O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI

A.O’.MIRZAYEV

OLIY MATEMATIKA

DARSLIK

Andijon – 2022

Taqrizchilar:

K.Mamadaliyev – *fizika-matematika fanlari nomzodi, AndDU dotsenti*

I.Soliyev – *pedagogika fanlari falsafa doktori (PhD), FarDu katta o'qituvchisi;*

A.O'.Mirzayev. Oliy matematika. "Pedagogika va psixologiya" yo'nalishi uchun darslik.

Ushbu darslik 60110100 - Pedagogika va psixologiya ta'lim yo'nalishining oliy matematika fani dasturi asosida yozilgan va bakalavrlar Davlat ta'lim standartlariga mos keladi.

Darslik oliy matematikaning chiziqli algebra, vektorlar, chiziqli tenglamalar sistemasi, analitik geometriya elementlari, ikkinchi tartibli egri chiziqlar, fazoda to'g'ri chiziq va tekislik tenglamalari, matematik analiz elementlari, differensial hisob va integral hisobi va ehtimollar nazariyasi bo'limlariga oid materiallarni o'z ichiga oladi. Darslikning har bir mavzusi zamonavoiy horijiy adabiyotlar va o'qitish texnologiyalari tahlili asosida yozilgan.

Darslik oliy ta'lim muasassasalarining talabalari va o'qituvchilari uchun mo'ljallangan.

SO'Z BOSHI

Yuqori malakali, raqobatbardosh, zamonaviy talablarga javob bera oladigan pedagog kadrlar tayyorlashda ularga chuqur matematik bilimlar berish va bu bilimlarni masalalarni yechishga tatbiq eta olishga o'rgatish katta ahamiyatga ega. Shu sababli pedagogika yo'nalishlari bo'yicha ta'lim oluvchi bakalavrlarning o'quv rejalarida "Oliy matematika" fanini o'qitish ko'zda tutilgan. Hozirgi davrda bu fanni o'qitish alohida ahamiyatga ega bo'lgani uchun oxirgi yillarda chet ellarda bu fan bo'yicha juda ko'p o'quv-uslubiy adabiyotlar yaratilmoqda. Ulardan bir qismi darslikni yoritilishida foydalanilgan va bu yordamida darslikning mazmun mohiyati ancha kengaytirilgan.

Ushbu darslik universitetlar va pedagogika institutlarining talabalari (60110100 -Pedagogika va psixologiya ta'lim yo'nalishli) uchun "Oliy matematika" fanining namunaviy dasturida rejalashtirilgan mavzularni o'z ichiga olgan. Bu mavzular bo'lg'usi mutaxassislar uchun zarur bo'lgan chiziqli algebra, vektorlar, chiziqli tenglamalar sistemasi, analitik geometriya elementlari, ikkinchi tartibli egri chiziqlar, fazoda to'g'ri chiziq va tekislik tenglamalari, matematik analiz elementlari, differensial hisob va integral hisobi va ehtimollar nazariyasi kabi asosiy bo'limlarini tashkil etadi. Mavzular bo'yicha nazariy ma'lumotlar, ular asosida yechilgan misol va masalalar hamda talabalar mustaqil yechishlari uchun topshiriqlar keltirilgan.

Ushbu darslikdan 60110500 - Boshlang'ich ta'lim, 60111300 - Musiqiy ta'lim, 60111200 – Tasviriy san'at va muhandislik grafikasi, 60110200 - Maktabgacha ta'lim, 60112300 - Texnologik ta'lim, 60112200 - Jismoniy madaniyat ta'lim yo'nalishlari talabalari ham foydalanishi mumkin.

Hozirgi davrda talabalarning mustaqil ishiga katta e'tibor berilmoqda va shu sababli ayrim tasdiqlarning isbotlari talabalarga havola etilgan. Bundan tashqari bir qator mavzular kengaytirilgan va nisbatan chuqurroq yoritilgan bo'lib, o'qituvchi ulardan talabalarning mustaqil ishini tashkil etish uchun foydalanishi mumkin. Talabalarning bo'sh vaqtlarini samarali tashkil etish, oliy matematika fani yordamida ularning kreativ fikrlash qobiliyatlarini rivojlantirish va kasbiy kompetensyalarini rivojlatirishda darslikning ahamiyati katta hisoblanadi.

Darslikni o'qib chiqib o'zining fikr va mulohazalarini bildirgan Andijon davlat universiteti dotsenti K.Mamadaliyevga va Farg'ona davlat universiteti katta o'qituvchisi I.Soliyevga muallif o'z minnatdorchiligini bildiradi.

Muallif ushbu darslik kamchiliklardan holi degan fikrdan uzoqda bo‘lganligi tufayli uni takomillashtirish bo‘yicha kitobxonlarning taklif va mulohazalarini minnatdorchilik bilan qabul etadi.

Muallif.

I BOB. TO’PLAMLAR NAZARIYASI

1§. ”MATEMATIKA” FANIGA KIRISH

Reja:

1. Matematika fanining predmeti

2. Matematika rivojlanishining asosiy bosqichlari

Tayanch iboralar: Matematika, geometriya, analitik geometriya, integral, differensial hisob, differensial tenglama, topologiya, ayniyat, formula, ehtimollar nazariyasi, sonlar nazariyasi.

1. Matematika fanining predmeti. Matematika (yun. mathematike, mathema — bilim, fan) — aniq mantiqiy mushohadalarga asoslangan bilimlar haqidagi fan. Dastlabki ob’yekti sanoq bo‘lgani uchun ko‘pincha unga "hisob-kitob haqidagi fan" deb qaralgan (bugungi matematikada hisoblashlar, hatto formulalar ustidagi amallar juda kichik o‘rin egallaydi). Matematika eng qadimiy fan sohasi bo‘lib, uzoq rivojlanish tarixini bosib o‘tgan va buning barobarida "matematika nima?" degan savolga javob ham o‘zgarib, chuqurlashib borgan. Qadimda Yunonistonda matematika deganda geometriya tushunilgan. IX-XII asrlarda matematika tushunchasini algebra va trigonometriya kengaytirgan. XVII-XVIII asrlarda matematikada analitik geometriya, differensial va integral hisob asosiy o‘rinni egallaganidan so‘ng, to XX asr boshlarigacha u "miqdoriy munosabatlar va fazoviy shakllar haqidagi fan" mazmunida ta’riflangan. XIX asr oxiri va XX asr boshlarida turli geometriyalar (Lobachevskiy geometriyasi, proyektiv geometriya, Riman geometriyasi kabi), algebralar (Bul algebrasi, kvaternionlar algebrasi, Keli algebrasi kabi), cheksiz o‘lchovli fazolar kabi mazmunan juda xilma-xil, ko‘pincha sun’iy tabiatli ob’yektlar o‘rganila boshlanishi bilan matematikaning yuqoridagi ta’rifi o‘ta tor bo‘lib qolgan. Bu davrda matematik mantiq va to‘plamlar nazariyasi asosida o‘ziga xos mushohada uslubi hamda tili shakllanishi natijasida matematikada eng asosiy xususiyat — qat'iy mantiqiy mushohada, degan g'oya vujudga keldi (J. Peano, G. Frege, B. Rassel, D. Xilbert). XX asr o'rtalarida Burbaki taxallusi ostida matematika ta'rifini qayta ko'rib chiqqan bir guruh fransuz matematiklari bu g'oyani rivojlantirib, "Matematika — matematik strukturalar haqidagi fan" degan ta’rif kiritdi. Bu yondashuv avvalgi ta'riflarga ko'ra kengroq va aniqroq bo'lsada, baribir cheklangan edi — strukturalar o‘rtasidagi munosabatlar (masalan, matematika, turkumlar nazariyasi, algebraik topologiya), amaliy hamda tatbiqiy nazariyalar, xususan, fizika, texnika va ijtimoiy fanlarda matematik modellar bu ta’rif doirasiga sig'avermas edi. So'nggi asrda xilma-xil matematik ob’yektlar orasida juda chuqur munosabatlar mavjudligi va aynan shunga asoslangan natijalar matematikaning bundan keyingi taraqqiyotida asosiy o‘rinni egallashini ko‘rsatmoqda[1].

Elektron hisoblash vositalari bilan birga matematika tatbiqlarining kengayishi (biometriya, sotsiometriya, ekonometrika, psixometriya va boshqalar), matematik usullar hayotining turli sohalariga jadal sur’atlar bilan kirib borayotgani ham matematika predmetini ixcham ta’rif bilan qamrab bo‘lmaydigan darajada kengaytirib yubordi. Demak, matematika aksiomatik nazariyalar va matematik modellarni, ular orasidagi munosabatlarni o‘rganadigan, xulosalari qat’iy mantiqiy mushohadalar orqali asoslanadigan fandir.

2. Matematika rivojlanishining asosiy bosqichlari. Dastlab oddiy sanoq sonlar va ular ustidagi arifmetik amallardan boshlangan tematik bilimlar umuminsoniy taraqqiyot bilan birga kengayib va chuqurlashib borgan. Sug‘orma dehqonchilik, me’morlikning rivojlanishi, astronomik kuzatuvlarning ahamiyati ortishi geometriyaga oid dalillar jamg‘arilishiga olib kelgan. Masalan, qadimgi Misrda tomonlari 3, 4 va 5 birlik bo'lgan uchburchak to'g'ri burchakli bo’lishidan foydalanilgan. Yunonistonda geometrik xossalar faqat kuzatuv va tajriba yo'li bilangina topilmay, avvaldan ma'lum xossalardan keltirib chiqarilishi mumkinligi

1 “Oliy matematika” (Iqtisodchi va muhandis-texnologlar uchun). Rasulov , I.I. Safarov I.I., R.T. Muxitdinov . TOSHKENT, 2012. - 554 bet

ham payqalgan, hamda deduktiv isbot gʻoyasi rivojlantirilgan (Fales, Pifagor va boshqalar). Bu gʻoyaning choʻqqisi Evklidning “Negizlar” asarida geometriyaning aksiomatik qurilishi boʻldi. Bu kitob matematikaning keyingi rivojiga katta taʼsir qildi va XIX asr boshlarigacha mantiqiy bayonning mukammalligi boʻyicha namuna boʻlib keldi. Yunonlar matematikani geometriya bilan tenglashtirib, sanʼat darajasiga koʻtarganlar. Buning natijasida planimetriya va stereometriya ancha mukammal darajaga yetgan. Faqat 5 xil qavariq muntazam ko’pyoqlikning mavjudligi (Platon), kvadratning tomoni bilan diagonali umumiy oʻlchovga ega emasligi (Pifagor), nisbatlar nazariyasiga asoslangan son tushunchasi (Evdoks), qamrash usuli bilan egri chiziqli shakllar yuzi va yoy uzunligini, jismlar hajmini hisoblash, Geron formulasi, konus kesimlari (Apolloniy, Pergayos), sterografik proyeksiya (Ptolemey), geometrik yasashlar va shu munosabat bilan turli egri chiziqlarning o‘rganilishi yunon geometriyasining taraqqiyot darajasi haqida tasavvur beradi. Yunon olimlari qoʻygan burchak triseksiyasi, kubni ikkilash, doira kvadraturasi, muntazam koʻpburchak yasash masalalari XIX asrga kelib oʻz yechimini topdi. Ayniqsa, Arximed tadqiqotlarida yunon matematikasi oʻz davridan juda ilgarilab ketgan — u integral hisob, ogʻirlik markazi gʻoyalarini qoʻllagan. Yunon olimlari trigonometriyaga oid dastlabki maʼlumotlarga ham ega boʻlganlar (Gipparx, Ptolemey), Diofantning "Arifmetika" asarida sonlar nazariyasiga oid masalalar qaralgan. Ayni paytda matematika qadimgi Xitoy va Hindistonda ham taraqqiy topdi. "Toʻqqiz kitobli matematika" nomli xitoy manbaida (miloddan avvalgi 2—1 asrlar) natural sonlardan kvadrat va kub ildiz chiqarish qoidalari berilgan. Keyinroq xitoy olimlari chiziqli tenglamalar sistemasi va chegirmalar nazariyasi bilan shug‘ullanib, xususan, "qoldiqlar haqidagi xitoy teoremasi"ni topganlar. V asrda Szu Chun-Chji π soni 3,1415926 bilan 3,1415927 oraligʻida boʻlishini koʻrsatgan. Hindistonda matematika Ariabhata (V asr), Brahmagupta (VII asr), Bxaskara (XII asr) ishlarida rivojlantirilgan. Hind matematikasining olamshumul yutugʻi oʻnli sanoq sistemasi va 0 raqamining ixtiro qilinishidir.

Shuningdek, hind olimlari manfiy sonlar va irratsional ifodalar bilan tanish boʻlganlar, geometriyada muhim natijalarni qoʻlga kiritganlar.

Yunon, xitoy va hind matematikasi bir-biridan deyarli mustaqil holda mavjud boʻlgan. III—IV asrlarga kelib Yunonistonda fan inqirozga uchraydi, mavjud asarlar ham unutila boshlaydi. Yevropa sivilizatsiyasining bundan keyin to Uygʻonish davrigacha bo‘lgan davri "zulmat asrlari" deb atalgan (A. Mets). VII asrda islom dini tarqalishi va Arab xalifaligi vujudga kelishi bilan fan hamda madaniyat yuksalishi uchun yangi sharoit tugʻildi. Horun Arrashid davrida xalifalik poytaxti Bagʻdod yirik shaharga aylanib, bu yerga turli mintaqalardan olimlar kela boshlaydi. Ular dastlab yunon, suryoniy va hind tilidagi asarlarni arabchaga o‘girish bilan shug‘ullangan. Xuroson va Movarounnahr voliysi etib tayinlangan Horun Arrashidning oʻgʻli Ma’munning ilmparvarligi tufayli Marvga oʻrtaosiyolik olimlar yigʻila boshlaydi. 813 yilda xalifalikka oʻtirgan Ma’mun Marvdagi olimlar toʻgaragini Bagʻdodga olib ketadi va mashhur “Bayt ul-hikmat” (Ma’mun akademiyasi)ga asos soladi. Bu ilmiy muassasaga Muhammad ibn Muso Al-Xorazmiy rahbarlik qilgani haqida ma’lumotlar saqlangan. "Bayt ul-hikmat"da, shuningdek, Axmad Al Farg‘oniy, Ibn Turk al-Xuttaliy, Habash Hosib al-Marvaziy, Muso ibn Shokir oʻgʻillari kabi koʻplab oʻrtaosiyolik olimlar faoliyat koʻrsatgani bu o‘lkada arablar istilosiga qadar ham fan rivojlanganligi, xususan, yosh iqtidorli olimlar chiqishi uchun qulay muhit mavjud boʻlganligidan dalolat beradi.

IX asrdan fan tarixi "Musulmon renessansi" deb nomlangan yangi yuksalish davriga kiradi. "Bayt ul-xikmat"da Yunoniston, Hindiston, Xorazm va Xitoyda jamgarilgan bilimlar sintez qilinib, matematika izchil rivojlantirila boshlandi. Al Xorazmiy tarqoq bilimlarni tartibga keltirib, algebraga asos soladi. Uning oʻnli sanoq sistemasi bayon qilingan asari tufayli bu qulay hisoblash vositasi dunyoga yoyildi. Asarlari oʻqimishli boʻlishi uchun Xorazmiy aniq, va loʻnda bayon uslubini qoʻllagan. Shu tufayli uning asarlari keng tarqalgan. Xorazmiy uslubi yevropalik tarjimonlar tomonidan muallif nomi bilan algoritm deb atalgan.

Musulmon Sharqi olimlari geometriyani ham rivojlantirgan (Sobit ibn Qurra, Abulvafo, Umar Xayyom), tirgonometriyaga fan sifatida asos solganlar (Ibn al-Xaysam, Beruniy, Tusiy), xususan, Ahmad al-Fargʻoniy tomonidan Ptolemeyning stereografik proyeksiya haqidagi teoremasining isbotlanishi Bagʻdod akademiyasida geometriya chuqur oʻrganilganini koʻrsatdi. Arab tilida ijod qilgan matematiklarning uchinchi va toʻrtinchi darajali tenglamalarni geometrik usulda yechish yoʻllari keyinchalik analitik geometriya yaratilishiga turtki boʻlgan.

Matematika rivojlanishida Xorazm Ma’mun akademiyasi (Ibn Iroq, Beruniy) ham muhim rol oʻynagan. Sharq matematikasi rivojining choʻqqisi esa Samarqand ilmiy maktabi davriga toʻgʻri keladi. Ulugʻbek va uning rahbarligidagi olimlar (Qozizoda Rumiy, Gʻiyosiddin Koshiy, Ali Qushchi, Miram Chalabiy, Husayn Birjaniy va boshqalar) ulkan rasadxona qurish, yulduzlar koordinatalari va sayyoralar harakatini katta aniqlikda kuzatish ishlari bilan birga kuzatuv natijalari buyicha yoritqichlarning sferik koordinatalarini hisoblash usullarini, interpolyasiya formulalari, keyinchalik Gorner sxemasi deb atalgan usulni hamda ketma-ket yaqinlashishlar usulini ishlab chiqadilar. Ulugʻbekning "Ziji jadidi Koʻragoniy" asaridan oʻta aniqlikdagi trigonometrik funksiyalar jadvallari ham oʻrin olgan. Ulkan hajmdagi hisoblash ishlarini bajarish uchun Ulugʻbek rasadxonasi qoshida maxsus guruh — oʻziga xos hisoblash markazi tuzilgan. XVI asrdan Sharqda fan inqiroz sari yuz tutdi. Islom dunyosi olimlarining asarlari X-XII asrlardan Yevropaga tarqalib, tarjima qilina boshlangan va matematikaning XVI asrdan jadal rivojlanish yoʻliga kirishi uchun zamin hozirlagan. Jumladan, al-Xorazmiy, al- Fargʻoniy asarlari Ispaniya va Italiya orqali, Ulugʻbekning "Ziji jadidi Koʻragoniy" asari Istanbul orqali Yevropaga kirib borgan. Bu asarlar ta’sirida Italiyada matematikaga qiziqish kuchaydi (L. Fibonachchi, L. Pacholi, N. Tartalya). Arifmetik amallar qatoridan daraja, ildiz va logarifm oʻrin egallaydi. Uchinchi va toʻrtinchi darajali tenglamalarning ildizlari haqiqiy boʻlsada, manfiy sondan kvadrat ildiz vositasidagina yechish mumkinligi kompleks sonlarga ehtiyoj tugʻdiradi.

XVII asrdan matematika tarixining J. Vallis, I. Kepler, R. Dekart, B. Kavalyeri, P. Ferma, F. Viyet va boshqa Paskal nomlari bilan bogʻliq yangi davri boshlanadi. Matematik belgilashlar keng joriy etiladi. Bu, oʻz navbatida, matematika rivojiga ijobiy ta’sir etadi, analitik geometriya, proyektiv geometriya, ehtimollar nazariyasi va sonlar nazariyasiga asos soladi.

Bu davrda fransuz olimi M. Mersenn orqali dunyo olimlari oʻrtasida olib borilgan oʻzaro yozishmalar tufayli dastlabki xalqaro matematiklar jamoasi vujudga keldi, ular oʻrtasida ilmiy musobaqa muhiti kuchaydi, natijada yangi ob’yektlar (chiziqlar va tenglamalar) tadqiqotga tortildi, ekstremum topish, urinma yasash, yuzlarni hisoblash, kombinatorikaga oid yangi masalalar qoʻyish muhim boʻldi, funksiyalar, ya’ni oʻzgarishi bir-biri bilan bogʻliq kattaliklar bilan ishlashga toʻgʻri kela boshladi. Bunday masalalarni yechishda elementar usullar yetishmagani uchun cheksiz marta takrorlanadigan amallarga murojaat eta boshladilar. B. Kavalyeri aylanma jismlar hajmini hisoblashda “boʻlinmaslar usuli”ni qoʻlladi, F. Viyet ayniyatni, N. Merkator formulani topdi. I. Barrou egri chiziqli trapetsiya yuzi bilan urinmaning oʻzgarishi orasidagi munosabatni payqadi. XVII asr oxirida bu yoʻnalishdagi izlanishlar differensial va integral hisob yaratilishiga olib keladi. G. Leybnits yangi hisobga “cheksiz kichik” kattaliklar tushunchasini asos qilib oldi — bunday kattaliklar oʻz holicha aniq ma’noga ega boʻlmasada, ularning nisbatlari va cheksiz yigʻindilari tayin qiymatlarga teng chiqar edi. Leybnits bu usul bilan geometriyaning avvaldan yechilmay kelgan koʻplab muammolarini hal etish mumkinligini koʻrsatdi (1782—86 yy.).

I. Nyuton differensial va integral hisob gʻoyasiga boshqa tomondan — mexanika masalalari orqali yondashdi. Bu yerda ham ahvol geometriyaga oʻxshash edi: tekis harakatlarni oʻrgangan G. Galiley uchun elementar geometriya kifoya qilgan boʻlsa, murakkabroq harakatlar murakkabroq chiziqlarni tekshirishni talab etar edi. I. Nyuton 1669 yilda bu mavzudagi tadqiqotlari jamlangan “Flyuksiyalar metodi” nomli asarini I. Barrou va J. Kollinzga taqdim etgan, lekin u 1736 yilda nashr etilgan.

XVIII asrda matematika taraqqiyoti, asosan, differensial va integral hisobni rivojlantirish hamda tatbiq etish bilan bogʻliq boʻldi. Bernullilar oilasi, Eyler, D’alamber, Lagranj, Lejandr va Laplas kabi koʻplab atoqli olimlar yangi sohani atroflicha rivojlantirib, matematik analiz nomi bilan kuchli tadqiqot quroliga aylantirdilar. Uning asosida differensial tenglamalar, variatsion hisob va differensial geometriya kabi mustaqil sohalar vujudga keldi.

Nazorat savollari

1. Negizlar asarining muallifi kim?
2. “Bayt ul-hikmat” akademiyasiga kim asos slogan va bu akademiyada qaysi olimlar faoliyat ko’rsatgan?
3. Qaysi olim tomonidan Bagʻdod akademiyasida Ptolemeyning stereografik proyeksiya haqidagi teoremasining isbotlgan?
4. Mirzo Ulug’bek rahbarligida qaysi olimlar faoliyat ko’rsatgan va ularning matematika faniga qanday xissa qo’shganlar?

2-§. TO’PLAMLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.

Reja:

1. **Toʻplamlar va ularga doir tushunchalar.**
2. **Toʻplamlar ustida amallar va ularning xossalari.**
3. **Haqiqiy sonlar.**

Tayanch iboralar: Toʻplam, toʻplam elementi, boʻsh toʻplam, toʻplam qismi, toʻplamlar tengligi, toʻplamlar birlashmasi, toʻplamlar kesishmasi, toʻplamlar ayirmasi, chekli va cheksiz toʻplam, sanoqli to’plam, haqiqiy sonlar.

1. Toʻplamlar va ularga doir tushunchalar. Toʻplamlar nazariyasi deyarli barcha matematik fanlarning asosida yotadi. Bu nazariya asoslari 1879–1884 yillarda olmon matematigi ***Georg Kantor*** tomonidan chop etilgan bir qator maqolalarda yoritib berildi. ***To‘plam*** matematikaning poydevorida yotgan boshlang‘ich tushunchalardan biri bo‘lgani uchun u ta’rifsiz qabul etiladi. To‘plam deyilganda biror bir xususiyati bo‘yicha umumiylikga ega bo‘lgan obyektlar majmuasi tushuniladi. Masalan, I kurs talabalari to‘plami, [0,1] kesmadagi nuqtalar to‘plami, natural sonlar to‘plami, firma xodimlari to‘plami, korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar to‘plami va hokazo. Matematikada to‘plamlar A,B,C,D,… kabi bosh harflar bilan belgilanadi. A,B,C,D,… to‘plamlarga kiruvchi obyektlar ularning ***elementlari*** deyiladi va odatda mos ravishda kichik *a,b ,c ,d,…* kabi harflar bilan belgilanadi. Bunda «*a* element A to‘plamga tegishli (tegishli emas)» degan tasdiq $a\in$A ($a\notin$A) kabi yoziladi.

Ta’rif. Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam ***bo‘sh to‘plam*** deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi.

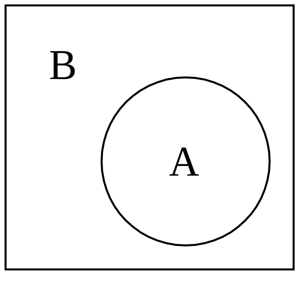
Masalan, { sin$x$ = 2 tenglamaning yechimlari}=$\varnothing$, { perimetri 0 bo‘lgan kvadratlar }= $\varnothing$, { kvadrati manfiy bo‘lgan haqiqiy sonlar }=$\varnothing$.

Algebrada 0 soni qanday vazifani bajarsa, to‘plamlar nazariyasida $\varnothing$ to‘plam shunga o‘xshash vazifani bajaradi.

Ta’rif. Agar A to‘plamga tegishli har bir *a* element boshqa bir B to‘plamga ham tegishli bo‘lsa ($a\in$A $\Rightarrow$ $a\in$B**)**, u holda A to‘plam B ***to‘plamining qismi*** deyiladi va A$\subset$B (yoki B$\supset$A) kabi belgilanadi.

Quyidagi 1-rasmda B kvadratdagi, A esa uning ichida joylashgan doiradagi nuqtalar to‘plamimni ifodalasa, unda A$\subset$B bo‘ladi.

1-rasm



Masalan, korxonada ishlab chiqarilayotgan oliy navli mahsulotlar to‘plamini A, barcha mahsulotlar to‘plamini esa B deb olsak , unda A⊂B bo‘ladi.

Ta’rifdan ixtiyoriy A to‘plam uchun A⊂ A va ∅ ⊂A tasdiqlar o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. Shu sababli to‘plamlar uchun ⊂ belgisi sonlar uchun ≤ belgiga o‘xshash ma’noga egadir.

Ta’rif. Agarda A va B to‘plamlar uchun A⊂B va B⊂A shartlar bir paytda bajarilsa, bu to‘plamlar ***teng*** deyiladi va A=B kabi yoziladi.

Masalan, A={–1;1} va B={x^2–1=0 tenglama ildizlari}, C= {badiiy asarni yozish uchun ishlatilgan harflar} va D={alfavitdagi harflar} to‘plamlari uchun A=B, C=D bo‘ladi[2].

2.To‘plamlar ustida amallar va ularning xossalari. Algebrada a va b sonlar ustida qo‘shish va ko‘paytirish amallari kiritilgan bo‘lib, ular

$a+b=b+a$ va $ab=ba$ (kommutativlik , ya’ni o‘rin almashtirish),

$a+(b+c)=(a+b)+c$ va $a(bc)=(ab)c$ (assotsiativlik, ya’ni guruhlash),

$a(b+c)=ab+ac$ (distributivlik, ya’ni taqsimot)

qonunlariga bo‘ysunadilar. Bulardan tashqari har qanday a soni uchun $a+0=a$ va $a\cdot 0=0$ tengliklar ham o‘rinli bo‘ladi.

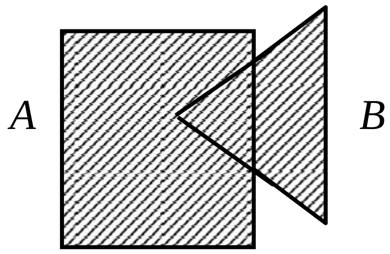
Endi to‘plamlar ustida algebraik amallar kiritamiz.

Ta’rif. A va B to‘plamlarning ***birlashmasi (yig‘indisi)*** deb shunday C to‘plamga aytiladiki, u A va B to‘plamlardan kamida bittasiga tegishli bo‘lgan elementlardan tashkil topgan bo‘ladi va A∪B kabi belgilanadi.

Agar A kvadratdagi, B esa uchburchakdagi nuqtalar to‘plamidan iborat bo‘lsa, unda ularning birlashmasi A∪B quyidagi 2-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo‘ladi:

2 “Oliy matematika” (Iqtisodchi va muhandis-texnologlar uchun). Rasulov , I.I. Safarov I.I., R.T. Muxitdinov . TOSHKENT, 2012. - 554 bet

2-rasm



Shunday qilib A∪B to‘plam yoki A to‘plamga , yoki B to‘plamga, yoki A va B to‘plamlarning ikkalasiga ham tegishli elementlardan iboratdir.

Masalan, A={1,2,3,4,5} va B={2,4,6,8} bo‘lsa A∪B={1,2,3,4,5,6,8}, C={I navli mahsulotlar} va D={II navli mahsulotlar } bo‘lsa, unda C∪D={I yoki II navli mahsulotlar} to‘plamni ifodalaydi.

To‘plamlarni birlashtirish amali , sonlarni qo‘shish amali singari,

$$A\cup B = B\cup A \quad \text{(kommutativlik)},$$

$$(A\cup B) \cup C = A\cup (B\cup C) \quad \text{(assosiativlik)}$$

qonunlarga bo‘ysunadi. Bulardan tashqari A∪∅ =A va, sonlardan farqli ravishda, A∪A=A, B⊂A bo‘lsa A∪B=A tengliklar ham o‘rinli bo‘ladi. Bu tasdiqlarning barchasi to‘plamlar tengligi ta’rifidan foydalanib isbotlanadi. Misol sifatida, oxirgi tenglikni isbotlaymiz:

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ yoki } x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow (A \cup B) \subset A;$$
$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow A \subset (A \cup B)$$

Demak, $(A \cup B) \subset A$, $A \subset (A \cup B)$ va , ta’rifga asosan, A∪B =A.

Bir nechta A_1 , A_2 , A_3 , … , A_n to‘plamlarning yig‘indisi

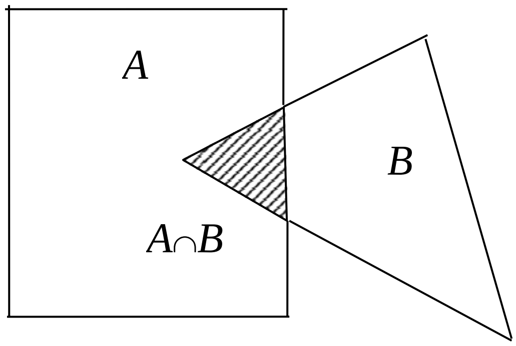
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

kabi belgilanadi va ulardan kamida bittasiga tegishli bo‘lgan elementlar to‘plami sifatida aniqlanadi.

Ta’rif. A va B to‘plamlarning ***kesishmasi (ko‘paytmasi)*** deb shunday C to‘plamga aytiladiki, u A va B to‘plamlarning ikkalasiga ham tegishli bo‘lgan elementlardan tashkil topgan bo‘ladi va A∩B kabi belgilanadi.

Agar A kvadratdagi, B esa uchburchakdagi nuqtalar to‘plamini belgilasa, unda ularning $A\cap B$ kesishmasi 3-rasmdagi shtrixlangan soha kabi ifodalanadi:

3-rasm



Shunday qilib $A\cap B$ to‘plam A va B to‘plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan bo‘ladi. Shu sababli agar ular umumiy elementlarga ega bo‘lmasa, ya’ni kesishmasa, unda $A\cap B=\varnothing$ bo‘ladi.

Masalan, $A=\{1,2,3,4,5\}$ va $B=\{2,4,6,8\}$ bo‘lsa $A\cap B=\{2,4\}$, C={Tekshirilgan mahsulotlar} va D={Sifatli mahsulotlar} bo‘lsa, unda $C\cap D$={Tekshirishda sifatli deb topilgan mahsulotlar} to‘plamni ifodalaydi.

To‘plamlarni kesihmasi amali quyidagi qonunlarga bo‘ysunadi:

$$A\cap B = B\cap A \quad \text{(kommutativlik)},$$

$$(A\cap B)\cap C = A\cap (B\cap C) \quad \text{(assotsiativlik)},$$

$$A\cap (B\cup C) = (A\cap B)\cup (A\cap C),$$

$$A\cup (B\cap C) = (A\cup B)\cap (A\cup C) \quad \text{(distributivlik)}$$

Shu bilan birga $A\cap A=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$ va $B\subset A$ bo‘lsa $A\cap B=B$ tengliklar ham o‘rinli bo‘ladi. Bu tasdiqlarning o‘rinli ekanligiga yuqorida ko‘rsatilgan usulda ishonch hosil etish mumkin.

Bir nechta $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ to‘plamlarning kesishmasi

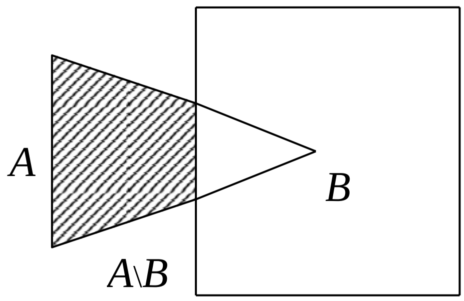
$$A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

kabi belgilanadi va barcha A_k ($k=1,2,\cdots,n$) to‘plamlarga tegishli bo‘lgan umumiy elementlardan tuzilgan to‘plam kabi aniqlanadi.

Ta'rif. A va B to'plamlarning ***ayirmasi*** deb A to'plamga tegishli, ammo B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlardan tashkil topgan to'plamga aytiladi va A\B kabi belgilanadi.

Agar A uchburchakdagi, B esa kvadratdagi nuqtalar to'plamini belgilasa, unda ularning A\B ayirmasi 4-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi :

4-rasm



Masalan, A={1,2,3,4,5} va B={1,3,7,9} bo'lsa, unda A\B={2,4,5}, B\A={7,9}; C={Korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar}va D={Sifatli mahsulotlar} bo'lsa, C\D={ Korxonada ishlab chiqarilgan sifatsiz mahsulotlar }.

Demak, A\B to'plam A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan hosil bo'ladi. To'plamlar ayirmasi uchun

$$A\backslash A=\varnothing, \quad A\backslash\varnothing=A\ , \ \ \varnothing\backslash A=\varnothing$$

va $A\subset B$ bo'lsa $A\backslash B=\varnothing$ munosabatlar o'rinlidir.

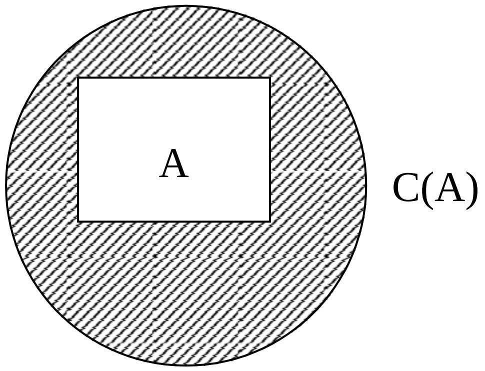
Ta'rif. Agar ko'rilayotgan barcha to'plamalarni biror Ω to'plamning qism to'plamlari kabi qarash mumkin bo'lsa, unda Ω ***universal to'plam*** deb ataladi.

Masalan, sonlar bilan bog'liq barcha to'plamlar uchun $\Omega=(-\infty, \infty)$, insonlardan iborat to'plamlar uchun Ω={Barcha odamlar} universal to'plam bo'ladi.

Ta'rif. Agar A to'plam Ω universal to'plamning qismi bo'lsa, unda Ω\A to'plam ***A to'plamning to'ldiruvchisi*** deb ataladi va C(A) kabi belgilanadi.

Agar quyidagi chizmada Ω universal to'plam doiradagi, A to'plam esa uning ichida joylashgan to'ri to'rtburchakdagi nuqtalardan iborat bo'lsa, uning to'ldiruvchisi C(A) 5-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi:

5- rasm



Demak, C(A) to‘plam A to‘plamga kirmaydigan elementlardan tashkil topgan bo‘ladi, ya’ni $x \in A \Rightarrow x \notin C(A)$, $x \notin A \Rightarrow x \in C(A)$.

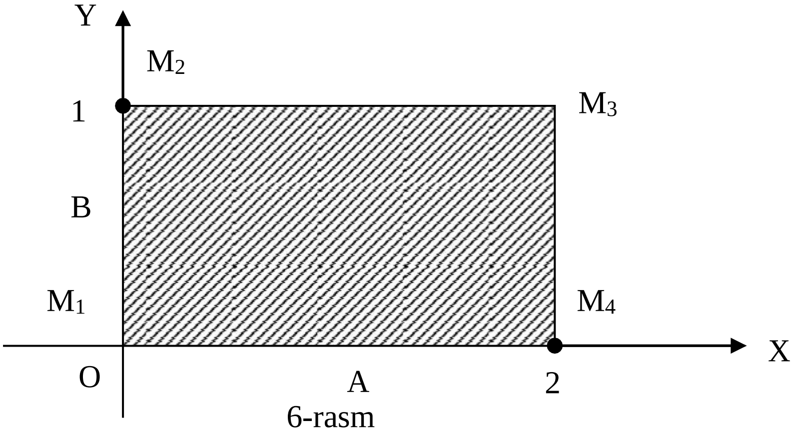
Masalan, Ω={Barcha korxonalar}, A={Rejani bajargan korxonalar} bo‘lsa, unda C(A)={ Rejani bajarmagan korxonalar} to‘plami bo‘ladi; Ω={1,2,3, · · ·, n, · · ·}–natural sonlar to‘plami, A={2,4,6, · · · , 2n, · · ·}–juft sonlar to‘plami, B={5,6,7, · · ·, n, · · ·}– 4dan katta natural sonlar to‘plami bo‘lsa, unda C(A)={1,3,5, · · ·, 2n–1, · · ·}– toq sonlar, C(B)={1,2,3,4}–5dan kichik natural sonlar to‘plamlarini ifodalaydi.

Ta’rif. A va B to‘plamlarning ***Dekart ko‘paytmasi*** deb A×B kabi belgilanadigan va (x, y) (x∈A, y∈B) ko‘rinishdagi juftliklardan tuzilgan yangi to‘plamga aytiladi.

Masalan, A=[0,2] va B=[0,1] bo‘lsa, A×B to‘plam tekislikdagi (x, y) (x∈A=[0,2], y∈B=[0,1]) nuqtalardan, ya’ni uchlari $M_1(0,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(2,1)$ va $M_4(2,0)$ nuqtalarda joylashgan to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat bo‘ladi (6-rasmga qarang):

Agar C={Tajribali ishchilar} va D={Yosh ishcilar} bo‘lsa, unda C×D tajribali va yosh ishchidan iborat bo‘lgan turli “ustoz-shogird” juftliklaridan iborat to‘plamni ifodalaydi.

Umuman olganda to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi uchun A×B≠B×A, ya’ni kommutativlik qonuni bajarilmaydi. Masalan, A=[0,2] va B=[0,1] to‘plamlar uchun A×B asosining uzunligi 2, balandligi 1 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni , B×A esa asosining uzunligi 1, balandligi 2 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni ifodalaydi va bunda A×B≠B×A bo‘ladi.



6-rasm

3. Haqiqiy sonlar. Tabiat, fan va texnika masalalarida qatnashgan miqdorlarning o‘zaro munosabatlarini tekshirishga olib keladigan miqdorni o‘zaro munosabatlarini tekshirishga olib keladigan miqdorni o‘lchov birligi yordamida taqqoslab ko‘rish natijasida yoki boshqacha aytganda o‘lchash natijasida son hosil bo‘ladi. O‘lchash natijasida butun, kasr sonlar hosil bo‘lishi mumkin. Son tushunchasi qadim zamonlarda paydo bo‘lib, uzoq davrlar davomida kengaygan va umumlashgan.

Butun, kasr, musbat, manfiy sonlar, nol soni bilan birga ratsional sonlarni tashkil etadi va har qanday ratsional sonni ikkita butun son nisbati, ya’ni *p/q* ko‘rinishda tasvirlash mumkin.

Masalan: 3=3/1; 0,75=3/4; 0=0/1 va h.k.

Ratsional sonlarni chekli yoki o‘nli kasr ko‘rinishda ifodalash mumkin. Davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasrlar **irratsional sonlar** deyiladi.

Masalan: $\sqrt{5}$, $3-\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ va h.k.

Barcha ratsional va irratsional sonlar to‘plami **haqiqiy sonlar** deyiladi. Haqiqiy sonlar qiymatlari bo‘yicha tartibga solingandir. Har bir juft haqiqiy son x va y uchun quyidagi munosabatlardan faqat bittasi o‘rinli bo‘ladi. $x<y$, $x=y$, $x>y$ haqiqiy sonlarni sonlar o‘qining nuqtalari bilan tasvirlash mumkin.

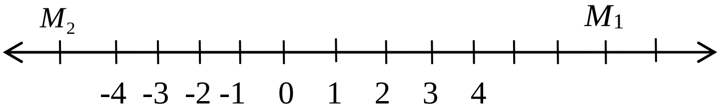
Sonlar o‘qi shunday cheksiz to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladiki unda:

1) Sanoq boshi deyiladigan biror 0 nuqta;

2) Musbat va manfiy yo‘nalish (bular strelka bilan ko‘rsatiladi)

0 nuqtadan boshlab chapdan o‘ngga bo‘lgan yo‘nalish musbat, aksinchasi manfiy bo‘ladi;

3) Uzunliklarni o‘lchash uchun masshtab birligi tanlab olingan bo‘ladi.



0 nuqta 0 sonini tasvirlaydi, har bir haqiqiy son sonlar o‘qining ma’lum bir nuqtasi bilan tasvirlanadi. Ikkita har xil haqiqiy sonlar o‘qining har xil nuqtalari bilan tasvirlanadi. Sonlar o‘qining har bir nuqtasi birgina haqiqiy sonlarning tasviridan iboratdir. Shunday qilib barcha haqiqiy sonlar bilan sonlar o‘qidagi barcha nuqtalar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjuddir. Har bir songa sonlar o‘qida uni tasvirlanuvchi birgina nuqta mos keladi va aksincha, sonlar o‘qidagi har bir nuqtaga shu nuqta bilan tasvirlanuvchi birgina son to‘g‘ri keladi.

Haqiqiy sonlar to‘plami quyidagi muhim xossaga ega, ixtiyoriy ikkita haqiqiy son orasida ratsional sonlar ham, irratsional sonlar ham topiladi. Quyidagi teorema o‘rinlidir (isbotsiz keltiramiz).

Teorema. Har bir irratsional α son istalgan darajadagi aniqlikda ratsional sonlar yordami bilan ifodalanadi.

Misol.

$$\sqrt{12} = \begin{cases} 1{,}4 & kami \quad bilan \\ 1{,}5 & ko'pi \quad bilan \end{cases}$$

Haqiqiy sonlarning absolyut qiymati (moduli) $|x|$ kabi belgilanadi. x **haqiqiy sonning absolyut qiymati (moduli)** deb, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi manfiy bo‘lmagan haqiqiy songa aytiladi.

$x \geq 0$ bo‘lsa, $|x| = x$

$x < 0$ bo‘lsa, $|x| = -x$

Masalan, $|4| = 4, \ |-8| = 8, \ |0| = 0$

Har qanday son x uchun $x \leq |x|$ munosabat o‘rinlidir.

Sonlarning absolyut qiymatining xossalari.

1) Haqiqiy sonlar algebraik yig‘indisining absolyut qiymati qo‘shiluvchilar absolyut qiymatlarining yig‘indisidan katta emas;

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

Haqiqatdan, agar $x+y\ge 0$ bo‘lsa, u holda

$|x+y| = x+y \le |x|+|y|$, chunki $x\le |x|$, $y\le |y|$

Agar $x+y<0$ bo‘lsa, u holda

$|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) \le |x|+|y|$

2) Ayirmaning absolyut qiymati kamayuvchi va ayriluvchining absolyut qiymatlari ayirmasidan kichik emas.

$$|x-y| \ge |x|-|y| \qquad |x|>|y|$$

Haqiqatdan, agar x-y=z deb olsak unda $x=y+z$ bo‘lib

$|x| = |y+z| \le |y| + |z| = |y| + |x-y|$ bundan

$|x| - |y| \le |x-y|$ bo‘ladi.

3) Ko‘paytmaning absolyut qiymati ko‘paytuvchilar absolyut qiymatlarining ko‘paytmasiga teng.

$$|xyz| = |x|\cdot|y|\cdot|z|$$

4) Bo‘linmaning absolyut qiymati bo‘linuvchi va bo‘luvchi absolyut qiymatlarining bo‘linmasiga teng

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

Quyidagi munosabatlarni o’rinli bo’lishini ko’rsating:

1. $A\cap B \subset A = A\cup B$.
2. $A\cap (A\cup B) = A$.
3. $A\cup (B\cap C) = (A\cup B)\cap (A\cup C)$.
4. $A\cap (B\cup C) = (A\cap B)\cup (A\cap C)$.

5. $A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$.

6. $A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$.

7. $A\cup(CA\cap B)=A\cup B$.

8. $A\backslash(B\backslash C)=(A\backslash B)\cup(A\cap C)$.

9. $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

10. $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=(A\cup B)\cap(CA\cup CB)$.

11. $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ va $B=\{2,4,6,8,10,12\}$ bo'lsin. U holda $A\cup B=?$ va $A\cap B=?$ ni toping.

12. $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ va $B=\{2,4,6,8,10,12\}$ bo'lsin. U holda $A\backslash B=?$ va $B\backslash A=?$ ni toping.

13. $A=\{1,3,5,7,9\}$ va $B=\{2,4,6,8,10\}$ bo'lsin. U holda $A\Delta B=?$ ni toping.

14. $A=\{2n-1\ toq\ sonlar\}$ va $B=\{N-natural\ sonlar\}$ bo'lsin. U holda $CA=?$ ni toping.

15. $A=\{1,2,3,4,5\}$ va $B=\{2,4,6,8\}$ bo'lsin. U holda $A\times B=?$ ni toping.

XULOSA

Oliy matematika fanining boshlang‘ich tushunchalaridan biri to‘plam tushunchasi hisoblanadi. Matematikaning asosini to‘plamlar nazariyasi tashkil etadi. Kantor to‘plamlar nazariyasining asoschisi hisoblanadi. To‘plamlar ustida ularning birlashmasi (yig‘indisi), kesihmasi (ko‘paytmasi) va ayirmasi kabi algebraik amallar aniqlanadi. Bulardan tashqari to‘plamlar uchun Dekart ko‘paytmasi amali ham kiritilgan

Nazorat savollari.

1. To‘plam deganda nima tushuniladi?
2. To‘plam elementi qanday aniqlanadi?
3. To‘plamlarga misollar keltiring.
4. Qanday to‘plam bo‘sh to‘plam deyiladi?

5. To‘plam qismi qanday ta’riflanadi?
6. Qachon ikkita to‘plam teng deyiladi?
7. To‘plamlar birlashmasi qanday kiritiladi?
8. To‘plamlar birlashmasi amali qanday xossalarga ega?
9. To‘plamlar kesishmasi qanday ta’riflanadi?
10. To‘plamlar kesishmasi amali qanday xossalarga ega?
11. To‘plamlar ayirmasi qanday aniqlanadi?
12. Universal to‘plam nima?
13. To‘plam to‘ldiruvchisi deb nimaga aytiladi?
14. To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?

II BOB. CHIZIQLI ALGEBRA

1-§. MATRITSALAR

Reja:

1. Matritsalar va ular ustida amallar.

2. Teskari matritsa va uni topish.

Tayanch iboralar: Matritsa, matritsa elementi, satr matritsa, ustun matritsa, kvadrat matritsa, diogonal matritsa, birlik matritsa, matritsalar yig‘indisi, matritsalar ayirmasi, matritsalar ko‘paytmasi, matritsani tranponirlash.

I. <u>Ta’rif</u>. $m\times n$ **o‘lchamli matritsa** deb, a_{ij}, $i=1,2,...,m,$ $j=1,2,...,n$ sonlardan tuzilgan *m* ta satr, *n* ta ustunli quyidagi

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ...a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ...a_{mn} \end{pmatrix}$$

jadvalga aytamiz. Matritsa qisqacha, $A=\left\| a_{ij} \right\|$ ko‘rinishda ham yozilishi mumkin.

Agar $m = n$ bo‘lsa, ***A* kvadrat matritsa** deyiladi.

Bir oila uchun bir hafta mobaynida oziq-ovqat maxsulotlarining kunlik miqdorlari sarfini ko’rib chiqaylik:

	du	se	chor	pay	ju	sha	ya
Non (dona)	1	2	1	1	2	0	1
Sut (litr)	2	3	1	2	3	1	0
Tuxum (dona)	2	0	3	4	2	1	5
Sariyog’ (10 gr)	5	7	6	8	4	8	7

Agar bir oila uchun hatada ishlatiladigan mahsulotlar va ularning miqdorini jadval ko'rinishiga keltiradigan bo'lsa, buni A matritsa orqali ifodalashimiz mumkin.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 7 & 7 & 6 & 8 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Agar barcha $i = 1,2,...,m,\quad j = 1,2,...,n$ laruchun $a_{ij} = b_{ij}$ bo‘lsa, bir xil o‘lchamli $A = \| a_{ij} \|$ va $B = \| b_{ij} \|$ matritsalarni teng deymiz, $A = B$. Bir xil o‘lchamli $A = \| a_{ij} \|$ va $B = \| b_{ij} \|$ matritsalarni yig‘indisi $A + B$ deb, shunday $C = \| c_{ij} \|$ matritsaga aytamizki, bunda $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\quad i = 1,2,...,m,\quad j = 1,2,...,n$ bo‘ladi.

Misol 1.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$A = \| a_{ij} \|$ matritsani α songa ko‘paytmasi deb, A matritsani barcha elementlarini α ga ko‘paytirishdan hosil bo‘ladigan $B = \| b_{ij}, \|$ $b_{ij} = \alpha\, a_{ij},\ i = 1,2,...,m,\quad j = 1,2,...,n,$ matritsaga aytamiz.

Misol 2.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$$

$m \times k$ o‘lchamli $A = \| a_{ij} \|$ matritsaning $k \times n$ o‘lchamli $B = \| b_{ij} \|$ matritsaga ko‘paytmasi deb, elementlari quyidagi

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + ... + a_{ik} b_{kj},\quad i = 1,2,...,m,\quad j = 1, 2,..., n$$

formulalardan aniqlanadigan $m \times n$ o‘lchamli $C = \| c_{ij} \|$ matritsaga aytamiz.

Misol 3.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 4-2 & 0+2 \\ 0-3 & 0+1 & 0-1 \\ 3+3 & 12-1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 6 & 11 & 1 \end{pmatrix} = C$$

Agar $m \neq n$ bo‘lsa, $B \cdot A$ ko‘paytmani bajarib bo‘lmaydi, lekin agar $m = n$ bo‘lsa, umumiy holda $A \cdot B = B \cdot A$ bo‘lmaydi, chunki $A \cdot B$ $m \times m$ o‘lchamli, $B \cdot A$ esa $n \times n$ o‘lchamli matritsa bo‘ladi. Hatto $m=n$ bo‘lgan holda ham matritsalar ko‘paytmasi uchun kommutativlik (o‘rin almashtirish) xossasi o‘rinli emas. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B =\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & -4 \\ 9 & 7 & 11 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot B=\begin{pmatrix} 7 & 7 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 18 & 15 & 6 \end{pmatrix}$$

ya’ni $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Bevosita tekshirish yo‘li bilan quyidagi

1) $(\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B) = \lambda \cdot (A \cdot B)$, λ - son

2) $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

3) $C \cdot (A+B) = C \cdot A + C \cdot B$;

4) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;

xossalarni o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Agar A va B $n \times n$ o‘lchamli kvadrat matritsalar bo‘lsa, u holda

1) $det(A \cdot B) = det\, A \cdot det\, B$;

2) $det(\lambda A) = \lambda^n \, det\, A$;

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Agar barcha i, j lar uchun $a_{ij}^T = a_{ji}$ bo‘lsa, $A^T = \|a_{ij}^T\|$ matritsani $A = \|a_{ij}\|$ matritsaga **transponirlangan matritsa** deymiz.

Agar A $m \times n$ o‘lchamli matritsa bo‘lsa, A^T $n \times m$ o‘lchamli matritsa bo‘ladi.

Misol 4.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^T=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Quyidagi xossalar o‘rinli:

1) $\left(A^T\right)^T = A$;

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

3) $(A\cdot B) = B^T \cdot A^T$

Agar $\left(A^T\right) = A$ bo‘lsa, kvadrat A matritsa simmetrik, $A^T = -A$ bo‘lsa, **kososimmetrik matritsa** deb ataladi.

__**Teorema**__**.** Har qanday *A* kvadrat matritsani simmetrik *B* va kososimmetrik *C* matritsalar yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash mumkin.

II. Quyida $n \times n$ o‘lchamli matritsani ko‘raylik:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ixtiyoriy $n \times n$ o‘lchamli $A = \left\| a_{ij} \right\|$ matritsa uchun $A \cdot E = E \cdot A = A$ ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas, ya’ni *E* matritsalar uchun birlik vazifasini bajaradi. Shuning uchun *E* ni **birlik matritsa** deb aytiladi.

Determinanti 0 ga teng bo‘lgan quyidagi har qanday $n \times n$ o‘lchamli $A = \left\| a_{ij} \right\|$ matritsa **maxsus matritsa** deb ataladi:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Aks holda, ya’ni $\det A \neq 0$ bo‘lsa, *A* matritsa **maxsus bo‘lmagan matritsa** deyiladi.

Masalan, avvalgi paragrafda ko‘rilgan misolga ko‘ra

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Matritsa maxsus matritsa, chunki

$$det=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}=0$$

<u>Ta’rif</u>. Agar $A\cdot B=B\cdot A=E$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, $n\times n$ o‘lchamli kvadrat $B=\|b_{ij}\|$ matritsani maxsus bo‘lmagan $n\times n$ o‘lchamli $A=\|a_{ij}\|$ matritsaga **teskari matritsa** deb ataladi. Teskari matritsa $B=A^{-1}$ ko‘rinishda belgilanadi.

Endi teskari matritsani bevosita hisoblash usullarini ko‘ramiz.

Faraz qilaylik, $A=\|a_{ij}\|$ maxsus bo‘lmagan kvadrat matritsa bo‘lsin. Agar $A_{ij}-a_{ij}$ elementning *det A* dagi algebraik to‘ldiruvchisi bo‘lsa, u holda

$$A^{v}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

***A* ga biriktirilgan matritsa** deb ataladi. Determinantning (3), (4) xossalariga asosan quyidagi kelib chiqadi:

$$A^{v}A=A\,A^{v}=det\,A\cdot E\text{ , bundan } A^{-1}=\frac{1}{det\,A}A^{v}$$

Teskari matritsani hisoblashning bu usuli biriktirilgan **matritsalar usuli** deb ataladi.

Misol 4. Biriktirilgan matritsalar usuli bilan

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsani toping.

Yechish. *det A* = - 4. Demak, *A* maxsus bo‘lmagan matritsa ekan. Uning barcha algebraik to‘ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=4, \quad A_{21}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-7, \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-5$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-6, \quad A_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=10, \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-6$$

Shuning uchun,

$$A^{v}=\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

va

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}A^{v}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 7/4 & 9/4 & -5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Quyida ko‘riladigan usulimiz elementar almashtirishlar usuli deb ataladi.

Agar A $n\times n$ o‘lchamli maxsus bo‘lmagan kvadrat matritsa bo‘lsa, uning uchun o‘lchami $n\times 2n$ bo‘lgan $\Gamma_A=(A|E)$ matritsa tuzib olamiz, ya’ni A matritsaga birlik E matritsani birlashtirib tuzamiz. Hosil bo‘lgan Γ_A matritsani satrlari ustida elementar almashtirishlar bajarib, uni $(E\backslash B)$ ko‘rinishga keltiramiz. U holda $B=A^{-1}$ bo‘ladi.

Misol 5. Elementar almashtirishlar usuli yordamida quyidagi matritsaga teskari matritsani toping:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Yechish. Γ_A matritsani tuzib olamiz:

$$\Gamma_A=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Γ_A matritsaning satrlarini mos ravishda $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$ deb belgilab olib, ular ustida quyidagi almashtirishlarni bajaramiz:

$$\gamma_1' = \frac{1}{3}\gamma_1, \quad \gamma_1'' = \gamma_1' - \frac{2}{7}\gamma_2', \quad \gamma_1''' = \gamma_1'' - \frac{1}{24}\gamma_3''$$

$$\gamma_2' = \gamma_2 - \frac{4}{3}\gamma_1 \quad \gamma_2'' = \frac{3}{7}\gamma_2', \quad \gamma_2''' = \gamma_2'' - \frac{1}{12}\gamma_3''$$

$$\gamma_3' = \gamma_3 - \frac{2}{3}\gamma_1 \quad \gamma_3'' = \gamma_3' + \frac{1}{7}\gamma_2' \quad \gamma_3''' = \frac{7}{24}\gamma_3''$$

Natijada ketma-ket quyidagini hosil qilamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 2/3 & -4/5 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 10/4 & -2/3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/7 & 5/7 & -2/7 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -4/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 24/7 & -6/7 & 1/7 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 2/3 & -4/5 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 10/4 & -2/3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{array}\right)$$

Demak,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{pmatrix}$$

Teskari matritsa quyidagi xossalarga ega:

1^0. $(\alpha A)^{-1} = A^{-1}/\alpha \qquad (\alpha \neq 0)$

2^0. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

3^0. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

<u>1^0-xossaning isboti.</u> Agar $\alpha \neq 0$ bo‘lsa, $det(\alpha A) = \alpha^n \, det A \neq 0$ bo‘ladi, shuning uchun $\alpha A = \|\alpha a_{ij}\|$ matritsa maxsus emas, demak, $(\alpha A)^{-1}$ mavjud. Agar A_{ij} deb αA matritsaning αa_{ij} elementning algebraik to‘ldiruvchisi, A_{ij} deb esa A matritsaning a_{ij} elementini algebraik to‘ldiruvchisini belgilasak, u holda $A_{ij} = \alpha^{n-1} A_{ij}$ ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Shu sababli,

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha^n \det A}\|A_{ji}\| = \frac{1}{\alpha^n \det A}\|\alpha^{n-1} A_{ji}\| =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\det A}\|A_{ji}\| = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\det A}A^{v} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$$

<u>2^0-xossaning isboti.</u> Agar $B^{-1}A^{-1}$ ni $A\cdot B$ ga o‘ng tomonidan ko‘paytirilsa

$$AB\cdot B^{-1}A^{-1} = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AE\,A^{-1} = A\,A^{-1} = E$$

Agar chap tomonidan ko‘paytirsak:

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}E\,B = B^{-1}B = E$$

bo‘ladi. Demak, haqiqatdan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ekan.

<u>3^0-xossaning isboti.</u> A^T ni $\left(A^{-1}\right)^T$ ga chap tomonidan ko‘paytiraylik, u holda 2.1 §dagi transponirlangan matritsalarning 3-xossasiga ko‘ra

$$A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = E^T = E$$

va A^T ni $\left(A^{-1}\right)^T$ ga o‘ng tomondan ko‘paytirsak quyidagi hosil bo‘ladi:

$$\left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(AA^{-1}\right)^T = E^T = E$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1. Agar $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ bo’lsa, $2A + B$ ni toping[3].

2. Agar $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ bo’lsa, $A + 3B$ ni toping.

3. Agar $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -11 & 10 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ bo’lsa, $A - B$ ni toping.

4. Agar $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ bo’lsa, $A + 3B$ ni toping.

---

[3] В.П. Минорский “Олий математикадан масалалар тўплами”,Тошкент 1988 йил.(3-112-б.)

5. Agar $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $5A - B$ ni toping.

6. Agar $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A + 2B$ ni toping.

7. Agar $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $3A - B$ ni toping.

8. Agar $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A + B$ ni toping.

9. Agar $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $5A - 2B$ ni toping.

10. Agar $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $-A + 2B$ ni toping.

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ga teng. $A \cdot B$ ni toping.

12. $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ ga teng. $A \cdot B$ ni toping.

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ga teng. $A \cdot B$ ni toping.

14. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ga teng. $2A \cdot B$ ni toping.

15. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ga teng. $-3A \cdot B$ ni toping.

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ga teng. $A \cdot B$ ni toping.

17. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ ga teng. $A \cdot 2B$ ni toping.

18. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\ 1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 7 & 0 & 6\end{pmatrix}$ ga teng. $3A\cdot B$ ni toping.

19.$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}6\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$ ga teng. $7A\cdot B$ ni toping.

20. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ ga teng. $A\cdot B$ ni toping.

XULOSA

Matritsa –sonlarning satrlar va ustunlar shaklida joylashtirilgan jadvali hisoblanadi. Matritsalar matematikaning ham nazariy, ham amaliy masalalarida keng qo‘llaniladi. Matritsalar ustida ularni songa ko‘paytirish, o‘zaro qo‘shish, ayirish va ko‘paytirish kabi algebraik amallar aniqlangan. Bunda hosil bo‘ladigan matritsalar algebrasidagi ko‘paytirish amalining o‘ziga xos xususiyati shundan iboratki, u kommutativlik qonuniga bo‘ysunmaydi. Matritsalar uchun ko‘rsatilgan algebraik amallardan tashqari transponirlash amali va teskari matritsani topish ham aniqlangan.

Nazorat savollari.

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Matritsaning tartibi qanday aniqlanadi?
3. Matritsaning elementi deb nimaga aytiladi?
4. Matritsalar qanday turlarga ajratiladi?
5. Qachon ikkita matritsa teng deyiladi?
6. Matritsaning qanday elementi diagonal deyiladi?
7. Birlik matritsa qanday ta’riflanadi?
8. Qachon matritsa nol matritsa deyiladi?
9. Matritsani songa ko‘paytirish qanday aniqlanadi?
10. Qaysi shartda matritsalarni qo‘shish yoki ayirish mumkin?
11. Matritsalar yig‘indisi yoki ayirmasi qanday topiladi?
12. Matritsalarni qo‘shish amali qanday qonunlarga bo‘ysunadi?
13. Matritsalarni qo‘shish amali qanday xossalarga ega?

2-§. DETERMINANTLAR

Reja:

1. **Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.**
2. **Determinantlarning xossalari.**
3. ***n* – tartibli determinantlar.**

Tayanch iboralar: Determinant, determinantning elementi, determinantning satri, determinantning ustuni, minor, algebraik to‘ldiruvchi.

I. Quyidagi a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} haqiqiy sonlardan tuzilgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

kvadrat jadval 2-tartibli **kvadrat matrisa** deyiladi, bu yerda a_{ij}- uning elementlari, a_{11}, a_{12} *va* a_{21}, a_{22} lar uning satr elementlari, a_{11}, a_{21} *va* a_{12}, a_{22} **ustun elementlari** deb ataladi. a_{ij} ning birinchi indeksi *i* satr raqami, *j* ustun raqamini bildiradi. Misol uchun, a_{21} 2-satr va 1-ustunda joylashgan. Bu matritsaning determinanti deb, quyidagi songa aytamiz:

$$det\,A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21} \tag{1}$$

Xorijiy adabiyotlarda quyidagi hollarda keltiriladi.

$$det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc \;\; yoki \;\; \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

Xuddi shunday,

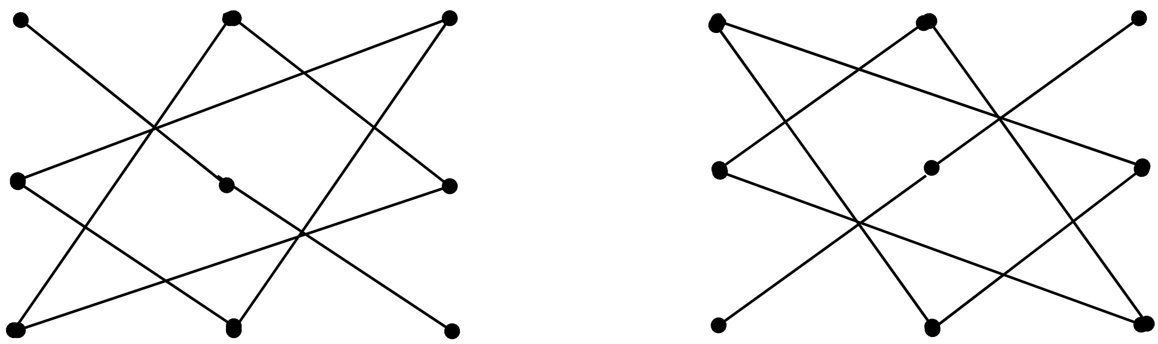
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

kvadrat jadvalni 3-tartibli kvadrat matrisa deb atasak, uning determinanti deb quyidagi sonni aytamiz:

$$\det A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(1) va (2) determinantlar mos ravishda 2-tartibli va 3-tartibli **determinantlar** deb ham ataladi.

(2) determinantni hisoblash uchun «uchburchaklar usuli» deb ataluvchi quyidagi diagrammadan foydalanish mumkin:



a) (+) b) (-)

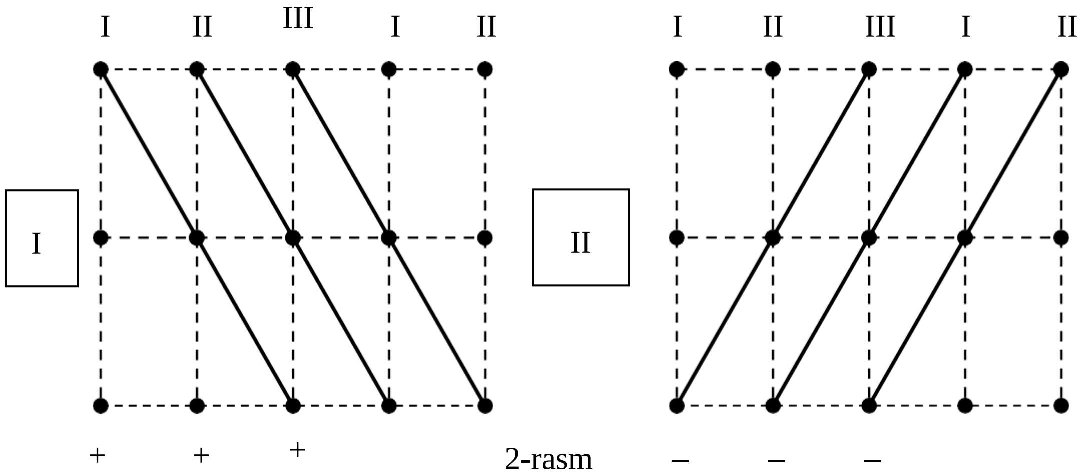
1-rasm

Har bir diagrammada tutashtirilgan elementlar o‘zaro ko‘paytirilib, keyin natijalar qo‘shiladi,

a) diagrammadagi yig‘indi «+» ishorasi bilan,

b) diagrammadagi yig‘indi esa «-» ishora bolan olinib, ikkala natija o‘zaro qo‘shiladi.

3-tartibli determionantlarni hisoblash uchun «Sappyus usuli» deb ataluvchi quyidagi diagramma ham mavjud:



2-rasm

bu yerda tutashtirilgan elementlar o‘zaro ko‘paytirilib, asosiy diagonalga parallel tutashtirilganlari alohida qo‘shilib «+» ishora bilan, yon diagonalga parallel tutashtirilganlari alohida qo‘shilib «-» ishora bilan olinib, natijalar qo‘shiladi.

II. 1. Agar determinantning barcha yo‘l elementlarini ustun elementlariga yoki aksincha almashtirilsa, uning qiymati o‘zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2. Agar determinantning ikki yonma-yon turgan satr (ustun) elementlarini o‘rnini mos ravishda almashtirsak, determinant qiymati qarama-qarshi ishoraga o‘zgaradi:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3. Agar determinantning biror satr (ustun) elementlari umumiy ko‘paytuvchiga ega bo‘lsa, u holda bu ko‘paytuvchini determinant tashqarisiga chiqarish mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} = \lambda\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) = \lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

4. Agar determinantning biror satr (ustun) elementlari mos ravishda boshqa satr (ustun) elementlariga proporsional bo‘lsa, u holda determinant qiymati nolga teng bo‘ladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} \\ a_{21} & \lambda a_{21} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}\, a_{21} - \lambda a_{11}\, a_{21} = \lambda\left(a_{11}\, a_{21} - a_{11}\, a_{21} \right) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Xususan, agar $\lambda = 0$ bo‘lsa, determinant qiymati nolga tengdir.

5. Agar determinantning satr (ustun) elementlari ikki ifodaning yig‘indisi ko‘rinishida bo‘lsa, u holda determinant ikki determinant yig‘indisi ko‘rinishida yozilishi mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}^{1} + a_{12}^{11} \\ a_{21} & a_{22}^{1} + a_{22}^{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}^{1} \\ a_{21} & a_{22}^{1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}^{11} \\ a_{21} & a_{22}^{11} \end{vmatrix}$$

6. Agar determinantning biror satr (ustun) elementlarini biror $\lambda \neq 0$ songa ko‘paytirib, mos ravishda boshqa satr (ustun) elementlariga qo‘shsak, determinant qiymati o‘zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + \lambda\, a_{11} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda\, a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda\, a_{11} \\ a_{21} & \lambda\, a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Yuqorida keltirilgan xossalar determinant uchinchi va undan yuqori tartibli bo‘lganda ham o‘rinlidir.

Keyingi xossalarni kiritish uchun uchinchi tartibli Δ determinantdan foydalanamiz,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Berilgan uchinchi tartibli determinantning i – yo‘li va j – ustunini o‘chirishdan hosil bo‘lgan ikkinchi tartibli determinant a_{ij} **elementning minori** deyiladi va M_{ij}- deb belgilanadi.

Masalan, a_{11} elementning minori

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Xuddi shuningdek, a_{12}-niki

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ga teng va hokazo.

Quyidagi $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ ifoda a_{ij} elementning **algebraik to‘ldiruvchisi** deyiladi. a_{11} elementning algebraik to‘ldiruvchisi

$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, a_{12}- elementniki esa $A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ va hokazo.

7. Determinantning biror satr (ustun) elementlarini mos ravishda o‘zining algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytirib qo‘shsak, u holda yig‘indi determinant qiymatiga teng bo‘ladi. Haqiqatdan,

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \qquad \Delta=a_{11}A_{11}+a_{22}A_{22}+a_{13}A_{13}$$
$$\Delta=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} \qquad \Delta=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$$
$$\Delta=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \qquad \Delta=a_{31}A_{31}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}$$

Tengliklarning to‘g‘ri ekanligini isbotlash qiyin emas.

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$
$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

8. Determinantning biror satr (ustun) elementlarini mos ravishda boshqa satr (ustun) elementlarining algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytirib qo‘shsak, u holda yig‘indi nolga teng bo‘ladi. Masalan,

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0 \qquad a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}=0$$
$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=0 \qquad a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33}=0$$

va hokazo. Haqiqatdan,

$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=$$
$$=a_{11}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{13}a_{22}-a_{11}a_{12}a_{23}+a_{12}a_{13}a_{21}+a_{11}a_{13}a_{22}-a_{12}a_{13}a_{21}=0$$

Yuqorida keltirilgan xossalar quyida kiritiladigan *n* – tartibli determinantlar uchun ham o‘rinlidir.

III. Birinchi *n* ta natural sonlarning {1, 2, …, *n*} to‘plamiga o‘zini har qanday π mos qo‘yish ***n* – tartibli o‘rinlashtirish** deyiladi. Har qanday *n* – tartibli π o‘rinlashtirish quyidagicha yozilishi mumkin:

$$\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \dots \alpha_{i_n} \end{pmatrix}$$

xususan,

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots \alpha_n \end{pmatrix}$$

kanonik o‘rinlashtirish deyiladi.

Agar $i < j$ bo‘lib, $a_i > a_j$ bo‘lsa, π o‘rinlashtirishda (*i*, *j*) juftlik inversiyani tashkil etadi deymiz. Agar barcha invers juftliklar soni $S(\pi)$ juft bo‘lsa, π o‘rinlashtirish **juft**, agar $S(\pi)$ toq bo‘lsa, π o‘rinlashtirish **toq** deyiladi.

Misol. Quyidagi

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

o‘rinlashtirishning juft yoki toq ekanligini aniqlang.

Yechish. Berilgan o‘rinlashtirishni kanonik ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

va inversiyalar sonini hisoblaymiz. Invers juftliklarni (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) lar tashkil etgani uchun, $S(\pi) = 4$, demak, π - juft o‘rinlashtirish ekan.

