بررسی $N \geq 2$ نوسانگر جفت شده

میثم حسن دوست

تیر ۱۴۰۱

۱ مقدمه

عموما برای حل معادلات نوسانگرهای جفت شده ، جواب های نوسانگرها را به صورت ماتریسی که عامل نوسان ($Ae^{i\alpha t}$) دارند را حدس زده و با جایگذاری در دستگاه معادلات ، ثوابت و ریشه های متغیر تابع نمایی را بدست می آورند و این گونه می توانند مدهای نرمال را پیدا کنند . اما راه دیگری که وجود دارد و در این گزارش به آن پرداخته ایم این است که دستگاه معادلات جفت شده ی اولیه را به گونه ای با استفاده از ماتریس تبدیل به دستگاه مختصات تعمیم یافته ، تبدیل کنیم که دستگاه معادلات در آن مختصه ها دیگر جفت شده نباشد و بتوان معادلات را جدا و موازی از هم حل کرد .

۲ بدنه

ابتدا به مسئله ی دو نوسانگر جفت شده می پردازیم سپس آن را به N نوسانگر جفت شده تعمیم می دهیم .
بنا به شکل ۱ داریم:

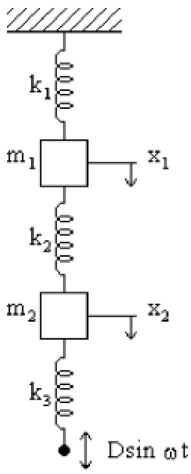
$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) - c_1\dot{x}_1 \tag{۱}$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 - k_2(x_2 - x_1) - c_2\dot{x}_2 + k_3D\sin(\omega t) \tag{۲}$$

حال اگر فرض کنیم $c_1 = c_2 = c$ و جرم ها و ثابت فنر ها یکسان باشند ، آنگاه معادلات فوق به صورت زیر می باشند :

$$m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2 - c\dot{x}_1 \tag{۳}$$
$$m\ddot{x}_2 = -2kx_2 + kx_1 - c\dot{x}_2 + F_0\sin(\omega t) \tag{۴}$$

که در آن $F_0 \equiv kD$.
حال با تغییر متغیرهای

$$q_1 = x_1 + x_2 \quad , \quad q_2 = x_2 - x_1 \tag{۵}$$



شکل ۱: دو نوسانگر جفت شده

داریم :

$$x_1 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) \quad , \quad x_2 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$$

بنابراین با جایگذاری متغیر های جدید ، برای معادله ی اول داریم :

$$m[\frac{1}{2}(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2)] = -2k[\frac{1}{2}(q_1 - q_2)] + k[\frac{1}{2}(q_1 + q_2)] - c[\frac{1}{2}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)]$$
$$\frac{1}{2}m(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) = -k(q_1 - q_2) + \frac{1}{2}k(q_1 + q_2) - \frac{1}{2}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$$
$$m(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) = -2k(q_1 - q_2) + k(q_1 + q_2) - c(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$$

به همین ترتیب برای معادله ی دوم خواهیم داشت :

$$m(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) = -2k(q_1 + q_2) + k(q_1 - q_2) - c(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + 2F_0 \sin(\omega t)$$

بنابراین دو معادله جدید بدست می آید که به صورت زیر می باشند:

$$m(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) = -2k(q_1 - q_2) + k(q_1 + q_2) - c(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$$
$$m(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) = -2k(q_1 + q_2) + k(q_1 - q_2) - c(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + 2F_0 \sin(\omega t)$$

حال با جمع و تفریق دو عبارت فوق خواهیم داشت :

$$2m\ddot{q}_1 = -4kq_1 + 2kq_1 - 2c\dot{q}_1 + 2F_0 \sin(\omega t)$$
$$2m\ddot{q}_2 = -4kq_2 - 2kq_2 - 2c\dot{q}_2 + 2F_0 \sin(\omega t)$$

بنابراین :

$$m\ddot{q}_1 = -kq_1 - c\dot{q}_1 + F_0 \sin(\omega t)$$
$$m\ddot{q}_2 = -3kq_2 - c\dot{q}_2 + F_0 \sin(\omega t)$$

