

بررسی پدیده ی ضد تشدید در نوسانگرهای جفت شده و مقایسه ی تشدید فانو در حالت کلاسیکی و کوانتومی

میثم حسن دوست

مرداد ۱۴۰۱

فهرست مطالب

۳	۱ پدیده ی ضد تشدید (Anti-Resonance)
۳	۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱ پدیده ی تشدید و ضد تشدید در N نوسانگر جفت شده
۶	۳.۱ حل برای $N = 2$
۱۱	۴.۱ حل برای $N = 3$
۱۳	۵.۱ حل برای N نوسانگر جفت شده
۱۷	۶.۱ حل برای نوسانگر میرا
۲۲	۷.۱ رفع ابهام در حضور پارامتر میرایی
۲۳	۸.۱ دامنه و فاز برای N نوسانگر جفت شده ی میرا
۲۴	۲ پدیده ی تشدید فانو
۲۴	۱.۲ مقدمه
۲۴	۲.۲ تشدید و ضد تشدید در نوسانگرهای جفت شده
۲۵	۱.۲.۲ تک نوسانگر
۲۵	۲.۲.۲ دو نوسانگر جفت شده
۲۷	۳.۲ تفسیر پارامتر فانو در حالت کلاسیکی
۳۰	۴.۲ پدیده ی تشدید فانو در موجبر دوبعدی با حضور پتانسیل جاذب (<i>quantum dot</i>)
۳۶	۳ نتیجه گیری

۱ پدیده ی ضد تشدید (Anti-Resonance)

۱.۱ مقدمه

در این گزارش به بررسی پدیده ی ضد تشدید (Anti-Resonance) در نوسانگرهای جفت شده می پردازیم. همانطور که می دانیم پدیده ی تشدید (Resonance)، عبارت است از پدیده ی افزایش دامنه، زمانی که فرکانس یک نیروی متناوب اعمالی (یا یک مولفه فوریه آن) به یک سیستم مساوی یا نزدیک به فرکانس طبیعی آن سیستم باشد. حال با توجه به این تعریف برای پدیده ی تشدید، می توان پدیده ی ضد تشدید را این گونه تعریف کرد که در یک فرکانس خاص، دامنه ی یک نوسانگر تقریباً به صفر می رسد. در ادامه، برای سیستم هایی که دارای نوسانگرهای جفت شده می باشند، این پدیده را بررسی می کنیم.

۲.۱ پدیده ی تشدید و ضد تشدید در N نوسانگر جفت شده

ابتدا به مسئله ی یک نوسانگر می پردازیم سپس آن را به N نوسانگر جفت شده تعمیم می دهیم. برای سیستم دارای N نوسانگر جفت شده، همانطور که می دانیم دامنه و فاز نوسانگر ها به صورت زیر می باشد:

$$D_i(\omega) = \frac{x_{i,N} F_0 / m}{\sqrt{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2}}, \quad \phi_i(\omega) = \arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_i^2 - \omega^2}\right)$$

حال برای تک نوسانگر، پارامتر میرایی را به صفر میل می دهیم تا دامنه و فاز را در صورتی که پارامتر میرایی وجود ندارد بررسی کنیم. در این صورت سه حالت وجود خواهد داشت که به صورت زیر می باشند:

الف) اگر $\omega < \omega_0$ در این صورت

$$D(\omega) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad \delta = 0$$

ب) اگر $\omega = \omega_0$ در این صورت فاز و دامنه تعریف نشده خواهند بود.

ج) اگر $\omega > \omega_0$ در این صورت

$$D(\omega) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}, \quad \delta = \pi$$

همانطور که می بینیم با میل دادن پارامتر میرایی به صفر، فاز نوسانگر فقط دارای مقادیر 0 و π می باشد.

حال این بحث را به N نوسانگر جفت شده تعمیم می دهیم و با توجه به گفته های فوق و بحث اصلی که راجع به ضد تشدید می باشد، باید فقط از فازهای 0 و π برای نوسانگرها استفاده کنیم.

به این نکته دقت کنید که برای بحث ضد تشدید ، نیروی وادارنده دیگر مانند گزارش قبلی [۲] ، لزومی ندارد فقط به نوسانگر انتهایی وارد شود و در واقع می تواند به هر نوسانگری که مورد بررسی قرار دارد ، وارد شود . به طور مثال برای دو نوسانگر جفت شده ، اگر نوسانگر اولی را بخواهیم مورد بررسی قرار دهیم ، باید نیروی وادارنده را به این نوسانگر وارد کنیم و سپس معادلات حرکت و دامنه ها را مورد تحلیل قرار دهیم .

حال به بررسی N نوسانگر جفت شده می پردازیم . بنا به گفته ی مقاله [۱] ، با این فرض که نیروی وادارنده به نوسانگر اول وارد می شود ، معادلات حرکت به صورت زیر می باشند :

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) - c\dot{x}_1 + F_0 \cos(\omega t) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) - c\dot{x}_2 \\ \vdots \\ m\ddot{x}_{N-1} = -k(x_{N-1} - x_{N-2}) + k(x_N - x_{N-1}) - c\dot{x}_{N-1} \\ m\ddot{x}_N = -k(x_N - x_{N-1}) - kx_N - c\dot{x}_N \end{array} \right. \quad (۱)$$

و می توان جواب خصوصی معادلات حرکت را به صورت

$$x_i(t) = D_i(\omega) \cos(\omega t - \delta_i)$$

در نظر گرفت . بنابراین با جایگذاری این جواب در دستگاه معادلات ۱ ، دستگاه معادلاتی به صورت زیر خواهیم داشت که دارای $2N$ مجهول $(D_i(\omega), \delta_i)$ خواهد بود :

$$\left\{ \begin{array}{l} (2k - m\omega^2)D_1 \cos(\delta_1) = kD_2 \cos(\delta_2) + F_0 \\ (2k - m\omega^2)D_1 \sin(\delta_1) = kD_2 \sin(\delta_2) \\ \vdots \\ (2k - m\omega^2)D_i \cos(\delta_i) = kD_{i-1} \cos(\delta_{i-1}) + kD_{i+1} \cos(\delta_{i+1}) \\ (2k - m\omega^2)D_i \sin(\delta_i) = kD_{i-1} \sin(\delta_{i-1}) + kD_{i+1} \sin(\delta_{i+1}) \\ \vdots \\ (2k - m\omega^2)D_N \cos(\delta_N) = kD_{N-1} \cos(\delta_{N-1}) \\ (2k - m\omega^2)D_N \sin(\delta_N) = kD_{N-1} \sin(\delta_{N-1}) \end{array} \right.$$

حال روشی که برای حل این دستگاه معادلات وجود دارد تا به توان دامنه های نوسانگرها را بدست آورد به دو صورت می باشد .

اولین روش ، همانطور که در مقاله موجود می باشد این است که با استفاده از تغییر متغیر ها و ساده نویسی ، در چند بخش می توان حدود فرکانس ها و دامنه ها را بدست آورد .
روش دوم این است که با استفاده از گزارش قبل که توانستیم معادله ی حرکت هر نوسانگر را بدست آوریم ، می توان دامنه ی نوسانگرها را در این مورد به خصوص که دیگر فاز ها هر مقداری نمی توانند

داشته باشند را بدست آورد . بنابراین داریم :

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^N x_{ji} q_i(t)$$

$$q_i(t) = A_i \cos(\omega t - \delta_i) , \quad A_i = \frac{x_{ij} F_0 / m}{\sqrt{(\omega_i^2 - \omega^2) + 4\omega^2 \beta^2}} , \quad \phi_i = \arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_i^2 - \omega^2}\right)$$

دقت کنید که اندیس j ام در x_{ij} ، در واقع به این معنی است که نیروی وادارنده به ذره ی j ام وارد می شود .
حال با توجه به گفته های بالا خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \sum_{i=1}^N x_{ki} q_i(t) = \sum_{i=1}^N x_{ki} A_i \cos(\omega t - \delta_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{x_{ki} x_{ij} F_0 / m}{\sqrt{(\omega_i^2 - \omega^2) + 4\omega^2 \beta^2}} \cos(\omega t - \delta_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{x_{ki} x_{ij} F_0 / m}{\sqrt{(\omega_i^2 - \omega^2) + 4\omega^2 \beta^2}} [\cos(\omega t) \cos \delta_i - \sin(\omega t) \sin \delta_i] \end{aligned}$$

که با توجه به اینکه در حد $\beta \rightarrow 0$ فاز باید 0 یا π باشد ، معادلات فوق به صورت زیر در می آیند :

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^N \frac{x_{ki} x_{ij} F_0 / m}{\omega_i^2 - \omega^2} \cos \delta_i \cos(\omega t)$$

و بنابراین دامنه ی نوسانات ذره ی k ام به صورت زیر می باشد :

$$D_k(\omega) = \frac{F_0}{m} \sum_{i=1}^N \frac{x_{ki} x_{ij}}{\omega_i^2 - \omega^2} \cos \delta_i \quad (2)$$

که همانطور که می دانیم

$$\omega_i^2 = 2\omega_0^2 [1 - \cos(i\pi h)] , \quad x_{j,k} = c \sin(j\pi k h)$$

$$h = \frac{1}{N+1} , \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, N)$$

حال کافی است برای هر سیستم با هر تعداد نوسانگر جفت شده ، با قرار دادن فاز 0 یا π در معادله ی ۲ دامنه ی نوسانگرها را محاسبه کنیم . در هر نقطه ای از فرکانس ، دامنه نوسانات اگر به مقدار تقریبی صفر برسد به آن فرکانس ، فرکانس ضد تشدید (*Anti - Resonance*) می گویند و می توانیم آن را بدست آوریم .
حال به سراغ حل برای سیستم هایی با $N = 2$ و $N = 3$ نوسانگر جفت شده می رویم.

۳.۱ حل برای $N = 2$.

