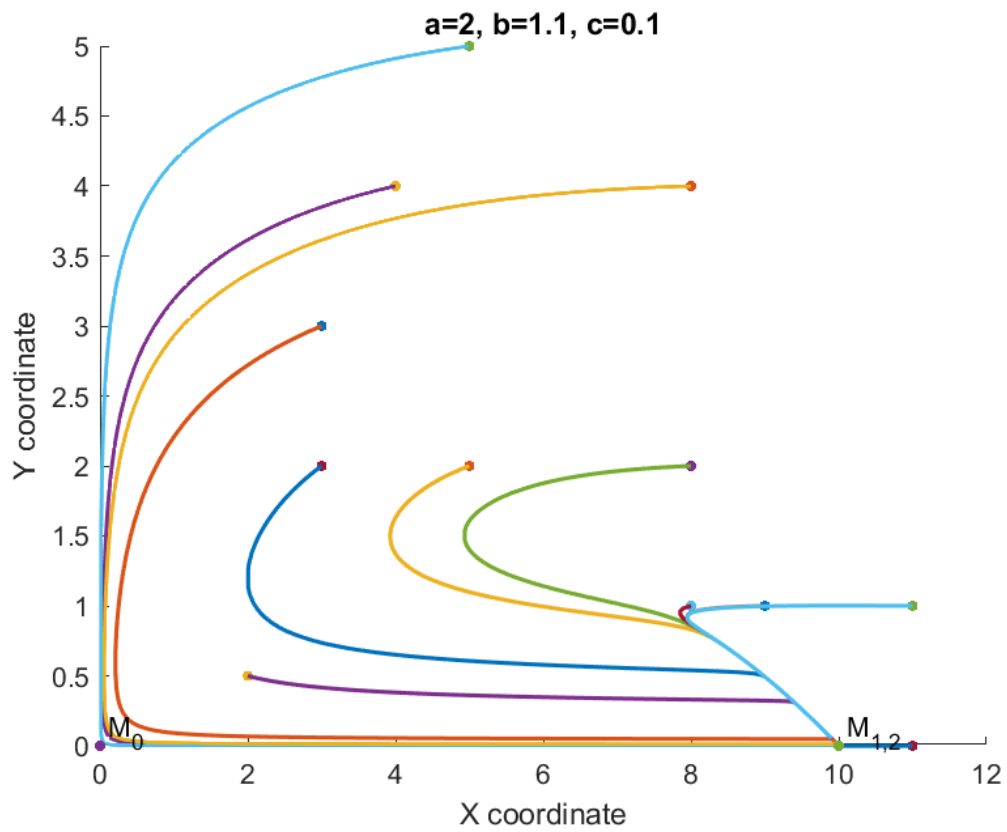


Рис. 5: $a = 2; b = 1 + c; c = 0.1$

Оранжевая зона: M_2 – устойчивый узел.

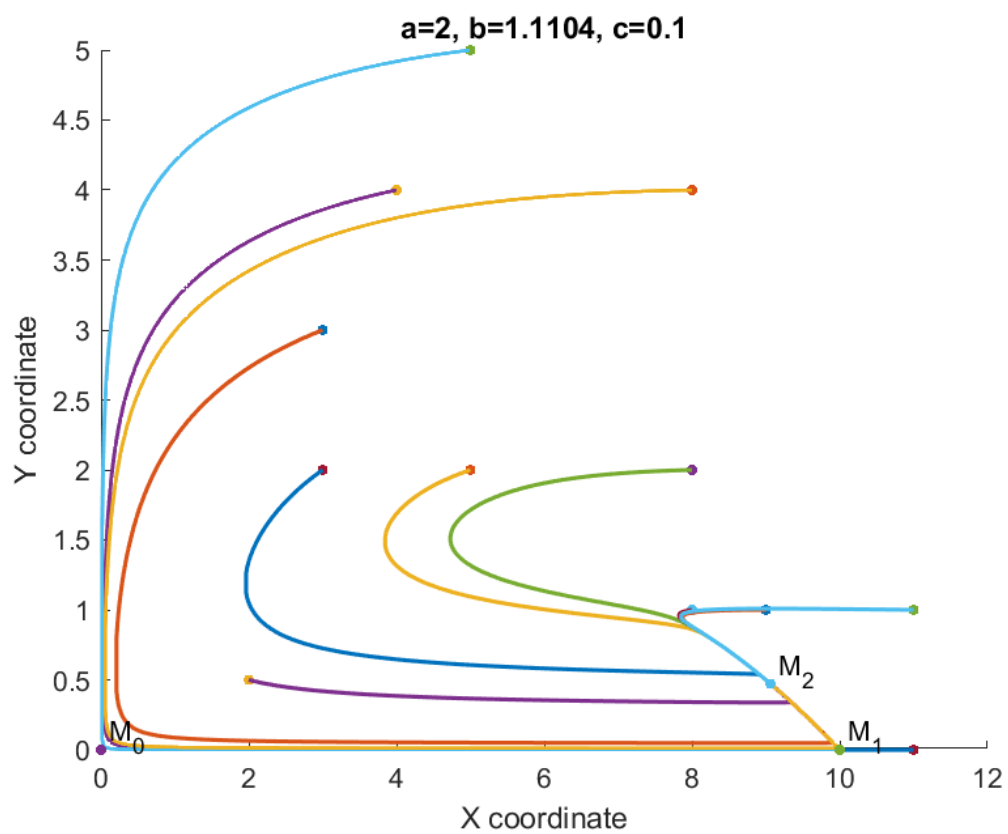


Рис. 6: $a = 2; b \in (1 + c, \frac{c}{2(\sqrt{2}-1)} + 1]; c = 0.1$

Переход между зонами захватывается оранжевой зоной, поэтому его пропускаем. Голубая зона: M_2 – устойчивый фокус.