و:

$$m\ddot{q}_1 + c\dot{q}_1 + kq_1 = F_0 \sin(\omega t) \tag{۶}$$
$$m\ddot{q}_2 + c\dot{q}_2 + 3kq_2 = F_0 \sin(\omega t) \tag{۷}$$

که می توان این دو را به صورت زیر نوشت :

$$\ddot{q}_1 + 2\gamma\dot{q}_1 + \frac{k}{m}q_1 = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t) \tag{۸}$$
$$\ddot{q}_2 + 2\gamma\dot{q}_2 + 3\frac{k}{m}q_2 = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t) \tag{۹}$$

که در آن $\gamma = c/2m$ پارامتر میرایی می باشد.
حال با استفاده از روش تغییر متغیر معادلات بدست آمده ی فوق ، دیگر جفت شده نیستند و می توان آن ها را جدا از هم حل کرد . همانطور که می دانیم برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی باید دو جواب از قسمت های همگن و ناهمگن معادله بدست آورد که به ترتیب جواب های عمومی و خصوصی معادله ی دیفرانسیل می باشند . از طرفی بنا به گفته ی مقاله جواب خصوصی برای ما اهمیت دارد زیرا جواب عمومی معادلات دیفرانسیل فوق ، ذاتا از پدیده نوسان صبحت می کند و مسئله ی نیروی وادارنده در درون قسمت ناهمگن معادله می باشد بنابراین ما سعی بر حل قسمت ناهگن معادلات داریم.
یکی از راه های بدست آوردن جواب ناهمگن معادلات دیفرانسیل مرتبه ی دوم گفته شده ، حدس جواب از روی قسمت ناهمگن معادله است . به بیان دیگر مثلا در مورد معادله ی 8 کافی است جواب معادله را به فرم حرکت نوسانی ($A\sin(wt-\phi)$) بنویسیم و همین عبارت را وارد معادله کرده و از آنجا مجهول هایی مانند دامنه نوسانات ، فرکانس نوسانات و فاز را می توانیم به دست آوریم.
بنابراین خواهیم داشت :

$$q_i(t) = A_i sin(wt - \phi_i) \quad , \quad (i = 1, 2)$$

حال با جایگذاری در معادله های $9, 8$ داریم:

$$-A_1\omega^2 sin(wt-\phi_1) + 2\gamma A_1\omega\cos(wt-\phi_1) + \frac{k}{m}A_1 sin(wt-\phi_1) = \frac{F_0}{m}sin(wt)$$
$$-A_2\omega^2 sin(wt-\phi_2) + 2\gamma A_2\omega\cos(wt-\phi_2) + 3\frac{k}{m}A_2 sin(wt-\phi_2) = \frac{F_0}{m}sin(wt)$$

حال برای سادگی ، معادله ی اول را حل می کنیم و سپس از جواب آن کمک می گیریم و جواب معادله ی دوم را بدست می آوریم. بنابراین خواهیم داشت :

$$- A_1\omega^2 sin(wt-\phi_1) + 2\gamma A_1\omega\cos(wt-\phi_1) + \frac{k}{m}A_1 sin(wt-\phi_1) = \frac{F_0}{m}sin(wt)$$

$$A_1(\frac{k}{m}-\omega^2)[\sin(\omega t)\cos(\phi_1)-\cos(\omega t)\sin(\phi_1)] + 2\gamma A_1\omega[\cos(\omega t)\cos(\phi_1)+\sin(\omega t)\sin(\phi_1)] = A_1[(\frac{k}{m}-\omega^2)\cos(\phi_1)+2\gamma\omega\sin(\phi_1)]\sin(\omega t) + A_1[-(\frac{k}{m}-\omega^2)\sin(\phi_1)+2\gamma\omega\cos(\phi_1)]\cos(\omega t)$$

بنابراین :

$$A_1[(\frac{k}{m}-\omega^2)\cos(\phi_1)+2\gamma\omega\sin(\phi_1)]\sin(\omega t) + A_1[-(\frac{k}{m}-\omega^2)\sin(\phi_1) + 2\gamma\omega\cos(\phi_1)]\cos(\omega t) = \frac{F_0}{m}sin(wt)$$