با توجه به عبارت ۲ باید به ازای فازهای مختلف ($0, \pi$) دامنه‌هایی برای این دو نوسانگر بدست آورد. بنابراین:
الف) $\delta_1 = \delta_2 = 0$.
با جایگذاری در عبارت ۲ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} D_1(\omega) &= \frac{F_0}{m} \sum_{i=1}^2 \frac{x_{1i}x_{i1}}{\omega_i^2 - \omega^2} = \frac{F_0}{m} \left[\frac{\sin^2(\pi/3)}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\sin^2(2\pi/3)}{\omega_2^2 - \omega^2} \right] \\ &= \frac{3F_0}{4m} \left[\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \right] = \frac{3F_0}{2m} \left[\frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2)} \right] \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} D_2(\omega) &= \frac{F_0}{m} \sum_{i=1}^2 \frac{x_{2i}x_{i1}}{\omega_i^2 - \omega^2} = \frac{F_0}{m} \left[\frac{\sin(\pi/3)\sin(2\pi/3)}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\sin(2\pi/3)\sin(4\pi/3)}{\omega_2^2 - \omega^2} \right] \\ &= \frac{3F_0}{4m} \left[\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \right] = \frac{3F_0}{2m} \left[\frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2)} \right] \end{aligned}$$

دقت کنید که در عبارات بالا، اندیس $j = 1$ قرار دادیم زیرا نیروی وادارنده به نوسانگر اول فقط وارد می‌شود.
بنابراین اگر نیروی وادارنده به نوسانگر اول وارد شود و فازهای هر دو نوسانگر برابر با صفر باشد، آنگاه دامنه نوسانگرها به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} D_1(\omega) &= \frac{3F_0}{2m} \left[\frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2)} \right], \quad \delta_1 = \delta_2 = 0 \\ D_2(\omega) &= \frac{3F_0}{2m} \left[\frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2)} \right] \end{aligned}$$

ب) $\delta_1 = \delta_2 = \pi$.
با توجه به عبارت ۲، اگر هر دو فاز برابر با π باشند، آنگاه کل عبارت منفی می‌شود، بنابراین:

$$\begin{aligned} D_1(\omega) &= -\frac{3F_0}{2m} \left[\frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2)} \right], \quad \delta_1 = \delta_2 = \pi \\ D_2(\omega) &= -\frac{3F_0}{2m} \left[\frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2)} \right] \end{aligned}$$

ج) $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = \pi$.
با جایگذاری در عبارت ۲ خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} D_1(\omega) &= \frac{F_0}{m} \sum_{i=1}^2 \frac{x_{1i}x_{i1}}{\omega_i^2 - \omega^2} \cos \delta_i = \frac{F_0}{m} \left[\frac{\sin^2(\pi/3)}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\sin^2(2\pi/3)}{\omega_2^2 - \omega^2} \right] \\ &= \frac{3F_0}{4m} \left[\frac{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \right] = \frac{3F_0}{2m} \left[\frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2)} \right] \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} D_2(\omega) &= \frac{F_0}{m} \sum_{i=1}^2 \frac{x_{2i}x_{i1}}{\omega_i^2 - \omega^2} \cos \delta_i = \frac{F_0}{m} \left[\frac{x_{21}x_{11}}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{x_{22}x_{21}}{\omega_1^2 - \omega^2} \right] \\ &= \frac{F_0}{m} \left[\frac{\sin(\pi/3) \sin(2\pi/3)}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\sin(2\pi/3) \sin(4\pi/3)}{\omega_2^2 - \omega^2} \right] \\ &= -\frac{3F_0}{2m} \left[\frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2)} \right] \end{aligned}$$

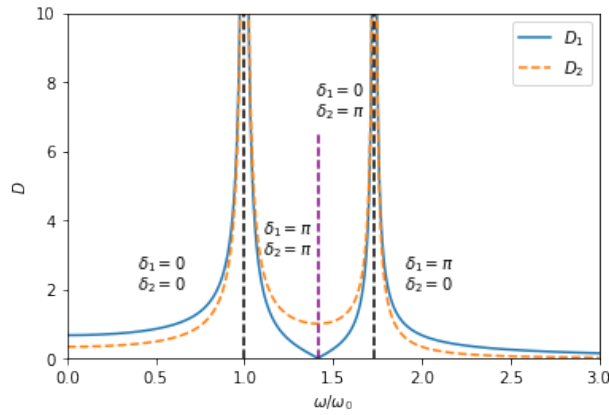
بنابراین :

$$\begin{aligned} D_1(\omega) &= \frac{3F_0}{2m} \left[\frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2)} \right] , \quad \delta_1 = 0 , \delta_2 = \pi \\ D_2(\omega) &= -\frac{3F_0}{2m} \left[\frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2)} \right] \end{aligned}$$

د) $\delta_1 = \pi$, $\delta_2 = 0$.
با توجه به عبارت ۲ و اینکه تقارن با حالت قبل وجود دارد ، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} D_1(\omega) &= -\frac{3F_0}{2m} \left[\frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2)} \right] , \quad \delta_1 = 0 , \delta_2 = \pi \\ D_2(\omega) &= \frac{3F_0}{2m} \left[\frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2)} \right] \end{aligned}$$

بنابراین دامنه های نوسانگر به صورت بالا می باشند و با توجه به دامنه ی نوسان نوسانگر اول ، متوجه می شویم که در نقطه ی $\omega_{ar} = \sqrt{2}\omega_0$ دامنه ی این نوسانگر صفر می شود و بنا به تعریف فرکانس ضد تشدید ، می توانیم بگوییم که این فرکانس ، فرکانس ضد تشدید می باشد .
در شکل زیر ، نمودارهای دامنه های نوسانات دو نوسانگر جفت شده نشان داده شده است .
با توجه به شکل ۱ ، متوجه می شویم که فاز نوسانگر اول که تحت تاثیر نیروی وادارنده است حول فرکانس ضد تشدید ، به اندازه ی π تغییر می کند .
به بیان ریاضیاتی اگر بخواهیم بررسی کنیم که برای فاز حول آن نقطه چه اتفاقی می افتد شما را به مقاله



شکل ۱: نمودار دامنه ی نوسانگرهای دوتایی جفت شده

ی [۳] ارجاع می دهیم . در این مقاله معادله ی حرکت سیستم دو نوسانگر جفت شده را به صورت زیر می نویسد :

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + v_{12} x_2 &= F_0 \cos(\omega t) \\ \ddot{x}_2 + \gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + v_{12} x_1 &= 0\end{aligned}$$

که در آن $\omega_1^2 = \frac{2k_1}{m_1}$ و $\omega_2^2 = \frac{2k_2}{m_2}$ و همچنین پارامتر جفت شدگی (v_{12}) می باشد . حال با توجه به قسمت ناهمگن دستگاه معادلات خطی بالا ، می توان آن را به صورت نمایی نوشت

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + v_{12} x_2 = a_1 e^{i\omega t} \\ \ddot{x}_2 + \gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + v_{12} x_1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

ابتدا در حالت بدون میرایی ، دستگاه معادلات ۳ را حل می کنیم و ω های مجاز را بدست می آوریم و سپس بخش میرایی را وارد معادلات می کنیم . بنابراین جواب ها را به صورت $x_1(t) = c_1 e^{i\omega t}$ و $x_2(t) = c_2 e^{i\omega t}$ فرض می کنیم و با جایگذاری در معادلات داریم :

$$(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - v_{12}^2 = 0 \quad (4)$$

که جواب این معادله برابر است با :

$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 4(\omega_1^2 \omega_2^2 - v_{12}^2)}}{2}$$

که اگر پارامتر جفت شدگی ضعیف باشد ($\omega_2^2 - \omega_1^2 \gg v_{12}$) ، آنگاه می توان به صورت تقریبی جواب های معادله فوق را به صورت زیر نوشت :

$$\tilde{\omega}_1^2 \simeq \omega_1^2 - \frac{v_{12}^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} , \quad \tilde{\omega}_2^2 \simeq \omega_2^2 + \frac{v_{12}^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$$

حال اگر پارامتر میرایی وجود داشته باشد، آنگاه به همین ترتیب جواب های $x_1(t)$, $x_2(t)$ را در معادلات ۳ جایگذاری می کنیم و خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x_1(\omega_1^2 + i\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_1^2) + v_{12}x_2 = c_1(\omega_1^2 + i\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_1^2) + v_{12}c_2 = a_1 \\ x_1(\omega_2^2 + i\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_2^2) + v_{12}x_1 = c_2(\omega_2^2 + i\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_2^2) + v_{12}c_1 = 0 \end{cases}$$

که دامنه های نوسانگرها به صورت زیر می باشد :

$$\begin{cases} c_1(\omega) = \frac{\omega_2^2 - \omega^2 + i\gamma_2\omega}{(\omega_1^2 - \omega^2 + i\gamma_1\omega)(\omega_2^2 - \omega^2 + i\gamma_2\omega) - v_{12}^2} a_1 \\ c_2(\omega) = -\frac{v_{12}}{(\omega_1^2 - \omega^2 + i\gamma_1\omega)(\omega_2^2 - \omega^2 + i\gamma_2\omega) - v_{12}^2} a_1 \end{cases} \quad (5)$$

دقت کنید که معادلات بالا فقط در صورتی درست است که پارامتر جفت شدگی بسیار ضعیف باشد در غیر این صورت معادلات دامنه های نوسان به صورت زیر می باشند :

$$\begin{aligned} c_1(\omega) &= \frac{\tilde{\omega}_2^2 - \omega^2 + i\gamma_2\omega}{(\tilde{\omega}_2^2 - \omega^2 + i\gamma_2\omega)(\tilde{\omega}_1^2 - \omega^2 + i\gamma_1\omega) - v_{12}v_{21}} a_1 \\ c_2(\omega) &= -\frac{v_{21}}{(\tilde{\omega}_2^2 - \omega^2 + i\gamma_2\omega)(\tilde{\omega}_1^2 - \omega^2 + i\gamma_1\omega) - v_{12}v_{21}} a_1 \end{aligned}$$

که در آن

$$\tilde{\omega}_{1,2}^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 4(\omega_1^2\omega_2^2 - v_{12}v_{21})}}{2}$$

(دقت کنید که ما فقط راجع به بخش حقیقی معادلات اظهار نظر می کنیم، یعنی شاید فرکانس ها، بخش موهومی هم داشته باشند ولی بخش حقیقی برای ما مهم است) حال برای بدست آوردن فاز این نوسانگر ها، کافی است آرگومان آن ها را بدست آوریم و با توجه به شیف (shift) هایی که از بودن v_{12} و v_{21} به وجود می آید، می توان فاز ها را بدست آورد، بنابراین خواهیم داشت :

$$c_1(\omega) = |c_1(\omega)|e^{-i\phi_1(\omega)}, \quad c_2(\omega) = |c_2(\omega)|e^{-i\phi_2(\omega)}$$

که با توجه به جابجایی (shift) ناشی از جفت شدگی، فاز ها به صورت

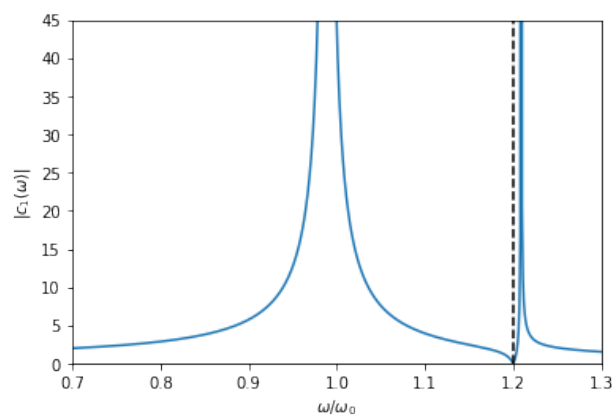
$$\phi_2 - \phi_1 = \pi - \theta, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\gamma_2\omega}{\omega_2^2 - \omega^2}\right) \quad (6)$$

به هم مربوط می باشند.