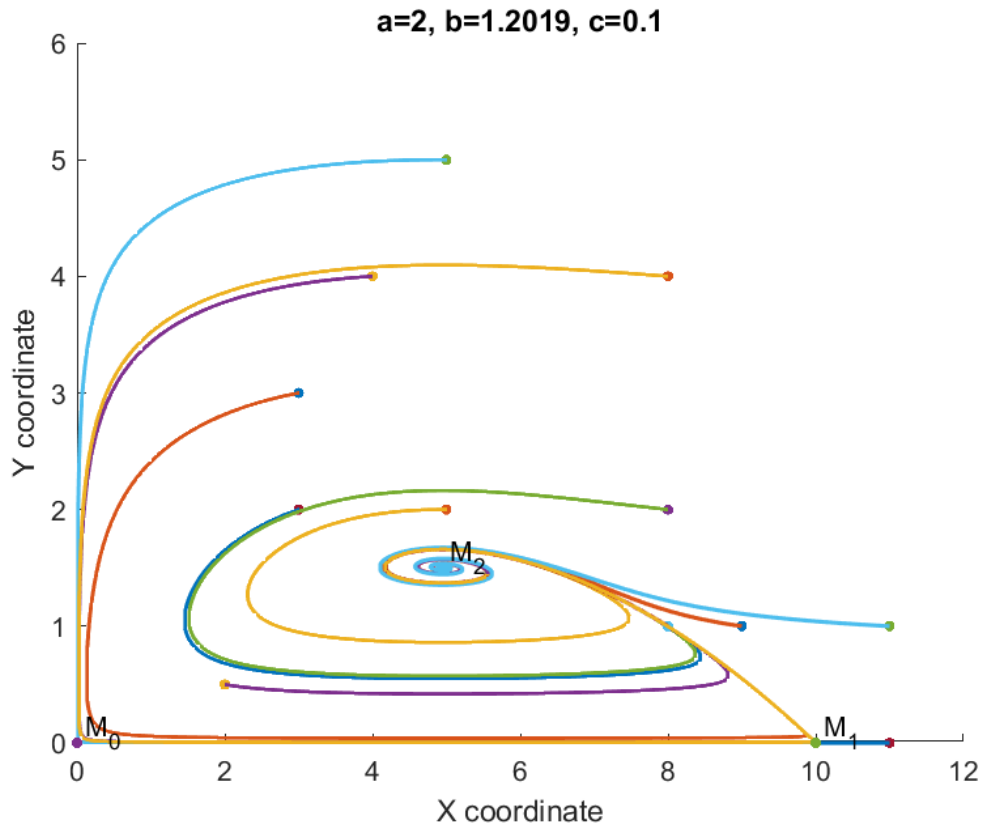


Рис. 7: $a = 2; b \in (\frac{c}{2(\sqrt{2}-1)} + 1, \frac{2}{1-c} - 1); c = 0.1$

Переход между голубой и синей областями: M_2 – центр.

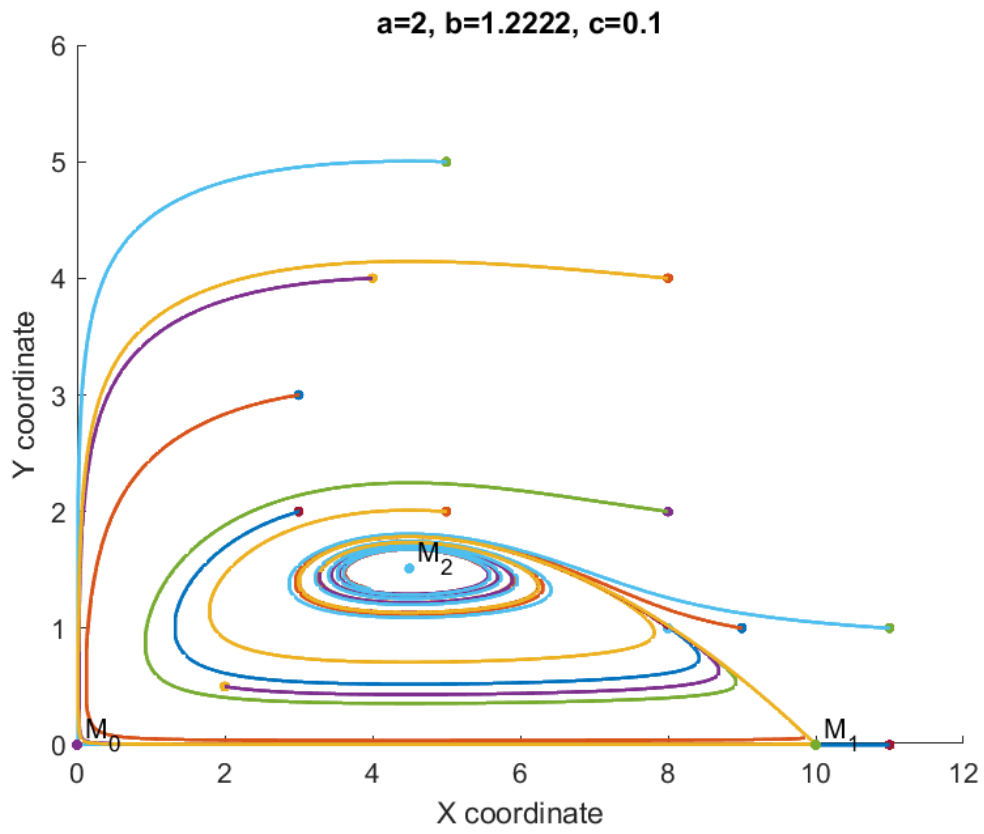


Рис. 8: $a = 2; b = \frac{2}{1-c} - 1; c = 0.1$

Синяя зона: В данной зоне впервые наблюдается появление предельного цикла.