<u>Ta’rif.</u> Quyidagi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Kvadrat matritsaning ***n* - tartibli determinanti** deb, quyidagi songa aytiladi:

$$\det A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\sum_{\pi}(-1)^{S(\pi)}a_{1,\pi(1)}\dots a_{n,\pi(n)}$$

bu yerda yig‘indi barcha n – tartibli o‘rinlashtirishlar bo‘yicha bajariladi.

Bu ta’rifni tushunish uchun $n = 3$ bo‘lgan holini ko‘raylik. Barcha 3-tartibli o‘rinlashtirishlar quyidagicha bo‘ladi:

$$\pi_1=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{pmatrix},\ \pi_2=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,1\,2\end{pmatrix},\ \pi_3=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,3\,1\end{pmatrix},\ \pi_4=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,2\,1\end{pmatrix},\ \pi_5=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,1\,3\end{pmatrix},\ \ \pi_6=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,3\,2\end{pmatrix}$$

Har bir o‘rinlashtirish uchun inversiya sonini hisoblasak: $S(\pi_1)=0,\ S(\pi_2)=2,$ $S(\pi_3)=2,\ \ S(\pi_4)=3,\ \ S(\pi_5)=1,\ S(\pi_6)=1$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz. U holda ta’rifga ko‘ra:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

ya’ni 3-tartibli determinant uchun avval keltirilgan formulani hosil qildik.

Yuqoridagiga o‘xshab, n - tartibli determinant uchun ham algebraik to‘ldiruvchini kiritish mumkin. U holda 2-tartibli va 3-tartibli determinantlarning barcha xossalari n - tartibli determinantlar uchun ham o‘rinli bo‘ladi. Xususan,

$$\det A=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik} \qquad (i=1,\dots,n) \tag{3}$$

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}A_{ik} \qquad (k=1,\dots,n) \tag{4}$$

bu yerda A_{ik} algebraik to‘ldiruvchilar n – 1 tartibli determinantlardir, shu sababli (3), (4) formulalarni n - tartibli determinantni hisoblashning tartibini pasaytirish yoki satr va ustun elementlari bo‘yicha yoyish usuli deb ham atashadi.

Misol. Hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Yechish. Masalan 3-ustun elementlarini avval 2-ustunga va -2 ga ko‘paytirib 1-ustunga qo‘shamiz:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -9 & 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -9 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

3-ustunni -4 ga va 3 ga ko‘paytirib, mos ravishda 1- va 2-ustunlarga qo‘shsak:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -13 & 10 & 3 \\ -13 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -13 & 10 \\ -13 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

Determinantlarni hisoblang[4].

1. $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = ?$

2. $\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = ?$

3. $\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix} = ?$

4. $\begin{vmatrix} \sin x & cosx \\ -cosx & sinx \end{vmatrix} = ?$

5. $\begin{vmatrix} \sin x & cosx \\ -tgx & ctgx \end{vmatrix} = ?$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = ?$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = ?$

8. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = ?$

9. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = ?$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = ?$

11. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = ?$

12. $\begin{vmatrix} sinx & 0 & cosx \\ 0 & 1 & 0 \\ -cosx & 0 & sinx \end{vmatrix} = ?$

[4] Mirzayev A.O’. Matematika. T:”Innovatsiya-ziyo”. 2019 y

13. $\begin{vmatrix} 23 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -20 & -3 & -1 \end{vmatrix} = ?$ 14. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 11 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?$

15. $\begin{vmatrix} 1 & 12 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = ?$ 16. $\begin{vmatrix} 13 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 21 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = ?$

17. $\begin{vmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = ?$ 18. $\begin{vmatrix} \sin x & 0 & 0 \\ -3 & tgx & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ?$

19. $\begin{vmatrix} e^x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & e^{-x} \end{vmatrix} = ?$ 20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = ?$

Determinantlarni tartibini pasaytirish usuli bilan hisoblang.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?$ 2. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -7 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ?$ 4. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = ?$

5. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -7 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ?$ 6. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = ?$

7. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = ?$ 8. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?$ 10. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & -7 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = ?$

11. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -4 & 6 \end{vmatrix} = ?$ 12. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 6 & -1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ -3 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = ?$

$$13.\begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -5 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & 5 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ -7 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ? \qquad 14.\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 7 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = ?$$

XULOSA

Kvadrat matritsa elementlaridan ma’lum bir usulda hosil qilinadigan sonli ifoda uning determinanti deyiladi. II va III tartibli determinantlarning hisoblash formulalari nisbatan sodda, ammo yuqori tartibli determinantlar uchun ular juda murakkab ko‘rinishga ega. Shu sababli bunday determinantlar ularning algebraik to’ldiruvchilari va Laplas teoremasi yordamida quyi tartibli determinantlarga keltirish orqali hisoblanadi. Bundan tashqari bir qator hollarda determinantlarning qiymatlari ularning xossalaridan foydalanib topilishi mumkin. Birlik matritsa va kvadratik nol matritsalarning determinantlari mos ravishda 1 va 0 qiymatga ega.

Nazorat savollari.

1. Determinant deyilganda nima tushuniladi?
2. II tartibli determinant qanday hisoblanadi?
3. III tartibli determinant uchburchak rtasida qanday o‘xshashlik va farqlar bor?
4. Determinantda satr va ustunlar o‘zaro qanday xususiyatga ega?
5. Determinantda ikkita satr yoki ikkita ustun o‘rni almashtirilsa nima bo‘ladi?

3-§.CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

Reja:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi

2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullari

Tayanch iboralar: Chiziqli tenglamalar sistemasi, birgalikda bo‘lgan sistema, birgalikda bo‘lmagan sistema, kramer usuli, asosiy determinant , yordamchi determinantlar, kramer formulalari, gauss usuli.

1-ta’rif. n noma'lumli m ta ***chiziqli tenglamalar sistemasi*** deb,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

ga aytiladi. Bu yerda a_{ij} (*i* - satr, *j* - ustun, $i = 1,m; j = 1,n$), b_i ($i = 1,m$) lar berilgan sonlar bo`lib, $a_{ij}$ lar sistemaning koeffitsiyentlari, $b_i$ ( $i = 1,m$ ) - lar esa ozod hadlar, $x_i$ $(i = 1,m)$ - lar ***o`zgaruvchilar yoki noma'lumlar*** deyiladi va ular ixtiyoriy qiymatlar qabul qiladilar.

2-ta’rif. Agar $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ sonlarni $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lar o`rniga mos ravishda qo`yganimizda (1) sistemaning har bir tenglamasi to`g`ri sonli tenglikka aylansa, u holda $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ vektor berilgan sistemaning ***yechimi*** deyiladi.

3-ta’rif. Agar (1) sistemaning yechimi bo`lsa, u ***birgalikda;*** yechimi bo`lmasa, ***birgalikda emas;*** faqat bitta yechimi bo`lsa, u ***aniq sistema;*** cheksiz ko`p yechimi bo`lsa, u ***aniqmas sistema*** deyiladi.

4-ta’rif. Agar b_i $(i = 1,m$) ozod hadlarning kamida bittasi noldan farqli bo’lsa***, bir jinsli bo’lmagan tenglamalar sistema*** deyiladi.

5-ta’rif. Agar b_i ($i = 1,m$) ozod hadlarning barchasi nolga teng, ya’ni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

bo’lsa***, bir jinsli tenglamalar sistemasi*** deyiladi.

Teorema (Kroneker – Kapelli teoremasi)

(1) sistema birgalikda bulishi uchun uning asosiy A va kengaytirilgan B matritsalarining ranglari teng bo`lishi zarur va yetarlidir.

Bu

yerda, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$.

(2) sistema $x_1=x_2=\dots=x_n=0$ yechimga ega. Demak, har qachon birgalikda bo`ladi. Yuqoridagi yechim - trivial yechim bo`lib, amaliyot uchun notrival yechimlarning mavjud bo`lishi muhim ahamiyatga ega.

Teorema. Agar (2) sistemaning rangi r uchun $0<r<m$ tengsizlik o`rinli bo`lsa, u holda sistema notrival yechimga ega bo`ladi.

2.Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullari

2.1.*Kramer usuli.*

Ikki nomalumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

Uning asosiy determinant $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ bo`lganda yagona yechimga ega va Kramer qoidasi bo`yicha quyidagi formulalar bilan hisiblanadi:

$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$ bu yerda $\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_2}=\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$ lar yordamchi determinantlar deyiladi.

Agar $\Delta=0$ va shu bilan birga Δ_{x_1} ,Δ_{x_2} lardan hech bo`lmasa bittasi noldan farqli bo'lsa, sistema yechimga ega bo'lmaydi.

Agar $\Delta=\Delta_{x_1}=\Delta_{x_2}=0$ bo`lsa, u holda sistema cheksiz ko`p yechimga ega bo`ladi.

Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan;

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

Uning asosiy determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lganda yagona yechimga ega bo'lib, u Kramer formulalari orqali quyidagicha

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

hisoblanadi.

Bu yeda

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Agar $\Delta = 0$ va shu bilan birga $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ lardan hech bo`lmaganda bittasi noldan farqli bo`lsa, sistema yechimga ega bo'lmaydi.

Agar $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$ bo`lsa, u holda sistema cheksiz ko`p yechimga ega bo`ladi.

Misol: Ushbu uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Yechish: Asosiy va yordamchi determinantlarni hosil etamiz va hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 18, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7.$$

Kramer formulalariga asosan sistema yechimini topamiz:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{5}{18}, \quad x_{21} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{18}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{31}}{\Delta} = \frac{7}{18}.$$

2.2.Gauss usuli

n ta nomalumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasini n ning etarlicha katta qiymatlarida Kramer qoidasi bilan yechish bir nechta yuqori tartibli determinantlarni hisoblashni talab etadi. Shuning uchun ularni Gauss usulidan foydalanib yechish maqsadga muvofiq. Bu usulda nomalumlar ketma-ket yo`qotilib, sistema uchburchak shaklga keltiriladi. Agar sistema uchburchaksimon shaklga kelsa, u yagona yechimga ega bo`ladi va uning nomalumlari oxirgi tenglamadan boshlab topib boriladi. Sistema cheksiz ko`p yechimga ega bo`lsa, nomalumlar ketma-ket yo`qotilgach, u trapetsiyasimon shaklga keladi.

Chiziqli almashtirishlar bajarilayotganda;

a) Ayrim tenglamalar $0 = 0$ ko`rinishga kelib qolsa, ular tashlab yuboriladi. Bu hol sistemaning rangi *m* dan kichik ekanligini bildiradi;

b) Biror tenglama $0 = a\ (a \neq 0)$ ko`rinishga kelib qolsa, bu hol tenglama birgalikda emasligini bildiradi. U vaqtda barcha hisoblar to`xtatilib "sistema birgalikda emas" deb javob yoziladi.

Misol: Ushbu sistemani Gauss usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Yechish: Bu sistemadan noma'lumlarni birin-ketin yo'qotamiz.

1-qadam. Sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalardan x_1 noma'lumni

yo'qotamiz. Kasr sonlarga kelmaslik va bu orqali hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida buni quyidagicha amalga oshiramiz. Dastlab 1-tenglamani ikkala tomonini –3 soniga, 2-tenglamani esa 2 soniga ko'paytirib, ularni o'zaro qo'shamiz. So'ngra 1-tenglamani ikkala tomonini –2 soniga ko‘paytirib, hosil bo‘lgan tenglamani 3-tenglamaga qo‘shamiz. Natijada quyidagi ekvivalent sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ \quad 17\,x_2 - 16x_3 = -82 \\ \quad 8x_2 - 5x_3 = -31 \end{cases}.$$

2-qadam. Oldingi qadamda hosil qilingan sistemaning 2-tenglamasini –8 soniga, 3-tenglamasini 17 soniga ko‘paytirib o‘zaro qo‘shamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ \quad 17\,x_2 - 16x_3 = -82 \\ \qquad\qquad 43x_3 = 129 \end{cases}$$

Dastlab bu uchburchakli sistemaning 3- tenglamasidan x_3=3 ekanligini topamiz.

So‘ngra bu natijani sistemaning 2- tenglamasiga qo‘yib, undan x_2 = –2 ekanligini aniqlaymiz. Yakuniy qadamda x_2 = –2 va x_3 = 3 natijalarni sistemaning 1- tenglamasiga qo‘yib, undan x_1 =1 ekanligini topamiz. Demak berilgan sistemaning yagona yechimi x_1 =1, x_2 = –2 va x_3 =3 ekan.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer formulalaridan foydalanib yeching:

1. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$ j:(1;0;-2)

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 \\ 4x_2 + 11x_3 = 8 \\ 7x_1 - 5x_2 = -3 \end{cases}$ j:(1;2;0)

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 2{,}5 \\ 4x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$ $j: (\frac{1}{2}; 1; 2)$

4. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 19 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$ j:(4;1;-2)

5. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$ j:(-1;2;1)

6. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -8 \end{cases}$ j:∅

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = 7 \end{cases}$ j:yechim cheksiz ko'p.

8. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 3 - 2x_3 = 4 \end{cases}$ j:∅

9. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$ j:yechim cheksiz ko'p.

10. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$ j:∅

11. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -8 \end{cases}$ j:(0;1;-2)

12. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ 4x_1 + 3x_3 = 8 \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases}$ j:(2;-1;0)

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$ j:(3;1;-2)

14. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ 4x_1 - x_2 = 12 \end{cases}$ j:(3;0;-1)

Quyidagi tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching[5]*:*

15. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$ J:(8;4;2)

[5] Mirzayev A.O'. Matematika. T:"Innovatsiya-ziyo". 2019 y

16. $\begin{cases} x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 14 \\ x_1 + 3x_2 - 8x_3 = -18 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ J:(1;-1;2)

17. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$ J:(1;1;-1)

18. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -13 \end{cases}$ J:(0;2;-3)

19. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -6{,}5 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 3{,}5 \end{cases}$ J:(-2;1;0,5)

20. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 9 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$ J:(1;-3;2)

21. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 16 \\ -3x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -9 \end{cases}$ J:(5;0;-1)

22. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$ J:∅

23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ J:∅

24. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$ J:∅

25. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$ J:U.Ye

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = x_3 - 5 \end{cases}$;

26. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$ J:U.Ye

$\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = x_3 - 7 \end{cases}$;

27. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$ J:U.Ye

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = 2x_2 + 3 \end{cases}$;

28. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$ J:U.Ye

$\begin{cases} x_1 = -9x_3 + 29 \\ x_2 = -7x_3 + 20 \end{cases}$;

29. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 9 \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ J:∅

XULOSA

Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi mavjud va yagona, mavjud va cheksiz ko‘p hamda mavjud bo‘lmasligi mumkin. Chiziqli tenglamalar sistemasini umumiy holda yechish usullari ishlab chiqilgan. Bunda oldin ko‘rib o‘tilgan matritsa va determinantlar tushunchalari muhim ahamiyatga ega bo‘ladi. Sistema yechimining mavjudligi yoki mavjud emasligi, yagona yoki cheksiz ko‘pligi matritsalarning rangi yordamida aniqlanadi. Shuningdek bu yerda bir jinsli tenglamalar sistemasi va uning notrivial yechimi mavjudligi masalalari ham qaralgan.

Nazorat savollari.

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi deb nimaga aytiladi?
2. Birgalikda va birgalikda bo’lmagan tenglamalar sistemasining farqi nimada?
3. Chiziqli tenglamalar sistemasining yechish usullrini ayting?
4. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usulini qanday?
5. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usulini qanday?

usulida qanday hisoblanadi?

III BOB. ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI

1-§. VEKTORLAR. VEKTORLAR USTIDA CHIZIQLI AMALLAR

Raja:

1. **Vektorlar va ular ustida amallar**
2. **Tekislik va fazoda Dekart koordinatalar sistemasi**
3. **Tekislik va fazoda ikki nuqta orasidagi masofa**

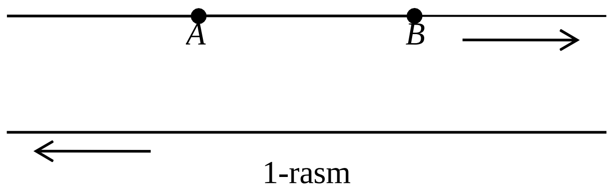
Tayanch iboralar: Vektor, vektorning uzunligi, komplanar vektor, vektorlarning yig’indisi, vektorlarning ayirmasi, vektorlarni songa ko’paytirish, dekart koordinatalar sistemasi, vektorning ortlari, ikki nuqta orasidagi masofa.

1. Vektorlar va ular ustida amallar

Elementar geometriyadan ma’lumki, kesma deb to‘g‘ri chiziqning ikki nuqtasi bilan chegaralangan bo‘lagiga aytiladi. Uning uzunligi deb, tanlangan masshtab birligiga nisbatan kesmaning chegaralari orasidagi masofani o‘lchash natijasida olinadigan musbat son qiymatini tushunamiz.

Agar biror to‘g‘ri chiziqda ikki *A* va *B* nuqtalar olib, shu to‘g‘ri chiziq bo‘ylab siljiydigan nuqtani qarasak, bu nuqta to‘g‘ri chiziqda ikki yo‘nalish aniqlaydi: bittasi *A* nuqtadan *B* nuqta tomonga qarab, ikkinchisi teskari, ya’ni *B* nuqtadan *A* nuqta tomonga harakatlanganda. Bu yo‘nalishlardan birini musbat yo‘nalish deb atasak, unga teskari yo‘nalishni manfiy yo‘nalish deb atash mumkin.

Musbat yo‘nalishga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziq **o‘q** deb ataladi.



1-rasm

Agar o‘qlar parallelgina bo‘lib qolmay, musbat yo‘nalishlari ham bir xil bo‘lsa, u holda bu o‘qlarni bir xil yo‘nalgan deymiz. Parallel bo‘lib, musbat yo‘nalishlari teskari bo‘lgan o‘qlarni qarama-qarshi **yo‘nalgan o‘qlar** deb ataladi. Agar o‘qlar o‘zaro perpendikulyar bo‘lsa, musbat yo‘nalishlari qandayligidan qat’iy nazar ularni ortogonal o‘qlar deyiladi.

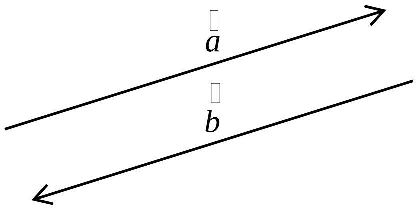
Agar to‘g‘ri chiziqning biror kesmasida musbat yo‘nalish berilgan bo‘lsa, bu kesmani **vektor** deb ataladi. Kesmaning chegara nuqtalaridan birini uning boshi, ikkinchisini oxiri desak, vektorning musbat yo‘nalishi uning boshidan oxiriga qarab bo‘ladi.

Boshi A nuqtada, oxiri B nuqtada bo‘lgan vektorni $\overrightarrow{AB}$ ko‘rinishda belgilanadi. Vektorni bitta harf bilan belgilash ham qabul qilingan. Masalan, $\vec{a},\ \vec{b}$ yoki $\vec{c}$ va hokazo.

Vektorning uzunligi deb, shu vektorni ifodalovchi kesmaning uzunligi tushuniladi. Demak, agar AB kesmaning uzunligini $|AB|$, $\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligini $|\overrightarrow{AB}|$ deb belgilasak, $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$ bo‘ladi. Xuddi shunday $\vec{a}$ vektorning uzunligi uchun $|\vec{a}|$ belgi qabul qilingan.

Boshi va oxiri ustma-ust tushgan $\vec{AA}$ vektorni **nol vektor** deb ataladi va $\vec{0}$ ko‘rinishda belgilanadi. Ma’lumki, $|\vec{AA}| = |\vec{0}| = 0$ bo‘ladi.

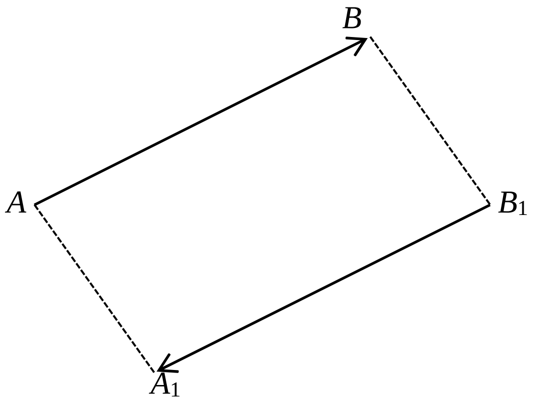
Agar $\vec{a},\ \vec{b}$ vektorlar parallel, uzunliklari va musbat yo‘nalishlari bir xil bo‘lsa, ular **teng** deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ deb yoziladi. Uzunliklari bir xil parallel vektorlar har doim ham teng bo‘lavermaydi, masalan, $\vec{a},\ \vec{b}$ vektorlar 2-rasmdagidek bo‘lsa.



2-rasm

Uzunliklari bir xil, parallel, lekin qarama-qarshi yo‘nalgan $\vec{a},\ \vec{b}$ vektorlar **qarama-qarshi vektorlar** deb ataladi. $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektorni $-\vec{a}$ deb belgilanadi. Masalan, 2-rasmdagi $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ ga qarama-qarshi vektor, shu sababli $\vec{b} = -\vec{a}$.

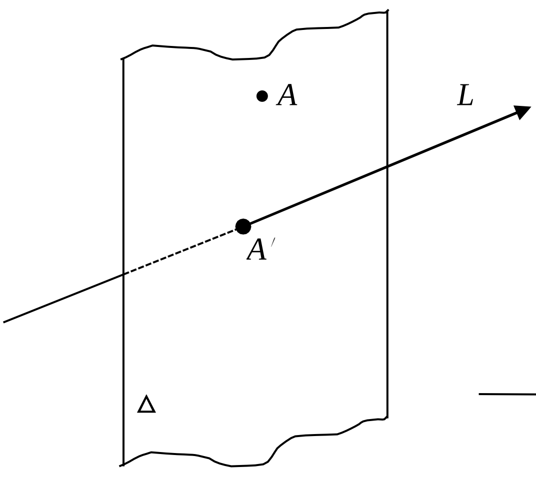
Agar $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ bo‘lsa, u holda $\overrightarrow{AB}$ vektorni parallel ko‘chirildi deb tushuniladi (3-rasmga qarang).



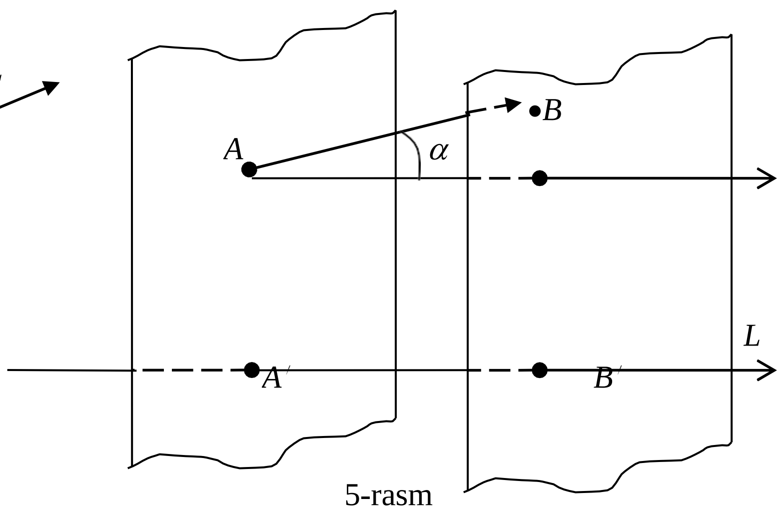
3-rasm

Bitta to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda joylashgan vektorlar **kollinear vektorlar** deb ataladi.

A nuqtaning *L* to‘g‘ri chiziqdagi proyeksiyasi deb, *L* to‘g‘ri chiziqning unga perpendikulyar bo‘lgan *A* nuqtadan o‘tuvchi tekislik bilan A' kesishish nuqtasiga aytiladi (4-rasmga qarang).



4-rasm



5-rasm

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ vektorning **L o‘qidagi proyeksiyasi** deb, $\vec{a}$ vektorning uzunligini, uni L o‘q bilan tashkil etgan α burchagining kosinusiga bo‘lgan ko‘paytmasiga aytamiz (5-rasmga qarang), ya’ni

$$np_L.\vec{a}=|\vec{a}|\cos\alpha, \qquad (0\le\alpha\le\pi)$$

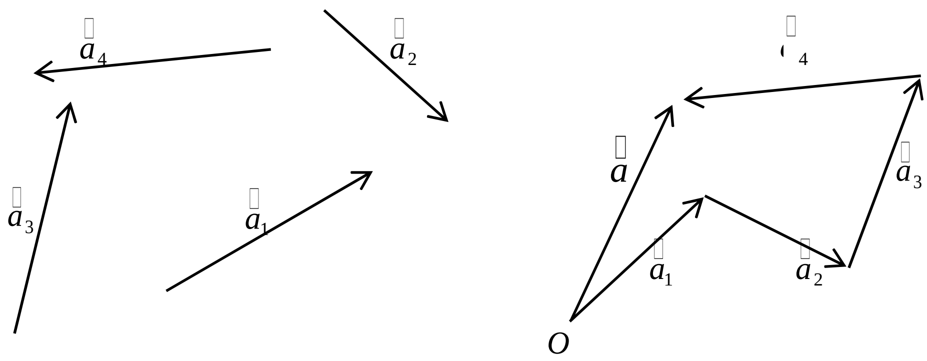
Eslatma. Proyeksiyaning yuqorida keltirilgan ta’rifi Δ tekislik L o‘qqa perpendikulyar bo‘lgani uchun, **to‘g‘ri burchakli proyeksiya** deb ham ataladi. Agar Δ tekislikni L to‘g‘ri chiziqqa og‘ma o‘tgan biror Δ' tekislikka parallel o‘tkazsak, bu proyeksiyani **og‘ma burchakli proyeksiya** deyiladi. Bunday proyeksiya $np_L \vec{AB}$ (Δ'ga parallel) ko‘rinishda belgilanadi. Agar qavs ichida hech qanday ma’lumot berilmagan bo‘lsa, bu proyeksiyani to‘g‘ri burchakli **(ortogonal) proyeksiya** deb tushunamiz.

Teng vektorlarning bitta o‘qdagi proyeksiyalari ham teng va bir vektorning o‘zaro parallel L va L' o‘q lardagi proyeksiyalari ham teng bo‘ladi. Qarama-qarshi vektorlarning L o‘qdagi proyeksiyalari ishorasiga farq qiladi, chunki agar $\vec{a}$ L o‘qga α burchakka og‘ib o‘tgan bo‘lsa, - $\vec{a}$ L o‘q bilan $\alpha+\pi$ burchak tashkil etadi, $\cos\alpha$ va $\cos(\pi+\alpha)$lar qiymati ma’lumki, ishorasi bilan farq qiladi.

Agar $\vec{a}$ vektor Δ tekislikka parallel bo‘lsa, uning L o‘qdagi proyeksiyasi nol bo‘ladi, chunki $\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad np_L\vec{a}=|\vec{a}|\cos\frac{\pi}{2}=0$.

Agar $\vec{a}$ vektor L o‘qga parallel bo‘lsa, $np_L\vec{a}=|\vec{a}|\cos 0^0=|\vec{a}|$ bo‘ladi.

IV. Bizga $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlar berilgan bo‘lsin. Ixtiyoriy O nuqta olib $\vec{a}_1$ ni boshini shu nuqtaga, $\vec{a}_2$ni $\vec{a}_1$ ning oxiriga, $\vec{a}_3$ni $\vec{a}_2$ ning oxiriga va hokazo. Tartibda barcha vektorlarni parallel ko‘chiramiz. Hosil bo‘lgan siniq chiziq berilgan vektorlar sistemasining **ko‘p burchagi** deb ataladi (6-rasmga qarang).



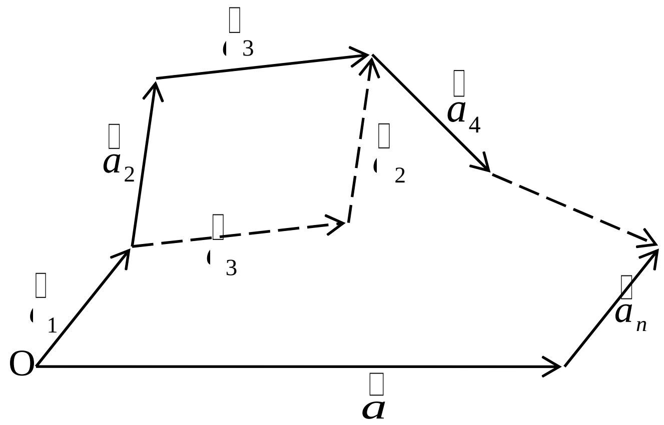
6-rasm

Bu ko‘pburchakni yopuvchi $\vec{a}$ tomoni berilgan vektorlarning yig‘indisi deb atalib, quyidagi

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n$$

ko‘rinishda belgilanadi.

Vektorlarni qo‘shishning bu ta’rifi yig‘indi uchun kommutativlik (ya’ni qo‘shiluvchilarning o‘rnini almashtirish) xossasiga ega (7-rasmga qarang).

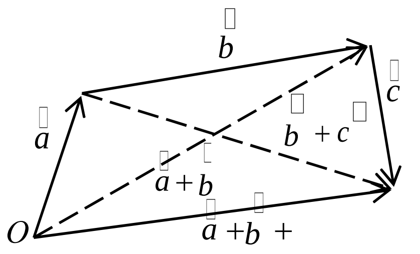


7-rasm

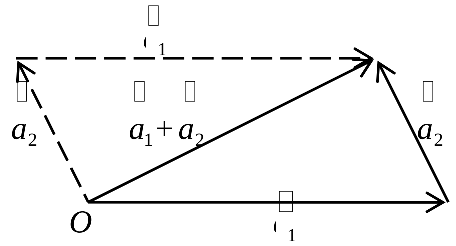
Bu qo‘shish amali uchun assotsiativlik xossasi, ya’ni $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar uchun

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

munosabat ham o‘rinli (8-rasmga qarang).

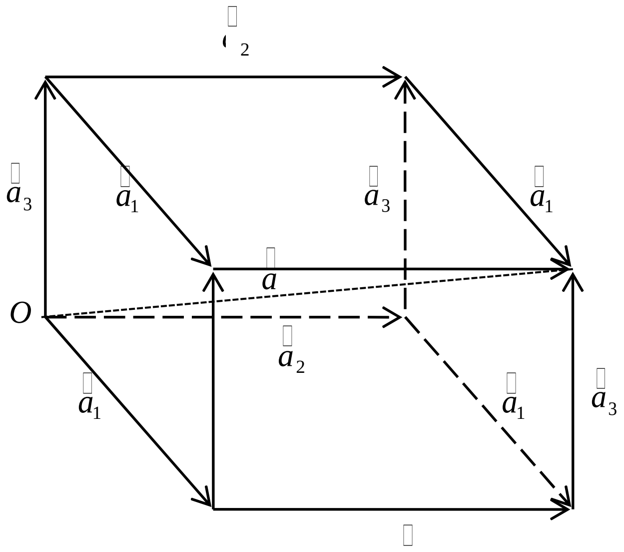


8-rasm



9-rasm

Agar $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlar yig‘indisini 9-rasmdagidek, ya’ni $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlar boshini O nuqtaga keltirib bajarilsa, u holda vektorlar parallelogram qoidasi bo‘yicha qo‘shildi deb ataymiz.



10-rasm

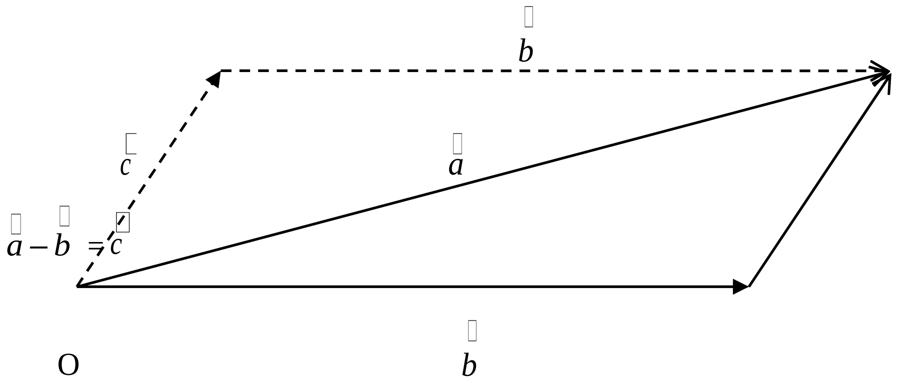
Agar $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ va $\vec{a}_3$ vektorlar berilgan bo‘lsa, ularni olti xil: $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, $(\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_2)$, $(\vec{a}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_3)$, $(\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_1)$ va $(\vec{a}_3, \vec{a}_2, \vec{a}_1)$ ketma-ketliklar bo‘yicha qo‘shish mumkin (10-rasmga qarang). Chizmadan ko‘rinadiki, barcha ketma-ketlik natijasi $\vec{a} = \overrightarrow{OB}$ vektorga olib keladi, ya’ni boshlari bir O nuqtaga keltirilgan vektorlar yig‘indisi, shu vektorlardan qurilgan parallepipedning O uchidan chiqib unga qarama-qarshi uchiga yo‘nalgan diagonaldan iborat bo‘lar ekan. Xuddi shu xulosaga, qo‘shishning parallelogram usuli yordamida ham kelsa bo‘ladi. Bu ishni bajarishni o‘quvchining o‘ziga havola qilamiz.

Ta’rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb shunday $\vec{c}$ vektorga aytamizki, uning $\vec{b}$ vektor bilan yig‘indisi $\vec{a}$ vektor bo‘ladi, ya’ni $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.

Buni

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$$

ko‘rinishda belgilash qabul qilingan.



11-rasm

Ta’rifdan va 11-rasmdan ko‘rinadiki, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasini qurish uchun, ularning boshini bir O nuqtaga keltirib, ayiruvchi vektor oxiridan kamayuvchi vektor oxiriga yo‘nalgan vektorni olish kerak ekan.

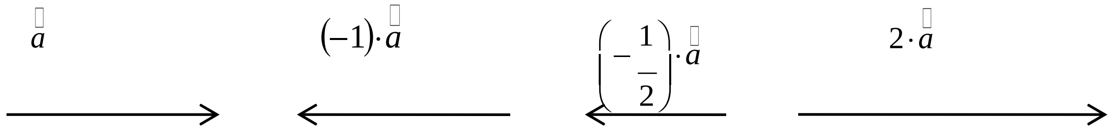
Eslatma. $\vec{a}-\vec{b}$ ayirmani $\vec{a}$ va $-\vec{b}$ larni qo‘shib bajarsa ham bo‘ladi, ya’ni

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

Bizga $\vec{a}$ vektor va biror *m* son (skalyar) berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. $m\vec{a}$ **ko‘paytma** deb, shunday $\vec{b}$ vektorga aytamizki,

1) $|\vec{b}|=|m|\,|\vec{a}|$ va 2) agar *m*>0 bo‘lsa, $\vec{a}$ kabi yo‘nalgan *m*<0 bo‘lsa, $\vec{a}$ ga teskari yo‘nalgan bo‘ladi.



12-rasm

12-rasmda $m=-1,$ $m=-\frac{1}{2},$ $m=2$ bo‘lgan hollar ko‘rsatilgan. Chizmadan ko‘rinadiki, $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.

Bu ko‘paytma quyidagi taqsimot xossalariga ega:

$1^0.\quad m(\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\vec{a}_n)=m\vec{a}_1+m\vec{a}_2+...+m\vec{a}_n$

$2^0.(m_1+m_2+...+m_n)\vec{a}=m_1\vec{a}+m_2\vec{a}+...+m_n\vec{a}$

Biror L o‘qda yotuvchi shu o‘q bo‘ylab yo‘nalgan uzunligi bir o‘lcham birligiga teng vektor shu **o‘qning orti** deb ataladi. Agar $\vec{e}$ ort va unga parallel biror $\vec{a}$ vektor berilgan bo‘lsa, uni

$$\vec{a}=\pm|\vec{a}|\vec{e}$$

ko‘rinishda ifodalasa bo‘ladi, bu yerda «+» ishora $\vec{a}$ va $\vec{e}$ larning yo‘nalishlari bir xil bo‘lganda va «-» ishora $\vec{a}$ va $\vec{e}$ larning yo‘nalishlari teskari bo‘lganda olinadi.

$\vec{a}$ va $\vec{e}$ vektorlarning biror L o‘qdagi proyeksiyalari quyidagi xossalarga ega:

$$np_L\vec{a}+np_L\vec{b}=np_L(\vec{a}+\vec{b}) \qquad (1)$$

$$np_L(m\vec{a})=m\,np_L\vec{a}$$

(2)

Xuddi shunday $\vec{a}=(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}$ ekanligini e’tiborga olsak,

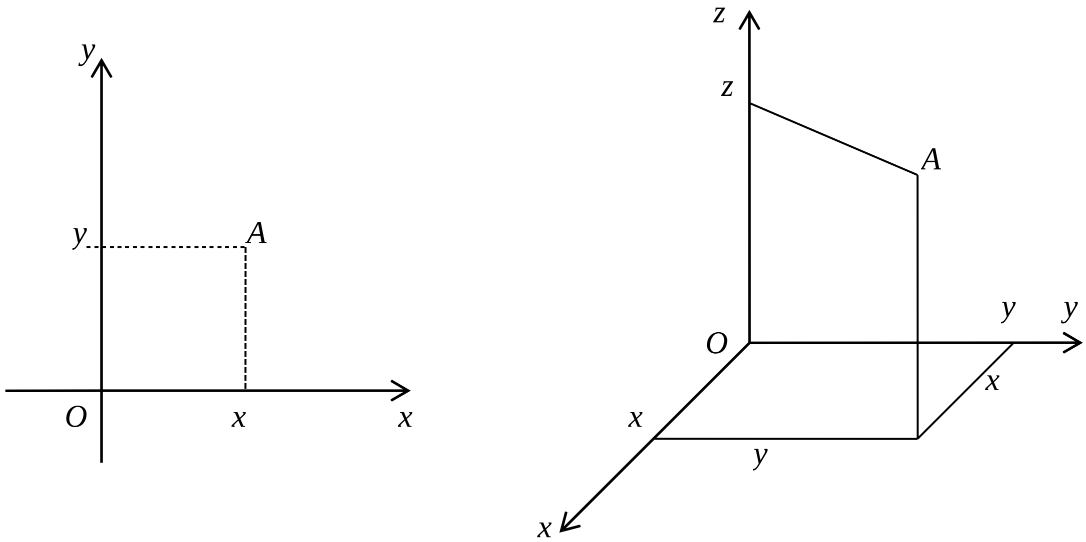
$$np_L(\vec{a}-\vec{b})+np_L\vec{b}=np_L\vec{a}$$

yoki

$$np_L\vec{a}-np_L\vec{b}=np_L(\vec{a}-\vec{b})$$

(3)(3)

V. Tekislikda o‘zaro perpendikulyar, *O* nuqtada kesishuvchi *x* va *y* o‘qlar, fazoda esa o‘zaro perpendikulyar, *O* nuqtada kesishuvchi *x, y, z* o‘qlar berilgan bo‘lsin. *O* nuqtani koordinatalar boshi, *x, y, z* o‘qlarni koordinatalar o‘qlari deb ataymiz. Tekislikdagi va fazodagi har qanday nuqta o‘rni uning koordinatalar o‘qidagi proyeksiyalarini *O* nuqtagacha bo‘lgan masofalari orqali yagona ravishda aniqlanadi. Bu masofalarni shu nuqtaning koordinatalari deb ataymiz (13-rasmga qarang).



13-rasm

Uch o‘lchovli fazoda olingan ixtiyoriy nuqtani O nuqta bilan birlashtirib turuvchi $\overline{OA}$ vektor A nuqtaning **radius-vektori** deb ataladi. $\overline{OA}$ vektorning x, y va z o‘qlardagi proyeksiyalarini mos ravishda x, y, z deb belgilasak, ular 13-rasmdan ko‘rinadiki, A nuqtaning koordinatalaridan iborat bo‘ladi. x ni A nuqtaning abssissasi, y ni ordinatasi va z ni aplikatasi deb ataymiz.

(x, y, z) sonlar uchligi fazoning A nuqtasi bilan uning radius-vektori o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatadi. Shu sababli, (x, y, z) uchlikni ayrim hollarda A nuqta yoki $\overline{OA}$ vektor deb tushunamiz.

Har qanday vektorni o‘ziga parallel ravishda ko‘chirish mumkin bo‘lgani uchun, agar $O\overline{A}=(x,y,z)$ bo‘lib, uni o‘ziga parallel ko‘chirish natijasida hosil bo‘lgan vektor $\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$ bo‘lsa, u holda $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$ bo‘ladi.

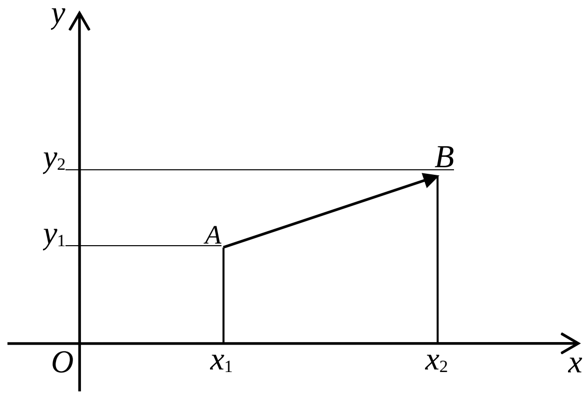
(1), (2) va (3) xossalarga ko‘ra

$$(x,y,z)\pm(x_1,y_1,z_1)=(x\pm x_1,\ y\pm y_1,\ z\pm z_1) \qquad (4)$$

$$\alpha\,(x,y,z)=(\alpha\,x,\ \alpha\,y,\ \alpha\,z) \qquad (5)$$

deb yozish mumkin.

Tekislikda boshi $A(x_1, y_1)$va oxiri $B(x_2, y_2)$ nuqtalarda bo‘lgan $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ vektor berilgan bo‘lsin (14-rasmga qarang). Chizmadan ko‘rinadiki



14-rasm

$$np_x\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1, \quad np_y\overrightarrow{AB} = y_2 - y_1$$

Demak,

$$\vec{a} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$

ekan. Xuddi shunday, fazoda berilgan $\overrightarrow{AB}$, bu yerda $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ vektor uchun

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - y_1)$$

x, *y*, *z* o‘qlarining ortlarini mos ravishda $\vec{i}$, $\vec{j}$ va $\vec{k}$ bilan belgilaymiz. Ixtiyoriy (*x*, *y*, *z*) vektorni

$$(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin. Haqiqatan, agar

$$\vec{i} = (1,0,0), \quad \vec{j} = (0,1,0), \quad \vec{k} = (0,0,1)$$

ekanligini e’tiborga olsak,

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) =$$
$$= (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = (x, y, z)$$

kelib chiqadi.

Bizga $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ vektorlar berilgan bo‘lsin. Bu vektorlar parallel bo‘lishi uchun ularning koordinatalari qanday shartlarni qanoatlantirishi kerakligini aniqlash talab etilgan bo‘lsin. Agar $\vec{a} = 0$ bo‘lsa, u holda uning yo‘nalishi aniq emas, shu sababli uni $\vec{b}$ ga ham parallel deb qarash mumkin. Endi faraz qilaylik, $\vec{a} \neq 0$ bo‘lsin. $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ ga parallel bo‘lishi uchun $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ bo‘lishi zarur va yetarlidir. Oxirgi tenglikni

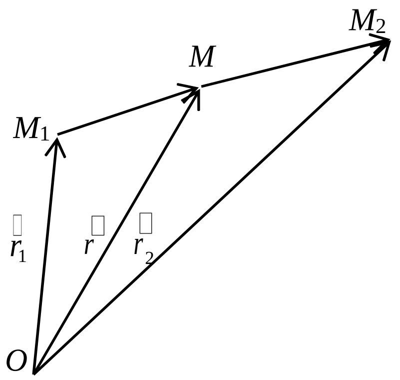
$$x_2=\lambda x_1,\quad y_2=\lambda y_1,\quad z_2=\lambda z_1$$

ko‘rinishda yozib olish mumkin. Bundan

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}$$

kelib chiqadi. Demak, ikki vektor kolleniar bo‘lishi uchun, ularning koordinatalari mos ravishda proporsional bo‘lishi zarur va yetarli ekan.

Vektorlarning bu xususiyatidan foydalanib, uchlari $M_1(x_1,y_1,z_1)$ va $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nuqtalarda bo‘lgan M_1M_2 kesmani berilgan $M_1M:MM_2=\lambda:1$ nisbatda bo‘luvchi M nuqtaning koordinatalarini topish masalasini hal qilamiz.



15-rasm

Agar $\vec{OM_1}=\vec{r_1},\ \vec{OM_2}=\vec{r_2},\ \vec{OM}=\vec{r}$ desak, u holda $\vec{M_1M}=\vec{r}-\vec{r_1},\ \vec{MM_2}=\vec{r_2}-\vec{r}$ bo‘ladi. $\vec{M_1M}$ va $\vec{MM_2}$ vektorlar kolleniar bo‘lgani uchun, berilgan nisbatga ko‘ra

$$\vec{r}-\vec{r_1}=\lambda(\vec{r_2}-\vec{r})$$

bo‘ladi. Bundan $\lambda\neq-1$ bo‘lgani uchun

$$\vec{r}=\frac{\vec{r_1}+\lambda\vec{r_2}}{1+\lambda}$$

yoki

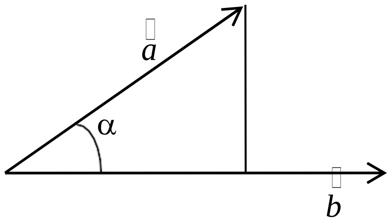
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

kelib chiqadi.

III. <u>Ta’rif.</u> $\vec{a}$ va $\vec{b}$ **vektorlarning skalyar ko‘paytmasi** deb, ular uzunliklarining, ular orasidagi burchak kosinusiga bo‘lgan ko‘paytmasiga aytamiz, ya’ni

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\,\vec{b}$$



16-rasm

Vektorning proyeksiyasini ta'rifiga ko'ra, $|\vec{a}|\cdot\cos\alpha$ (bu yerda $\alpha = (\widehat{\vec{a},\vec{b}})$) $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektordagi proyeksiyasiga teng bo'ladi, shu sababli skalyar ko'paytmani

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\,\vec{b}$$

ko'rinishda ham yozsa bo'ladi (16-rasmga qarang).

Skalyar ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

1^0. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$,

2^0. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

3^0. $(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b}) = (\lambda\mu)\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (λ, μ - ixtiyoriy sonlar)

4^0. $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$,

5^0. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ bo'lishi uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ lar o'zaro perpendikulyar bo'lishi zarur va yetarlidir.

1^0-xossaning isboti.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

2^0, 3^0, 4^0-xossalarning isbotini bajarishni o'quvchining o'ziga havola qilamiz.

5^0-xossaning isboti. Zarurligi. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ bo'lsin. U holda, $0 = \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$ dan $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$ bo'lgani uchun $\cos\alpha = 0$, o'z navbatida bundan $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ya'ni $\vec{a}\perp\vec{b}$ ekanligi kelib chiqadi.

Yetarligi. Agar $\alpha = (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ bo‘lsa, u holda $\cos\alpha = 0$, shu sababli $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$ bo‘ladi.

5^0-xossa vektorlarning **perpendikulyarlik sharti** deb ataladi.

4^0 va 5^0 - xossalarga asosan

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

Endi agar $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ bo‘lsa, u holda

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = x_1 x_2 \vec{i}^2 + x_1 y_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + x_1 z_2 \vec{i} \cdot \vec{k} + y_1 x_2 \vec{j} \cdot \vec{i} + y_1 y_2 \vec{j}^2 + y_1 z_2 \vec{j} \cdot \vec{k} + z_1 x_2 \vec{k} \cdot \vec{i} + z_1 y_2 \vec{k} \cdot \vec{j} + z_1 z_2 \vec{k}^2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Xususan, agar $\vec{a} = \vec{b}$ bo‘lsa,

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

yoki

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

bo‘ladi.

Bu formuladan foydalanib, fazoning ixtiyoriy $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalari orasidagi masofa d_{AB} ni quyidagicha topsa bo‘ladi:

$$d_{AB} = |\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

1-misol. (1, 1, 1) va (1,2,3) vektorlarning uzunligini toping.

Yechish.

$$|(1,1,1)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \quad |(1,2,3)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

2-misol. $\vec{a} = (1,0,1)$ va $\vec{b} = (1,2,2)$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Skalyar ko‘paytmaning ta’rifidan

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

formulani keltirib chiqaramiz. Bundan

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \qquad |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 1 + 2 = 3$$

Demak,

$$\cos\alpha = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Faraz qilaylik, berilgan $\vec{a}$ vektor x o‘qi bilan α burchak, y o‘qi bilan β burchak, z o‘qi bilan γ burchak tashkil etsin. U holda

$$X = np_z \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha,$$
$$Y = np_z \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\beta,$$
$$Z = np_z \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma$$

ekanligidan

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \qquad (6)$$
$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

kelib chiqadi.

(6) ni kvadratlarga ko‘tarib, o‘zaro qo‘shsak,

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{X^2 + Y^2 + Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} = 1$ munosabatni hosil qilamiz. (6) dan topiladigan $\cos\alpha$, $\cos\beta$ va $\cos\gamma$ qiymatlar $\vec{a}$ vektorning **yo‘naltiruvchi kosinuslar** deb ataladi.

Agar $\vec{a} = \vec{e} = (l, m, n)$ ort bo‘lsa, u holda

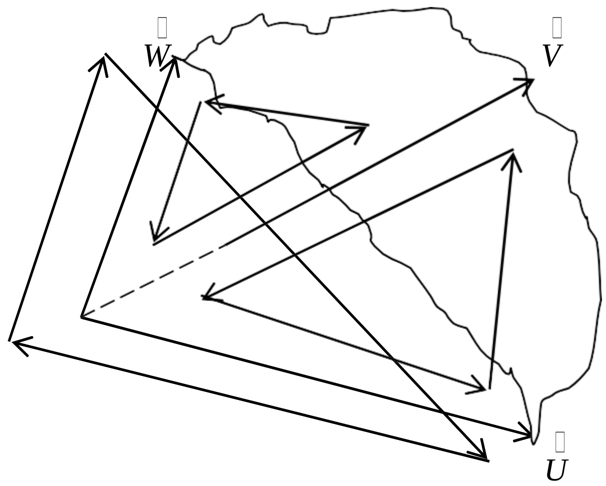
$$l = \cos\alpha, \; m = \cos\beta, \; n = \cos\gamma$$

bo‘ladi.

II. Avval R_3 fazoda yo‘nalish tushunchasini kiritib olamiz.

Bir tekislikda yotgan uchta vektorni komplanar vektorlar deb ataymiz. Bir tekislikda yotmagan har qanday vektorlar uchligini komplanar bo‘lmagan vektorlar deymiz. Bizga komplanar bo‘lmagan, boshlari bir nuqtaga keltirilgan $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ vektorlar berilgan bo‘lsin.

<u>Ta’rif.</u> $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ vektorlar uchligi chap sistemani tashkil etadi deymiz, agar $(\vec{u},\ \vec{v}),\ (\vec{v},\ \vec{w}),\ (\vec{w},\ \vec{v})$ vektorlar juftliklari aniqlaydigan aylanma yo‘nalishlar o‘zlari yotgan tekisliklarda musbat aylanma yo‘nalish bilan bir xil bo‘lsa. Loaqal bitta juftlik yo‘nalishi o‘zi yotgan tekislikning musbat aylanma yo‘nalishidan farq qilsa, bunday uchlikni o‘ng sistema deb ataymiz.



17-rasm

Misol. $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ ortlar uchligi chap sistemani tashkil etadi, chunki $(\vec{i},\ \vec{j})$ $(\vec{j},\ \vec{k})$ va $(\vec{k},\ \vec{i})$ juftliklar yo‘nalishi mos ravishda *Oxy, Oyz, Ozx* tekisliklarning musbat yo‘nalishi bilan bir xildir.

$\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ uchlik esa o‘ng sistemadir, chunki $(\vec{i},\ \vec{k})$ juftlik aniqlagan aylanma yo‘nalish *Ozx* tekisligining musbat yo‘nalishiga teskari. Xuddi shunday, $(\vec{k},\ \vec{j})$ va $(\vec{j},\vec{i})$ juftliklar aniqlagan aylanma yo‘nalishlar mos ravishda *Oyz* va *Oxy* tekisliklarning musbat yo‘nalishiga teskaridir.

Endi geometriya va amaliy matematika masalalarida keng qo‘llaniladigan vektor ko‘paytma tushunchasini kiritamiz.

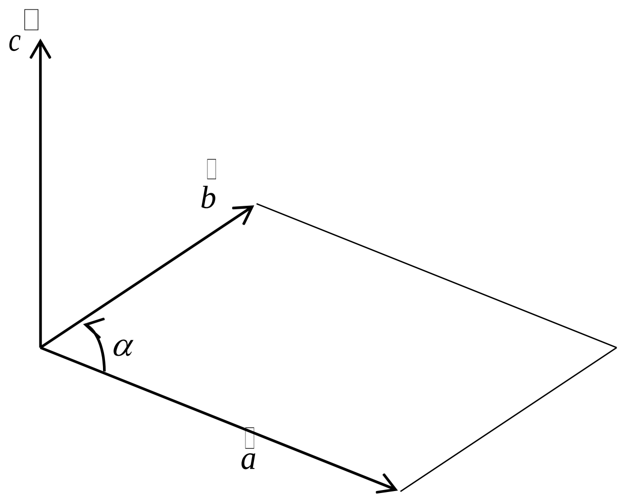
<u>Ta’rif.</u> $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasi deb, quyidagi uchta xususiyatga ega bo‘lgan $\vec{c}$ vektorga aytamiz:

1) $\vec{c}$ ning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uzunliklari va ular orasidagi φ burchak sinusi ko‘paytmasiga teng:

$$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi \qquad (7)$$

2) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar, jumladan $\vec{a}$ ga ham va $\vec{b}$ ga ham perpendikulyar;

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar chap sistemasini tashkil etadi.



18-rasm

Birinchi xossadan $\vec{c}$ ning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga tortilgan parallelogram yuziga teng ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|$$

yoki

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| \qquad (8)$$

Vektor ko'paytmani $\vec{a}\times\vec{b}$ ko'rinishda ifodalaymiz.

Yuqorida kiritilgan ikki ko'paytmalarga (ya'ni skalyar va vektor ko'paytmalar) berilgan nomlar, ularning natijalariga qarab tanlanganligini eslatib o'tamiz.

Vektor ko'paytma quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. $\vec{a}\times\vec{b}=0$ bo'lishi uchun, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kolleniar bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu xossa vektorlarning kolleniarlik sharti deb yuritiladi.

Isboti. (7) tenglikdan kelib chiqadi.

2-xossa. $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$, ya'ni ko'paytuvchilar o'rni almashsa, natija faqat o'z ishorasini o'zgartiradi.

Haqiqatan, agar ko'paytmada $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'rnini almashtirsak, $\vec{b},\vec{a},\vec{a}\times\vec{b}$ uchlik o'ng sistema bo'lib qoladi, $\vec{a}\times\vec{b}$ ning ishorasini teskarisiga almashtirsak, unda $\vec{b},\vec{a},-\vec{a}\times\vec{b}$ uchlik chap sistemaga aylanadi.

3-xossa. Agar *m, n* – ixtiyoriy sonlar bo'lsa, $(m\vec{a})\times(n\vec{b})=mn(\vec{a}\times\vec{b})$

Isboti. Agar $m=0,\ n\neq0$ yoki $m\neq0,\ n=0$ bo'lsa, tenglik bajarilishi o'z-o'zidan ko'rinib turibdi. $m\neq0,\ n=1$ bo'lgan holni ko'rish yetarli, chunki $m=1,\ n\neq0$ bo'lgan hol 2-xossani qo'llash hisobiga biz ko'rmoqchi bo'lgan holga keltiriladi. Avvalambor

$$\left|(m\vec{a})\times\vec{b}\right|=\left|m\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\phi$$

bu yerda agar $m>0$ bo'lsa, $\phi=\varphi$ va $m<0$ bo'lsa, $\phi=\pi-\varphi$, lekin ikkala holda ham $\sin\phi=\sin\varphi$ bo'lgani uchun

$$\left|(m\vec{a})\times\vec{b}\right|=|m|\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi=|m|\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

Ikkinchidan, $m\vec{a}$ vektor $\vec{a}$ vektorga kolleniar, shu sababli $\vec{a}\times\vec{b}$ vektor $m\vec{a}$ ga perpendikulyar, $m(\vec{a}\times\vec{b})$ vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ ga kolleniar bo'lgani uchun $m(\vec{a}\times\vec{b})$ vektor $m\vec{a}$ ga va $\vec{b}$ ga perpendikulyardir. Va nihoyat, agar $m>0$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $m\vec{a}$ vektorlar, $\vec{a}\times\vec{b}$ va $m(\vec{a}\times\vec{b})$ vektorlar bir xil yo'nalgan bo'ladi, shu sababli $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ uchlik chap sistema bo'lgani uchun $m\vec{a},\vec{b},m(\vec{a}\times\vec{b})$ uchlik ham chap sistema bo'ladi. $m<0$ bo'lgan hol ham xuddi shunday tekshiriladi. Xossa to'liq isbot bo'ldi.

4-xossa.

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

Isboti. Avval $\vec{a}=\vec{e}$ ort bo'lgan holni ko'raylik. $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarni 3-rasmda ko'rsatilgandek qilib, $\vec{e}$ ga perpendikulyar bo'lgan π tekislikka proyeksiyalaymiz va bu proyeksiyalarni $\vec{e}$ ort atrofida soat milini harakati bo'ylab 90^0 ga bursak, $\vec{e}\times$

b va $e \times c$ vektorlar hosil bo‘ladi.

b

$np_\pi(\vec{c}+\vec{b})=np_\pi\vec{b}+np_\pi\vec{c}$ bo‘lgani uchun $\vec{e}\times\vec{b}$ va $\vec{e}\times\vec{c}$ larning yig‘indisi bo‘lgan va ularga tortilgan parallelogrammning diagonali $\vec{e}\times(\vec{b}+\vec{c})$ga teng bo‘ladi. Demak,

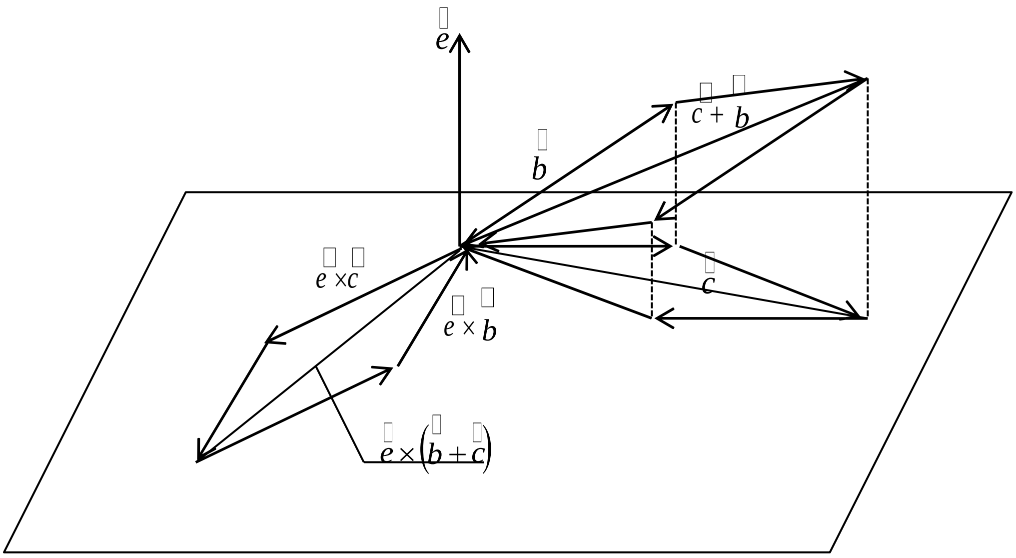
$$\vec{e}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{e}\times\vec{b}+\vec{e}\times\vec{c}$$

ekan.

Endi agar $\vec{a}$ ixtiyoriy noldan farqli vektor bo‘lsa, $\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}_0$ deb (bu yerda $\vec{a}_0$ - $\vec{a}$ vektorning orti),

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\vec{a}_0\times(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\left(\vec{a}_0\times(\vec{b}+\vec{c})\right)=|\vec{a}|\left(\vec{a}_0\times\vec{b}+\vec{a}_0\times\vec{c}\right)=$$
$$=|\vec{a}|(\vec{a}_0\times\vec{b})+|\vec{a}|(\vec{a}_0\times\vec{c})=|\vec{a}|\vec{a}_0\times\vec{b}+|\vec{a}|\vec{a}_0\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

tenglikni hosil qilamiz. Xossa to‘liq isbot bo‘ldi.



19-rasm

Bu xossadan xususan quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{d}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{d}$$

Vektor ko‘paytmaning xossalaridan ortlar uchun quyidagi munosabatlar kelib chiqadi:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{i}^{\,2}=0,\quad \vec{j}^{\,2}=0,\quad \vec{k}^{\,2}=0,$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$
$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$

Shu sababli, agar vektorlar o‘z proyeksiyalari bilan berilgan bo‘lsa, ya’ni $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$ bo‘lsa, u holda

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=$$

$$=a_xb_x\vec{i}^{\,2}+a_xb_y\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)+a_xb_z\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)+a_yb_x\left(\vec{j}\times\vec{i}\right)+$$

$$+a_yb_y\vec{j}^{\,2}+a_yb_z\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)+a_zb_x\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)+a_zb_y\left(\vec{k}\times\vec{j}\right)+a_zb_z\vec{k}^{\,2}=$$

$$=a_xb_y\vec{k}-a_xb_z\vec{j}-a_yb_x\vec{k}+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}-a_zb_y\vec{i}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix} a_z & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$$

Misol. $\vec{a}=\{4, 2, -3\}$ va $\vec{b}=\{2, 1, 4\}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasini toping.

Yechish. $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}=11\vec{i}-22\vec{j}-4\vec{k}$

Misol. $\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ vektorlarga torptilgan uchburchak yuzini toping.

Yechish. Ma’lumki (qarang, (8)),

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

Shu sababli,

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$$

Misol. $A(1,-1,2)$, $B(0,1,-1)$ va $C(-1,2,3)$ uchlari berilgan $ABCD$ parallelogrammning yuzini toping.

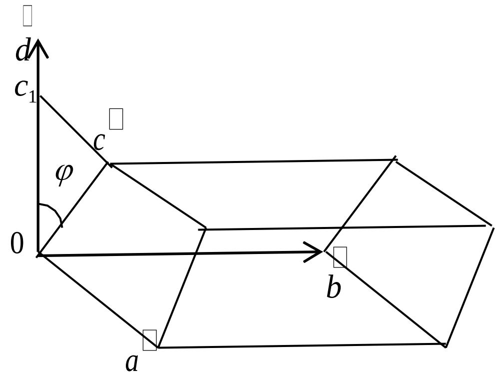
Yechish. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\{-1,2,-3\}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}=\{-2,3,1\}$ vektorlar tuzib olib, avvalgi misol natijasini qo‘llasak:

$$S=\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}^2}=\sqrt{11^2+7^2+1}=\sqrt{171}$$

III. $\vec a, \vec b$ va $\vec c$ vektorlarning **aralash ko‘paytmasi** deb $\vec a$ vektorni $\vec b$ vektorga vektor ko‘paytmasidan hosil bo‘lgan natijaning $\vec c$ vektorga skalyar ko‘paytmasiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c \text{ yoki } \vec a\,\vec b\,\vec c$$

Aralash ko‘paytmaning geometrik ma’nosi: $\vec a, \vec b$ va $\vec c$ vektorlar komplanar vektorlar bo‘lmasin, ya’ni ular bir tekislikda yotmasin.



20-rasm

U holda $\vec a\times\vec b=\vec d$ va $\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c=\vec d\cdot\vec c=d\,c\cos\varphi=d\,c_1$; Bu yerda d – $\vec a, \vec b$ vektorlarga qurilgan parallelogram yuzi, c_1 esa $\vec a\,\vec b\,\vec c$ vektorlarga qurilgan parallelopipedning balandligi bo‘lgani uchun $\vec a\,\vec b\,\vec c$ aralash ko‘paytma o‘sha parallelopipedning hajmiga teng bo‘ladi.

Aralash ko‘paytmaning xossalari:

1. Istalgan ikkita vektorning o‘rni almashsa aralash ko‘paytma ishorasini o‘zgartiradi:

$$\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c=-\left(\vec a\times\vec c\right)\cdot\vec b=-\left(\vec c\times\vec b\right)\cdot\vec a$$

2. Agarda uchta vektordan ikkitasi teng bo‘lsa yoki parallel bo‘lsa aralash ko‘paytma nolga teng bo‘ladi.

3. «$\cdot$» va «$\times$» amallari belgisining o‘rinlarini almashtirish mumkin, ya’ni $\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c=\vec a\cdot\left(\vec b\times\vec c\right)$.

4. $\vec a, \vec b$ va $\vec c$ vektorlar komplanar bo‘lishi uchun (bitta tekislikda yotishi uchun) $\vec a\,\vec b\,\vec c=0$ bajarilishi zarur va yetarli.

IV. $\vec a,\vec b$ va $\vec c$ vektorlarga qurilgan parallelepipedning hajmi

$$V_{par} = \pm \vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

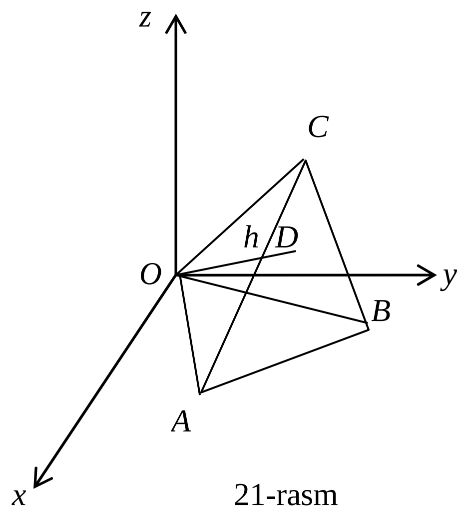
$\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarga qurilgan piramidaning hajmi

$$V_{pir} = \pm \frac{1}{6}\vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

Misol. Uchlari $O(0,0,0)$, $A(5,2,0)$, $B(2,5,0)$ va $C(1,2,4)$ nuqtalarda bo‘lgan piramidaning hajmi, *ABC* yoqning yuzasi va shu yoqqa tushirilgan perpendikulyar hisoblansin.

Yechilishi: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{AO}$ vektorlarning proyeksiyalarini topaylik

$$\overrightarrow{AB}\{-1,3,0\},\quad \overrightarrow{AC}\{-4,0,4\},\quad \overrightarrow{AO}\{-5,-2,0\}$$



21-rasm

$$V_{pir} = 1/6\ \overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AO}$$

$$V_{pir} = 1/6\begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ -5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -1/6(-60-24) = 84/6 = 14\ kub.b$$

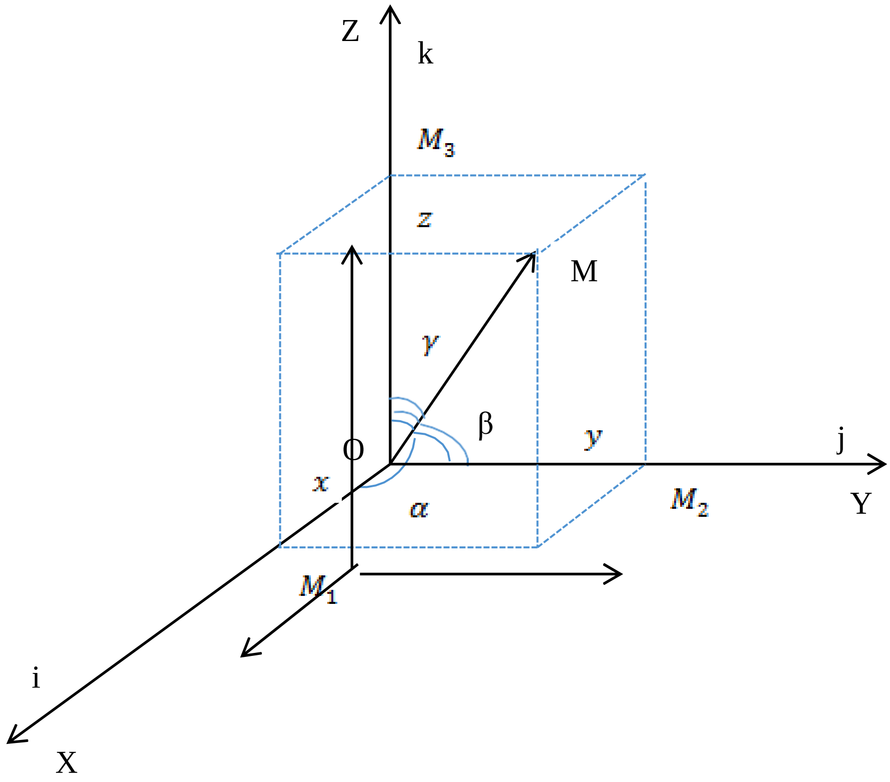
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|12\vec{i} + 12\vec{j} + 12\vec{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2+12^2+12^2} = 6\sqrt{3}$$

$$h = \overrightarrow{OD} = \frac{3V_{pir}}{S_{\Delta ABC}};\ \text{Demak,}\ h = \frac{3\cdot 14}{6\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

2. Tekislik va fazoda Dekart koordinatalar sistemasi

O`zaro perpendikulyar kesishuvchi uchta o`qlar, ularning kesishish nuqtasi bo`lgan koordinata boshi va birlik masshtabga ega bo`lgan tartiblangan sistema, fazoda to`g`ri burchakli ***dekart koordinatalar sistemasi*** deyiladi.

OX −***abtsissa,*** OY −***ordinata*** va OZ −***applikata o`qlari*** deyiladi.



22-rasm

$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ radius-vektorning moduli yoki uzunligi:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (8)$$

formula bilan topiladi. Koordinata o'qlaridagi $i,\ j,\ k$ birlik vektorlar ***ortlar*** deyiladi. Radius-vektorlar ortlar orqali quyidagicha ifodalanadi.

$$\vec{r} = xi + yj + zk \qquad (9)$$

U holda $\vec{a} = xi + yj + zk$ vektorni **λ songa ko'paytmasi** deb;

$$\lambda\vec{a} = \lambda xi + \lambda yj + \lambda zk \qquad (10)$$

ga aytiladi.

$\vec{a} = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ va $\vec{b} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ vektorlarni yig'indisi (ayirmasi) deb,

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2)i + (y_1 \pm y_2)j + (z_1 \pm z_2)k \qquad (11)$$

ga atiladi.

Masalan, ***a***=(4,–2,1) va ***b***=(5,9,0) vektorlar uchun

a+***b***=(4+5,–2+9,1+0)=(9,7,1) , ***a***–***b***=(4–5,–2–9,1–0)=(–1, –11,1).

$A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar berilgan. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proektsiyalari:

$$\begin{cases} a_x = pr_x\overrightarrow{AB} = X = x_2 - x_1 \\ a_y = pr_y\overrightarrow{AB} = Y = y_2 - y_1 \\ a_z = pr_z\overrightarrow{AB} = Z = z_2 - z_1 \end{cases} \qquad (12)$$

formula bilan topiladi.

Agar $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektor koordinata o'qlari bilan α, β va γ burchaklar tashkil etsa, u holda bu vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari:

$$cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}; \qquad cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}; \qquad cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} \qquad (13)$$

formula bilan topiladi.