حال به بررسی پدیده ی ضد تشدید با استفاده از گفته های بالا می پردازیم. برای رسم کردن نمودارهای دامنه ی دو نوسانگر جفت شده، ابتدا پارامتر های ω_1 و ω_2 و پارامتر جفت شدگی (v_{12}) را مقداردهی می کنیم. مقاله ی مذکور به صورت زیر این کار را انجام داده است

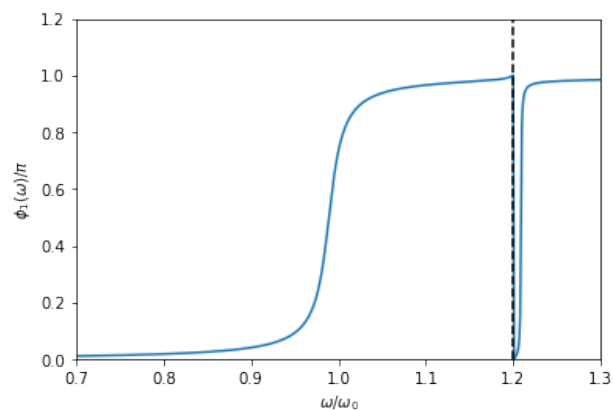
$$\omega_1 = \omega_0 \quad , \quad \omega_2 = \sqrt{2}\omega_0 \quad , \quad v_{12} = 0.1 \quad , \quad \gamma_1 = 0.025$$

با توجه به این مقادیر انتخاب شده ، نمودار اندازه ی دامنه ی نوسانگر اول بر حسب فرکانس به صورت زیر می باشد :



شکل ۲: نمودار اندازه ی دامنه ی نوسانگر اول

با توجه به شکل ۲ ، نوسانگر در فرکانس $\sqrt{2}\omega_0$ ، دامنه ی صفر دارد و بنابراین می توان گفت نوسانگر در این فرکانس دچار پدیده ی ضد تشدید می شود ؛ حال سراغ فاز نوسانگر حول این نقطه می رویم . با توجه به گفته های بالا ، نمودار فاز نوسانگر در شکل ۳ آمده است .



شکل ۳: نمودار فاز نوسانگر اول

همانطور که از شکل مشاهده می کنید ، حول نقطه ی فرکانس ضد تشدید ، فاز ناگهان از مقدار π ، به مقدار 0 سقوط می کند و باز به مقدار قبلی خود یعنی π بر می گردد که همانطور که از شکل ۱ دیدیم ، انتظار این پدیده را داشتیم . از طرفی ، از عبارت ۶ ، انتظار این را داشتیم که اختلاف فاز های دو نوسانگر حول نقطه ی ضد تشدید باید 0 و π باشند.

تفاوت هایی که این سیستم با سیستم اولیه ی مورد بحث ما دارد این است که در این سیستم ثوابت فنر و پارامتر جفت شدگی با هم تناسبی نداشته اند و به نوعی همانطور که در شکل های ۲ و ۳ مشاهده می کنید ، فرکانس ضد تشدید در واقع در همان نقطه ی ω_2 سیستم می باشد که دلیل آن علاوه بر صحبت های بالا ، وجود داشتن پارامتر میرایی هم می باشد و اینکه پارامتر جفت شدگی در نمونه ای که مقاله ی مذکور حل کرده است ضعیف می باشد .

۴.۱ حل برای $N = 3$

مانند دو نوسانگر جفت شده ، از عبارت ۲ استفاده می کنیم . در این بخش هم بر این فرض هستیم که نیروی وادارنده فقط به نوسانگر اول وارد می شود و این بدین معنی است که $j = 1$.

الف) $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$.
با جایگذاری در عبارت ۲ خواهیم داشت :

$$D_1(\omega) = \frac{F_0}{m} \sum_{i=1}^3 \frac{x_{1i}x_{i1}}{\omega_i^2 - \omega^2} = \frac{F_0}{m} \left[\frac{\sin^2(\pi/4)}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\sin^2(2\pi/4)}{\omega_2^2 - \omega^2} + \frac{\sin^2(3\pi/4)}{\omega_3^2 - \omega^2} \right]$$

$$= \frac{F_0}{m} \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2)}{(2\omega_0^2 - \omega^2)[(2 - \sqrt{2})\omega_0^2 - \omega^2][(2 + \sqrt{2})\omega_0^2 - \omega^2]} \right]$$

$$D_2(\omega) = \frac{F_0}{m} \sum_{i=1}^3 \frac{x_{2i}x_{i1}}{\omega_i^2 - \omega^2} = \frac{F_0}{m} \left[\frac{\sin(\pi/4) \sin(2\pi/4)}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\sin(2\pi/4) \sin(\pi)}{\omega_2^2 - \omega^2} \right. \\ \left. + \frac{\sin(3\pi/4) \sin(6\pi/4)}{\omega_3^2 - \omega^2} \right]$$

$$= \frac{F_0}{m} \left[\frac{\omega_0^2}{[(2 - \sqrt{2})\omega_0^2 - \omega^2][(2 + \sqrt{2})\omega_0^2 - \omega^2]} \right]$$

$$D_3(\omega) = \frac{F_0}{m} \sum_{i=1}^3 \frac{x_{3i}x_{i1}}{\omega_i^2 - \omega^2}$$

$$= \frac{F_0}{m} \left[\frac{\omega_0^4}{(2\omega_0^2 - \omega^2)[(2 - \sqrt{2})\omega_0^2 - \omega^2][(2 + \sqrt{2})\omega_0^2 - \omega^2]} \right]$$

بنابراین برای $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ داریم :

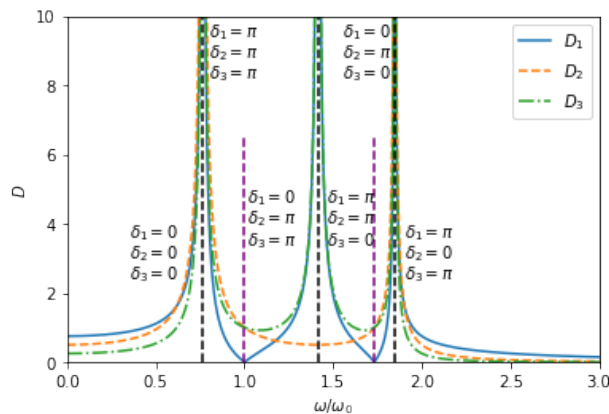
$$D_1(\omega) = \frac{F_0}{m} \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2)}{(2\omega_0^2 - \omega^2)[(2 - \sqrt{2})\omega_0^2 - \omega^2][(2 + \sqrt{2})\omega_0^2 - \omega^2]} \right]$$

$$D_2(\omega) = \frac{F_0}{m} \left[\frac{\omega_0^2}{[(2 - \sqrt{2})\omega_0^2 - \omega^2][(2 + \sqrt{2})\omega_0^2 - \omega^2]} \right]$$

$$D_3(\omega) = \frac{F_0}{m} \left[\frac{\omega_0^4}{(2\omega_0^2 - \omega^2)[(2 - \sqrt{2})\omega_0^2 - \omega^2][(2 + \sqrt{2})\omega_0^2 - \omega^2]} \right]$$

برای قسمت های بعدی هم کافی است که با توجه به محدوده های فرکانس ها و نقاط مجانبی ، دامنه ها را بدست آورد . با توجه به معادلات بدست آمده می توان گفت که زمانی دامنه ی نوسانگر اول صفر می شود که فرکانس ها برابر با ω_0 و $\sqrt{3}\omega_0$ باشد . بنابراین فرکانس های ضد تشدید برابر است با $\omega_{ar,2} = \sqrt{3}\omega_0$ و $\omega_{ar,1} = \omega_0$.

دامنه های سه نوسانگر جفت شده در شکل زیر آمده است :



شکل ۴: نمودار دامنه ی نوسانگرهای سه تایی جفت شده

با توجه به تئوری و نمودارها ، مشخص می شود که نوسانگر اول که تحت تاثیر نیروی وادارنده می باشد ، دارای دو فرکانس ضد تشدید در نقاط ω_0 و $\sqrt{2}\omega_0$ می باشد و همچنین در حول این نقاط ، فاز نوسانگر اول به اندازه ی π تغییر می کند که مطابق با انتظارات ما می باشد .

۵.۱ حل برای N نوسانگر جفت شده

همانطور که از ابتدا اشاره کردیم ، دامنه نوسانگرها در زمانی که به نوسانگر j ام ، نیروی وادارنده وارد می شود از معادله ی ۲ بدست می آید و همین معادله تعمیمی به مسئله ی N نوسانگر جفت شده می باشد ؛ اما نکته ای که مهم است این است که ما از این معادله باید استفاده کنیم و نقاطی از فرکانس را بدست آوریم که دامنه نوسانگر موردنظر برابر با صفر شود که آن نقاط ، همان نقاط ضد تشدید می باشد اما معادله ی ۲ به دلیل جمع زدن روی فاز های دلخواه (رندوم) ، نمی تواند جواب تحلیلی مناسبی به ما دهد . برای این که به حل دقیق تحلیلی مسئله برسیم باید از یک قدم عقب تر از معادله ۲ شروع به کار کنیم و یعنی باید معادلات حرکت هر نوسانگر را به نوعی دیگر حل کنیم تا بتوانیم حل تحلیلی از فرکانس ضد تشدید داشته باشیم . بنابراین از معادله ی ۱ داریم :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) - c\dot{x}_1 + F_0 \cos(\omega t) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) - c\dot{x}_2 \\ &\vdots \\ m\ddot{x}_{N-1} &= -k(x_{N-1} - x_{N-2}) + k(x_N - x_{N-1}) - c\dot{x}_{N-1} \\ m\ddot{x}_N &= -k(x_N - x_{N-1}) - kx_N - c\dot{x}_N \end{aligned}$$

با توجه به اینکه اگر پارامتر میرایی غیر صفر باشد ، پدیده ی تشدید وجود نخواهد داشت (در ادامه اثبات می شود) ، پارامتر میرایی را صفر قرار می دهیم و با کمی تغییر متغیر خواهیم داشت :

$$m\ddot{x}_j = -k(x_j - x_{j-1}) - k(x_j - x_{j+1}) \quad , \quad j = 1, \dots, N \quad (V)$$

که در آن

$$x_0 = \frac{F_0}{k} \cos(\omega t) \quad , \quad x_{N+1} = 0$$

حال برای حل معادله ی ۷ کافی است فرض کنیم که جواب به صورت $x_j = C_j e^{i\omega t}$ می باشد و با جایگذاری در معادله ی ۷ خواهیم داشت :

$$-\omega^2 C_j = \omega_0^2 (C_{j+1} + C_{j-1} - 2C_j) \quad , \quad j = 1, \dots, N \quad (A)$$

که در آن

$$C_0 = \frac{F_0}{k} \quad , \quad C_{N+1} = 0$$

برای حل معادله ی فوق باید فرض کنیم که ضرایب C_j می توانند به صورت عمومی به شکل $Ae^{ij\theta} + Be^{-ij\theta}$ باشند . و شرایط مرزی به شکل

$$C_0 = A + B = \frac{F_0}{k} \quad , \quad C_{N+1} = Ae^{i(N+1)\theta} + Be^{-i(N+1)\theta} = 0$$