و بنابراین :

$$\left[A_1[(\frac{k}{m}-\omega^2)\cos(\phi_1)+2\gamma\omega\sin(\phi_1)] - \frac{F_0}{m}\right]\sin(\omega t) + A_1[-(\frac{k}{m}-\omega^2)\sin(\phi_1) + 2\gamma\omega\cos(\phi_1)]\cos(\omega t) = sin(wt)$$

حال چون توابع مثلثاتی $\sin(\omega t)$ و $\cos(\omega t)$ مستقل خطی هستند باید ضرایب آن ها صفر باشد تا عبارت بالا صحیح باشد.بنابراین خواهیم داشت :

$$A_1[(\frac{k}{m}-\omega^2)\cos(\phi_1)+2\gamma\omega\sin(\phi_1)] - \frac{F_0}{m} = 0 \quad (۱۰)$$

$$-(\frac{k}{m}-\omega^2)\sin(\phi_1) + 2\gamma\omega\cos(\phi_1) = 0 \quad (۱۱)$$

از معادله ی ۱۱ می توان عبارتی برای فاز نوسان جرم اولی بدست آورد که به صورت زیر می باشد :

$$\phi_1 = \arctan(\frac{2\gamma\omega}{\frac{k}{m}-\omega^2})$$

که اگر برای جرم دوم هم تعمیم دهیم خواهیم داشت :

$$\phi_2 = \arctan(\frac{2\gamma\omega}{3\frac{k}{m}-\omega^2})$$

از طرفی از معادله های ۱۰ و ۱۱ می توان عبارت زیر را استخراج کرد :

$$\sin(\phi_1) = \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{((k/m)^2-\omega^2)+4\omega^2\gamma^2}}$$

$$\cos(\phi_1) = \frac{(k/m)^2-\omega^2}{\sqrt{((k/m)^2-\omega^2)+4\omega^2\gamma^2}}$$

که با جایگذاری در معادله ی ۱۰ به عبارت زیر برای دامنه ی نوسانات می رسیم :

$$A_1 = \frac{F_0/m}{\sqrt{((k/m)^2 - \omega^2) + 4\omega^2\gamma^2}}$$

که اگر بخواهیم به معادله ی دوم تعمیم دهیم ، آنگاه خواهیم داشت :

$$A_2 = \frac{F_0/m}{\sqrt{((3k/m)^2 - \omega^2) + 4\omega^2\gamma^2}}$$

بنابراین در حالت کلی برای این مسئله ، معادلات حرکت به صورت زیر می باشند :

$$\begin{cases} q_i(t) = A_i sin(wt - \phi_i) \quad , \quad (i = 1, 2) \\ A_i = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_i^2 - \omega^2) + 4\omega^2\gamma^2}} \quad , \quad \omega_1 = k/m \quad , \quad \omega_2 = 3k/m \\ \phi_i = \arctan(\frac{2\gamma\omega}{\omega_i^2 - \omega^2}) \end{cases} \tag{۱۲}$$

بنابراین :

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega t - \phi_1) - A_2 \sin(\omega t - \phi_2)$$
$$x_2(t) = A_1 \sin(\omega t - \phi_1) + A_2 \sin(\omega t - \phi_2)$$

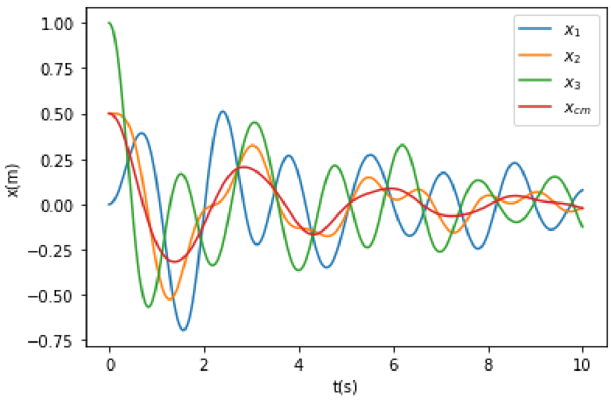
حال می خواهیم این مسئله را به N جرم تعمیم دهیم و با روش گفته شده ، مسئله را حل کنیم.
می دانیم که با توجه به اینکه N جرم وجود دارد ، N مد نرمال وجود خواهد داشت .
قبل از اینکه وارد مسئله ی N جرم شویم بهتر است ابتدا مفهوم متغیر هایی که در مسئله ی قبلی به کار بردیم را درک کنیم . تغییر متغیر های q_1 و q_2 در واقع با این مفهوم وارد معادلات شده اند که یکی از آن ها مختصه ی مرکز جرم و دیگری مختصه ی نسبی جرم ها می باشد یعنی در مسئله ی قبل ، q_1 مختصه ی مرکز جرم می باشد که به صورت $x_1 + x_2$ تعریف شد. همانطور که می دانیم ، تعریف مختصه ی مرکز جرم به صورت زیر می باشد:

$$X_{CM} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2}$$

که چون در مسئله ی ما ، جرم ها با هم یکسان بود ، داشتیم :

$$X_{CM} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

و دیگر متغیر جدید ، q_2 ، در واقع مختصه ی مکان های نسبی دو جرم باشد. اما مسئله ای که هست این است که برای مسئله ی $N > 2$ آیا تغییر متغیرها همچون مسئله ی دو جرم جفت شده به صورت معادله ی ۵ در می آیند یا خیر؟!
برای مسئله ی سه جرم جفت شده ، نمودار های حرکت سه جرم و مرکز جرم به صورت زیر می باشند:



شکل ۲: نمودارهای حرکت سه جرم و مرکز جرم

همانطور که انتظار داشتیم ، مرکز جرم سیستم ، حرکت نوسانی انجام می دهد اما با توجه به اینکه دیگر دو جرم در کار نیست و سیستم شامل بیشتر از دو جرم است ، دیگر نمی توانیم با تغییر متغیر های ساده ی گفته شده ، دستگاه معادلات جفت شده را به دستگاه معادلات منزوی تبدیل کنیم و آن ها را حل کنیم.
حال برای حل مسئله ی N جرم ، باید از روش ماتریسی کمک بگیریم . برای این کار ابتدا معادلات نیوتون را برای یک سیستم N جرمی(ذره ای) ، بدون نیروی وادارنده می نویسیم و سپس سراغ تبدیل های ماتریسی و مختصه های تعمیم یافته می رویم . بنابراین خواهیم داشت :

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) - c\dot{x}_1 \\
&m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) - c\dot{x}_2 \\
&\vdots \\
&m\ddot{x}_{N-1} = -k(x_{N-1} - x_{N-2}) + k(x_N - x_{N-1}) - c\dot{x}_{N-1} \\
&m\ddot{x}_N = -k(x_N - x_{N-1}) - kx_N - c\dot{x}_N
\end{aligned}
$$

که برای راحتی می توان معادلات فوق را به صورت زیر نوشت :

$$
\begin{cases}
m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2 - c\dot{x}_1 \\
m\ddot{x}_2 = -2kx_2 + kx_3 + kx_1 - c\dot{x}_2 \\
\vdots \\
m\ddot{x}_{N-1} = -2kx_{N-1} + kx_{N-1} + kx_{N-2} - c\dot{x}_{N-1} \\
m\ddot{x}_N = -2kx_N + kx_{N-1} - c\dot{x}_N
\end{cases}
\tag{۱۳}
$$

حال دستگاه معادلات بالا را به صورت ماتریسی می نویسیم که به صورت زیر در می آیند :

(۱۴)

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{N-1}\\x_N\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2&1&\cdots&0&0\\1&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-2&1\\0&0&\cdots&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{N-1}\\x_N\end{pmatrix}-c\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{N-1}\\x_N\end{pmatrix}$$

ماتریس تبدیل دستگاه و مختصه های جدید را بیان می کنیم که به صورت زیر می باشد:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{N-1}\\x_N\end{pmatrix}=A_{N\times N}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_{N-1}\\q_N\end{pmatrix}$$

با جایگذاری معادله ی ماتریسی بالا در معادله ی ۱۴ خواهیم داشت:

$$m\frac{d^2}{dt^2}A\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_{N-1}\\q_N\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2&1&\cdots&0&0\\1&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-2&1\\0&0&\cdots&1&-2\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_{N-1}\\q_N\end{pmatrix}-c\frac{d}{dt}A\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_{N-1}\\q_N\end{pmatrix}$$