Har qanday vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari kvadratlarining yig'indisi 1 ga teng:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 \qquad (14)$$

3. Tekislik va fazoda ikki nuqta orasidagi masofa.

O'qdagi $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar orasidagi masofa:

$$d = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} \qquad (1)$$

AB kesmaning (algebraik) kattaligi:

$$AB = x_2 - x_1 \qquad (2)$$

Tekislikdagi $A(x_1; y_1)$ va $B(x_2; y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (3)$$

R^3 fazodagi $A(x_1;y_1;z_1)$ va $B(x_2;y_2\,;z_2)$ nuqtalar orasidagi masofa:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (4)$$

Masalan, $M_1(2,1)$ va $M_2(–3,0)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{x-2}{-3-2}=\frac{y-1}{0-1} \Rightarrow -(x-2)=-5(y-1) \Rightarrow x-5y+3=0\,.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1. Ikki vector berilgan $a=i+j+4k\;\; va\; b=-7i-j+2k$. Toping:[6]

   $a)\ -6a-2b \quad b)\ -5a+2b \quad c)\ 4a+3b \quad d)\ -2(a+3b)$

2. $\vec{a}(3;1;2)$ va $\vec{b}(0;-2;-3)$ orlar berilgan. $\vec{a}\;\; va\;\; \vec{b}$ vektorlarning yig’indisini toping.

$j{:}\,\vec{a}+\vec{b}=(3;-1;-1).$

3. $\vec{a}(2;1)$ va $\vec{b}(4;-3)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}+\vec{b}$ va $\vec{a}-\vec{b}$ vektorlarni toping va geometrik tasvirlang.

$j{:}\,\vec{a}+\vec{b}=(6;-2), \vec{a}-\vec{b}=(-2;4).$

4. $\vec{a}(1;-3)$ va $\vec{b}(-4;-1)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}+\vec{b}$ vektorning uzunligini toping va geometrik tasvirlang.

$j{:}\,\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=5.$

5. $A(1;4)\; va\; B(-3;0)$ nuqtalar berilgan. $\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligini toping va geometrik tasvirlang.

$j{:}\,\left|\overrightarrow{AB}\right|=4\sqrt{2}.$

6. $\vec{a}(-3;1;0)$ va $\vec{b}(2;5;-1)$ vektorlar berilgan. $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|$ ni topin.

$j{:}\sqrt{74}.$

7. $M(0;3;-4)$ nuqta yasalsin va uning radius-vektori uzunligi hamda yo’nalishini aniqlang.

$j{:}\,5$

[6] Nigel Buckle, Ian Dunbar. Mathematics-Higher Level (core). Printed by Shannon books. Australia. 2007. 928 b.

8. $r = 2i + 3j - 6k$ vektor yasalsin va uning radius-vektorining uzunligi, yo'nalishi va yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

$$j: |r| = 7; cos\alpha = \frac{2}{7}; cos\beta = \frac{3}{7}; cos\gamma = -\frac{6}{7}$$

1. Koordinatalar boshidan $A(-5;12)$ nuqtagacha bo'lgan masofani toping.

$$j: d = 13.$$

2. $A(3;1)$ va $B(5;4)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

$$j: d = 4\sqrt{2}.$$

3. Uchlari $A(1;0)$, $B(1;3)$ va $C(6;3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak tomonlari uzunliklarini toping va grafigini yasang.

$$j: AB = 3, BC = 5, AC = \sqrt{34}.$$

4. Koordonatalar boshidan va $A(6;0)$ nuqtadan 5 birlik masofada yotuvchi nuqtalar topilsin.

$$j: \ A(3;4), B(3;-4).$$

5. Abstsissalar o'qida $A(0;3)$ nuqtadan 5 birlik masofada yotuvchi nuqtalar topilsin.

$$j: \ A(-4;0), B(4;0).$$

6. $A(1;1)$ va $B(5;4)$ nuqtalar hamda OX o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan A_1, B_1 nuqtalar yasalsin. Bu nuqtalarni tutashtirish natijasida hosil bo'lgan ABA_1B_1 trapetsiyaning tomonlar uzunliklarini toping.

$j: \ AA_1 = 2, AB = 5, BB_1 = 8, A_1B_1 = 5.$

XULOSA

Skalyar kattaliklar faqat son qiymati bilan, vektor esa ham sonli qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadi. Vektorlar ustida ularni songa ko‘paytirish, o‘zaro qo‘shish va ayirish amallari kiritilib, vektorlar algebrasi hosil qilinadi. Dekart koordinatalar sistemasida vektorlar o‘zlarining koordinatalari bilan ifodalanadi. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar ularning koordinatalari orqali oson amalga oshiriladi. Vektorlar algebrasi yordamida bir qator matematik masalalar oson hal etiladi. Skalyar ko‘paytmani vektorlarning koordinatalari yordamida hisoblash juda qulay. Skalyar ko‘paytma yordamida vektorlarning modulini topish, ular orasidagi burchakni aniqlash, ikki vektorning ortogonallik shartini ifodalash kabi masalalar oson yechiladi. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi natijasida son hosil bo‘ladi. Ammo fizika, mexanikaning bir qator masalalarida ikkita vektorning shunday ko‘paytmasini kiritishga to‘g‘ri keladiki, ko‘paytmada vektor hosil bo‘lishi kerak. Shu sababli vektorlarning vektorial ko‘paytmasi tushunchasi kiritilgan. Bu ko‘paytma uchun kommutattivlik qonuni bajarilmasada, distributivlik qonuni o‘z kuchini saqlab qoladi. Vektorial ko‘paytma koordinatalar orqali III tartibli determinant yordamida algebraik usulda ham topilishi mumkin. Vektorial ko‘paytma orqali vektorlarning kollinearlik sharti oddiy ko‘rinishda ifodalanadi. Uchta vektorning ko‘paytmasi tushunchasini kiritish uchun ularning dastlabki ikkitasi vektorial ko‘paytirilib, hosil bo‘lgan natija bilan uchinchisi skalyar ko‘paytiriladi. Natijada hosil bo‘lgan son uch vektorning aralash ko‘paytmasi deyiladi. Aralash ko‘paytma qiymati uchala vektorlarning koordinatalaridan hosil qilingan III tartibli determinantni hisoblash orqali topilishi mumkin. Aralash ko‘paytma yordamida vektorlarning komplanarlik shartini aniqlash, qirralari berilgan uchta vektordan iborat parallelepipedning hajmini hisoblash, to‘rtta nuqtani bir tekislikda yotishini aniqlash kabi masalalar oson yechiladi.

Nazorat savollari

1. Vektor deb nimaga aytiladi?
2. Vektorning uzunligi formulasini ifodalang?
3. Vektorlarning yig’indisi deb nimaga aytiladi?
4. Vektorning ayirmasi deb nimaga aytiladi?
5. Komplanar vektor deb nimaga aytiladi?
6. Tekislikda ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?

2-§. TO'G'RI CHIZIQ TENGLAMALARI

Reja:

1. **Umumiy tushunchalar.**
2. **To‘g‘ri chiziq tenglamasi.**
3. **Aylana tenglamasi.**
4. **To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi.**
5. **To‘g‘ri chiziqning boshqa tenglamasi.**
6. **To‘g‘ri chiziqqa doir turli masalalar.**
7. **To‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi.**

Tayanch iboralar: to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi, burchak koeffitsiyentli tenglama, kesmalardagi tenglama , to‘g‘ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik sharti.

I. Faraz qilaylik, bizga ikki x va y o‘zgaruvchi miqdorlarni bog‘lovchi

$$F\left(x, y\right)=0 \qquad (1)$$

tenglama berilgan bo‘lsin. Bu tenglama o‘z navbatida bir o‘zgaruvchini, masalan y ni ikkinchisining, ya’ni x ning funksiyasi sifatida aniqlaydi. Agar (1) ni y ga nisbatan yechib olsak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$y=f\left(x\right) \qquad (2)$$

bu yerda $f(x)$ bir qiymatli yoki ko‘p qiymatli funksiya bo‘lishi mumkin, bu funksiyaning qiymatlari x o‘zgarganda uzluksiz o‘zgaradi deb faraz qilaylik.

x va y miqdorlarni Oxy dekart koordinatalar tekisligining biror M nuqtasini koordinatalari sifatida qaraymiz. U holda (2) tenglik x o‘zgaruvchining har bir qiymatiga y ning aniq bir qiymatini mos qo‘yadi.

Shu sababli, x ning har bir qiymatiga tekislikning koordinatalari x va $y=f\left(x\right)$ bo‘lgan aniq bir M nuqtasi mos keladi.

Endi, agar *x* uzluksiz qiymatlarni qabul qilsa, u holda *M Oxy* tekisligida uzluksiz o‘zgarib, nuqtalarning geometrik o‘rnini chizadi, bu geometrik o‘rinni chiziq deb ataymiz.

Demak, chiziq koordinatalari (1) yoki (2) ko‘rinishdagi tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o‘rni ekan. (1) yoki (2) tenglama o‘z navbatida **chiziqning tenglamasi** deb ataladi.

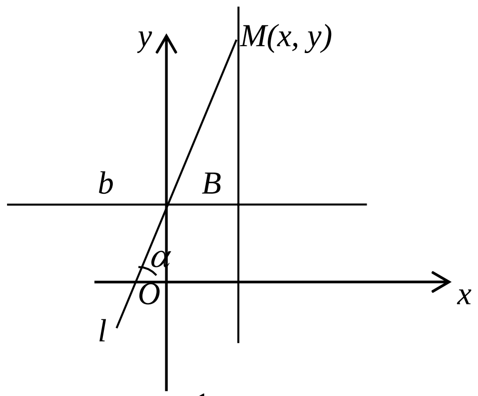
Endi, agar aytilgan gaplarni umumlashtirsak, **berilgan chiziqning tenglamasi** deb, (1) yoki (2) ko‘rinishga ega bo‘lgan shunday tenglamaga aytamizki, bu tenglama faqat berilgan to‘g‘ri chiziqda yotuvchi nuqtaning koordinatalarini *x* va *y* ning o‘rniga qo‘ygandagina qanoatlanadi.

Agar $F(x,y)=Ax+By+C$ bo‘lsa, (1) ni 1-tartibli tenglama deymiz, u ifodalaydigan chiziqni to‘g‘ri chiziq deb ataymiz.

Agar $F(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+M$ bo‘lsa, (1) ni 2-tartibli tenglama, unga mos keluvchi chiziqni esa **2-tartibli chiziq** deb ataymiz.

Misol tariqasida, to‘g‘ri chiziq va aylananing tenglamasini tuzamiz.

II. To‘g‘ri chiziq tenglamasi. Faraz qilaylik, *y* o‘qini $A(0,b)$ nuqtada kesib o‘tuvchi va *x* o‘qiga α burchak ostida og‘ib o‘tgan to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin.



1-rasm

$M(x,y)$ to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. Chizmaga ko‘ra, $BM = AB \cdot tg\,\alpha$, bu yerda *BM* va *AB* lar $M(x,y)$ $\overline{BM}$ va $\overline{AB}$ vektorlarning kesma kattaligi. $BM = y-b,\ AB = x$ bo‘lgani uchun yuqoridagi formuladan

$$y - b = tg\alpha \cdot x$$

yoki

$$y = k\,x + b \qquad (3)$$

kelib chiqadi, bu yerda

$$k = tg\alpha \qquad (4)$$

deb belgilandi. (3) tenglamani berilgan to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasini koordinatalari qanoatlantiradi, va aksincha koordinatalari (3) ni qanoatlantiradigan har qanday nuqta l to‘g‘ri chiziqda yotadi. k koeffitsiyent (4) ga ko‘ra, α burchakka bog‘liq bo‘lgani uchun **burchak koeffitsiyent** deb ataladi, b esa **boshlang‘ich ordinata** deyiladi.

III. Aylana tenglamasi. Radiusi r va markazi $C(a,b)$ nuqtada bo‘lgan aylanani ko‘raylik. Ta’rifga ko‘ra, aylana $C\,(a,b)$ nuqtagacha bo‘lgan masofalari o‘zgarmas r gat eng bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rnidir.

Agar $M\,(x,y)$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsa, u holda

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

yoki tenglikni kvadratga ko‘tarib, ildizni yo‘qotsak,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Bu tenglama berilgan aylananing tenglamasidir.

Agar aylananing markazi koordinatalar boshida bo‘lsa, u holda uning tenglamasi soddaroq bo‘ladi:

$$x^2+y^2=r^2$$

IV. **Teorema.** *Oxy* koordinatalar tekisligida har qanday to‘g‘ri chiziqning tenglamasi

$$Ax+By+C=0 \qquad (5)$$

ko‘rinishda bo‘ladi, aksincha, (5) ko‘rinishdagi har qanday tenglama *Oxy* koordinatalar tekisligida to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

Isboti. Yuqorida ko‘rilganidek, x o‘qiga og‘ish burchagi ma’lum bo‘lgan har qanday to‘g‘ri chiziqning tenglamasi $y=k\,x+b$, ko‘rinishda bo‘ladi. Buni o‘z navbatida $k\,x-y+b=0$ ko‘rinishga keltirib olsa bo‘ladi. Endi, agar to‘g‘ri chiziqning bir nuqtasi $M_0(x_0, y_0)$ va unga perpendikulyar bo‘lgan biror $\vec{s}=\{A,B\}$ vector berilgan bo‘lsa, u holda to‘g‘ri chiziqda yotuvchi har qanday $M(x,y)$ nuqta uchun $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,\ y-y_0\}$ vektor $\vec{s}$ vektorga perpendikulyar bo‘ladi. Vektorlarning perpendikulyarlik shartiga ko‘ra $\vec{s}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$ yoki

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad (6)$$

Qavslarni ochib va $C=-Ax_0-By_0$ deb belgilasak, (6) ni (5) ko‘rinishga keltirsa bo‘ladi.

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbot qilamiz. Agar (5) da $B\neq 0$ bo‘lsa, u holda (5) tenglikni *B* ga bo‘lib yuborib, uni

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

ko‘rinishga keltirib olamiz. Agar $k=-\frac{A}{B},\ b=-\frac{C}{B}$ desak, oxirgi tenglikni $y=kx+b$ deb yozsa bo‘ladi. Ma’lumki, bu to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasidir.

Agar $B=0$ bo‘lsa, u holda $A\neq 0$, shuning uchun (5) quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$x=-\frac{C}{A}$$

bu yerda $a=-\frac{C}{A}$ desak, $x=a$, ya‘ni *x* o‘qiga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasi hosil bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

(5) tenglama to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi, (6) esa bir nuqtadan o‘tgan **to‘g‘ri chiziq tenglamasi** deb ataladi.

To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi (5) to‘liq bo‘lmagan uch holni ko‘ramiz:

1) *C*=0, bunda tenglama $Ax+By=0$ ko‘rinishni oladi, bu tenglama koordinatalar boshidan o‘tgan chiziqni ifodalaydi. Haqiqatan, $x=0,\ y=0$ koordinatalar bu tenglamani qanoatlantiradi.

2) $A=0,\ B\neq 0$, bunda (5) $By+C=0$ koʻrinishga keladi, bu tenglama x oʻqiga parallel oʻtadigan toʻgʻri chiziqni ifodalaydi. Xususan, agar C=0 boʻlsa, y=0 hosil boʻladi, bu x oʻqining tenglamasidir.

3) $A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0$ boʻlsin. U holda (5) ning ozod hadi C ni tenglikning oʻng tomoniga oʻtkazsak va -C ga boʻlib yuborsak:

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1$$

yoki

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$$

Quyidagi belgilashlarni kiritsak:

$$a=-\frac{C}{A},\ \ b=-\frac{C}{B}$$

tenglama

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{7}$$

koʻrinishga keladi. (7) ni toʻgʻri chiziqning **kesmalardagi tenglamasi** deb ataymiz, chunki bu toʻgʻri chiziq x oʻqini $M\left(a,0\right)$ nuqtada, yoʻqini $N\left(0,b\right)$ nuqtada kesib oʻtadi.

Misol. $3x-5y+15=0$ toʻgʻri chiziqning kesmalardagi tenglamasini tuzing.

Yechish. Ozod had 15 ni tenglikning oʻng tomoniga oʻtkazib -15 ga boʻlamiz:

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1$$

Demak, berilgan toʻgʻri chiziq x va y oʻqlaridan mos ravishda $a=-5,\ \ b=3$ kesmalar ajratar ekan.

Umumiy tenglamaning A va B koeffitsiyentlari geometrik maʼnoga ega. (6)dan maʼlumki, A va B koeffitsiyentlar toʻgʻri chiziqga perpendikulyar vektorning koordinatalaridir. Agar $\vec{a}=\{-B,A\}$ vektor tuzib olsak, $\vec{s}$ va $\vec{a}$ vektorlar perpendikulyar ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Shu sababli, $\vec{a}$ vektor berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi, uni shu xususiyatiga ko‘ra, to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori, $\vec{s}$ ni normal vektor deb atashadi.

V. Agar $M_0(x_0, y_0)$ to‘g‘ri chiziqning berilgan nuqtasi va $\vec{a}=\{m, n\}$ uning yo‘naltiruvchi vektori bo‘lsa, uning tenglamasini quyidagicha tuzsa ham bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $M(x,y)$ nuqta to‘g‘ri chiziqning siljuvchi nuqtasi bo‘lsin. U holda, $\vec{a}$ va $\overline{M_0M}$ vektorlar o‘zaro parallel bo‘ladi. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko‘ra

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \tag{8}$$

Bu tenglama to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi deb ataladi.

Agar (8) da kasrlarni *t* ga tenglasak,

$$x-x_0=mt, \quad y-y_0=nt$$

yoki

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt \end{cases}$$

Parametrik tenglamalar deb ataluvchi tenglamani hosil qilamiz.

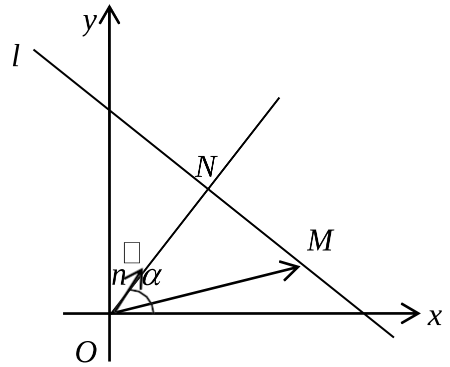
Agar to‘g‘ri chiziqning ikkita $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ nuqtalari ma’lum bo‘lsa, u holda $\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorni yo‘naltiruvchi vektor deb qarash mumkin, shuning uchun bu to‘g‘ri chiziqning tenglamasi (8) ga ko‘ra

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{9}$$

bo‘ladi. Bu tenglama ikki nuqtadan o‘tgan **to‘g‘ri chiziqning tenglamasi** deb ataladi.

Endi, faraz qilaylik, bizga *l* to‘g‘ri chiziq va uning normal vektori $\vec{n}$ berilgan bo‘lsin. Agar α $\vec{n}$ vektorning *x* o‘qiga og‘ish burchagi bo‘lsa, u holda shu vektorning orti

$-\vec{n}_0=\{cos\alpha, sin\alpha\}$ bo‘ladi. $|\vec{n}_0|=1$



2-rasm.

$M(x,y)l$ to‘g‘ri chiziqning siljuvchi nuqtasi va $ON = p$ bo‘lsin. U holda (2-rasmga qarang)

$$p = np_{\vec{n}}\overline{OM} = |\vec{n}| \cdot np_{\vec{n}}\overline{OM} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

Bundan

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (10)$$

kelib chiqadi. (10) tenglama to‘g‘ri chiziqning **normal tenglamasi** deb ataladi.

Agar to‘g‘ri chiziq $Ax + By + C = 0$ tenglama bilan berilgan bo‘lib, bu tenglama normal tenglamami yoki yo‘q ekanligini aniqlash uchun bu to‘g‘ri chiziqning normal vektorini uzunligi birga tengligini tekshirish kifoya. Bu tenglama $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2} = 1$ bo‘lsagina normal bo‘ladi. Agar $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2} \neq 1$ bo‘lsa, berilgan tenglamani $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ ifodaga bo‘lish kerak:

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \qquad (11)$$

(10) formuladan ma’lumki, ozod hadning ishorasi manfiy bo‘lishi shart, shu sababli, oxirgi tenglikdagi ishoralardan birini ozod hadning ishorasiga teskari qilib tanlash zarur. Shunda (11) normal tenglamaga aylanadi. $\pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ifoda **normallovchi ko‘paytuvchi** deb ataladi.

VI. 1. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. Faraz qilaylik, bizga $l_1 : y = k_1x + b_1$ va $l_2 : y = k_2x + b_2$ to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Ma’lumki, $k_1 = tg\alpha_1,\ k_2 = tg\alpha_2$ bu yerda α_1, α_2 lar mos ravishda l_1, l_2 to‘g‘ri chiziqlarning x

o‘qiga og‘ish burchaklaridir. Bu burchaklarni *Oxy* tekisligidagi musbat yo‘nalish bo‘ylab hisoblangan deb tushunamiz. Agar $\alpha_2 > \alpha_1$ bo‘lsa, l_1, l_2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak deb $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ burchakni tushunamiz. U holda

$$tg\alpha = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad (12)$$

(12) dan ko‘rinadiki, agar $k_1 = k_2$ bo‘lsa, $\alpha = 0$ yoki $\alpha = \pi$ bo‘ladi, ya’ni l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘ladi, va aksincha, agar l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, $tg\ \alpha = 0$, bundan esa $k_1 = k_2$ kelib chiqadi. Shu sababli, $k_1 = k_2$ tenglik to‘g‘ri chiziqlarning **parallellik sharti** deb ataladi. Agar l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar, ya’ni $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bo‘lsa, u holda (12) dan $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$ munosabat kelib chiqadi. Bu tenglikni to‘g‘ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti deb ataymiz.

2. Ikki to‘g‘ri chiziq tenglamasini birgalikda tekshirish. Faraz qilaylik, bizga ikki l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlarning tenglamalaridan tuzilgan

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

sistema berilgan bo‘lsin. Ma’lumki, bu sistema yagona yechimga ega bo‘lishi uchun

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

bo‘lishi zarur va yetarlidir. Bu esa $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ tengsizlikka ekvivalent. Bu holda (13) ning yagona yechimi l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlarda yotuvchi nuqtaning koordinatalarini beradi, ya’ni l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini aniqlaydi.

Agar

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

bo‘lsa, $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ bo‘ladi, bunda ikki hol yuz beradi: 1) agar (13) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lsa, bu $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ bo‘lganda bajariladi, u holda l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlar ustma-ust tushadi; 2) (13) sistema umuman yechimga ega emas, bu $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$ bo‘lganda yuz beradi, bunda berilgan to‘g‘ri chiziqlar umuman kesishmaydi, ya’ni ular parallel bo‘ladi.

3. Nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqgacha bo‘lgan masofa. $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan Δ to‘g‘ri chiziqgacha bo‘lgan *d* masofani topish talab etilgan bo‘lsin. *l* to‘g‘ri chiziqning $\vec{n}_0$ normalini qurib olaylik. Agar M_0 nuqta *l* ga nisbatan, $\vec{n}_0$ normalning musbat yo‘nlishi tomonida joylashgan bo‘lsa, u holda masofa + *d*, aks holda – *d* bo‘ladi. Buni M_0 nuqta *l* to‘g‘ri chiziqdan δ chetlanishi deb ataymiz. Chizmadan ko‘rinadiki, $p+\delta=np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM}_0=x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha$, bundan

$$\delta=x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-\rho \qquad (14)$$

yoki

$$d=\left|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-\rho\right| \qquad (15)$$

kelib chiqadi. Demak, nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqgacha bo‘lgan masofani topish uchun, nuqtaning koordinatalarini to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasini chap tomonidagi noma’lumlar o‘rniga qo‘yish kifoya ekan.

Agar to‘g‘ri chiziq tenglamasi normal bo‘lmasa, u holda normallovchi ko‘paytuvchi yordamida normal ko‘rinishga keltirib, so‘ngra (15) formula yordamida talab qilingan masofani hisoblaymiz.

VII. Tekislikning $S(x_0, y_0)$ nuqtasidan o‘tgan barcha to‘g‘ri chiziqlari to‘plami *S* markazli **to‘g‘ri chiziqlar dastasi** deb ataladi.

Teorema. Agar $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ lar *S* nuqtada kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar, va α, β lar bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan ixtiyoriy sonlar bo‘lsa, u holda

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0 \qquad (16)$$

S nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi bo‘ladi.

Isboti. Avval (16) haqiqatdan tenglama ekanligini ko‘rsataylik, buning uchun uni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\left(\alpha A_1+\beta A_2\right)x+\left(\alpha B_1+\beta B_2\right)y+\left(\alpha C_1+\beta C_2\right)=0 \qquad (17)$$

Bu yerda $\alpha A_1+\beta A_2$ va $\alpha B_1+\beta B_2$ lar bir vaqtda nolga teng bo‘laolmaydi, chunki aks holda, $\alpha A_1+\beta A_2=0$ va $\alpha B_1+\beta B_2=0$ dan $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=-\frac{\beta}{\alpha}$ kelib chiqadi, buni esa bo‘lishi mumkin emas, chunki bu to‘g‘ri chiziqlar shartga ko‘ra kesishadi. Bu esa (17) tenglama ekanligini ko‘rsatadi. Demak, u tekislikda biror to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi. Endi bu to‘g‘ri chiziq S nuqtadan o‘tishini ko‘rsatsak kifoya. Haqiqatan, (17) dagi noma’lumlar o‘rniga x_0, y_0 larni qo‘ysak, $A_1x_0+B_1y_0+C_1=0$ va $A_2x_0+B_2y_0+C_2=0$ ekanligidan,

$$\alpha\left(A_1x_0+B_1y_0+C_1\right)+\beta\left(A_2x_0+B_2y_0+C_2\right)=0$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Agar masalan, $\alpha\neq 0$ bo‘lsa, (17) ni quyidagi ko‘rinishda yozsa bo‘ladi:

$$\left(A_1x+B_1y+C_1\right)+\lambda\left(A_2x+B_2y+C_2\right)=0,$$

bu yerda $\lambda=\frac{\beta}{\alpha}$ deb belgilandi.

Misol. S nuqtada kesishuvchi $2x+3y-5=0,\quad 7x+15y+1=0$ to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. S nuqtadan $12x-5y-1=0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar o‘tgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Avval berilgan to‘g‘ri chiziqlar kesishishini tekshiramiz: $\frac{2}{7}\neq\frac{7}{15}.$

Demak, ular kesishmaydi. Dasta tenglamasi

$$2x+3y-5+\lambda\left(7x+15y+1\right)=0$$

Buni quyidagicha yozib olamiz:

$$\left(2+7\lambda\right)x+\left(3+15\lambda\right)y+\left(-5+\lambda\right)=0 \qquad (18)$$

Bu to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentini topaylik:

$$k=-\frac{2+7\lambda}{3+15\lambda}$$

Berilgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $k_1 = \frac{12}{5}$ bo‘lgani uchun, ularning perpendikulyarlik shartiga ko‘ra

$$-\frac{2+7\lambda}{3+15\lambda} = -\frac{5}{12}$$

Bundan $\lambda = -1$. Bu qiymatni (18) ga qo‘ysak:

$$5x + 12y + 6 = 0$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1. OY o’qdan $b = 5$ kesma ajratib, OX o’q bilan 1) 30^0;2) 45^0;3) 60^0 burchak tashkil qiluvchi to’g’ri chiziqlarning tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

$$j{:}\ y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 5;\ y_2 = x + 5;\ y_3 = \sqrt{3}x + 5$$

2. Koordinatalar boshidan o’tib, OX o’qi bilan; 1) 45^0; 2) 90^0; 3)120^0 burchak tashkil qiluvchi to’g’ri chiziqlarning tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

$$j{:}1)\ y = x; 2)\ x = 0;\ 3)\ y = -\sqrt{3}x.$$

3. OX o’qidan 5 birlik va OY o’qidan 4 birlik ajratuvchi to’g’ri chiziqlar tenglamalarini tuzing va grafigini chizing.

$$j{:}\quad \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1;\ \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = -1$$

4. 1) $2x + 3y = 6$; 2) $x - 3y = 4$ to’g’ri chiziq tenglamalarini o’qlardan ajratgan kesmalar bo’yicha yozing.

$$J{:}\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1;\ \frac{x}{4} + \frac{y}{(-\frac{4}{3})} = 1$$

5. Koordinatalar boshidan va $A(3;-4)$ nuqtalardan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

$$J{:}\ 4x + 3y = 0$$

6. Uchlari $A(1;2),\ B(4;4),\ C(7;0)$ nuqtalarda bo’lgan uchburchak tomonlarining tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

$$j: AB: 2x - 3y + 4 = 0\,; BC: 4x + 3y - 28 = 0\,; AC: x + 3y - 7 = 0$$

7. $A(-3;1)$ nuqtadan o'tuvchi va OX o'qining musbat yo'nalishi bilan 1) 30^0; 2) 45^0; 3) 60^0 tashkil etuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

$$j: 1).\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3+1};\ \ 2).\ y = x + 4;\ \ 3).y = \sqrt{3}x + 3\sqrt{3} + 1$$

8. Quyidagi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping:

1) $y = 2x + 3\ \ va\ \ y = -\frac{1}{2}x + 4;$ 2) $5x - y = -7\ \ va\ \ 2x - 3y = -1;$

3) $2x + y = 0\ \ va\ \ 3x - y - 4 = 0;$ 4) $x + 2y = 0\ \ va\ \ 2x + 4y = 7;$

$$j;\ 1)\ 90^0, 2)\ 45^0;\ 3)\ 45^0; 4)\ 0$$

9.

1) $3x - 2y - 5 = 0,$ 2). $6x - 4y + 1 = 0,$ 3). $6x + 4y - 3 = 0,$ 4). $2x + 3y - 6 = 0$

to'g'ri chiziqlardan parallel va perpendikulyar bo'lganlarini ko'rsating.

J: 1 va 2-to'g'ri chiziqlar parallel, 1 va 4-to'g'ri chiziqlar hamda 2 va 4-to'g'ri chiziqlar perpendikulyar.

10. Uchlari $A(1;2),\ B(4;5)\ \ va\ \ C(7;2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak tomonlari tenglamalarini tuzing va uning ichki burchaklarini toping.

$$j:\ AB: x - y + 1 = 0;\ BC: x + y - 9 = 0; AC: y = 2$$

$$< A = < C = 45^0; < B = 90^0$$

11. Uchlari $A(-1;1),\ B(3;3)\ \ va\ \ C(5;0)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning medianalari tenglamalarini yozing.

$$j:\ AN: x - 10y + 16 = 0;\ BM: 5x - 2y - 9 = 0; CK: x + 2y - 5 = 0$$

12. Uchlari $A(-2;0),\ B(2;4)\ \ va\ \ C(3;-1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning balandliklari tenglamalarini tuzing.

$$j:\ AN: y = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5};\ \ BM: y = 5x - 6;\ \ CK: y = -x + 2.$$

13. $x + y - 4 = 0$ va $2x - 2y + 5 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklar bissektrisalarining tenglamasini tuzing.

$$j:\ y = \frac{3}{4}; y = 3\frac{1}{4}$$

XULOSA

Tekislikdagi analitik geometriyada chiziqlarning xususiyatlari ularning tenglamalari orqali algebraik usulda o‘rganiladi. Eng sodda va eng ko‘p uchraydigan chiziq–to‘g‘ri chiziqdir. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqlarning umumiy, burchak koeffitsiyentli, kesmalardagi, normal, kanonik va parametrik tenglamalarini ko‘rish mumkin. Bu tenglamalardan kelgusida to‘g‘ri chiziqqa doir turli masalalarni yechishda foydalaniladi.

Nazorat savollari.

1. Birinchi va ikkinchi tartibli to‘g‘ri chiziqlarning ta’rifi.
2. To‘g‘ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentli tenglamasi.
3. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi.
4. To‘g‘ri chiziqning boshqa turdagi tenglamalari.
5. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak.
6. Nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa.

3-§. IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR

Reja:

1. **Aylananing tenglamasi.**
2. **Ellips.**
3. **Giperbola.**
4. **Parabola.**

Tayanch iboralar: ikkinchi tartibli egri chiziq, aylana, ellips, Ellipsning ekssentrisiteti, parabola, parabolaning ekssentrisiteti, giperbola, giperbolaning direktrissasi.

O‘zgaruvchilarning 2 darajasi qatnashgan tenglamalar ikkinchi tartibli egri chiziqni bildiradi. Umumiy holda uning tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1)$$

bu yerda *A, B, C, D, E, F* o‘zgarmas koeffitsiyentlar bo‘lib bulardan *A, B, C* koeffitsiyentlarning kamida bittasi 0 ga teng bo‘lmasligi kerak. (1) tenglama koeffitsiyentlarining olgan qiymatlariga qarab uning qanday egri chiziqni tasvirlashini ko‘ramiz.

I. Oldingi paragraflarda $C(a,b)$ nuqtasidan o‘tuvchi radiusi *R* ga teng bo‘lgan aylananing tenglamasi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (2)$$

ekanligini ko‘rgan edik. Qavslarni ochib bu tenglamani quyidagicha yozish mumkin: $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=R^2$, bu tenglamani (1) tenglama bilan solishtirib *xy* oldidagi koeffitsiyentni yo‘qligi x^2 va y^2 oldidagi koeffitsiyentlar o‘zaro teng ekanligini ko‘ramiz. Shunday qilib, *x*, *y* ga nisbatan ikkinchi tartibli umumiy tenglama aylana tenglamasi bo‘lishi uchun undagi x^2, y^2 qatnashgan hadlar oldidagi koeffitsiyentlar teng bo‘lishi va *xy* ko‘paytma oldidagi koeffitsiyentlar 0 ga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Demak, ikkinchi tartibli egri chiziqlarning tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi: $x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$, bu yerda x^2+2Dx va y^2+2Ey ni to‘la kvadratga keltiramiz, u holda

$$(x+D)^2+(y+E)^2=D^2+E^2-F \qquad (3)$$

u holda (3) da quyidagi uch hol bo‘lishi mumkin:

1) $D^2+E^2-F>0$ bu holda $R=\sqrt{D^2+E^2-F}$ radiusli markazi (-*D*, -*E*) nuqtada bo‘lgan aylana tenglamasi kelib chiqadi.

2) $D^2+E^2-F=0$ bu holda (3) tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi: $(x+D)^2+(y+E)^2=0$ bu tenglamani faqat (-*D*, -*E*) nuqta koordinatalarigina qanoatlantiradi.

3) $D^2+E^2-F<0$ (3) tenglama hech qanday egri chiziqni ifodalaymaydi.

Misol. $x^2+y^2+6x-6y-22=0$ hech qanday egri chiziqni ifodalamasligini ko‘rsating.

Yechish. (3) ga asosan

$$\left(x^2+6x+9\right)-9+\left(y^2-6x+9\right)-9+22=0$$
$$(x+3)^2+(y-3)^2=-4$$

demak, bu tenglama hech qanday egri chiziqni ifodalamaydi.

Misol 2. $x^2+y^2-4x+6y+3=0$ tenglama aylananing tenglamasi ekanligini ko‘rsating.

Yechish. x^2 va y^2 oldidagi koeffitsiyentlar teng, *xy* ko‘paytma qatnashgan had tenglamada yo‘q. Bu yerda $A=1, B=1, \; D=-4, \; E=6, \; F=3$ (2) ga asosan

$$x^2\cdot 4x+4+y^2+6y+9-4-9+3=0$$
$$(x-2)^2+(y+3)^2=10$$

bu markazi (2; -3) nuqtada bo‘lgan, radiusi $\sqrt{10}$ bo‘lgan aylananing tenglamasidir.

II. <u>Ta’rif.</u> Ellips deb, fokuslar deb ataluvchi nuqtalargacha bo‘lgan masofalarining yig‘indisi 2*a* o‘zgarmas bo‘lgan tekislik nuqtalarining geometrik o‘rniga aytiladi. Fokuslarni F_1, F_2 deb belgilaymiz, ular orasidagi masofa 2*c* ellipsning ta’rifiga asosan

$$F_1M+F_2M=2a$$

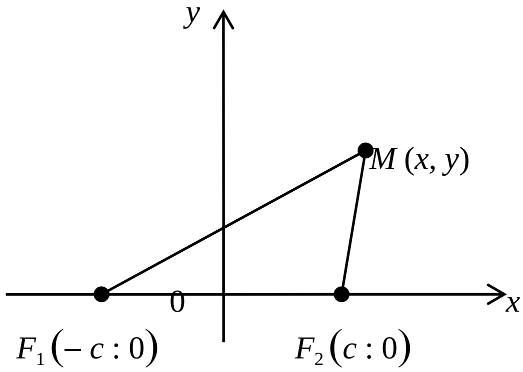
bizga ma’lumki $2a>2c$. Dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Tanlab olgan koordinatalar sistemasida chap fokus $F_1(-c:0)$ va o‘ng fokus $F_2(c:0)$, chizma 1 dan $M(x,y)$ ixtiyoriy nuqta, ellips tenglamasini keltirib chiqaramiz.

$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

(4) ga asosan

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

(5)



1-rasm

Tenglamani soddalashtirish uchun yuqoridagi ifodani quyidagicha yozamiz.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

tenglamani ikkala tomonini kvadratga ko‘tarsak

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

soddalashtirgandan so‘ng

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-c\,x$$

yana kvadratga ko‘tarsak

$$a^2\left[(x-c)^2+y^2\right]=a^2-2a^2\,c\,x+c^2\,x^2$$

va soddalashtirsak

$$\left(a^2-C^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

a^2-c^2 musbat son, shuning uchun $a^2-c^2=b^2$ deb olsak (5) tenglama quyidagicha ko‘rinishga keladi

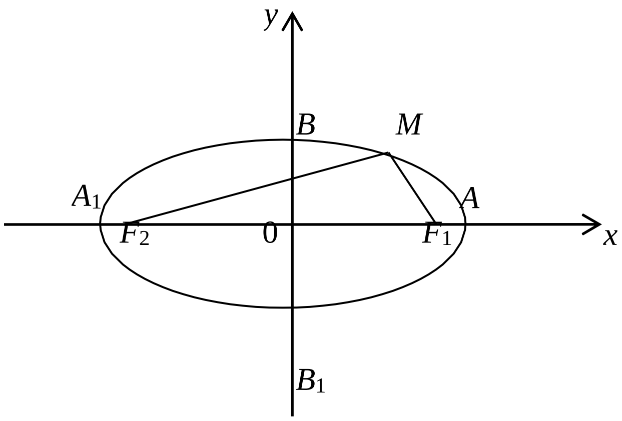
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (6)$$

Ellipsni ixtiyoriy nuqtalari (6) tenglamani qanoatlantiradi. (6) ellipsning **kanonik tenglamasi** deyiladi. Endi ellipsning kanonik tenglamasidan foydalanib uning shaklini tekshiramiz. (6) tenglamaga ellipsning x va y ning kvadratlarigina kiradi, shu sababli (x, y) nuqta ellipsning nuqtasi bo‘lsa, $(\pm x, \ \pm y)$ nuqta ham ellipsning nuqtasi bo‘ladi. Shunday ko‘rinishda ellips koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrik joylashgan, shuning uchun ellips shaklini birinchi chorakda tekshirish kifoya. (6) tenglamani y ga nisbatan yechamiz.

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (7)$$

u haqiqiy son bo‘lishi uchun $a^2 - x^2 \geq 0$ yoki $x \leq a$ bo‘lishi kerak $|x|$, 0 dan a gacha o‘sib borishi mumkin. x=0 bo‘lganda y=b bo‘lib, x=a bo‘lganda y=0 bo‘ladi. Abssissa x 0 dan a gacha o‘sib borganda y ordinata b dan 0 gacha kamayib boradi. BA yoy ellipsning birinchi chorakdagi yoyi bo‘ladi.

Simmetriyaga asoslanib ellipsning 2, 3 va 4 choraklardagi yoylari BA_1, A_1B_1 va B_1A larini ko‘rsatamiz, natijada



2-rasm

hosil bo‘ladi.

Koordinata o‘qlarini ellipsning **simmetriya o‘qlari** deyiladi, fokuslar yetgan simmetriya o‘q ellipsning **fokal o‘qi** deyiladi. Simmetriya o‘qlarining kesishgan nuqtasi ellipsning markazi deyiladi. Ellipsning simmetriya o‘qlari bilan kesishgan nuqtalari **uning uchlari** deyiladi. 2-chizmada $A(a,0)$, $A_1(-a,0)$, $B(b,0)$, $B_1(-b, 0)$ nuqtalar ellipsning uchlari $AA_1 = 2a$ ellipsning katta o‘qi $BB_1 = 2b$ ellipsning **kichik o‘qlari** deyiladi. (6) tenglamada a=b deb olinsa $x^2 + y^2 = a^2$ ko‘rinishiga ega bo‘ladi. Bu tenglama radiusi a ga teng bo‘lgan aylananing tenglamasidir.

Ellipsning ekssentrisiteti. Ellipsning fokuslari orasidagi masofani uning katta o‘qi uzunligiga nisbati **ellipsning ekssentrisiteti** deyiladi va $\varepsilon = \frac{c}{a}$ deb belgilanadi. c noldan a gacha bo‘lgan qiymatlarni olish mumkin, shuning uchun $0 \leq \varepsilon < 1$.

Bizga ma'lumki, $c=\sqrt{a^2-b^2}$ bu yerdan $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$.

Agarda $a=b$ bo'lsa ellips aylana bo'lib qoladi va $\varepsilon=0$ bo'ladi. Agarda *b* ning qiymati *a* dan 0 gacha kamaysa ε , 0 dan 1 gacha o'sib boradi. Shunday qilib, ellipsning ε ekssentrisiteti 0 ga qancha yaqin bo'lsa ellipsning shakli aylanaga shuncha yaqin va ekssentrisiteti 1 ga qancha yaqin bo'lsa u shuncha ingichkalasha boradi.

Ellipsning fokal radiuslari. Ellipsning ixtiyoriy nuqtalaridan fokuslargacha bo'lgan masofalari ellips nuqtasining **fokal radiuslari** deyiladi. F_1M va F_2M ellipsdagi *M* nuqtaning fokal radiuslaridir, bularni $r_1$va r_2 deb belgilaymiz. Bizga ma'lumki,

$$r_1=F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad r_2=F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

fokal radiuslarni ifodalash uchun formula topish maqsadida bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib, chiqqan natijalarni ikkinchisidan birinchisini hadlab ayiramiz:

$$r_2^2-r_1^2=4cx$$

$$r_1+r_2=2a \tag{8}$$

qo'ysak

$$r_1-r_2=2\frac{c}{a}x \tag{9}$$

tenglik hosil bo'ladi, (8) va (9) tenglikni hadlab qo'shsak

$$r_1=a-\varepsilon x$$

$$r_2=a+\varepsilon x \tag{10}$$

hosil bo'ladi. (10) formulalar abssissasi *x* ga teng bo'lgan ellips nuqtalarining fokal radiuslarini *x* orqali chiziqli ifodalaydi.

Misol. $2x^2+4y^2=8$ ellips fokuslarining koordinatalari, ekssentrisiteti va abssissasi 1 ga teng bo‘lgan nuqtalarning fokal radiuslari topilsin.

Yechish. Ellips tenglamasi 8 ga bo‘lamiz $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ bu tenglikdan $a^2=4,\quad a=2,\quad b^2=2,\ b=\sqrt{2}$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$$

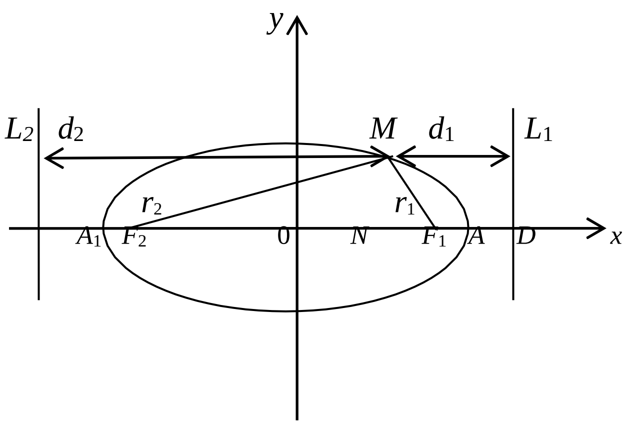
Demak, $F_1\left(\sqrt{2},0\right)$ $F_2\left(-\sqrt{2},0\right)$ nuqtalar ellipsning fokuslaridir. Ellipsning ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $x=1$ bo‘lgani uchun $r_1=a-\varepsilon x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1=\frac{4-\sqrt{2}}{2}$ $r_2=\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

Ellipsning direktrissalari

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ellipsning direktrisalari deb, uning katta o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan va markazidan $\left|\pm\frac{a}{e}\right|$ masofa uzunligida o‘tadigan ikkita **to‘g‘ri chiziqqa** aytiladi.

Ellips direktrisalarining tenglamalari $x=+\frac{a}{\varepsilon}$ $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ bo‘ladi.



3-chizma

Direktrisalari ellipsning A va A_1 uchlaridan tashqarida joylashgan bo‘ladi, chunki $\varepsilon<1$, $\frac{a}{\varepsilon}>a$, $-\frac{a}{\varepsilon}<-a$.

Direktrisalar quyidagi xossaga bo‘ysunadi.

<u>Teorema.</u> Ellipsning ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtalaridan fokuslarigacha bo‘lgan masofaning mos direktrisalarigacha bo‘lgan masofaga nisbati ε (o‘zgarmas songa) teng.

$d_1 = ML_1$ $d_2 = ML_2$ sonlar M nuqtadan direktrisalargacha bo‘lgan masofa, r_1 va r_2 fokal radiuslar, 3-chizmadan

$$d_1 = ML_1 = OD - ON = \frac{a}{\varepsilon} - x = \frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}$$

demak, $\frac{r_1}{d_1} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon$, $\frac{r_2}{d_2} = \frac{a + \varepsilon x}{\frac{a + \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon$

Misol. Katta yarim o‘qi 3 va kichik yarim o‘qi 2 bo‘lgan ellipsning tenglamasi va uning direktrisalari tenglamalari tuzilsin.

Yechish. $a=3$, $b=2$ bo‘lgani uchun ellipsning tenglamasi $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{9-4}}{3}=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Direktrisalarining tenglamalari $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ $x=\pm\frac{3\cdot 3}{\sqrt{5}}=\pm\frac{9}{\sqrt{5}}$.

III. Giperbolaning kanonik tenglamasi. Giperbola deb har bir nuqtasidan berilgan ikki nuqtagacha (fokuslargacha) masofalarning ayirmasi o‘zgarmas songa teng bo‘lgan tekislik nuqtalarining geometrik o‘rniga aytiladi.

Fokuslar orasidagi masofani $2c$ deb belgilaymiz. Giperbola ta’rifiga asosan

$$MF_2 - MF_1 = \pm 2a$$

Giperbolaning berilgan koordinata sistemasida tenglamasini keltirib chiqaramiz.

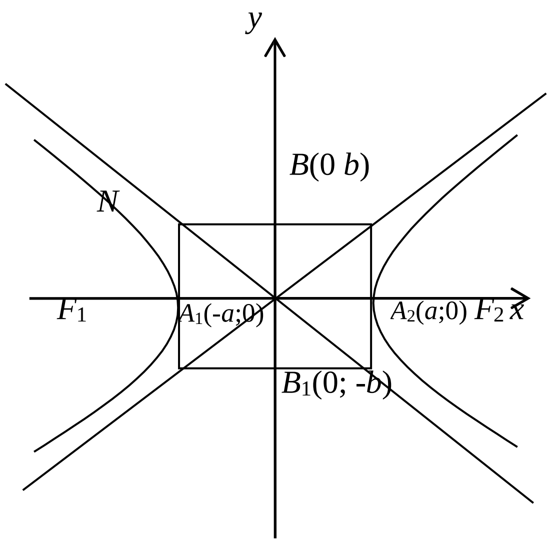
Bizga ma’lumki, $MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ $MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, demak

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

Ikkala tomonini kvadratga ko‘tarib, ixchamlashtirgandan so‘ng va $c^2 - a^2 = b^2$ deb belgilasak, giperbolaning kanonik tenglamasini keltirib chiqaramiz.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (11)$$

(11) tenglama giperbola nuqtalarining koordinatalarini qanoatlantiradi. Quyida giperbola qanday egri chiziq bo‘lishini ko‘ramiz. Tenglamada noma’lum koordinatalarining juft darajasi qatnashadi. Shunga asosan giperbolaning ikki simmetriya o‘qi mavjud. Bu *x* va *y* o‘qlaridir, simmetriya o‘qlari giperbolaning o‘qlari deyiladi.



4-rasm

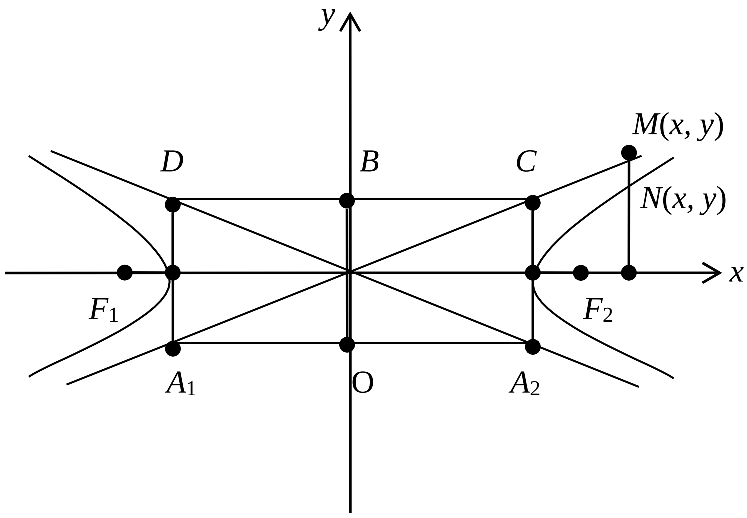
Giperbolaning fokuslari joylashgani o‘q **frontal o‘q** deyiladi.

Giperbolaning birinchi chorakdagi formulasini tekshiramiz.

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad (12)$$

Bu yerda $x \geq a$ bo‘lishi kerak *x*, 0 dan ∞ gacha o‘zgarganda *y* ham 0 dan ∞ gacha o‘sadi. Giperbola o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lgani uchun AN yoy 4-chizmadagi kabi bo‘ladi. *y* ga 0 berib $x = \pm a$ ni topamiz. Demak giperbolani ikki uchi bor $A_2(a, 0)$ va $A_1(-a, 0)$ giperbola *y* o‘qi bilan kesishmaydi, chunki $x=0$ bersak $y = \pm\sqrt{-b^2}$. Shuning uchun faqat *Ox* o‘qi haqiqiy o‘q *Oy* o‘qini mavhum deyiladi.

AN yoy $y=\frac{b}{a}x$ to‘g‘ri chiziqqa yaqinlasha boradi. Bu to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $k=\frac{b}{a}$ bo‘ladi.



5-rasm

Buni ko‘rsatish uchun *M* va *N* (*x*, *y*) nuqtasini olamiz. 5-chizmada ko‘rinib turibdiki, ikkala nuqtani ham abssissasi bir xil, ordinatalari orasidagi farqni yozamiz.

$$Y-y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-\quad}=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

Bu ifodani surati o‘zgarmas son bo‘lib maxraji *x* o‘sishi bilan cheksiz suratda o‘sib boradi. Shuning uchun *Y*-*y* ayirma 0 ga intiladi, ya’ni abssissa o‘sishi bilan *M* nuqta *N* ga intiladi. Simmetriyadan ko‘rinib turibdiki $y=-\frac{b}{a}x$ to‘g‘ri chiziq *x* cheksizlikga intilganda giperbola yoyi (shoxi) shu to‘g‘ri chiziqqa intiladi $y=\frac{b}{a}x$ va $y=-\frac{b}{a}x$ to‘g‘ri chiziqlari **giperbolaning asimptotalari** deyiladi. Giperbolani qurishdan oldin asimptotalarni qurish kerak. Buning uchun abssissa o‘qidan *a* uzunlik *y* o‘qidan *b* uzunlik olib asimptota (0, 0) (*a*, *b*) nuqtalardan o‘tishi lozim. $\varepsilon=\frac{c}{a}$ **giperbolaning ekssentrisiteti** deyiladi. Bizga ma’lumki, $c>a$ bunda $\varepsilon>1$ ekssentrisiteti giperbolani formasini ifodalaydi $c^2=a^2+b^2$ dan

$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2-1=\varepsilon^2-1$. Demak, ekssentrisiteti kichik bo‘lgan sari o‘qlarning munosabatlari b/a ham kam bo‘ladi. Agar a o‘zgarmay qolib b kattalashib borsa giperbolaning ekssentrisiteti 1 dan ancha katta qiymatlar qabul qiladi va bu holda giperbola shoxlari kengayib boradi ε, 1ga qancha yaqin bo‘lsa, giperbolaning shoxlari shuncha silliq va ε, 1dan qancha katta bo‘lsa giperbola shoxlari shuncha yoyiq bo‘ladi.

1-misol. Fokuslar orasidagi masofa 16 ekssentrisiteti 8/7 bo‘lgan giperbolaning kanonik tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Shart bo‘yicha $2c=16,\ \ c=8,\ \ \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{8}{7}$, demak, $a=7,\ \ b=\sqrt{64-49}=\sqrt{15}$.

Giperbolaning kanonik tenglamasi quyidagicha bo‘ladi $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{15}=1$.

2-misol. $M_1\left(-3;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ va $M_2(4;\ -2)$ nuqtadan o‘tuvchi giperbolaning kanonik tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Giperbolaning kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Uning tenglamasini M_1 va M_2 nuqta koordinatalari qanoatlantiradi. Shuning uchun

$$\frac{9}{a^2}-\frac{\frac{1}{2}}{b^2}=1 \qquad \frac{16}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$$

bu yerdan $a^2=8$ va $b^2=4$ ekanini topamiz. Giperbola tenglamasi quyidagicha bo‘ladi.

$$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$$

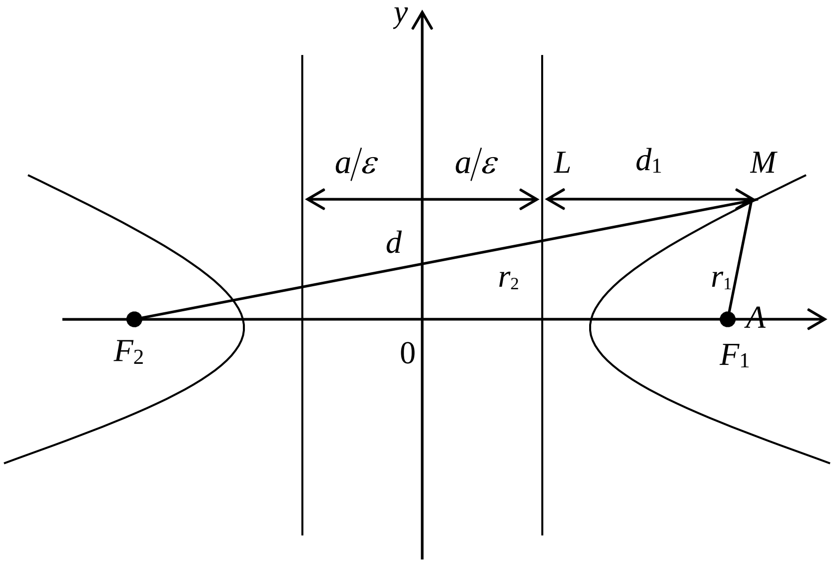
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **giperbolaning direktrisalari** deb uning markazidan $\pm\frac{a}{\varepsilon}$ masofada fokal o‘qiga perpendikulyar bo‘lib o‘tadigan ikkita to‘g‘ri chiziqqa aytiladi.

Ta’rifga asosan, direktrisa tenglamalari quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi:

$$x = +\frac{a}{\varepsilon} \qquad x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

Giperbolada $\varepsilon > 1$ bo‘lgani sababli $\frac{a}{\varepsilon} < a$ bo‘ladi. Giperbolaning direktrisalari O markazi bilan AA_1 uchlari orasida joylashgan.

Giperbola quyidagi xossaga ega. Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan fokusgacha masofaning mos direktrisasigacha bo‘lgan masofa nisbati ε ga (o‘zgarmas songa) teng.



6-rasm

Chizmadan $d_1 = x - \frac{\alpha}{\varepsilon}$ agar M nuqta chap shoxida bo‘lsa, u holda $d_1 = \frac{a}{\varepsilon} - x$ bo‘ladi.

Endi $\frac{r_1}{d_1}$ nisbatan ko‘ramiz. M nuqta o‘ng shohida bo‘lgan holda $\frac{r_1}{d_1} = \frac{-a+\varepsilon x}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon(-a+\varepsilon x)}{\varepsilon x - a} = \varepsilon$ M nuqta chap shohida bo‘lganda $\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon$ ikkala holda ham ε gat eng bo‘ladi.

Misol. Giperbola direktrisalari orasidagi masofa uning fokuslari orasidagi masofadan uch marta kichik. Giperbolaning mavhum o‘qi 4 ga teng. Giperbolaning ekssentrisiteti va direktrisalari tenglamasi tuzilsin.

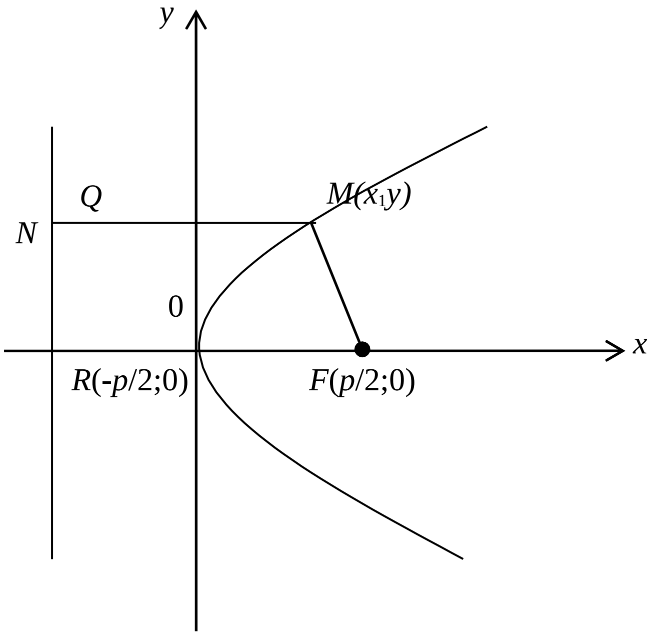
Yechish. Giperbolaning fokuslari orasidagi masofa 2c direktrisalar orasidagi masofa $2\frac{a}{\varepsilon}$ ma’lum shuning uchun masalaning shartiga ko‘ra $3\cdot\left(2\frac{a}{\varepsilon}\right) = 2c$

bu yerda $3a = c$, $\varepsilon = \frac{c^2}{a^2} = 3$, $\varepsilon = \sqrt{3}$

Direktrisalar tenglamasini tuzamiz. $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ giperbola uchun $c^2 = a^2 + b^2$ bizda

$2b = 4$ $b = 2$, demak, $2a^2 = 4$ $a = \sqrt{2}$. a va ε qiymatlarini direktrisa tenglamasiga qo‘ysak, $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, bu yerda $\sqrt{3}x \pm \sqrt{2} = 0$.

IV. Parabola deb har bir nuqtasidan berilgan bir nuqtagacha (fokusgacha) va berilgan bir to‘g‘ri chiziqqacha (direktrisagacha) masofalari o‘zaro teng bo‘lgan tekislik nuqtalarining geometrik o‘rniga aytiladi. Direktrisasidan fokusgacha bo‘lgan masofasini *p* deymiz. ***p* parabola parametri** deyiladi. Parabola tenglamasini keltirib chiqaramiz:



7-rasm

Tanlab olingan koordinatalar sistemasi fokus koordinatalari *F* (*p*/2; 0) direktrisasining tenglamasi *x*=-*p*/2 va y o‘qiga parallel *M*(*x*, *y*) parabolaning nuqtasi. Parabolaning ta’rifiga asosan *MN*=*MF* (7-chizmada ko‘ramiz).

$$MN = NQ + QM = \frac{p}{2} + x \qquad MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2}$$

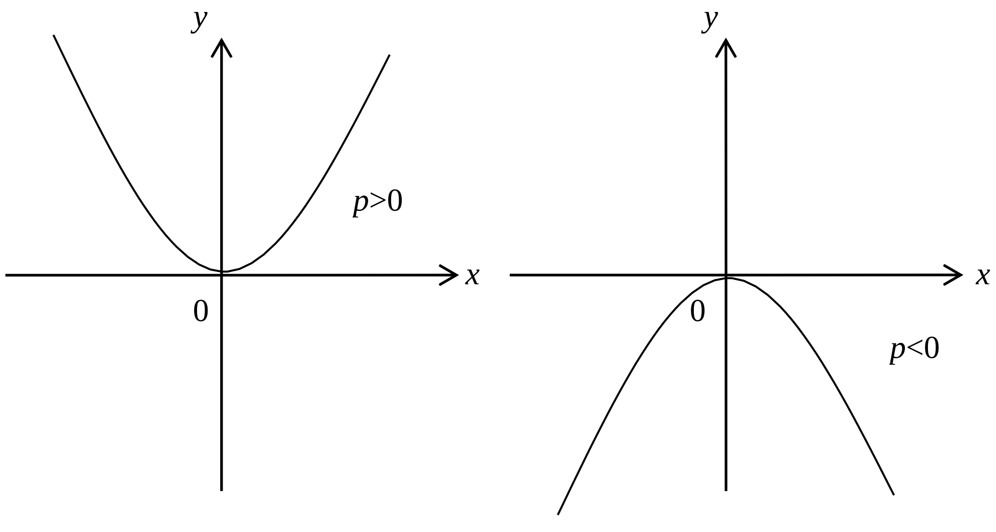
$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

Ikkala tomonini kvadratga ko‘tarib ixchamlashtirsak, parabolaning kanonik tenglamasi hosil bo‘ladi:

$$y^2 = 2px \tag{13}$$

Parabolaning nuqtalari (13) tenglamasini qanoatlantiradi. Paraboladan tashqarisidagi nuqtalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi. Parabolaning shaklini uning tenglamasiga asosan tekshiramiz $y = \pm\sqrt{2px}$ bo‘lgani uchun, agar $p>0$ bo‘lsa, $x \geq 0$ bo‘lishi kerak. Demak, x turli qiymatlar olsa bu qiymatlar 0 dan $+\infty$ gacha bo‘lgan oraliqda bo‘lishi kerak, x ning bunday qiymatlariga y ning 0 dan $\pm\infty$ gacha qiymatlari to‘g‘ri keladi, ya’ni birinchi kvadratda x ning qiymatlari 0 dan $+\infty$ gacha o‘sib borganda y ham $+\infty$ gacha o‘sib boradi. Parabola 7-chizmada tasvirlangan chiziqdan iborat, agar parabolaning (13) tenglamasida $p \leq 0$ ga bo‘lsa, bu holda $x \leq 0$ bo‘lishi kerak va parabolaning shakldagiga nisbatanteskari bo‘ladi.

Agar parabolaning (13) tenglamasida x va y o‘rinlarini almashtirsak, ya’ni $x^2 = 2py$ ko‘rinishni oladi va koordinata o‘qlariga nisbatan quyidagicha joylashgan bo‘ladi.



8-rasm

Parabolaning ekssentrisiteti va direktrisasi. Parabolaning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokusgacha bo‘lgan masofani r_1 bilan direktrisasigacha bo‘lgan masofani d bilan belgilab, parabola ta'rifidan $r=d$ bundan $\frac{r}{d}=1$ shuning uchun parabola ekssentrisiteti

$$\varepsilon=1$$

(13) tenglama uchun direktrisa tenglamasi

$$x=-\frac{p}{2}$$

1-misol. *Ox* o'q parabolaning simmetriya o'qi, uni uchi koordinatalar boshida yotadi, parabola fokusidan uchigacha bo'lgan masofa 4 birlikka teng. Parabola tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Masalaning shartiga asosan, parabolaning tenglamasi $y^2=2px$ bo'ladi.

$$OF=4 \quad \frac{p}{2}=4 \text{ yoki } p=8$$

bu qiymatni parabola tenglamasiga qo'ysak $y^2=16x$.

2-misol. Parabola tenglamasi berilgan $y^2=6x$. Uning fokusini koordinatalarini va direktrisasi tenglamasini tuzing.

Yechish. Bu yerda 2*p*=6, *p*=3 direktrisa tenglamasi $x=-\frac{p}{2}$ $x=-\frac{3}{2}$ fokusi $F\left(\frac{3}{2};0\right)$.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1. Markazi $M(4;3)$ nuqtada va radiusi $R=5$ bo'lgan aylana tenglamasini tuzing va grafigini yasang. $A(3;-1)$, B $(4;-2)$ va $C(-1;-2)$ nuqtalar aylanada yotadimi?

j: $(x-4)^2+(y-3)^2=25$, A nuqta aylana ichida yotadi, B nuqta aylanada yotadi, C nuqta aylanadan tashqarida yotadi.

2. $A(3;4)$ nuqta berilgan. Diametri OA dan iborat aylana tenglamasini tuzing.

$$j:\ (x-\frac{3}{2})^2+(y-2)^2=6{,}25$$

3. 1. $x^2+y^2-2y-4x+1=0$; 2. $x^2+y^2-6y-16=0$;

3. $x^2+4x+y^2-5=0$ aylanalarni markazi va radiusini toping hamda grafiklarini chizing.

4. $x^2+y^2-8x-4y+11=0$ aylana bilan $x-y-5=0$ to’g’ri chiziqning kesishish nuqtalarini toping va grafigini yasang.

J: $(4;-1)$ va $(7;2)$.

5. $A(1;2)$ nuqtadan o’tuvchi va koordinata o’qlariga urinuvchi aylana tenglamasini tuzing va grafiklarini yasang.

$j: (x-1)^2+(y-1)^2=1;\ (x-5)^2+(y-5)^2=25.$

6. $A(4;4)$ nuqtadan va $x^2+y^2+4x-4y=0$ aylana bilan $x+y=0$ to’g’ri chiziqning kesishgan nuqtalaridan o’tuvchi aylana tenglamasini yozing.

$j: x^2+y^2-8y=0$

1. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ellipsni grafigini chizing, uning ekstsentrisiteti va fokuslarini toping.

$$j: \varepsilon=\frac{3}{5};\ F_1(-3;0);\ \ F_2(3;0)$$

2. Agar ellipsning fokuslari orasidagi masofa 10 ga teng bo’lib, katta yarim o’q $a=13$ ga teng bo’lsa, uning kanonik tenglamasini tuzing.

$$j: \frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$$

3. Ekstsentrisiteti $\varepsilon=0{,}5$, katta yarim o’qi $a=8$ ga teng bo’lgan ellipsning kanonik tenglamasini tuzing.

$$j: \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$$

4. $9x^2+25y^2=225$ ellipsnng yarim o’qlari, fokuslari, ekstsentrisitetini toping. Direktritsalari tenglamasini tuzing. Grafigini yasang.

$j: a=5, b=3;\ F_1(-4;0),\ F_2(4;0);\ \ \varepsilon=0{,}8;\ x=\pm 6{,}25$

5. $A(5;4\sqrt{3})$ va $B(0;8)$ nuqtalardan o’tuvchi ellips koordinatalar o’qiga nisbatan simmetrik. Uning tenglamasini tuzing A nuqtadan fokuslargacha bo’lgan masofalar (fokal radius-vektorlar) ni toping.

$$j:\ \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1;\quad r_1=7;\quad r_2=13$$

6. $9x^2+25y^2=225$ ellipsda shunday $M(x;y)$ nuqta topingki, undan o'ng fokusgacha bo'lgan masofa chap fokusgacha bo'lgan masofadan 4 marta katta bo'lsin.

$$j: (-\frac{15}{4};\pm\frac{\sqrt{63}}{4})$$

7. $x^2+y^2=100$ aylanadagi barcha nuqtalarning ordinatalarini ikki barabar qisqartirishdan hosil bo'lgan yangi egri chiziq tenglamasini tuzing.

$$j:\ \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$$

8. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ellips fokuslaridan o'tuvchi va markazi ellipsning yuqori uchida bo'lgan aylana tenglamasini tuzing.

$$j:\ x^2+(y-3)^2=25$$

9. $x^2+y^2=4$ aylanadagi har bir nuqtaning abstsissasi uch baravar ortirishdan hosil bo'lgan egri chiziqni tenglamasini tuzing.

$$j:\ \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$$

10. Ellips fokuslarining biridan katta o'qining uchlarigacha bo'lgan masofalar 5 va 1 ga teng. Uning kanonik tenglamasini tuzing.

$$j:\ \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1;\ r_1=11;\quad r_2=5$$

1. $x^2-4y^2=16$ giperbola va uning asimptotalari grafigini chizing. Giperbolaning fokuslari, ekstsentrisiteti va asimptotalari orasidagi burchakni toping.

$$j:\ \varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

2. $x^2-4y^2=16$ giperbolada ordinatasi 1 ga teng M nuqta olingan. Undan fokuslarigacha bo'lgan masofalarni toping.

$$j:\ r_1=1, r_2=9.$$

3. 1) Fokuslar orasidagi masofa $2c=10$, uchlari orasidagi masofa $2a=8$;

2) haqiqiy yarim o'qi $a = 2\sqrt{5}$, ekstsentrisiteti $\varepsilon = \sqrt{1,2}$ bo'lgan giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing va grafigini yasang.

$$1).\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1;\ 2)\ \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$$

4. Uchlari $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipsning fokuslarida, fokuslari esa uning uchlarida bo'lgan giperbolaning tenglamasini tuzing.

$$j:\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

5. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ giperbola berilgan. Uning yarim o'qlarini, fokuslari koordinatalarini, ekstsentrisitetini, direktrisasi va asimptotalari tenglamalarini tuzing. Grafigini chizing.

$$j: a = 3, b = 4;\ F_1(5;0);\ F_2(-5;0);\ \varepsilon = \frac{5}{3};\ x = \pm 1\frac{4}{5};\ y = \pm 1\frac{1}{3}x$$

6. Mavhum o'qi $2b = 4$ ga teng, fokusi $F_1\left(\sqrt{5};0\right)$ nuqtada bo'lgan giperbola tenglamasini tuzing.

$$j:\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

7. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ giperbolaning fokusidan asimptotalarigacha bo'lgan masofa va asimptotalari orasidagi burchakni toping.

$$j: d = 3, \alpha = arctg\frac{3}{4}$$

8. Biror uchidan fokuslarigacha masofalari 9 va 1 ga teng bo'lgan giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing.

$$j:\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1\ \ yoki\ \ \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

9. Markazi $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ giperbolaning o'ng fokusida bo'lgan, koordinatalar boshidan o'tuvchi aylana bilan shu giperbola asimptotalarining kesishish nuqtalarini toping.

$$j:\ (0;0),\ \ (6;\pm 2\sqrt{3}).$$

10. Fokuslari orasidagi masofa 6 ga va ekstsentrisiteti $\frac{3}{2}$ ga teng bo’lgan giperbola tenglamasini tuzing. Fokuslari abstsissalar o’qida yotadi.

$$j:\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

1. $F(0;2)$ nuqtadan va $y = 4$ to’g’ri chiziqdan bir xil uzoqlashgan nuqtalar geometrik o’rnining tenglamasini tuzing. Bu egri chiziqning koordinata o’qlari bilan kesishgan nuqtalarini toping va grafigini yasang.

$$j:\ y = 3 - \frac{x^2}{4}.$$

2. Koordinatalar boshidan va $x = -4$ to’g’ri chiziqdan bir xil uzoqlikda bo’lgan nuqtalar geometrik o’rnining tenglamasini tuzing. Bu egri chiziqning koordinata o’qlari bilan kesishgan nuqtalarini toping va grafigini yasang.

$$j:\ \ y^2 = 8(x+2).$$

3. 1). $y^2 = 4x$; 2). $y^2 = -4x$; 3). $x^2 = 4y$; 4). $x^2 = -4y$ tenglamalar bilan berilgan parabolalar hamda ularning fokuslari va direktrisalarini yasang. Direktrisa tenglamasini tuzing.