می باشند . بنابراین ضرایب A و B به صورت زیر بدست می آیند :

$$\begin{aligned} Ae^{i(N+1)\theta} + Be^{-i(N+1)\theta} &= 0 \rightarrow B = -Ae^{2i(N+1)\theta} \\ A - Ae^{2i(N+1)\theta} &= A(1 - e^{2i(N+1)\theta}) = -Ae^{i(N+1)\theta}(e^{i(N+1)\theta} - e^{-i(N+1)\theta}) = \frac{F_0}{k} \\ 2Ae^{i(N+1)\theta} \sin[(N+1)\theta] &= -2iAe^{i(N+1)\theta} \sin[(N+1)\theta] = \frac{F_0}{k} \\ A &= \frac{iF_0 e^{-i(N+1)\theta}}{2k \sin[(N+1)\theta]} \quad , \quad B = \frac{F_0 e^{i(N+1)\theta}}{2ik \sin[(N+1)\theta]} \end{aligned}$$

بنابراین C_j برابر می شود با :

$$\begin{aligned} C_j &= \frac{iF_0 e^{-i(N+1)\theta}}{2k \sin[(N+1)\theta]} e^{ij\theta} + \frac{F_0 e^{i(N+1)\theta}}{2ik \sin[(N+1)\theta]} e^{-ij\theta} = \frac{iF_0 e^{-i(N+1-j)\theta}}{2k \sin[(N+1)\theta]} \\ &+ \frac{F_0 e^{i(N+1-j)\theta}}{2ik \sin[(N+1)\theta]} = \frac{F_0}{2ik \sin[(N+1)\theta]} [e^{i(N+1-j)\theta} - e^{-i(N+1-j)\theta}] \\ &= \frac{F_0 \sin[(N+1-j)\theta]}{k \sin[(N+1)\theta]} \end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$C_j = \frac{F_0 \sin[(N+1-j)\theta]}{k \sin[(N+1)\theta]}$$

و بنابراین :

$$x_j(t) = \frac{F_0 \sin[(N+1-j)\theta]}{k \sin[(N+1)\theta]} \cos(\omega t)$$

و از طرفی می دانیم که جواب خصوصی معادله ی حرکت های نوسانگرهای جفت شده به صورت $x_j(t) = D_j(t) \cos(\omega t - \phi)$ می باشد . بنابراین دامنه های N نوسانگر به صورت زیر می باشد :

$$D_j(\theta) = \frac{F_0 \sin[(N+1-j)\theta]}{(\cos \delta_i) k \sin[(N+1)\theta]} = \left| \frac{F_0 \sin[(N+1-j)\theta]}{k \sin[(N+1)\theta]} \right| \quad (9)$$

حال باید رابطه ای بین متغیر θ و ω بدست آورد . برای این کار می توانیم فرض کنیم که $C_j = Ce^{ij\theta}$ می باشد و با جایگذاری در عبارت ۸ خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} -\omega^2 Ce^{ij\theta} &= \omega_0^2 (Ce^{i(j+1)\theta} + Ce^{i(j-1)\theta} - 2Ce^{ij\theta}) = \omega_0^2 e^{ij\theta} (Ce^{i\theta} + Ce^{-i\theta} - 2) \\ &= C\omega_0^2 e^{ij\theta} (e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2) = 2C\omega_0^2 e^{ij\theta} (\cos \theta - 1) \\ &= -4C\omega_0^2 e^{ij\theta} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\omega^2}{4\omega_0^2} \quad (۱۰)$$

بنابراین در حالت کلی داریم :

$$D_j(\theta) = \frac{F_0 \sin[(N+1-j)\theta]}{(\cos \delta_i)k \sin[(N+1)\theta]} = \left| \frac{F_0 \sin[(N+1-j)\theta]}{k \sin[(N+1)\theta]} \right|, \quad \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\omega^2}{4\omega_0^2}$$

حال به بررسی این دامنه می پردازیم. با توجه به عبارت ۱۰ می توان گفت مقادیر مجاز برای ω در محدوده ی $[0, 2\omega_0]$ می باشد که به این محدوده در فیزیک حالت جامد ، (Zone-Boundary Mode) می گویند . از طرفی ما انتظار رابطه ی ۱۰ داشتیم زیرا از گزارش قبلی که با استفاده از ماتریس های سه ضلعی تولیتز^۱ ، فرکانس های N نوسانگر جفت شده به صورت

$$\begin{aligned} \omega_i^2 &= 2\omega_0^2[1 - \cos(\frac{i\pi}{N+1})] = 2\omega_0^2[2\sin^2(\frac{i\pi}{2(N+1)})] \\ &= 4\omega_0^2 \sin^2[\frac{i\pi}{2(N+1)}] \end{aligned}$$

بنابراین :

$$\omega_i = 2\omega_0 \sin \frac{i\pi}{2(N+1)}$$

که همان عبارت ۱۰ می باشد . حال اگر فرکانس ω از $2\omega_0$ بیشتر باشد ، آنگاه دیگر θ مقادیر حقیقی نخواهد داشت . در این صورت روشی که برای حل معادله ی ۸ به کار می آید بدین صورت است که $C_j = Z^j$ فرض می کنیم و با قرار دادن آن در معادله ی ۸ خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} -\omega^2 Z^j &= \omega_0^2(Z^{j+1} + Z^{j-1} - 2Z^j) \\ -\omega^2 &= \omega_0^2(Z + Z^{-1} - 2) \quad , \quad Z^2 + (\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2)Z + 1 = 0 \end{aligned}$$

با حل معادله ی درجه ی دوم بالا ، دو جواب به صورت

$$Z_{\pm} = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \pm \frac{\omega}{2\omega_0} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 4}$$

¹Matrix Toeplitz Tridiagonal

به دست می آید .
 حال با توجه به جواب های به دست آمده ، جواب عمومی C_j را می توان به صورت ترکیب خطی از این دو ریشه نوشت و یا

$$C_j = AZ_+^j + BZ_-^j = AZ_+^j + BZ_+^{-j}$$

حال برای به دست آوردن ضرایب A و B باید از شرایط مرزی بر روی C_j استفاده کرد . یعنی :

$$\begin{cases} A + B = \frac{F_0}{k} \\ AZ_+^{(N+1)} + BZ_+^{-(N+1)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} B &= -AZ_+^{2(N+1)} , \\ A - AZ_+^{2(N+1)} &= A[1 - Z_+^{2(N+1)}] = -AZ_+^{(N+1)}[Z_+^{(N+1)} - Z_+^{-(N+1)}] \\ -AZ_+^{(N+1)}[Z_+^{(N+1)} - Z_+^{-(N+1)}] &= \frac{F_0}{k} \\ \rightarrow A &= -\frac{F_0}{k} \frac{Z_+^{-(N+1)}}{Z_+^{(N+1)} - Z_+^{-(N+1)}} \\ \rightarrow B &= \frac{F_0}{k} \frac{Z_+^{(N+1)}}{Z_+^{(N+1)} - Z_+^{-(N+1)}} \end{aligned}$$

و بنابراین

$$C_j = \frac{F_0}{k} \frac{Z_+^{N+1-j} - Z_+^{-N-1+j}}{Z_+^{(N+1)} - Z_+^{-(N+1)}} \quad (11)$$

با توجه به عبارت به دست آمده ، هیچگاه پدیده ی ضد تشدید رخ نمی دهد زیرا هیچ مقدار مجازی برای Z_+ وجود ندارد که باعث شود C_j برابر با صفر شود . (مقادیر مجاز برای Z_+ به صورت $Z_+ < 1$ می باشد .) در شکل زیر ، نمودارهای جواب های Z_+ و Z_- را بر حسب ω می بینید .
 حال به بررسی شرایط ضد تشدیدی می پردازیم .
 با توجه به عبارت ۹ می توان گفت ، زمانی پدیده ی ضد تشدیدی رخ می دهد که عبارت ۹ صفر شود ، البته به این نکته باید توجه کرد که مخرج کسر در آن نقطه صفر نشود ، به بیان دیگر عبارت مبهم نشود . بنابراین زمانی پدیده ی ضد تشدید رخ می دهد که

$$D_j(\theta) = \left| \frac{F_0 \sin[(N+1-j)\theta]}{k \sin[(N+1)\theta]} \right|_{\theta} = 0$$

حال برای مثال ، نوسانگر اول را مورد بررسی قرار می دهیم و نیروی وادارنده را بر این ذره وارد می کنیم . بنابراین اندیس $j = 1$ است . بنابراین :

$$D_1(\theta) = \left| \frac{F_0 \sin[(N+1-1)\theta]}{k \sin[(N+1)\theta]} \right|_{\theta} = 0 \quad , \quad \theta = \frac{s\pi}{N} \quad , \quad s = 1, 2, \dots, N-1$$

و فرکانس ضد تشدید با توجه به عبارت ۱۰ برابر است با :

$$\omega = 2\omega_0 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|_{\theta=\frac{s\pi}{N}} = 2\omega_0 \left| \sin \frac{s\pi}{2N} \right|$$

البته دقت کنید که باید بررسی کنیم برای هر نوسانگر ، که آیا θ به دست آمده ، در معادله ی ۹ باعث صفر شدن مخرج معادله نشود زیرا در آن صورت ، آن θ دیگر جواب ما نخواهد بود . حال به بررسی پدیده ی ضد تشدید در زمانی که نیروی وادارنده به ذره j ام اعمال شود . در آن صورت خواهیم داشت :

$$D_j(\theta) = \left| \frac{F_0 \sin[(N+1-j)\theta]}{k \sin[(N+1)\theta]} \right|_{\theta} = 0 \quad , \quad \theta_s = \frac{s\pi}{N+1-j} \quad , \quad s = 1, 2, \dots, N-j$$

با توجه به θ به دست آمده ، می توان فرکانس های ضد تشدید را با استفاده از رابطه ی ۱۰ به دست آورد که به صورت

$$\omega_s = 2\omega_0 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|_{\theta_s} = 2\omega_0 \left| \sin \frac{s\pi}{2(N+1-j)} \right|$$

می باشد . دقت کنید که محدوده ی مجاز θ بیان دارد که فقط $N+1-j$ فرکانس ضد تشدید مجاز وجود دارد ؛ به طور مثال برای سه نوسانگر جفت شده ، اگر نوسانگر اول تحت تاثیر نیروی وادارنده قرار بگیرد آنگاه دو فرکانس ضد تشدید موجود می باشد و دو نوسانگر دیگر تحت این فرکانس ، تناوب می کنند و اگر نوسانگر دوم (وسط) تحت تاثیر نیروی وادارنده قرار بگیرد آنگاه فقط یک فرکانس ضد تشدید موجود می باشد و به دلیل تقارن در سیستم ، دو نوسانگر دیگر که در سمت چپ و راست قرار دارند ، تحت این فرکانس تناوب می کنند .

۶.۱ حل برای نوسانگر میرا

در این بخش به این موضوع می پردازیم که آیا اگر میرایی وجود داشته باشد ، پدیده ی ضد تشدید رخ می دهد یا خیر .