M_2 – неустойчивый фокус.

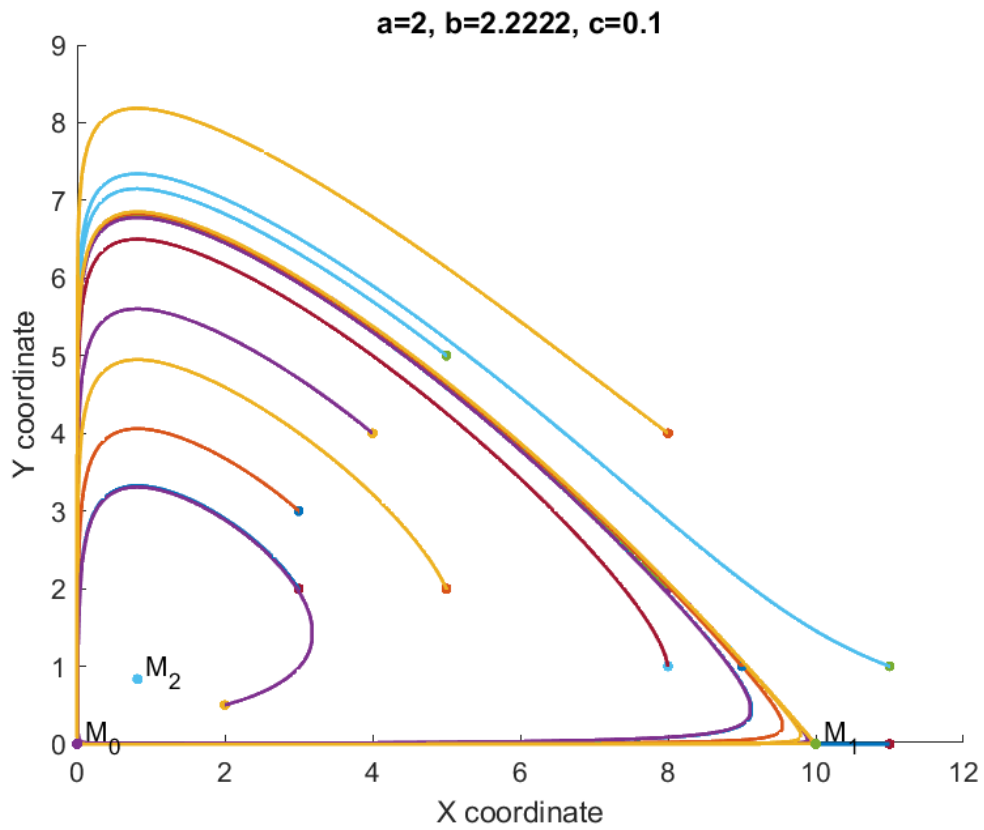


Рис. 9: $a = 2; b \in (\frac{2}{1-c} - 1, +\infty); c = 0.1$

Жёлтая зона: Стоит заметить, что для значений параметров b и c , удовлетворяющим жёлтой зоне, предельный цикл сильно увеличивает свои размеры (100 к 10 для координаты x и 20 к 5-8 для y).

M_2 – неустойчивый узел.