4. 1). $A(0;0)\ va\ B(1;-3)$ nuqtalardan o’tuvchi va OX o’qqa nisbatan simmetrik; 2). $O(0;0)\ va\ C(2;-4)$ nuqtalardan o’tuvchi va OY nisbatan simmetrik bo’lgan parabola tenglamasini tuzing.

$$j:\ 1).\ y^2 = 9x; 2).\ y = -x^2$$

5. $x^2 + y^2 + 4y = 0$ aylana va $x + y = 0$ to’g’ri chziqning kesishgan nuqtalaridan o’tib, OY o’qqa nisbatan simmetrik bo’lgan parabolaning va uning direktrisasini tenglamalarini tuzing hamda grafigini yasang.

$$j:\ y = -\frac{x^2}{2}$$

6. $y^2 = 6x$ parabola berilgan. Uning fokusini toping va direktrisa tenglamasini tuzing. Grafigini yasang.

$$j:\ F\left(\frac{3}{2};0\right); x = -\frac{3}{2}$$

7. $y^2 = -4x$ parabolaning fokusidan o’tuvchi va OX o’q bilan 120^0 burchak tashkil etuvchi to’g’ri chiziq tenglamasini tuzing hamda hosil bo’lgan vatarning uzunligini toping.

$$j: y = -\sqrt{3}(x+1); d = \frac{16}{3}$$

8. $y^2 = 8x$ parabolaning $y = -x$ to’g’ri chiziqqa parallel bo’lgan urinma tenglamasini tuzing.

$$j: y = -x - 2.$$

XULOSA

Tekislikda I tartibli tenglamalar faqat va faqat to‘g‘ri chiziqlarni ifodalashini ko‘rib o‘tgan edik. Ammo tekislikda II tartibli tenglamalarga turli chiziqlar mos keladi va ular II tartibli chiziqlar deyiladi. Ulardan biri ellips bo‘lib hisoblanadi. Ellipsning grafigini qisilgan aylana kabi tasavvur etish mumkin. Ellipsning o‘ziga xos xususiyati shundan iboratki, uning ixtiyoriy nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi ikkita nuqtalargacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi o‘zgarmas sondir.

Giperbola II tartibli chiziqlardan biri bo‘lib, fokuslar deb ataluvchi ikkita nuqtalargacha masofalar ayirmasining moduli o‘zgarmas bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni kabi aniqlanadi. Giperbola grafigi, ellips grafigidan farqli ravishda, chegaralanmagan chiziq bo‘lib, ikkita tarmoqdan iboratdir. II tartibli chiziqlar ichida faqat giperbola uchun asimptota mavjud.

Parabola ham II tartibli chiziqdir. U direktrisa deb ataluvchi to‘g‘ri chiziq va fokus deb ataluvchi nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalardan tashkil topadi. Parabola grafigi ham chegaralanmagan egri chiziqdan iborat.

Nazorat savollari.

1. Ikkinchi tartibli egri chiziq deb nimaga aytiladi?
2. Aylana deb nimaga aytiladi?
3. Ellips deb nimaga aytiladi?

4. Ellipsning ekssentrisiteti deb nimaga aytiladi?
5. Parabola deb nimaga aytiladi?
6. Giperbolaning direktrissasi deb nimaga aytiladi?

4-§. TEKISLIK TENGLAMALARI

Reja:

1. **Umumiy tushunchalar.**
2. **Fazodagi tekislik tenglamalari.**
3. **Tekislikning kesmalardagi tenglamasi.**
4. **Tekislikning normal tenglamasi.**
5. **Nuqtadan berilgan tekislikkacha bo‘lgan masofa.**
6. **Ikki tekislik orasidagi burchak.**
7. **Uch nuqtadan o‘tgan tekislik tenglamasi.**
8. **Fazodagi to‘g‘ri chiziq.**

Tayanch iboralar: fazodagi tekislik tenglamalari, tekislikning kesmalardagi tenglamasi, tekislikning normal tenglamasi, nuqtadan berilgan tekislikkacha bo‘lgan masofa, ikki tekislik orasidagi burchak, uch nuqtadan o‘tgan tekislik tenglamasi, fazodagi to‘g‘ri chiziq.

I. Faraz qilaylik, *x, y, z* – ixtiyoriy o‘zgaruvchi miqdorlar bo‘lsin. Agar

$$F(x,\ y, z)=0 \tag{1}$$

tenglik *x, y, z* larning faqat ayrim qiymatlaridagina o‘rinli bo‘lsa, u holda (1) ni *x, y, z* larga nisbatan tenglama deb ataymiz. Uchta son $x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0$ (1) tenglamani qanoatlantiradi deymiz, agar (1) dagi noma’lumlar o‘rniga shu sonlarni qo‘yganda tenglik ayniyatga aylansa. (1) tenglamani qanoatlantiradigan har bir x_0, y_0, z_0 sonlar uchligiga fazoning $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasini mos qo‘yamiz. Bunday nuqtalarning geometrik o‘rnini **sirt** deb ataymiz, **(1) ni esa shu sirtning tenglamasi** deymiz.

Agar sirt tenglamasi berilgan bo‘lib, biror nuqtaning shu sirtda yotish yoki yotmasligini tekshirish talab qilingan bo‘lsa, u holda berilgan nuqtaning koordinatalarini tenglamaning noma’lumlari o‘rniga qo‘yish kifoya. Analitik geometriyaning vazifasi qaralayotgan sirtni uning tenglamasi yordamida o‘rganishdir.

Sirtning ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtasi uning **siljuvchi nuqtasi** deb ataladi. Misol sifatida sferaning tenglamasini tuzaylik. Sferaning ta’rifiga ko‘ra, sferaning markazi deb ataluvchi $C\,(a,b,c)$ nuqtadan sferaning siljuvchi nuqtasi orasidagi masofa r o‘zgarmasdir. Demak,

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

yoki

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

Agar sferaning markazi koordinatalar boshida bo‘lsa, u holda

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

Fazodagi analitik geometriyada asosan algebraik tenglamalar bilan ifodalangan sirtlar o‘rganiladi. Masalan, tenglamasi

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

ko‘rinishda bo‘lgan sirt **1-tartibli sirt** deb ataladi. Tenglamasi

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Kz+L=0 \tag{3}$$

bo‘lgan sirtlarni **2-tartibli sirtlar** deb ataymiz. Yuqorida ko‘rilgan misoldan sfera 2-tartibli sirt ekanligi kelib chiqadi.

II. **1-teorema.** Dekart koordinatalar sistemasida tekislik 1-tartibli sirtdir.

Isboti. Biror dekart koordinatalar sistemasida berilgan α tekisligida uning biror nuqtasi $M_0(x_0,y_0,z_0)$ va unga perpendikulyar o‘tgan qandaydir $\vec{n}=\{A,B,C\}$ vektor berilgan bo‘lsin. Faraz qilaylik, $M(x,y,z)$ tekislikning siljuvchi nuqtasi bo‘lsin. Bu nuqta α tekisligida yotishi uchun $\overline{M_0M}$

vektor $\vec{n}$ ga perpendikulyar bo‘lishi shart, ya’ni $\vec{n} \perp \overline{M_0 M}$.

Vektorlarning perpendikulyarlik shartidan $\overline{M_0 M} \cdot \vec{n} = 0$ yoki

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{4}$$

kelib chiqadi. Agar $M(x,y,z)$ nuqta α tekisligida yotmasa, (4) o‘rinli bo‘lmaydi, shu sababli (4) tenglik $M(x,y,z)$ nuqtaning o‘rnini to‘la aniqlaydi. Agar (4) dagi qavslarni ochib va $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ deb belgilasak,

$$Ax+By+Cz+D=0$$

hosil bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

Tekislikka perpendikulyar bo‘lgan nol bo‘lmagan har qanday vektor tekislikning **normal vektori** deb ataladi. Shu sababli, (4) tenglama normal vektori $\vec{n}$ bo‘lgan va $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o‘tgan **tekislik tenglamasi**ni ifodalaydi.

<u>2-teorema.</u> Dekart koordinatalar sistemasida har qanday 1-tartibli tenglama tekislikni aniqlaydi.

Isboti. Biror dekart koordinatalar sistemasida (2) tenglama berilgan bo‘lsin. Faraz qilaylik, x_0, y_0, z_0 lar shu tenglamaning biror yechimi bo‘lsin, ya’ni (2)ni qanoatlantiruvchi sonlar bo‘lsin. U holda

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \tag{6}$$

bo‘ladi. (2) dan (6) ni ayirsak

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

hosil bo‘ladi. Ma’lumki, bu tenglama normal vektori $\vec{n}$ bo‘lib, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o‘tgan tekislik tenglamasidir. (4) tenglama (2) ga ekvivalent bo‘lgani uchun (2) ham *a* tekislikning tenglamasi bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

Tekislikning (2) tenglamasini uning umumiy tenglamasi deb ataymiz.

Misol. $\vec{n}=\{2,2,3\}$ vektorga perpendikulyar bo‘lib, $M_0(1,1,1)$ nuqtadan o‘tgan tekislik tenglamasi tuzilsin.

Yechish. (4) ga asosan

$$2(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$$

yoki

$$2x + 2y + 3z - 7 = 0$$

3-__teorema.__ Agar ikki $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0$ va $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0$ tenglamalar bir tekislikni ifodalasa, u holda bu tenglamalarning mos koeffitsiyentlari o‘zaro proporsional bo‘ladi.

Isboti. Haqiqatan, agar teorema sharti o‘rinli bo‘lsa, u holda $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ vektorlar berilgan tekislikka perpendikulyar bo‘lishadi, demak, ular o‘zaro kolleniar. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko‘ra, A_2, B_2, C_2 sonlar A_1, B_1, C_1 sonlarga proporsional bo‘ladi. Agar proporsionallik koeffitsiyentini μ desak, $A_2 = A_1\mu$, $B_2 = B_1\mu$, $C_2 = C_1\mu$. Agar $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsa, u holda uning koordinatalari har bir tenglamani qanoatlantiradi, ya’ni $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0$ va $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0$ bo‘ladi. Agar ularning birini μ ga ko‘paytirib, ikkinchisidan ayirsak $D_2 - D_1\mu = 0$ hosil bo‘ladi. Bundan esa,

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1} = \mu$$

kelib chiqadi.

III. Ma’lumki, *A, B, C, D* koeffitsiyentlar bir vaqtda nolga teng bo‘lmaydi. (2) tenglamada bu koeffitsiyentlarning ayrimlari nolga teng bo‘lgan bir necha xususiy hollarni ko‘rib chiqaylik.

1) $D=0$; tenglama $Ax + By + Cz = 0$ ko‘rinishga keladi. Bu tenglamani $x=0$, $y=0$, $z=0$ sonlar qanoatlantiradi, ya’ni tekislik koordinatalar boshidan o‘tadi.
2) $C=0$; tenglama $Ax + By + D = 0$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tekislikning normal vektori $\vec{n} = \{A, B, 0\}$, z o‘qiga perpendikulyar, demak, tekislikni o‘zi shu o‘qga parallel o‘tadi.
3) $B=0$, $C=0$; bunda $Ax + D = 0$ ga ega bo‘lamiz. Uning normal vektori $\vec{n} = \{A, 0, 0\}$ y va z o‘qlariga perpendikulyar, u holda tekislik Oyz tekisligiga parallel o‘tadi. Xususan, agar

D=0 bo‘lsa, x=0 hosil bo‘lib, bu tekislik $O\ y\ z$ koordinatalar tekisligi bilan ustma-ust tushishiga ishonch hosil qilamiz.

Yuqoridagidek fikr yuritib, $Ax+Cz+D=0$ tenglama y o‘qiga parallel tekislikni, $By+Cz+D=0$ tenglama x o‘qiga parallel tekislikni aniqlashiga ishonch hosil qilamiz. Bularning xususiy holi sifatida, y=0 tenglama $O\ x\ z$ koordintalar tekisligining, z=0 esa $O\ x\ y$ tekisligining tenglamasi ekanligini ko‘ramiz.

4) A, B, C, D koeffitsiyentlarning birortasi ham nolga teng bo‘lmasin. U holda ozod hadni tenglikning o‘ng tomoniga o‘tkazib, tenglamani – D ga bo‘lib yuboramiz:

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1$$

yoki

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$$

Agar $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$ belgilashlar kiritsak,

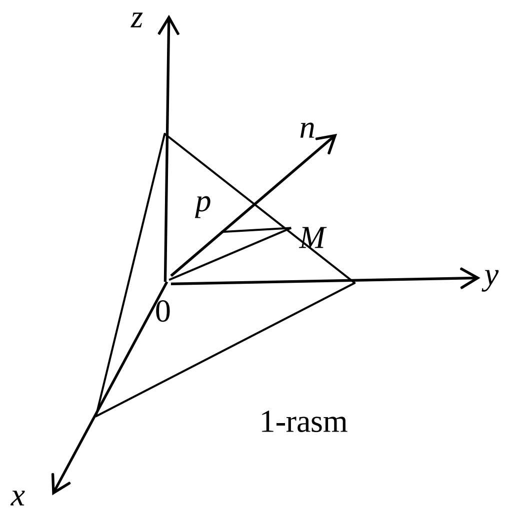
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (6)$$

hosil bo‘ladi. (6) tenglamani tekislikning kesmalardagi tenglamasi deb atashadi.

IV. Faraz qilaylik, bizga π tekisligi, uning normali $\vec{n}$ va koordinatalar boshidan tekislikkacha bo‘lgan masofa p berilgan bo‘lsin. $\vec{n}$ vektorning koordinata o‘qlari bilan tashkil etgan burchaklari α, β, γ bo‘lsin. Agar $\vec{n}_0$, $\vec{n}$ vektorning orti bo‘lsa, u holda

$$\vec{n}_0=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

bo‘ladi. Tekislikning siljuvchi nuqtasini $M(x, y, z)$ desak, uning radius-vektori $\overrightarrow{OM}=\{x, y, z\}$ bo‘ladi. Chizmadan ko‘rinadiki, $np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM}=p$



1-rasm

Ma’lumki,

$$np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM} = |\vec{n}_0| \cdot np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM} = \vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{OM} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

Bundan,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (7)$$

(7) tenglama **tekislikning normal tenglamasi** deyiladi.

Agar tekislikning tenglamasi (2) ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, uni normal tenglamami yoki yo‘qmi ekanligini

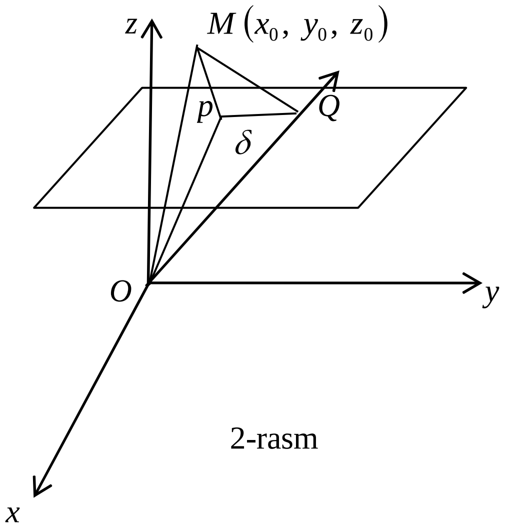
$$\mu = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \qquad (8)$$

ifodaning qiymatiga qarab aniqlaymiz: agar $\mu = 1$ bo‘lsa, (3) normal tenglama bo‘ladi, aks holda (3) ni $\pm\mu$ ga bo‘lib

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}y \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}z \pm \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \qquad (9)$$

hosil qilamiz. Bu tenglama normal bo‘lishi uchun endi (9) dagi ishoralardan birini ozod had D ning ishorasiga teskari qilib olinsa kifoya. (2) tenglama μ ifoda yordamida normal ko‘rinishga keltirilgani uchun $\frac{1}{\mu}$ ni normallovchi ko‘paytuvchi deb ataladi.

***V.* Nuqtadan berilgan tekislikkacha bo‘lgan masofa.** Faraz qilaylik, π tekislik va unda yotmagan biror $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta berilgan bo‘lsin. M_0 nuqtadan π tekislikkacha bo‘lgan d masofani topish talab qilingan bo‘lsin. Berilgan tekislikning normali $\vec{n}_0$ ni qurib olamiz. Agar M_0 nuqta va koordinatalar boshi π tekislikning har xil tomonlarida joylashgan bo‘lsa, u holda M_0 nuqtaning π tekislikdan chetlanishi deb + d ga, aks holda – d ga aytamiz.



2-rasm

M_0 nuqtani normalga proyeksiyalaylik. U holda chizmadan ko‘rinadiki,

$$\delta = PQ = OQ - OP$$

$$OP = p, \quad OQ = np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM}$$

ekanligini e’tiborga olsak,

$$\delta = np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM} - p$$

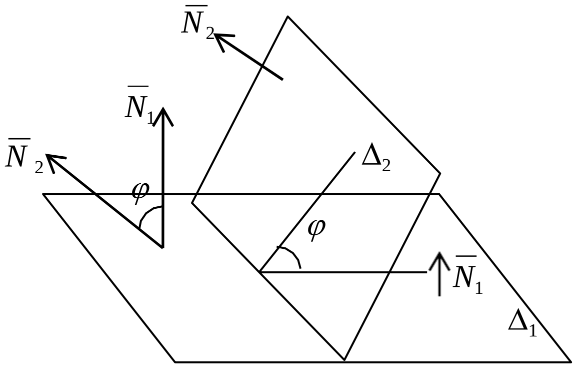
$$np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM} = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma$$

bo‘lgani uchun

$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p \qquad (10)$$

formulaga ega bo‘lamiz. U holda

$$d = \left|x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p\right|$$



3-rasm

VI. Ikki tekislik orasidagi burchak. Faraz qilaylik, bizga $\Delta_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $\Delta_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tekisliklar berilgan bo‘lsin. $\vec{N}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ va $\vec{N}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$ berilgan tekisliklarning normal vektorlari. Chizmadan ko‘rinadiki, tekisliklar orasidagi burchak ularning normallari orasidagi burchakka teng. Shuning uchun normal vektorlar orasidagi burchakni qidiramiz. Ma’lumki,

$$cos\varphi=\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{|\vec{N}_1|\cdot|\vec{N}_2|}$$

yoki

$$cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (11)$$

Agar $\Delta_1\perp\Delta_2$ bo‘lsa, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ bo‘ladi. U holda $cos\varphi=0$ va (11)ga asosan $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2$. Bu tenglikni tekisliklarning perpendikulyarlik sharti deb atashadi. Agar Δ_1 tekislik Δ_2 tekislikka parallel bo‘lsa, u holda $\vec{N}_1$ vektor $\vec{N}_2$ vektorga kolleniar bo‘ladi. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko‘ra

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

bo‘ladi. Bu munosabat tekisliklarning parallellik sharti deb ataladi.

VII. Uch nuqtadan o‘tgan tekislik tenglamasi. Bizga Δ tekislikning uchta $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ nuqtasi berilgan bo‘lsin. Agar $M(x, y, z)$

shu tekislikning siljuvchi nuqtasi bo‘lsa, u holda $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ vektorlar Δ tekislikda yotadi, ya’ni ular komplanar bo‘ladi.

$$\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1,\, y-y_1,\, z-z_1\},$$
$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,\, y_2-y_1,\, z_2-z_1\},$$
$$\overrightarrow{M_1M_3}=\{x_3-x_1,\, y_3-y_1,\, z_3-z_1\}$$

ekanligidan va vektorlarning komplanarlik shartidan

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

kelib chiqadi.

VIII. 1. Fazodagi to‘g‘ri chiziq. Agar berilgan $\Delta_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $\Delta_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tekisliklar parallel bo‘lmasa, u holda ular to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishadi. Shu sababli, fazodagi to‘g‘ri chiziqni ikki tekislikning kesishish chizig‘i sifatida qaraymiz. Demak, fazoda to‘g‘ri chiziq quyidagi tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (12)$$

(12) to‘g‘ri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi. Agar Δ_1 va Δ_2 tekisliklar parallel bo‘lsa, (12) to‘g‘ri chiziqni ifodalamaydi. Demak, berilgan tenglamalar sistemasi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi ekanligini aniqlash uchun noma’lumlar oldidagi mos koeffitsiyentlarni proporsional emasligini tekshirish kerak ekan.

Bir to‘g‘ri chiziq bo‘ylab cheksiz ko‘p tekisliklar kesishadi. Bunday tekisliklarni tekisliklar dastasi deymiz. Agar shu dastaga tegishli ikkita tekislikning tenglamasi ma’lum bo‘lsa, shu dastaning boshqa tekisligini tenglamasi

$$\alpha\,(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta\,(A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0)=0 \qquad (13)$$

bo‘ladi.

Bunga ishonch hosil qilish uchun, avval (13) tenglama tekislik tenglamasi ekanligini tekshiraylik. Buning uchun, (13) ni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$(\alpha A_1 + A_2\beta)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2)z + (\alpha D_1 + \beta D_2) = 0$$

Agar bir vaqtda $\alpha A_1 + \beta A_2 = 0, \quad \alpha B_1 + \beta B_2 = 0, \quad \alpha C_1 + \beta C_2 = 0$ bo‘lsa, u holda

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\beta}{\alpha}$$

bo‘ladi. Bu esa dastlabki farazga zid, chunki bu holda Δ_1 va Δ_2 tekisliklar parallel bo‘ladi va ular to‘g‘ri chiziqni ifodalamaydi. Bu ziddiyat (13) tenglama ekanligini ko‘rsatadi. Bu tenglama 1-darajali tenglama bo‘lgani uchun *y* tekislikni ifodalaydi. Agar α, β larning biri, masalan $\alpha \neq 0$ bo‘lsa, u holda (13)ni quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin:

$$(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$$

2. To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi. Bizga fazoda to‘g‘ri chiziqning biror $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasi va unga parallel bo‘lgan $\vec{a} = \{l, m, n\}$ vektor berilgan bo‘lsin. Faraz qilaylik, *M* (*x*, *y*, *z*) to‘g‘ri chiziqning siljuvchi nuqtasi bo‘lsin. U holda $\vec{a}$ va $\overrightarrow{M_0 M}$ vektorlar parallel bo‘ladi. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko‘ra

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{14}$$

kelib chiqadi. $\vec{a}$ vektor *M* nuqtaning to‘g‘ri chiziqda bo‘lishini ta’minlangani uchun uni to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori deb atashadi. (14) ni to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi deb ataymiz. Agar to‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, uning bu tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltirsa bo‘ladi. Haqiqatan, bizga (13) berilgan bo‘lsin. Bu sistemani aniqlaydigan tekisliklarni mos ravishda Δ_1 va Δ_1 deb belgilaylik. Ularning normal vektorlari $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ bo‘ladi. To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzish uchun: 1) uning biror $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasini bilish kerak; bu nuqtani topish uchun (13)dagi noma’lumlardan biriga qiymat berib, masalan $z = z_0$ deb, (13) sistemani *x* va *y* larga nisbatan yechib, $x = x_0, \quad y = y_0$ larni topamiz; 2) to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi $\vec{a} = \{1, m, n\}$ vektorini topish kerak; qaralayotgan to‘g‘ri chiziq ikki tekislikning kesishish chizig‘i bo‘lgani uchun, u $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlarga perpendikulyar bo‘ladi. Shuning uchun, $\vec{a}$ vektor sifatida $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlarga perpendikulyar bo‘lgan ixtiyoriy vektorni, shu jumladan, ularning vektor ko‘paytmasini olish mumkin, ya’ni $\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$.

Misol. Berilgan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzing:

$$\begin{cases} 3x+2y+4z-11=0 \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$$

Yechish. Agar $x_0=1$ desak, sistemadan $y_0=2$, $z_0=1$ kelib chiqadi, demak, $M_0(1,2,1)$ ekan. Endi yo‘naltiruvchi vektorni topamiz. Sistemadan $\vec{n}_1=\{3,2,4\}$, $\vec{n}_2=\{2,1,-3\}$larni aniqlaymiz.

U holda $\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-10,17,-1\}$ bo‘ladi, bundan $l=-10$, $m=17$, $n=-1$ lar topiladi. Bularni (14)_ ga olib borib qo‘ysak:

$$\frac{x-1}{-10}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{-1}$$

Agar (14) dagi nisbatlarni t ga tenglasak:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$$

bundan

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt \end{cases}$$

kelib chiqadi. (15) ni to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi deb atashadi, t bu yerda parametr rolini o‘ynaydi. To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi odatda to‘g‘ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini topish masalasida ishlatiladi.

Misol. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ to‘g‘ri chiziq bilan $2x+y+z-6=0$ tekislikning kesishish nuqtasini toping.

Yechish. Avval to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini tuzib olamiz:

$$x=2+t,\quad y=3+t,\quad z=4+2t$$

Endi bularni tekislik tenglamasiga olib borib qo‘yamiz:

$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0$$

Bundan t=-1 topiladi, bu qiymatni parametrik tenglamasiga qo‘yib $x=1, \quad y=2, \quad z=2$ larni topamiz.

3. To‘g‘ri chiziqqa doir ayrim masalalar. Faraz qilaylik, to‘g‘ri chiziqning ikki $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtasi berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori sifatida $\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorni olish mumkin. Agar $M(x, y, z)$ nuqta to‘g‘ri chiziqning siljuvchi nuqtasi bo‘lsa, u holda, $\overrightarrow{M_1M}$ va $\vec{a}$ vektorlar parallel bo‘ladi. Berilgan koordinatalarga ko‘ra,

$$\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1\}$$
$$\vec{a}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$$

Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko‘ra:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{16}$$

Oxirgi tenglik **ikki nuqtadan o‘tgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi** deb ataladi.

a) Endi faraz qilaylik, bizga

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ va } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Ular orasidagi burchak ularning yo‘naltiruvchi vektorlari $\vec{a}_1=\{l_1, m_1, n_1\}$, $\vec{a}_2=\{l_2, m_2, n_2\}$ orasidagi burchakga teng. Shu sababli,

$$cos\varphi=\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}} \tag{17}$$

bo‘ladi.

b) Agar to‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar bo‘lsa, u holda $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $cos\varphi=0$, shu sababli,

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0 \tag{18}$$

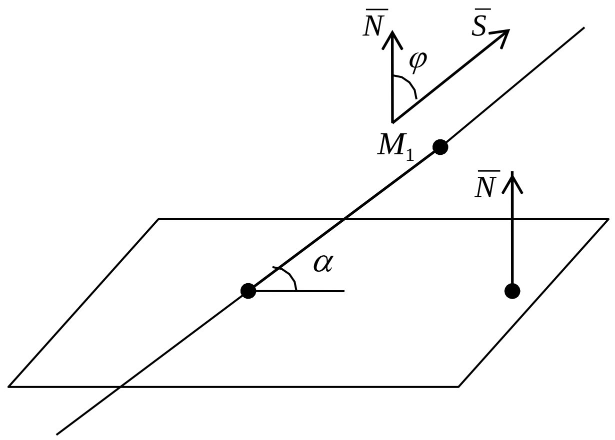
bo‘ladi. Bu tenglikni to‘g‘ri chiziqlarning **perpendikulyarlik sharti** deb ataymiz.

v) Agar to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ larning kolleniarlik shartidan

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2} \tag{19}$$

kelib chiqadi. Bu tenglik to‘g‘ri chiziqlarning **parallellik sharti** deb ataladi.

4. To‘g‘ri chiziq va tekislik. Bizga $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ to‘g‘ri chiziq va $Ax+By+Cz+D=0$ tekislik berilgan bo‘lsin.



4- rasm.

Chizmadan ko‘rinadiki, to‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak α va yo‘naltiruvchi vektor bilan tekislikning normal vektori orasidagi burchak φ lar yig‘indisi $\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}$, bundan $\alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi$ yoki $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$. Shu sababli, φ ni topsak kifoya. Demak,

$$\cos\varphi=\cos\alpha=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \tag{20}$$

Agar to‘g‘ri chiziq tekislikka parallel bo‘lsa, u holda yo‘naltiruvchi vektor normalga perpendikulyar bo‘ladi, shuning uchun

$$Al+Bm+Cn=0 \tag{21}$$

bo‘ladi. Bu tenglik to‘g‘ri chiziq bilan tekislikning **parallellik sharti** deyiladi. Agar to‘g‘ri chiziq bilan tekislik perpendikulyar bo‘lsa, u holda yo‘naltiruvchi vektor bilan normal vektor parallel bo‘ladi. U holda to‘g‘ri chiziq bilan tekislikning perpendikulyarlik sharti

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n} \tag{22}$$

bo‘ladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. 1). $2x+3y-z+5=0$; 2). $x+y-z=0$; 3). $y-3z+4=0$;

4). $x+2z-5=0$; 5). $3x-6=0$ tekisliklarni yasang.

2. $M(0;-1;3)$ va $N(1;3;5)$ nuqtalar berilgan. M nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n}=\overrightarrow{MN}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

j: $x+4y-2z=2$.

3. $M(0;1;3)$ va $N(2;4;5)$ nuqtalardan o'tuvchi va OX o'qiga parallel tekislik tenglamasini tuzing.

j: $2y-3z+7=0$.

4. OZ o'qdan va $M(2;-4;3)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

j: $2x+y=0$.

5. OX o'qqa parallel, OY va OZ o'qlaridan 5 va 4 birlik kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

j: $\frac{x}{5}+\frac{z}{4}=1$.

6. $M(-1;2;1)$, $N(2;3;-2)$ va $P(3;4;2)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

j: $7x-15y+2z-7=0$.

7. $M(1;2;3)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinatalar o'qlaridan teng kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

j: $x+y+z-6=0$.

8. $x-2y+2z-8=0$ va $x+z-6=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

j: 45^0

9. $M(1;2;0)$ nuqtadan o'tuvchi va $x+2y-3z=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini tuzing.

j: $x+2y-3z=5$.

10. $M(-1;-1;2)$ nuqtadan o'tuvchi va $x-2y+z=4$ hamda $x+2y-2z=-4$ tekisliklarga perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

j: $2x+3y+4z=3$.

11. $M(-1;2;0)\ va\ N(1;1;2)$ nuqtalardan o’tuvchi hamda $x+2y+2z-4=0$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

$j: 2x-2y+z=2.$

12. $3x-y+z=0\ va\ x+3y+4=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

$j:\ 90^0.$

13. Quyidagi tekisliklar $1).\ x+y-z=-4;\ 2).\ 2x+2y-2z=0;$ $3).\ 3x-y+2z=5;\ 4).\ 2x+y+z=-3$ orasidan parallel va perpendikulyar-larini ko’rsating.

J: 1) va 2) parallel; 1) va 3) hamda 2) va 3) tekisliklarperpendikulyar.

14. $4x+3y-5z-8=0\ va\ 4x+3y-5z+12=0$ parallel tekisliklar orasidagi masofani toping.

$j: d=2\sqrt{2}.$

15. $2x-y+3z-9=0;\quad 3x+y-4z+6=0\quad va\quad x+2y+2z-3=0$ tekisliklarning kesishish nuqtasini toping.

$j:\ (1;-1;2).$

XULOSA

Fazodagi analitik geometriya sirt va chiziqlarni ularning tenglamalari orqali algebraik usullarda o‘rganadi. Bunda asosan ikkita masala qaraladi:

1) berilgan tenglama fazoda qanday obyektni ifodalashini aniqlash;
2) berilgan geometrik obyekt tenglamasini topish.

Fazodagi eng sodda sirt bo‘lmish tekislik I tartibli tenglama bilan ifodalanadi va aksincha, har qanday I tartibli tenglama fazoda biror sirtni aniqlaydi. Tekisliklarning xususiyatlarini ularning umumiy, kesmalardagi va normal tenglamalari yordamida o‘rganish mumkin. Kerak bo‘lganda bu tenglamalarning biridan ikkinchisiga o‘tib bo‘ladi.

Nazorat savollri.

1. Tekislikning umumiy formulasini yozing.
2. Uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini ayting.
3. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa formulasini yozing.
4. Fazoda to'g'ri chiziqning umumiy formulasini yozing.

5- §. IKKINCHI TARTIBLI SIRTLAR

Reja:

1. **Ikkinchi tartibli sirt tushunchasi.**
2. **Sfera.**
3. **Silindrik sirtlar.**
4. **Konus sirt.**
5. **Aylanma sirtlar.**
6. **Ellipsoidlar.**
7. **Giperboloidlar.**
8. **Paraboloidlar.**

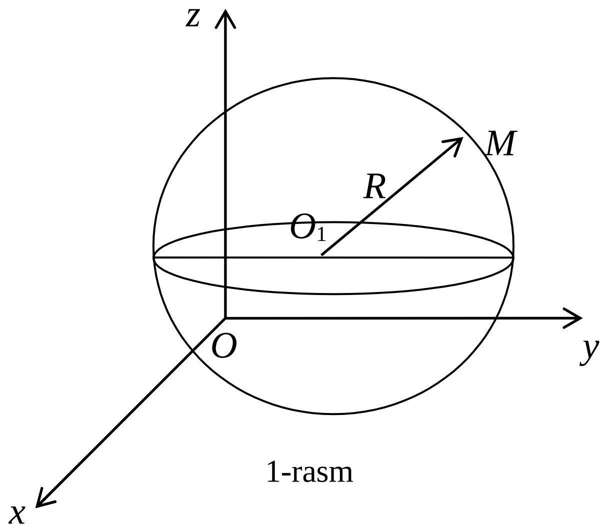
Tayanch iboralar: ikkinchi tartibli sirt tushunchasi, sfera, silindrik sirtlar, konus sirt, aylanma sirtlar, ellipsoidlar, giperboloidlar, paraboloidlar.

I. Fazodagi biror dekart koordinatalar sistemasida *x, y, z* larga nisbatan

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Kz+L=0 \qquad (1)$$

tenglamani qanoatlantiradigan nuqtalar to'plami **ikkinchi tartibli sirt** deyiladi. Bu tenglamadagi *A, B, C, D, E, F* koeffitsiyentlardan hech bo'lmasa bittasi noldan farqli bo'lganda sfera, ellipsoid, giperboloid, silindrik sirt, konus sirt yoki bir qancha aylanma sirtlarni ifodalash mumkin. Shuningdek bu tenglama yordamida ikki tengsizliklar oilasi, nuqta, to'g'ri chiziq va hatto bo'sh to'plamlarni ham aniqlash mumkin. Biz bu bobda eng sodda (aylanma sirtlar) sferalar, konuslar, silindrlar, ellipsoidlar, giperboloidlar, paraboloidlar va giperbolik paraboloidlar bilan tanishamiz.

II. Ta'rif. Fazoda berilgan nuqtadan teng masofada yotgan nuqtalarning geometrik o'rnidan tashkil topgan sirt **sfera** deyiladi.



1-rasm

Sfera tenglamasini tuzish uchun fazoda $O_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqta olaylik. Undan teng masofada yotgan umumiy holda $M(x, y, z)$ nuqta va masofa R bo'lsin. U holda aytilganiga ko'ra, shakldan:

$$|O_1M| = R \text{ yoki } \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} = R$$

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 = R^2$$

Bu sferaning **(kanonik) tenglamasi** deyiladi.

Agar sfera markazi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushsa uning tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi ($x_1 = y_1 = z_1 = 0$)

$$x^2+y^2+z^2 = R^2 \qquad (3)$$

Misol. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-20=0$ tenglama bilan berilgan sferaning markazi va radiusi R topilsin.

Yechish. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-20=0$ dan to'la kvadrat ajratamiz.

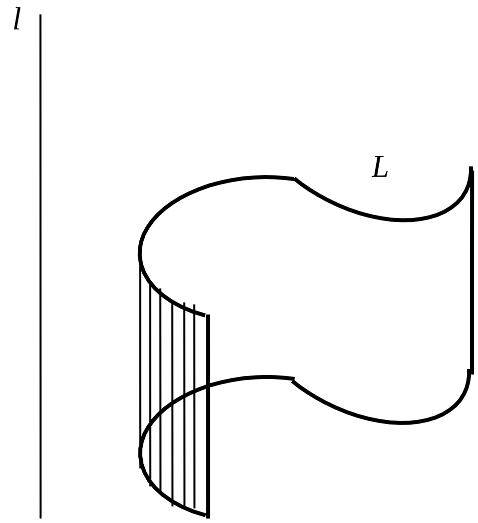
$$x^2+2x+1+y^2+4y+4+z^2 = 25$$

$$(x+1)^2+(y+2)^2+(z-0)^2 = 25$$

Demak, $O_1(-1; -2; 0)$ sfera markazi

R=5 sfera radiusi.

III. Ta’rif. Fazoda yo‘naltiruvchi deb atalgan *L*- chiziqni kesib o‘tuvchi va biror *l* to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan barcha to‘g‘ri chiziqlardan hosil bo‘lgan sirt **silindrik sirti** deyiladi.



2- rasm

$F(x, y) = 0$ tenglama fazodagi yasovchisi *OZ* - o‘qqa parallel silindrik sirtni aniqlaydi. Shuningdek $F(x, z) = 0$ yasovchisi *OY* - o‘qqa parallel, $F(y, z) = 0$ yasovchisi *OX* - o‘qqa parallel bo‘lgan sirtni aniqlaydi. Bu holda $F(x, y) = 0$,
$F(x, z) = 0$, $F(y, z) = 0$ tenglamalar tekislikda ko‘rilsa, ular mos ravishda *XOY*, *XOZ*, *YOZ* tekislikdagi egri chiziqlarni ifodalaydi va ular silindrik **sirtlarning yo‘naltiruvchilari** deyiladi.

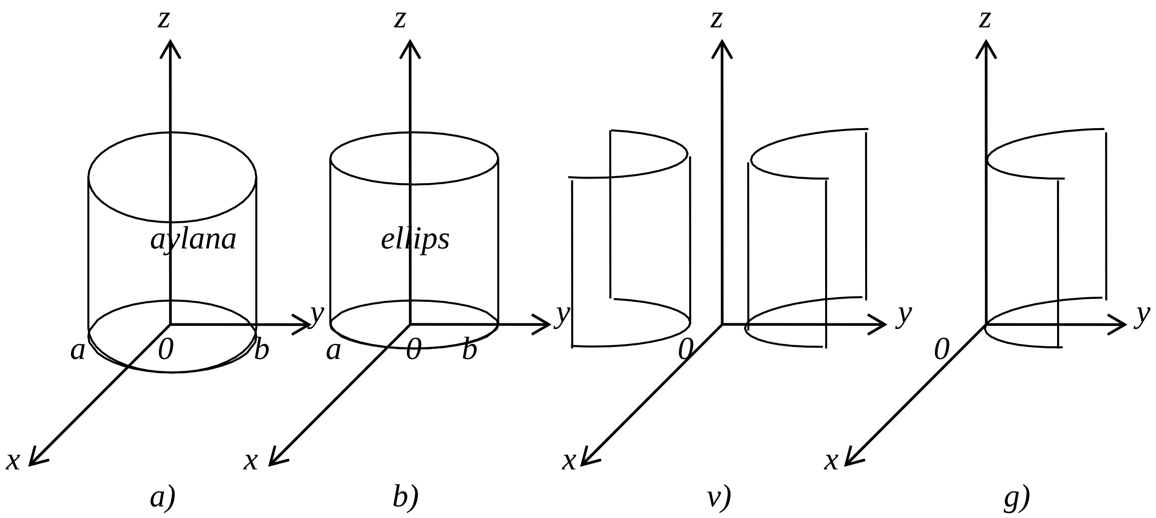
Quyidagi yasovchilari *OZ* o‘qqa parallel bo‘lgan eng muhim silindrik sirtni ko‘ramiz. Ularning yo‘naltiruvchilari mos ravishda aylana, ellips, giperbola, paraboladan iborat.

a) $x^2 + y^2 = a^2$ — to‘g‘ri doiraviy silindr (4)

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — elliptik silindr (5)

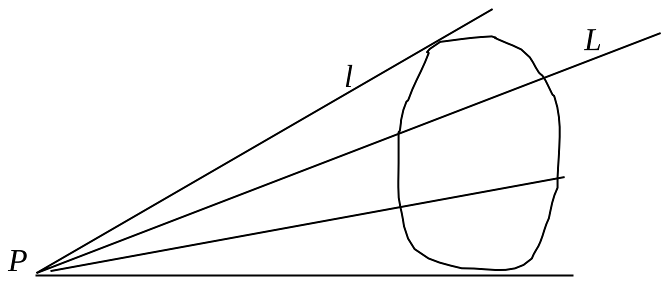
v) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — giperbolik silindr (6)

g) $y^2 = 2px$ — parabolik silindr (7)



3-rasm

IV. Ta’rif. Fazoda yo‘naltiruvchi deb atalgan l – chiziqni kesib o‘tuvchi va berilgan P – nuqtadan o‘tuvchi barcha l to‘g‘ri chiziqlardan hosil bo‘lgan sirt **konus sirt** (yoki ikkinchi tartibli konus) deb ataladi.



4-rasm

P – nuqta konusning uchi va l – yasovchisi deb ataladi.

Misol. Uchi koordinatalar boshida yotgan va yo‘naltiruvchisi ellipsoiddan iborat:

$$L: \begin{cases} z = c \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$ konus tenglamasi tuzilsin.

Yechish. $M(x, y, z)$ konusning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin, u holda konusning yasovchi $O(0; 0; 0)$ va $M(x, y, z)$ nuqtalardan o‘tgan to‘g‘ri chiziq bo‘ladi. Uning fazodagi kanonik tenglamasini topamiz

$\frac{x-0}{x-0}=\frac{y-0}{y-0}=\frac{z-0}{z-0}$ yoki $\frac{x}{x}=\frac{y}{y}=\frac{z}{z}$ yoki $z=c$ ni o‘rniga qo‘ysak:

$\frac{x}{x}=\frac{y}{y}=\frac{z}{z}$ bundan $x=\frac{cx}{z}$; $y=\frac{cy}{z}$ hosil bo‘ladi.

Buni yo‘naltiruvchi L tenglamasiga qo‘ysak, quyidagi tenglama hosil bo‘ladi

$$\frac{c^2x^2}{a^2z^2}+\frac{c^2y^2}{b^2z^2}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{8}$$

Bu elliptik sfera yoki **ikkinchi tartibli konus tenglamasi** deyiladi. Agar bunda $a=b$ deb olsak yo‘naltiruvchisi $\left.\begin{array}{l} z=c \\ x^2+y^2=a^2 \end{array}\right\}$ a – radiusli aylana bo‘lgan to‘g‘ri aylanma konus hosil bo‘ladi, uning simmetriya o‘qi OZ dan iborat bo‘ladi.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{9}$$

Shuningdek, o‘qlari OY va OX koordinata o‘qlaridan iborat va uchi koordinatalar boshida yotuvchi ikkinchi tartibli konuslarning tenglamasi mos ravishda

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{10}$$

va

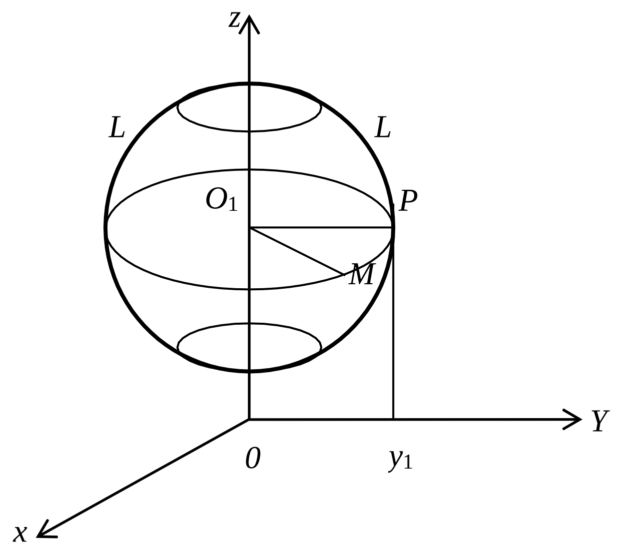
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{11}$$

lardan iborat bo‘ladi.

V. <u>Ta’rif.</u> Fazoda biror L chiziqning l – o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan nuqtalar to‘plami **aylanma sirt** deyiladi. L – chiziq aylanma sirtning medianasi, l – (chiziq) o‘q esa uning **aylanma o‘qi** deyiladi. Biz aylanish o‘qlari *OZ, OY, OX* - o‘qlaridan iborat bo‘lgan hollar bilan chegaralanamiz.

1) Sirt aylanish o‘qi OZ o‘qidan iborat bo‘lgan, L – medianasi esa OYZ tekisligida yotgan tekis chiziq bo‘lib uning tenglamasi quyidagicha bo‘lsin

$$\left.\begin{array}{r} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{array}\right\}$$



5- rasm

$M(x, y, z)$ – aylanma sirtning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin, M nuqta orqali OZ o‘qiga perpendikulyar qilib Q tekislik o‘tkazaylik, Q tekislikda aylanma sirtni markazi O_1 va $P(O, Y_1, Z)$, $O(O, O, Z)$ bo‘ladi. Bu holda $|O_1M| = |O_1P| = |y_1|$

$$|O_1M| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$|y_1| = \sqrt{x^2+y^2}; \qquad y_1 = \pm\sqrt{x^2+y^2}$$

$P(0, y_1, z)$ nuqta L – medianada yotgani uchun, $F(y_1, z) = 0$ o‘rinli. Bundan ushbu tenglama hosil bo‘ladi.

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right) = 0 \tag{12}$$

Bu $F(y, z) = 0$, $x=0$ L – mediana OZ o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan aylanma sirt tenglamasidir.

2) Agar $F(y, z) = 0$, $x=0$ L – mediana OY o‘qi atrofida aylantirilsa, u aylanma jismning tenglamasi quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi.

$$F\left(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}\right) = 0 \tag{13}$$

3) Agar $F(x, y) = 0$, $z=0$ L – mediana OX o‘qi atrofida aylantirilsa va bundan hosil bo‘lgan aylanma jismning tenglamasi quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi

$$F\left(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}\right) = 0 \tag{14}$$

VI. 1. Aylanma ellipsoidlar.

a) Agar XOZ tekisligida berilgan $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsni OZ o‘qi atrofida aylantirsak tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lgan aylanma ellipsoid hosil bo‘ladi (5-punkt).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (15)$$

b) Agar shu ellipsni OX o‘qi atrofida aylantirsak ushbu aylanma ellipsoid hosil bo‘ladi va h.k.

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(16) (16)

c) Agar (15) yoki (14) da $a=c$ deb olsak

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad (16')$$

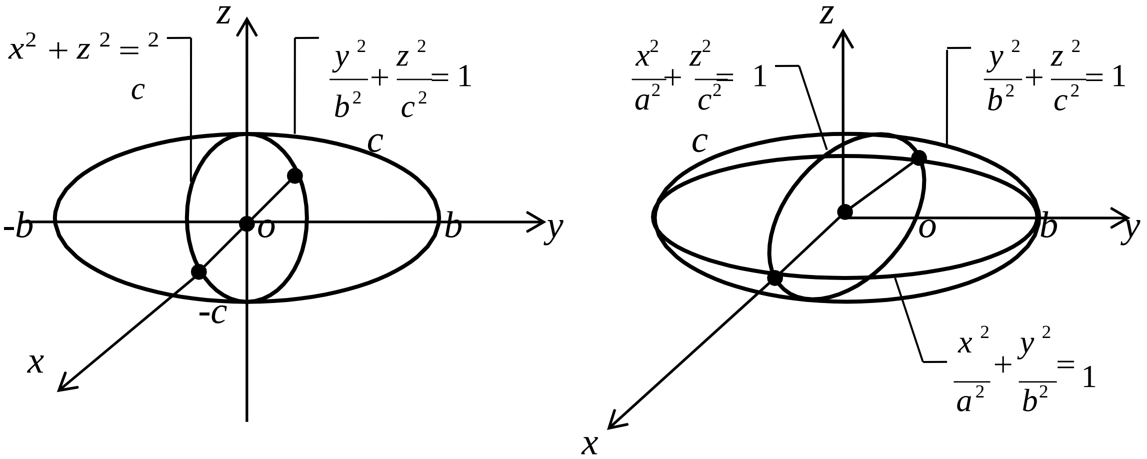
sfera hosil bo‘ladi.

2. Elliptik ellipsoid.

Tenglamasi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (17)\,(17)$$

ko‘rinishida berilgan sirt fazoda **elliptik ellipsoid** deyiladi.



6-rasm

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1 \qquad\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

VII. 1. Bir pallali aylanma giperboloidlar.

a) *YOZ* tekislikda berilgan $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbola *OZ* o‘qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lgan bir pallali aylanma giperbolik sirt hosil bo‘ladi (5-punkt).

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (18)$$

b) Agar *XOY* tekislikda berilgan $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbola *OY* – o‘qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lgan bir pallali aylanma giperbolik sirt hosil bo‘ladi.

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (19)$$

s) Agar *XOZ* tekisligida berilgan $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbola *OZ* – o‘qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lgan bir pallali aylanma giperbolik sirt hosil bo‘ladi.

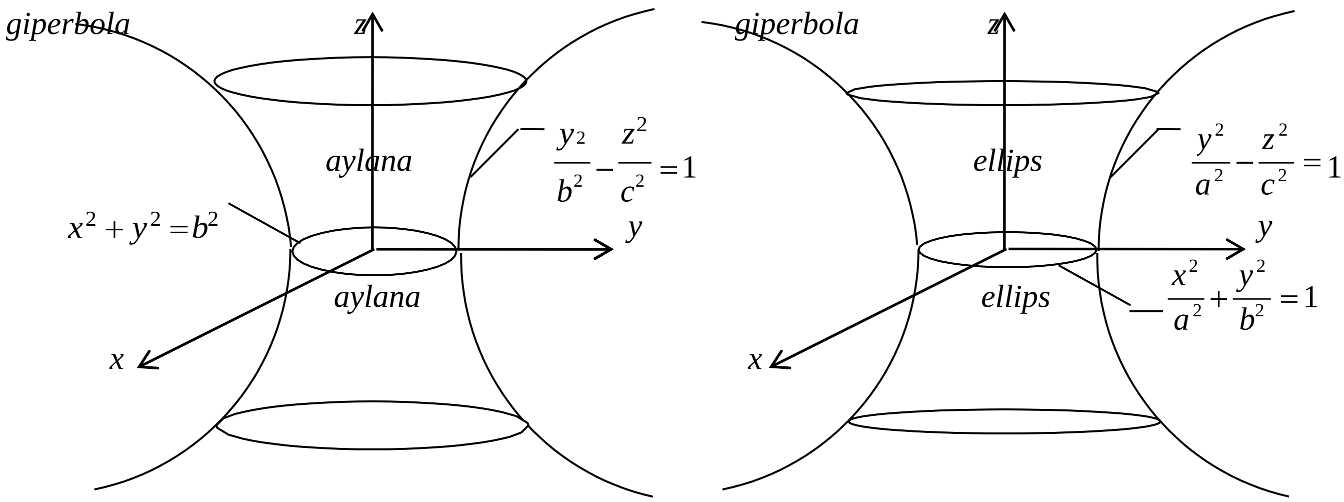
$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (20)$$

2. Bir pallali elliptik giperboloidlar.

Tenglamalari quyidagi ko‘rinishda berilgan sirtlar fazoda **bir pallali elliptik giperboloidlar** deyiladi.

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 & (21)\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 & (22)\\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 & (23) \end{array}\right.$$

Bu sirtlar mos ravishda $z=h$, $y=k$, $x=t$ tekisliklar bilan kesilsa, kesimda ellipslar hosil bo‘ladi.



Aylana bir pallali giperboloid Bir pallali elliptik giperboloid

7-rasm

3. Ikki pallali aylanma giperboloidlar.

a) Agar *YOZ* tekisligida berilgan $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbola *OY* o‘qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lgan ikki pallali aylanma giperboloid hosil bo‘ladi:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (24)$$

b) Shuningdek XOY tekisligida berilgan $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{c^2}=1$; va *XOZ* tekisligida berilgan $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbolalar mos ravishda *OX* va *OZ* o‘qi atrofida aylantirilsa quyidagi ko‘rinishdagi ikki pallali giperboloidlar hosil bo‘ladi:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1 \qquad (25)$$

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (26)$$

4. Ikki pallali elliptik giperboloidlar.

Tenglamalari quyidagicha ko‘rinishda berilgan sirtlar fazoda **ikki pallali elliptik giperboloidlar** deyiladi.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{yoki} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (27)$$

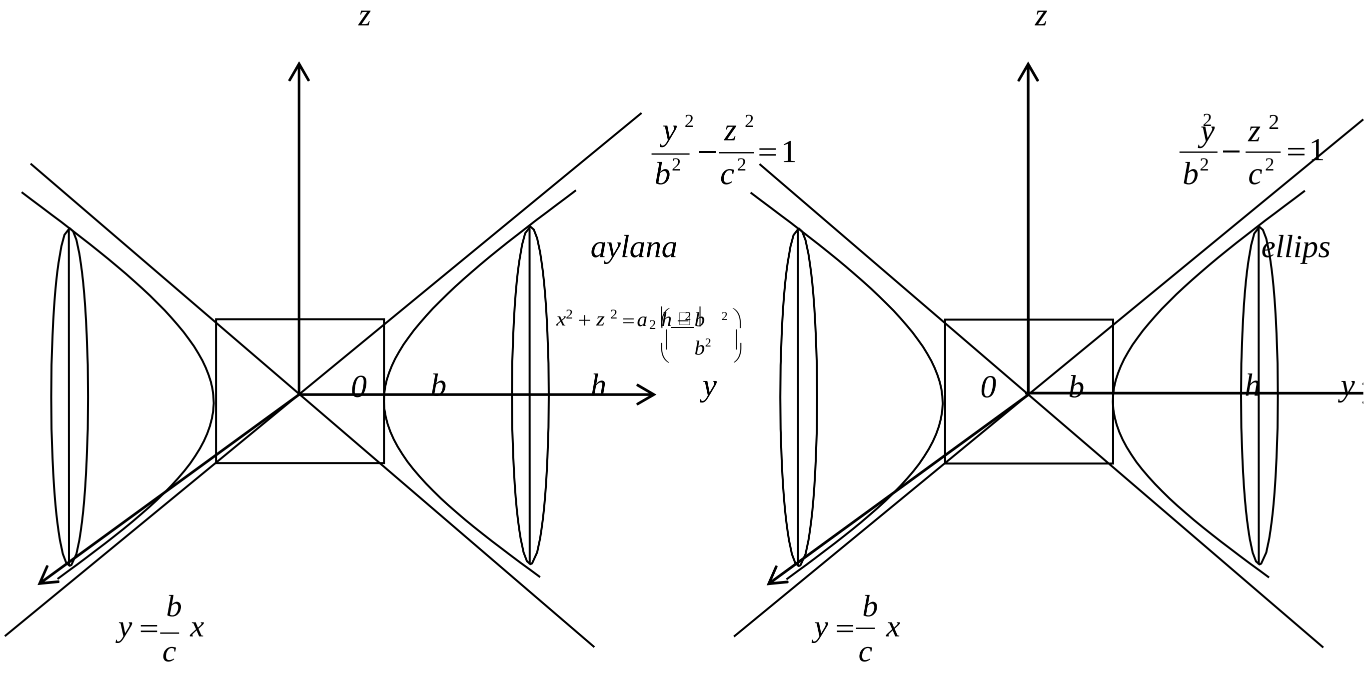
$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (28)$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (29)$$

Quyida OY o‘qi atrofida aylantirilishdan hosil bo‘ladi.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ ikki pallali aylanma giperboloid va

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ ikki pallali elliptik giperboloidlar shaklini keltiramiz.



8-rasm

VIII. 1. Aylanma paraboloidlar.

a) Agar *XOY* tekisligida berilgan $y^2 = 2px$ parabola *OX* o‘qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagicha ko‘rinishda bo‘lgan aylanma paraboloid (sirt) hosil bo‘ladi (5 punkt).

$$y^2 + z^2 = 2px \qquad (30)$$

Agar $x=h$ deb olinsa $y^2 + z^2 = 2ph$, $z=h$ aylana hosil bo‘ladi.

b) Shuningdek *XOZ* tekisligida berilgan $x^2 = 2pz$ parabola va *YOZ* tekisligida berilgan $z^2 = 2py$ parabolani mos ravishda *OZ* va *OY* o‘qlari atrofida aylantirsak quyidagicha aylanma paraboloidlar tenglamasi hosil bo‘ladi.

$$x^2 + y^2 = 2pz \qquad (31)$$ (31)

va

$$x^2 + z^2 = 2py \qquad (32)$$ (32)

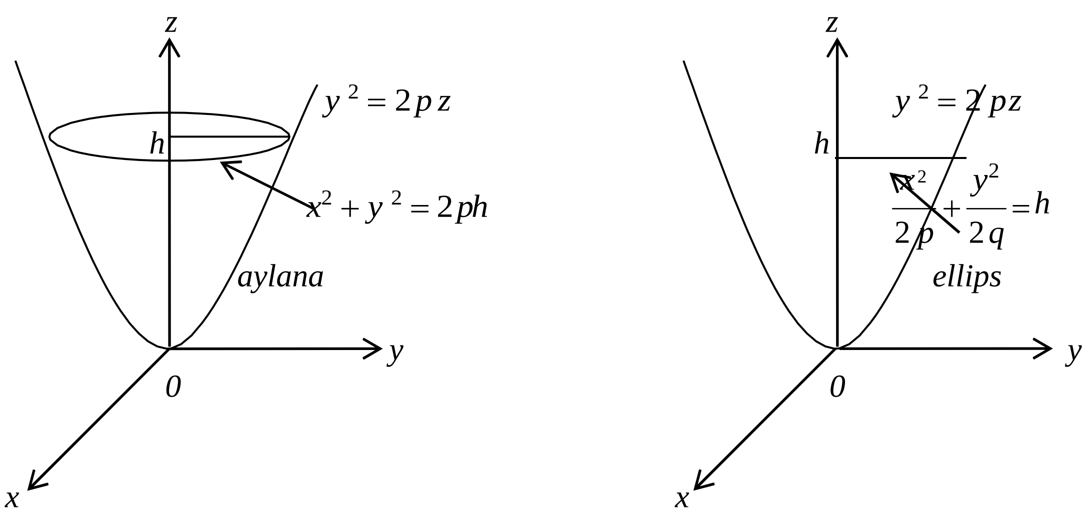
2. Elliptik paraboloidlar. Tenglamasi umumiy holda quyidagicha ko‘rinishda berilgan sirtlar **elliptik paraboloidlar** deyiladi.

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (33)$$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2y \qquad (34)$$

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x \qquad (35)$$

Quyida *OZ* o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan $x^2 + y^2 = 2pz$ va $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$ elliptik paraboloidlarni shaklini keltiramiz:



9- rasm

3. Giperbolik paraboloidlar. Tenglamasi umumiy holda quyidagicha ko‘rinishda berilgan sirtlar **giperbolik paraboloid** deyiladi.

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \qquad \frac{x^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2y \qquad \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x \tag{36}$$

yoki bu tengliklar odatda quyidagicha ko‘rinishda yoziladi:

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z \qquad \frac{x^2}{2p} - \frac{z^2}{2q} = y \qquad \frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2q} = x \tag{37}$$

Quyida $\frac{y^2}{2q} - \frac{x^2}{2p} = z$ giperbolik paraboloid shaklini keltiramiz. Bunda $z = h$ bo‘lsa $\frac{y^2}{2qh} - \frac{x^2}{2ph} = 1$ giperbola;

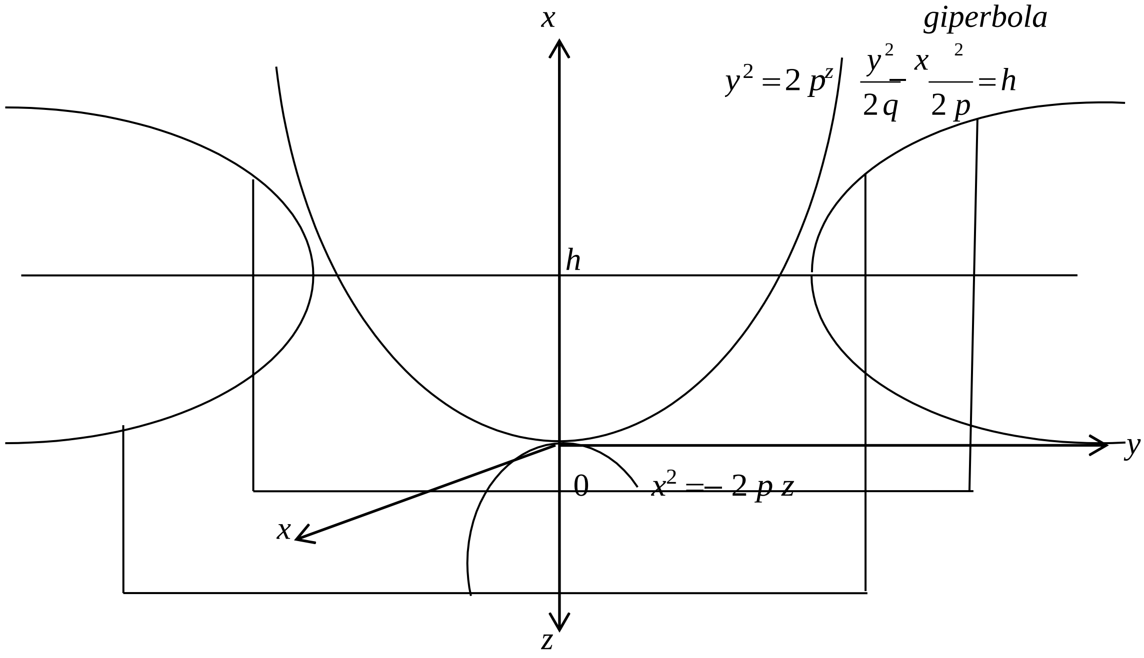
x=0 bo‘lsa $y^2 = 2qz$ parabola

y=0 bo‘lsa $x^2 = 2pz$ parabola

z=0 bo‘lsa $\frac{y^2}{2q} - \frac{x^2}{2p} = 0$ yoki

$\frac{y^2}{q} - \frac{x^2}{p} = 0$ yoki $\left(\frac{y}{\sqrt{q}} - \frac{x}{\sqrt{p}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{q}} + \frac{x}{\sqrt{p}}\right)$ yoki *XOY* tekislikda yotuvchi ikkita quyidagi to‘g‘ri chiziqlardan iborat:

$\frac{y}{\sqrt{q}}-\frac{x}{\sqrt{p}}$ va $\frac{y}{\sqrt{q}}+\frac{x}{\sqrt{p}}$ yoki $y=\pm\sqrt{\frac{q}{p}}\,x$ koordinatalar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlardan iborat. Bu degan so‘z sirt *XOY* tekisligini shu ikki to‘g‘ri chiziqlar bo‘ylab kesib o‘tadi.



10-rasm

Giperbolik paraboloidlarni umuman to‘g‘ri chiziqlardan tashkil topgan sirt ekanligini isbotlash mumkin.

Nazorat savollari.

1. Ikkinchi tartibli sirt deb nimaga aytiladi?
2. Konus sirt deb nimaga aytiladi?
3. Aylanma sirt deb nimaga aytiladi?
4. Qanday ellipsoid va giperboloidlarni bilasiz?

IV.BOB. FUNKSIYA VA UNING LIMITI

1§. FUNKSIYA TUSHUNCHASI

Reja:

1. **O‘zgaruvchi va o‘zgarmas miqdorlar.**
2. **O‘suvchi va kamayuvchi o‘zgaruvchi miqdorlar.**
3. **Funksiya haqida tushuncha.**
4. **Funksiyaning berilish usullari.**
5. **Elementar funksiyalar.**
6. **Algebraik va transsendent funksiyalar.**

Tayanch iboralar: o‘zgarmas miqdor, o‘zgaruvchi miqdor, funksiyaning aniqlanish sohasi, funksiyaning qiymatlar sohasi, elementar funksiyalar, transsendent funksiyalar.

I. Fan va texnikada uchraydigan miqdorlar o‘zgaruvchi yoki o‘zgarmas bo‘lishi mumkin. Masalan, yurib turgan poyezdning bosayotgan yo‘li, isitilayotgan jismning temperaturasi, erib turgan muzning miqdori, yurib turgan mashinada sarf bo‘layotgan benzin miqdori o‘zgaruvchi bo‘ladi. Keltirilgan misollardan yurayotgan poyezdni ko‘rib o‘taylik. Bu holda uning bosayotgan yo‘li, unga sarf bo‘lgan vaqtga qarab o‘zgarib boradi, ya’ni o‘zgaruvchi miqdor bo‘ladi. Holbuki, poyezdning tezligi o‘zgarmas yoki o‘zgaruvchi bo‘lishi mumkin, chunki u bir xil tezlikda yoki borgan sari tezlashib yoki borgan sari sustlashib, yoki goho tezlashib va goho sustlashib yurishi mumkin. Shuning uchun masalada qatnashgan miqdorlardan qaysi birining o‘zgarmas yoki o‘zgaruvchi bo‘lishi ko‘rilayotgan masalaning shartlariga bog‘liqdir, biroq miqdorlarning orasida shundaylari ham uchraydiki ular har xil sharoitda o‘z qiymatini saqlab o‘zgarmasligi mumkin. Masalan har qanday uchburchakda ichki burchaklarning yig‘indisi 180^0 ga teng, har qanday aylana uzunligini uning diametriga nisbati π ga tengdir.

Bu miqdorlar **absolyut o‘zgarmas miqdorlar** deyiladi. Umuman biror hodisani tekshirishda yoki har bir sharoitda o‘z qiymatini saqlagan miqdorni o‘zgarmas va turli qiymatlarga ega bo‘lgan miqdori **o‘zgaruvchi miqdor** deyiladi. Odatda o‘zgaruvchi miqdorlar *x, y, z, t*… harflari bilan, o‘zgarmas miqdorlar *a, b, c,* … harflar bilan belgilanadi.

Ko‘p masalalarda o‘zgaruvchi miqdorning qiymatlarini chegaralashga, ya’ni uning qiymatlaridan biror 2 aniq son orasidagi qiymatlarni e’tiborga olishga to‘g‘ri keladi.

O‘zgaruvchi miqdorlarning barcha son qiymatlar to‘plami shu **o‘zgaruvchining o‘zgarish sohasi** deyiladi. Agarda o‘zgaruvchi x ning hamma qiymatlari $a \le x \le b$ shartni qanoatlantirsa, bu holda *x* miqdor (*a, b*) oraliqda yoki **intervalda o‘zgaradi** deyiladi va bunday interval **yopiq interval** deyiladi hamda [*a, b*] kabi belgilanadi. Agar o‘zgaruvchi *x* ning hamma qiymatlari $a < x < b$ shartni qanoatlantirsa bu holda (*a, b*) **ochiq interval** deyiladi va (*a, b*) kabi belgilanadi. Bunda *a, b* lar *x* ni (*a, b*) qiymatlariga kirmaydi.

Agar *x* ning qiymatlari $a \le x < b$ yoki $a < x \le b$ shartni qanoatlantirsa bu holda (*a, b*) interval mos ravishda o‘ngdan va chapdan **yarim ochiq oraliqlar** deyiladi va mos ravishda [*a, b*), (*a, b*] kabi deyiladi.

II. Agar o‘zgaruvchi miqdor *x* ning o‘zgarish sohasi va uning ixtiyoriy har ikki qiymatning qaysi biri oldingi va qaysi biri keyingi ekanligi ma’lum bo‘lsa bu o‘zgaruvchi **tartiblangan o‘zgaruvchi miqdor** belgilanadi.

Qiymatlar to‘plami $x_1, x_2, x_3 ... x_n$ sonlar ketma-ketligini hosil qiladigan o‘zgaruvchi miqdor tartiblangan o‘zgaruvchi miqdorning xususiy holidir. Bunda $x_i < x_{i+1}$ larning qaysi biri miqdor jihatidan katta kichikligidan qat’iy nazar x_i oldingi x_{i+1} keyingi qiymatdir.

Agar o‘zgaruvchi miqdorning keyingi qiymati oldingidan katta bo‘lsa o‘suvchi, keyingi qiymati oldingidan kichik bo‘lsa **kamayuvchi o‘zgaruvchi miqdor** deyiladi. O‘sib boruvchi yoki kamayib boruvchi miqdorlar monoton o‘suvchi, monoton kamayuvchi yoki umuman **monoton o‘zgaruvchi miqdor** deyiladi.

Agar o‘zgaruvchi miqdor *x* ning absolyut qiymati uning biror qiymatidan boshlab, birorta musbat *A* sondan kichik

$$|x| < A \text{ bo‘lib,}$$

x ning har qanday qaysi o‘zgarishlarida ham bu tengsizlik o‘z kuchini saqlab borsa, bu holda bunday o‘zgaruvchi *x* **chegaralangan yoki cheklangan** deyiladi.

Masalan, *sinx* cheklangan yoki chegaralangan bo‘ladi, chunki $|\sin x| \le 1$.

V. Ko‘pincha fan va texnika masalalarida qatnashgan o‘zgaruvchi miqdorlar o‘zaro shunday bog‘liq bo‘ladiki, ulardan birining o‘zgarishiga qarab ikkinchisi ham ma’lum ravishda o‘zgaradi. Masalan, doiraning radiusi *R* va uning yuzi *S* deb belgilansa, unda

$$S = \pi R^2$$

bo‘ladi. Bu yerda *S* ning qiymati *R* ning qiymatiga bog‘liq bo‘lib *R* ga berilgan har bir qiymatga *S* ning aniq qiymati mos keladi. Bu holda ***S, R* ning funksiyasi** deyiladi.

Ta’rif. Agarda ikkita *x* va *y* o‘zgaruvchi miqdorlardan biri, masalan *y* ikkinchisiga ya’ni, *x* ga shunday bog‘liq bo‘lsaki, ulardan *x* ga berilgan har bir qiymatga, *y* ning yagona aniq qiymati mos kelsa, u holda *y* ni *x* ning funksiyasi, *x* **erkin o‘zgaruvchi yoki argument** deyiladi.

Bu bog‘lanish $y = f(x)$ ko‘rinishda ifodalanadi. Bundagi f harfi «funksiya» (function) so‘zining birinchi harfidan iborat bo‘lib, zikr qilingan bog‘lanishni umumiy ravishda va qisqacha ifodalaydi.

Ba’zi hollarda *f* harfi o‘rniga F, φ, ϕ, Z, U ... kabi harflar yoziladi, bu yerda y funksiya, x argument deyiladi.

Yana quyidagilarga e’tibor qarataylik. Fizikadan ma’lumki, Boyl-Mariot qonuniga ko‘ra, temperaturasi o‘zgarmay turgan gazning hajmi (*v*) bilan uning tashqi bosimi (*p*) ning ko‘paytmasi o‘zgarmas miqdordan iborat. Agar *C* o‘zgarmas deyilsa, bu qonunning matematik ifodasi bunday bo‘ladi.

$$\rho v = C$$

Bundan *P* berilsa *v* ni yoki *v* berilsa *P* ni aniqlash mumkin.

$$P = \frac{C}{v}; \quad v = \frac{C}{P}$$

Bunda, birinchisida funksiya rolida bo‘lgan *P* ikkinchisida argument rolini bajarmoqda. Shuning uchun masaladagi o‘zgaruvchi miqdorlardan qaysi birini funksiya va qaysi birini argument qilib olish masalaning shartiga va berilgan tuzilishiga bog‘liq bo‘ladi.

$y = f(x)$ funksional bog‘lanish yoki ***f*** **funksiyaning xarakteristikasi** deyiladi.

Ta’rif. Funksiyaning aniqlaydigan argumentning hamma qiymatlar to‘plami **funksiyaning aniqlanish sohasi** deyiladi.

Masalan, $y = \dfrac{1}{x - a}$ ning aniqlanish sohasi *x*=*a* dan boshqa hamma haqiqiy sonlardan iborat. $y = \sqrt{1 - x^2}$ ning aniqlanish sohasi [-1, 1] intervaldan iborat, *y*=*lgx* ni aniqlanish sohasi hamma musbat sonlardan iborat va h.k.

III. Funksiya quyidagi ko‘rinishda beriladi.

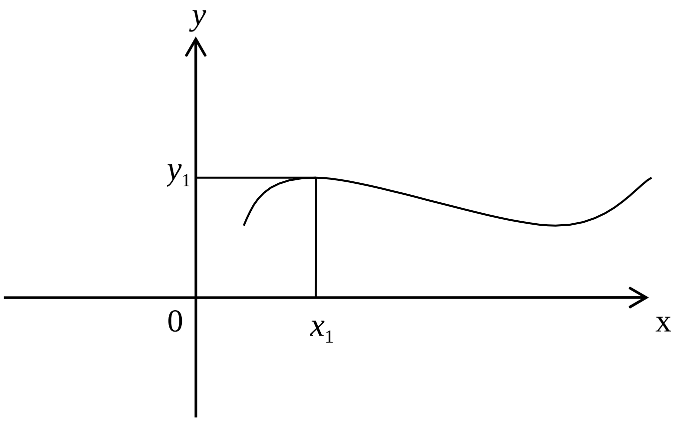
1) jadval usulida;
2) grafik usulida;
3) analitik usulida.