ابتدا از مسئله ی دو نوسانگر جفت شده استفاده می کنیم . از گزارش قبلی به این نتیجه دست یافتیم که با استفاده از تغییر دستگاه ، معادله ی حرکت دو نوسانگر را به صورت زیر می باشد :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(\omega t - \phi_1) - A_2 \cos(\omega t - \phi_2) \\ x_2(t) &= A_1 \cos(\omega t - \phi_1) + A_2 \cos(\omega t - \phi_2) \end{aligned}$$

که در آن

$$A_{1,2} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_i^2 - \omega^2) + 4\gamma^2\omega^2}} \quad , \quad \phi_{1,2} = \arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_i^2 - \omega^2}\right)$$

$$\omega_i^2 = 2\omega_0^2[1 - \cos(\frac{i\pi}{N+1})]$$

حال برای به دست آوردن دامنه ی نوسانگر اول کافی است عبارت حرکت نوسانگر اول را گسترش دهیم و قسمت های $\sin \theta$ و $\cos \theta$ را جدا از هم به دست آورده و سپس دامنه ی نوسانگر اول را به دست آوریم . بنابراین :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(\omega t - \phi_1) - A_2 \cos(\omega t - \phi_2) = D_1 \cos(\omega t - \phi'_1) \\ A_1[\cos(\omega t) \cos(\phi_1) + \sin(\omega t) \sin(\phi_1)] &- A_2[\cos(\omega t) \cos(\phi_2) + \sin(\omega t) \sin(\phi_2)] \\ &= [A_1 \cos(\phi_1) - A_2 \cos(\phi_2)] \cos(\omega t) + [A_1 \sin(\phi_1) - A_2 \sin(\phi_2)] \sin(\omega t) \\ &= D_1 \cos(\omega t - \phi'_1) = D_1[\cos(\omega t) \cos(\phi'_1) + \sin(\omega t) \sin(\phi'_1)] \end{aligned}$$

بنابراین :

$$\begin{cases} D_1 \cos(\phi'_1) = A_1 \cos(\phi_1) - A_2 \cos(\phi_2) \\ D_1 \sin(\phi'_1) = A_1 \sin(\phi_1) - A_2 \sin(\phi_2) \end{cases}$$

حال می توان دامنه و فاز نوسانگر اول را به دست آورد

$$\begin{aligned} D_1 &= \left[[A_1 \cos(\phi_1) - A_2 \cos(\phi_2)]^2 + [A_1 \sin(\phi_1) - A_2 \sin(\phi_2)]^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \right]^{1/2} \end{aligned}$$

و برای فاز

$$\phi'_1 = \arctan\left[\frac{A_1 \sin(\phi_1) - A_2 \sin(\phi_2)}{A_1 \cos(\phi_1) - A_2 \cos(\phi_2)}\right]$$

و به همین ترتیب برای نوسانگر دوم خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} D_2 &= \left[A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \right]^{1/2} \\ \phi'_2 &= \arctan\left[\frac{A_1 \sin(\phi_1) + A_2 \sin(\phi_2)}{A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_2)}\right] \end{aligned}$$

و از طرفی می توان دامنه ی نوسانگرهای اول و دوم را بر حسب ω نوشت ، بدین صورت که :

$$D_{1,2} = \frac{F_0}{2m} \left[\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} + \frac{1}{(3\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right. \\ \left. \pm \frac{2[(3\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2 \omega^2]}{\sqrt{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2][(3\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]}} \right] \\ \times \frac{1}{\sqrt{[(\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2 \omega^2]^2 + 4\gamma^2 \omega^2 \omega_0^2}}$$

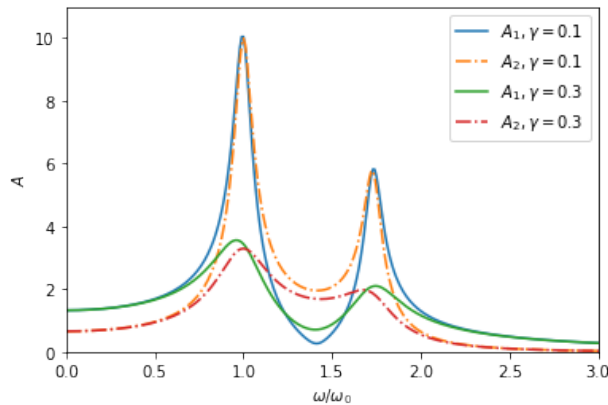
و همین طور برای فاز هم می توان نوشت :

$$\phi'_{1,2} = \arctan \left[\frac{A_1 \sin(\phi_1) \mp A_2 \sin(\phi_2)}{A_1 \cos(\phi_1) \mp A_2 \cos(\phi_2)} \right]$$

که با جایگذاری خواهیم داشت :

$$\phi'_{1,2} = \tan^{-1} \left[\frac{\gamma \omega [(\omega_1^2 - \omega^2)^2 \mp (\omega_2^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2 \mp \omega^2 \gamma^2]}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)^2 \mp (\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2 [(\omega_1^2 - \omega^2) \mp \omega_2^2 - \omega^2]} \right]$$

با توجه به عبارت بالا ، نمودار دامنه های دو نوسانگر را برای پارامترهای میرایی مختلف رسم کرده ایم :

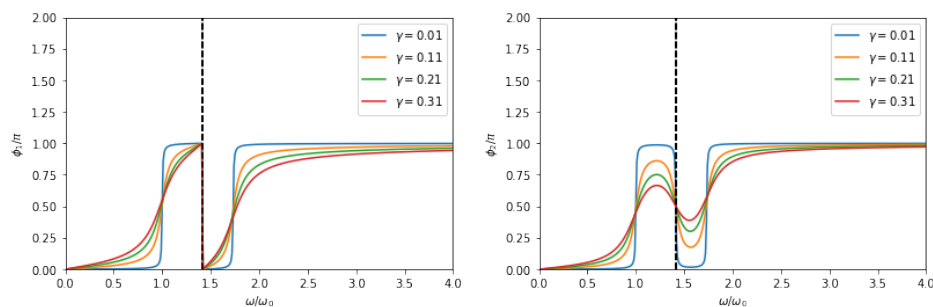


شکل ۵: نمودار دامنه های نوسانگرها بر حسب ω

با توجه به نمودار بالا ، مشاهده می کنیم که با وجود پارامتر میرایی دیگر دامنه های نوسانگر در هیچ فرکانسی صفر نمی شود و به بیان دیگر ، وجود میرایی باعث می شود که سیستم دچار پدیده ی ضد تشدید نشود .

حال با توجه به روابطی که برای فازها به دست آورده ایم ، نمودارهای آن ها را بر حسب ω رسم کردیم که در شکل 6 مشاهده می کنید .

با توجه به شکل ۶ ، مشاهده می کنیم که فازها حول نقطه ی ضد تشدید که با خط چین در شکل مشخص شده است ($\omega = \sqrt{2}\omega_0$) دچار یک تغییر ناگهانی در $\gamma = 0.01$ می شود که با افزایش پارامتر میرایی (γ) فازها حول آن نقطه به صورت ملایم رفتار می کنند و مطابق نمودار ۵ ، با افزایش پارامتر میرایی ، فرکانس ضد تشدید وجود ندارد و فازها حول هیچ نقطه ای تغییر ناگهانی π انجام نمی دهد .

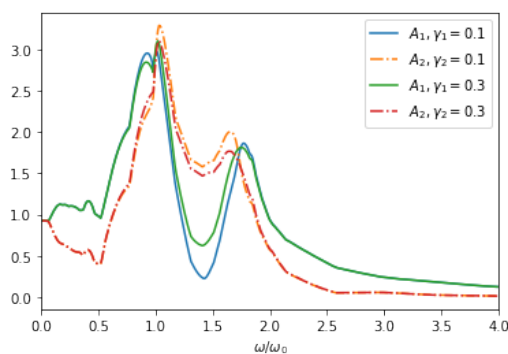


شکل ۶: نمودارهای فازها بر حسب ω به ازای پارامترهای میرایی مختلف

حال اگر بخواهیم این نمودارها را با روش عددی رسم کنیم ، ابتدا شرایط اولیه ای به صورت زیر (دلخواه)

$$x_1(t=0) = 0 , \quad v_1(t=0) = 0 , \quad x_2(t=0) = 0 , \quad v_2(t=0) = 0$$

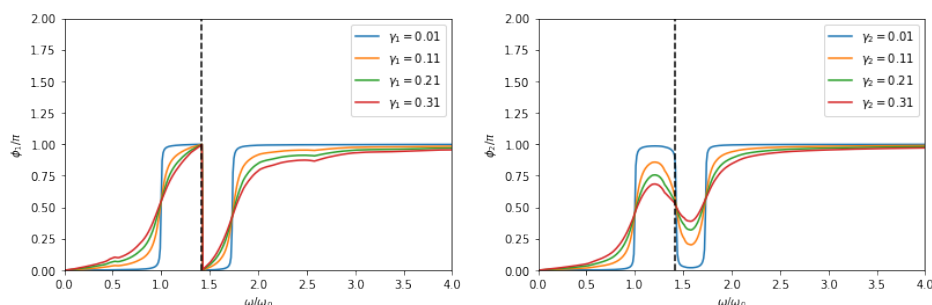
اعمال می کنیم و سپس با حل عددی معادلات حرکت دو نوسانگر جفت شده با توجه به شرایط اولیه ی فوق ، نمودارهای زیر را برای دامنه و فاز در γ های مختلف را می توانیم رسم کنیم :



شکل ۷: نمودار دامنه ها با روش حل عددی

همانطور که مشاهده می کنیم ، نمودارهای فوق مانند نمودارهای شکل ۵ عمل می کنند و دو فرق دارند ، اولی این است که در ابتدای نمودار بالا ، مانند نمودار شکل ۵ از نقطه ی ۱ شروع نمی شود و دومین

فرق این است که برای نمودار A_1 در نقطه ی فرکانس ضد تشدید ، به اندازه ی نمودار متناظرش در شکل ۵ ، مقعر نیست که همه ی این دو فرق به این دلیل است که جواب های نمودار بالا وابسته به شرایط اولیه ی سیستم می باشد و در واقع ابتدا وابسته به زمان و سپس وابسته به فرکانس شده است ولی نمودار های شکل ۵ و ۶ از ابتدا وابسته به فرکانس هستند .