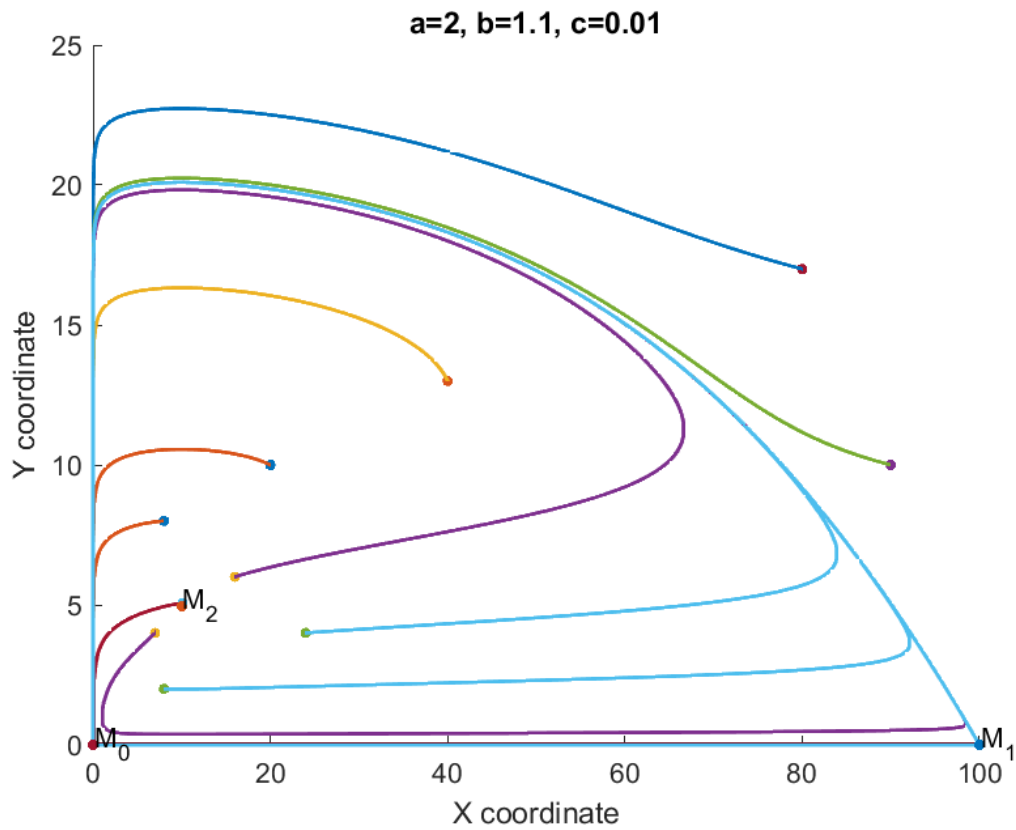


Рис. 10: $a = 2; b = 1.1; c = 0.01$

4.3 Предельные циклы

Точка \tilde{x} фазовой плоскости называется предельной точкой траектории $X = \varphi(t)$, если существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty$, либо $t_n \rightarrow -\infty$ такая, что $\varphi(t_n) \rightarrow \tilde{x}$. Предельным множеством траектории называется множество всех её предельных точек. Предельный цикл - это замкнутое (периодическое) решение системы, представляющее собой предельное множество некоторой её траектории. Для случая фазовой плоскости известно (по т. Пуанкаре – Бендиксона), что предельное множество любой траектории представляет собой либо точку покоя, либо предельный цикл, либо предельный полицикл. В случае, когда точка покоя системы неустойчива, на фазовой плоскости присутствуют предельные циклы.

Для нахождения предельных циклов использовался метод Рунге – Кутты с размером шага $h = 1 \times 10^{-3}$

4.3.1 Орбиты

Следующие изображения демонстрируют нам изменение предельный цикл в зависимости от параметров b и c . Можно заметить, что при росте параметра b предельный цикл принимает более треугольную форму, а при росте c - округляется. На изображениях синей точкой представлена точка покоя(фокус), оранжевой - точка старта.

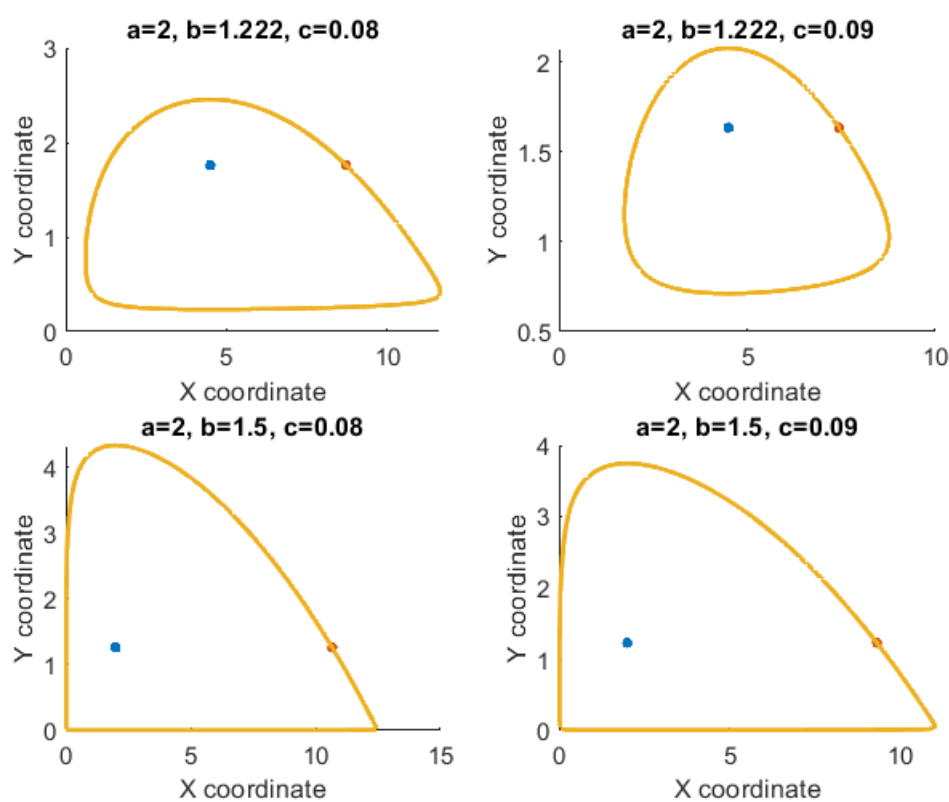


Рис. 11: Несколько циклов

4.3.2 График периода

Посмотрим на график периода цикла в зависимости от параметра b . Можно заметить, что при $b \approx 1.4$ и $b \approx 1.6$ наблюдаются перегибы кривой.

Предположение: Во время первого перегиба один «катет» цикла окончательно прижимается к оси OX и фиксирует свои размеры, что замедляет рост периода. После второго перегиба прижаты уже оба «катета», начинается рост «гипотенузы», возвращается рост периода.