با توجه به اینکه ماتریس تبدیل A وابستگی به زمان ندارد ، می توان آن را از عملگر مشتق زمانی بیرون آورد و داشته باشیم:

$$mA\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_{N-1}\\q_N\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2&1&\cdots&0&0\\1&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-2&1\\0&0&\cdots&1&-2\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_{N-1}\\q_N\end{pmatrix}-cA\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_{N-1}\\q_N\end{pmatrix}$$

از طرفی چون می دانیم که وارون ماتریس تبدیل وجود دارد (اگر نداشته باشد ، نمی توان دستگاه های مختصات را به هم تبدیل کرد!) ، کل عبارت را در وارون ماتریس تبدیل ضرب می کنیم:

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_{N-1}\\q_N\end{pmatrix}=kA^{-1}\begin{pmatrix}-2&1&\cdots&0&0\\1&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-2&1\\0&0&\cdots&1&-2\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_{N-1}\\q_N\end{pmatrix}-c\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_{N-1}\\q_N\end{pmatrix}$$

حال کل هدف ما از این کار این است که دستگاه معادلات فوق را به صورت جدا از هم و جفت نشده در بیاوریم . با یک نگاه به معادلات فوق در می یابیم که این اتفاق زمانی می افتد که در جمله ی اول سمت راست تساوی ، ضرب سه ماتریس ، ماتریسی قطری به ما دهد.
با کمی دقت ، متوجه این موضوع می شویم که ماتریس وسط یعنی ماتریس

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{۱۵}$$

یک ماتریس هرمیتی می باشد ؛ بنابراین زمانی این ماتریس ، قطری می شود که از دو طرف ، ماتریس یکانی و دگر آن ($\dagger$) از ویژه بردارهای خود در آن ضرب شود. به بیانی دیگر زمانی یک ماتریس هرمیتی ، قطری می شود که در پایه های خودش نمایش یابد ؛ و عناصر روی قطر آن ، ویژه مقادیر آن ماتریس هستند.
با توجه به تمام این توضیحات حال می توان ، ماتریس A را تشکیل شده از پایه های ماتریس هرمیتی ۱۵ در نظر بگیریم.
بنابراین به جای وارون ماتریس A ، $A^\dagger$ را می توان قرار داد و معادلات به فرم زیر در می آیند:

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{pmatrix} = kA^\dagger \begin{pmatrix} -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{pmatrix} - c\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{pmatrix}$$

سرانجام کافی است ویژه مقادیر ماتریس ۱۵ را بدست آوریم و در معادلات ماتریسی قرار دهیم.
اگر فرض کنیم ویژه مقادیر ماتریس ۱۵ به صورت $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{N-1}, \lambda_N$ باشند ، آنگاه معادلات ماتریسی به صورت زیر می باشند :

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{pmatrix} - c\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{pmatrix} \tag{۱۶}$$

حال با توجه به شناختی که از ماتریس های سه ضلعی توپلیتز و ماتریس های هنکل داریم ، ماتریس سه

ضلعی توپلیتز [1]

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

دارای ویژه مقادیر و ویژه بردارهای دوتایی (λ_j, x_j) که $x_j = (x_{j,1}, x_{j,2}, ..., x_{j,N})^T$ می باشد ، هستند [۱] :

$$\lambda_j = 2 - 2\cos(j\pi h) \ \ , \ \ x_{j,k} = c\sin(j\pi kh) \ \ , \ \ h = \frac{1}{n+1} \ \ , \ \ j,k = 1,2,...,N$$

که در آن c عدد حقیقی غیر صفر می باشد.
بنابراین دستگاه معادلات ماتریسی ۱۶ با کمک از حل تحلیلی مسئله ی ویژه مقداری ماتریس های سه ضلعی توپلتیز ، به صورت زیر درمی آید:

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{pmatrix} =$$

$$-2k\begin{pmatrix} 1-\cos(\pi h) & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1-\cos(N\pi h) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{pmatrix} - c\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{pmatrix}$$

که می توان دستگاه معادلات را به صورت زیر هم نوشت :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 = -2k[1-\cos(\pi h)]q_1 - c\dot{q}_1 \\ m\ddot{q}_2 = -2k[1-\cos(2\pi h)]q_2 - c\dot{q}_2 \\ \vdots \\ m\ddot{q}_{N-1} = -2k[1-\cos((N-1)\pi h)]q_{N-1} - c\dot{q}_{N-1} \\ m\ddot{q}_N = -2k[1-\cos(N\pi h)]q_N - c\dot{q}_N \end{cases} \quad , \ h = \frac{1}{N+1} \qquad (۱۷)$$