شکل ۸: نمودار فازها با روش حل عددی

حال برای نمودارهای فازهای نوسانگر ، همان گونه که در شکل بالا می بینید مطابق نمودارهای ۶ می باشد که به صورت تئوری به دست آمده است .
با توجه به تمام بحث هایی که در این بخش آمده است متوجه شدیم که با وجود پارامتر میرایی ، سیستم دیگر دارای فرکانس ضد تشدید نخواهد بود و این گزاره با استفاده از نمودارهایی که هم از لحاظ تئوری و هم از لحاظ عددی (که به نوعی آزمایشگاهی است) رسم شد ، اثبات شده است .
روش دیگری که برای اثبات این گزاره وجود دارد این است که معادله ی ۸ را با توجه به اینکه پارامتر میرایی غیر صفر داریم (در به دست آوردن این معادله اذعان داشتیم که پارامتر میرایی صفر است) باز نویسی می کنیم و آنگاه معادله ی ۱۰ به صورت

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} - i \frac{\gamma\omega}{4\omega_0^2} \quad (12)$$

تبدیل می شود و آنگاه به دلیل اینکه θ دیگر حقیقی نیست و موهومی می باشد می توانیم آن را به صورت $\theta = \phi + i\xi$ نوشت و با جایگذاری در معادله ی ۹ برای به دست آوردن فرکانس ضد تشدید خواهیم داشت :

$$\sin[(N+1-j)\theta] = \sin[(N+1-j)\phi + i(N+1-j)\xi]$$

با استفاده از $\sin(ix) = i \sinh(x)$, $\cos(ix) = \cosh(x)$ خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \sin[(N+1-j)\theta] &= \sin[(N+1-j)\phi + i(N+1-j)\xi] \\ &= \sin[(N+1-j)\phi] \cos[i(N+1-j)\xi] \\ &\quad + \cos[(N+1-j)\phi] \sin[i(N+1-j)\xi] \\ &= \sin[(N+1-j)\phi] \cosh[(N+1-j)\xi] \\ &\quad + i \cos[(N+1-j)\phi] \sinh[(N+1-j)\xi] \end{aligned}$$

اگر بخواهیم عبارت بالا صفر شود ، باید علاوه بر اینکه قسمت موهومی صفر شود ، قسمت حقیقی هم باید صفر شود یعنی :

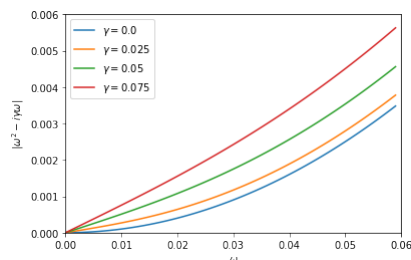
$$\begin{aligned}\sin[(N+1-j)\phi] \cosh[(N+1-j)\xi] &= 0 \rightarrow \phi = 0 \\ \cos[(N+1-j)\phi] \sinh[(N+1-j)\xi] &= 0 \rightarrow \xi = 0\end{aligned}$$

نتایج به دست آمده ی بالا مخالف فرض اولیه ما مبنی بر اینکه θ باید یک عدد مختلط باشد ، است ؛ بنابراین اثبات می شود که پدیده ی ضد تشدید در حضور پارامتر میرایی رخ نمی دهد .

۷.۱ رفع ابهام در حضور پارامتر میرایی

نتیجه ای که در بخش قبل گرفتیم این بود که در حضور پارامتر میرایی ، پدیده ی ضد تشدید رخ نمی دهد ؛ اما در بخش ۱.۲ که در قسمتی به مقاله ی [۳] ارجاع دادیم نمودار شکل ۲ ، با وجود پارامتر میرایی دارای فرکانس ضد تشدید در نقطه ی $\sqrt{2}\omega_0$ می باشد و این نتیجه از نمودار با نتیجه ی بخش قبل در تناقض است . دلیل چیست ؟!

اولین پاسخی که می توان داد این است که با توجه به معادله ی ۱۲ که در حضور پارامتر میرایی به دست آمده ، می توان گفت در بخش ۱.۲ ، پارامتر میرایی نوسانگر اول اعمال شده برابر با ۰.۲۵۰ می باشد که بسیار کوچک است و آنچنان در معادله ی ۱۲ تاثیر گذار نیست که باعث شود θ ، عددی مختلط شود . برای اینکه بهتر متوجه شویم ، نمودار های اندازه ی دو متغیر ω^2 و $i\gamma\omega - \omega^2$ در زیر آمده است .



شکل ۹: نمودار $|\omega^2 - i\gamma\omega|$ بر این موضوع دلالت دارد که اگر پارامتر میرایی بسیار کوچک باشد ، آنگاه اندازه ی آن $|\omega^2 - i\gamma\omega|$ برابر با اندازه ی ω^2 می باشد .

همانطور که در شکل ۹ مشاهده می کنید ، به دلیل کوچک بودن پارامتر میرایی ، در محدوده ی $[0, 0.06\omega_0]$ ، منحنی ها به منحنی ω^2 میل می کنند و بنابراین با وجود همچین پارامتر میرایی کوچک ، پدیده ی ضد تشدید را سیستم تجربه می کند .

پاسخ دیگری که می توان ارائه داد این است که پارامتر هایی که در معادله ی ۳ به گونه است که با معادلات دیفرانسیلی که در بخش اول نوشته ایم فرق می کند و همین شاید باعث تاثیر در پدیده ی ضد تشدید شود .

۸.۱ دامنه و فاز برای N نوسانگر جفت شده ی میرا

برای به دست آوردن نمودارهای دامنه و فاز با استفاده از حل عددی دستگاه معادلات N نوسانگر جفت شده ابتدا ، طبق گزارش قبلی می دانیم که جواب های معادله ی حرکت برای نوسانگر k ام به صورت

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^N x_{ki} q_i(t) = \sum_{i=1}^N x_{ki} A_i \cos(\omega t - \delta_i) = D_k \cos(\omega t - \phi'_k) \quad (۱۳)$$

می باشد که در واقع از اصل برهم نهی استفاده شده است . حال برای اینکه برای N نوسانگر جفت شده دامنه و فاز را به دست آوریم کافی است D_k و ϕ'_k را با توجه به متغیرهای دیگر پیدا کنیم . برای این کار معادله ی ۱۳ را باز می کنیم :

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \sum_{i=1}^N x_{ki} q_i(t) = \sum_{i=1}^N x_{ki} A_i \cos(\omega t - \delta_i) \\ &= \sum_{i=1}^N x_{ki} A_i [\cos(\omega t) \cos(\delta_i) + \sin(\omega t) \sin(\delta_i)] \\ &= D_k [\cos(\omega t) \cos(\phi'_k) + \sin(\omega t) \sin(\phi'_k)] \end{aligned}$$

بنابراین :

$$\begin{cases} D_k \sin(\phi'_k) = \sum_{i=1}^N x_{ki} A_i \sin(\delta_i) \\ D_k \cos(\phi'_k) = \sum_{i=1}^N x_{ki} A_i \cos(\delta_i) \end{cases}$$

حال برای فاز و دامنه خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} D_k^2 &= \left[\sum_{i=1}^N x_{ki} A_i \sin(\delta_i) \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^N x_{ki} A_i \cos(\delta_i) \right]^2 \\ D_k &= \left[\sum_{i=1}^N x_{ki}^2 A_i^2 + 2 \sum_{i \neq j}^N x_{ki} x_{kj} A_i A_j \cos(\phi_2 - \phi_1) \right]^{1/2} \\ \phi'_k &= \tan^{-1} \left[\frac{\sum_{i=1}^N x_{ki} A_i \sin(\delta_i)}{\sum_{i=1}^N x_{ki} A_i \cos(\delta_i)} \right] \end{aligned}$$

که عبارات به دست آمده در واقع مانند برهم نهی امواج (به طور مثال برای میدان الکتریکی) می باشند و طبیعتاً هم دور از انتظار نیست . (دقت کنید که اگر پارامتر میرایی را به صفر میل دهیم ، عبارات بالا به معادله ی ۲ تبدیل می شود که همان بحث پدیده ی ضد تشدید می باشد .)

حال برای حل عددی و رسم نمودارها کافی است بعد از حل معادلات حرکت با استفاده از کد نویسی ، مقادیر بیشینه ی تابع و فازها را برای مختصات تعمیم یافته مشخص کرده و با استفاده از معادلات بالا ، نمودار های دامنه و فاز همانند شکل های ۷ و ۸ به دست می آید .

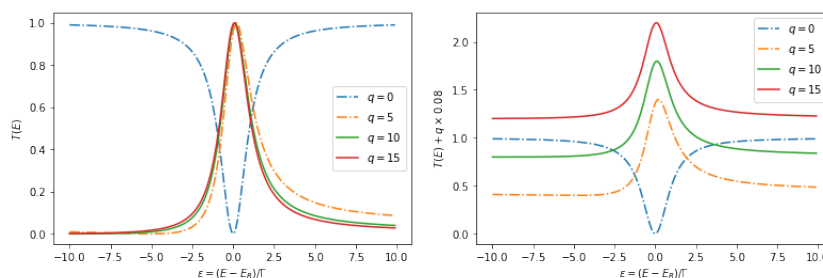
۲ پدیده ی تشدید فانو

۱.۲ مقدمه

تشدید فانو یک ویژگی آشنا و مهم در فیزیک اتمی و مولکولی می باشد. به طور معمول، ترکیبی از یک حالت گسسته با یک یا چند حالت پیوسته منجر به پیک نامتقارن در طیف یونیزاسیون می شود و به این پیک ها پروفایل فانو می گویند که با استفاده از فرمولی که فانو ارائه داد ۱۴ مشخص می شوند که این نامتقارن بودن نمودارها به دلیل وجود پارامتر q می باشد. تشدید فانو لزوماً یک اثر کوانتومی نیست ولی نشان دهنده ی یک مکانیسم خاص برای سیستم های کلاسیکی و کوانتومی می باشد. عبارت فانو به صورت زیر می باشد:

$$T(E) = \frac{1}{1+q^2} \frac{(\epsilon + q)^2}{1+\epsilon^2} \quad (۱۴)$$

که در آن q پارامتر جفت شدگی (پارامتر فانو) ^۱ و $\epsilon = \frac{E-E_R}{\Gamma}$ است که E_R و Γ در واقع اندازه ی پیک و عرض پیک انرژی می باشد. حال اگر $1 \gg q$ آنگاه منحنی خطوط متقارن تر می شود و در واقع به آن منحنی ها BW ^۲ یا *Lorentzian* می گویند. در شکل های زیر مشاهده می کنیم که هر چه پارامتر جفت شدگی q بزرگتر شود، منحنی ها متقارن تر می شود.



شکل ۱۰: با افزایش پارامتر جفت شدگی، منحنی ها متقارن تر می شود

حال سوالی که مهم است این است که چرا به بررسی پدیده ی تداخل فانو می پردازیم؟ جواب این است که در اکثر زمینه های فیزیک، بحث تداخل به طور کلی به ما اطلاعات زیادی از سیستم می دهد. آشناترین مثال بحث تداخل امواج در دو شکاف یانگ در اپتیک می باشد که باعث شد اطلاعات زیادی از آن به دست آوریم. [۱۰]

۲.۲ تشدید و ضد تشدید در نوسانگرهای جفت شده

به این بخش زیاد نمی پردازیم زیرا در قسمت ضد تشدید به طور مفصل راجع به این بخش بحث کرده ایم و فقط در حد یک مرور به آن می پردازیم.