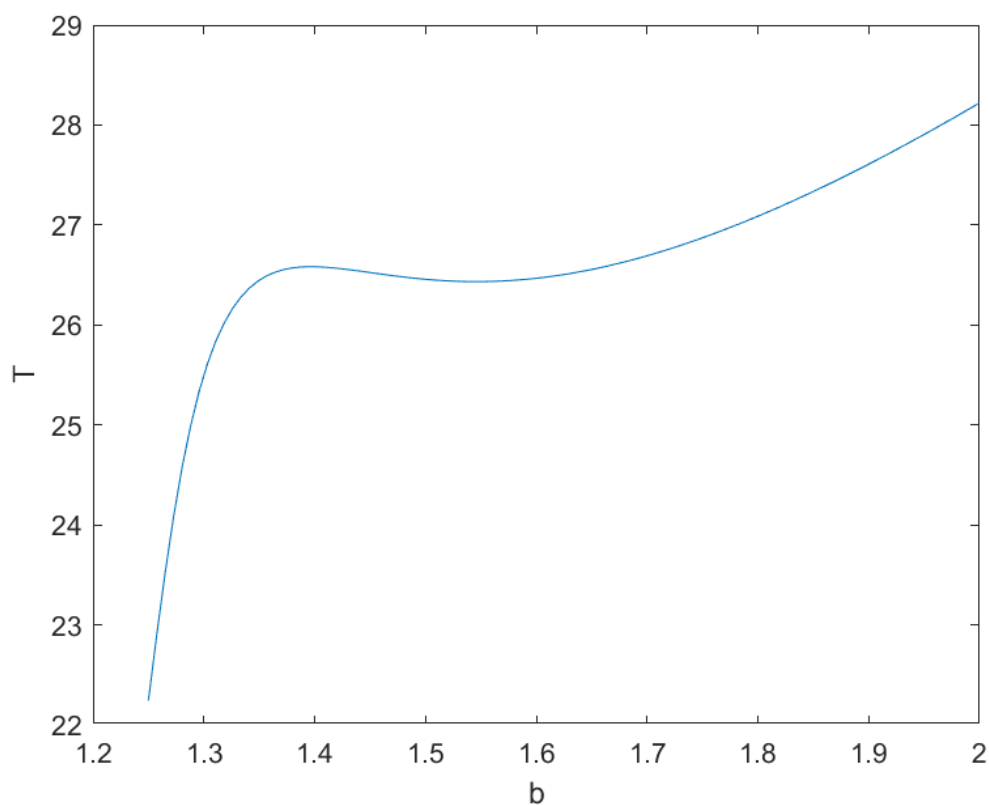


Рис. 12: Период цикла в зависимости от b

Следующие два рисунка показывают зависимость координат x и y в зависимости от времени при значениях $b = 1.31$ и $b = 5$. Можно заметить, что движение вдоль оси OX (от M_0 к M_1) замедляется, с ростом b , в то время как движение по «гипотенузе» и вдоль оси OY ускоряется.

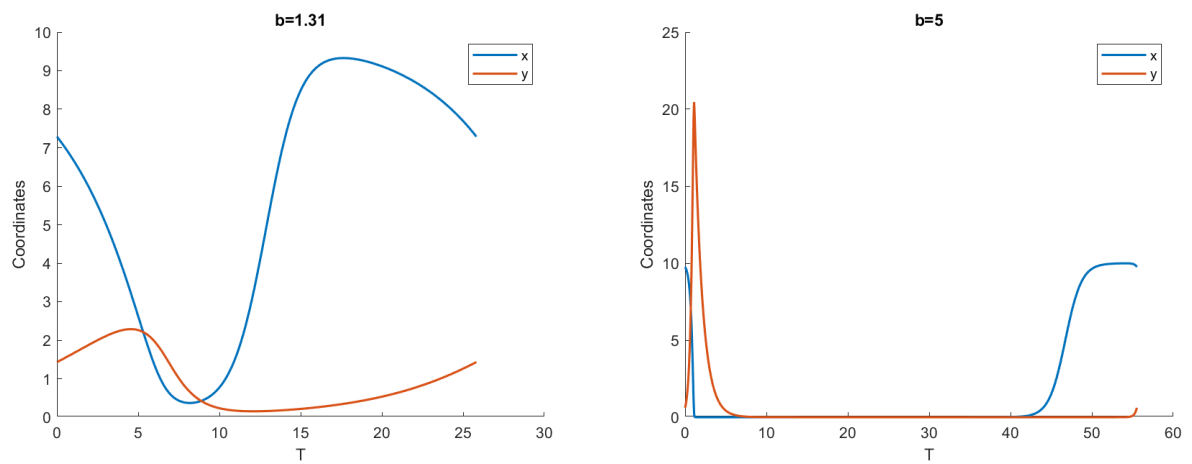


Рис. 13: Зависимость временных рядов от параметра b

5 Стохастические свойства модели

5.1 Моделирование случайных возмущений

Для дальнейшего исследования свойств системы (1) внесем в её поведение случайные возмущения. Для этого, при построении траекторий системы, на каждом шаге метода численного интегрирования Рунге – Кутты 4 порядка будем добавлять к результату метода некоторую случайную добавку вида $\varepsilon\sqrt{h}\xi$, где ξ — нормально распределённая случайная величина, h — шаг численного метода, ε — положительное число, коэффициент, регулирующий интенсивность возмущений.

Т.к. точки M_0 и M_1 имеют к 0 ординату, то шум у их окрестности будет покрывать отрицательные значения, что не имеет смысла для данной модели. Исследовать случайные возмущения будем только у оставшейся точки M_2 .

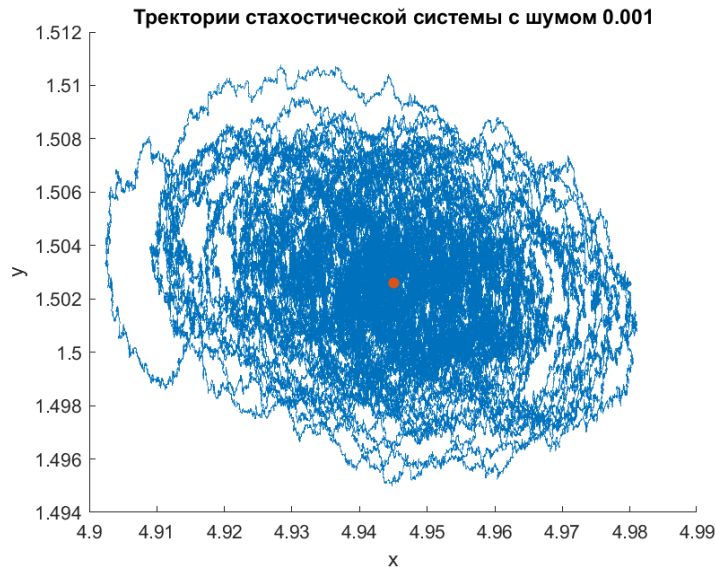


Рис. 14: В окрестности фокуса ($b = 1.22$)

5.2 Возмущения в окрестности устойчивой точки покоя

При внесении возмущений в траектории, стартующие в окрестности устойчивой точки покоя, траектории остаются в окрестности точки покоя при достаточно сильных шумах (рис. 16-17).