[1] Matrix Toeplitz Tridiagonal

یا معادلات بالا را به صورت همگن نوشت :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\gamma\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + 2\gamma\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0 \\ \vdots \\ \ddot{q}_{N-1} + 2\gamma\dot{q}_{N-1} + \omega_{N-1}^2 q_{N-1} = 0 \\ \ddot{q}_N + 2\gamma\dot{q}_N + \omega_N^2 q_N = 0 \end{cases} \quad , \ \omega_i^2 = \frac{2k}{m}[1-\cos(i\pi h)] \tag{۱۸}$$

که در آن $\gamma = c/2m$ پارامتر میرایی می باشد.
برای حل این معادلات همگن کافی است که مختصه ها را به صورت

$$q_k = e^{m_k t} \ \ , \ \ k = 1, 2$$

بنویسیم و با جایگذاری در معادله های ۱۸ ، معادلات مشخصه ای به وجود می آیند که ریشه های آن ها به صورت

$$m_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_i^2}$$
$$m_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_i^2}$$

می باشند . بنابراین جواب ها به صورت زیر می باشند :

$$q_i(t) = e^{\gamma t}[A_{i_1} e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_i^2}} + A_{i_2} e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_i^2}}] \ \ , \ \ i = 0, 1, 2, ..., N$$

حال کافی است برای اینکه جواب ها را به مختصات قبلی ببریم ، از ماتریس تبدیل A استفاده کنیم .
بنابراین از ویژه بردارهای ماتریس سه ضلعی توپلیتز استفاده می کنیم و خواهیم داشت :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = A_{N\times N} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & \cdots & x_{N-1,1} & x_{N,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \cdots & x_{N-1,2} & x_{N,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1,N-1} & x_{2,N-1} & \cdots & x_{N-1,N-1} & x_{N,N-1} \\ x_{1,N} & x_{2,N} & \cdots & x_{N-1,N} & x_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{pmatrix}$$

که در آن ها

$$q_i(t) = e^{-\gamma t}[A_{i_1} e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_i^2}} + A_{i_2} e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_i^2}}] \ \ , \quad x_{j,k} = c\sin(j\pi kh)$$
$$h = \frac{1}{N+1} \ , \ (j,k = 1,2,...,N)$$

بدین ترتیب جواب های معادلات همگن ، یعنی بدون نیروی وادارنده ، به صورت فوق می باشند . حال اگر نیروی وادارنده وارد شود ، آنگاه دستگاه معادلات ۱۴ دارای یک ماتریس ستونی اضافی که شامل نیروی وادارنده در آخرین عنصر این ماتریس می باشد .
با توجه به فرآیند طی شده تا به اینجا ، این ماتریس ستونی در یک ماتریس تبدیل که همان ماتریس $A^\dagger$ می باشد ، ضرب می شود . بنابراین در آخر ، دستگاه معادلات به صورت زیر درمی آیند :

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{pmatrix} =$$
$$-2k\begin{pmatrix} 1-1\cos(\pi h) & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1-1\cos(N\pi h) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{pmatrix} - c\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{pmatrix}$$
$$+ A^\dagger F_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

که در آن ماتریس $A^\dagger$ به صورت زیر می باشد :

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,N-1} & x_{1,N} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,N-1} & x_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N-1,1} & x_{N-1,2} & \cdots & x_{N-1,N-1} & x_{N-1,N} \\ x_{N,1} & x_{N,2} & \cdots & x_{N,N-1} & x_{N,N} \end{pmatrix}$$

که

$$x_{j,k} = c\sin(j\pi kh) \ \ , \quad h = \frac{1}{N+1} \quad , \quad (j,k = 1,2,...,N)$$