¹Fano parameter

²Breit-Wigner

۱.۲.۲ تک نوسانگر

همانطور که می دانیم معادله ی حرکت یک نوسانگر که تحت تاثیر نیروی وادارنده است به صورت

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x_1 = F_0 \cos(\omega t)$$

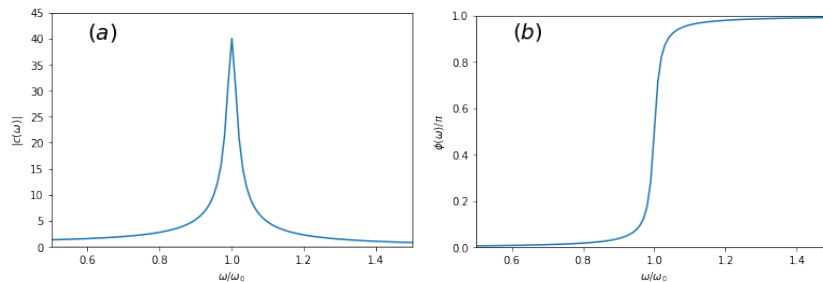
می باشد . حل این معادله بسیار ساده است ، این معادله دارای دو جواب عمومی و خصوصی است ، جواب عمومی برای همگنی معادله ی بالا است و جواب خصوصی برای ناهمگنی معادله است . همانطور که در اکثر کتاب های مکانیک تحلیلی [۵] آمده است ، این معادله دارای جواب های عمومی و خصوصی زیر است :

$$x_c(t) = e^{-\gamma t/2} [q_1 e^{i\Omega t} + q_2 e^{-i\Omega t}] , \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} , \quad q_1 = q_2^*$$

$$x_p(t) = |c(\omega)| \cos[\omega t - \phi(\omega)] , \quad |c(\omega)| = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}}$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\omega \gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

در شکل زیر ، نمودارهای دامنه و فاز برای تک نوسانگر را مشاهده می کنید .



شکل ۱۱: در نمودار (a) مشاهده می کنیم که زمانی که فرکانس نیروی وادارنده به فرکانس طبیعی سیستم برسد ، سیستم دچار تشدید می شود . در نمودار (b) مشاهده می کنیم که فاز نوسانگر بعد از تشدید به اندازه ی π تغییر می کند .

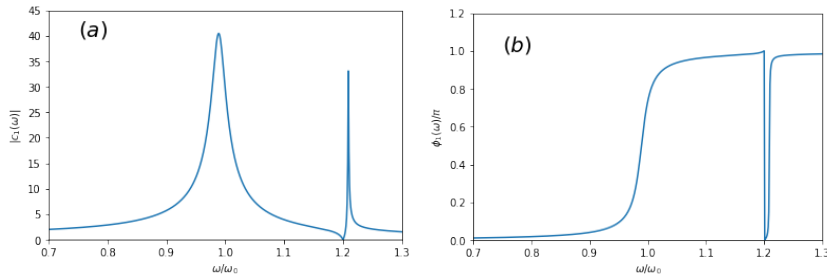
۲.۲.۲ دو نوسانگر جفت شده

با توجه به بخش ۱.۳ ، معادلات حرکت دو نوسانگر جفت شده در حالت کلی به صورت زیر

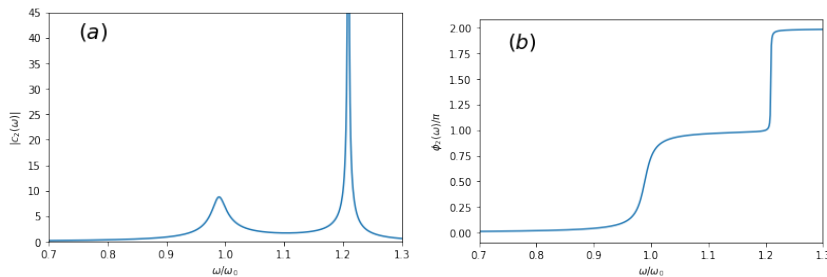
$$\ddot{x}_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + v_{12} x_2 = F_0 \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}_2 + \gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + v_{12} x_1 = 0$$

می باشد . همانطور که در آن بخش ، حل معادلات حرکت فوق به صورت کامل تشریح شد (۵) ، نمودارهای دامنه و فاز نوسانگر اول به شکل زیر می باشند :



شکل ۱۲: در شکل (a) مشاهده می کنیم که سیستم در فرکانس اول طبیعی خودش دچار تشدید می شود و بعد از آن به طور ناگهانی به فرکانس ضد تشدید خود می رسد و در اندک فرکانس دیگر ، باز به حالت تشدید طبیعی خودش می رسد . در شکل (b) تغییر فاز ناگهانی بعد از فرکانس ضد تشدید سیستم تجربه می کند و سپس به حالت عادی خود حرکت می کند .



شکل ۱۳: در شکل (a) مشاهده می کنیم که سیستم در فرکانس اول طبیعی خودش دچار تشدید می شود و بعد از آن دیگر مانند نوسانگر اول ، دچار ضدتشدید نمی شود و در اندک فرکانس دیگر ، باز به حالت تشدید طبیعی خودش می رسد . در شکل (b) تغییر فاز ناگهانی بعد از فرکانس ضد تشدید نوسانگر تجربه نمی کند و فاز نوسانگر اول را به خود اضافه می کند .

و به همین ترتیب برای نوسانگر دوم داریم :

همانطور که مشاهده می کنید نقطه ای که دامنه ی نوسانگر اول ، صفر می شود جواب معادله ی ۴ است ؛ البته در آن بخش بنا به گفته ی مقاله [۳] با فرض بر اینکه پارامتر میرایی ضعیف باشد (جواب معادله ی ۴ را به صورت زیر نوشته است :

$$\tilde{\omega}_1^2 \simeq \omega_1^2 - \frac{v_{12}^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} , \quad \tilde{\omega}_2^2 \simeq \omega_2^2 + \frac{v_{12}^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$$

بنابراین $\omega_{zero} = \omega_2$.

در شکل ۱۲ ، در نمودار a ، تقارن در حول فرکانس ω_1 شاهد هستیم ولی حول فرکانس ω_2 نمودار نامتقارن است که این به دلیل وجود ω_{zero} در نزدیکی پیک دوم می باشد . برای نمودارهای فاز ، همانطور که مشاهده می کنید به دلیل جفت شدگی دو نوسانگر ، زمانی که فرکانس نیروی وادارنده از نقاط تشدید و ضد تشدید عبور می کند دچار تغییر می شود (بخش ۱.۲) . حال با توجه به بحث های بالا ، اگر سه نوسانگر جفت شده داشته باشیم که پارامترهای جفت شدگی به صورت v_{12} و v_{23} باشد و اگر $\omega_3 \gg \omega_2$ آنگاه به معادله ای مانند معادله ی ۴ می رسیم که به

صورت

$$(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2) - v_{23}^2 = 0$$

می باشد و فرکانس صفر این سیستم در نقطه ی ثانویه ی

$$\omega_{zero}^2 \simeq \omega_2^2 - \frac{v_{23}^2}{\omega_3^2 - \omega_2^2}$$

می باشد .

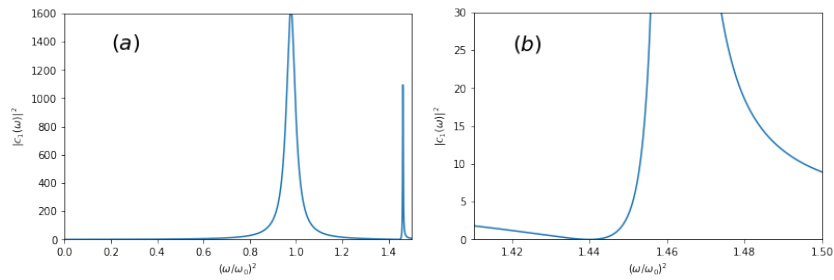
حال در بخش بعد به بررسی پارامتر فانو در حالت کلاسیکی که سیستم دو نوسانگر جفت شده می باشد ، می پردازیم و راجع به منحنی های دامنه ها و ربط آن به حالت کوانتومی امواج که در ادامه خواهید دید ، صحبت خواهیم کرد .

(برای بحث بعد باید بگویم که دقت کنید که با توجه به بخش های قبل ، اگر پارامترهای میرایی کوچک باشد ، سیستم ضد تشدید را تجربه می کند و ممکن است با استفاده از بعضی مقادیر و حالت های خاص ، با وجود هر دو پارامتر میرایی ، سیستم دچار ضد تشدید شود .)

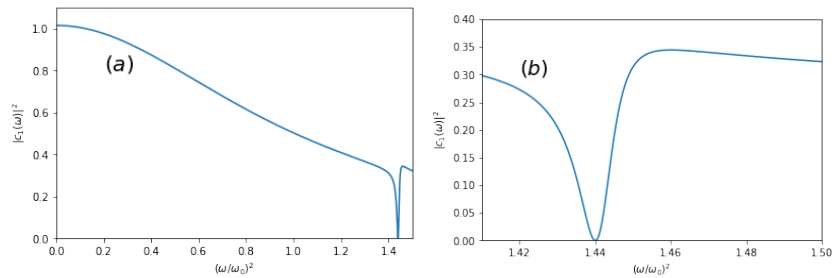
۳.۲ تفسیر پارامتر فانو در حالت کلاسیکی

با توجه به نمودارهای شکل ۱۰ دریافتیم که هر چقدر پارامتر فانو افزایش یابد ، ضریب عبور به صورت متقارن در می آید . برای قیاس کوانتومی معادله ی فانو ۱۴ در مکانیک کلاسیک ، می دانیم که اگر $|c_1(\omega)^2|$ بر حسب ω^2 به دست آوریم آنگاه می توانیم معادله ی فانو را از این حالت کلاسیکی به دست آوریم . [۱۰]

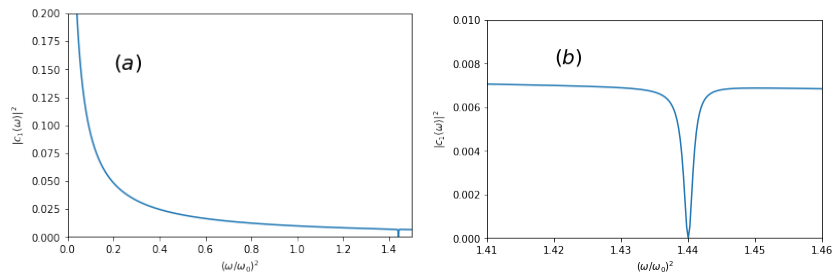
حال ابتدا می خواهیم نمودارهای اندازه ی دامنه بر حسب ω^2 که در حالت کلاسیکی به آن پرداختیم را رسم کنیم . در شکل های ۳ تا ۵ ، دست به تغییر پارامتر میرایی γ_1 و γ_2 می زنیم و آن را به مرور افزایش می دهیم . باید این را هم اضافه کنم که در نمودارهای (a) در حالت معمول منحنی ها را مشاهده می کنید و در نمودارهای (b) به صورت بزرگ شده ، حول نقطه ی فرکانس صفر ω_{zero} منحنی ها را مشاهده می کنید .