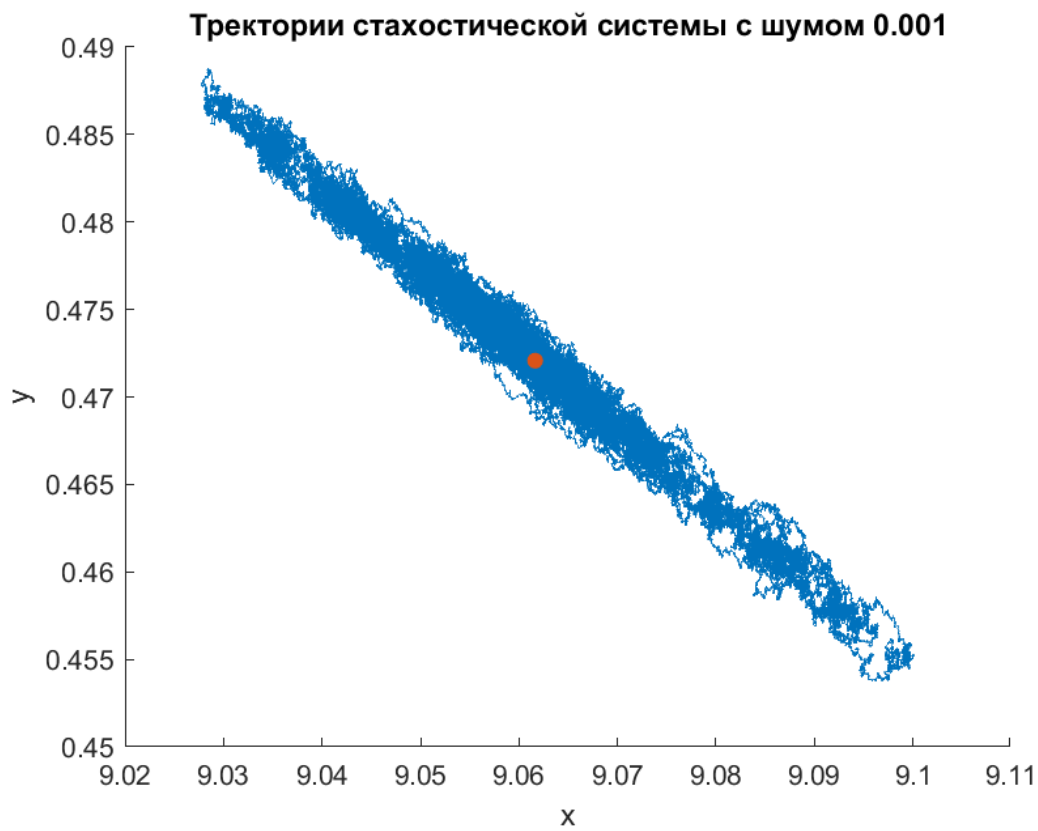


Рис. 15: В окрестности узла ($b = 1.11$)