بنابراین با توجه به نیروی وادارنده ی اضافه شده ، می توان دستگاه معادلات ۱۸ را تعمیم داد و نوشت :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\gamma\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = x_{1,N} F_0' \sin(\omega t) \\ \ddot{q}_2 + 2\gamma\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = x_{2,N} F_0' \sin(\omega t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_{N-1} + 2\gamma\dot{q}_{N-1} + \omega_{N-1}^2 q_{N-1} = x_{N-1,N} F_0' \sin(\omega t) \\ \ddot{q}_N + 2\gamma\dot{q}_N + \omega_N^2 q_N = x_{N,N} F_0' \sin(\omega t) \end{cases} \quad (۱۹)$$

که در آن

$$\omega_i^2 = \frac{2k}{m}[1-\cos(i\pi h)] \quad , \quad F_0' = \frac{F_0}{m} \quad , \quad h = \frac{1}{N+1} \quad , \quad (i = 1, 2, ..., N)$$

حال برای حل این دستگاه معادلات کافی است مانند حل مسئله ی دو جرم جفت شده عمل کنیم و مختصه ها را به فرم جمله ناهمگن بنویسیم ، یعنی

$$q_i(t) = A_i sin(wt - \phi_i) \quad , \quad (i = 1, 2, ..., N)$$

با توجه به اینکه دستگاه معادلات ۱۹ دیگر جفت شده نیست و جدا هستند و با توجه به اینکه می دانیم برای مسئله ی دو جرم جفت شده ، پارامتر های دامنه ی نوسان و فاز نوسان به چه صورت بود (۱۲) می توان ، این پارامترها را به مسئله ی N جرم تعمیم داد و نوشت :

$$\begin{cases} q_i(t) = A_i sin(wt - \phi_i) \\ A_i = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_i^2-\omega^2)+4\omega^2\gamma^2}} \quad , \quad \omega_i^2 = \frac{2k}{m}[1-\cos(i\pi h)] \quad , \quad (i = 1, ..., N) \\ \phi_i = \arctan(\frac{2\gamma\omega}{\omega_i^2-\omega^2}) \end{cases} \quad (۲۰)$$

حال با توجه به اینکه جواب ها را در دستگاه مختصات تعمیم یافته بدست آوردیم ، می توان جواب ها را در دستگاه مختصات قبلی با استفاده از ماتریس تبدیل ، همانند جواب های عمومی (همگن) تبدیل کرد . بنابراین خواهیم داشت :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & \cdots & x_{N-1,1} & x_{N,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \cdots & x_{N-1,2} & x_{N,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1,N-1} & x_{2,N-1} & \cdots & x_{N-1,N-1} & x_{N,N-1} \\ x_{1,N} & x_{2,N} & \cdots & x_{N-1,N} & x_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{pmatrix}$$

که در آن ها

$$\begin{cases} q_i(t) = A_i sin(wt - \phi_i) \ \ , \ \ A_i = \frac{x_{i,j} F_0/m}{\sqrt{(\omega_i^2 - \omega^2) + 4\omega^2\gamma^2}} \ \ , \ \ \phi_i = \arctan(\frac{2\gamma\omega}{\omega_i^2 - \omega^2}) \\ \omega_i^2 = \frac{2k}{m}[1 - \cos(i\pi h)] \\ x_{j,k} = c\sin(j\pi kh) \ \ , \ \ h = \frac{1}{N+1} \ \ \ , \ \ \ (i,j,k = 1,2,...,N) \end{cases}$$

(دقت شود که x_i مختصه ی دستگاه و $x_{i,j}$ یک کمیت اسکالر که عنصر ماتریس می باشند ، هستند و با هم فرق می کنند.)
بنابراین توانستیم مسئله ی N جرم نوسانگر جفت شده را با استفاده از یک دستگاه مختصات تعمیم یافته حل کنیم.

۳ نتیجه گیری

با توجه به توضیحات دیدیم که می توانیم با استفاده از تبدیل دستگاه مختصات ، دستگاه معادلات جفت شده را به صورت دستگاه معادلات جدا از هم تبدیل کرد و با استفاده از معادله ی ویژه مقداری برای ماتریس های سه ضلعی توپلیتز ، می توانیم برای مسئله ی $N \geq 2$ نوسانگر جفت شده ، حل تحلیلی ارائه کنیم .

References

[۱] Quanling Deng ،arXiv:۲۰۰۷.۰۸۱۳۰

[۲] Stephen T.Thornton ، Jerry B.Marion Thomson ، Classical Dynamics Of Particles and Systems ،۵th ed.