1) Funksiya jadval usulida berilganda ikkita o‘zgaruvchi *x* va *y* larni qiymatlari jadvalda bo‘lib *x* ni har bir qiymatlariga *y* ni aniq qiymati mos qo‘yiladi.

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Bu usuldan asosan sutkalik ob-havoni o‘zgarishini aniqlashda foydalaniladi.

2) Funksiya grafik usulida berilganda koordinata sistemasi yordamida chiziqning barcha nuqtalari uchun o‘zgaruvchi *x* ni har bir qiymatiga y ni aniq qiymati mos qo‘yiladi.



1-rasm.

Bu usul yordamida funksiyaning geometrik tasvirini ifodalash mumkin.

$$y = f(x)$$

Funksiyaning geometrik ma’nosi tekislikdagi chiziqni ifoda etadi.

3) Funksiyaning $y = f(x)$ ko‘rinishda berilishi **analitik usulda berilishi** deyiladi.

Masalan, $y = ln\, x + 5$, $y = 3^x$, $y = cos^2 x$

$$y = \sqrt{x - 3x^2 + 1}, \quad y = x^2 + 1.$$

IV. Matematik analizning asosiy masalasi funksional munosabatlarni tekshirishdan iborat bo‘lgani uchun bizga har vaqt turli funksiyalar bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Shuning uchun biz bu yerda funksiyalarning asosiy sinflarini tashkil etgan va ularning elementar funksiyalar deb atalgan turlari bilan tanishib o‘tamiz.

1) Butun ratsional funksiyalar;

n darajali **butun ratsional funksiya** deb umumiy ko‘rinishi quyidagicha bo‘lgan funksiya aytiladi.

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n$$

Bunda $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ lar koeffitsiyentlar bo‘lib haqiqiy o‘zgarmas sonlardir.

Masalan, $y=2x+5$, $y=0{,}5x^2-12$, $y=5x^3-3x^2+15$ larni har biri butun ratsional funksiyalardir.

2) Kasr ratsional funksiyalar;

Ikki butun ratsional funksiyalarning bir biriga nisbati kasr ratsional funksiya yoki qisqacha **ratsional funksiya** deyiladi. Uning umumiy ko‘rinishi quyidagicha

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+...+b_m}$$

Misol. $y=\frac{2x+5}{x^2-4x+3}$, $y=\frac{3x^2+1}{x+1}$ larning har biri ratsional funksiyalardir.

3) Darajali funksiya;

$y=x^m$ ko‘rinishdagi funksiya darajali funksiya deyiladi.

4) Ko‘rsatkichli funksiya;

$y=a^x$ ko‘rinishdagi funksiya ko‘rsatkichli funksiya deyiladi.

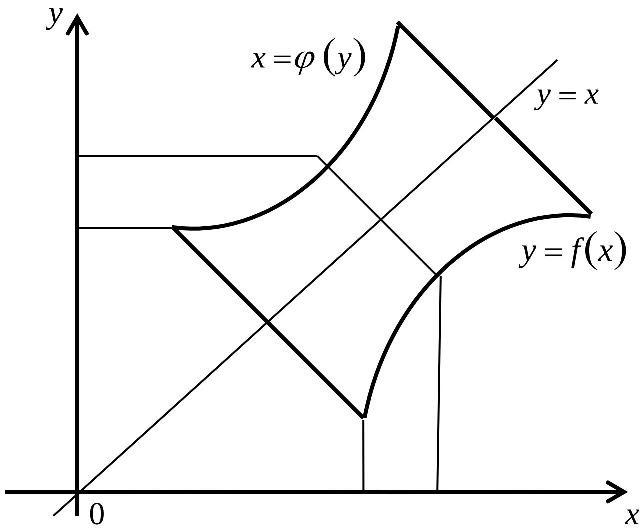
5) Logarifmik funksiya. Teskari funksiya.

$y=\log_a x$ ko‘rinishdagi funksiya logarifmik funksiya deyiladi.

$x=a^y$ funksiya logarifmik funksiyaga teskari funksiya deyiladi.

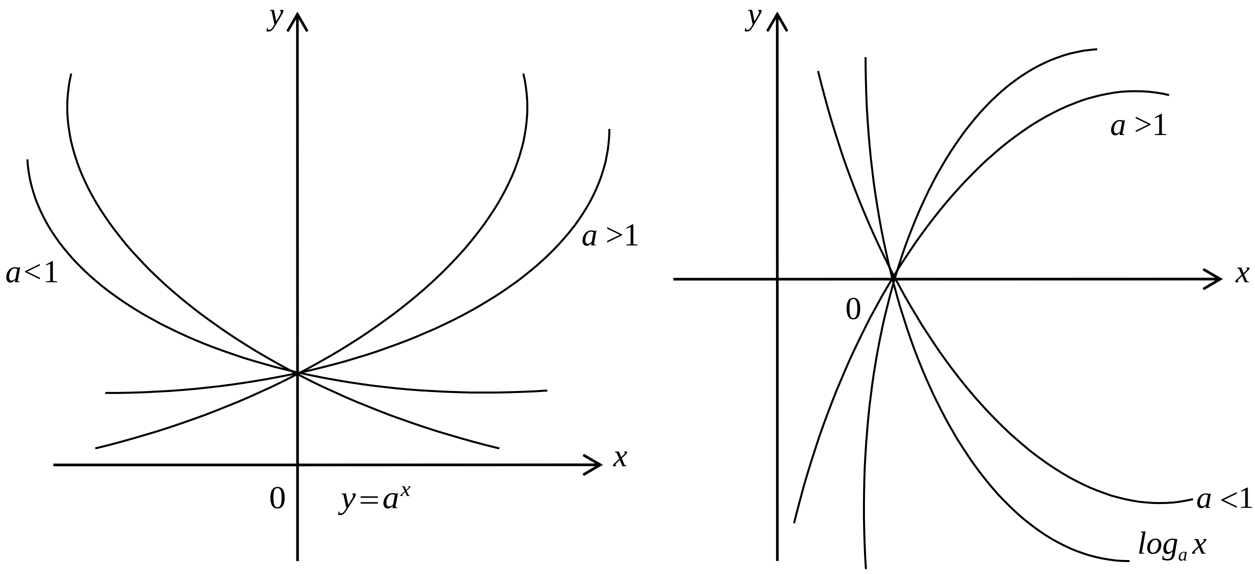
Umuman $y=f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsa $x=f^{-1}(y)$ bu funksiyaga teskari bo‘ladi.

O‘zaro teskari bo‘lgan funksiyalarning grafiklari orasida ma’lum bog‘lanish mavjuddir. Bunday funksiyalardan birining grafigi ma’lum bo‘lgan holda, unga teskari bo‘lgan ikkinchisining grafigini chizish juda qulaydir. Buning uchun x va y ning rollarini o‘zaro almashtirish kifoya. Shunday qilib to‘g‘ri funksiyaning grafigidan teskari funksiyaning grafigini hosil qilish uchun butun shakl birinchi koordinatalar burchagining bissektrisasi atrofida 180^0ga aylantirilsa kifoya qiladi.



2-rasm.

Shu yo‘l bilan ko‘rsatkichli funksiya grafigidan logarifmik funksiyaning grafigi hosil qilinadi.



3- rasm.

6) Trigonometrik funksiyalar.

$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=tg\,x,\ y=ctg\,x,\ y=\sec x,\ y=cosec\,x$ lar **trigonometrik funksiyalar** deyiladi.

7) Teskari trigonometrik funksiyalar.

$y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=arctg\,x,\ \ y=arcctg\,x$ ko‘rinishdagi funksiyalar teskari trigonometrik funksiyalar deyiladi.

Agar argumentning har bir qiymatiga funksiya uchun bir necha qiymat to‘g‘ri kelsa, bunday funksiya ko‘p qiymatli deyiladi va birgina qiymat to‘g‘ri kelsa, **bir qiymatli** deyiladi.

Yuqorida ko‘rilgan funksiyalar bir qiymatli edi. Lekin teskari trigonometrik funksiyalar ko‘p qiymatli funksiyalardir.

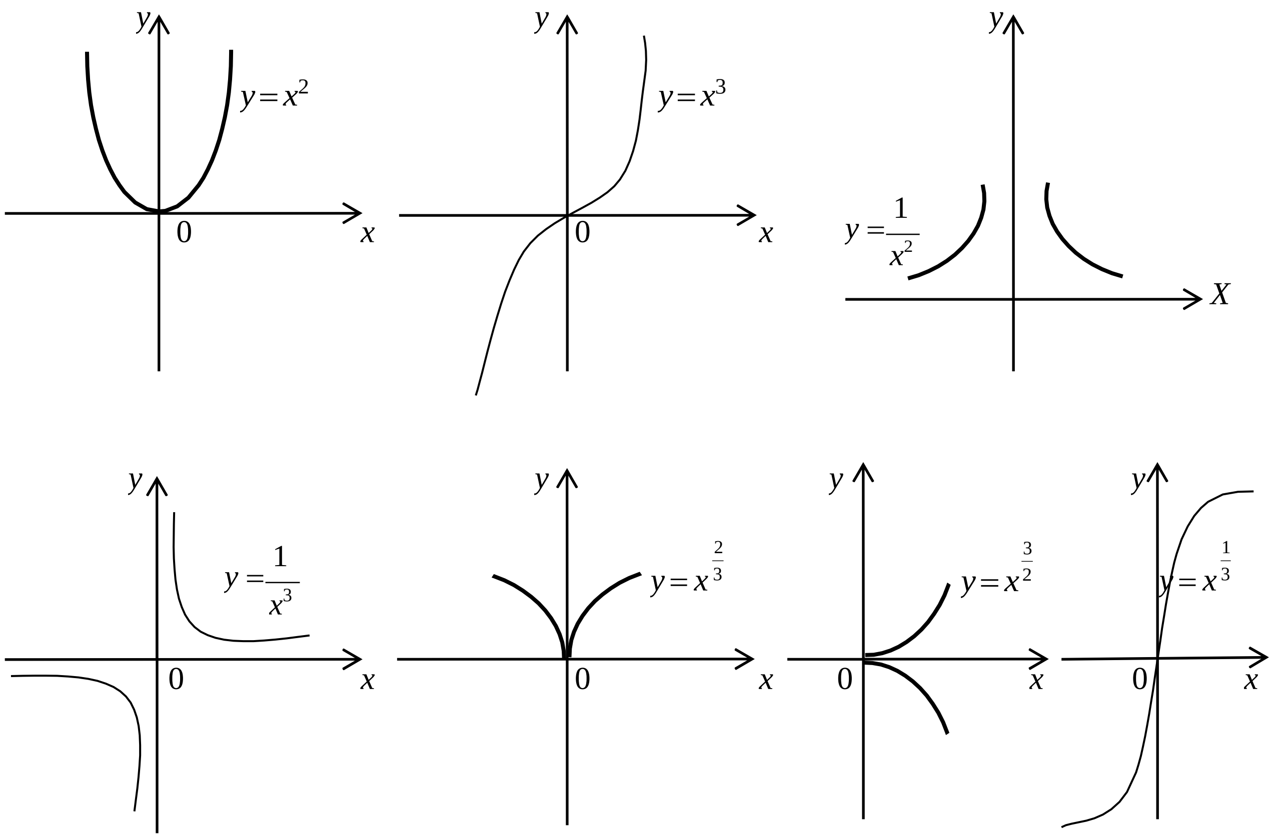
Agar bu funksiya $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ oraliqda ko‘rilsa, u bir qiymatli funksiyaga aylanadi.

Ta’rif. $y=f(x)$ ko‘rinishda analitik usulda berilgan funksiyalar **asosiy elementar funksiyalar** deyiladi.

Asosiy elementar funksiyalar quyidagilardan iborat:

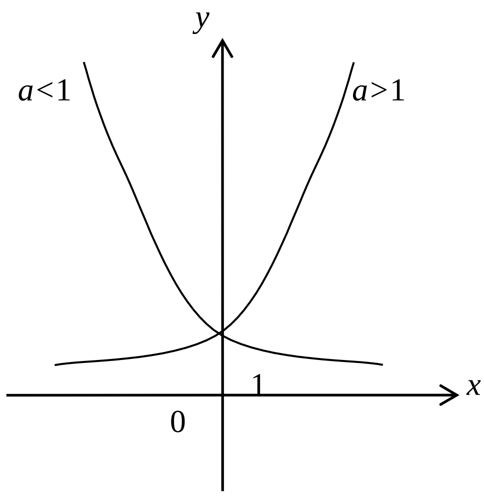
1) darajali funksiya;
2) ko‘rsatkichli funksiya;
3) logarifmik funksiya;
4) trigonometrik funksiya;
5) teskari trigonometrik funksiya.

1) Darajali funksiya $y=x^n$ va n haqiqiy son. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty;+\infty)$dan iborat. Bu funksiyaning xususiy hollarda grafigi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



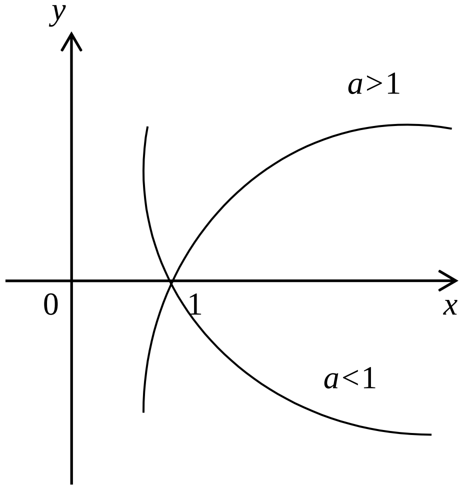
4- rasm.

2) Ko‘rsatkichli funksiya $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Bu funksiya x ning katta qiymatlarida aniqlangan, uning grafigi quyidagicha



5- rasm.

3) Logarifmik funksiya. $y = \log_a x,\quad a > 0,\quad a \neq 1$. Bu funksiya $x > 0$ qiymatlarda aniqlangan $(0, +\infty)$ uning grafigi quyidagicha



6-rasm.

4) Trigonometrik funksiyalar.

$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = tg\, x,\ y = ctg x,\ y = \sec x,\quad y = \cos ec\ x$.

$y = \sin x,\ y = \cos x$ funksiyalarni aniqlanish sohasi $(-\infty; +\infty)$dan iborat.

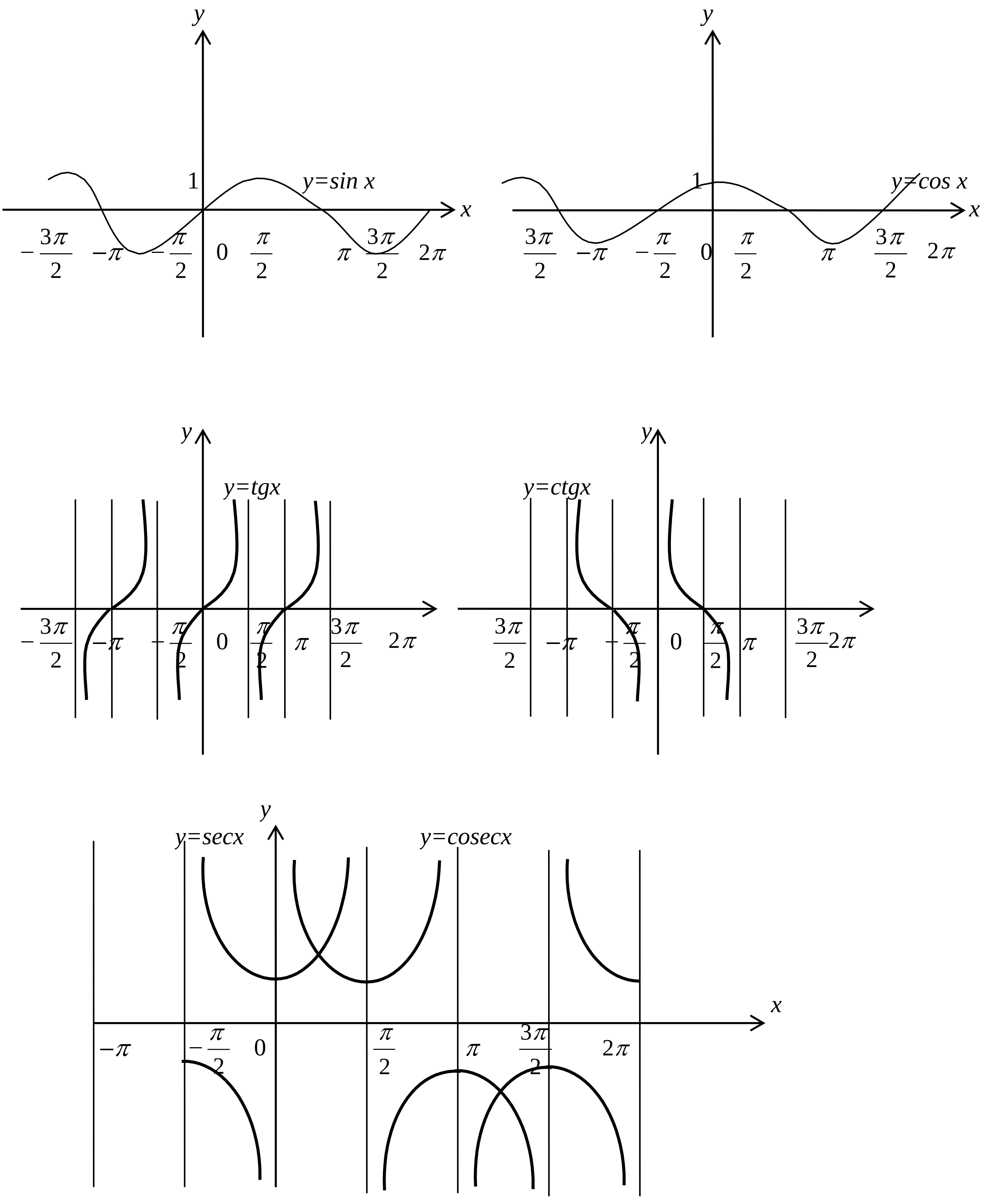
$y = tg\, x,\ y = \sec x$ funksiyalarni aniqlanish sohasi

$$(-\infty,\ x_k) \cup (x_k + \infty)$$
$$x_k = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

$y = ctg\ x,\ y = \cos ec\, x$ larni aniqlash sohasi

$$(-\infty,\ x_k) \cup (x_k + \infty)$$
$$x_k = k\ \pi\quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

Bularni grafiklari quyidagicha



7-rasm.

V. Algebraik funksiyalar quyidagi funksiyalardan iborat.

1. Butun ratsional funksiya. Buni biz yuqorida ko‘rib o‘tdik.
2. Kasr ratsional funksiya. Buni ham yuqorida ko‘rib o‘tdik.

3. Irratsional funksiya.

Agar $y = f(x)$ funksiyani o‘ng tomonida algebraik amallar ichida butun bo‘lmagan ratsional ko‘rsatkichli darajaga ko‘tarish amallari bajarilsa y miqdor x ning **irratsional funksiyasi** deyiladi.

Bunga $y = \frac{2x^2 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{8-3x^2}}$, $y = \sqrt[5]{x}$ kabilar misol bo‘ladi.

Ta’rif. Algebraik bo‘lmagan funksiya **transsendent funksiya** deyiladi. Masalan, $y = \sin x$, $y = tg\, x$, $y = a^x$ larning har biri transsendent funksiyadan iborat.

Ta’rif. Agar shunday o’zgarmas $\mathrm{T}(\mathrm{T} \neq 0)$ soni mavjud bo’lsaki, $\forall x \in \mathrm{D}$ uchun $f(x+T) = f(x)$ tenglik o’rinli bo’lsa, $f(x)$ funktsiya ***davriy funktsiya*** deyiladi va bu shartni qanoatlantiruvchi musbat T ning eng kichigi (agar u mavjud bo’lsa) ***funktsiyaning davri*** deyiladi.

Masalan, $y=\sin x$ davri T=2π, $y=\mathrm{tg}x$ esa davri T=π bo‘lgan davriy funksiyalardir. $y=\{x\}=x-[x]$ funksiya qiymati argument x qiymatining nomanfiy kasr qismiga teng bo‘ladi. Masalan, {1.2}=0.2, {2.98}=0.98, {±8}=0, {–1.7}= 0.3 (bunda –1.7= –2+0.3 deb qaraladi). Bu holda D{f}=(–∞;∞) va E{f}=[0,1) bo‘lib, ixtiyoriy $x\in$D{f} va $n\in N=\{1,2,3.\cdots\}$ uchun $\{x+n\}=\{x\}$ bo‘ladi. Bundan $f(x)=\{x\}$ davri T=1 bo‘lgan davriy funksiya ekanligini ko‘rish mumkin. $y=x^2$ yoki $y=e^x$ funksiyalar esa davriymas funksiyalarga misol bo‘ladi.

Ta’rif. Agar $\forall x \in \mathrm{D}$ uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ ***juft funktsiya***, $f(-x) = -f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ toq funktsiya deyiladi, aks holda, ya’ni

$f(-x) \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$ bo’lsa, funktsiya juft ham emas, toq ham emas deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2$ –juft funksiya, $f(x)=x^3$ esa toq funksiya bo‘ladi. Lekin har qanday funksiya juft yoki toq bo‘lishi shart emas. Masalan, $f(x)=x^2-3x+1$ yoki $f(x)=2x-3$ funksiyalar na juft va na toqdir.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

Quyidagi funksiyalarning aniqlanish va qiymatlar sohasini toping?

$1. y = 3x - 1$

$2. y = \sqrt{x - 4}$

$3. y = \sqrt[3]{x^2 + x - 5}$

$4. y = \frac{5}{x + 4}$

$5. y = \sqrt{3x - 1} + \sqrt{x + 2}$

$6. y = 5 + sin3x$

$7. y = \lg(9 - x^2)$

$8. y = |x| + 15$

$9. y = lgsinx$

$10. y = \sqrt{\frac{x + 7}{x - 6}}$

$11. y = \sqrt{cosx + 3}$

$12. y = \sqrt{sin2x - 4}$

$13. y = \frac{1}{x^3 - 8}$

$14. y = e^{\frac{1}{x}}$

Quyidagi funksiyalarni juft yoki toqligini tekshiring?

$1. f(x) = x^2 sinx$

$2. f(x) = x^2 - x + 1$

$3. f(x) = |x| + 7$

$4. f(x) = x^3 cos^2 x$

$5. f(x) = \sqrt{x^3 + |x| + 4}$

$6. f(x) = e^{tg\alpha}$

$7. f(x) = 2^x + 2^{-x}$

$8. f(x) = \lg(x^4 + x^2 - 1)$

$9. f(x) = \frac{|sinx|}{1 + cosx}$

$10. f(x) = |tg\alpha - 1|.$

XULOSA

Matematik analiz fanida funksiyalar va ular bilan bog‘liq turli tushuncha hamda tasdiqlar qaraladi. Funksiya deyilganda turli o‘zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog‘lanishning matematik ifodasi tushuniladi. Funksiyalar analitik, jadval, grafik va ta’rif usullarida berilishi mumkin. Funksiyalar u yoki bu xususiyatlariga qarab monoton, juft-toq, davriy, chegaralangan va chegaralanmagan kabi ko‘rinishlarda bo‘lishi mumkin. Berilgan funksiyalar orqali murakkab va teskari funksiyalarni aniqlash mumkin. Darajali, ko‘rsatkichli, logarifmik, trigonometrik va teskari trigonometrik funksiyalar asosiy elementar funksiyalar bo‘lib hisoblanadi. Ulardan tuzilgan turli funksiyalar esa elementar funksiyalar deyiladi. Matematikada elementar bo‘lmagan funksiyalar ham qaraladi.

Nazorat savollari.

1. O‘zgarmas va o‘zgauvchi miqdorlar.
2. Tartiblangan o‘zgauvchi miqdorlar. O‘suvchi va kamayuvchi o‘zgaruvchi miqdorlar.
3. Funksiya, uning aniqlanish va qiymatlar sohalari. Funksiyaning berilish usullari.
4. Elementar funksiyalar.
5. Algebraik va transsendent funksiyalar.

2-§. FUNKSIYA LIMITI. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI.

Reja:

1. **O‘zgaruvchi miqdorning limiti.**
2. **Funksiyaning limiti.**
3. **Funksiyaning cheksizlikdagi limiti.**
4. **Cheksiz kichik miqdorlar va ularnig asosiy hossalari.**
5. **Limitlar haqidagi asosiy teoremalar.**
6. **Birinchi ajoyib limit.**

7. ***e* soni**
8. **Funksiyaning uzluksizligi.**
9. **Uzluksiz funksiyaning hossalari.**

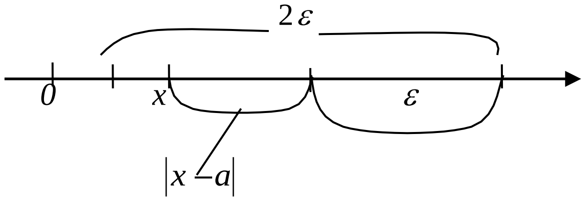
Tayanch iboralar: o‘zgarmas sonning limiti, cheksiz katta o‘zgaruvchi miqdor funksiyaning limiti, chegaralangan funksiya, cheksiz kichik miqdor, birinchi ajoyib limit, ikkinchi ajoyib limit, funksiyaning uzluksizligi.

Matematik analizning asosiy amallaridan biri limitga o‘tish amalidir. Bu amal analiz kursida turli ko‘rinishlarda uchraydi. Bu bobda o‘zgaruvchi miqdorning limiti tushunchasiga asoslangan sodda ko’rinishlar ko‘riladi.

Agar masala shartida berilgan miqdor har xil sonli qiymatlarni qabul qilsa, bu miqdor **o‘zgaruvchi miqdor** detiladi.

1 - ta’rif. Agar $x-a$ ayirmaning absalyut qiymati *x* ning o‘zgarishi jarayonida avvaldan berilgan har qanday masbat kichik son ε dan kichik bo‘lsa va *x* ning bundan keyingi o‘zgarishida ham bu sondan kichikligicha qolsa, *a* o‘zgarmas son *x* ning limiti deyiladi.

Agar *a* o‘zgarmas son *x* ning limiti bo‘lsa *x* miqdor *a* ga intiladi deyiladi va bu $\lim\limits_{x\to a} x = a$ yoki $x \to a$ ko‘rinishda yoziladi. Yuqorida aytilgan limit tushunchasining geometrik talqini quyidagidan iborat. Agar o‘zgaruvchi *x* ning *a* o‘zgarmas son limit nuqtasi bo‘lsa, bunda oldindan berilgan markazi *a* va radiusi ε ga teng, *x* ning shunday qiymati topiladiki bu qiymatlar hammasi shu *a* nuqtaning ε atrofida yotadi.



Endi bir necha masalalarni ko‘ramiz.

1 - misol. Aytaylik ushbu o‘zgaruvchi x

$$x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{2}{3}; \quad x_3 = \frac{3}{4}; \quad x_n = \frac{n}{n+1};...$$

qiymatlari qabul qilinganda uning limiti $a = 1$ bo‘lishini ko‘rsating.

Yechish. Haqiqatdan modullar ayirmasidan

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$$

ihtiyoriy musbat ε sonini olamiz. Bunda $|x_n - 1| < \varepsilon$ bajariladi agarda $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ va $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ bo‘lganda.

Agar N biror natural sondan iborat bo‘lib shu shartni qanoatlantirsa $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ va $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$.

U holda hamma $n \geq N$ lar uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli bo‘ladi:

$$|x_n - 1| = \frac{n}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$

Bu tengsizlik shuni ko‘rsatadiki yuqoridagi x o‘zgaruvchining limit qiymati 1 ga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

2 - misol. O‘zgaruvchi x qiyidagi qiymatlarni qabul qilganda

$$x_1 = 2\,;\ x_2 = 1\frac{1}{2};\ x_3 = 1\frac{1}{n};\ ...x_n = 1\frac{1}{n}...$$

uning limiti $a = 1$ bo‘lishini ko‘rsating.

Yechish. Haqiqatdan, agar

$$|x_n - 1| = \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right| = \frac{1}{n}$$

Demak ihtiyoriy musbat ε soni uchun n nomerdan boshlab $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ yoki $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

bo‘lib $|x_n - 1| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Demak, yuqoridagi x o‘zgaruvchining limiti 1 ga tengligini ko‘rsatadi.

<u>2</u> <u>-ta’rif.</u> Agar x o‘zgaruvchi miqdor o‘zini o‘zgarish jarayonida avvaldan berilgan har qanday musbat son M dan katta bo‘lsa va bundan keyingi o‘zgarishda ham o‘sha sondan kattaligicha qolsa x cheksiz katta miqdor deyiladi, ya’ni $|x| > M$.

<u>3</u> -misol. O‘zgaruvchi x quyidagi qiymatlarni qabul qilsin.

$$x_1 = -2; \quad x_2 = 4; \quad x_3 = -8; \quad x_n = (-2)^n, \ \ldots.,$$

Bu holda x cheksiz katta miqdor deyiladi, chunki $n > N = [log_2 M]$ bo‘lganda $|(-2)^n| > M$ bo‘ladi, bu yerda $[x]$simvol x ning butunqismini bildiradi.

II. Faraz qilamiz $X = \{x\}$haqiqiy sonlar to‘plami berilgan bo‘lsin, a nuqta uning limit nuqtasi va shu to‘plamda $y = f(x)$ funksiya aniqlangan deb ko‘ramiz.

<u>1 -ta’rif.</u> (Geyne ta’rifi) Agar X to‘plamning nuqtalaridan tuzilgan a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}(x_n \neq a, n=1, \ 2, \ldots)$ ketma-ketlik olinganda ham mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b chekli (chekli yoki cheksiz) limitga intilsa, shu b ga $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi (yoki $x \to a$ dagi) limiti deb aytiladi va uni $lim\, f(x) = b$ yoki $x \to a$da $f(x) \to b$ kabi belgilanadi.

1 - misol. Ushbu $f(x) = x^5$ funksiyaning $x \to 2$ dagi limiti 32 ga teng ekanligini ko‘rsating.

Yechish. 2 ga intiluvchi ihtiyoriy $\{X_n\}\{x_n \neq 2, n = 1, 2, \ \ldots,\}$ ketma-ketlikni olamiz. Mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik quyidagi $\{f(\mathrm{x_n})\} = \{x^s{}_n\}$ ko‘rinishda bo‘ladi. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarustidagi arifmetik amallarga binoan

$$\lim_{x_n \to 2} f(x_n) = \lim_{x_n \to 2} x_n^5 = 2^5 = 32$$

Demak, ta’rifga ko‘ra

$$\lim_{x_n \to 2} f(x_n) = 32$$

2 - misol. Ushbu $f(x)=Cos1/x \quad (x\neq 0)$ funksiyaning $x\to 0$ da limitga ega emasligini ko'rsating.

Yechish. 0 ga intiluvchi ikki turli

$$\{x_n'\}=\left\{\frac{2}{(4n+1)\pi}\right\}, \quad \{x_n''\}=\left\{\frac{1}{2n\pi}\right\}$$

ketma-ketlikni olaylik, u holda

$$f(x_n')=\cos\frac{(4n+1)\pi}{2}=0$$

$$f(x_n'')=\cos 2n\pi=1$$

bo'lib $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n')=0$, bo'ladi. Bu esa $\lim\limits_{X\to\infty} f(x_n'')=1$ funksiyaning $x=0$ nuqtada limiti mavjud emasligini ko'rsatadi.

<u>**2**</u> <u>**-ta'rif.**</u> (Koshi ta'rifi). Agar $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topilsaki, argument x ning $0<|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda b son $f(x)$ **funksiyaning** a **nuqtadagi (** $x\to a$ **dagi) limiti deb** ataladi.

<u>**3**</u> **- misol.** Ushbu $f(x)=\sin x$ funksiyaning $x=\pi/2$ nuqtadagi limiti 1 ga teng ekanligini ko'rsating.

Yechish. Demak $\forall\varepsilon>0$ songa ko'ra δ ni $\delta=\varepsilon$ deb olsak u holda $|x-\pi/2|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun

$$|\sin x-1|=\left|\sin-\sin\frac{\pi}{2}\right|=\left|2\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right|\leq\left|2\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right|\leq\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\delta=\varepsilon$$

munosabat beriladi. Bundan, ta'rifga ko'ra $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin x=1$ ekani kelib chiqadi. Faraz qilamiz $x\{x_n\}$ haqiqiy sonlar to'plami berilgan a nuqta uning o'ng (chap) limit nuqtasi va shu to'plamda $y=f(x)$funksiyasi aniqlangan bo'lsin.

<u>**3**</u> <u>**-ta'rif.**</u> (Geyne ta'rifi). Agar x to'plamining nuqtalaridan tuzilgan va bir hadi $a$dan katta (kichik) bo'lib $a$ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik

olinganda ham mos $\{f(x_n)\}$ketma-ketlik hamma vaqt yagona b ga intilsa shu b son $f(x)$ **funksiyaning** a **nuqtadagi o‘ng (chap) limiti** deb aytiladi.

4 -ta’rif. (Koshi ta’tifi) Agar $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)$ son topilsaki, argument x ning $a<x<a<\delta(a-\delta<x<a)$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ qiymatlari uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ **funksiyaning** a **nuqtadagi o‘ng** (chap) **limiti** deb aytiladi. Funksiyaning o‘ng (chap) limitlari quyidagicha belgilanadi.

$$\lim_{x_n\to a+0} f(x)=b \text{ yoki } f(a+0)=b$$

$$\lim_{x_n\to a-0} f(x)=b \text{ yoki } f(a-0)=b$$

4 - misol. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases} \sin x, & \\ \dfrac{\cos x}{2}, & \end{cases} \quad \text{agar} \quad \begin{matrix} x>0 \\ \\ x<0 \end{matrix} \quad \text{bo‘lsa}$$

Funksiyaning $x=0$ nuqtadagi o‘ng va chap limitlarini toping.

Yechish. Yuqoridagi funksiya limiti ta’rifidan foydalanib shularni hosil qilamiz:

$$\lim_{x_n\to+0} f(x)=\lim_{x_n\to+0}\sin x=0$$

$$\lim_{x_n\to+0} f(x)=\lim_{x_n\to+0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

III. Agar funksiyaning argumenti x cheksizlikka va aniq ishorali cheksizlikka intilsa, funksiyaning limit qiymatini quyidagicha ta’riflaymiz.

1 -ta’rif. Agar argument qiymatlardan tuzilgan ketma-ketlik uchun funksiya qiymatlaridan tuzilgan mos ketma-ketlik b ga yaqinlashsa, u holda b **son** $x\to\infty$ **da** $f(x)$ **funksiyaning limit qiymati** (yoki $x\to\infty$ da funksiya limiti) deyiladi.

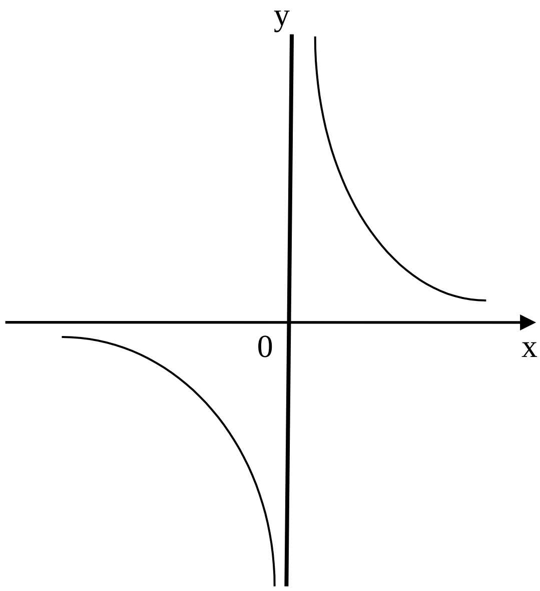
$x\to\infty$ da funksiyaning limit qiymatini belgilash uchun quyidagi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ simvolikadan foydalaniladi.

2 - ta’rif. Agar argument qiymatlaridan tuzilgan va elementlari biror nomerdan boshlab, musbat (manfiy) bo‘lgan ihtiyoriy cheksiz katta ketma-ketlik uchun funksiya qiymatlaridan tuzilgan ketma-ketlik b ga yaqinlashsa, u holda b

son argument x musbat (manfiy) cheksizlikka intilsa $f(x)$ **funksiyaning limit qiymati** deyiladi. Bu holda simvolik brlgilashlarni quyidagicha yozamiz.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b\,, \qquad \left(\lim_{x\to\infty} f(x)=b\right)$$

1 - misol. Ushbu $f(x)=1/x$ funksiyani ko‘ramiz bu funksiya $x\to\infty$ da 0 ga teng bo‘lgan limit qiymatiga ega. Haqiqatdan ham, agar $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$ argument qiymatlaridan tuzilgan cheksiz katta ketma-ketlik bo‘lsa



1- rasm

U holda $1/x_1, 1/x_2, \ldots 1/x_n$ ketma-ketlik cheksiz kichik va shuning uchun uning limiti 0 ga teng bo‘ladi, ya’ni (1 rasm)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

<u>**3 - ta’rif.**</u> $y=f(x)$ funksiyasi belgilangan biror to‘plamda **chegaralangan** deyiladi, agarda shunday musbat son $(M>0)$ mavjud bo‘lsaki, shu to‘plamga tegishli x argumentning hamma qiymatlari uchun $|f(x)|\le M$ o‘rinli bo‘lsa, aks holda funksiya **chegaralanmagan** deyiladi. Shunday to‘plam sifatida oraliq yoki segment va butun sonlar o‘qini olish mumkin.

2 - misol. $y=\sin x$ va $y=\cos x$ funksiyalari $-\infty<x<+\infty$ da aniqlangan bo‘lib, x ning ihtiyoriy qiymatida quyidsagilar o‘rinli bo‘ladi.

$|\sin x| \le 1$ va $|\cos x| \le 1$

1 - teorema. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ bo‘lsa va bunda b chekli sondan iborat bo‘lsa u holda $f(x)$ funksiyasi $x \to a$ da chegaralangandir.

Isboti. Quyidagi tenglikdan $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ ihtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday δ topiladiki $a-\delta < x < a+\delta$ uchun quyidagi tengsizlik bajariladi.

$|f(x)-b| < \varepsilon$ yoki $||f(x)|-|b|| < \varepsilon$

Buning bajarilishi $f(x)$ funksiyaning $x \to a$ da chegaralanganligini ko‘rsatadi.

2 – teorema. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b \neq 0$ bo‘lsa, u holda $y=\dfrac{1}{f(x)}$ funksiya $x \to a$ da chegaralangan bo‘ladi.

Isboti teorema shartiga ko‘ra ihtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $x=0$ nuqtaning atrofida

$$|f(x)-b| < \varepsilon \text{ yoki } ||f(x)|-|b|| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < |f(x)|-|b| < \varepsilon \text{ yoki } |b|-\varepsilon < |f(x)| < |b| + \varepsilon$$

va oxirgi tengsizliklardan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\frac{1}{|b|-\varepsilon} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{|b|+\varepsilon};$$

Agar $\varepsilon = \dfrac{1}{10}|b|$ desak shuni hosil qilamiz:

$$\frac{10}{9|b|} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{10}{11|b|}$$

va oxirginatija shuni ko‘rsatadiki $y=\dfrac{1}{f(x)}$ funksiyani $x \to a$ da chegaralangandir.

IV. 1 - ta’rif. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada ($x \to a$ da) **cheksiz kichik miqdor** deyiladi. Yozilgan ta’rifni quyidagicha aytish mumkin. Ihtiyoriy oldindan berilgan musbat $\varepsilon\,(\varepsilon>0)$ uchun, shunday $\delta > 0$ topiladiki, hamma x lar $|x-a| < \delta$ da $|f(x)| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

Misol sifatida quyidagilarni ko‘rish mumkin.

$y = x^2$, agarda $x \to 0$ da

$y = x - 1$, agarda $x \to 1$ da

$y = x/x;$ agarda $x \to \infty$ da

$y = 2^x$, agarda $x \to -\infty$ da

Cheksiz kichik funksiyalar quyidagi hossalarga ega.

1. Ikkita cheksiz kichik funksiyaning yig‘indisi yoki ayirmasi yana kichik funksiya bo‘ladi.

2. Cheksiz kichik funksiyaning chegaralangan funksiyaga (xususan o‘xgarmas funksiya) ko‘paytmasi cheksiz kichik funksiyadir.

V. 1 - teorema. O‘zgarmas funksiyaning limiti o‘ziga teng. $\lim c = c \left(c - const\right)$.

2 - teorema. Limitga ega bo‘lgan chekli sondagi o‘zgaruvchi miqdorlaralgebraik yig‘ndisining limiti, bu o‘zgaruvchilar limitining yig‘indisiga teng.

$$\lim\left(U_1 + U_2 + ... + U_k\right) = \lim U_1 + \lim U_2 + ... + \lim U_k$$

3 - teorema. Limitga ega bo‘lgan chekli sondagi o‘xgaruvchi miqdorlar ko‘paytmasining limiti bu o‘zgaruvchilar limitlarini ko‘paytmasiga teng

$$\lim\left(U_1 \cdot U_2 \cdot ... \cdot U_k\right) = \lim U_1 \cdot \lim U_2 \cdot ... \cdot \lim U_k$$

4 - teorema. Limitga ega bo‘lgan ikki o‘zgaruvchi miqdor bo‘linmasining limiti, agar bo‘luvchining limiti 0 ga teng bo‘lmasa, bo‘linuvchi va bo‘luvchi limitlarining nisbatiga teng,

ya’ni $\lim \frac{U}{V} = \frac{\lim U}{\lim V}; \quad \left(\lim V \neq 0\right)$

Isboti. Agar $\lim U = a,$ $\lim V = b \neq 0$ bo‘lsa bundan $U = a + \alpha,$ $V = b + \beta$ bo‘ladi α, β cheksiz kichik miqdorligidan

$$\frac{U}{V} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b\left(b+\beta\right)};$$

yoki $\frac{U}{V} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{\alpha b - \beta a}{b\left(b+\beta\right)};$ (*)

(*) dan a/b o‘zgarmasligidan $\frac{\alpha b-\beta a}{b(b+\beta)}$ cheksiz kichik miqdorligidan $\alpha b-\beta a$ -ham cheksiz kichik miqdor bo‘ladi. Kasrni maxraji $b(b+\beta)$ ni limiti $b^2\neq 0$ ga teng, demak $lim\frac{U}{V}=\frac{a}{b}\frac{lim\, U}{lim\, V}$;

VI. **<u>1 - teorema.</u>** $\frac{\sin x}{x}$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi limit qiymati mavjud bo‘lib, u birga teng

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{1}$$

Isboti. Agar $0<x<\pi/2$ uchun $0<\sin x<tgx$ tenglikning o‘rinliligidan, tengsizlikni hamma had $\sin x$ ga teng bo‘lib

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \quad \text{yoki} \quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

Oxirgi tengsizliklar x ning $-\pi/2<x<0$ shartini qanoatlantiruvchi qiymatlari uchun ham o‘rinlidir. Bunga ishonch hosil qilish uchun $\cos(x)=\cos(-x)$ va $\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(-x)}{(-x)}$ ekanini ko‘zda tutish etarli. $Cos\, x$ uzluksiz funksiya bo‘lgani uchun $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ bo‘ladi. Shunday qilib $\cos x$, 1 va $\frac{\sin x}{x}$ funksiyalar uchun $x=0$ nuqtaning biror δ atrofida bir xil limit qiymatiga ega bo‘ladi.

Demak bunda

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

Teorema isbotlandi.

V. Quyidagi o‘zgaruvchi miqdorni ko‘ramiz. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bunda n o‘suvchi o‘zgaruvchi miqdor va n =1, 2, 3…

1 - teorema. O‘zgaruvchi miqdor $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $n \to \infty$ intilganda limit qiymati mavjud bo‘lib u 2 va 3 son orasida yotadi.

Isbot. Nyuton binomi formulasidan quyidagilarni yozish mumkin.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot,\ldots,n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

(1)

(1) ifodada algebraic almashtirishlardan so‘ng

$$\left(1+\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^2 = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

(2)(2)

Oxirgi tenglik n ning o‘sib borishi o‘zgaruvchi miqdor $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ni o‘sib borishini ko‘rsatadi. Haqiqatdan, agar n ni $n+1$ga almashtirsak $\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ va h.k.

Bundan $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ni chegaralanganligini ko‘rsatamiz. Afar shuni e’tiborga olsak $\left(1-\frac{1}{n}\right) < 1;$ $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) < 1$ va h. k. (2) ifodadan yozish mumkin

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$$

Bundan

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2};\qquad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3};\qquad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots n}<\frac{1}{2^{n-1}};$$

Shu tengsizlikni yozish mumkin $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$ va o‘ng tarafidagi ifoda geometrik progressiyani tashkil qiladi va $q=1/2$ $a=1$ progressiyani birinchi hadidan iborat.

Shuning uchun

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right]=1+\frac{a-aq^n}{1-q}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]<3$$

Endi hamma n lar uchun

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$$

Hosil qilamiz.

Yuqoridagi (2) dan $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 2$

shunday qilib quyidagi tengsizlikka ega bo‘lamiz

$$2\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$$

(3)(3)

Demak (3) o‘zgaruvchi miqdor $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ning chegaralanganligini ko‘rsatadi.

Agar o‘zgaruvchi miqdor $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ - o‘suvchi va chegaralangan bo‘lsa bu miqdor limit qiymata ega bo‘ladi va bu limitni e deb belgilaymiz. (3) tengsizlikni shunday yozish mumkin: $2\leq e\leq 3$

Bu esa teoremani isbotini beradi.

Bunda e irratsionalson va uning qiymati $e=2.7182818284...$ ga teng

2 - teorema. $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ funksiyaning $x\to\infty$ da limit qiymati mavjud va u e soniga teng.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=e \qquad (4)$$

Isboti 1. Aytaylik $x\to+\infty$, va quyidagi shu tengsizlik o‘rinli bo‘lsa $n\le x<+1$

Yozish mumkin $\frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}>\frac{1}{n+1}$.

$$1+\frac{1}{n}\ge 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

Agar $x\to\infty$ da $n\to\infty$ intiladi. Endi quyidagi limitlarni topamiz:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e$$

Demak shularga asosan

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

(5)(5)

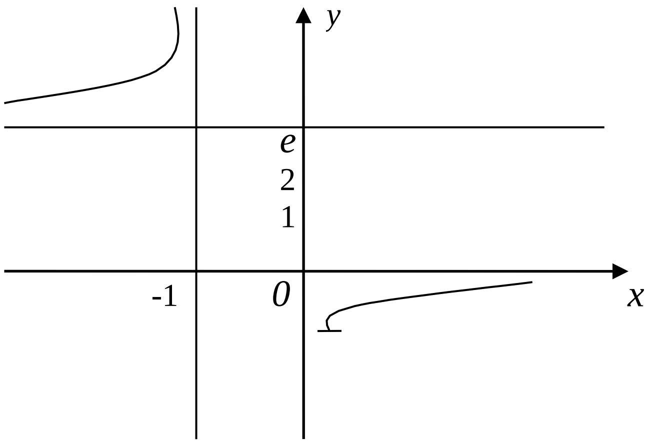
2. Aytaylik, endi $x\to-\infty$. Agar yangi o‘zgaruvchi $t=-(x+1)$ olsak yoki $x=-(t+1)$ desak $t\to+\infty$ da $t\to-\infty$ bo‘ladi.

Yozish mumkin:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=e\cdot 1=e$$

Oxirgi ifoda teoremani isbotini beradi. Endi $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ funksiyani grafigini ko‘rsatamiz.



Agar (5) da $1/x=\alpha$ bo‘lsa $x\to\infty$ da $\alpha\to 0$ $(\alpha\neq 0)$ va shuni hosil qilamiz

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e$$

Misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$

Yechish. Quyidagi almashtirishlarni bajaramiz va (5) da yozamiz

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}3}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=e^{3}$$

Agar $y=\log_e x$ funksiya uchun $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ gat eng bo‘lsa bu funksiya uchun $y=\ln x$ belgini ishlatamiz. Demak, asosi e bo‘lgan logarifmlar natural logarifmlar deb ataladi, ular uchun $\ln x$ belgi ishlatiladi. O‘nli va natural logarifmlar quyidagi munosabatlar bilan bog‘langan

$$\lg N=M\ln N \tag{6}$$

$$\ln N=1/M\cdot\lg N$$

(7)

Bu yerda M natural logarifmlardan o‘nli logarifmlarga o‘tish moduli.

$$\lg N=0.4343\ln N \tag{8}$$

$$ln\,N = 2.3031 lg\,N$$

(9)

Misollar. Jadvaldan foydalanmasdan hisoblang.

1) $ln100 = ln10^2 = 2ln10 = 2\cdot 2{,}303 = 4.606$

2) $ln\,0{,}001 = ln10^{-3} = 3ln10 = 3\cdot 2{,}303 = -6{,}909$

3) $ln\sqrt{10} = \frac{1}{2}ln10 = \frac{1}{2}\cdot 2{,}303 = 1{,}151$

VI. $X\subset R$ to‘plamda $f(x)$ aniqlangan bo‘lib $x_0\,(x_0\in R)$ to‘plamining limit nuqtasi bo‘lsin.

1 -ta’rif. (Koshi ta’rifi). $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=f(\varepsilon)>0$ son topilsaki, funksiya argumenti $x\in X$ ning $|x-x_0|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ tengsizlik berilsa $f(x)$ **funksiya** x_0 **nuqtada uzluksiz** deyiladi.

1 - misol. Ushbu $f(x)=\sqrt{x+11}$ funksiyaning $x_0=5$ nuqtada uzluksiz ekanini ko‘rsating.

Yechish. $\forall\varepsilon>0$ son olib, bu ε songa ko‘ra $\delta>0$ soni $\delta=4\varepsilon$ bo‘lsin deb qaralsa, u holda $|x-5|<\delta$ bo‘lganda

$$|f(x)-f(5)|=\left|\sqrt{x+11}-4\right|=\frac{|x-5|}{\left|\sqrt{x+11}-4\right|}<\frac{|x-5|}{4}<\frac{\delta}{4}=\varepsilon$$

bu esa ko‘rilayotgan funksiyaning $x_0=5$ nuqtada uzluksiz ekanini bildiradi.

2 - ta’rif. (Geyne ta’rifi) Agar X to‘plamning elementlaridan tuzilgan va x_0 ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham funksiya qiymatlaridan tuzilgan mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona $f(x_n)$ ga intilsa, $f(x)$ **funksiya** x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

Agar $\lim\limits_{X\to X_0} f(x)=f(x_0)$ musbat o‘rinli bo‘lsa, ushbu

$\lim\limits_{X\to X_0}[f(x)=f(x_0)]=0$ munosabat ham o‘rinli bo‘ladi. Odatda $x-x_0$ ayirma argument orttirmasi $f(x)-f(x_0)$ esa funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi. Ular mos ravishda Δx va Δy $(\Delta f(x_0))$ kabi belgilanadi: yani:

$\Delta x = x - x_0$,$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$.

Demak $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$ natijada

$\lim\limits_{X\to X_0} f(x) = f(x_0)$ munosabat $\lim\limits_{\Delta X\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta X\to 0}\Delta f(x_0) = 0$ ko‘rinishiga ega bo‘ladi.

Shunday qilib $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi bu nuqtada argumentning cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelishi sifatida ham ta’riflanishi mumkin.

2 - misol. Ushbu $f(x)=cos\, x$ funksiyaning $\forall x0\in R$ nuqtada uzluksiz bo‘lishini ko‘rsating.

Yechish. $\forall x0\in R$ nuqtaniolib unga Δx orttirmasi beraylik. Natijada $f(x)=cos\, x$ ham ushbu $\Delta y = cos(x_0+\Delta x) - cos\, x_0$ orttirmaga ega bo‘lib, va $-\pi<\Delta x<\pi$ bo‘lganda

$$|\Delta y| = |cos(x_0+\Delta x) - cos\, x_0| = \left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 2\cdot\frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|$$

musbatga ega bo‘lamiz. Bundan esa $\Delta x\to 0$ da $\Delta y\to 0$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Aytaylik $y=f(x)$ funksiya $x\subset R$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, $x_0\,(x_0\in X)$ to‘plamning (o‘ng va chap) limit nuqtasi bo‘lsin. Bunda $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiya uchun quyidagi uch hodan bittasigina bajariladi:

1) chekli $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ chap va o‘ng limitlar mavjud va

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0) \qquad (10)$$

tenglik o‘rinli. Bu holda $f(x)$ funksiya $x-x_0$ da uzluksiz bo‘ladi.

2) $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ lar mavjud, lekin (10) tengliklar bajarilmaydi u holda $f(x)\to X = X_0$ nuqtada **bir tur uzilish**ga ega deyiladi.

3) $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ larning birortasi cheksiz yoki mavjud emas. Bu holda x_0 nuqtada **ikki tur uzilishi**ga ega deyiladi.

4) $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ **bo‘lsa bunday uzilish, bartaraf qilish mumkin bo‘lgan uzilish** detiladi.

3 - misol. Ushbu $f(x)=[x]$ funksiyaning $x_0=2$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega ekanligini ko‘rsating.

Yechish. Demak

$$\lim_{x\to 2-0}[X]=1, \qquad \lim_{x\to 2+0}[x]=2$$

Bundan esa berilgan funksiyaning $x_0=2$ nuqtada, birinchi tur uzilishga ega ekanligi kelib chiqadi.

IX. Berilgan $f(x)$ va $q(x)$ funksiyalar X to‘plamda aniqlangan bo‘lib, $x_0\in X$ nuqtada X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin.

<u>1 - teorema.</u> Agar $f(x)$ va $q(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa u holda

$$f(x)\pm q(x),\ f(x)\cdot q(x),$$

$$\frac{f(x)}{q(x)}:(q(x)\neq 0),\ \forall x\in \mathrm{X}$$

funksiyalar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

1 - misol. Ushbu $f(x)=3x^3+sin^2 x$ funksiyaning $x=R$ nuqtada uzluksizligini ko‘rsating.

Yechish. $\varphi(x)=x,\quad q(x)=sinx$ funksiyalar R uzluksiz. Bundan $f(x)$ funksiyani $f(x)=3\cdot x\cdot x\cdot x+sinx\cdot sinx$ ko‘rinishda yozamiz, u holda uzluksiz funksiyalar ustidagi arifmetik amallarga ko‘ra $f(x)$ funksiyaning R da uzluksizligi kelib chiqadi.

Uzluksiz funksiyalarni glibal hossalari:

1) x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofida funksiya chegaralangan bo‘ladi.

2) Agar $f(x_0)\neq 0$ bo‘lsa, x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofida $f(x)$ o‘z ishorasini saqlaydi.

Aytaylik $y = f(x)$ funksiya X to‘plamda $z = \varphi(y)$ funksiya Y to‘plamda aniqlangan bo‘lib, ular yordamida $z = \varphi(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo‘lsin.

2 -teorema. (Murakkab funksiya uzluksizligi haqida). Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $z=\varphi(y)$ funksiya x_0 ga mos kelgan $f(x_0)$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa $z=\varphi(f(x))$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Endi uzluksiz funksiyalarning global hossalarini teorema shakliga keltiramiz.

3 - teorema. (Bolsano-Koshining 1- teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ sigmentda aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, sigmentning *a* va *b* nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarga ega bo‘lsa, u holda shunday $c(a<c<b)$ nuqta topiladiki, u nuqtada funksiya 0 ga aylanadi: $f(c)=0$.

4 - teorema. (Bolsano-Koshining 2- teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ sigmentda aniqlangan va uzluksiz bo‘lib uning *a* va *b* nuqtalarida $f(a)=A,\ f(b)=B$ qiymatlariga ega va $A \neq B$ bo‘lsa, A va B orasida har qanday C son olinganda ham *a* va *b* orasida shunday *c* nuqta topiladiki $f(c)=C$ bo‘ladi.

5 -teorema. (Veyershtrassning 1- teoremasi) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ sigmentda aniqlangan va uzluksiz bo‘lsa, funksiya shu sigmentda o‘zining aniq yuqori hamda quyi chrgaralariga erishadi.

2 - misol. Ushbu $f(x) = \dfrac{|x| - x}{x^2}$ funksiyani uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Ma’lumki

$$|x| = \begin{cases} x & \text{agar } x \geq 0 \\ -x & \text{agar } x < 0 \end{cases} \text{ bo‘lsa}$$

bundan foydalanib topamiz

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x > 0 \\ -\dfrac{2}{x} & x < 0 \end{cases} \text{ bo‘lsa}$$

$x=0$ nuqtada funksiya aniqlanmagan bo‘lib va $\lim\limits_{x\to+0}(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+0}(x)=+\infty$ munosabatlar o‘rinlidir, bu esa ta’rifga ko‘ra $x=0$ nuqta $f(x)$ funksiya uchun 2 tur uzilish nuqtasi ekanligini bildiradi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

Funksiyaning limitini hisoblang.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$; $j:0$
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-x-6}$; $j:0{,}2$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{3x^2-2x+7}$; $j:\dfrac{1}{3}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x+1}$; $j:\infty$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+6}{x^3+1}$; $j:0$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+6x}{1-3x^3}$ $j:-\dfrac{5}{3}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ $j:1$
8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x^3-8}$; $j:0$
9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$; $j:\dfrac{1}{3}$
10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$; $j:2\dfrac{1}{24}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin10x}{x}$ $j:10$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\frac{x}{4}}{x}$; $j:0.25$
13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$; $j:1$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos2x}{xsinx}$; $\quad j: 2$

15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cosx}{x^2}$; $\quad j: 0.5$

16. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{4}{x^2 - 1}\right)$; $\quad j: 0.5$

17. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x\right)$ $\quad j: 1.5$

18. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{4}{x^2 - 4}\right)$; $\quad j: 0.25$

19. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)$; $\quad j: 0$

20. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{sinx}{cos^2 x} - tg^2 x\right)$; $\quad j: 0.5$

21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx - sinx}{sin^3 x}$; $\quad j: 0.5$

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin5x - sin3x}{sinx}$; $\quad j: 2$

24. $\lim\limits_{x \to 0} xctg2\alpha$; $\quad j: 0.5$

24. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (sinx)^{tg\alpha}$ $\quad j: 1$

25. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x + 2}{2x - 1}\right)^{x^2}$; $\quad j: 0$

26. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$; $\quad j: 1$

27. $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot (\ln(x + 1) - lnx)$; $\quad j: 1$

28. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{sin5x}$; $\quad j: 0.05$

29. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + xsinx - cos2x}{sin^2 x}$; $\quad j: 3$

30. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n + 2} - \dfrac{n}{2}\right)$; $\quad j: -0.5$

31. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x}$; $\quad j: 1.5$

32. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}$; $j: e^{-2}$

33. $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; $j: e^{2}$

34. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$; $j: e^{-1}$

35. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$; $j: e^{-2}$

Quyidagi funktsiyalarning uzluksizligini ko'rsating:

1. $y=f(x)=sinx.$
2. $y=f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$
3. $y=f(x)=x^2+1.$
4. $y=f(x)=|x|.$
5. $y=f(x)=\sqrt[3]{x}.$

Quyidagi funktsiyalarning uzilish nuqtalarini aniqlang va grafiklarini chizing:

6. $y=f(x)=\frac{1}{sinx}.$
7. $y=f(x)=\frac{|x+1|}{x+1}.$
8. $y=f(x)=x-[x]\,.([x]-\ x\,ning\ butun\ qismi).$
9. $y=f(x)=\frac{x}{cosx}.$
10. $y=f(x)=\frac{5}{x^3-x^2}.$

XULOSA

Funksiya uchun chap, o‘ng limit tushunchalari ham kiritiladi va ular orqali limitning mavjudlik sharti ifodalanadi. Funksiya limitini bevosita uning ta’rifi asosida hisoblash har doim ham oson kechmaydi va shu sababli funksiya limitini hisoblash qoidalari ishlab chiqilgan. Bunda cheksiz kichik miqdor tushunchasi va uning xossalari muhim ahamiyatga ega bo‘ladi. Bundan tashqari ayrim funksiyalarning limitini hisoblashda ajoyib limitlardan foydalanish mumkin.

Funksiyaning eng muhim xususiyatlaridan biri uning uzluksizligi bo‘lib hisoblanadi. Bunga sabab shuki, atrofimizdagi ko‘p jarayonlar uzluksiz ravishda davom etadi va ular uzluksiz funksiyalar orqali ifodalanadi. Funksiya uzluksizligi uning limiti orqali aniqlanadi. Oraliqda uzluksiz funksiyani grafigi uzluksiz, yaxlit chiziqdan iborat funksiya singari tasavvur etish mumkin. Barcha asosiy elementar funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohasida uzluksiz bo‘ladi. Kesmada uzluksiz funksiya shu kesmada o‘zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishadi.

Biror nuqtada uzluksiz bo‘lmagan funksiya shu nuqtada, bu nuqta esa uning uzilish nuqtasi deyiladi. Uzilish nuqtalari atrofida funksiya qanday qiymatlar qabul qilishiga qarab, ular tuzatib bo‘ladigan, I va II tur uzilish nuqtalariga ajratiladi.

Nazorat savollari.

1. O‘zgaruvchi miqdorning limiti. Cheksiz katta o‘zgaruvchi miqdor.
2. Funksiyaning limiti.
3. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti. Chegaralangan funksiya.
4. Cheksiz kichik miqdor va uning hossalari.
5. Limitlar haqidagi asosiy teoremalar.
6. Birinchi ajoyib limit.
7. Ikkinchi ajoyib limit.
8. Funksiyaning uzluksizligi.
9. Uzluksiz funksiyaning xossalari.

V. BOB. HOSILA VA DIFFERENSIAL

1-§. FUNKSIYA HOSILASI

Reja:

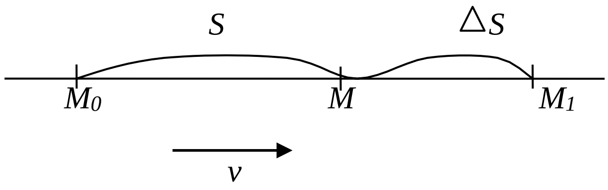
1. **Harakat tezligi.**
2. **Hosilaning ta’rifi.**
3. **Hosilaning giometrik ma’nosi.**
4. **Funksiyaning differensiallanuvchanligi.**
5. **Darajali fuksiyaning hosilasi.**
6. ***y=sinx, y=cosx* funksiyaning hosilalari.**
7. **O‘zgarmas miqdorning hosilasi.**
8. **Logarifmik funksiyaning hosilasi.**

Tayanch iboralar: hosila, funksiyaning differensiallanuvchanligi, hosilaning geometrik ma’nosi, hosilaning mexanik ma’nosi, urinma, *OX* o‘qini musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangensi.

I. Biror qattiq jismning to‘g‘ri chiziqli harakatini ko‘rib chiqaylik. Jismni o‘lchamini va shaklini e’tiborga olmay moddiy nuqta deb qarash mumkin. Harakat qiluvchi nuqtani uning boshlang‘ich M_0 holatidan hisoblanadigan S masofa t vaqtiga bog‘liq bo‘ladi ya’ni S masofa t ning funksiyasi bo‘ladi.

$$S=f(t) \tag{1}$$

Faraz qilaylik, harakat qiluvchi M nuqta t vaqtning biror momentida M_0 boshlang‘ich harakatda s masofada bo‘lsin, undan keyingi Δt momenti bo‘lib M_1 holatni olgan bo‘lsin.



1- rasm.

Shunday qilib, Δt vaqt oralig'ida S masofa ΔS miqdorga o‘zgaradi. Bu holda Δt vaqt oralig‘ida S miqdor ΔS **ortirmani oldi** deyiladi.

Quyidagi $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ nisbat nuqta harakatining Δt vaqtidagi o‘rtacha texlikni ifodalaydi.

$$v_{o'rta} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (2)$$

Ammo bu isbot moddiy nuqtaning har bir momentidagi tezlikni ifodalamaydi. Buning uchun Δt ni kichik vaqt oralig‘ini olish kerak. O‘rtacha tezlikning $\Delta t \to 0$ dagi limiti moddiy nuqtaning berilgan momentidagi tezligini ifodalaydi, ya’ni

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (3)$$

Shunday qilib, yo‘l orttirmasi ΔS ning vaqt orttirmasi Δt ga nisbati vaqt orttirmasi 0 ga intilgandagi limiti **harakatning berilgan momentdagi tezligi** deyiladi.

Yuqoridagi (3) tezlikni boshqacha shaklda yozsh mumkin. Masofani orttirmasi $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(x)$ bo‘lgani uchun

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \qquad (3^1)$$

Bu esa notekis harakatning tezligi bo‘ladi. Demak, notekis harakat tezligi tushunchasi limit tushunchasi bilan bevosita bog‘liqdir.

Misol. Yo‘lning vaqtga bog‘lanishi.

$$s=\frac{gt^2}{2}$$

Formula bilan ifodalansa, tekis tezlanuvchan harakatning ihtiyoriy *t* momentidagi va *t*=2 sekund momentidagi tezligi topilsin. (bu yerda *g*=9,8.*m*/*sek* erkin tutish texligi)

Yechish. Argument *t* ga orttirma beramiz $t+\Delta t$ u holda masofa

$$s+\Delta s=\frac{g(t+\Delta t)^2}{2}=\frac{g\left(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2\right)}{2}$$

Orttirmaga ega bo'ladi. Bu yerda Δs ni topamiz:

$$\Delta s=\frac{g\left(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2\right)}{2}-\frac{gt^2}{2}=gt\Delta t+\frac{g\Delta t^2}{2}$$

Endi $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbatini tuzamiz:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{gt\Delta t+\frac{g\Delta t^2}{2}}{\Delta t}$$

Limitni hisoblaymiz:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{g\Delta t}{2}\right)=gt$$

Shunday qilib, *t* vaqtning istalgan momentidagi tezligi *v*=*g t* ga teng. *t*=2 *sek* bo'lsa $(v)|_{t=2}=g\cdot 2=9{,}8\cdot 2=19{,}6m/sek$

II. Berilgan:

$$y=f(x) \qquad (1)$$

funksiya biror *x* nuqtada va uning atrofida uzluksiz aniqlangan bo'lsin. Argument *x* ga biror Δx (musbat yoki manfiy) orttirma beramiz, u holda *y* unksiya Δy orttirmaga ega bo'ladi. Demak $x+\Delta x$ da $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ ga ega bo'lamiz.

Funksiya orttirmasi Δy ni topamiz:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \qquad (2)$$

Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini yozamiz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (3)$$

Bu nisbatning $\Delta x \to 0$ *dagi* limitini hisoblaymiz. Agarda bu lilit mavjud bo‘lsa u berilgan **funksiyaning hosilasi** deyiladi va $f'(x)$ ko‘rinishida belgilanadi. Shunday qilib

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

yoki

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (4)$$

Demak $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi deb, funksiya orttirmasini argument orttirmasiga nisbati argument orttirmasi 0 ga intilgandagi limitiga aytiladi.

Ta’rifdan ko‘rinadiki, x ning har bir qiymatiga $f'(x)$ ning ma’lum qiymati mos keladi, ya’ni hosila x ning funksiyasi ekanligi kelib chiqadi.

Berilgan funksiyadan hosila olish shu funksiyani diferensiallash deyiladi. Hosila quyidagi y', $\frac{dy}{dx}$, ko‘rinishlarda ham belgilanadi. Hosilaning berilgan nuqtadagi qiymatlari esa $f'(a)$ yoki $y'\big|_{x=a}$ ko‘rinishda belgilanadi.

Misol. $y=\sqrt{x}$ funksiya berilgan. Uning

1) Ihtiyoriy x nuqtadagi;

2) x=4 nuqtadagi hosilasi topilsin.

Yechish. Argument x ga orttirma beramiz $x+\Delta x$ u holda $y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$ ga ega bo‘lamiz. Bu yerdan

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\Delta x+x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

funksiya orttirmasiga ega bo‘lamiz. Δy ni Δx ga nisbatini yozamiz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

limitga o‘tamiz

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

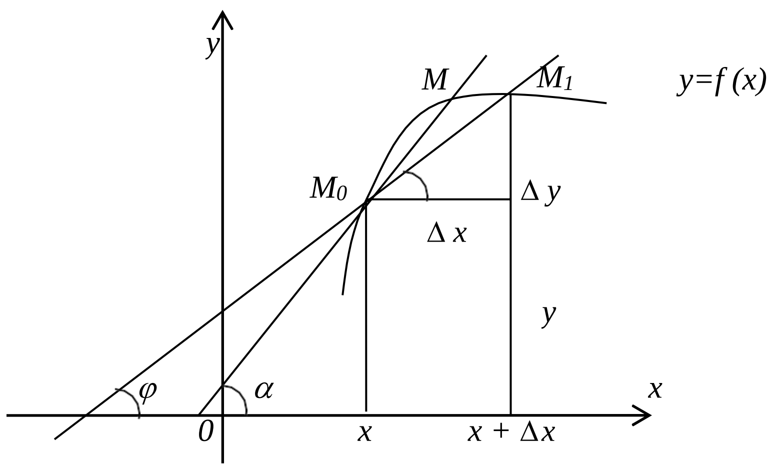
natijada funksiyaning ihtiyoriy nuqtadagi hosilasi quyidagicha bo‘ladi:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Funksiya hosilasining x=4 nuqtadagi qiymati

$y'|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ gat eng bo‘ladi.

III. Bizga berilgan $y = f(x)$ funksiya x nuqta va uning atrofida aniqlangan bo‘lsin. Argument x ning biror qiymatida $y = f(x)$ funksiya aniq qiymatga ega bo‘ladi, biz uni M_0 (x,y) deb belgilaylik. Argumentga Δx orttirma beramiz va natijada funksiyaning $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ orttirilgan qiymati to‘g‘ri keladi. Bu nuqtani $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ deb belgilaymiz va M_0 kesuvchi o‘tkazib uning OX o‘qining musbat yo‘nalishi bilan tashkil etgan burchagini φ bilan belgilaymiz.



2-rasm.

Endi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni qaraymiz. 2-rasmdan ko‘rinadiki

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\varphi$$

(1)

Agar $\Delta x \to 0$ da, u holda M_1 nuqta egri chiziq bo‘yicha harakatlanib, M_0 nuqtaga yaqinlasha boradi. $M_0\,M_1$ kesuvchi ham $\Delta x \to 0$ da o‘z holatini o‘zgartira boradi., hususan φ burchak ham o‘zgaradi va natijada φ burchak α burchakka intiladi. $M_0 M_1$ kesuvchi esa M_0 nuqtadan o‘tuvchi urinma holatiga intiladi. Urinmaning burchak koeffinsentiquyidagicha topiladi.

$$tg\,\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x) \qquad (2)$$

Demak, $f'(x) = tg\,\alpha$

ya’ni argument x ning berilgan qiymatida $f^1(x)$ hosilaning qiymati $f(x)$ funksiyaning grafigiga uning $M_0(x,y)$ nuqtasidagi urinmaning OX o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchak tangensiga teng.

IV. <u>Ta’rif.</u> Agar $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo‘ladi,(ya’ni $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ mavjud bo‘lsa) u holda berilgan $x = x_0$ qiymatda **funksiya differensiallanuvchi** deyiladi.

Agar funksiya biror $[a, b]$ $((a,b))$ kesma (interval) ning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda kesma (interval)da **differensiallanuvchi** deyiladi.

<u>Tiorema.</u> Agar $y = f(x)$ funksiya biror $x = x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda funksiya shu nuqtada uzluksizdir.