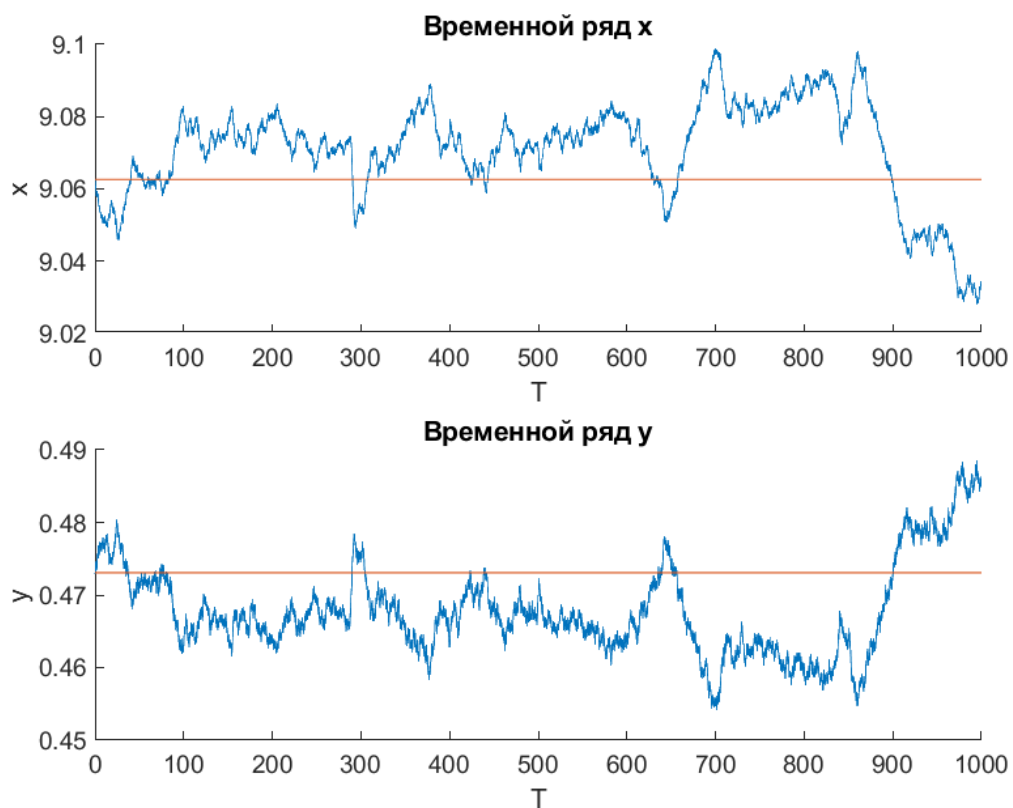


Рис. 16: Зависимость координат траекторий от времени

На рисунке 18 можно заметить, что есть некая зависимость между отклонением от устойчивой точки для координат x и y . В частности, блуждания имеют разные направления, а их величины отличаются в определенное число раз.

5.3 Матрица ковариации

Деформацию распределения около точки устойчивого равновесия помогает объяснить матрица ковариации. Значения собственных чисел матрицы говорят о размерах побочной и главной диагоналей эллипса, в котором находятся траектории блужданий. Т.к. одно из собственных чисел матрицы близко к 0, то наблюдается растянутость эллипса вдоль одной оси. (рис. 17)



Рис. 17: Зависимость собственных чисел от параметра b

5.4 Стохастический переход между аттракторами

В данной системе не наблюдаются стохастические переходы между аттракторами. Аттрактор либо один, либо находится очень близко к нулю, поэтому аддитивный шум не дает результата.

5.5 Возмущения в окрестности предельного цикла

Рассмотрим влияние стохастических возмущений в окрестности предельного цикла.

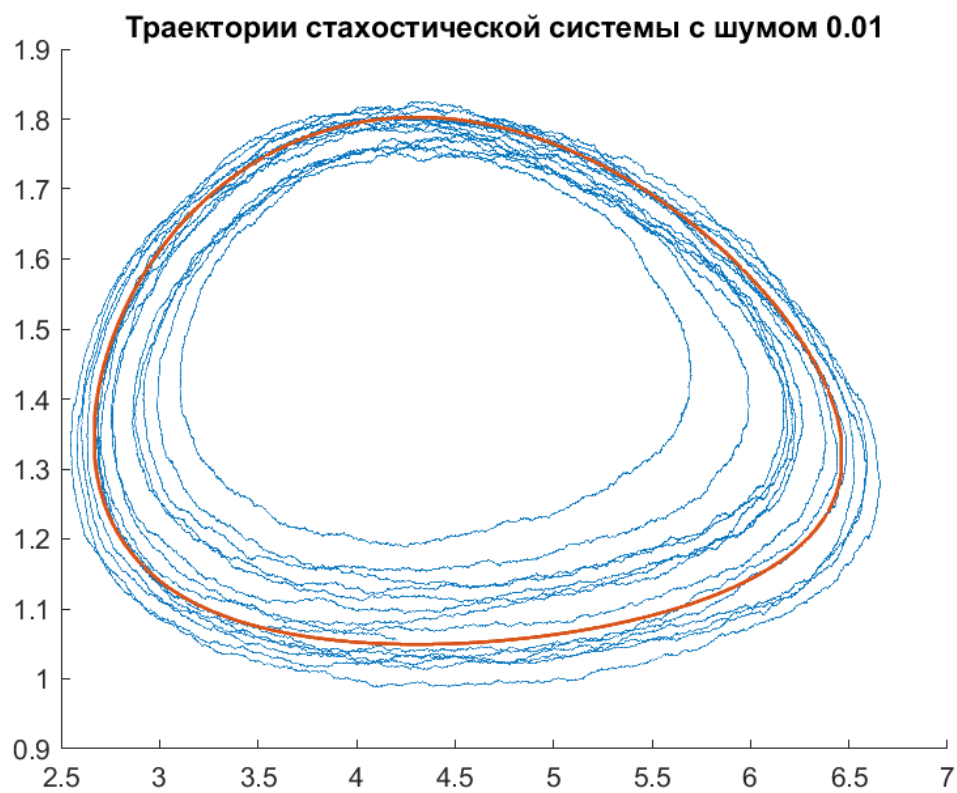


Рис. 18: В окрестности цикла

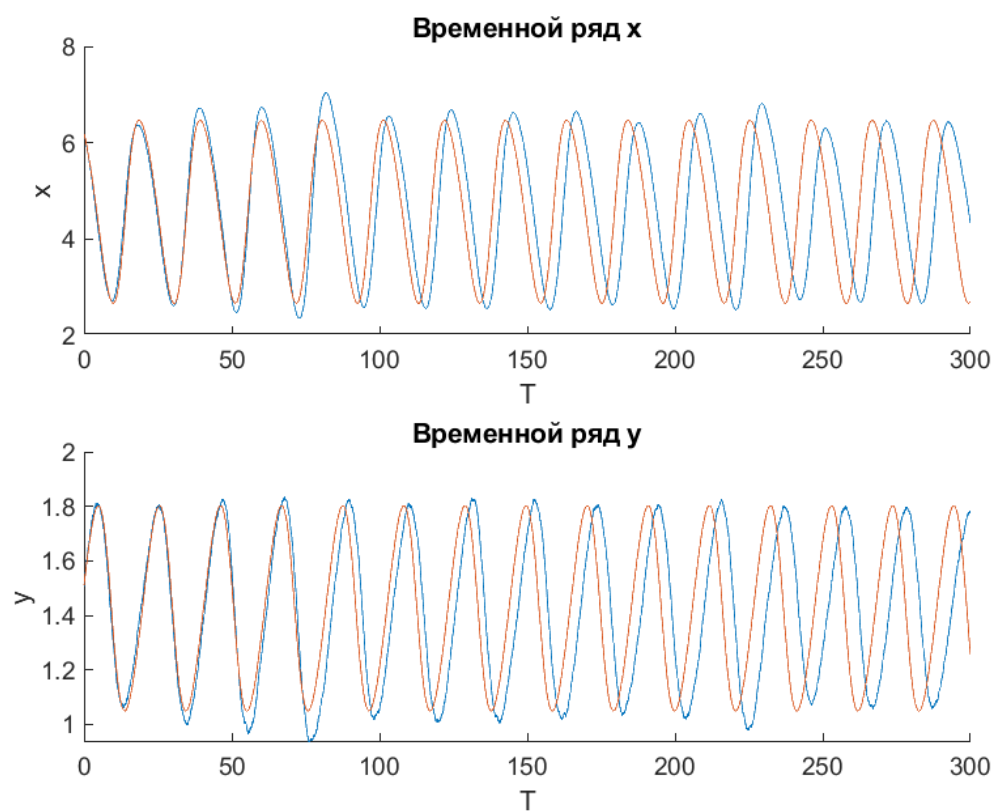


Рис. 19: Зависимость координат блужданий от времени

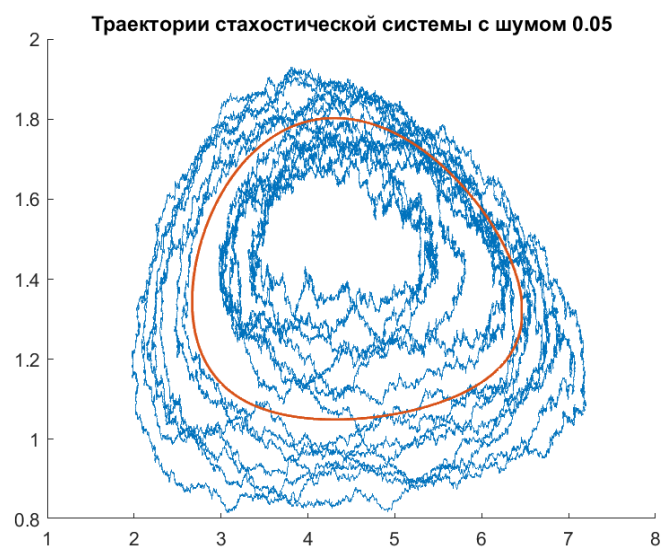


Рис. 20: Возмущения в окрестности цикла с большим шумом

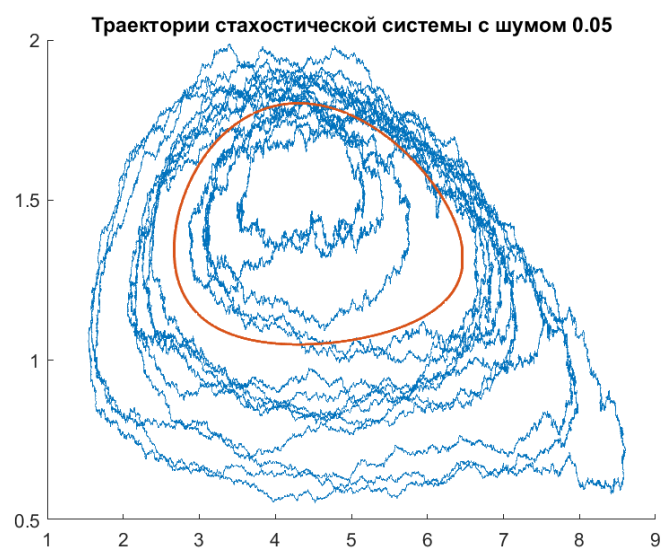


Рис. 21: Возмущения в окрестности цикла с большим шумом

6 Заключение

В процессе работы были изучены аттракторы системы, и рассмотрена их устойчивость; было показано, что система имеет три точки покоя: независимую от параметров $M_0 = (0, 0)$, независимую от насыщаемости хищника $M_1 = \left(\frac{1}{c}, 0\right)$ и зависимую от всех параметров $M_2 = \left(\frac{1}{b-1}, \frac{(b-c-1)b}{a(b-1)^2}\right)$.

С помощью метода Рунге-Кутты были исследованы предельные циклы и показана их устойчивость. Составлен атлас фазовых портретов. В зоне предельных циклов были исследованы орбиты циклов и их периоды.

Для устойчивой точки покоя получены облака случайных состояний, проанализированы соответствующие им временные ряды. Показано влияние собственных чисел матрицы ковариаций на вид облаков. Индуцированные шумом осцилляции не обнаружены.

В совокупности эти результаты позволяют судить о поведении системы и её траекторий, а также показывают, что при изменении значений параметров свойства нелинейных систем вообще и модели «хищник-жертва» Базыкина в частности могут значительно изменяться, возможно даже появление новых эффектов.

7 Библиография

Список литературы

- [1] Bashkirtseva I., Ryashko L. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect // Chaos, 2011, V.21, p. 047514
- [2] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Москва-Ижевск:, Институт компьютерных технологий, 2004. — 288 с.
- [3] Башкирцева И.А., Перевалова Т.В. Анализ стохастических аттракторов при бифуркации точка покоя – цикл. // Автоматика и телемеханика. 2007. №10. С.53-69
- [4] Криксунов Е.А., Пасечник В.В., Сидорин А.П. Экология. – М.: Издательский дом «Дрофа», 2010 г.