Haqiqatdan, agar

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

bo‘ls a,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \gamma$$

bu yerda γ, $\Delta x \to 0$ da nolga intiluvchi miqdordir. U holda

$$\Delta y = f^1(x_0)\Delta x + \gamma \Delta x$$

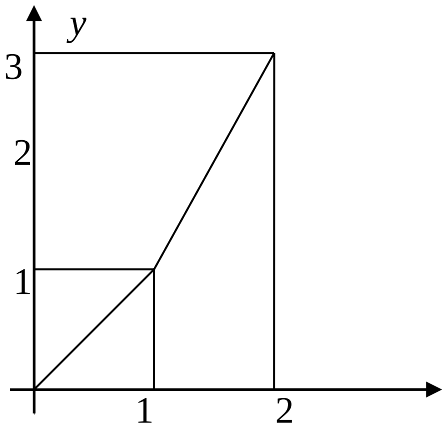
bo‘ladi. Bu yerdan ko`rinib turibdiki $\Delta x \to 0$ da Δy ham nolga intiladi, ya'ni funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksizdir.

Demak, agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada, uzluksiz bo‘lsa u shu nuqtada differensiallanuvchi bo‘lishi ham bo‘lmasligi ham mumkin.

Misol. $f(x)$ funksiya [0;2] kesmada quyidagicha aniqlangan

$0 \le x \le 1$ da $f(x)=x$

$1 \langle x \le 2$ da $f(x)=2x-1$



3-rasm.

Bu funksiya $x=1$nuqtada uzluksiz bo‘lsa-da, hosilaga ega emas. Haqiqatdan, $\Delta x \rangle 0$ da

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[2(1+\Delta x)-1]-[2\cdot 1-1]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

$\Delta x \langle 0$ da

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$\Delta x\to 0$ da funksiyaning qiymati bir hil chiqishi kerak. Shunday qilib, tekshirilayotgan limit Δx ning ishorasiga bog‘liq, bu esa x=1 nuqtada funksiya hosilaga ega emasligi kelib chiqadi.

V. <u>**Teorema.**</u> $y=x^n$ funksiyaning hosilasi nx^{n-1} gat eng.

Agar $y=x^n$ bo‘lsa, $y^1=n\,x^{n-1}$.

Haqiqatdan:

1) Δx orttirma beramiz

$y+\Delta y=(x+x\Delta x)^n$

2) Nyuton binomi formulasidan

$$\Delta y=x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2+...+(\Delta x)^n-x^n$$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+...+(\Delta x)^{n-1}$

4) $y'=\lim\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+...+(\Delta x)^{n-1}\right]=nx^{n-1}$

Demak, $y'=nx^{n-1}$ ekan.

Misol. $y=x^3$, $y'=3x^2$.

VI. **<u>1 - teorema.</u>** $y=\sin x$ funksiyaning hosilasi, $y=\cos x$ ga teng.

Agar $y=\sin x$ bo‘lsa, $y'=\cos x$.

Haqiqatdan,

1) $y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$;

2) $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\dfrac{x+\Delta x-x}{2}\cos\dfrac{x+\Delta x+x}{2}=2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)$

4) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$

demak, $y'=\cos x$

<u>2 - teorema.</u> $y=\cos x$ funksiyaning hosilasi, $-\sin x$ gateng.

Agar $y=\cos x$ bo‘lsa, $y'=\sin x$

Bu teoremani isboti 1 teoremaning isbotiga o‘hshash bo‘lib uni o‘quvchiga havola qilamiz.

VII. Oʻzgarmas miqdor bilan funksiya koʻpaytmasining hosilasi. Yigʻndining, koʻpaytmaning, boʻlinmaning hosilalari.

1 - teorema. Oʻzgarmas miqdorning hosilasi nolga teng.

Agar $y = c \ (c = const)$ boʻlsa, $y' = 0$ boʻladi.

Haqiqatdan, x ning istalgan qiymatida

$y = f(x) = c$

Argument x ga orttirma beramiz, u holda

$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = c$ dan $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$

Endi nisbatni olamiz va limitga oʻtamiz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \ y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \text{ demak } \ y' = 0.$$

2 - teorema. Oʻzgarmas koʻpaytuvchini hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin.

Agar $y = Cu(x) \quad (C - const)$ boʻlsa $y' = Cu' \quad (x)$ boʻladi.

Haqiqatdan,

1) $y = Cu(x);$

2) $y + \Delta y = Cu(x + \Delta x);$

$\Delta y = Cu(x + \Delta x) - Cu(x);$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = C \dfrac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = C \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u(x + \Delta x)}{\Delta x} = Cu'(x)$

Demak, $y' = Cu'(x)$ ekani kelib chiqadi.

3 - teorema. Chekli sondagi differensiallanuvchi funksiyanlar yigʻindisining hosilasi shu funksiyalar hosilasining yigʻindisiga teng.

Agar $y = u(x) + v(x) + \omega(x)$ boʻlsa $y' = u'(x) + v'(x) + \omega'(x)$ boʻladi.

Haqiqatan,

1) $y = u + v + \omega;$

2) $y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v + \omega + \Delta\omega;$

$\Delta y = \Delta u + \Delta y + \Delta \omega$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta \omega}{\Delta x}$

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta x} = u' + v' + \omega'$

Demak, $y' = u'(x) + v'(x) + \omega'(x)$

Misol. 1) $y = 4x^3 - 2\sin x\, y'$

$= 12x^2 - 2\cos x$

4 – teorema. Ikkita differensiallanuvchi funksiyalar ko‘paytmasining hosilasi birinchi funksiya hosilasining ikkinchi funksiya bilan ko‘paytmasi plyus birinchi funksiyaning ikkinchi funksiya hosilasi bilan ko‘paytmasiga teng.

1) $y = u \cdot v$

2) $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$

$\Delta y = uv + u\Delta v + v\Delta u - uv = v\Delta u + u\Delta v$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x}$

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} u\frac{\Delta u}{\Delta x} vu' + uv'$

Demak, $y' = vu' + uv'$.

Misol. 2) $y = x^4 \cos x,\ y' = (x^4)' \cos x + x'' (\cos x)' 4x^3 \cos x - x^4 \sin x$

Huddi shuningdek bir necha funksiyalar ko‘paytmasi uchun ham bu formula o‘rinlidir. Masalan, $y = uv\omega$ bo‘lsa $y' = u'v\omega + uv'\omega + uv\omega'$

5 - teorema. Kasrning hosilasi yana kasrga etng bo‘lib, uning maxraji berilgan kasr maxrajining kvadratiga, surati esa surat hosilasini maxrajga ko‘paytmasidan maxraj hosilasini suratga ko‘paytmasini ayirganiga teng.

Agar $y = \frac{u}{v}$ bo‘lsa $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Haqiqatdan,

1) $y+\Delta y=\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$

$\Delta y=\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\dfrac{u}{v}=\dfrac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v+\Delta v)}=\frac{vu'-uv'}{v^2}$$

Demak, $y'=\dfrac{vu'-uv'}{v^2}$

Misol 3. $y=\dfrac{\sin x}{2x^2-1}$

$$y'=\frac{(\sin x)'(2x^2-1)-(2x^2-1)'\sin x}{(2x^2-1)^2}\cdot\frac{(2x^2-1)\cos x-4x\cdot\sin x}{(2x^2-1)^2}$$

***VIII.* Teorema.** $\log_a x$ funksiyaning hosilasi $\dfrac{1}{x}\log$ ga teng.

Agar $y=\log_a x$ bo‘lsa $y'=\dfrac{1}{x}\log_a e$

Haqiqatdan,

1) $y+\Delta y=\log_a(x+\Delta x)$

$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\dfrac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)=\dfrac{1}{x}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$

$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{x}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\dfrac{1}{x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\dfrac{1}{x}\log_a e$

Demak, $y'=\dfrac{1}{x}\log_a e$ yoki $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$

Agarda $a=e$ bo‘lsa $y'=\dfrac{1}{x\ln e}=\dfrac{1}{x}$

Demak, $y = lnx$ funksiyaning hosilasi $1/x$ ga teng, ya'ni $y = lnx$, $y' = 1/x$.

Misol. $y = x^5 \ln x \quad y'(x^5)' \ln x + x^5 (\ln x)' = 5x^4 \ln x + x^5 \cdot 1/x = x^4 (5\ln x + 1)$

Hosila jadvali.

1. $(C)' = 0, \quad (C = \ const);$
2. $(x)' = 1$;
3. $(x^n)' = nx^{n-1};$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$
5. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;
6. $(e^x)' = e^x;$
7. $(a^x)' = a^x \cdot lna, \ \ (a > 0, a \neq 1);$
8. $(lnx)' = \left(\frac{1}{x}\right);$
9. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot lna};$
10. $(\sin x)' = \cos x;$
11. $(\cos x)' = -\sin x;$
12. $(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}, \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\right)$;
13. $(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x}, \quad (x \neq \pi k, k \in Z);$
14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (-1 < x < 1);$
15. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (-1 < x < 1);$
16. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2};$
17. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2};$
18. $(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = chx;$

$$19.\ (\text{ch}\, x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = shx;$$

$$20.\ (thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right) = \frac{1}{ch^2x};$$

$$21.\ (ctx)' = \left(\frac{chx}{shx}\right) = -\frac{1}{sh^2x};$$

$$22.\ (secx)' = \left(\frac{1}{cosx}\right)' = \frac{sinx}{cos^2x};$$

$$23.\ (cosex) = \left(\frac{1}{sinx}\right)' = -\frac{cosx}{sin^2x};$$

Masalan,

1. $(x^2+\sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$, $(5-\cos x)' = (5)' - (\cos x)' = 0-(-\sin x) = \sin x$

2. $(e^x \cdot \sin x)' = (e^x)' \cdot \sin x + e^x \cdot (\sin x)' = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x = (\sin x + \cos x)e^x$.

3. $(5x^2)' = 5\cdot(x^2)' = 5\cdot 2x = 10x$.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

Quyidagi funksiyalarni hosilasini toping;

1. $y = x^2 + 3x - 1;$ $\qquad J: y' = 2x + 3.$

2. $y = \sqrt[3]{x} + 5;$ $\qquad J: y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}.$

3. $y = x \cdot \sqrt[3]{x};$ $\qquad J: y' = \frac{4\sqrt[3]{x}}{3}$

4. $y = \log_3 x + x^3;$ $\qquad J: y' = \frac{1}{x \cdot ln3} + 3x^2.$

5. $y = 7^x + e^x;$ $\qquad J: y' = 7^x \ln 7 + e^x.$

6. $y = sinx - 2^{x+1};$ $\qquad J: y' = cosx - 2^{x+1} \cdot ln2.$

7. $y = tgx + \sqrt{x};$ $\qquad J: y' = \frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

8. $y = x\, sinx;$ $\qquad J: y' = sinx + x\, cosx.$

9. $y = x^2\, cosx;$ $\qquad J: y' = 2x\, cosx - x^2\, sinx.$

10. $y = \dfrac{x}{sinx}$; $\quad J: y' = \dfrac{sinx - x\,cosx}{sin^2 x}$

11. $y = \dfrac{5^x}{x}$; $\quad J: y' = \dfrac{5^x \cdot ln5 \cdot x - 5^x}{x^2}$

12. $y = e^x\, arcsinx$; $\quad J: y' = e^x \left(arcsinx + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

.

13. $y = \dfrac{x^2 + \sqrt{x}}{cosx}$; $\quad J: y' = \dfrac{\left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot cosx + (x^2 + \sqrt{x}) \cdot sinx}{cos^2 x}$

14. $y = \sin 2x + 3$; $\quad J: y = 2\,cos2x$.

15. $y = cos^2 x + sin3x$; $\quad J: y' = -sin2x + 3cos3x$.

16. $y = ln3x - \sqrt[4]{x}$; $\quad J: y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

17. $y = tg2x\, ctg2x$; $\quad J: y' = 0$.

18. $y = sin^2 3x + e^{sinx}$; $\quad J: y' = 3\,sin6x + cosx\, e^{sinx}$

19. $y = \sqrt{x^2 + 1}$; $\quad J: y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

20. $y = (x+1)^{100}$; $\quad J: y = 100(x+1)^{99}$.

XULOSA

Funksiya hosilasi matematik tahlilning asosiy tushunchasi bo‘lib, juda ko‘p nazariy va amaliy tatbiqlarga egadir. Notekis harakatda tezlik, egri chiziqqa urinmaning burchak koeffitsiyenti, iqtisodiyotda mehnat unumdorligi yoki ishlab chiqarish sur’ati hosila yordamida aniqlanadi. Kelgusida hosila funksiya xususiyatlarini o‘rganishning kuchli quroli ekanligini ko‘ramiz. Har qanday funksiya ham hosilaga ega bo‘lavermaydi. Masalan, $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas. Hosilasi mavjud funksiya differensiallanuvchi deyiladi. Agar funksiya biror oraliqda differensiallanuvchi bo‘lsa, unda u bu oraliqda uzluksiz bo‘ladi.

Nazorat savollari.

1. Funksiya hosilasi deb nimaga aytiladi.

2. Funksiya hosilasining geometric va mexanik ma’nolari nima.
3. Ko’paytmani hosilasini keltirib chiqaring

2-§. MURAKKAB, OSHKORMAS VA TESKARI FUNKSIYALARNING HOSILASI

Reja:

1. **Murakkab funksiyaning hosilasi.**
2. $y=tgx, \quad y=ctgx, \quad y=\ln|x|$ **funksiyalarning hosilalari.**
3. **Oshkormas funksiyalarning hosilasi.**
4. **Darajali, ko‘rsatkichli va murakkab funksiyalar.**
5. **Teskari funksiya va uni differensiallash.**
6. **Teskari triganometrik funksiyalar va uni differensiallash.**
7. **Differensiallashdagi asosiy formulalar.**
8. **Funksiyaning parametrik tenglamasi va uning hosilasi.**
9. **Giperbolik funksiyalar.**

Tayanch iboralar: murakkab funksiya, oshkormas funksiya, teskari funksiya, funksiyaning parametrik funksiyasi, giperbolik funksiyalar, teskari funksiya hosilasi, murakkab funksiya hosilasi, logarifmik differensiallash, darajali-ko‘rsatkichli funksiya, hosilalar jadvali.

I. Bizga murakkab funksiya berilgan bo‘lsin, ya’ni shunday $y=f(x)$ funksiyaki, uni $y=F(u), \quad u=\varphi(x)$ yoki $y=F[\varphi(x)]$ ko‘rinishida ifodalash mumkin bo‘lsin.

<u>Teorema.</u> Agar $u=\varphi(x)$ funksiya biror *x* nuqtada $u'_x=\varphi'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa $y=F(u)$ funksiya esa *x* ga mos *u* ning qiymatida $y'_u=F(u)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda shu *x* nuqtada murakkab funksiya ham

$y'_x = F'_u(x)\cdot\varphi'(x)$ yoki $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ gat eng hosilaga ega bo‘ladi.

Isboti. Argument x ga Δx orttirma beramiz, u holda

$$u+\Delta u=\varphi(x+\Delta x), \quad y+\Delta y = F(u+\Delta u)$$

bu yerdan

$$\Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x), \quad \Delta y = F(u+\Delta u)-F(u)$$

$\Delta x\to 0$ da $\Delta u\to 0$ intiladi va $\Delta u\to 0$ da $\Delta y\to 0$ intiladi.

Teoremaning shartiga asosan.

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'$$

bu yerdan

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'+\alpha$$

tenglik kelib chiqadi, bu yerda $\Delta u\to 0$ da $\alpha\to 0$

So‘ng tenglikdan

$\Delta y = y'+\alpha\,\Delta u$ hosil qilamiz.

Buni Δx gab o‘lamiz va $\Delta x\to 0$ dagi limitini topamiz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}=y'_u\cdot u'_x$$

Shunday qilib teorema isbot bo‘ladi.

Agar $y=f(x)$ funksiya $y=F(u), u=\varphi(v)$, $v=\phi(x)$ ko‘rinishda bo‘lsa, bu murakkab funksiya uchun ham teorema o‘rinlidir, ya’ni

$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$

Misol. $y=\sin^2\ln x$, $v=\ln x$, $u=\sin v$, $y=u^2$

$y'_u=2u$, $u'_v=\cos v$, $v'_x=1/x$

$y'_x y'_u$; $v'_x=2u\cdot\cos v\cdot 1/x=2\sin\cdot\ln x\cdot\cos\ln x\cdot 1/x$

$y'_x=1/x\sin 2\ln x$

II. **1 - teorema.** *tgx* funksiyaning hosilasi $\frac{1}{\cos^2 x}$ ga teng.

Haqiqatdan,

$$y = tgx,$$

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2 - teorema. $ctg\, x$ funksiyaning hosilasi $\frac{1}{\sin^2 x}$ ga teng.

Haqiqatdan,

$$y = ctg\, x;\ y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

3 - teorema. $l\, n|x|$ funksiyaning hosilasi $1/x$ ga teng.

Haqiqatdan,

a) $x > 0$ bo‘lsa, $y = l\, n x$, shuning uchun $y' = 1/x$

b) $x < 0$ bo‘lsa, $|x| = -x$, $1n(-x)$, $y = 1n(-x)$

$$y' = \frac{1}{-x}\cdot(-x)' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$$

Misol. $y = 1ntg\, 2x$, $u = tgv$, $v = 2x$, $y = l\, nu$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{\cos^2 v}2 = \frac{1}{tg\, 2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2 = \frac{4}{\sin 4x}$$

III. Agar ikkita *x* va *y* o‘zgaruvchilar

$$F(x, y) = 0$$

(1)

tenglama bilan berilgan bo‘lsa va $y = f(x)$ ni (1) tenglamaga qo‘yganimizda u x ga nisbatan ayniyatga aylansa, u holda (1) tenglama **oshkormas funksiya** deyiladi.

Masalan, $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ tenglamani $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yoki $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ funksiyalar ayniyatga aylantiradi. Ammo hamma vaqt ham oshkormas funksiyani oshkor ko‘rinishda ifodalash mumkin emas.

Masalan, 1) $x^2 + y^2 - xy=0$ 2) $e^{x+y} - 2\sin x\, y = 0$ bularni elementar funksiyalar orqali ifodalab bo‘lmaydi.

Bunday funksiyani differensiallash uchun y ni x ning funksiyasi debqarash mumkin va murakkab funksiyaning hosilasi sifatida aniqlash mumkin.

Misol.

1) $x^2 + y^2\, a^2 = 0$

$2x + 2y\cdot y' = 0',\ y' = -x/y$

2) $x^2 + y^2 - x\,y = 0$

$$2x + 2yy' - y - xy' = 0,\ y' = -\frac{2x - y}{2y - x}$$

3) $e^{x+y} - 2\sin x\,y = 0$

$$e^{x=y}\left(1 + y'\right) - 2\cos x\,y\cdot\left(x\,y' + y\right) = 0$$

$$\left(e^{x+y} - 2x\cos x\,y\right)y' - 2y\cos x\,y + e^{x=y} = 0$$

$$y' = \frac{2y\,cox\,y - e^{x+y}}{e^{x+y} - 2x\cos x\,y}$$

IV. **<u>1 - teorema.</u>** x^{α} funksiyaning hosilasi $\alpha\, x^{\alpha-1}$ ga teng.

Agar $y = x^{\alpha}$ bo‘lsa, u holda $y' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ bu yerda α -ihtiyoriy haqiqiy son.

Haqiqatdan,

$y = x^{\alpha}$, $l\,ny = l\,nx^{\alpha} = \alpha\, l\,nx$

$$\frac{1}{y}y' = \alpha\frac{1}{x}, \qquad y' = y\alpha\frac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}$$

<u>2 - teorema.</u> a^x funksiyaning hosilasi $a^x\, lna$ ga teng.

Haqiqatdan,

$$y = a^x,\ l\,ny = \ln a^x = x\ln a\ y'$$

$$y\ln a = a^x \ln a$$

$a = e$ bo‘lsa, $y = e^x$, $y' = e^x$

$y' = e^x\, l\,n e = e^x$

<u>3 - teorema.</u> $y = u^v$ funksiyaning hosilasi,

$y' = vu^{v-1}u' + u^v\, v\, l\,nu$ bo‘ladi.

Haqiqatdan,

$$y=u^{v},\ \ln y=\ln u^{v}=v\ln u$$

$$\frac{1}{y}y'=v'\ln u+v\frac{1}{u}\cdot u'$$

$$y'=y\left(v\frac{l}{u}u'+v'\ln u\right)=u^{v}\left(v\frac{1}{u}u'+v'\ln u\right)$$

$$y'=vu^{v-1}u'+v'u^{v}\ln u$$

Misol. $y=\dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[4]{(2x+1)^3}}{(x+5)^7e^{\sin x}}$

$$\ln y=\frac{2}{3}\ln(x+1)+\frac{3}{4}\ln(2x+1)-7\ln(x+5)-\sin x$$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{2}{3(x+1)}+\frac{3}{2(2x+1)}-\frac{7}{x+5}-\cos x$$

$$y'=\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[4]{(2x+1)^3}}{(x+5)^7e^{\sin x}}\left(\frac{2}{3(x+1)}+\frac{3}{2(2x+1)}-\frac{7}{x+5}-\cos x\right)$$

V. Biror (a,b) $(a<b)$ oraliqda aniqlangan va o‘suvchi $y=f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. $(f(a)=c,\ f(b)=d)$.

Funksiya o‘suvchi bo‘lgani uchun $x_1<x_2$ dan $y_1<y_2$ ekani kelib chiqadi. Argumentning ikkita har xil x_1, x_2 qiymatlari uchun funksiyaning ikkita $y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2)$ qiymatlari mos keladi. Buning teskarisi ham to‘g‘ri, ya’ni $y_1<y_2$ qiymatlari uchun $x_1,\ x_2$ qiymatlari mos keladi. Demak x ning qiymatlari bilan uning qiymatlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud. U holda $x=f^{-1}(y)$ funksiya $y=f(x)$ **funksiyaning teskari funksiyasi** deyiladi.

Huddi shunday fikrni kamayuvchi funksiyalar uchun ham aytish mumkin.

Teorema. Agar $y=f(x)$ funksiyaning y nuqtadagi noldan farqli bo‘lgan $\varphi'(y)$ hosilaga ega $x=\varphi(y)$ teskari funksiyasi mavjud bo’lsa, u holda tegishli x nuqtada $y=f(x)$ funksiya $\dfrac{1}{\varphi'(y)}$ ga teng bo‘lgan $f'(x)$ hosilaga ega bo‘ladi, ya’ni,

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. Δy orttirmaga asosan yozamiz.

$$\Delta y=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

$\Delta y \to 0$ da $\Delta x \to 0$. Limitiga o‘tib

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}$$

ni hosil qilamiz.

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}$$

VI. <u>1 - teorema.</u> $arc\sin x$ funksiyaning hosilasi $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ga teng.

Haqiqatdan,

$$y=arc\sin x,\ \ x=\sin y,\ \ x'_y=\cos y$$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

<u>2 -teorema.</u> $y=arc\cos x$ funksiyaning hosilasi $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ga teng.

Haqiqatdan,

$$y=arc\cos x,\ \ x=\cos y,\ \ x'_y=\sin y$$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\sin y}=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

<u>3 - teorema.</u> $arctg\,x$ funksiyaning hosilasi $\frac{1}{1+x^2}$ ga teng.

Haqiqatdan,

$$y=arctg\,x, x=tg\,y,\ x'_y=\frac{1}{\cos^2 y}$$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2\,y}=\frac{1}{1+x^2}$$

<u>4 - teorema.</u> $arcctg\, x$ funksiyaning hosilasi $-\frac{1}{1+x^2}$ ga teng.

Haqiqatdan,

$$y = arc\,ctg\, x,\ x = ctg\, y,\ x'_y = -\frac{1}{\sin^2 y}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+ctg^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Misol. $y = arctg^2 \sqrt{x}$

$$y' = 2arctg\sqrt{x}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$$

VII. 1. $y = c$ $\qquad y' = 0$

2. $y = u^{\alpha}$ $\qquad y' = \alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$

3. $y = \sin u$ $\qquad y' = \cos u \cdot u'$

4. $y = \cos u$ $\qquad y' = \sin u \cdot u'$

5. $y = tgu$ $\qquad y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

6. $y = ctgu$ $\qquad y' = -\frac{u'}{\sin^2 \cdot u}$

7. $y = a^u$ $\qquad y = a^u\, 1na \cdot u'$

$y = e^u$ $\qquad y' = e^u \cdot u'$

8. $y = 1og_a u$ $\qquad y' = \frac{1}{u}\log_a e \cdot u'$

$y = 1nu$ $\qquad y' = \frac{1}{u}\cdot u'$

9. $y = arc\sin u$ $\qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

10. $y = arc\cos u$ $\qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

11. $y = arctgu$ $\qquad y' = \frac{1}{1+u^2}u'$

12. $y = arcctgu$ $\qquad y' = -\frac{1}{1+u^2}u'$

13. $y = Cu$ $\qquad y' = Cu',\quad C = const$

14. $y = u + v - \omega$ $\quad y' = u' + v' - \omega' y' = u'v +$

15. $y = u \cdot v$ $\quad v'u$

16. $y = u / v$ $\quad y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

17. $y = F(u), u = \varphi(x)$ $\quad y'_x = y'_u \cdot u'_x$

18. $y = u^v$ $\quad y' = vu^{v-1}u' + v' \cdot u^v \ln u$

19. $y = f(x)$ $\quad y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$ $\quad x = \varphi(y)$

VIII. Agarda tekislikda egri chiziq

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \phi(t) \end{array}\right\} t \in [\alpha, \beta]$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlangan bo‘lsa, u holda shu sistema **funksiyaning parametrik tenglamasi** deyiladi.

Agar $x = \varphi(t)$ funksiya $t = \Phi(x)$ teskari funksiyaga ega bo‘lsa, u holda uni x ning funksiyasi, ya’ni

$$y = \psi[\Phi(x)] \tag{2}$$

Murakkab funksiya ko‘rinishida ifodalash mumkin.

Parametrik funksiyaga misollar keltirish mumkin, masalan:

1) Aylananing parametrik tenglamasi

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{array}\right\} t \in [0; 2\pi]$$

2) Ellipsning parametrik tenglamasi

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{array}\right\} t \in [0; 2\pi]$$

3) Sikloidaning parametrik tenglamasi

$$\left.\begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(t - \cos t) \end{array}\right\} t \in [0; 2\pi]$$

4) Astroidaning parametrik tenglamasi

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right\} t \in [0; 2\pi]$$

va h.k.

Hosilani topish, murakkab funksiyaning hosilasi formulasidan va teskari funksiyaning hosilasi formulasidan foydalanamiz:

(2) tenglikdan

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{yoki} \quad y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Misol. $\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{array}\right\} \qquad t \in [0; 2\pi]$

$$x'_t = a\sin t$$

$$y'_t = a\cos t$$

$$y'_x = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -ctgt$$

IX. Ko‘rsatqichli funksiyalar orqali ifodalanuvchi quyidagi funksiyalar

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad cthx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

(1)

giperbo‘lik funksiyalar deyiladi.

(1) formuladan quyidagi trigonometrik minosabatlar kelib chiqadi:

$$ch^2 x - sh^2 x = 1, \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} ch(x+y) = chxchy + shxshy, \\ sh(x+y) = shxchy + chxshy. \end{array}\right\}$$

(3)

Bevosita (1) tenglsmadan olib kelib qo‘yib (2), (3) formulalarning to‘g‘ri ekanligi ishonch hosil qilish mumkin.

$x = cost,\ y = sin\,t$ funksiyalar aylananing parametrik tenglamalari bo‘lgani kabi, $x = cost,\ y = sint$ finksiyalar **giperbolik funksilar** deyiladi.

Giperbolik funksilalarning hosilalarini osongina keltirib chiqarish mumkin.

$$(shx)' = chx, \qquad (thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$$

$$(chx)' = shx, \qquad (cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1. $y = (3x-4)^{50};$ $\qquad J: y' = 150(3x-4)^{49}.$

2. $y = \frac{1}{(2x+5)^4};$ $\qquad J: y' = -\frac{8}{(2x+5)^5}$

3. $y = tg^3 3x;$ $\qquad J: y' = \frac{9sin^2 3x}{cos^4 3x}$

4. $y = cos2x\, e^{sinx};$ $\qquad J: y' = e^{sinx}\, cosx(cos2x - 2sinx)$

.

5. $y = \sqrt[3]{cos^6 x + 2};$ $\qquad J: y' = -\frac{6cos^5 x\, sinx}{3\sqrt[3]{(cos^6 x + 2)^2}}$

6. $y = ctg^2 3x;$ $\qquad J: y' = -\frac{6\, cos3x}{sin^3 3x}$

7. $y = x\, lnx;$ $\qquad J: y' = lnx + 1$

8. $y = \ln sinx - \frac{1}{2} sin^2 x;$ $\qquad J: y' = ctgx\, cos^2 x$

9. $y = x^3 \cdot 3^x;$ $\qquad J: x^2 3^x (3 + x\, ln3)$

10. $y = e^{-x^2} + 7x;$ $\qquad J: y' = -2xe^{-x^2} + 7$

11. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right), a = const;$ $\qquad J: y' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

12. $y = ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}};$ $\qquad J: y' = \frac{2}{1-4x^2}$

13. $y = x^x;$ $\qquad J: y' = x^x(\ln x + 1)$

14. $y = \frac{1+e^x}{1-e^x};$ $\qquad J: y' = \frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$

15. $y = ln\frac{e^x}{x^2+1};$ $\qquad J: y' = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

16. $y = x^2 + arctgx;$ $\qquad J: y' = 2x - \frac{1}{1+x^2}$

17. $y = arcsin\sqrt{x};$ $\qquad J: y' = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

18. $y = \arccos(1-2x);$ $\qquad J: y' = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

19. $y = x\, arccosx - \sqrt{1-x^2};$ $\qquad J: y' = arccosx$

20. $y = arctg2x + 4;$ $\qquad J: y' = \frac{2}{1+4x^2}$

XULOSA

Istalgan differensiallanuvchi funksiya hosilasini uning ta'rifidan kelib chiqadigan algoritm bo'yicha bevosita hisoblash noqulay va murakkab bo'ladi. Shu sababli funksiyalar hosilasini hisoblash uchun differensiallash qoidalaridan foydalaniladi. Ular yordamida funksiyalar yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va bo'linmasining hosilalarini topish mumkin. Bundan tashqari murakkab va teskari funksiyalarning hosilalarini hisoblash formulalari ham mavjud. Ayrim hollarda funksiya hosilasini logarifmik differensiallash usulidan foydalanib osonroq hisoblash mumkin. Barcha asosiy elementar funksiyalar differensiallanuvchi, ularning hosilalari va differensiallash qoidalari hosilalar jadvalini tashkil etadi. Bu jadvaldan foydalanib ixtiyoriy differensiallanuvchi funksiyaning hosilasini hisoblab bo'ladi.

Nazorat savollari.

1. Murakkab va oshkormas funksiyalarning hosilalari.
2. Trigonometrik va logarifmik funksiyalarning hosilasi.
3. Darajali, murakkab va ko'rsatqichli funksiyalarning hosilalari.
4. Teskari funksiyaning hosilasi.
5. Teskari trigonometrik funksiyaning hosilalari.
6. Funksiyaning parametrik tenglamasi va uning hosilasi.
7. Giperbolik funksiyalarning hosilasi.

3-§. FUNKSIYANING DIFFERENSIALI

Reja:

1. **Differensial.**
2. **Differensial va uning geometrik ma’nosi.**
3. **Yuqori tartibli hosilalar.**
4. **Yuqori tartibli differensiallar.**
5. **Oshkormas va parametrik funksiyalar yuqori tartibli hosilalari.**

Tayanch iboralari: funksiyaning differensiali, differensialning geometrik ma’nosi, differensialning mavjudlik sharti, algebraik yig‘indi differensiali, ko‘paytma differensiali, bo‘linma differensiali, differensialning invariantligi, differensialning tatbiqlari, yuqori tartibli hosilalar, yuqori tartibli differensiallar.

I. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada differensiallanuvchi bo‘lsa, kesmaga tegishli biror *x* nuqtadagi hosilasi

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f^{|}(x) \qquad (1)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Limit ta’rifidan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f^{|}(x)+\alpha \qquad (2)$$

bu yerda $\Delta x\to 0$ da $\alpha\to 0$

$$\Delta y=f^{|}(x)\Delta y+\alpha\cdot\Delta x$$

Shunday qilib, funksiyaning Δy orttirmasi ikkita qo‘shiluvchidan iborat bo‘lib, bulardan birinchisi **orttirmaning bosh bo‘lagi** deb ataladi va Δx orttirmaga nisbatan chziqlidir. Shu birinchi xadi funksiyaning differensiali deb ataladi va dy yoki $df(x)$ bilan belgilanadi, demak,

$$dy=f'(x)\Delta x \qquad (3)$$

$y=x,\ y^{|}=x^{|}=1$ bo‘lgani uchun $dy=dx=\Delta x,$ u holda $\Delta x=dx$ bo‘ladi $dy=f^{|}(x)dx.$

Funksiyaning differensiali funksiya hosilasi va argument differensialining ko‘paytmasiga tengdir.

(1) tenglamadagi ikkinchi yig‘indi $\alpha\Delta x$ esa Δx ga nisbatan yuqori tartibli kichik miqdordir.

(3) tenglamadan

$$f'(x)=\frac{dy}{dx} \tag{4}$$

Demak, $f^{|}(x)$ hosilasi funksiya differensialini erkli o‘zgaruvchining argument differsialiga nisbati deb qarash mumkin

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x \tag{5}$$

$\alpha\Delta x$ ifoda Δx ga nisbatan cheksiz kichik miqdor bo‘lgani uchun

$$\Delta y \approx dy \tag{6}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

yuqoridagi ifodadan foydalanib yozamiz

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f^{|}(x)\Delta x$$

yoki

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f^{|}(x)\Delta x \tag{7}$$

So‘ng (7) formula taqribiy hisoblashlarda ishlatiladi.

Misol. $\sqrt{3,92}$ - hisoblash tashkil etilsin.

$y=\sqrt{x}$ funksiyani olamiz, bu yerda $x_0=4$, $\Delta x=-0,08$

$x_0-\Delta x=4-0,08=3,92$, $f(x_0)=y|_{x_0=4}=\sqrt{4}=2$

$$f'(x)=y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(x_0)=y'\Big|_{x_0=4}=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$$

$$\sqrt{3{,}92}=\sqrt{4-0{,}08}\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=2+\frac{1}{4}(-0{,}08)=2-0{,}02=1{,}92$$

Yuqorida keltirilgan hosila jadvallari yordamida funksiyaning differsiallarini topish mumkin.

Masalan.

1) $y=x^{\alpha}$, $\qquad dy=\alpha\, x^{\alpha-1}\,dx$

2) $y=\log_a x$, $\qquad dy=\frac{1}{x}\log_a e dx$

3) $y=u+v$, $\qquad dy=du+dv$

4) $y=u/v$, $\qquad dy=\frac{vdu-udv}{v^2}$

shunga o‘hshash barcha formulalarni yozish mumkin.

Murakkab funksiya berilgan bo‘lsin, ya’ni

$y=f(u)$, $\quad u=\varphi(x)$ $y=f\,[\varphi(x)]$.

Murakkab funksiyaning hosilasiga muvofiq:

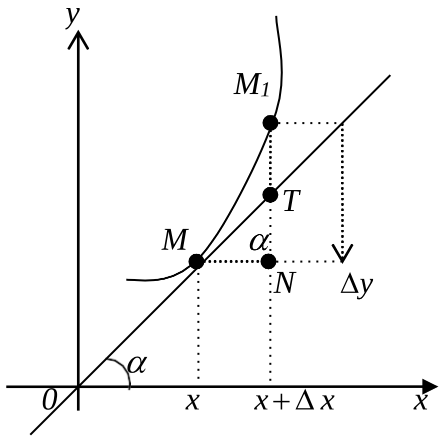
$\frac{dy}{dx}$yoki $\quad dy=f'_u(u)\varphi'(x)dx$,

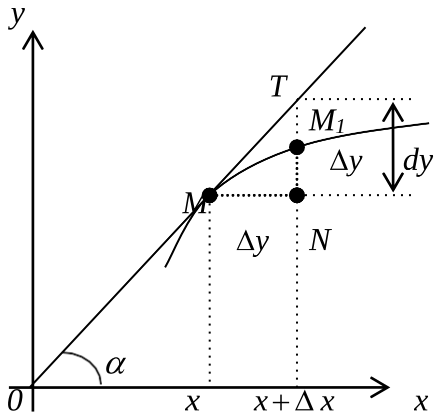
ammo $\varphi'(x)dx=du$ bo‘lgani uchun

$dy=f'_u(u)du$

Shunday qilib, murakkab funksiyaning differensiali oddiy funksiyaning differensiali kabi ekan, ya’ni murakkab va oddiy funksiyaning differensiallari ma’no jihatidan har hil bo‘lsa ham, ko‘rinishi bir hil ekan. Bu **differensialning invariantligi** deyiladi.

II. Egri chiziq $y=f(x)$ tenglama orqali berilgan bo‘lsin. Egri chiziqning biror $M(x,y)$ nuqtasini olamiz va shu nuqtaga urinma o‘tkazib uning $0X$ o‘qining musbat yo‘nalishi bilan tashkil etgan burchagini α deb belgilaymiz. Argument x ga Δx orttirma beramiz, natijada funksiya Δy orttirmaga ega bo‘ladi. Bu nuqtani $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ deb olamiz.





ΔMNT dan $NT = MN tg\alpha$, $\quad tg\alpha = f'(x)$, $\quad MN = \Delta x$

$$NT = f'(x)\Delta x$$

lekin $\quad dy = f'(x)\Delta x$ bo‘lgani uchun

$$NT = dy$$

ekani kelib chiqadi.

So‘nggi tenglik $f(x)$ funksiyaning berilgan x va Δx qiymatlariga tegishli differensiali $y = f(x)$ egri chiziqning berilgan x nuqtasidagi urinma kordinatasini orttirmasiga teng ekan.

Shakldan ko‘rinadiki,

$$M_1 T = \Delta y - dy$$

Bu ayirma shakliga e’tibor bersak musbat ham, manfiy ham bo‘lishi mumkin.

III. Berilgan $y(x)$ funksiya $[a,b]$kesmada differensiallanuvchi bo‘lsin, u holda funksiyaning $f'(x)$ hosilasi x ning funksiyasidir.

Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topish mumkin.

$$y'' = (f'(x))' = f''(x)$$

Huddi shuningdek uchinchi tartibli hosila to‘g‘risida fikr yuritish mumkin.

$$y''' = (y'')' = (f''(x))' = f'''(x)$$

Ihtiyoriy *n*- tartibli hosila ham shu tartibda aniqlanadi.

$$y^{(n)}=\left(y^{n-1}\right)'=\left(f^{n-1}(x)\right)'=f^{(n)}(x)$$

Misol.

1) $y=x^5-2x^2$,

$$y'=5x^4-4x,\quad y''=20x^3-4,\quad y'''=60x^2,\quad y^{IV}=120x,\quad y^{V}=120,\quad y^{VI}=0$$

2) $y=\sin x$

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\pi/2\right)$$
$$y''=\cos\left(x+\pi/2\right)=\sin\left(x+2\pi/2\right)$$
$$y'''=\cos\left(x+2\pi/2\right)=\sin\left(x+3\pi/2\right)$$

. . . .

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\pi/2\right)$$

$$y=Cu,\qquad y^{(n)}=Cu^{(n)}$$
$$y=u+v,\qquad y^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$$
$$y=u\cdot v\qquad y^{(n)}=\left(uv\right)^{(n)}+nu^{(n-1)}=v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+...+v^{(n)}$$

So‘ngi tenglik leybnis formulasi.

IV. Berilgan funksiya differsiallanuvchi bo‘lsin, ya’ni, $y=f(x)$ning differensiali

$$dy=f'(x)dx$$

Tengligi bizga ma’lum. Bu tenglikdan ya’na differensial olamiz

$$d(dy)=d^2y=d\left(f'(x)dx\right)=f''(x)dx^2$$

Uchinchi tartibli differensial ham

$$d\left(d^2y\right)=d^3y=d\left(f''(x)dx\right)=f'''(x)dx^3$$

ko‘rinishda aniqlanadi.

Ihtiyoriy tartibli differsial esa

$$d\left(d^{n-1}y\right)=d^ny=d\left(f^{n-1}(x)dx^{n-1}\right)=f^{(n)}(x)dx^n$$

tenglik bilan ifodalanadi.

Hosil bo‘lgan ifodadan quyidagi tengliklarni yozish mumkin:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},\quad f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2},\ ..,\ f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$$

Agar murakkab funksiya berilgan bo‘lsa, uning birinchi tartibli differensiali

$$dy = F'(u)du$$

Ekanligi ma’lum. Lekin ikkinchi tartibli differensiali

$$d^2y = d\left(F'(u)du\right) = F''(u)(du)^2 + F'(u)d^2u,$$

bu yerda $du = \varphi'(x)dx, \qquad d^2u = \varphi''(x)dx^2$

Misol. $y = ln^2 \sin x, \quad u = 1nv, \quad v = \sin x, \quad y = u^2$

$$dy = 2\, ln \sin x \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x dx$$

$$dy = 2\, l\, n \sin x d\left(1n \sin x\right) = 2u\, d\, u$$

$$du = d\left(1nv\right) = \frac{1}{v}$$

$$dv = d\left(\sin x\right) = \cos x dx$$

V. 1. $x^2 + y^2 - xy = 0$

$$2x + 2yy' - y - xy' = 0$$

$$y' = -\frac{2x - y}{2y - x}$$

$$y'' = \frac{(2 - y')(2y - x) - (2y' - 1)(2x - y)}{(2y - x)^2} = \frac{\left(2 - \frac{2x - y}{2y - x}\right)(2y - x) - \left(2\frac{2x - y}{2y - x} - 1\right)(2x - y)}{(2y - x)^2} =$$

$$= \frac{(3y)(2y - x) - 3x(2x - y)}{(2y - x)^3} = \frac{6y^2 - 6xy + 6x^2}{(2y - x)^3}$$

Parametrik funksiyaning ikkinchi tartibli hosilani topamiz.

Bizga ma’lumki, $x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$ funksiyaning hosilasi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Formula bilan hisoblanadi. Ikkinchi tartibli hosilasini aniqlaymiz:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}=\frac{\varphi'(t)\phi''(t)-\varphi''(t)\phi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

Misol.

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{array}\right\}$$

$x'_t=-a\sin t$ $\qquad x''_t=-a\cos a\; x''_t$

$y'_t=a\cos t$ $\qquad =-a\sin a$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{+a\cos t}{-a\sin t}=-ctg\,t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-a\sin t)(-a\sin t)-(-a\cos t)(-a\cos t)}{[-a\sin t]^3}=-\frac{1}{a\sin^3 t}$$

Ikkinchi tartibli hosilaning mehanik ma’nosi.

Bizga ma’lumki moddiy nuqtaning harakat tezligi birinchi tartibli hosila orqali ifodalanadi

$$v=\frac{ds}{dt}$$

Agar moddiy nuqta tezligidan vaqt bo‘yicha hosila olinsa, u moddiy nuqtaning tezlanishi ifodalaydi,

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$$

Bu yerda *a*- moddiy nuqtaning tezlanishini ifodalaydi va u ikkinchi va u ukkinchi tartibli hosila orqali ifodalaydi.

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$$

XULOSA

Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatan chiziqli qismi mavjud bo‘lsa, u differensial deb ataladi. Funksiya differensiali mavjud bo‘lishi uchun uning hosilasi mavjud bo‘lishi zarur va yetarlidir. Shu sababli ham hosilaga ega funksiyalar differensiallanuvchi deyiladi. Bu holda funksiya differensiali uning hosilasini argument orttirmasiga (differensialiga) ko‘paytirish orqali topilishi mumkin. Differensial yordamida funksiya qiymatlarini taqribiy hisoblash va natijalarni baholash mumkin.

Funksiyaning hosilasi yana biror funksiyadan iborat bo‘ladi va shu sababli uning hosilasi to‘g‘risida so‘z yuritib bo‘ladi. Agar bu hosila mavjud bo‘lsa, u berilgan funksiyaning II tartibli hosilasi deb ataladi. Shunday tarzda n-tartibli ($n\geq 2$) hosilalar aniqlanadi. Shuningdek n-tartibli ($n\geq 2$) differensiallar tushunchasi ham qaraladi.

Ayrim masalalarda x argument va y funksiya orasidagi bog‘lanish bevosita berilmasdan, parametr deb ataladigan yordamchi t o‘zgaruvchi orqali bavosita aniqlanadi. Bu holda funksiya parametrik ko‘rinishda berilgan deyiladi va uning hosilasini hisoblash formulalari mavjud.

Nazorat savollari

1. Funksiya differensialining ta’rifi.
2. Funksiya differensialaning geometrik ma’nosi.
3. Yuqori tartibli hosila va differensiallar.
4. Oshkormas va parametrik funksiyaning yuqori tartibli hosilalari.

VI BOB. INTEGRAL HISOB

1-§. ANIQMAS INTEGRAL

Reja:

1. **Boshlang‘inch funksiya.**
2. **Aniqmas integralning hossalari**
3. **Integrallar jadvali**.

Tayanch iboralar: boshlang‘ich funksiya, aniqmas integral, integral ostidagi funksiya, integral ostidagi ifoda, integrallash o‘zgaruvchisi, aniqmas integralning geometrik ma’nosi, integrallash amali, integralning chiziqlilik xossasi, integrallar jadvali.

I. Bizga $y = f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Bu funksiyaning hosilasini topish amaliga funksiyani differensiallash deyiladi. Masalan, **harakatning** $s = f(t)$**berilgan bo‘lsa buni *t* bo‘yicha differensiallasak tezlanishni topamiz. Biroq, amalda teskari masalani yechishga to‘g‘ri keladi: ya’ni** $a = a(t)$ **tezlanish *t* vaqtning funksiyasi sifatida berilgan bo‘lib, *t* vaqtda o‘tilgan *s* yo‘lni va *v* tezlikni aniqlash so‘raladi.**

Shunday qilib, bu yerda hosilasi $a = a(t)$ bo‘lgan $v = v(t)$ funksiyani topib, so‘ngra hosilasi *v* bo‘lgan $s = s(t)$ funksiya topish kerak.

Ko‘p masalalarda noma’lum funksiyaning berilgan hosilasi bo‘yicha o‘zini topishga to‘g‘ri keladi. Agar $f(x)$ berilgan bo‘lsa, shunday $F(x)$ funksiyani topish kerekki, uning hosilasi berilgan funksiyaga teng bo‘lsin, ya’ni $F'(x) = f(x)$

<u>Ta’rif</u>. Agar $[a,b]$kesmaning har bir nuqtaning $F'(x) = f-(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $F(x)$ funksiya berilgan $f(x)$ **funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi** deyiladi.

Masalan, $f(x) = x^3$ berilgan bo‘lsin. Uning boshlang‘ich funksiyasi $F(x) = x^4/4$ bo‘ladi, chunki

$F'(x)=\left(x^4/4\right)'=4x^3/4=x^3$

2-**misol.** Agar $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ bo‘lsa, uning boshlang‘ch funksiyasi $F(x)=ctgx$ gat eng bo‘ladi. Chunki

$F'(x)=(tgx)^1=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Agar $f(x)$ funksiya $F(x)$ boshlang‘ch funksiyaga ega bo‘lsa, bunda $f(x)$ning boshqa har qanday boshlang‘ch funksiyasi $F(x)$ dan o‘zgarmasga farq qiladi.

Masalan, $F(x)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ch funksiyasi bo‘lsin. $\phi(x)$**;** $f(x)$ ning boshqa boshlang‘ch funksiyasi bo‘lsin; bunda $\phi(x)=F(x)+C$ bu yerda C - o‘zgarmas miqdor. Bundan quyidagi hulosa kelib chiqadi: agar $F(x)$ $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda $F(x)+C$ ham $f(x)$ ni boshlang‘ch funksiyasi bo‘lib, u $f(x)$ ning barcha boshlang‘ich funksiyalar to‘plamini tashkil etadi. Bundam kelib chiqadiki $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyalari cheksiz ko‘p bo‘lar ekan**.**

Masalan $f(x)=x^3$ $F(x)=x^4/4$ edi. Lekin $F(x)=x^4/4+C$ ham boshlang‘ich funksiya bo‘ladi. Chunki $F'(x)=\left(x^4/4+C\right)'=x^3$

Endi aniqmas integral ta’rifini keltiramiz.

<u>Ta’rif.</u> Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda $F(x)+C$ ifoda ham boshlang‘ich funksiya bo‘lib, $f(x)$fuynksiyaning aniqmas integrali deyiladiva $\int f(x)dx$ ko‘rinishda belgilanadi.

Bunda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $\int$ **belgi integral belgi** deyiladi. Shunday qilib, aniqmas integral $y=F(x)+C$ funksiyalar to‘plamidan iborat bo‘ladi. Aniqmas integralning geometrik ma’nosi, tekislikdagi chiziq (to‘g‘ri yoki egri chiziq)lar oilasidan iborat bo‘lib, pastga yoki yuqoriga siljitishdan iborat bo‘ladi (argumentni manfiy yoki musbat qiymatlarni qabul qilishga qarab).

Har qanday uzluksiz funksiyani boshlang‘ch funksiyasi mavjud bo‘ladi. Demak bunday funksiyani aniqmas integrali mavjuddir.

Funksiyani integrallash deyilganda uning boshlang‘ich funksiyani topish tushiniladi. Shu sababli biror funksiyani integrallaganda topilgan boshlang‘ch funksiyadan hosila olib, integrallash natijasi tekshiriladi.

II. 1. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$

2. $\int d\,f(x) = f(x) + C \qquad (C - const)$

3. $\int f(ax+b)\,dx = 1/a\,F\,(ax+b) + C \qquad (a, b - cont)$

4. $\left(\int f(x)\,dx\right)^1 = (F(x) + C)^1 = f(x)$

5. Bir necha funksiyalar algebraik yig‘indisining aniqmas integrali, shu funksiyalar integrallarining algebraik yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_n(x)\,dx$$

6. O‘zgarmas ko‘paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin. Agar u o‘zgarmas son bo‘lsa, u holda

$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ bo‘ladi.

Bu hossalarni integral ta’rifidan foydalanib osongina isbotlash mumkin. Buning isboti talabalarga topshiriladi.

III. Endi integral jadvalini keltiramiz. Hosilalar jadvalidan integrallar jadvali bevosita kelib chiqadi. Jadvalda keltirilgan tengliklarni differsiallash yo‘li bilan tekshirish ya’ni tenglikni o‘ng tomondagi funksiyaning hosilasi integral ostidagi funksiyaga tengligini aniqlash mumkin.

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (C = const,\ n \neq -1)$

2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad (C = const)$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{1n\,a} + C \qquad (C = cost,\ a > 0)$

4. $\int e^x dx = e^x + C \qquad (C = const)$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad (C = const)$

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C \qquad (C = const)$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C \qquad (C = const)$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C \qquad (C = const)$

9. $\int tg\, x\, dx = -1n|\cos x| + C \qquad (C = const)$

10. $\int ctg\, x\, dx = 1n|\sin x| + C \qquad (C = const)$

11. $\int 1n\, x\, dx = x 1n\, x - x + C \qquad (C = const)$

12. $\int x\, dx = x^2 / 2 + C \qquad (C = const)$

13. $\int dx = x + C \qquad (C = const)$

14. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C. \qquad (C = const,\ a \neq 0)$

15. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} 1n \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad . \qquad (C = const,\ a \neq 0)$

16. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} 1n \left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C \qquad . \qquad (C = const,\ a \neq 0)$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = 1n \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \qquad (C = const,\ a \neq 0)$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = arc \sin \frac{x}{a} + C = -arccos \frac{x}{a} + C \qquad (C = const,\ a \neq 0)$

19. $\int \frac{dx}{\sin x} = 1n \left| tg \frac{x}{2} \right| + C = 1n|\cos ecx - ctg\, x| + C \qquad (C = const)$

20. $\int \frac{dx}{\cos x} = 1n \left| tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C = 1n\, |tgx + \sec x| + C \qquad (C = const)$

Yuqorida keltirilgananiqmas integralning hosilalaridan va integrallar jhadvalidan foydalanib, aniqmas integralni hisoblash mumkin.

Masalan: $\int \frac{\left(x^{2}+1\right)\left(x^{2}-2\right)}{\sqrt[3]{x^{2}}}dx$ berilgan bo‘lsin. Bu integralni hisoblaymiz:

$$\int \frac{\left(x^{2}+1\right)\left(x^{2}-2\right)}{\sqrt[3]{x^{2}}}dx=\int \frac{x^{4}-2x^{2}+x^{2}-2}{x^{2/3}}dx=\int \frac{x^{4}-x^{2}-2}{x^{2/3}}dx=$$

$$=\int\left(\frac{x^{4}}{x^{2/3}}-\frac{x^{2}}{x^{2/3}}-\frac{2}{x^{2/3}}\right)dx=\int x^{10/3}dx-\int x^{4/3}dx-2\int x^{-2/3}dx=$$

$$=\frac{x^{10/3+1}}{10/3+1}-\frac{x^{4/3+1}}{4/3+1}-2\frac{x^{-2/3+1}}{-2/3+1}+C=\frac{3}{13}x^{13/3}-\frac{3}{7}x^{7/3}-x^{1/3}+C$$

Endi topilgan foydadan hosila olsak, va integral ostidagi funksiya kelib chiqsa, topilgan natija to‘g‘ri bo‘ladi. Haqiqatdan,

$$\left(\frac{3}{13}x^{3/13}-\frac{3}{7}x^{7/3}-6x^{1/3}+C\right)'=x^{10/3}-x^{4/3}-2x^{-2/3}=$$

$$=\frac{x^{4}-x^{2}-2}{x^{2/3}}=\frac{x^{4}-2x^{2}+x^{2}-2}{\sqrt[3]{x^{2}}}=\frac{x^{2}\left(x^{2}-2\right)+\left(x^{2}-2\right)}{\sqrt[3]{x^{2}}}=\frac{\left(x^{2}+1\right)\left(x^{2}\ 2\right)}{\sqrt[3]{x^{2}}}.$$

Demak topilgan natija to‘g‘ri ekan.

Bevosita integrallash usuli

Misol sifatida bu usulda quyidagi integrallarni hisoblaymiz:

❖ $$\int \frac{7x-5x^{2}+1}{x^{2}}dx=\int\left(\frac{7}{x}-5+\frac{1}{x^{2}}\right)dx=7\int\frac{dx}{x}-5\int dx+\int\frac{dx}{x^{2}}=$$

$$=7\ln|x|-5x-\frac{1}{x}+C\,;$$

❖ $$\int \mathrm{tg}^{2}x\,dx=\int\frac{\sin^{2}x}{\cos^{2}x}dx=\int\frac{1-\cos^{2}x}{\cos^{2}x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^{2}x}-1\right)dx=$$

$$=\int\frac{1}{\cos^{2}x}dx-\int dx=\mathrm{tg}x-x+C\,;$$

❖ $$\int\frac{dx}{x^{2}-a^{2}}=\int\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right]dx=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right]=$$

$$=\frac{1}{2a}[\ln|x-a|-\ln|x+a|]+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

Differensial belgisi ostiga kiritish usuli

Differensial belgisi ostiga kiritish usuli, integral ostidagi ifodani almashtirishdan iboratdir. Bunda

$$dx=d(x+a); \quad dx=\frac{1}{k}d(kx); \quad dx=\frac{1}{k}d(kx+a); \quad xdx=\frac{1}{2}d(x^2);$$

$$cosxdx=d(sinx); \quad sinxdx=-d(cosx); \quad \frac{dx}{x}=d(lnx);$$

va hakazo, almashtirishlarni bajarish mumkin.

Misol sifatida quyidagi integrallarni hisoblaymiz.

- $\int \ln x d\ln x=(u=\ln x)=\int udu=\frac{u^2}{2}+C=\frac{\ln^2 x}{2}+C.$

- $\int (x+4)^{99}dx=\int (x+4)^{99}d(x+4)=(u=x+4)=$

$$=\int u^{99}du=\frac{u^{100}}{100}+C=\frac{(x+4)^{100}}{100}+C.$$

Bu yerda $dx=d(x+4)$ ekanligidan foydalandik.

- $\int \mathrm{tg}xdx=\int\frac{\sin xdx}{\cos x}=\int\frac{-d\cos x}{\cos x}=(u=\cos x)=$

$$=-\int\frac{du}{u}=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C\ .$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1. $\int (x^3+2x-1)dx;$
2. $\int 4x^3-3x^2+\frac{1}{2})dx;$
3. $\int (x^2+3x-4)\,dx;$
4. $\int \frac{x^3-1}{x}\,dx;$

5. $\int \frac{3x+10}{x^2}\,dx;$

6. $\int \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\;dx;$

7. $\int (x-2)^2\;dx;$

8. $\int \frac{25x^4-7}{x^3}\,dx;$

9. $\int \left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}\right)dx;$

10. $\int (3^x+sinx)dx;$

11. $\int \left(\sqrt{x}-1\right)dx;$

12. $\int \frac{cos2x}{sin^2xcos^2x}dx;$

13. $\int \frac{5x^4+7}{x^2}dx;$

14. $\int \frac{dx}{sin^2xcos^2x};$

15. $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}dx;$

16. $\int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)dx;$

17. $\int 5^x\left(1+\frac{5^{-x}}{x}\right)dx;$

18. $\int e^x(5+\frac{e^{-x}}{x})\;dx;$

19. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{5}{\sqrt[5]{x}}\;dx;$

20. $\int \frac{1+cos^3x}{cos^2x}dx;$

21. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx;$

22. $\int tg^2 x dx;$

23. $\int ctg^2 x dx;$

24. $\int \frac{dx}{x^2 - 36};$

25. $\int \frac{dx}{x^2 + 100};$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}};$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 64}};$

28. $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx;$

29. $\int \left(x^2 + \sqrt[3]{x}\right) dx;$

30. $\int \left(7^x + \frac{1}{x} - 13\right) dx;$

31. $\int \left(sinx + \frac{3}{x^4} - \frac{3}{5}\right) dx;$

32. $\int (x + 3^x) dx;$

Differensial belgisi ostiga kiritish usuli

1. $\int sin5xdx;$

2. $\int \cos 2xdx;$

3. $\int cos\frac{x}{3} dx;$

4. $\int \sqrt{x - 3} dx;$

5. $\int e^{-12x} dx;$

6. $\int 17^{sinx} cosxdx;$

7. $\int \frac{dx}{sin^2 2x}$;

8. $\int tg3xdx$;

9. $\int ctg(-4x)dx$;

10. $\int (2x-1)^{50}dx$;

11. $\int (x+2)^{10}dx$;

12. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$;

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+10}}$;

14. $\int \sqrt[5]{2-3x}\,dx$;

15. $\int sinx \cdot cos^2 xdx$;

16. $\int tgxdx$;

17. $\int ctgxdx$;

18. $\int \frac{sinx}{cos^5 x}dx$;

19. $\int x \cdot e^{x^2}dx$;

20. $\int sinx \cdot e^{cosx}dx$;

XULOSA

Hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng bo‘lgan differensiallanuvchi $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya deb ataladi. Berilgan funksiya uchun boshlang‘ich funksiyalar cheksiz ko‘p bo‘lib, ular bir-biridan faqat o‘zgarmas C soniga farq qiladi. Berilgan $f(x)$ funksiya uchun barcha boshlang‘ich funksiyalar sinfi $F(x)+C$ (C–ixtiyoriy o‘zgarmas son) shu funksiyaning aniqmas integrali deyiladi. Funksiyaning aniqmas integralini topish integrallash amali deyiladi va u differensiallash amaliga teskari bo‘ladi. Berilgan funksiyaning integralini topish integral xossalari va jadvali yordamida amalga oshirilishi mumkin.

Nazorat savollari

1. Berilgan funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Boshlang‘ich funksiya qanday xossalarga ega?
3. Berilgan funksiyaning aniqmas integrali qanday ta’riflanadi?
4. Integral ostidagi funksiya deb nimaga aytiladi?
5. Integral ostidagi ifoda deb nimaga aytiladi?
6. Integrallash amali nimani ifodalaydi?
7. Aniqmas integralning geometrik ma’nosi nimadan iborat?
8. Aniqmas integral qanday xossalarga ega?
9. Integrallash va differensiallash amallari o‘zaro qanday bog‘langan?
10. Aniqmas integralning chiziqlilik xossasi nimadan iborat?
11. Integral hisoblash natijasini qanday tekshirish mumkin?
12. Darajali funksiyaning aniqmas integrali nimadan iborat?
13. Ko‘rsatkichli funksiya qanday integrallamadi?
14. Trigonometrik funksiyalarning integrallarini yozing.

2-§. ANIQMAS INTEGRALLARNI HISOBLASH USULLARI

Reja:

1. **O‘zgaruvchini almashtirish usuli.**
2. **Bo‘laklab integrallash.**
3. **Kvadrat uchhad qatnashgan funksiyaning integrallari.**

Tayanch iboralari: yoyish usuli, differensial ostiga kiritish usuli, o‘zgaruvchuni almastirish, bo‘laklab integrallash, kvadrat uchhad qatnashgan integrallari.

Aniqmas integrallarni hisoblashda integral ostidagi funksiyaning boshlang‘ch funksiyasi topiladi. Bu boshlang‘ch funksiya yuqorida keltirilgan integral hossalaridan hamda integrallar jadvalidan foydalanib topiladi. Bundan tashqari integrallarda o‘zgaruvchini almashtirish va bo‘laklab integrallash usullaridan foydalaniladi.

I. Bu usul bilan integrallashda o‘zgaruvchi *x* yangi o‘zgaruvchi *t* bilan ma’lum munosabatda shunday almashtiriladiki natijada oddiy integralga ega bo‘linadi.

Bizga $\int f(x)dx$ berilgan bo‘lsa $x=\varphi(t)$ almashtirishni olaylik.

Bundan $dx=\varphi'(t)dt$ ni topib, uni berilgan integralga qo‘ysak, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Bu esa berilgan integralga nisbatan ancha sodda bo‘ladi. Umuman integral hisoblanganda turli almashtirishlar yordamida berilgan integral, jadvaldagi integrallardan birortasiga keltiriladi. So‘ngra jadvaldan boshlang‘ch funksiya aniqlanadi.

Ba’zan berilgan integralda $x=\varphi(t)$ o‘rniga $t=\psi(x)$ almashtirish yaxshi natija beradi. Agar integral $\int\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx$ ko‘rinishida berilgan bo‘lsa, bunda $t=\psi(x)$ almashtirish bilan integral juda soddalashadi.

Haqiqatdan,

$t=\psi(x)dt=\psi'(x)dx$

$$\int\frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}=\int\frac{dt}{t}=1n|t|+C=1n|\psi(x)|+C$$

Bundan ko‘rinadiki o‘zgaruvchini almashtirish bilan integrallaganda, chiqqan natija ya’na avvalgi o‘zgaruvchi yordamida ifodalanar ekan, ya’ni *t* o‘zgaruvchidan *x* o‘zgaruvchiga o‘tilar ekan.

Misol. Quyidagi integral hisoblansin:

$\int \frac{\sin x\,d\,x}{\sqrt{1+2\cos x}}$ bunda $1+2\cos x = t$ deb olamiz.

Bu holda $-2\sin x d\,x = d\,t$ bo‘ladi. Demak,

$$\int \frac{\sin x d\,x}{\sqrt{1+2\cos x}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\,t}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-1/2} d\,t = -\frac{1}{2} 2t^{1/2} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1+2\cos x + C}$$

II. Bizga ikkita differensiallanuvchi $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar berilgan bo‘lsin. Bu funksiyalar ko‘paytmasi $(u\,v)$ ning differsialini topaylik. Bu differnsial quyidagicha aniqlanadi:

$$d\,(u\,v) = u\,d\,v + v\,d\,u$$

yoki $$uv = \int udv + \int vdu \qquad \textbf{(1)}$$

$$\int udv = uv \int vdu$$

Ohirga topilgan ifoda **bo‘laklab integrallash formulasi** deyiladi.

Bu formulani qo‘llab integral hisoblaganda $\int udv$ ko‘rinishdagi integral, ancha sodda bo‘lgan $\int vdu$ ko‘rinishdagi integralga keltiriladi.

Agar integral ostida $y = l\,n\,x$ funksiya, yoki ikkita funksiyaning ko‘paytmasi, hamda teskari trigonometrik funksiyalar qatnashgan bo‘lsa, bunda bo‘laklab integrallash formulasi qo‘llaniladi. Bu usul bilan integrallaganda yangi o‘zgaruvchiga o‘tishning hojati yo‘q.

Umuman aniqmas integralni hisoblaganda topilgan natija yoniga o‘zgarmas $(C = const)$ ni qo‘shib qo‘yish shart. Aks holda integralning bitta qiymati topilib, qolganlari tashlab yuborilgan bo‘ladi. Bu esa integlashda hatolikka yo‘l qo‘yilgan deb hisoblanadi.

Misol. $\int xarctgxdx$ ni hisoblang.

$u = arcgx \quad dv = x\,dx \quad du = \dfrac{dx}{1+x^2} \quad v = \int x\,dx = x^2/2$

(bunda C= 0 deb olinadi)

(1) formulani qo‘llaymiz.

$$\int xarctgxdx = \frac{x^2}{2} arctgx - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} dx \qquad (*)$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

ni alohida hisoblaymiz

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - arctgx + C$$

buni (*) ga qo‘yamiz.

$$\int xarctgxdx = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} arctgx + C = -\frac{x}{2} + \frac{x^2+1}{2} arqtgx + C$$

III. Bunday integrallar asosan quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

1. $J_1 = \int \dfrac{dx}{ax^2+bx+c}$; **2.** $J_2 = \int \dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$; **3.** $J_3 = \int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$;

4. $J_4 = \int \dfrac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$; **5.** $J_5 = \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$

Bunday integrallarnu hisoblash uchun integral ostida qatnashgan uchhaddan to‘liq kvadrat ajralib, ikkihad kvadratining algebraik yig‘ndisidga keltiriladi. Natijada hosil bo‘lgan ifodani integrallar jadvali yordamida integrallash mumkin bo‘ladi.

Kvadrat uchhaddan to‘liq kvadrat quyidagicha ajratiladi:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]$$

(bu yerda $\pm k^2 = \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$)

Bunda plyus yoki minus ishora ax^2+bx+c kvadrat uchhadning ildizlari haqiqiy yoki kompleks bo‘lishiga qarab aniqlanadi, ya’ni b^2-4acni ishorasiga qarab aniqlanadi.

To‘liq kvadrat ajratilgandan keyin yuqorida keltirilgan integrallar quyidagi ko‘rinishni oladi.

$$1.\ J_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2}$$

Bunda $x+b/2a=t,\quad dx=dt$ desak

$$J_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$$

bu esa jadvaldagi integraldir.

Misol. $\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}$ hisoblansin.

Yechish. $\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+10}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+4+10-4}=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2+6}=J;\ x+2=t\ \ dx=dt$$

$$J=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{t^2+6}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{t}{\sqrt{6}}+C;$$

t o‘rniga x orqali ifodasini qo‘yib ohirgi natijani topamiz.

$$J=\frac{1}{2\sqrt{6}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C$$

$$2.\ J_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$I=\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}=\begin{bmatrix}ax^2+bx+c=t\\(2ax+b)dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t}=1n|t|+C=1n|ax^2+bx+c|+C$$

$$J_2=\frac{A}{2a}1n|ax^2+bx+c|+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)J_1$$

Misol. $J=\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}dx$ hisoblansin.

$$J=\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}dx=\int\frac{1/2(2x-2)+4}{x^2-2x-5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)dx}{x^2-2x-5}+4\int\frac{dx}{x^2-2x-5}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right|+4\int\frac{dx}{(x-1)^2-6}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right|+2\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right|+C$$

3. $J_3=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$; Bu integral yuqorida ko‘rilgan almashtirishlar natijasida quyidagi ko‘rinishga keltiriladi:

$a>0$ bo‘lganda $J_3=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}$

$a<0$ bo‘lganda $J_3=\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}$

Bular esa jadvaldagi integrallardir.

Misol. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}$ hosoblansin.

$x^2\ 4x-3=(x-2)^2-7 \qquad dx=d(x-2)$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}=\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2-7}}=\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2-7}\right|+C$$

jadvaldagi integralga asosan hisoblanadi.

4. $J_4=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx;$

$$J_4=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(b-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$

$$=\frac{Ab}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

$$I=\int\frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\begin{bmatrix}ax^2+bx+c=t\\(2ax+b)dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{ax^2+bx+c}+C$$

$$J_4=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)J_3$$

Misol. $\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$ hisoblansin.

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=\int \frac{5/2(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx\,\frac{5}{2}\int \frac{2x+4dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}-7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=$$

$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right|+C$$

$$5\sqrt{x^2+4x+10}-7ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C$$

5. $J_5=\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ Bunda ham integral ostidagi kvadrat uchhaddan to‘la kvadrat ajratamiz.

$$J_5=\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\int \sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right]}dx=$$

$$\left[\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\pm k^2;\quad x+\frac{b}{2a}=t;\quad dx=dt\right]=\int \sqrt{a(t^2\pm k^2)}\,dt;$$

Bu integral esa quyidagi formula yordamida hisoblanadi.

(A) . $\int \sqrt{t^2+b}\,dt=\frac{t}{2}\sqrt{t^2+b}+\frac{b}{2}1n\left|t+\sqrt{t^2+b}\right|+C$

(B) . $\int \sqrt{a^2-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-t^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{t}{a}+C$

Misol. $\int \sqrt{x^2+2x+6}\,dx$ hisoblansin.

Buni hisoblashda to‘la kvadrat ajratib, $t=x+1,\quad b=5$ belgilashdan so‘ng (A) formula qo‘llaniladi.

$$x^2+2x+6=(x+1)^2+5.$$

$$\int \sqrt{x^2+2x+6}\,dx=\int \sqrt{(x+1)^2+5}\,d(x+1)=\frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2+5}+\frac{5}{2}1n\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+5}\right|+C$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx;$
2. $\int \frac{dx}{x(lnx+1)};$
3. $\int \frac{x}{x^2+5}dx;$
4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}};$

5. $\int \sqrt{x^2+1}\, xdx;$

6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}};$

7. $\int lnxdx;$

8. $\int xe^{3x}dx;$

9. $\int x^2 sinxdx;$

10. $\int xln(x+1)dx;$

11. $\int e^x cosxdx;$

12. $\int xarcsinxdx;$

13. $\int x^3 cosxdx;$

14. $\int e^{2x} sin2xdx;$

XULOSA

Differensiallash amaliga nisbatan integrallash amali ancha murakkabdir. Hatto ayrim elementar funksiyalarning aniqmas integrallari elementar funksiyalar sinfida mavjud bo‘lmasdan, ular maxsus (noelementar) funksiyalar orqali ifodalanadi. Bundan tashqari ixtiyoriy aniqmas integralni hisoblashga imkon beradigan universal, umumiy usul mavjud emas. Shu sababli faqat ayrim , ma’lum bir xususiyatlarga ega bo‘lgan, aniqmas integrallarni hisoblash usullarini ko‘rsatish mumkin. Ularga yoyish, differensial ostiga kiritish, o‘zgaruvchilarni almashtirish va bo‘laklab integrallash usullari kiradi.

Ko‘rsatilgan usullardan foydalanib kvadrat uchhad qatnashgan ayrim aniqmas integrallarni hisoblash mumkin.

Nazorat savollari.

1. Aniqmas integralda o‘zgaruvchini almashtirib integrallash.

2. Bo‘laklab integrallash.

3. Kvadrat uchhad qatnashgan integrallar.

4. Yoyish usulida integral qanday hisoblanadi?

5. Integralni yoyish usulida hisoblashga misol keltiring.

6. Differensial ostiga kiritish usulining mohiyati nimadan iborat?

3-§. ANIQ INTEGRAL.

Reja:

1. Aniq integralning ta’rifi.

2. Aniq integralning asosiy xossalari.

Tayanch iboralar: integral yig‘indi, aniq integral, integral ostidagi funksiya, integral ostidagi ifoda, integrallash o‘zgaruvchisi, quyi chegara, yuqori chegara, integrallanuvchi funksiya, integralning geometrik ma’nosi, integralning mexanik ma’nosi.

I. Aniq integral – matematik analizning eng muhim tushunchalaridan biridir. Egri chiziq bilan chegaralangan yuzlarni, egri chiziqli yoylar uzunliklarini, hajmlarni, bajarilgan ishlarni, yo‘llarni, inersiya momentlarini va hokazolarni hisoblash masalasi shu tushuncha bilan bog‘liq. [*a, b*] kesmada $y = f(x)$ uzluksiz funksiya berilgan bo‘lsin. Quyidagi amallarni bajaramiz.

1. [*a, b*] kesmani quyidagi nuqtalar bilan *n* ta qismga bo‘lamiz va ularni qismiy intervallar deb ataymiz.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots x_{i-1} < xi \dots < x_n = b$$

2. Qismiy intervallarning uzunliklarini bunday belgilaymiz:

$$\Delta x_1 = x_1 - a \qquad \Delta x_2 = x_2 - x_1 \ldots \qquad \Delta x_n = b - x_{n-1}$$

3. Har bir qismiy interval ichida bittadan ixtiyoriy nuqta tanlab olamiz.
$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n$.

4. Tanlangan nuqtalarda berilgan funksiyalarning qiymatini hisoblaymiz.
$f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_i), \ldots, f(\xi_n)$.

5. Funksiyaning hisoblangan qiymatlarining qismiy intervalining uzunligiga ko‘paytmasini tuzamiz.

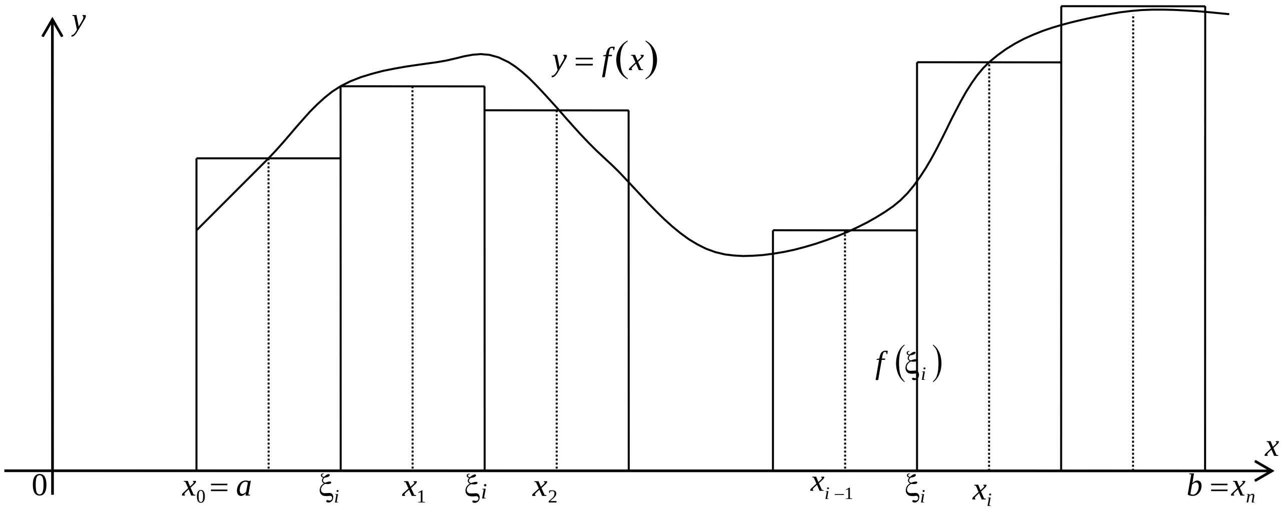
$$f(\xi_1)\Delta x_1, f(\xi_2)\Delta x_2, \ldots, f(\xi_i)\Delta x_i, \ldots, f(\xi_n)\Delta x_n$$

6. Tuzilgan ko‘paytmalarni qo‘shamiz va shu yig‘indini σ_n bilan belgilaymiz.

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_i)\Delta x_i + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

o_n yig‘indi $f(x)$ funksiya uchun [*a*, *b*] kesmada tuzilgan **integral yig‘indi** deb ataladi. σ_n integral yig‘indi qisqacha bunday yoziladi:

$$o_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



1-rasm.

Integral yig‘indining geometrik ma’nosi ravshan: Agar $f(x) \geq 0$ bo‘lsa, u holda σ_n- asoslari $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_n$ va balandliklari mos ravishda

$f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_i), \ldots, f(\xi_n)$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak yuzlarining yig‘indisidan iborat (1-rasm).

Endi bo‘lishlar soni n ni orttira boramiz $(n \to \infty)$ va bunda eng katta intervalning uzunligi nolga intilishini, ya’ni $max\, \Delta x_i \to 0$ deb faraz qilamiz.

Ushbu ta’rifni beramiz.

Ta’rif. Agar σ_n interval yig‘indi [*a*, *b*] kesmani qismiy $[x_i, x_{i-1}]$ kesmalarga ajratish usuliga va ularning har biridan ξ_i nuqtani tanlash usuliga bog‘liq bo‘lmaydigan chekli songa intilsa, u holda shu son [*a*, *b*] kesmada $f(x)$ funksiyadan olingan **aniq integral** deyiladi va bunday belgilanadi:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funksiya. [*a*, *b*] kesma integrallash oralig‘i, *a* va *b* sonlar integrallashning **quyi va yuqori chegarasi** deyiladi.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Aniq integralning ta’rifidan ko‘rinadiki, aniq integral hamma vaqt mavjud bo‘lavermas ekan. Biz quyida aniq integralning mavjudlik teoremasini isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya [*a*, *b*] kesmada uzluksiz bo‘lsa, u integrallanuvchidir, ya’ni bunday funksiyaning aniq integrali mavjuddir.

Agar yuqoridan $y = f(x) \geq 0$ funksiyaning grafigi, quyidan *OX* o‘qi, yon tomonlaridan esa $x = a,\ x = b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan sohani **egri chiziqli trapetsiya** deb atasak, u holda $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralning geometrik ma’nosi ravshan bo‘lib qoladi: $f(x) \geq 0$ bo‘lganda u shu egri chiziqli trapetsiyaning yuziga son jihatdan teng bo‘ladi.

1-izoh. Aniq integralning qiymati funksiyaning ko‘rinishiga va integrallash chegarasiga bog‘liq. Masalan:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$

2- izoh. Aniq integralning chegaralari almashtirilsa, integralning ishorasi o‘zgaradi.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

3- izoh. Aniq integralning chegaralari teng bo‘lsa, har qanday funksiya uchun

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

II. 1-xossa. O‘zgarmas ko‘paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\int_a^b k f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

(1)

Isboti.

$$\int_a^b k\, f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\, f(\xi_i)\Delta x_i = k \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\, f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx$$

2- xossa. Bir nechta funksiyaning algebraik yig‘indisining aniq integrali qo‘shiluvchilar integralining yig‘indisiga teng (ikki qo‘shiluvchi bo‘lgan hol bilan chegaralanamiz):

$$\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx \qquad (2)$$

Isboti. 1-xossaga o‘xshash isbotlanadi.

3-xossa. Agar [*a*, *b*] kesmada ikki $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiya $(a<b)$ $f(x) \geq \varphi(x)$ shartni qanoatlantirsa, ushbu tengsizlik o‘rinli.

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx$$

(3) (3)

Isboti. Shartga ko‘ra $f(x)\geq\varphi(x)$ bo‘lgani uchun $f(x)\geq\varphi(x)\geq 0$ bo‘ladi. Demak $\int_a^b[f(x)-\varphi(x)]dx\geq 0$ ni yozish mumkin, bundan $\int_a^b f(x)dx-\int_a^b\varphi(x)dx\geq 0$ ekani kelib chiqadi va nihoyat $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b\varphi(x)dx$ bo‘ladi.

4-xossa. Agar [*a, b*] kesma bir necha qismga bo‘linsa, u holda [*a, b*] kesma bo‘yicha aniq integral har bir qism bo‘yicha olingan aniq integrallar yig‘indisiga teng. [*a, b*] kesma ikki qismga bo‘lingan hol bilan cheklanamiz, ya’ni $a<b<c$ bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx=\int_b^c f(x)dx+\int_c^b\varphi(x)dx$$

(4)(4)

Isboti. 1-xossaga o‘xshash isbotlanadi.

5-xossa. Agar *m* va *M* sonlar $f(x)$funksiyaning [*a, b*] kesmada eng kichik va eng katta qiymati bo‘lsa, ushbu tengsizlik o‘rinli.

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a) \tag{5}$$

Isboti. Shartga ko‘ra $m\leq f(x)\leq M$ ekani kelib chiqadi. 3-xossaga asosan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\int_a^b m\,dx\leq\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b M\,dx \tag{5*}$$

Biroq

$$\int_a^b m\,dx=m\int_a^b dx=m\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n\Delta x_i=m(b-a)$$

$$\int_a^b M\,dx=M\int_a^b dx=M\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n\Delta x_i=M(b-a)$$

bo‘lgani uchun (5^*) tengsizlik

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

bo‘ladi.

6-xossa (<u>o‘rta qiymat haqidagi teorema</u>). Agar $f(x)$ funksiya [*a, b*] kesmada uzluksiz bo‘lsa, bu kesmaning ichida shunday *x=c* nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiyaning qiymati uning shu kesmadagi o‘rtacha qiymatiga teng bo‘ladi, ya’ni $f(c)=f_{o'rt}$.

Isboti. Faraz qilaylik *m* va *M* sonlar $f(x)$ uzluksiz funksiyaning [*a, b*] kesmadagi eng kichik va eng katta qiymati bo‘lsin. Aniq integralni baholash haqidagi xossaga ko‘ra quyidagi qo‘sh tengsizlik to‘g‘ri:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

tengsizlikning hamma qismlarini $b-a>0$ ga bo‘lamiz. Natijada

$$m\le\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\le M$$

ni hosil qilamiz. Ushbu $\mu=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$ belgilashni kiritib, qo‘sh tengsizlikni qayta yozamiz $m\le\mu\le M$.

$f(x)$ funksiya [*a, b*] kesmada uzluksiz bo‘lgani uchun u *m* va *M* orasidagi hamma oraliq qiymatlarni qabul qiladi.

Demak, biror *x=c* qiymatda $\mu=f(c)$ bo‘ladi, ya’ni $f(c)=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$ yoki $f(c)=f_{o'rt}$. Teorema isbotlandi.

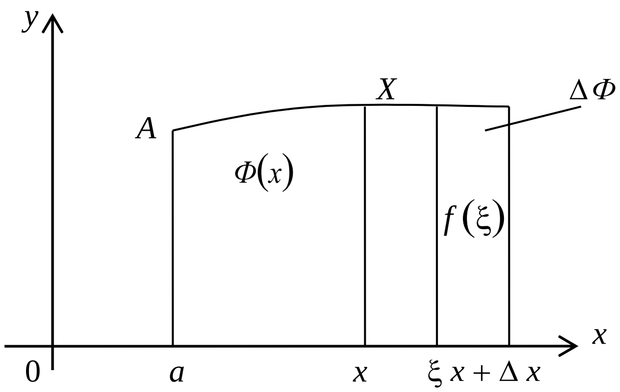
7-xossa. (Aniq integralning yuqori chegarasi bo‘yicha hosila).

Agar aniq integralda integrallashning quyi chegarasi *a* o‘zgarmas bo‘lib, yuqori chegarasi *x* esa o‘zgaruvchi bo‘lsa, u holda integralning qiymati ham o‘zgaruvchi bo‘ladi, ya’ni integral yuqori chegaraning funksiyasi bo‘ladi.

Bu funksiyani $\Phi(x)$ bilan belgilaymiz.

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\qquad x\in[a,b]\tag{1}$$

Agar $f(t) \geq 0$ bo‘lsa, u holda $\Phi(x)$ funksiyaning son qiymati egri chiziqli *aAXx* trapetsiyaning yuziga teng (1-rasm). Bu yuza *x* o‘zgarishi bilan o‘zgarib boradi.



2-rasm

$\Phi(x)$ funksiyadan *x* ga nisbatan hosila olamiz, ya’ni (1) aniq integraldan yuqori chegarasiga nisbatan hosila olamiz.

<u>1-teorema.</u> Agar $f(x)$ funksiya $x=t$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda $\Phi(x)$ funksiyaning hosilasi integral osti funksiyasining yuqori chegarasidagi qiymatiga teng, ya’ni

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

yoki

$$\Phi'(x) = f(x)$$

Isboti. *x* argumentga $\Delta(x)$orttirma berib quyidagini hosil qilamiz:

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Oxirgi integralga o‘rta qiymat haqidagi teoremani tadbiq qilamiz:

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x, \quad x < \xi < x + \Delta x$$

Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini topamiz:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(\xi)$$

Demak, $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi).$

Lekin $\Delta x\to 0$ da $\xi\to x$ bo‘lgani uchun $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)=\lim\limits_{\xi\to x} f(\xi)=f(x)$ chunki $f(x)$ funksiya $x=t$ nuqtada uzluksizdir. Shunday qilib, $\Phi'(x)=f(x)$ yoki $\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'=f(x).$

Teorema isbotlandi. Teoremadan $\Phi(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi ekanligi kelib chiqadi, chunki $\Phi'(x)=f(x)$.

XULOSA

Juda ko‘p amaliy masalalarni yechish aniq integral tushunchasiga olib keladi. Masalan, geometriyada egri chiziqli trapetsiya yuzasini topish, fizikada o‘zgaruvchi kuch bajargan ishni hisoblash, iqtisodiyotda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini aniqlash kabi masalalar shular jumlasidandir. Aniq integral berilgan funksiya va kesma bo‘yicha tuziladigan integral yig‘indining limiti kabi aniqlanadi. Berilgan kesmada chegaralangan va faqat chekli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo‘lgan funksiya uchun aniq integral mavjud bo‘ladi. Yuqorida ko‘rsatilgan masalalardan aniq integralning geometrik, mexanik va iqtisodiy ma’nolari kelib chiqadi. Aniq integral qiymatini hisoblash yoki baholash uchun uning bir qator xossalaridan foydalanish mumkin.

Nazorat savollari.

1. Funksiyaning berilgan kesma bo‘yicha integral yig‘indisi qanday hosil qilinadi?
2. Aniq integral qanday ta’riflanadi?
3. Qaysi shartda funksiya berilgan kesmada integrallanuvchi deyiladi?
4. Integrallanmovchi funksiyaga misol keltira olasizmi?
5. Qaysi shartda funksiya berilgan kesmada integrallanuvchi bo‘ladi?
6. Integralning geometrik ma’nosi nimadan iborat?

7. Integralning mexanik ma'nosi qanday ifodalanadi?
8. Integralning iqtisodiy ma'nosi nimadan iborat?
9. Aniq integralning quyi va yuqori chegaralari nima?
10. Aniq integralda quyi va yuqori chegaralar o'rni almashtirilsa nima bo'ladi?
11. Aniq integralda o'zgarmas ko'paytuvchini nima qilish mumkin?
12. Funksiyalarning algebraik yig'indisidan olingan aniq integral qanday xossaga ega?

5-§. NYUTON-LEYBNITS FORMULASI. ANIQ INTEGRALDA O'ZGARUVCHINI ALMASHTIRISH VA BO'LAKLAB INTEGRALLASH.

Reja:

1. Nyuton-Leybnits formulasi.

2. O'zgaruvchini almashtirish.

3. Aniq integralni bo'laklab integrallash.

Tayanch iboralar: yuqori chegarasi o'zgaruvchan integral, Nyuton-Leybnits formulasi, bo'laklab integrallash formulasi, o'zgaruvchilarni almashtirish usuli, kvadratur formulalar, to'g'ri to'rtburchaklar formulasi, trapetsiyalar formulasi.

I. Aniq integrallarni integral yig'indining limiti sifatida bevosita hisoblash ko'p hollarda juda qiyin, uzoq hisoblashlarni talab qiladi va amalda juda kam qo'llaniladi. Integrallarni topish formulasi Nyuton-Leybnits teoremasi bilan beriladi.

<u>Teorema.</u> Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda aniq integral boshlang'ich funksiyaning integrallash oralig'idagi orttirmasiga teng, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{1}$$

(1) tenglik **Nyuton-Leybnits formulasi** deyiladi.

Isboti. $F(x)$ funksiya $f(x)$funksiyaning biror boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin, u holda 1-teoremaga ko‘ra $\int_a^x f(t)dt$ funksiya ham $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladi. Berilgan funksiyaning ikkita istalgan boshlang‘ich funksiyalari bir-biridan o‘zgarmas C qo‘shiluvchiga farq qiladi, ya’ni $\Phi(x)=F(x)+C$.

Shuning uchun: $\int_a^x f(t)dt=F(x)+C$, C o‘zgarmas miqdorni aniqlash uchun bu tenglikda $x=a$ deb olamiz:

$\int_a^x f(t)dt=F(x)+C$ $\int_a^x f(t)dt=0$

bo‘lgani uchun $F(a)+C=0$. Bundan, $C=-F(a)$. Demak,

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$$

Endi $x=b$ deb Nyuton-Leybnits formulasini hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

yoki integrallash o‘zgaruvchini x bilan almashtirsak:

$$\int_a^b f(z)dx=F(b)-F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

Teorema isbotlandi.

Integral ostidagi funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi ma’lum bo‘lsa, u holda Nyuton-Leybnits formulasi aniq integrallarni hisoblash uchun amalda qulay usulni beradi. Faqat shu formulaning kashf etilishi aniq integralni hozirgi zamonda matematik analizda tutgan o‘rnini olishga imkon bergan. Nyuton-Leybnits formulasi aniq integralning tadbiqi sohasini ancha kengaytirdi, chunki matematika bu formula yordamida xususiy ko‘rinishdagi turli masalalarni yechish uchun umumiy usulga ega bo‘ldi.

Misollar.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctg\,x\Big|_0^1 = arctg1 - arctg\,0 = \frac{\pi}{4}$

2. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{d\left(1+x^2\right)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1+x^2\right) = \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} = \sqrt{9}-\sqrt{4} = 3-2 = 1$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos 2x\right) dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$

II. Bizga $\int_a^b f(x)dx$ aniq integral berilgan bo‘lsin, bunda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksizdir.

$x=\varphi(t)$ deb yangi o‘zgaruvchi kiritamiz, bunda $\varphi(t)$ va uning hosilasi $\varphi'(t), [\alpha,\beta]$ kesmada uzluksiz bo‘lsin.

Faraz qilaylik, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ bo‘lsin. Bu shartlar bajarilganda quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (2)$$

Bu tenglikni isbotlash uchun (2) formulaning o‘ng va chap qismlariga Nyuton-Leybnits formulasini qo‘llaymiz:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a);$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a)$$

Aniq integral (2) formula bo‘yicha hisoblanganda yangi o‘zgaruvchidan eski o‘zgaruvchiga qaytish kerak emas, balki eski o‘zgaruvchining chegaralarini keyingi boshlang‘ich funksiyaga qo‘yish kerak.

Misol.

1. $\displaystyle\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $x+1=t^2$ deb almashtirsak, $x=t^2-1,\ dx=2t\,dt$ bo‘ladi. Integrallashning yangi chegaralari: x=3 bo‘lganda t=2

x=8 bo‘lganda t=3.

U holda

$$\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}=\int_2^3 \frac{(t^2-1)2t\,dt}{t}=2\int_2^3 (t^2-1)\,dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3=2\left(6-\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{3}$$

2. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $x=\sin t$ deb almashtirsak, $dx=\cos t\,dt$, $1-x^2=\cos^2 t$ bo‘ladi. Integrallashning yangi chegaralarini aniqlaymiz: x=0 bo‘lganda t=0

x=1 bo‘landa $t=\frac{\pi}{2}$.

U holda

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

III. Faraz qilaylik, $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a,\ b]$ kesmada differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin. U holda $(uv)'=u'v+uv'$.

Bu tenglikni ikkala tomonini a dan b gacha bo‘lgan oraliqda integrallaymiz.

$$\int_a^b (uv)'\,dx=\int_a^b u'v\,dx+\int_a^b uv'\,dx \qquad (3)$$

Lekin $\int (uv)'\,dx=uv+C$ bo‘lgani sababli

$$\int (uv)'\,dx=uv\Big|_a^b$$

Demak, (2) tenglikni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$uv\Big|_a^b=\int_a^b v\,du+\int_a^b u\,dv$$

Bundan

$$\int_a^b v\,du=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du$$

(4)

Bu formula aniq integralni **bo‘laklab integrallash formulasi** deyiladi.

Misol.

1. $\int_0^1 arctg\, x\, dx = \left| \begin{matrix} u = arctg\, x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| = x\, arctg\, x \Big|_0^1 - \int_0^1 \dfrac{x\,dx}{1+x^2} = arctg\, 1 -$

$-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2$

2. $\int_0^1 x e^{-x} dx$ integral hisoblansin.

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x} dx & v = -e^{-x} \end{matrix} \right| = -x e^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 =$$

$$= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e};$$

Izoh: Ba’zi integrallarni hisoblashda bo‘laklab integrallash formulasini bir necha marta qo‘llash mumkin.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

Quyidagi aniq integrallarni hisoblang.

1. $\int_0^5 x^4\, dx;$
2. $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx;$
3. $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx;$
4. $\int_0^2 (x^2 - 3x + 1)\, dx;$
5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}};$
6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$

7. $\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\, dx;$

8. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{cos^2x};$

9. $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{sin^2x};$

10. $\int_0^{3} e^{\frac{x}{3}}\, dx;$

11. $\int_2^{3} \frac{dx}{x^3};$

12. $\int_0^{1} 3^x\, dx;$

13. $\int_0^{1} \frac{x^3}{x^2+1}\, dx;$

14. $\int_a^{\sqrt{3a}} \frac{dx}{x^2+a^2};$

15. $\int_1^{e} \frac{x^2+lnx}{x}\, dx;$

16. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x-(arctgx)^2}{1+x^2}\, dx;$

17. $\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1-\ln(x-1)}{x-1}\, dx;$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{sinx}\, cosx\, dx;$

19. $\int_0^{\pi/3} \frac{sinx}{\sqrt{cos^2x+1}}\, dx;$

20. $\int_0^{1} x^2 \cdot e^{x^3}\, dx;$

21. $\int_0^{\pi/2} x\, sinx\, dx;$

22. $\int_1^e x\ln x\,dx;$

23. $\int_{-1}^{0}(x^2+1)\sin 2x\,dx;$

24. $\int_{-\pi}^{0} x\sin x\cos x\,dx;$

25. $\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx;$

26. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 x\,dx;$

27. $\int_0^{\pi/2}\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx;$

28. $\int_0^1 x^2 e^x\,dx;$

29. $\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}};$

30. $\int_1^2\frac{dx}{x^2+5x+6};$

XULOSA

Oldin aniq integral ta’rifga asosan integral yig‘indining limiti singari aniqlanishini ko‘rgan edik. Ammo kamdan-kam funksiyaning aniq integralini bevosita ta’rif bo‘yicha hisoblash mumkin. Bunda juda murakkab hisoblashlarni bajarishga to‘g‘ri keladi. Shu sababli aniq integralni qulay va osonroq hisoblash usulini topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masalaning javobi Nyuton-Leybnits formulasi orqali beriladi. Bu formula integral hisobning eng asosiy formulasi bo‘lib, aniq va aniqmas integrallar orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi. Agar berilgan aniq integralni to‘g‘ridan-to‘g‘ri Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblash murakkab bo‘lsa, unda ayrim hollarda bo‘laklab integrallash yoki o‘zgaruvchilarni almashtirish usullaridan foydalanish mumkin.

Bir qator hollarda integralning aniq qiymatini topish masalasi juda murakkab bo‘lishi mumkin. Bunday hollarda aniq integral qiymatini taqribiy hisoblash usullariga murojaat qilinadi. Ularga to‘g‘ri to‘rtburchaklar va trapetsiyalar formulalarini misol qilib ko‘rsatib bo‘ladi.

Nazorat savollari.

1. 1. Yuqori chegarasi o‘zgaruvchan integralning hosilasi nimaga teng?
2. Nyuton-Leybnits formulasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
3. Aniq integralni bo‘laklab integrallash formulasini keltirib chiqaring.
4. Aniq integralda o‘zgaruvchilarni almashtirish formulasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
5. Aniq integralni taqribiy hisoblash masalasi qayerdan paydo bo‘ladi?

5-§. ANIQ INTEGRALNING GEOMETRIYAGA TADBIQI

Reja:

1. **Figuralar yuzlarini Dekart koordinatalar sistemasida hisoblash.**
2. **Figuralar yuzlarini qutb koordinatalarida hisoblash.**
3. **Egri chiziq yoyining uzunligi.**
4. **Qutb koordinatalar sistemasida egri chiziq yoyining uzunligi.**
5. **Jism hajmini parallel kesimlarning yuzalari bo‘yicha hisoblash.**
6. **Aylanma jismning hajmi.**
7. **Aniq integralni mexanikaga tadbiqi.**
8. **Inersiya momentini aniq integral yordami bilan hisoblash.**

Tayanch iboralar: egri chiziqli trapetsiya yuzasi, tekislikdagi shakl yuzasi, egri chiziq yoyi uzunligi, ko‘ndalang kesim bo‘yicha jism hajmi, aylanma jism hajmi, o‘zgaruvchi kuch bajargan ish.

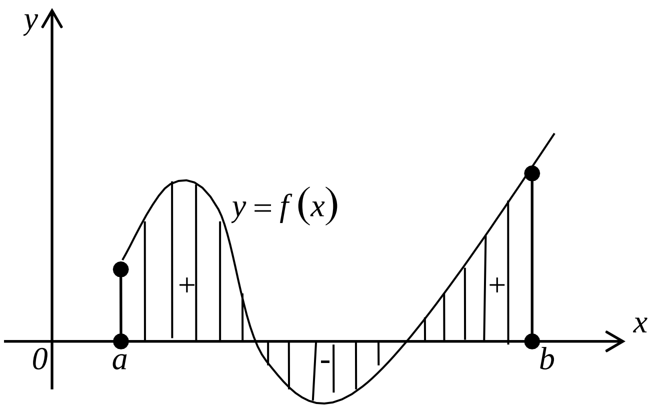
I. a) Avvalgi o‘tilgan mavzulardan ma’lumki, agar $[a, b]$ kesmada funksiya $f(x) \geq 0$ bo‘lsa, u holda $y = f(x)$ egri chiziq, OX o‘qi va $x=a$ hamda $x=b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

ga teng bo‘ladi. Agar $[a, b]$ kesmada $f(x) \leq 0$ bo‘lsa, u holda aniq integral $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ bo‘ladi.

Absolyut qiymatiga ko‘ra bu integralning qiymati ham tegishli egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx \qquad (1')$$



1-rasm

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada ishorasini chekli son marta o‘zgartirsa, u holda integralni butun $[a,b]$ kesmada qismiy kesmachalar bo‘yicha integrallar yig‘indisiga ajratamiz. $f(x) > 0$ bo‘lgan kesmalarda integral musbat, $f(x) < 0$ bo‘lgan kesmalarda integral manfiy bo‘ladi. Butun kesma bo‘yicha olingan integral OX o‘qidan yuqorida va pastda yotuvchi yuzlarning tegishli algebraik yig‘indisini beradi (1-rasm). Yuzlar yig‘indisini odatdagi ma’noda hosil qilish uchun yuqorida ko‘rsatilgan kesmalar bo‘yicha olingan integrallar absolyut qiymatlari yig‘indisini topish yoki

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

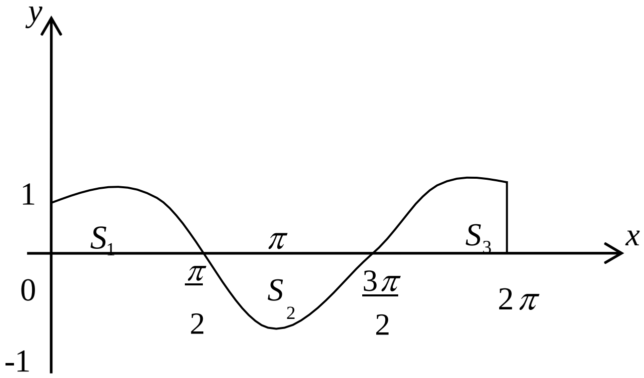
$(1'')$

integralni hisoblash kerak.

b) Agar $y_1=f_1(x)$ va $y_2=f_2(x)$ egri chiziqlar hamda $x=a$ va $x=b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini hisoblash kerak bo‘lsa, u holda $f_1(x)\geq f_2(x)$ shart bajarilganda figuraning yuzi quyidagiga teng:

$$S=\int_a^b \left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx$$

1- **misol.** $y=cosx$, $y=0$ chiziqlar bilan figuraning yuzi hisoblansin, bunda $x\in[0,2\pi]$.



2-rasm

Yechish.

$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ va $x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$da $\cos x\geq 0$ hamda $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$da $\cos x\leq 0$ bo‘lgani uchun

$$S=\int_0^{2\pi}|\cos x|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-\cos x)\,dx\right|+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos x\,dx=$$

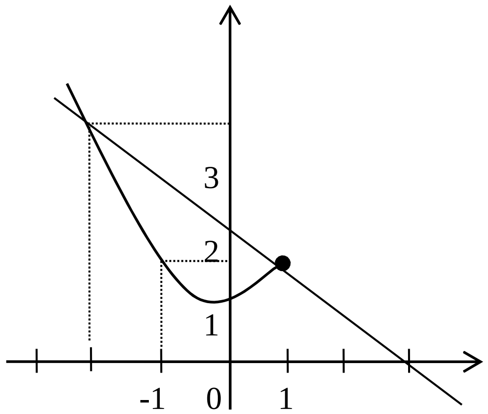
$$=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\left|\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right|+\sin x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0+\left|\sin\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right|+\sin 2\pi-\sin\frac{3\pi}{2}=$$

$$=1+|-1-1|-(-1)=4$$

Demak, $S=4$ (kv.birlik)

2-misol. $y=x^2+1$ va $y=3-x$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini hisoblang.

Yechish. Figurani yasash uchun avval ushbu $\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=3-x \end{cases}$ sistemani yechib, chiziqlarning kesishish nuqtalarini topamiz.



3-rasm

Bu chiziqlar A(-2; 5) va B (1; 2) nuqtalarda kesishadi. U holda

$$S=\int_{-2}^{1}(3-x)dx-\int_{-2}^{1}\left(x^2+1\right)dx=\int_{-2}^{1}\left(2-x-x^2\right)dx=\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-4-\frac{4}{2}+\frac{8}{3}\right)=\frac{9}{2}\ (kv.birl.)$$

b) Agar egri chiziqli trapetsiyaning yuzi $x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$ tenglamalari parametrik shaklda berilgan chiziq bilan chegaralangan bo‘lsa, bunda bu tenglamalar [a, b] kesmadagi biror $y=f(x)$ funksiyani aniqlaydi, bunda $t\in[\alpha,\beta]$ va $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$.

U holda egri chiziqli trapetsiyaning yuzi $S=\int_a^b y\,dx$ formula bo‘yicha hisoblanishi mumkin bo‘ladi. Bu integralda o‘zgaruvchini almashtiramiz:

$x=\varphi(t),\quad dx=\varphi(t)dt$

$$y=f(x)=f(\varphi(t))=\psi(t)$$

Demak,

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

Bu formula chiziq parametrik tenglamalar bilan berilganda egri chiziqli trapetsiyaning yuzini hisoblash formulasidir.

3-misol. $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$ ellips bilan chegaralangan sohaning yuzi hisoblansin.

Yechish. Ellipsning yuqori yarim yuzini hisoblab, uni 2 ga ko‘paytiramiz.

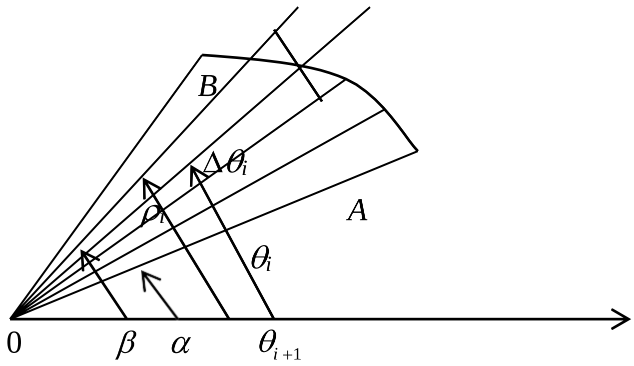
$-a \le x \le +a$ uchun

$-a = a\cos t, \quad \cos t = -1, \quad t = \pi$

$a = a\cos t, \quad \cos t = 1, \quad t = 0$

$$S = 2\int_{\pi}^{0} b\sin t\left(-a\sin t\, dt\right) = -2ab\int_{\pi}^{0} \sin^2 t\, dt = \pi ab .$$

II. AB egri chiziq qutb koordinatalarida $\rho = f(\theta)$ formula bilan berilgan va $f(\theta)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz bo‘lsin.



4-rasm

Ushbu $\rho = f(\theta)$ egri chiziq va qutb o‘qlari bilan α va β burchak hosil qiluvchi 2 ta $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ nurlar bilan n ta ixtiyoriy qismlarga bo‘lamiz. O‘tkazilgan nurlar orasidagi burchaklarni $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, ..., \Delta\theta_n$ bilan belgilaymiz.

θ_{i-1} bilan θ_i orasidagi biror $\bar{\theta}_i$ burchakka mos nurning uzunligini $\bar{\rho}_i$ orqali belgilaymiz. Radiusi $\bar{\rho}_i$ va markaziy burchagi $\Delta\theta_i$ bo‘lgan doiraviy sektorni qaraymiz. Uning yuzi $\Delta S_i = \frac{1}{2}\bar{\rho}_i^2 \Delta\theta_i$ ga teng bo‘ladi.

Ushbu yig‘indi

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^2 \Delta\theta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}$$

$2 \quad {}_{i=1}$

Σ

$\left[f(\theta) \right.$

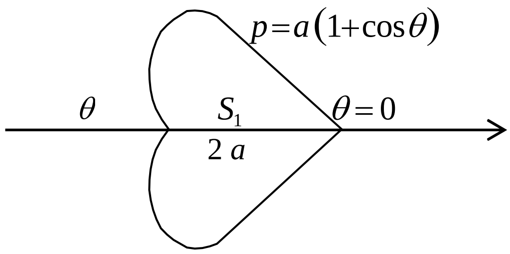
$\left. \right]^2 \Delta\theta$

zinapoyasimon sektorning yuzini beradi.

Bu yig‘indi $\alpha \le \theta \le \beta$ kesmada $\rho^2 = |f(\theta)|^2$ funksiyaning integral yig‘indisi bo‘lgani sababli uning limiti $\max \Delta\theta_i \to 0$ da $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, d\theta$ aniq integralga teng. Bu $\Delta\theta_i$ burchak ichida qanday ρ_i nur olishimizga bog‘liq emas. Demak, *OAB* sektorning yuzi:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta$$

4-misol. $\rho = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$ kardioida bilan chegaralangan figuraning yuzini hisoblang.



5-rasm

$$S = 2S_1 = 2\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta$$

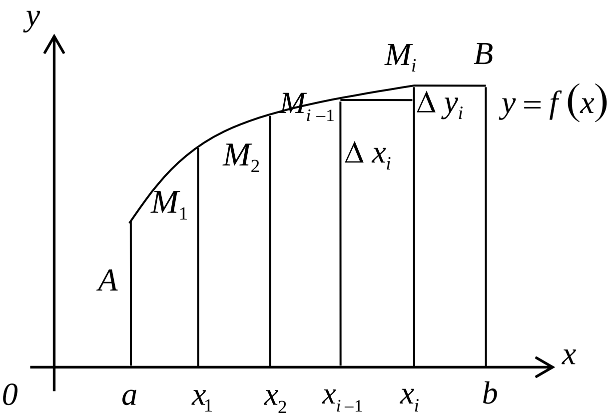
$$S = \int_0^{\pi} a^2 (1+\cos\theta)^2 d\theta = a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) d\theta = a^2 \left(\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta \right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{3}{2}\pi a^2; \quad S = \frac{3}{2}\pi a^2 \quad (kv.birlik)$$

III. Tekislikda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida egri chiziq $y = f(x)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsin.

Bu egri chiziqning $x=a$ va $x=b$ vertikal to‘g‘ri chiziqlar orasidagi *AB* yoyining uzunligini topamiz.



6- rasm

AB yoyda abssissalari $a=x_0, x_1, x_2,..., x_i,..., x_n=b$ bo‘lgan $A, M_1, M_2,..., M_i,..., B$ nuqtalarni olamiz va $AM_1, M_1, M_2,..., M_{n-1}$ $M_n = A + B$ vatarlarni o‘tkazamiz, ularning uzunliklarini mos ravishda $\Delta S_1, \Delta S_2,..., \Delta S_n$ bilan belgilaymiz. *AB* yoy ichiga chizilgan siniq chiziqning uzunligi

$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$ bo‘lgani uchun *AB* yoyning uzunligi

$$S = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \qquad (4)$$

bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya va uning $f'(x)$ hosilasi [*a*, *b*] kesmada uzluksiz bo‘lsin. U holda

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

yoki Lagranj teoremasiga asosan

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{xi - x_{i-1}} = f'(\xi) \quad \text{bunda}$$

$x_{i-1} < \xi < x_i$ bo‘lgani uchun

$\Delta S_i = \sqrt{1 + (f'(\xi))^2}\ \Delta x_i$ bo‘ladi.

Ichki chizilgan siniq chiziqning uzunligi esa

$$\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi))^2}\ \Delta x_i$$

bo‘ladi.

Shartga ko‘ra $f'(x)$ funksiya uzluksiz, demak, $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ funksiya ham uzluksizdir. Shuning uchun integral yig‘indining limiti mavjud va u quyidagi aniq integralga teng:

$$S=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(\xi))^2}\,\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+(f'(\xi))^2}\,dx$$

Demak, yoy uzunligini hisoblash formulasi:

$$S=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (5)$$

ekan. Endi egri chiziq tenglamasi

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad \alpha\le t\le\beta \qquad (6)$$

parametrik ko‘rinishda berilgan bo‘lsin, bunda $\varphi(t)$va $\psi(t)$ uzluksiz hosilali uzluksiz funksiyalar va $\varphi'(t)$ berilgan oraliqda nolga aylanmaydi.

Bu holda (6) tenglama biror $y=f(x)$ funksiyani aniqlaydi. Bu funksiya uzluksiz bo‘lib $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ uzluksiz hosilaga ega. $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta)$ bo‘lsin. (5) integralda $x=\varphi(t),\ dx=\varphi'(t)dt$ almashtirish bajaramiz. U holda

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\cdot\varphi'(t)\,dt$$ yoki

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt \qquad (7)$$

Agar egri chiziq fazoda

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t) \qquad (8)$$

parametrik tenglamalar bilan berilgan va $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ funksiyalar[a, b] kesmada uzluksiz hamda uzluksiz hosilalarga ega bo‘lsa, egri chiziq aniq limitlarga ega bo‘ladi va u

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt \qquad (9)$$

formula bilan aniqlanadi.

IV. Qutb koordinatalar sistemasida egri chiziqning tenglamasi

$$\rho=f(\theta) \qquad (10)$$

bo‘lsin. Qutb koordinatalaridan Dekart koordinatalariga o‘tish formulasi: $x=\rho\cos\theta,\ \ y=\rho\sin\theta$ yoki (10) dan foydalansak:

$$x=f(\theta)\cos\theta,\ y=f(\theta)\sin\theta$$

Bu tenglamalarga egri chiziqning parametrik tenglamalari deb qarab, yoy uzunligini hisoblash uchun (7) formulani tadbiq qilamiz.

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$$

U holda

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(f'(\theta))^2+(f(\theta))^2=\rho'^2+\rho^2$$

Demak,

$$S=\int_{\theta_2}^{\theta_1}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\theta$$

(11)

Misollar.

1) $x^2+y^2=r^2$ aylana uzunligi hisoblansin.

Yechish. Dastlab aylananing 1-kvadrantda yotgan to‘rtdan bir qismining uzunligini hisoblaymiz. U holda *AB* yoyning tenglamasi

$$y=\sqrt{r^2-x^2}, \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}};$$

$$\frac{1}{4}S=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=r\cdot\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^2=r\cdot\frac{\pi}{2}$$

Butun aylananing uzunligi: $S=2\pi r$.

2) $\rho=a(1+cos\theta)$ kardiodaning uzunligi topilsin. Kardioida qutb o‘qiga nisbatan simmetrikdir. θ qutb burchagini 0 dan π gacha o‘zgartirib, izlanayotgan uzunlikning yarmini topamiz (5-rasm). (11) formuladan foydalanamiz, bunda

$$\rho' = -a\sin\theta$$

$$S = 2\cdot\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+cos\theta)^2 + a^2 \sin^2\theta}\,d\theta = 2a\sqrt{2+2\,cos\theta}\,d\theta =$$

$$=4a\cdot\int_0^{\pi} cos\frac{\theta}{2} = 8a\cdot sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8\,a\cdot 1 = 8\,a$$

3) $x=a\,cos\,t,\quad y=b\,sin\,t,\quad 0\le 1\le 2\,\rho$ ellipsning uzunligi hisoblansin, bunda $a>b$.

Yechish. (4) formuladan foydalanamiz. Avval yoy uzunligining 1/4 qismini hisoblaymiz.

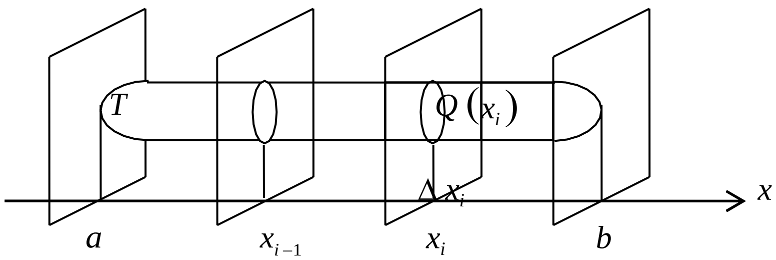
$$\frac{S}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2 cos^2 t}\,d\,t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\left(1-cos^2 t\right)+b^2 cos^2 t}\,d\,t =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-\left(a^2-b^2\right)cos^2 t}\,d\,t = a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a}cos^2 t}\,d\,t = a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2 cos^2 t}\,d\,t$$

bunda $k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1.$

Demak, $S=4\,a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\cos^2 t}\,d\,t$.

IV. Biror *T* jism berilgan bo‘lsin. Bu jismni *OX* o‘qqa perpendikulyar tekislik bilan kesishdan hosil bo‘lgan har qanday kesimning yuzi ma’lum deb faraz qilamiz. Bu holda yuza kesuvchi tekislikning vaziyatiga bog‘liq, ya’ni *x* ning funksiyasi bo‘ladi:



7- rasm

Q (*x*) ni uzluksiz funksiya deb faraz qilib, berilgan jism hajmini aniqlaymiz.

$x = x_0 = a,\ x = x_1, x = x_2, ..., x = x_n = b$ tekisliklarni o‘tkazamiz. Har bir $x_{i-1} \le x \le x_i$ qismiy oraliqda ixtiyoriy ξ_i nuqta tanlab olamiz va *i* ning har bir qiymati uchun yasovchisi *x* lar o‘qiga parallel bo‘lib, yo‘naltiruvchisi *T* jismni $x = \xi_i$ tekislik bilan kesishdan hosil bo‘lgan kesimning konturidan iborat bo‘lgan silindrik jism yasaymiz. Asosining yuzi $Q(\xi_i)$ va balandligi Δx_i bo‘lgan bunday elementar silindrning hajmi $Q(\xi_i)\Delta x_i$ ga teng. Hamma silindrlarning hajmi $v_n = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i$ bo‘ladi. Bu yig‘indining $\max \Delta x_i \to 0$ dagi limiti berilgan **jismning hajmi** deyiladi:

$$v_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i$$

v_n miqdor [*a*, *b*] kesmada uzluksiz *Q*(*x*) funksiyaning integral yig‘indisidir, shuning uchun limit mavjud va u

$$v = \int_a^b Q(x)\,dx \tag{12}$$

aniq integral bilan ifodalanadi.

Misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoidning hajmi hisoblansin.

Yechish. Ellipsoidni *OYZ* tekislikka parallel bo‘lib undan *x* masofa uzoqlikdan o‘tgan tekislik bilan kesganda yarim o‘qlari

$b_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$; $c_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ bo‘lgan

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1$$ ellips hosil bo‘ladi.

Bu ellipsning yuzi: $Q(x) = \pi b_1 c_1 = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$

Ellipsoidning hajmi:

$$v = \pi bc \int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc \ \ (kub\,birl.)$$

V. $y=f(x)$ egri chiziq, *OX* o‘q va *x=a, x=b* to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning OX o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismni qaraylik. Bu jismni abssissalar o‘qiga perpendikulyar tekislik bilan kesishdan hosil bo‘lgan ixtiyoriy kesim doira bo‘ladi. Uning yuzi $Q=\pi y^2=\pi\left(f(x)\right)^2$.

Hajmni hisoblash (12) umumiy formulasini tadbiq etib, aylanma jismning hajmini hisoblash formulasini hosil qilamiz:

$$v=\pi\int_a^b y^2 dx=\pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \qquad (13)$$

Misol. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsni *OX* va *OY* o‘qlari atrofida aylantirish natijasida hosil qilingan jismlarning hajmlarini hisoblang.

Yechish. Ellips tenglamasidan:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right); \qquad x^2=\frac{a^2}{b^2}\left(b^2-y^2\right)$$

Ellipsni *OX* o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jismning hajmi:

$$V=2V_1=2\pi\int_0^a y^2 dx=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a\left(a^2-x^2\right)dx=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi ab^2 \qquad V=\frac{4}{3}\pi ab^2 \quad (kub\ birl.)$$

Ellipsni *OY* o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jismning hajmi:

$$V=2V_1=2\pi\int_0^b x^2 dy=2\pi\frac{a^2}{b^2}\int_0^b\left(b^2-y^2\right)dy=2\pi\frac{a^2}{b^2}\left(b^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^b=$$

$$=2\pi\frac{a^2}{b^2}\left(b^3-\frac{b^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi ab^2 \qquad V=\frac{4}{3}\pi a^2 b \quad (kub\ birl.)$$

VI. Biror *F* kuch ta’siri ostida *M* moddiy nuqta *OS* to‘g‘ri chiziq bo‘yicha harakat qilsin, bunda kuchning yo‘nalishi harakat yo‘nalishi bilan bir xil bo‘lsin. *M* nuqta *S=a* holatdan *S=b* holatga ko‘chganda *F* kuchning bajargan ishi topilsin.

1) Agar *F* kuch o‘zgarmas bo‘lsa, u holda *A* ish *F* kuch bilan o‘tilgan yo‘l uzunligi ko‘paytmasi bilan ifodalanadi:

$$A = F\,(b - a)$$

2) *F* kuch moddiy nuqtaning olgan o‘rniga qarab uzluksiz o‘zgaradi, ya’ni [*a*, *b*] kesmada *F*(*S*) uzluksiz funksiyani ifodalaydi, deb faraz qilamiz. [*a*, *b*] kesmani uzunliklari $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ bo‘lgan *n* ta ixtiyoriy bo‘lakka bo‘lamiz. Har bir $|S_{i-1}, S_i|$ qismiy kesmada ixtiyoriy ξi nuqta tanlab olib, *F*(*S*) kuchning ΔS_i yo‘lda bajargan ishini $F(\xi i)\Delta S_i$ ko‘paytma bilan almashtiramiz. Oxirgi ifoda ΔS_i yetarlicha kichik bo‘lganda *F* kuchning ΔS_i yo‘lda bajargan ishining taqribiy qiymatini beradi.

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta S_i$$

yig‘indi *F* kuchning [*a*, *b*] kesmada bajargan ishining taqribiy ifodasi bo‘ladi. Bu yig‘indining $\max \Delta S_i \to 0$ dagi limiti *F*(*S*) kuchning *S*=*a* nuqtadan *S*=*b* nuqtagacha bo‘lgan yo‘lda bajargan ishini ifodalaydi:

$$A = \int_a^b F(S)\,dS \qquad (14)$$

Misol. Agar prujina 1*H* kuch ostida 1*sm* cho‘zilishi ma’lum bo‘lsa, uni 4*sm* cho‘zish uchun qancha ish bajarish kerak?

Yechish. Guk qonuniga ko‘ra prujinani *x m* ga cho‘zuvchi kuch *F*=*kx*; Agar *x*=0,01*m* va *F*=1*H* ekanligini hisobga olsak, u holda $k = \frac{F}{x} = \frac{1}{0,01} = 100$ kelib chiqadi.

Demak, *F*=100*x*. Bajarilgan ish ekanligini hisobga olsak

$$A = \int_0^{0,04} 100x\,dx = 50x^2\Big|_0^{0,04} = 0,08\,(j)$$

VII. *XOY* tekisligida massalari $m_1, m_2, ..., m_n$ bo‘lgan $P_1(x_1, y_1), P_1(x_2, y_2), ..., P_1(x_n, y_n)$ moddiy nuqtalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Mexanikadan ma’lumki, moddiy nuqtalar sistemasining *O* nuqtaga nisbatan inersiya momenti:

$$J_0 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 + y_i^2\right)m_i = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i \qquad (15)$$

bunda $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$.

Faraz qilamiz, egri chiziq moddiy chiziqdan iborat bo‘lib, u $y = f(x)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsin va [*a, b*] kesmada *f* (*x*) uzluksiz funksiya bo‘lsin. Egri chiziqning chiziqli zichligi γ ga teng bo‘lsin. Bu chiziqni uzunliklari $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ bo‘lgan *n* ta bo‘laklarga bo‘lamiz, bunda $\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$, ularning massalari $\Delta m_1 = \gamma \Delta S_1, \Delta m_2 = \gamma \Delta S_2, ..., \Delta m_n = \gamma \Delta S_n$ bo‘lsin. Yoyning har bir qismida abssissasi ξ_i va ordinatasi $\eta_i = f(\xi_i)$ bo‘lgan nuqtalar olamiz. Yoyning 0 nuqtaga nisbatan inersiya momenti:

$$J_0 \approx \sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i^2 + \eta_i^2\right)\gamma \Delta S_i \qquad (16)$$

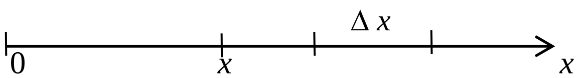
Agar $y = f(x)$ funksiya va uning hosilasi $f'(x)$ uzluksiz bo‘lsa, u holda $\Delta x_i \to 0$ da (16) yig‘indi limitga ega va bu limit moddiy chiziqning inersiya momentini ifodalaydi:

$$J_0 = \gamma \int_a^b \left(x^2 + f^2(x)\right)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

(17)

1. Uzunligi l bo‘lgan ingichka bir jinsli tayoqchaning (sterjenning) oxirgi uchiga nisbatan inersiya momenti.

Tayoqchani *OX* o‘q kesmasi bilan ustma-ust joylashtiramiz $0 \le x \le l$



8-rasm

Bu holda $\Delta S_i = \Delta x_i, \quad \Delta m_i = \gamma \Delta x_i, \quad r_i^2 = x_i^2$

(17) formula quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$J_{0c} = \gamma \int_0^1 x^2\, dx = \gamma \frac{l^3}{3}$$

(18)(18)

Agar tayoqchani massasi *M* berilgan bo‘lsa, u holda $\gamma = \frac{M}{l}$ va (18) formula quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$J_{0c} = \frac{1}{3} M l^2$$

(19)(19)

2. Radiusi r bo‘lgan aylananing markaziga nisbatan inersiya momenti.

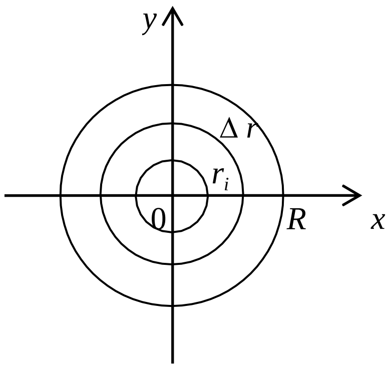
Aylananing barcha nuqtalari uning markazidan bir xil masofada bo‘lgan va massasi $m = 2\pi r \gamma$ bo‘lgani uchun, aylananing inersiya momenti quyidagicha bo‘ladi:

$$J_0 = m r^2 = \gamma 2\pi r\, r^2 = 2\pi r^3 \gamma$$

(20) (20)

3. Radiusi R bo‘lgan bir jinsli doiraning markaziga nisbatan inersiya momenti.

Doirani *n* ta halqalarga ajratamiz. *S* – doira yuzi birligining massasi bo‘lsin. Bitta halqani olib qaraymiz.



9-rasm

Bu halqaning ichki radiusi r_i , tashqi radiusi $r_i + \Delta r_i$ bo‘lsin. Bu halqaning massasi $\Delta m_i = \delta 2\pi r_i \Delta r_i$ ga teng bo‘ladi. Bu massaning markazga nisbatan inersiya momenti (17) formulaga muvofiq taqriban quyidagiga teng bo‘ladi:

$$(\Delta J_0)_i \approx \delta 2\pi r_i \Delta r_i\, r_i^2 = \delta 2\pi r_i^3 \Delta r_i$$

Butun doiraning inersiya momenti:

$$J_0 \approx \sum_{i=1}^{n} \delta 2\pi r_i^3 \Delta r_i$$

$\Delta r_i \to 0$ da limitga o‘tib, doira yuzining markazga nisbatan inersiya momentini hosil qilamiz:

$$J_0 = \delta 2\pi r^3 dr = \pi\delta\frac{R^4}{2}$$

(21)(
2
1
)

Agar doiraning massasi M berilgan bo‘lsa, u holda sirt zichligi δ quyidagiga teng bo‘ladi: $\delta = \frac{M}{\pi R^2}$; bu qiymatni (18) ga qo‘ysak:

$$J_0 = \frac{MR^2}{2}$$

(22) (22)

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.

1. $y = 16 - x^2, \quad y = 0.$
2. $y = x^2, \quad y = 4.$
3. $y = x^2 - 5x + 6, \quad y = 0.$
4. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 2.$
5. $y = sinx, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}.$
6. $y = \frac{1}{x}, \quad x = 1, \quad x = e, \quad y = 0.$
7. $y = x^2, \quad y = 4 - x^2.$
8. $y = -x^2 - 4x + 5, \quad y = 0.$
9. $y = x^2 + 4, \quad y = x + 6.$
10. $y = lnx, \quad y = 0, \quad x = e.$
11. $y^2 = 2x + 6, \quad x = 0.$
12. $y = tgx, \quad x = \frac{\pi}{4}, \quad y = 0.$

Qo’yidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning aylanishidan hosil bo’lgan jismlarni hajmini toping.

1. $y = x^2 \quad y = 4, \quad OY$ o’qi atrofida.

2. $y = \frac{1}{x}$ $x = 1,$ $x = e,$ OX o’qi atrofida.

3. $y = sinx,$ $x = 0,$ $x = \pi,$ $y = 0,$ OX o’qi atrofida.

4. $y = lnx,$ $x = e,$ $y = 0,$ OX o’qi atrofida.

5. $y = 2^x,$ $x = 0,$ $x = 2,$ $y = 0,$ OY o’qi atrofida.

6. $y = \frac{1}{x^2},$ $y = 0,$ $x = 1,$ $x = 2,$ OY o’qi atrofida.

7. $y = -x^2 + 4,$ $y = 0,$ OX o’qi atrofida.

8. $y = \sqrt{x},$ $x = 16,$ $y = 0,$ OY o’qi atrofida.

9. $y = cosx \ va \ y = -1,$ $-\pi \leq x \leq \pi$ bo’lganda $y = -1$ to’g’ri chiziq atrofida.

XULOSA

Oldin aytilgandek aniq integral juda ko‘p amaliy masalalarni yechish uchun qo‘llaniladi. Geometriyada aniq integraldan turli ko‘rinishdagi egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalarini hisoblash, egri chiziq yoyining uzunligini topish, jismlar hajmini aniqlash kabi masalalarni yechishda foydalaniladi. Aniq integralning mexanik tatbiqlariga misol sifatida kuch bajargan ishni hisoblash, notekis harakatda bosib o‘tilgan masofani aniqlash, sim massasini topish kabilarni ko‘rsatish mumkin.

Nazorat savollari.

1. Figuralar yuzlarini Dekart koordinatalar sistemasida hisoblash.
2. Figuralar yuzlarini qutb koordinatalarida hisoblash.
3. Egri chiziq yoyining uzunligi.
4. Qutb koordinatalar sistemasida egri chiziq yoyining uzunligi.
5. Jism hajmini parallel kesimlarning yuzalari bo‘yicha hisoblash.
6. Aylanma jismning hajmi.
7. Aniq integralni mexanikaga tadbiqi.
8. Inersiya momentini aniq integral yordami bilan hisoblash.

VII BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI

1-§. TASODIFIY HODISA

Reja:

1. Kirsh.

2. Elementar hodisalar fazosi.

3. Hodisalar algebrasi.

Tayanch iboralari: elementar hodisalar fazosi, elementar hodisalar, tasodifiy hodisalar, muqarrar hodisalar, mumkin boʻlmagan hodisalar, birgalikda boʻlmagan hodisalar, hodisalarning toʻla gruppasi, qarama-qarshi hodisalar.

I. Ehtimollar nazariyasi tasodifiy voqea yoki hodisalarning qonuniyatlarini oʻrgatuvchi fandir. Ehtimollar nazariyasi matematika fanining bir yoʻnalishi boʻlib, u XVII asrning oʻrtalaridan rivojlana boshlagan. XX asrga kelib ehtimollar nazariyasi alohida fan sifatida shakllandi hamda tabiatshunoslik va texnikaning koʻp sohalariga qoʻllanila boshlandi.

Matematika fani, xususan ehtimollar nazariyasi Oʻzbekistonda rivojlangan boʻlib, bu sohada alohida maktab yaratilgan. Bu maktabning asoschilari
V.I. Romanovskiy va uning shogirdi akad. S. X. Sirajiddinovni eslash oʻrinlidir.

Ehtimollar nazariyasi koʻp sohalarda, xususan iqtisodiyot, muhandislik sohalarida ham muvaffaqiyatli qoʻllanilmoqda. Shu sababdan ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani boʻyicha oʻzbek tilida oʻquv qoʻllanma yozishni taqozo etadi.

II. <u>Ta’rif.</u> Ixtiyoriy U toʻplami **elementar hodisalar fazosi** deyiladi. Bu toʻplamning elementlarini $(E \in U)$ elementar hodisalar deyiladi. Elementar (sodda) hodisa har bir oʻtkazilgan tajribada roʻy berishi mumkin boʻlgan hodisalarni bitta va faqat bittasining ro‘y berishini tushunish kerak. Masalalarning qo‘yilishiga qarab U to‘plamning elementlari turlicha bo‘lishi mumkin. Quyidagi misollarni qaraylik.

1. *Tangani bir marta tashlash.* Tangani bir marta tashlaganda ikkita holat bo‘lishi mumkin. Tangani gerb tomoni bilan tushushi «Γ» yoki raqam tomoni bilan tushishi «P». Bu ikki hodisa bitta tajribada ro‘y berishi mumkin bo‘lmagan ikkita elementlar hodisalarga misol bo‘ladi.

Albatta bunday tajriba o‘tkazilishda tanganing simmetrik bo‘lishi (egilgan, buklangan bo‘lmasligi) shart. Tanga bir xil holatda tanlanadi va tekis joyga tushishi talab qilinadi. Tanga tushganda dumalab ketishi, tik turib qolishi va boshqa holatlar hodisa sifati qaralmaydi.

Shunday qilib $E_1=\{\Gamma\}$, $E_2=\{P\}$ elementlar hodisalarni tashkil etadi, $U=\{\Gamma, P\}$ yoki $U=\{E_1, E_2\}$ esa elementar hodisalar fazosini tashkil etadi.

2. *Kubik tashlash.* Tomonlariga 1 dan 6 gacha raqamlar yozilgan simmetrik kubik tanlash natijasida har bir tajribadan quyidagi raqamlardan $E_1=\{1\}$, $E_2=\{2\}$, $E_3=\{3\}$, $E_4=\{4\}$, $E_5=\{5\}$, $E_6=\{6\}$ bittasi va faqat bittasi ro‘y berishi mumkin. Bular elementar hodisalarni tashkil etadi. U holda $U=\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}-$ to‘plam elementlar hodisalar fazosi bo‘ladi.

3. *Tangani ikki marta tashlash.* Tanga ikki marta tashlanganda elementlar hodisalar $E_1=\{\Gamma\Gamma\}$, $E_2=\{\Gamma P\}$, $E_3=\{P\Gamma\}$, $E_4=\{PP\}$ lardan iborat bo‘ladi va $U=\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$- elementar hodisalar fazosini tashkil etadi.

4. *Tanga tashlash.* Tajriba shundan iboratki, tanganing «Γ» tomoni tushishi bilan tajriba to‘xtatiladi. Bu tajribada elementlar hodisalar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi; $E_1=\{\Gamma\}$, $E_2=\{P\Gamma\}$, $E_3=\{PP\Gamma\}$,...,$E_n=\{P...P\Gamma\}$, ..., elementlar hodisasi fazosi esa $U=\{E_1, E_2, E_3, ...E_n, ...\}$ ko‘rinishga ega bo‘ladi.

5. *Nuqta tashlash.* Tekislikda kordinatalar sistemasini qaraymiz. Tajribada tekislikning biror qismiga nuqta tashlash nazarda tutiladi. Shu tushgan nuqtaga, shu nuqtaning kordinatalarni mos qo‘yamiz. U holda quyidagi to‘plam

$U = \{(x,y)\colon a \le x \le b, \quad c \le y \le d\}$ tekislikning $[a,b] \times [c, d]$ qismidagi tartiblangan nuqtalar to‘plamini ifodalaydi.

Shunday qilib, yuqorida keltirilgan misollardan ko‘rinadiki, U to‘plamining elementlari chekli ham cheksiz ham bo‘lishi mumkin.

Bir nechta hodisalarning har bir tajribada ro‘y berish imkoniyatlari bir xil bo‘lsa, teng imkoniyatli hodisalardir.

III. **<u>Ta’rif 1.</u>** Tajribada o‘tkazish natijasida ro‘y berishi ham, ro‘y bermasligi ham mumkin bo‘lgan hodisalarni tasodifiy hodisalar deyiladi va A, B C, harflar bilan belgilanadi.

Masalan, tangani bir marta tashlaganda $A = \{\Gamma\}$ tomonini tushishi tasodifiy hodisa, kubik tanlanganda juft sonlari $A = \{2,4,6\}$ tushishi tasodifiy hodisa bo‘ladi.

Idishda 15 ta shar bo‘lsin. Ulardan beshtasi oq, beshtasi qizil va beshtasi ko‘k bo‘lsin. Sharlar bir hil o‘lchovdan va bir hil materialdan tayyorlangan. Idishdan ihtiyoriy olingan shar oq shar $A = \{oq\}$ bo‘lishi tasodifiy hodisadir

<u>Ta’rif 2.</u> Tajriba o‘tkazish natijasida albatta ro‘y berilgan hodisani **muqarrar hodisa** deyiladi va U, Ω xarflar bilan belgilanadi.

Masalan, tanga bir marta tashlanganda tushushi «Γ» yoki «P» ro‘y beradi. Ya’ni $U = \{\Gamma, P\}$ muqarrar hodisadir. Kubik tashlanganda 1 dan 6 gacha raqamlarni tushishi, ya’ni $U = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ muqarrar hodisadir.

Idishdan shar olganda (oq, ko‘k va qizil shar) yo oq, yo qizil, yo ko‘k sharlarning chiqishi $U = \{oq, ko'k, qizil\}$ muqarrar hodisa.

<u>Ta’rif 3.</u> Tajriba o‘tkazish natijasida ro‘y bera olmaydigan hodisani **mumkin bo‘lmagan hodisa** deyiladi va V, $\varnothing$ lar bilan belgilanadi.

Masalan, kubik tanlanganda «0» yoki «7» raqamlarning chiqish yoki idishdan olingan sharning qora chiqishi mumkin bo‘lmagan hodisaga misol bo‘la oladi.

<u>Ta’rif 4.</u> A va B hodisalarning yig‘indisi deb, shu A va B hodisalarning hech bo‘lmaganda bittasiga tegishli bo‘lgan barcha elementar hodisalar to‘plamiga aytiladi va $A + B$ yoki $A \cup B$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan. Kubik tashlanganda A hodisa juft sonlar tushishi, B hodisa esa 3 ga karrali sonlarning tushish hodisasi bo‘lsin, ya’ni $A=\{2,4,6\}$, $B=\{3,6\}$. U holda $A+B=\{2,3,4,6\}$ bo‘ladi.

<u>Ta’rif 5.</u> Bir nechta hodisalarning yig‘indisi deb, shu hodisaning hech bo‘lmaganda bittasiga tegishli bo‘lgan barcha elementar to‘plamiga aytiladi.

$$A_1+A_2+\dots A_n=\bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

Agar bir nechta hodisalar yig‘indisi muqarrar hodisaga teng bo‘lsa, u holda bu hodisalar hodisalarning to‘liq gruppasini tashkil etadi deb ataladi.

Masalan. Agar $A=\{2,4,6\}$, $B=\{3,6\}.C=\{1,3,5\}$ bo‘lsa, u holda $A+B+C=\{1,2,3,4,5,6,\}=U$ bo‘ladi,. A, B, C lar hodisalarning to‘liq gruppasini tashkil etadi.

<u>Tariff 6.</u> Ikkita A va B hodisalarning ko‘paytmasi deb, bir vaqtda ham A, ham B hodisalarga tegishli bo‘lgan elementar hodisalardan iborat bo‘lgan to‘plamga aytiladi va $A\,B$ yoki $A\cap B$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan, $A=\{2,4,6\}$, $B=\{3,6\}$ bo‘lsa, $AB=\{6\}$ bo‘ladi.

<u>Tariff 7.</u> Bir nechta hodisalarning ko‘paytmasi deb, bir vaqtda barcha hodisalarga tegishli bo‘lgan elementar hodisalardan iborat bo‘lgan to‘plamga aytiladi.

$$A_1+A_2+\dots A_n=\bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

<u>Ta’rif 8.</u> Agar ikkita hodisalar ko‘paytmasi mumkin bo‘lmagan hodisa bo‘lsa, ya’ni $AB=V$, u holda A va B hodisalarni birgalikda bo‘lmagan hodisalar deyiladi.

Masalan, $A=\{2,4,6\}$, $B=\{1,3,5\}$ bo‘lsa, u holda $A\,B=V$ bo‘ladi.

<u>Ta’rif 9.</u> Agar bir nechta hodisalar yig‘indisi muqarrar hodisa bo‘lsa va o‘zaro har qanday jufti mumkin bo‘lmagan hodisalarni tashkil etsa, ya’ni

$$U=\bigcup_{k=1}^{n} A_k,\ A_i+A_j=V, \qquad i,\ j=\overline{1,n},\ i\neq j$$

bo‘lsa, u holda bunday hodisalarni o‘zaro juft – jufti bilan birgalikda bo‘lmagan hodisalarning to‘liq gruppasini tashkil etadi deb ataladi.

Masalan, $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$, $C=\{5,6\}$ bo‘lsa, u holda $A+B+C=U$ va $AB=V$, $AC=V$, $BC=V$ bo‘ladi, demak, *A, B, C* hodisalarning to‘liq gruppasini tashkil etadi.

<u>Ta’rif 10.</u> Ikkita hodisalar ayirmasi deb, *A* hodisaga tegishli bo‘lib, *B* hodisaga tegishli bo‘lmagan elementar hodisalardan tuzilgan to‘plamga aytiladi va $A-B$ yoki $A\backslash B$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan, $A=\{2,4,6\}$ va $B=\{3,6\}$ bo‘lsa u holda $A\backslash B=\{2,4\}$ iborat bo‘ladi.

<u>Ta’rif 11.</u> Agar A va $\overline{A}$ hodisalar yig‘indisi muqarrar hodisa bo‘lib, ularning ko‘paytmasi mumkin bo‘lmagan hodisa bo‘lsa, ya’ni

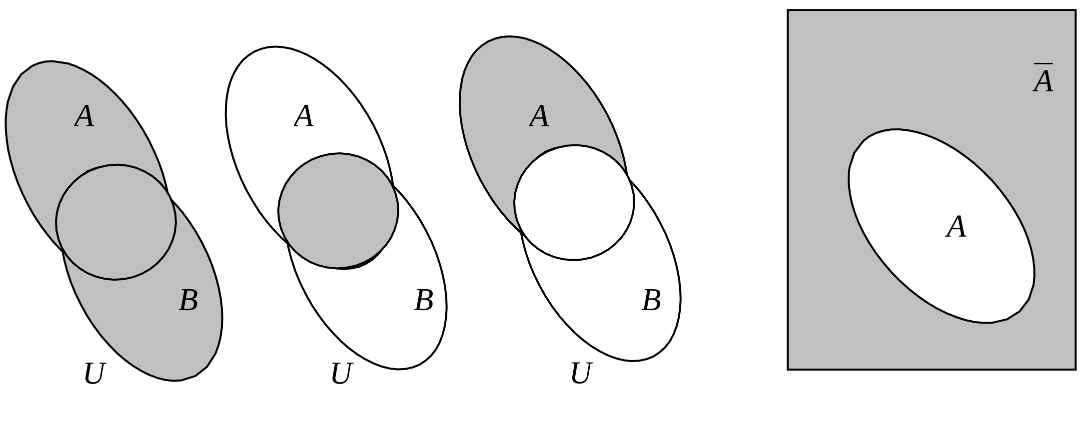
$$U=A+\overline{A},\quad A\overline{A}=V$$

bo‘lsa, u holda *A* va $\overline{A}$ hodisalarni qarama-qarshi hodisalar deyiladi.

Agar A hodisa B hodisaning qism to‘plami bo‘lsa $A\subset B$ yoki $B\supset A$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan, $A=\{2,4\}$, $B=\{2, 4, 6\}$ bo‘lsa u holda $A\subset B$ bo‘ladi.

Hodisalar yig‘ndisi, ko‘paytmasi, ayirmasi va qarama-qarshi hodisalarni quyidagicha geometrik shaklda ifodalash mumkin:



a) $A+B$ b) AB v) $A\backslash B$ g) A va $\overline{A}$

Hodisalar yig‘indisi va ko‘paytmasini hodisalar soni cheksiz ko‘p bo‘lganda ham kiritish mumkin.

$$A_1 + A_2 + \dots A_n \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

yig‘indisi $A_n(n = 1,2 \dots)$ hodisalarning hech bo‘lmaganda bittasiga tegishli bo‘lgan elementar hodisalar to‘plamidan iborat.

$$A_1 + A_2 + \dots A_n \dots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

ko‘paytma barcha $A_n(n = 1,2 \dots)$ hodisalarga tegishli elementar hodisalar to‘plamidan iborat.

Agar biror E element U ga tegishli bo‘lsa, $E \in U$ ko‘rinishda yoziladi.

Ixtiyoriy olingan $A, B \in F$ hodisalar uchun quyidagi shartlar:

1. $U \in F$
2. $A + B \in F,\ AB \in F,\ A \setminus B \in F$

o‘rinli bo‘lsa,u holda ***F* ni hodisalar algebrasi** deyiladi. Bu yerda U hodisaning ixtiyoriy to‘plam ostilari bo‘lgan *A, B* hodisalar F sinfda element sifatida qatnashadi. Xususan $U \in F$ va $V \in F$ lar ham F sinfning elementlaridir.

To‘plam ostilar sistemasidan tuzilgan eng kichik algebra $F = \{V, U\}$ dir.Agar U chekli to‘plamdan iborat bo‘lsa, u holda uning barcha to‘plam ostilaridan tuzilgan sistema algebradir.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1. Tanga bir marta tashlanganda ro‘y berishi mumkin bo‘lgan hodisalar $A = \{\Gamma\}$, $B = \{P\}$- tasodifiy , $U = \{\Gamma, P\}$- muqarrar va *V*- mumkin bo‘lmagan hodisalar *F* sinfni, ya’ni $F = \{A, B, V, U\}$ - hodisalar algebrasini tashkil etadi.
2. Tanga ikki marta tashlanganda *F* sinf quyidagi elementlardan iborat bo‘ladi.

$A=\{\Gamma\Gamma\},\ \ B=\{\Gamma P\},\ \ C=\{P\Gamma\},\ \ \ D=\{PP\},\ \ \ E=\{\Gamma\Gamma, PP\},\ \ \ \ F=\{\Gamma\Gamma,\ P\Gamma\},$
$K=\{\Gamma\Gamma,\ PP\},\ \ Z=\{\Gamma P, P\Gamma\},\ \ M=\{\Gamma P, PP\},\ \ \ N=\{P\Gamma, PP\},\ \ P=\{\Gamma\Gamma, \Gamma, P\Gamma\},$
$Q=\{\Gamma\Gamma\,\Gamma P\ PP\}, T=\{\Gamma\Gamma\ \ P\Gamma\,PP\},\ \ S=\{\Gamma P, P\Gamma, PP\},\ \ \ U=\{\Gamma\Gamma, \Gamma P, P\Gamma, PP\}, V.$

Demak, hodisalar algabrasi 16 ta elementlardan iborat ekan, ya’ni

$$F=\{A,B,C,D,E,F,K,Z,M,N,P,Q,T,S,U,V\ .\}$$

3. Agar tajriba kubik tashlashdan iborat bo‘lsa, u holda hodisalar algebrasi 64 ta elementlardan tashkil topgan sinf bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan misollardan shuni aytish mumkinki, tajriba chekli sondagi hodisalar ustida bo‘lsa, ulardan tuzilgan F sinf hodisalar algebrasini tashkil etar ekan.

Agar $A_n\in F,\ \ n=1,2,...$ dan,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in F,\quad \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in F$$

ekanligi kelib chiqsa, xodisalar algebrasi F σ- algebra yoki borel algebrasi deyiladi.

Agar F dan tuzilgan har qanday σ- algebra $F*$ to‘plam bo‘lsa, ya’ni $F*\subset F_n\quad n=1,2,...,\sigma$- algebra $F*$ **minimal σ- algebra** deyiladi.

Biz asosan hodisa algebrasi bilan ish ko‘ramiz.

Nazorat savollari.

1. Elementar hodisalar fazosi deganda nimani tushunasiz?
2. Tasodifiy hodisa deb nimaga aytiladi?
3. Muqarrar hodisalar misollar keltiring.
4. Mumkin bo‘lmagan hodisalar deganda nimani tushunasiz.
5. Birgalikda bo‘lmagan hodisalar deb nimaga aytiladi

2-§. EHTIMOLLIK TUSHUNCHASI

Reja:

1. Ehtimollik fazosi.

2. Kombinatorikaning asosiy formulalari.

3. Binom formulasi.

4. Ehtimolning ta'rifi.

Tayanch iboralari: kombinatorika elementlari, Nyuton binomi, ehtimolning klassik ta'rifi, gipergeometrik taqsimot, o'rin almashtirish, o'rinlashtirish, gruppalash.

I. Endi hodisaning ehtimolli tushunchasini kiritish mumkin.

Ta'rif. Hodisalar sinfi F da aniqlangan quyidagi P **sonli funksiya hodisasining ehtimoli** deyiladi. Agar quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa:

1. F hodisalar algebrasi bo'lsa;

2. $0 \le P(A) \le 1$ har qanday $A \in F$;

3. $P(U) = 1$

4. Agar A va B o'zaro birgalikda bo'lmasa , u holda

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

(chekli additivlik aksioma).

Agar masala cheksiz hodisalar ketma – ketligi bilan bog'liq bo'lsa, u holda qo'shimcha uzluksizlik aksiomasi kiritiladi:

5. F dan olingan har qanday kamayuvchi hodisalar ketma –ketligi

$$A_1 \supset A_2 ... \supset A_n \supset ..., \quad \bigcap_{n-1}^{\infty} A^n = V$$

uchun quyidagi tenglik o'rinlidir

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0$$

Yuqoridagi 2 – 5 shartlarni qanoatlantiruvchi P ehtimollik, F hodisalar sinfi (algebra yoki σ- algebra) hamda elementar hodisalardan U lardan tuzilgan uchlik, (U, F, P) **ehtimollik fazosi** deyiladi.

Biz asosan chekli sondagi to‘plamlar bilan ish ko‘ramiz, shuning uchun 5-shartni ishlatmaymiz.

II. Kombinatorika chekli elementlarning biror shartlar asosida tuzilgan birlashmalarini, ya’ni sonli kombinatsiyalarini o‘rganadi.

Elemenrtlarning tabiatan qanday bo‘lishi ahamiyatga ega emas. Kombinatorikaning asosiy formulalariga tushuncha beramiz.

Ta’rif 1. *n* ta elementdan tuzilgan o‘rin almashtirish deb, shu elementlarning faqat joylashish tartibi bilan farqlanuvchi kombinatsiyalarga aytiladi va quyidagi ko‘rinishda yoziladi.

$$P_n = n!$$

bu yerda $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ va har doim 0!=1 deb hisoblaymiz.

Misol 1. Uchta a,b,c elementlar yordamida nechta o‘rin almashtirish tuzish mumkin?

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Haqiqatan, *abc*, *acb* , *bac*, *bc a*, *c ab*, *cba* elementlar soni to‘rtta bo‘lsa,

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

ya’ni 24 ta o‘rin almashtirish mumkin.

Ta’rif 2. *n* ta elementdan *m* tadan tuzilgan o‘rinlashtirish deb, yo elementlarning tarkibi yoki elementlarning joylashish tartibi bilan farqlanuvchi kombinatsiyalarga aytiladi va quyidagicha yoziladi.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1)$$

Misol 2. 4 ta elementlardan 2 tadan o‘rinlashtirish tuzilsin.

$$A_4^2 = 4 \cdot (4-1) = 4 \cdot 3 = 12$$

Haqiqatan, a,b,c,d elementlar uchun

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,$$
$$ba,\ ca,\ da, cb,\ db,\ dc$$

kombinatsiya tuzish mumkin.

4 elementdan 3 tadan o‘rinlashtirish soni

$$A^4_4 = 4\cdot\cdot 3\cdot 2 = 24$$

bo‘ladi. Hususan, 4 ta elementdan 4 tadan tuzilgan o‘rinlashtirish A^4_4 o‘rin almashtirish soniga teng bo‘ladi, ya’ni

$$A^3_4 = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4! = P_4$$

bo'ladi.

Ta’rif 3. n ta elementdan m tadan tuzilgan gruppalash deb, hech bo‘lmaganda bitta elementi bilan farqlanuvchi kombinatsiyaga aytiladi va quyidagicha yoziladi.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)}$$

Misol 3. 4 elementdan 3 tadan gruppalash tuzilsin.

Haqiqatan, a,b,c,d elementlar uchun gruppalash $abc,\ abc,\ acb,\ bcd$ lardan iborat bo‘ladi. 4 ta elementdan 2 tadan gruppalash 6 xil usul bilan tuzish mumkin, ya’ni

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 6.$$

Gruppalsh quyidagi qonuniyatga bo‘ysunadi;

$C_n^m = C_n^{m-n}$ bu tenglikni $n = 4,\ m = 3$ da tekshiramiz:

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1} = 4, \qquad C_4^{4-3} = C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 1\cdot 3\cdot 1} = 4.$$

O‘rin almashtirish, o‘rinlashtirish va gruppalash quyidagi tenglik bilan o‘zaro bog‘langan

$$A_n^m = P_m C_n^m .$$

III. Quyidagi formulalar bizga tanish

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Ixtiyoriy natural n uchun esa

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a^{n-2} b^2 + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

Formula o‘rinlidir. Bu formulani Nyuton yoki binom formulasi deyiladi. Matematik induksiya usuli bilan binom formulasini o‘rinli ekanligini isbotlash mumkin. Kombinatorika formulalari yordamida quyidagilarni yozish mumkin

$$(a+b)^1 = C_0^1 a + C_1^1 b$$
$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$$
$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$(a+b)^n = C_n^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

Agar $a = 1, \quad b = 1$ desak, u holda

$$2^n = C_n^0 + C_4^1 + C_4^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

tenglik to‘g‘ri ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Haqiqatan binom yoyilmasidagi barcha koeffitsiyentlar yig‘indisi 2^n gat eng.

IV. Ehtimolning klassik ta’rifi.

Ehtimollik fazosi (U, F, P) berilgan bo‘lsin. Bu yerda $U = \{E_1, E_2, \ldots. E_n\}$ elementlar hodisalar fazosi, F- to‘plamning elementlari elementar hodisalar fazosining to‘plam ostilaridan $A = \{E_1, E_2, \ldots. E_n\}\ (m \le n)$ tuzilgan hodisalar teng imkoniyatli bo‘lsa, u holda $P(E_1) = \frac{1}{n} \quad (i = \overline{1, n})$ bo‘ladi.

<u>**Ta’rif.**</u> Ihtiyoriy A hodisaning ehtimoli deb

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1}$$

soniga aytiladi. Bu yerda *m*-*A* hodisasining ro‘y berishi uchun imkoniyat yaratuvchi elementar hodisalar soni $(m \leq n)$. Bu ta’rif **ehtimollikning klassik ta’rifi** deyiladi.

Kiritilgan *P* (*A*) funksiya yuqorida keltirilgan 1-5 aksiomalarni qanoatlantiradi.

Shunday qilib, *P* (*A*) funksiya hosisasining ehtimoli ekan.

Ehtimollikning klassik ta’rifi teng imkoniyatli hodisalarni (tanga tashlash, kubuk tashlash ba hokazo) nazarda tuttgan holda, ularning ehtimolligini hisoblash uchun yaxshi natijalar beradi.

Misol 1. Tanga bir marta tashlanganda «*Г*» tushishi $A\{\Gamma\}$ hodisa bo‘lsa, elementar hodisalar fazosi $U=\{\Gamma,P\}$ bo‘ladi. Bu holda *A* hodisaning ehtimoli

$$P\,(A)=\frac{1}{2}$$

ga teng bo‘ladi.

Misol 2. Kubik tashlanganda uchga karrali sonlarni tushishi *A* hodisa, ya’ni $A\,\{3{,}6\}$ bo‘lsa, u holda *A* hodisaning ehtimoli

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

ga teng bo‘ladi. Bu yerda elementar hodisalar fazosi $U=\{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6\}$ dan iboratdir.

Misol 3. Ikki marta tanga tanlanganda bir vaqtda gerb tomoni tushishi $A=\{\Gamma\Gamma\}$ hodisa bo‘lsa, elemntar hodisalar fazosi $U=\{\Gamma\Gamma,\ \Gamma P, P\Gamma,\ PP\}$dan iborat bo‘lib, A hodisaning ehtimoli

$$P=(A)=\frac{1}{4}$$

ga teng bo‘ladi.

Misol 4. Idishda *K*- ta shar bor. Ulardan *S* tasi oq shar va *K* - *S* tasiqora shar. Ixtiyoriy olingan *k* ta shardan *s* tasi oq shar bo‘lish ehtimoli topilsin.

Idishdagi sharlar bir xil materialdan va bir hil radiusli va ular yaxshi aralashtirilgan bo‘lib, faqat rangi bilangina farqlanadi. Idishdan tavakkaliga ihtiyoriy shar olinadi. Bu ehtimollikning klassik ta’rifiga misol bo‘la oladi.

Elementar hodisalar sifatida K – ta sharlardan k – tadan olingan sharlar to‘plamidan iborat bo‘ladi, bu holda $n = C_K^k$ gat eng bo‘ladi. *n* ta sharlar ichida *s* tasi oq sharlar bo‘lishi, *S* ta oq sharlardan tuzilgan *s* ta sharlar to‘plamini tashkil etadi, xuddi shuningdek *k – s* ta qora sharlar ham, *K – S* ta qora sharlardan olimgan to‘plamni tashkil etadi.

Demak, *m* sifatida $m = C_S^s C_{K-S}^{k-s}$ sonni olish mumkin. U holda ehtimolnign klassik ta’rifiga asosan yozamiz.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_S^s C_{K-S}^{k-s}}{C_K^k}$$

Bu ehtimolning gipergeometrik taqsimoti deyiladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1 – m i s o l. Qutida 3 ta oq, 7 ta qora shar bor. Undan tavakkaliga olingan sharning oq shar bo‘lishi ehtimolligini toping.

2 – m i s o l. Guruhda 12 talaba bo‘lib, ularning 8 nafari a‘lochilardir. Ro‘yxat bo‘yicha tavakkaliga 9 talaba tanlab olindi. Tanlab olinganlar ichida 5 talaba a’lochi talaba bo‘lishi ehtimolligini toping.

3 – m i s o l. Qirqma alifboning 10 ta harfidan “matematika” so‘zi tuzilgan. Bu harflar tasodifan sochilib ketgan va qaytadan ixtiyoriy tartibda yig‘ilgan. Yana “matematika” so‘zi hosil bo‘lishi ehtimolligini toping.

4 – m i s o l. Telefonda nomer terayotgan abonent oxirgi ikki raqamni sedan chiqarib qo‘ydi va faqat bu raqamlar har xil ekanligini eslab qolgan holda ularni tavakkaliga terdi. Kerakli raqamlar terilganligi ehtimolligini toping.

5 – m i s o l. Fransuz tabiatshunosi Byuffon (XVIII asr) tangani 4040 marta tashlagan va bunda 2048 marta gerbli tomon tushgan. Bu sinovlar majmuasida gerbli tomon tushishi chastotasini toping.

6 – m i s o l. *R* radiusli doiraga nuqta tavakkaliga tashlangan. Tashlangan nuqtaning doiraga ichki chizilgan muntazam uchburchak ichiga tushishi ehtimolligini toping.

7 – m i s o l. [0, 2] kesmadan tavakkaliga ikkita x va y sonlari tanlangan. Bu sonlar $x^2 \leq 4y \leq 4x$ tengsizlikni qanoatlantirishi ehtimolligini toping.

Nazorat savollari.

1. Ehtimollik fazosi.
2. Kombinatorikaning asosiy formulalari.
3. Binom formulasi.
4. Ehtimolning ta’rifi.

3- §. NISBIY CHASTOTA. NISBIY CHASTOTANING TURG‘UNLIK XUSUSIYATI.

Reja:

1. **Nisbiy chastota.**
2. **Geometrik ehtimollik.**
3. **Shartli ehtimollik.**
4. **Hodisalar ko‘paytmasining ehtimoli.**

Tayanch iboralari: Nisbiy chastota, tajriba o‘tkazish natijasi, hodisaning ro‘y berishlar soni, o‘tkazilgan tajribalar,geometrik ehtimollik, Byuffen masalasi, shartli ehtimollik.

I. Nisbiy chastota hodisaning ehtimoli kabi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchlaridan hisoblanadi.

<u>Ta’rif.</u> *A* hodisaning nisbiy chastotasi deb, tajriba o‘tkazish natijasida *A* hodisaning ro‘y berishlar sonini o‘tkazilgan tajribalarning umumiy soniga nisbatiga aytiladi va quyidagi ko‘rinishda yoziladi

$$W(A)=\frac{m}{n}$$

bu yerda *m* – *A* hodisaning ro‘y berishlar soni, n – esa barcha o‘tkazilgan tajribalar soni.

Nisbiy chastota o‘tkazilgan tajribalarning natijasiga qarab xulosa chiqariladi, hodisaning ehtimolligi esa tajriba o‘tkazmasdan oldindan aniqlanadi.

Biror *A* hodisa ustida ko‘p marta tajriba o‘tkazib, uning nisbiy chastotasini kuzatsak, tajribalar soni cheksiz oshib borgan sari nisbiy chastota bir xil songa intilayotgani seziladi. Shu sonni *A* hodisaning ehtimoli sifatida qabul qilish mumkin.

Masalan, *A* hodisa tanga tashlanganda «*Г*» tomonini tushishi bo‘lsa, ko‘p marta tajribalar o‘tkazish natijasida nisbiy chastota 1/2 soniga intilayotganini sezamiz, ana shu 1/2 ni *A* hodisaning ehtimoli deb qabul qilishi mumkin.

Shunday qilib, nisbiy chastota turg‘unlik xususiyatiga ega ekan.

Ta’rifga asosan, nisbiy chastotaning quyidagi xossalarini yozish mumkin;

1 – xossa. Muqarrar hodisaning nisbiy chastotasi birga teng, ya’ni *m*=*n*

$$W(U)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$$

2 – xossa. Mumkin bo‘lmagan hodisaning nisbiy chastotasi nolga teng, ya’ni *m*=0

$$W(U)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$$

3 – xossa. Tasodifiy hodisaning nisbiy chastotasi nol bilan bir orasidagi ixtiyoriy sondir, ya’ni $0 \le m \le n$ dan

$$0\le\frac{m}{n}\le 1,\qquad 0\le W(A)\le 1$$

nisbiy chastotaning xossalari huddi ehtimollikning xossalari kabidir.

II. Tajriba cheksiz ko‘p teng imkoniyatli hodisalar ustida bo‘lsa, bu holda ehtimollikning klassik ta’rifi yetarli emas. Bu hollarda ehtimollikning geometrik ta’rifini qo‘llash mumkin bo‘ladi.

Bizga L kesma berilgan, $l\,(l \le L)$ esa uning qismi bo‘lsin. Ihtiyoriy tashlangan nuqtaning *l* kesmaga tushish ehtimoli topilsin. Nuqtaning *l* kesma ichiga tushishi *A* hodisa bo‘lsa, uning ehtimoli

$$P(A)=\frac{l}{L}$$

formula bilan hisoblanadi.

Agarda *G* soha birorta shakl yuzi bo‘lib, *g* esa uning qismi bo‘lsa, ihtiyoriy tashlangan nuqtaning *g* sohaga tushish ehtimoli

$$P(A)=\frac{g}{G}$$

formula bilan hisoblanadi.

Umuman *G* soha (keama, yuza, hajm) qanday bo‘lishidan qat’iy nazar, tashlangan nuqtaning *g* $(g \subset G)$ sohaga tushishi ehtimoli

$$P(A)=\frac{mes\,g}{mes\,G}$$

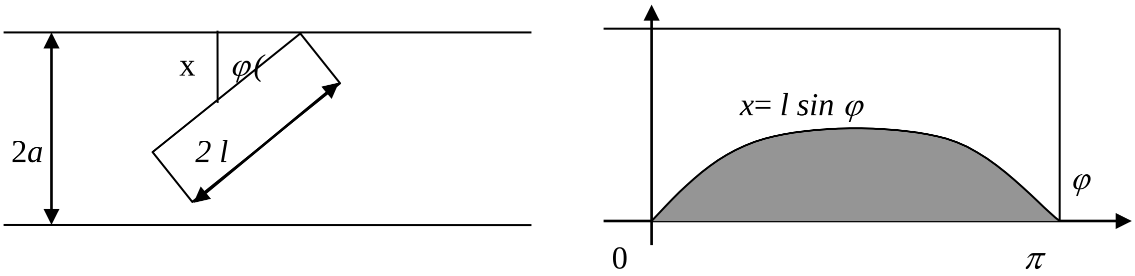
formula bilan hisoblanadi.

Yuqorida keltirilgan formulalardan nuqta *G* soha bo‘yicha bir me’yorda tashlangan deb qaraladi.

Klassik ta’rifida, U elementar hodisalar fazosida tuzilgan barcha to‘plam ostilari $A \in F$ uchun ehtimollik kiritilgan edi. Geometrik ta’rifda *G* sohaning barcha to‘plam ostilarini qarash to‘g‘ri bo‘lmaydi, chunki hamma to‘plam ostilar ham yuzaga yoki hajmni tashkil etavermaydi.

Geometrik ehtimollik uchun quyidagi masalalarni kiritamiz.

Byuffon masalasi. Tekislik, oraliq masofalari 2*a* gat eng masofadagi parallel chiziqlar bilan bo‘laklarga bo‘lingan. Tekislikka uzunligi 2*l* (*l* < *a*) ga teng bo‘lgan igna tashlanadi Tashlangan igna shu chiziqlardan birortasini kesib o‘tish ehtimoli topilsin.



a) b)

2- rasm

Yechish. Ignaning o‘rtasidan eng yaqin parallel to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani x va shu to‘g‘ri chiziq bilan tashkil etgan burchagini φ deb belgilaymiz. Ignaning har qanday holatini x va φ qiymatlar orqali aniqlashimiz mumkin. Ma’lumki, x va φ qiymatlari 0 dan a gacha, φ ning qabul qiladigan qiymatlari 0 dan π gacha (2- rasm, a). Nina o‘rta nuqtasi tomonlari a va π dan iborat to‘g‘ri to‘tburchakning ixtiyotiy nuqtasi bo‘lishi mumkin (2 – rasm, b). Shu to‘g‘ri to‘rtburchakning G soha sifatida qarash mumkin, uning yuzi $G=a\pi$ ga teng.

Endi g sohani aniqlaymiz. 2- rasm, a ga e’tibor bersak, igna parallel to‘g‘ri chiziqlardan birini kesib o‘tishi uchun, uning o‘rta nuqtasidagi $x \leq l\sin\varphi$ tengsizlikni qanoatlantirishi kerak, yoki ignaning o‘rtasi 2 – rasm, b da ko‘rsatilgan (shtrixlangan) sohaga tushishi kerak. Shunday qilib, shtrixlangan sohani g deb qarash mumkin.

g sohaning yuzini hisoblaymiz:

$$g = \int_0^{\pi} l\sin\varphi = -l\cos\varphi\Big|_0^{\pi} = 2l$$

Shunday qilib, biz izlayotgan ehtimollik, ya’ni ignaning to‘g‘ri chiziqning kesib o‘tish ehtimoli

$$P(A) = \frac{g}{G} = \frac{2l}{a\pi}$$

III. <u>Ta'rif.</u> Tajriba o'tkazish natijasida A hodisa ro'y berganda B hodisaning ro'y berish ehtimoli shartli ehtimollik deyiladi va $P_A(B)$ yoki $P(B/A)$ ko'rinishda yoziladi.

Misol. Birinchi idishda 5 ta oq va 3 ta qora shar bor. A hodisa birinchi tajribada oq shar chiqishi (shar qaytib idishga solinmandi), B hodisa esa ikkinchi tajribada oq shar chiqishi bo'lsin. A hodisa ro'y berganda B hodisaning ro'y berish ehtimoli topilsin.

Yechish. Ehtimollikning klassik ta'rifiga asosan A hodisaning ehtimoli $P(A)=\frac{5}{8}$ ga teng, A hodisa ro'y berganda B hodisaning ehtimoli $P_A(B)=\frac{4}{7}$ ga teng.

Xuddi shu natijada quyidagi formula orqali ham kelish mumkin:

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (P(A)>0)$$

(1)

Haqiqatan, AB hodisalarning ro'y berishi uchun imkoniyat yaratuvchi hodisalar soni $A_5^2=5\cdot4=20$, umumiy hodisalar soni esa $A_8^2=8\cdot7=56$ ga teng, u holda (1) formulaga asosan,

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{20}{56}}{\frac{5}{8}}=\frac{4}{7}$$

Yuqoridagi (1) formulani shartli ehtimollik formulasi sifatida qabul qilish mumkin.

IV. <u>Teorema.</u> Ikkita hodisalar ko'pattmasining ehtimoli, birinchi hodisa ehtimolini birinchi hodisa ro'y berganda ikkinchi hodisaning shartli ehtimoliga ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$P(AB)=P(A)P_A(B) \tag{2}$$

Isboti yuqoridagi (1) formuladan kelib chiqadi.

Ma'lumki, $P(AB)=P(B\,A)$, u holda

$$P(B\,A)=P(B)P_B(A).$$

Demak, (2) tenglikka asosan,

$$P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A) \qquad (3)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Natijada. Bir necha hodisalar ko‘paytmasining ehtimolligi har bir avvalgi hodisalar ro‘y berganda keyingi hodisaning shartli ehtimolligining ko‘paytmasiga tengdir, ya’ni

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)\ldots P_{A_1 \ldots A_{n-1}}(A_n). \qquad (4)$$

(4) formula matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi.

Agarda *B* hodisa *A* hodisaga bog‘liq bo‘lmasa, $P_A(B)=P(B)$ tenglik o‘irnli bo‘ladi. U holda (3) tenglikka asosan $P(A)=P(B)=P(B)P_B(A)$ ekanligi kelib chiqadi, bunda $P_B(A)=P(A)$ tenglikni hosil qilamiz. Demak, *B* hodisaning *A* hodisaga bog‘liq bo‘lmasligini keltirib chiqaradi. Shunday qilib, (2) formiladan

$$P(AB)=P(A)P(B) \qquad (5)$$

ekanligi kelib chiqadi. (5) formula o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan hodisalar ko‘paytmasining ehtimolliligini hisoblaydi.

Bir nechta hodisalar o‘zaro bog‘liq bo‘lmasligi uchun, har bir hodisa qolgan hodisaning har qanday gruppasi bilan o‘zaro bog‘liq bo‘lmasligi kerak, ya’ni hodisalarning o‘zaro juft-jufti bilan bog‘liq bo‘lmasligi hodisalarning o‘zaro bog‘liq bo‘lmasligini ifodalaydi.

Masalan, uchta *A, B, C* hodisalarning o‘zaro bog‘liq bo‘lmasligi uchun *A* va *B, A* va *C, B* va *C* hodisalarning bog‘liq bo‘lmasligi yetarli emas, yana *A* va *BC, B* va *AC, C* va *A B* hodisalar ham o‘zaro bog‘liq bo‘lmasligi shart, ana shunday hodisalar uchun

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

tenglikni yozish mumkin.

Ihtiyoriy *n* ta o‘zaro bog‘ liq bo‘lmagan hodisalar uchun

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

tenglik o‘rinlidir.

Misol. Ikkita tanga bir vaqtda tashlanganda ikkalasi ham gerb tushishi ehtimoli topilsin.

A- birinchi tangada gerb tushishi hodisasi;

B- ikkinchi tangada gerb tushishi hodisasi;

A B ikkala tangada bir vaqtda geb tushishi hodisasi bo‘lsin. U holda $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)\frac{1}{2}, \quad P(AB)=\frac{1}{4}$. Demak,

$$P(AB)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=P(A)P(B).$$

A va *B* hodisalar o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan hodisalar ekan.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1. Qutida 5 ta bir xil buyum bo‘lib, ularning 3 tasi bo‘yalgan. Tavakkaliga 2 ta buyum olinganda ular orasida:

a) bitta bo‘yalgani bo‘lishi;

b) ikkita bo‘yalgani bo‘lishi;

v) hech bo‘lmaganda bitta bo‘yalgani bo‘lishi ehtimolligini toping.

J: a) 0,6; b) 0,3; v) 0,9.

2. Uchlari (0,0), (0,1), (1,1), (1,0) nuqtalarda bo‘lgan kvadratga (x, y) nuqta tashlanadi. Bu nuqtaning koordinatalari $y < 2x$ tengsizlikni qanoatlantirishi ehtimolligini toping.

J: $P(A)$ = 0,75

3. Tavakkaliga har biri birdan katta bo‘lmagan ikkita musbat son olinganda, ularning yig‘indisi $x + y$ birdan katta bo‘lmasligi, ko‘paytmasi xy esa 0,09 dan kichik bo‘lmasligi ehtimolligini toping.

J: $P(A) \approx 0{,}2$

4. Aylanaga tavakkaliga ichki uchburchak chiziladi. Bu uchburchak o‘tkir burchakli bo‘lishi ehtimolligini toping.

J: $\frac{1}{4}$

5. Texnik nazorat bo‘limi tavakkaliga olingan 100 ta kitobdan 5 tasi yaroqsiz ekanini aniqladi. Yaroqsiz kitoblarning nisbiy chastotasini aniqlang.

J: $W(A)=\frac{5}{100}=0{,}05$

Nazorat savollari.

1. Nisbiy chastota.
2. Geometrik ehtimollik.
3. Shartli ehtimollik.
4. Hodisalar ko‘paytmasining ehtimoli.

4- §. BIRGALIKDA BO‘LMAGAN HODISALAR YIG‘INDISINING EHTIMOLI.

Reja:

1. **Birgalikda bo‘lmagan hodisalar yig‘indisining ehtimoli.**
2. **Birgalikda bo‘lgan hodisalar yig‘ndisining ehtimoli.**
3. **Hodisalar to‘liq gruppasining ehtimoli.**
4. **To‘la ehtimollik formulasi**
5. **Beyes formulasi.**

Tayanch iboralari: bog‘liq hodisalar, birgalikda bo‘lmagan hodisalar, birgalikda bo‘lgan hodisalar, hodisalar to‘liq gruppasi, to‘la ehtimollik, Beyes formulasi.

I. <u>Teorema.</u> Birgalikda bo‘lmagan ikkita *A* va *B* hodisalar yig‘indisining ehtimoli, shu hodisalarning ehtimollarining yig‘indisiga teng, ya’ni

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1}$$

Isbot. A hodisaning ro‘y berish ehtimoli $P(A)=\frac{m_1}{n}$ va B hodisaning ro‘y berish ehtimoli $P(B)=\frac{m_2}{n}$ bo‘lsa, u holda $A+B$ hodisaaning ro‘y berish ehtimoli $P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}$ ga teng, bunda

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Natija. O‘zaro juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan bir nechta hodisalar yig‘indisining ehtimoli shu hodisalar yig‘indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimolining yig‘indisiga teng.

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_2)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Misol. Idishda 25 ta shar bo‘lib, 10 tasi qizil, 5 tasi ko‘k va 10 tasi oq bo‘lsin. Idishdan olingan sharning rangli shar chiqish ehtimoli topilsin.

Yechish. Shar rangli bo‘lishi uchun qizil yoki ko‘k shar chiqishi kerak. A-qizil shar chiqish hodisasi, B – ko‘k shar chiqish hodisasi bo‘lsin. Bu hodisalarning ehtimolliklari $P(A)=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$ ga teng. A va B birgalikda bo‘lmagan hodisalar bo‘lgani uchun $P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$ ko‘rinishda yozish mumkin. Demak, rangli shar chiqish ehtimoli $\frac{3}{5}$ ga teng.

II. Teorema. Ikkita hodisalardan hech bo‘lmaganda bittasining ro‘y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollari yig‘indisidan ularning birgalikda ro‘y berish ehtimolining ayirilganiga, ya’ni

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \quad \textbf{(7)}$$

ga teng.

Isbot. Hodisalr yig‘ndisi $A+B$ ni birgalikda bo‘lmagan hodisalar yig‘ndisi

$$A+B=\overline{A}B+A\overline{B}+AB \quad (8)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin, bu yerda

$$A\overline{B}=A-AB, \quad \overline{A}B=B-AB$$

(9)

ga teng. U holda

$$P(A+B)=P(A\overline{B})+\overline{P}(AB)+P(AB) \quad (10)$$

tenglik o‘rinlidir. (9) ni (10) ga qo‘ysak (7) tenglik kelib chiqadi.

Misol. Ikki mergan bir nishonga qarata o‘q uzmoqda. Birinchi merganning nishonga tekkizish ehtimoli 0,7, ikkinchi mergan uchun esa 0,8 bo‘lsa, hech bo‘lmaganda bitta merganning nishonga tekkizish ehtimoli topilsin.

Yechish. A hodisa birinchi merganning nishonga tegish hodisasi, B– esa ikkinchi merganning nishonga tegish hodisasi, A va B hodisalar birgalikda bo‘lmagan hodisalar bo‘lgani uchun $P(A)=0{,}7$, $P(B)=0{,}8$, $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56$ bo‘ladi. Demak,

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}7+0{,}8-0{,}56=0{,}94.$$

III. O‘zaro juft – jufti bilan birgalikda bo‘lmagan va hodislarning to‘liq gruppasini tashkil etuvchi $A_1,\ A_2,\ ...A_n$ hodisalar berilgan bo‘lsin, ya’ni

$$U=A_1,\ A_2+...+A_n$$
$$A_iA_j=V,\ i\neq j\,i,\ \ j=1,2,...n.$$

(11)

Teorema 1. O‘zaro juft – jufti bilan birgalikda bo‘lmagan hodisalar gruppasi ehtimollarining yig‘indisi birga teng, ya’ni

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1 \tag{12}$$

Isbot. Yuqoridagi (11) tenglikdan yozamiz

$$P(A_1+A_2+...+A_2)=P(U)=1$$

va quyidagi

$$P(A_1+A_2+...+A_2)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$$

tenglik o‘rinli bo‘lgani uchun teorema isbot bo‘ladi.

Misol. 1) Kubik tashlanganda quyidagi hodisalar ro‘y bersin.
Bular o‘zaro juft – jufti bilan birgalikda bo‘lmagan hodisalarning to‘liq gruppasini tashkil etadi. Ularning ehtimolliklari mos ravishda

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}, \quad P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}, \quad P(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Bu yerdan

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$$

ekanligi kelib chiqadi.

<u>**Teorema 2.**</u> Qarama – qarshi hodisalar ehtimollarining yig‘indisi birga teng.

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

isboti teorema 1 dan kelib chiqadi.

Misol. Kubik tashlanganda $A=\{1,2\}$ hodisanng ro‘y bermaslik ehtimoli topilsin.

Yechish.

$$A=\{1,2\},\ \overline{A}=\{3,4,5,6\}$$

$$P(A)+P(\overline{A})=1, P(\overline{A})=1-P(A)$$

$$P(\overline{A})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

ga teng.

IV. Faraz qilaylik, A hodisa hodisalarning to‘liq gruppasini tashkil etuvchi $B_1,\ B_2,...,\ B_n$ hodisalarning birortasi bilan birgalikda ro‘y bersin. Bu hodisaning ehtimolliklari $P(B_1), P(B_2),...,P(B_n)$ va quyidagi shartli ehtimolliklar $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A),... P_{B_n}(A)$ ma'lum bo'lsin. A hodisaning ehtimoli nimaga teng?

Teorema. To'liq gruppani tashkil etuvchi $B_1, B_2, ...B_n$ hodisalarning birortasi bilan ro'y beruvchi A hodisaning ehtimolli, har bir hodisa ehtimollarini ularning mos shartli ehtimollari ko'paytmasining yig'indisiga teng.

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2} = (A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A) \quad (13)$$

Isboti. Bizga ma'lumki

$$U = B_1 + B_2 + ... + B_n,$$
$$B_i B_j = V, \quad i, j = \overline{1,n}, \quad i \neq j$$

U holda

$$A = AU = A(B_1 + B_2 + ... + B_n) = AB_1 + AB_2 + ... + AB_n$$

tenglik o'rinli ekanligi ravshan. Bundan

$$P(A) = P(AB_1) + (AB_2) + ... + (AB_n)$$

tenglik kelib chiqadi. Shartli ehtimollik formulasini hisobga olsak, (13) formulaning to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Teorema isbot bo'ldi.

Misol. Birinchi idishda 8 ta oq va 7 ta qora shar bor, ikkinchi idishda esa 10 ta oq va 5 ta qora shar bor. Ikkichi idshdan birinchi idishga bitta shar olib solinadi. Birinchi idishdan olingan shar oq bo'lishi ehtimoli topilsin.

Yechish.

B_1 - 2 idishdan 1 – idishga oq shar olinish hodisasi;

B_2 - 2 idishdan 1 – idishga qora shar olinish hodisasi bo'lsa, ularning ehtimollari mos ravishda

$$P(B_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \quad P(B_2) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

A hodisa 1- idishdan oq shar chqishi bo‘lsin;

$P_{B_1}(A)$- 2 - idishdan 1 - idishga oq shar solinganda, 1 – idishdan oq shar chiqish ehtimoli;

$P_{B_2}(A)$ - 2- idishdan 1- idishga qora shar solinganda, 1 – idishdan oq shar chiqish ehtimoli bo‘lsa, bu ehtimollar mos pavishda $P_{B_1}(A)=\frac{9}{16}$, $P_{B_2}(A)=\frac{8}{16}$ ga teng bo‘ladi. U holda to‘la ehtimollik asosan yozamiz

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{16}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{16}=\frac{26}{48}=\frac{13}{24}$$

Xuddi shuningdek, ikkinchi idishdan birinchi idishga bitta oq shar solinganda, birinchi idishdan qora shar chiqish ehtimolini hisoblash mumkin.

Agarda $\bar{A}$- 1- idishdan qora shar chiqish hodisasi bo‘lsa, u holda shartli ehtimolliklar quyidagiga teng bo‘ladi:

$$P_{B_1}(\bar{A})=\frac{7}{16}, \qquad P_{B_2}(\bar{A})=\frac{8}{16}$$

yana to‘la ehtimollik formulasiga asosan

$$P(\bar{A})=P(B_1)P_{B_1}(\bar{A})+P(B_2)P_{B_2}(\bar{A})=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{16}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{16}=\frac{22}{48}=\frac{11}{24}$$

A va $\bar{A}$ qarama – qarshi hodisalar bo‘lgani uchun ehtimollari yig‘indisi birga teng. Hiqiqatan

$$P(A)+P(\bar{A})=\frac{13}{24}+\frac{11}{24}=\frac{24}{24}=1$$

V. Faraz qilaylik, A hodisa hodisalarning to‘liq gruppasini tashkil etuvchi $B_1,\ B_2 ...,\ B_n$ hodisalarning birortasi bilan birgalikda ro‘y bersin. Tajriba o‘tkazish natijasida $B_1,\ B_2 ...,\ B_n$ hodisalarning qaysi biri ro‘y berishi avvalidan ma’lum emas, shuning uchun biz ularni **gipotezalar** deb ataymiz.

Tajriba o‘tkazish natijasida A hodisa ro‘y beradi, u holda to‘la ehtimollik formulasiga asosan A hodisaning ehtimoli

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A)$$

ga teng. Bu yerda

$$U = B_1 + P_2 + ... + P_n\,,\ B_i \ \ B_j = V\,,\quad i,j=\overline{1,n} \quad\ i \neq j\ .$$

A hodisa ro‘y berdi, endi $B_1,\ B_2...B_n$ gipotezalarning ehtimollari, ya’ni quyidagi shartli ehtimollar $P_A(B_1),\quad P_A(B_2),...,\quad P_A(B_n)$ qanday bo‘ladi?

Avval quyidagi ehtimollikni hisoblaymiz:

$$P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A)$$

tenglik o‘rinli ekanligi ravshandir. Bu yerdan

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\,P_{B_1}(A)}{P(A)}$$

yoki to‘la ehtimollik formulasiga asosan

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A)}$$

Xuddi shunday usul bilan

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A)}$$

... ...

$$P_A(B_n) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A)}$$

formulani yozish qiyin emas.

Yuqoridagi formulalarni quyidagicha yozish mumkin.

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)\,P_{B_i}(A)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B_i)\,P_{B_i}(A)} \qquad i=\overline{1,n} \tag{14}$$

Bu formula **Beyes formulasi** deyiladi.

Misol. Birinchi idishda 8 ta oq va 7 ta qora shar, ikkinchi idishda esa 10 ta oq va 5 ta qora shar bor. Ikkinchi idishdan birinchi idishga bitta shar olib solinadi va agar birinchi idishdan oq shar chiqqan bo‘lsa, ikkinchi idishdan birinchi idishga solingan sharning oq yoki qora bo‘lish ehtimoli nimaga teng?

Yechish.

B_1 - 2 idishdan 1 – idishga oq shar solish,

B_2 - 2 idishdan 1 – idishga qora shar solish hodisalari bo‘lsin

A – 1 – idishdan oq shar chiqishi hodisasi bo‘lsin.

U holda yuqorida keltirilgan misolga asosan, ularning ehtimolliklari

$$P(B_1)=\frac{2}{3},\quad P(B_2)=\frac{1}{3},\quad P(A)=\frac{13}{24}$$

ga teng. Endi yuqorida keltirilgan (14) formulaga asosan yozamiz:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{16}}{\frac{13}{24}}=\frac{9}{13}$$

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{16}}{\frac{13}{24}}=\frac{4}{13}$$

Demak, ehtimolliklar $P_A(B_1)=\frac{9}{13}$, $P_A(B_2)=\frac{4}{13}$ ga teng bo‘lib, ularning yig‘indisi birga teng.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

1. Kursant otish bo‘yicha “sinov” topshirishi uchun 4 dan past bo‘lmagan baho olishi kerak. Agar kursant otganiga “5” bahoni 0,3, “4” bahoni 0,6 ehtimollik bilan olishi ma’lum bo‘lsa, kursantning “sinov” topshira olish ehtimolligini toping. J: p = 0,9

2. Ikkita mergan nishonga qarata bittadan o‘q uzishdi. Birinchi merganning nishonga tekkazish ehtimolligi 0,6 ga, ikkinchisi uchun 0,7 ga tengligi ma’lum bo‘lsa, quyidagi hodisalarning ehtimolliklarini toping:

a) merganlarning faqat birining nishonga tekkazishi;

b) merganlarning hech bo‘lmaganda biri nishonga tekkazishi;

v) ikkala mergan nishonga tekkazishi;

g) hech bir merganning nishonga tekkaza olmasligi;

d) merganlarning hech bo’lmaganda biri nishonga tekkaza olmagani.

J: a) 0,46; b) 0,6; v) 0,42; g) 0,12; d) 0,58.

3. Yig‘uvchiga zarur detal birinchi, ikkinchi, uchinchi, to‘rtinchi yashikda ekanligi ehtimolligi mos ravishda 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 ga teng. Zarur detal:

a) ko‘pi bilan 3 ta yashikda bo‘lishi;

b) kami bilan 2 ta yashikda bo‘lishi ehtimolligini toping.

J: a) 0,6976; b) 0,9572

4. Guruhda 10 talaba bo‘lib, ularning 7 nafari a’lochilar. To‘rt talaba dekanatga chaqirtirildi. Ularning barchasi a‘lochi bo‘lishi ehtimolligini toping. J: $\frac{1}{6}$.

5. Uchta zavod soat ishlab chiqaradi va magazinga jo‘natadi. Birinchi zavod butun mahsulotning 40% ini, ikkinchi zavod 45% ini, uchinchi zavod esa 15% ini tayyorlaydi. Birinchi zavod chiqargan soatlarning 80% i, ikkinchi zavod soatlarining 90 % i ilgarilab ketadi. Sotib olingan soatning ilgarilab ketishi ehtimolligini toping. J: 0,77.

6. Samolyotga qarata uchta o‘q uzilgan. Birinchi otishda nishonga tegish ehtimolligi 0,5 ga, ikkinchisida 0,6 ga, uchinchisida 0,8 ga teng. Bitta o‘q tekkanda samolyotning urib tushirilishi ehtimolligi 0,3 ga, ikkita o‘q tekkanda 0,6 ga teng. Uchta o‘q tegsa, samolyot urib tushiriladi. Samolyotning urib tushirilish ehtimolligini toping. J: 0,594.

7. Spartakiadada birinchi guruhdan 4 talaba, ikkinchi guruhdan 6, uchinchi guruhdan 5 talaba qatnashadi. Institut terma jamoasiga birinchi guruhdagi talaba 0,9 ehtimollik bilan, ikkinchi guruh talabasi 0,7 va uchinchi guruh talabasi 0,8 ehtimollik bilan qabul qilinishi mumkin. Tavakkaliga tanlangan talaba terma jamoaga qabul qilindi. Bu talabaning qaysi guruhda o‘qishi ehtimolligi kattaroq? J: Talabaning ikkinchi guruhda o‘qishi ehtimolligi kattaroq.

8. Sexda tayyorlanadigan detallar ikkita nazoratchi tomonidan tekshiriladi. Detalning nazorat uchun birinchi nazoratchiga tushishi ehtimolligi 0,6 ga, ikkinchi nazotratchiga tushishi 0,4 ga teng. Yaroqli detalning birinchi nazoratchi tomonidan yaroqsiz deb topilishi ehtimolligi 0,06 ga, ikkinchi nazoratchi uchun esa 0,02 ga

teng. Yaroqsiz deb topilgan detallar tekshirilganda ular ichidan yaroqliligi chiqib qoldi. Bu detalni birinchi nazoratchi tekshirganligi ehtimolligini toping: J: $\frac{9}{11}$.

Nazorat savollari.

1. Birgalikda bo‘lmagan hodisalar yig‘indisining ehtimoli.
2. Birgalikda bo‘lgan hodisalar yig‘ndisining ehtimoli.
3. Hodisalar to‘liq gruppasining ehtimoli.
4. To‘la ehtimollik formulasi
5. Beyes formulasi.

5-§. TAJRIBALAR KETMA-KETLIGI. BERNULLI FORMULASI.

Reja:

1. **Tajribalar ketma-ketligi .**
2. **Bernulli formulasi.**
3. **Laplasning local teoremasi.**
4. **Laplasning integral teoremasi**
5. **Puasson formulasi.**

Tayanch iboralari: o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalar, oddiy hodisa, Bernulli formulasi, Laplasning local teoremasi, Laplasning integral teoremasi, Puasson formulasi.

I. Har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish yoki bermasligi masalasini ko‘rib chiqaylik. Har bir tajribada A hodisaning ro‘y berishi yoki bermasligi keyingi o‘tkaziladigan tajribaning natijasiga ta’siri bo‘lmasi, u holda A hodisaga nisbatan o‘tkaziladigan tajribalarni **o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalar** deyiladi.

Har bir o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalarda *A* hodisaning ro‘y berish ehtimoli o‘zgarishi ham, o‘zgarmasliga ham mumkin. Bu tajriba ehtimolligi o‘zgarmas bo‘lgandagi holni ko‘ramiz.

Avval masalani sodda ko‘rinishini qarab chiqamiz, ya’ni o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma – ketligida *A* hodisaning ro‘y berish ehtimolligi o‘zgarmas bo‘lsin, tabiiyki *A* hodisaning ro‘y bermasligi ham o‘zgarmas bo‘ladi.

Har bir tajtibada *A* hodisaning ro‘y berish ehtimoli *p* deb olamiz va bunday hodisa **oddiy hodisa** deyiladi.

Bitta tajribada *A* hodisaning ro‘y berish yoki bermasligiga o‘zaro qarama – qarshi hodisalar bo‘lgani uchun quyidagilarni yozamiz:

$$U = A + \bar{A}, \quad A \cdot \bar{A} = V$$

$$P(A) = P(\bar{A}) = 1, \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p = q.$$

Bir nechta tajribalarda *A* hodisaning ro‘y berishlar sonini murakkab hodisalar deb qarasak, u holda murakkab hodisalar oddiy hodisalar ketma – ketligidan tashkil topgan deb qarash mumkin.

Quyidagi masalalarni ko‘rib chiqaylik. *n* ta tajribalar o‘tkazish natijasida *A* hodisaning *k* marta ro‘y berish ehtimoli topilsin. Bu ehtimollikni $P_n(k)$ deb belgilaymiz.

Tajribalarni ketma – ketligini qaraymiz:

$$\begin{array}{lll} n=1 & A & \bar{A} \\ k=0{,}1 & P_1(1)=p & P_1(0)=1-p=q \end{array} \Bigg\} \quad \text{1- tajriba}$$

$$\begin{array}{lllll} n=2 & AA & A\bar{A} & \bar{A}A & \bar{A}\bar{A} \\ k=0{,}1{,}2 & P_2(2)=p^2 & P_2(1)=pq & P_2(1)=qp & P_2(0)=q^2 \end{array} \Bigg\} \quad \text{2- tajriba}$$

$$\left.\begin{array}{ll} n=3, & k=1,1,2,3 \\ AAA & P_3(3)=p^3 \\ AA\overline{A} & P_3(2)=p^2q \\ A\overline{A}A & P_3(2)=p^2q \\ \overline{A}AA & P_3(2)=p^2q \\ \overline{AA}A & P_3(1)=p\,q^2 \\ \overline{A}A\overline{A} & P_3(1)=p\,q^2 \\ AAA & P_3(0)=q^2 \end{array}\right\} \quad \text{3- tajriba}$$

$$\cdot\ \cdot\ ..\ \cdot\ \cdot\ ..\ \cdot\ \cdot\ ..\ \cdot\ \cdot\ ..\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Shunday qilib, tajribalar ketma – ketligini davom ettirish mumkin va ehtimolliklarini quyidagi ihcham ko‘rinishda ifodalash mumkin:

$$\begin{array}{lllr} n=1 & P_1(k)=C_1^k\, p^k q^{1-k}, & k=0,1 & \\ n=2 & P_2(k)=C_2^k\, p^k q^{2-k}, & k=0,1,2 & \\ n=3 & P_3(k)=C_2^k\, p^k q^{3-k}, & k=0,1,2,3 & \\ \ldots & \ldots \qquad \ldots & \ldots \qquad \ldots & \\ n=n & P_n(k)=C_n^k\, p^k q^{n-k}, & k=0,1,\ldots,n & (1) \end{array}$$

II. Oxirgi formula *A* hodisaning *n* ta tajribada *k* marta ro‘y berish ehtimolini hisoblaydi va **Bernulli formulasi** deyiladi.

Misol 1. Tanga 5 marta tashlanganda 3 marta «Γ» tomanini tushish ehtimoli topilsin. Har bir tajribada «Γ» tomonini tushish ehtimoli $p=\frac{1}{2}$ ga teng.

Yechish. Yuqoridagi (1) formulaga asosan, 5 ta tajribada 3 marta «Γ» tushish ehtimoli

$$P_3(3)=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$$

ga teng bo‘ladi.

Misol 2. *A* hodisaning 100 marta o‘tkazilgan tajribada 53 marta ro‘y berish ehtimoli topilsin. Har bir tajribada *A* hodisaning ro‘y berish ehtimoli p = 0,48 ga teng.

Yuqoridagi (1) ga asosan yozamiz

$$P_{100}(53)=C_{100}^{53}\,(0{,}48)^{53}\cdot(0{,}52)^{47}.$$

Misol 3. 100 marta tajribada A hodisaning 46 martadan 55 martagacha ro‘y berish ehtimoli topilsin. Har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p = 0,48 ga teng.

Yana yuqoridagi (1) formulaga asosan yozish mumkin, $k_1 = 46, \quad k_2 = 55$ bo‘lsa,

$$P_{100}(46,55) = \sum_{k=46}^{55} C_{100}^{53} (0,48)^k \cdot (0,52)^{100-k}.$$

ehtimollik shu tenglama bilan hisoblanadi.

Yuqoridagi 2- va 3- misollar shuni ko‘rsatadiki, tajribalar soni oshganda Bernulli formulasi bo‘yicha ehtimollikni hisoblash anchagina murakkablashar ekan va hisoblash davomida ko‘pgina haqiqiy ehtimolliklardan anchagina chetlanish yuz berishi mumkin. Bu savolga Laplasning lokal va integral teoremalari javob beradi.

Avval Laplasning lokal teoremasini ko‘rib chiqamiz.

III. Teorema. Agar har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi o‘zgarmas va nol bilan birdan farqli bo‘lgan p ga teng bo‘lsa, u holda n ta tajribada A hodisaning k marta ro‘y berish ehtimoli $P_n(k)$, tajribadan quyidagi funksiyaning qiymatiga teng

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

bu yerda

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

ga teng.

Teoremaning isboti ustida to‘xtalmaymiz.

Shunday qilib, teoremaning shartiga asosan

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x).$$

Bu yerda $\varphi(-x) = \varphi(x)$- juft funksiyadir, x- o‘zgaruvchining barcha qiymarlari uchun $\varphi(x)$ funksiya jadval ko‘rinishida berilgan.

Endi yuqoridagi 2 – misolni yechish mumkin. n=100, k =53, p=0,48 q=0,52.

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{53-100\cdot 0,48}{\sqrt{100\cdot 0,48\cdot 0,52}}=\frac{5}{10\sqrt{0,48\cdot 0,52}}\approx\frac{1}{2\cdot 0,5}=1$$

$$P_{100}(53)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)=\frac{1}{0,5}\varphi(1)=0,242=0,484.$$

$\varphi(1)=0,242$ - jadvaldan topildi.

IV. Teorema. Agar har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli o‘zgarmas va nol bilan birdan farqli bo‘lgan p ga teng bo‘lsa, u holda n ta tajribada A hodisaning k_1 martadan k_2 martagacha ro‘y berish ehtimoli $P_n(k_1, k_2)$ tajribadan quyidagi aniq integralning qiymatiga teng

$$P_n(k_1k_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\ ,$$

bu yerda $x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Quyidagi funksiyani kiritamiz.

$$\Phi(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dt.$$

Bu funksiya Φ (x) = - Φ(x)- toq funksiyadir, qiymatlari jadval ko‘rinishda berilgan. U holda $P_n(k_1k_2)$ ehtimollikni

$$P_n(k_1, k_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{0}e^{\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x_2}e^{\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x_2}e^{\frac{t^2}{2}}dt-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x_1}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$$

ko‘rinishda $\Phi(x)$ funksiya orqali ifodalash mumkin.

Yuqorida keltirilgan 3 – misolni yechamiz.

$n=100,\ k_1=46,\ k_2=55,\ p=0,48,\ q=0,52$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{46 - 100\cdot 0{,}48}{\sqrt{100\cdot 0{,}48\cdot 0{,}52}} \approx \frac{-2}{10\cdot 0{,}5} = -0{,}4$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{55 - 100\cdot 0{,}48}{\sqrt{100\cdot 0{,}48\cdot 0{,}52}} \approx \frac{7}{10\cdot 0{,}5} = 1{,}4$$

$$P_{100}(46{,}55) = \Phi(14) - \Phi(-0{,}4) = \Phi(1{,}4) + \Phi(0{,}4) = 0{,}41192 + 0{,}1554 = 0{,}57746.$$

Bu yerda $\Phi(1{,}4) = 0{,}41192$, $\Phi(0{,}4) = 0{,}1554$ qiymatlar jadvaldan topiladi.

Yuqorida ko‘rilgan masalalarda, ya’ni Laplasning lokal va integral teoremalarida *A* hodisaning har bir tajribada ro‘y berish ehtimoli noldan va birdan farqli bo‘lishi talab qilinadi.

Agar *A* hodisaning har bir tajribada ro‘y berish ehtimoli *p* kichik son bo‘lsa, ya’ni nolga yoki birga yaqin son bo‘lsa, u holda Puasson formulasidan foydalanish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

V. Quyidagi masalani qaraylik. Tajribalar soni yetarlicha katta bo‘lganda, *A* hodisaning har bir tajribada ro‘y berish ehtimoli kichik bo‘lganda, *A* hodisaning *k* marta ro‘y berish ehtimoli topilsin. Tajribalar sonini hodisaning ehtimolligiga ko‘paytmasini o‘zgarmas son deb qaraymiz, ya’ni quyidagi parametrni kiritamiz

$$pn = \lambda.$$

Bernulli formulasidan foydalanamiz

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!}\, p^k (1-p)^{n-k}.$$

Bu yerda $pn = \lambda$ bo‘lgani uchun $p = \frac{\lambda}{n}$, u holda

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))\,\lambda^k}{k! \qquad k}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{\lambda^k}{k!}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Endi $n \to \infty$ dagi minimumini hisoblaymiz

$$P_n(k) = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \dots \left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda};$$

Shunday qilib, quyidagi Puasson formulasiga ega bo‘lamiz

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Misol. Korxona omborga 5000 ta sifatli detal jo‘natdi. Detalning yo‘lda yaroqsiz bo‘lish ehtimoli 0,0002 ga teng. Omborga 3 ta yaroqsiz detal kelish ehtimolli topilsin.

Yechish. Masalani sharti bo‘yicha

$$n = 5000,\ p = 0{,}0002,\ k = 3,\ \lambda = n\,p = 5000 \cdot 0{,}002 = 1.$$

Puasson formulasiga asosan

$$P_{5000}(3) = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{3e} = 0{,}06.$$

Nazorat savollari.

1. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalar deb nimaga aytiladi?
2. Tajribalar ketma-ketligi .
3. Bernulli formulasi.
4. Laplasning lokal teoremasi.
5. Laplasning integral teoremasi
6. Puasson formulasi.

GLOSSARIY

Determinant — kvadrat matritsadan tuzilgan jadval;

Sarrius usuli — uchunchi tartibli determinantning yechish usuli;

Minor — determinantning satr va ustunini o‘chirishdan hosil bo‘lgan tartibi berilgan determinantning tartibidan bittaga kam determinant;

Algebraik to‘ldiruvchi — minorning ishorasini aniqlovchi ifoda;

***n* – tartibli determinant** — *n* ni o‘rniga ixtiyoriy natural sonni qo‘yib hosil qilingan birinchi, ikkinchi, uchinchi va hokazo tartibli determinantlar.

Matritsa — m ta satr va n ta ustunga ega bo‘lgan jadval;

Kvadrat matritsa — satr va ustunlari soni teng bo‘lgan jadval;

Transponirlangan matritsa — matritsaning satrlarini ustun, ustunlarini esa satr qilib yozish natijasida hosil qilingan matritsa;

Maxsus matritsa — determinanti nolga teng bo‘lgan matritsa;

Maxsus bo‘lmagan matritsa — determinanti nolga teng bo‘lmagan matritsa.

Arifmetik vektor — *n* ta $x_1,\ x_2,...,x_n$ sonlarning har qanday tartiblangan to‘plami;

Vektorlar sistemasining chiziqli bog‘liqligi — bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan $\lambda_1,\ \lambda_2,...,\lambda_S$ sonlar uchun $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_S x_S = 0$ tenglikning bajarilishi;

Matritsaning rangi — noldan farqli minorlarning eng yuqori tartibi;

Matritsaning rangini hisoblash — 1) O‘rab turuvchi minorlar usuli;
2) Elementar almashtirishlar usuli;

***R*^{n} fazoning rangi** — fazoning o‘lchamini bildiradi.

Bir jinsli CHTS — o‘ng tomoni nollardan iborat sistema;

Bir jinsli bo‘lmagan CHTS — o‘ng tomoni nollardan iborat bo‘lmagan sistema;

Birgalikdagi CHTS — yechimga ega bo‘lgan sistema;

Birgalikda bo‘lmagan CHTS — yechimga ega bo‘lmagan sistema;

Ekvivalent CHTS — ikkinchi sistemaning yechimlari to‘plami bir xil bo‘lgan sistema;

Kramer formulalari — CHTS ni determinantlar yordamida yechish;

Matritsalar usuli — CHTSni matritsalar yordamida yechish.

Dekart koordinatalar sistemasida vektorlar — vektorlarning grafikda tasvirlanishi.

Aylanma yo‘nalish — o‘zaro parallel bo‘lmagan vektorlar orasidagi π dan kichik bo‘lgan ehg qisqa burilish burchagi;

Ortlar — tekislik va fazodagi birlik vektorlar;

Skalyar ko‘paytma — ikkita vektorlar modullarini ular orasidagi burchak kosinusiga ko‘paytmasi;

Yo‘naltiruvchi kosinuslar — biror vektorni o‘qlar bilan hosil qilgan burchaklarining kosinuslari.

Chiziqli fazoning operatori — berilgan fazoni o‘ziga akslantiruvchi va $A(\lambda x)=\lambda Ax$, $A(x+y)=Ax+Ay$ xossalarga ega bo‘lgan har qanday akslantirish;

Birlik operator — *EX=X* munosabatni qanoatlantiruvchi *E* operator;

Komplanar vektorlar — bir tekislikda yotgan uchta vektor;

Chap sistema — $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ortlarning aylanma yo‘nalishlari *OXY, OYZ, OZX* tekisliklarning musbat yo‘nalishi bilan bir xil;

O‘ng sistema — $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ortlar uchun aylanma yo‘nalish *OZX* tekisligining musbat yo‘nalishiga teskari.

Vektor ko‘paytma — 1) $\vec{c}$ vektorning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uzunliklari va ular orasidagi burchak sinusi ko‘paytmasiga teng; 2) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor yotgan tekislikka perpendikulyar va $\vec{a}$ ga ham $\vec{b}$ ga ham perpendikulyar; 3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar chap sistemani tashkil qiladi.

Aralash ko‘paytma — $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$ vektorga vektor ko‘paytmasidan hosil bo‘lgan natijani $\vec{c}$ vektorga skalyar ko‘paytmasiga teng.

To‘g‘ri chiziq — tenglamalari noma’lumlarning birinchi darajasi orqali ifodalanadigan chiziq;

Aylana — markaz deb ataluvchi nuqtagacha masofalari o‘zgarmas bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni;

To‘g‘ri chiziqlar dastasi — bir nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq to‘plami.

Ellips — fokuslar deb ataluvchi ikki nuqtalargacha bo‘lgan masofalarining yig‘indisi o‘zgarmas bo‘lgan tekislik nuqtalarining geometrik o‘rni;
Ekssentrisitet — fokuslari orasidagi masofani uning katta o‘qi uzunligiga nisbati;
Fokal radiuslar — ixtiyoriy nuqtalaridan fokuslarigacha bo‘lgan masofa;
Direktrisa — katta o‘qqa perpendikulyar bo‘lgan va markazdan $\left|\pm\frac{a}{e}\right|$ masofa uzunligida o‘tadigan ikkita to‘g‘ri chiziq;
Giperbola — har bir nuqtasidan berilgan ikki nuqtagacha masofalarning ayirmasi o‘zgarmas songa teng bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni;
Parabola — har bir nuqtasidan berilgan bir nuqtagacha va berilgan bir to‘g‘ri chiziqqacha masofalari o‘zaro teng bo‘lgan tekislik nuqtalarining geometrik o‘rni.
Sirt — $F(x, y, z)=0$ tenglama bilan ifodalangan nuqtalarning geometrik o‘rni;
Normal vektor — berilgan tekislikka perpendikulyar bo‘lgan vektor;
Kanonik tenglama — eng sodda tenglama.
Sfera — fazoda berilgan nuqtadan teng uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o‘rnidan tashkil topgan sirt;
Silindrik sirt — fazoda yo‘naltiruvchi chiziqni kesib o‘tuvchi va biror to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan barcha chiziqlardan hosil bo‘lgan sirt;
Konus sirt — fazoda yo‘naltiruvchi chiziqni kesib o‘tuvchi barcha to‘g‘ri chiziqlardan hosil bo‘lgan sirt;
Aylanma sirt — fazoda biror chiziqning o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan nuqtalar to‘plami.
Haqiqiy sonning moduli — haqiqiy sonning absolyut qiymati;
O‘zgarmas miqdor — biror hodisani tekshirishda yoki har bir sharoitda o‘z qiymatini saqlagan miqdor;
O‘zgaruvchi miqdor — biror hodisani tekshirishda turli qiymatlarga ega bo‘lgan miqdor.
Funksiyaning aniqlanish sohasi — funksiyani aniqlaydigan argumentning hamma qiymatlar to‘plami;

Elementar funksiyalar — butun ratsional, kasr ratsional, darajali, ko‘rsatkichli, logarifmik funksiyalar;

Transsendent funksiyalar — algebraik bo‘lmagan funksiya.

O‘zgarmas sonning limiti- $x-a$ ayirmaning absalud qiyumati x ning o‘zgarishi jarayonoda avvaldan berilgan har qanday musbat kichik son E dan kichik bo‘ladi.

Funksiyaning limiti – agar x to‘plamning nuqtalaridan tuzilgan a ga intriluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham mos $f\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b limitga intiladi.

Cheksiz kichik miqdor - $x=a$ nuqtada $y=f(x)$ funksiya uchun $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ bo‘ladi.

Birinchi ajoyib limit - $\lim\limits_{x\to 0}\frac{lim}{x}=1$**.**

Ikkinchi ajoyib limit - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=e$

Funksiyaning uzluksizligi – x_0 nuqtada argumentning cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasining mos kelishi.

Hosila - funksiya orttirmasini argument orttirmasiga nisbati argument orttirmasi nolga intilgandagi limiti;

Funksiyaning differensiallanuvchanligi- $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo‘lishi;

Hosilaning geometric ma’nosi - argumentlarning berilgan qiymatida hosilaning qiymati funksiyaning grafigiga o‘tkazilgan urinmaning OX o‘qini musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangensi.

Murakkab funksiya – $y=F(u), u=\varphi(x)$ bo‘lsa , $y=F[\varphi(x)]$ funksiya murakkab funksiya bo‘ladi;

Oshkormas funksiya - $F(x,y)=0$ tenglamasi bilan berilgan funksiya;

Teskari funksiya – argumentning qiymatlari uchun funksiyaning qiymatlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mabjud bo‘lsa, berilgan funksiyaga teskari funksiya berilgan bo‘ladi;

Funksiyaning parametrik funksiyasi - $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha,\beta]$ tenglamalar sistemasi;

Giperbolik funksiyalar – ko‘rsatqichli funksiyalar orqali ifodalanuvchi funksilar.

Funksiyaning differensiali - funksiya hosilasi va argument differensialining ko‘paytmasi;

Differensialning geometrik ma’nosi - $f(x)$ funksiay berilgan x va Δx qiymatlariga tegishli differensiali $y=f(x)$ egri chiziqning berilgan x nuqtasidagi oriqma ordinatasini orttirmasi;

Yuqori tartibli hosilalar – birinchi tartibli hosiladan ketma-ket olingan hosilalar;

Yuqori tartibli differensiallar – birinchi tartibli differsiyadan ketma-ket olingan differensiallar.

Boshlang‘ich funksiya - $[a,b]$ kesmaning har bir nuqtasida $F'(x)=f(x)$ tenglikning o‘rinli bo‘lishi;

Aniqmas integral - $F'(x)+c$ ifoda

O‘zgaruvchini almastirish – *x* o‘zgaruvchi o‘rniga yangi *t* o‘zgaruvchi kiritiladi, natijada oddiy integral hosil bo‘ladi.

Bo‘laklab integrallash – bu fofmulani qo‘llagnda ancha sodda bo‘lgan jadval integraliga keladi.

Kvadrat uchhad qatnashgan integrallari - ax^2+bx+c kvadrat uchhad mahrajda ildizsiz va ildiz ostida qatnashadi.

Nyuton-Leybnits formulasi — aniq integralni hisoblash formulasi;

Boshlang‘ich funksiya — u shunday funksiyaki, hosilasi olinganda berilgan funksiyaga teng;

O‘zgaruvchini almashtirish — ba’zi integrallar jadvalda ham keltirilmaydi, xossalar yordamida ham yechilmaydi, ularni yechish uchun yangi o‘zgaruvchi kiritiladi.

Bo‘laklab integrallash — shunday integrallar borki, maxsus usullar bilan bo‘laklanadi.

Aniq integralning geometrik tadbiqlari — qutb va Dekart koordinatalar sistemasida yuzalarni, egri chiziq yoyining uzunligini hisoblash, jism hajmini parallel kesimlarning yuzalari bo‘yicha hisoblash, aylanma jismning hajmini hisoblash.

Aniq integralning mexanikaga tadbiqi — bajarilgan ishni hisoblash, inersiya momentini hisoblash.

Elementar hodisalar fazosi – ixtiyoriy to‘plam;

Elementar hodisalar – ixtiyoriy to‘plamning elementlari;

Tasodifiy hodisalar – tajriba natijasida ro‘y bermasligi mumkin bo‘lgan hodisalar;

Muqarrar hodisalar – tajriba natijasida albatta ro‘y beradigan hodisalar;

Mumkin bo‘lmagan hodisalar – tajriba natijasida umuman ro‘y berilmaydigan hodisalar;

Birgalikda bo‘lmagan hodisalar – ikkita hodisalar ko‘paytmasi mumkin bo‘lmagan hodisalar;

Hodisalarning to‘la gruppasi – bir nechta hodisalar yig‘ndisi muqarrar hodisa bo‘lib, ularning har qanday jufti mumkin bo‘lmagan hodisalardan iborat;

Qarama-qarshi hodisalar – yig‘indisi muqarrar hodisa bo‘lib, ko‘paytmasi mumkin bo‘lmagan hodisalardan iborat.

Kombinatorika elementlari – o‘rin almashtirishlar, o‘rinlastirishlar, gruppalashlar;

Nyuton binomi – ikkihad yig‘indisi natural daraja bo‘yicha yoyish;

Ehtimolning plastik ta’rifi – biror hadi sonning ro‘y berishi berishi uchun imkoniyat yaratuvchi elementar hodisalar sonining umumiy elementar hodisalar soniga nisbati;

Gipergeometrik taqsimot – ehtimolning klassik ta’rifidagi nisbatni gruppalashlar orqali ifodalanishi.

Nisbiy chastota – tajriba o‘tkazish natijasida biror hodisaning ro‘y berishlar sonining o‘tkazilgan tajribalar umumiy soniga nisbati;

Geometrik ehtimollik – Byuffen masalasi;

Shartli ehtimollik – tajriba o‘tkazish natijasida biror hodisa ro‘y berganda, ikkinchi hodisaning ro‘y berishi ehtimoli.

Bog‘liq hodisalar – bir hodisaning ro‘y berishining boshqa hodisalarga ta’siri;

To‘la ehtimollik – har bir hodisa ehtimollarini ularning mos shartli ehtimollari ko‘paytmasining yig‘indisi.

Bernulli formulasi – biror hodisaning *n* ta tajribada *k* marta ro‘y berish ehtimollarini hisoblaydi;

Laplasning local teoremasi – har bir hodisa tajribada biror hodisaning ro‘y berish ehtimolligi o‘zgarmas va $0<p<1$ bo‘lganda *n* ta tajribada o‘sha hodisaning k marta ro‘y berish ehtimolini topish formulasi;

Laplasning integral teoremasi – har bir tajribada biror hodisaning ro‘y berish ehtimolligi o‘zgarmas va $0<p<1$ bo‘lgan *n* ta tajribada o‘sha hodisaning k_1 martadan k_2 martagacha ro‘y berish ehtimolini topish formulasi;

Puasson formulasi – tajribalar soni yetarlicha katta bo‘lganda biror hodisaning har bir tajribada ro‘y berish ehtimoli kichik bo‘lganda o‘sha hodisaning *k* marta ro‘y berish ehtimolini topish formulasi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Ш.М.Мирзиёев. Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш – юрт тараққиёти ва халқ фаровонлигининг гарови. Тошкент: “Ўзбекистон” НМИУ, 2017. -48 б.
2. “Oliy matematika” (Iqtisodchi va muhandis-texnologlar uchun). Rasulov , I.I. Safarov I.I., R.T. Muxitdinov . TOSHKENT, 2012. - 554 bet
3. Писменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.
4. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Й. Кожевникова, « Олий математикадан мисол ва масалалар»1-2 қисмлар, Тошкент. 2007 йил.
5. Н.Ш.Кремер, “Высшая математика для экономических специальностей”, Москва – 2005 йил.
6. Н.С. Пискунов “ Дифференциал ва интеграл ҳисоб” 1- 2қисмлар, Тошкент 1974 йил.
7. В.П. Минорский “Олий математикадан масалалар тўплами”,Тошкент 1988 йил.
8. Г. И. Запорожец, “Руководство к решению задач по математическому анализу”, Москва – 1966 йил.
9. Э. Ф. Файзибоев, Н. М. Цирмиракс, “Интеграл ҳисоб курсидан амалий машғулотлар”, Тошкент – 1982 йил.
10.Ш.Мақсудов, М. Салохиддинов, С. Сирожиддинов. Комплекс ўзгарувчининг функциялари назарияси. Тошкент 1976-йил.
11. .Д. Письменный, “Конспект лекции по высшей математике” Москва, 2009 г.
12. Jo’rayev T. va boshqalar. Oliy matematika asoslari 1-2 –qism T. “O’zbekiston”. 1995, 1999 y

14. Tojiyev SH, I. Oliy matematika asoslaridan masalalar yechish. T: “O’zbekiston” , 2002 y.
15. Mirzayev A.O’. Matematika. T:”Innovatsiya-ziyo”. 2019 y.
16. Nigel Buckle, Ian Dunbar. Mathematics-Higher Level (core). Printed by Shannon books. Australia. 2007
17. Xamedova N.A., Sadikova A.V., Laktaeva I.Sh. Matematika. Gumanitar yo’nalishlar talabalari T.: Jaxon-print, 2007.
18. Azlarov T.A., Mansurov X. “Matematik analiz” 1-qism.T: ‘O’qituvchi”,1994 y
19. Baxavalov S. B. va boshq. “Analitik geometriyadan mashqlar to’plami” T: Universitet, 2006 y.
20. Jane S Paterson Heriot-Watt (University Dorothy) A Watson Balerno (Hing School). SQA Advanced Higher Mathematics. Unit I. This edition published in 2009 by Heriot-Watt Universite SCHOLAR. Copyright 2009 Heriot –Watt University.
21. College geometry, Csaba Vincze and Laszlo Kozma, 2014 Oxford University.
22. Introduction to Calculus, Volume I, II by J.H. Heinbockel Emeritus Professor of Mathematics Old Dominion University, Copyright 2012, All righs reserved Paper or elektronik copies for noncommercial use may be made freely without explicit.

Mundarija

Оглавление