شکل ۱۴: در شکل (a) منحنی مربع اندازه ی دامنه بر حسب $(\omega/\omega_0)^2$ را مشاهده می کنیم که بر حسب مقادیر $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.2$, $\gamma_1 = 0.025$, $\gamma_2 = 0$ می باشد . شکل (b) بزرگ شده ی منحنی می باشد .



شکل ۱۵: در شکل (a) منحنی مربع اندازه ی دامنه بر حسب $(\omega/\omega_0)^2$ را مشاهده می کنیم که بر حسب مقادیر $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.2$, $\gamma_1 = 1.41$, $\gamma_2 = 0$ می باشد . شکل (b) بزرگ شده ی منحنی می باشد .



شکل ۱۶: در شکل (a) منحنی مربع اندازه ی دامنه بر حسب $(\omega/\omega_0)^2$ را مشاهده می کنیم که بر حسب مقادیر $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.2$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 0$ می باشد . شکل (b) بزرگ شده ی منحنی می باشد .

همانطور که در شکل های فوق مشاهده کردید ، با افزایش پارامتر میرایی γ_1 ، منحنی حول نقطه ω_{zero} متقارن می شود و به نوعی $|c_1(\omega)|^2$ مانند نمودارهای شکل ۱۰ رفتار می کند . با توجه به

این هم ارزی کوچک ، به بررسی این می پردازیم که آیا می شود پارامتر فانو و معادله ی فانو را در حالت کلاسیکی به دست آورد یا خیر .

برای این کار ابتدا با استفاده از جواب های معادله ی ۴ دست به تعریف انرژی سیستم ($\tilde{\epsilon}$) می زنیم که به صورت زیر تعریف می شود

$$\tilde{\epsilon} \equiv \omega^2 - \tilde{\omega}_2^2 = \omega^2 - \omega_2^2 - \frac{v_{12}^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$$

حال دامنه ی نوسانگر اول که در معادله ی ۵ به دست آمده است را بر حسب متغیرهای جدید بازنویسی می کنیم .

$$\begin{aligned} c_1(\omega) &= \frac{\omega_2^2 - \omega^2 + i\gamma_2\omega}{(\omega_1^2 - \omega^2 + i\gamma_1\omega)(\omega_2^2 - \omega^2 + i\gamma_2\omega) - v_{12}^2} a_1 \\ &\equiv \frac{A}{B} a_1 \end{aligned}$$

برای پارامتر A خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} A &= \omega_2^2 - \omega^2 + i\gamma_2\omega = -\tilde{\epsilon} - \omega_2^2 - \frac{v_{12}^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \\ &= -\gamma_1\omega_2 \frac{v_{12}^2}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2} \left[\frac{1}{\gamma_1\omega_2} \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}{v_{12}^2} \tilde{\epsilon} + \frac{1}{\gamma_1\omega_2} (\omega_2^2 - \omega_1^2) \right] \end{aligned}$$

و برای پارامتر B به ازای $\gamma_2 = 0$ خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} B &= (\omega_1^2 - \omega^2 + i\gamma_1\omega)(\omega_2^2 - \omega^2) - v_{12}^2 \\ &= (\omega_2^2 - \omega_1^2)\tilde{\epsilon} - i\gamma_1\omega_2 \frac{v_{12}^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \end{aligned}$$

حال با توجه به تقریب هایی که برای انرژی سیستم اعمال کردیم با جایگذاری ضرایب فوق در عبارت $c_1(\omega)$ خواهیم داشت :

$$c_1(\omega) \approx \frac{-\gamma_1\omega_2 \frac{v_{12}^2}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2} \left[\frac{1}{\gamma_1\omega_2} \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}{v_{12}^2} \tilde{\epsilon} + \frac{1}{\gamma_1\omega_2} (\omega_2^2 - \omega_1^2) \right]}{-\gamma_1\omega_2 \frac{v_{12}^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \left[\frac{1}{\gamma_1\omega_2} \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}{v_{12}^2} \tilde{\epsilon} - i \right]}$$

حال دو متغیر جدید با توجه به عبارت فوق تعریف می کنیم :

$$\begin{aligned} \epsilon &\equiv \frac{1}{\gamma_1\omega_2} \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}{v_{12}^2} \tilde{\epsilon} \\ q &\equiv \frac{1}{\gamma_1\omega_2} (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 \end{aligned}$$

بنابراین با جایگذاری متغیرهای جدید در عبارت دامنه ی نوسانگر اول خواهیم داشت :

$$c_1(\omega) \approx -\frac{\epsilon + q}{\epsilon - i} \frac{a_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$$

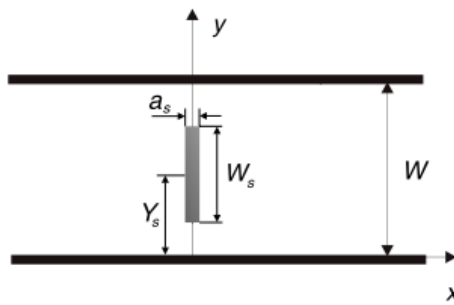
و بدین ترتیب

$$|c_1(\omega)|^2 \approx \frac{(\epsilon + q)^2}{\epsilon^2 + 1} \frac{a_1^2}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2} \propto \frac{(\epsilon + q)^2}{\epsilon^2 + 1} \quad (15)$$

که در آن عبارت $\frac{a_1^2}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}$ یک ثابت می باشد بنابراین عبارت ۱۵ همان معادله ی فانو است و بنابراین به معادله ی فانو از حالت کلاسیکی دو نوسانگر جفت شده رسیدیم و پارامتر فانو در حالت کلاسیکی $q \equiv \frac{1}{\gamma_1 \omega_2} (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2$ می باشد و معقول هم هست زیرا با توجه به شکل های ۱۴ تا ۱۶ ، با افزایش γ_1 باعث کوچک شدن پارامتر فانو (q) می شود و این باعث می شود که منحنی ها متقارن تر شود که نمودارهای شکل های ۱۴ تا ۱۶ همین تفسیر را تصدیق می کنند .
برای مطالعه حالتی که پارامتر میرایی نوسانگر دوم هم غیر صفر باشد شما را به مقاله ی [۵] ارجاع می دهیم .

۴.۲ پدیده ی تشدید فانو در موجبر دوبعدی با حضور پتانسیل جاذب (quantum dot)

در این بخش به مقایسه ی سیستم کلاسیکی دو نوسانگر جفت شده با سیستم کوانتومی دو موج جفت شده در موجبر الکتریکی می پردازیم . به منظور مشاهده ی ارتباط بین یک خط نامتقارن نزدیک فرکانس تشدید در نوسانگرهای جفت شده و یکی از ویژگی های اصلی پدیده فانو مرتبط با امواج در حال انتشار و محو شدن در یک سیستم کوانتومی ، ما انتشار امواج الکترونی را در یک موجبر الکتریکی دو بعدی با عرض W در راستای محور x مطالعه می کنیم . شکل شماتیکی این سیستم به صورت زیر می باشد :



شکل ۱۷: شکل شماتیکی موجبر الکتریکی با حضور پتانسیل جاذب quantum dot (مساحت طوسی) ؛ با توجه به شکل ، مرکز پتانسیل جاذب در مختصات $x = 0$, $y = Y_s$ قرار دارد و الکترون در راستای x نامحدود و در راستای y محدود شده ، $0 < y < W$.

حال با توجه به شکل بالا پتانسیل های اعمالی را به صورت پتانسیل جاذب $V(x, y)$ و پتانسیل محدود کردن در راستای y را $V_c(y)$ در نظر می گیریم ؛ بنابراین تابع موج در راستای y مانند مسئله ی چاه پتانسیل بی نهایت می باشد و بنابراین تابع موج و انرژی تراز ها به صورت

$$\phi(y) = \sqrt{\frac{2}{W}} \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \quad , \quad E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mW^2}$$

می باشد .

حال با استفاده از تعاریف بالا ، معادله ی شرودینگر دو بعدی مربوط به این سیستم را تشکیل می دهیم و سعی بر حل آن می کنیم . بنابراین :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi(x, y) + V_c(y) \Psi(x, y) + V(x, y) \Psi(x, y) = E \Psi(x, y)$$

حال می توان از جداسازی متغیرها بر حسب پایه $\phi(y)$ استفاده کرد ، یعنی

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \phi_n(y) \quad (۱۶)$$

با جایگذاری عبارت ۱۶ در معادله ی شرودینگر دو بعدی ، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi(x, y) + V_c(y) \Psi(x, y) + V(x, y) \Psi(x, y) = E \Psi(x, y) \\ & -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\phi_n(y) \frac{d^2}{dx^2} \psi_n(x) + \psi_n(x) \frac{d^2}{dy^2} \phi_n(y) \right] + [V_c(y) + V(x, y)] \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \phi_n(y) \\ & = E \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \phi_n(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(y) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x, y) \right] \psi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy^2} + V_c(y) \right] \phi_n(y) \\ & = E \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \phi_n(y) \end{aligned}$$

از طرفی می دانیم :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy^2} + V_c(y) \right] \phi_n(y) = E_n \phi_n(y)$$

بنابراین :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(y) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x, y) \right] \psi_n(x) + E_n \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \phi_n(y) = E \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \phi_n(y)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(y) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x, y) \right] \psi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (E - E_n) \psi_n(x) \phi_n(y)$$

با توجه به اینکه $\phi_n(y)$ در محدوده $0 < y < W$ پایه می باشد ، بنابراین می توان از پایه های دوگان آن استفاده کرد و گفت :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(y) \phi_n(y)^* \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x, y) \right] \psi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (E - E_n) \psi_n(x) \phi_n(y) \phi_n(y)^*$$

$$\int_0^W dy \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(y) \phi_n(y)^* \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x, y) \right] \psi_n(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (E - E_n) \psi_n(x) \int_0^W dy \phi_n(y) \phi_n(y)^*$$

و بنابراین :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^W \phi_n(y) V(x, y) \phi_n(y)^* dy \right] \psi_n(x) = (E - E_n) \psi_n(x) \quad (17)$$

حال با توجه به معادله ی به دست آمده ی ۱۷ متوجه می شویم که به صورت عمومی نمی توان آن را حل کرد اما با استفاده از تقریب هایی می توان تغییری در معادله به وجود آورد که به توان آن را حل کرد . بنابراین می توان این گونه فرض کرد که به دلیل کوچک بودن طول دیواره ی پتانسیل نسبت به طول موج الکترون ، پتانسیل $V(x, y)$ را به صورت

$$V_{nn'} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^W \phi_n(y) V(x, y) \phi_n'(y)^* dy = -\frac{\hbar^2}{2m} v_{nn'} \delta(x)$$

نوشت [۶] . دقت کنید که متغیر $V_{nn'}$ در واقع عنصر ماتریس V است ، زیرا

$$V_{nn'} = \langle \phi_n(y) | V(x, y) | \phi_n'(y) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^W \phi_n(y) V(x, y) \phi_n'(y)^* dy$$

حال با تمام این تفاسیر ، برای حل معادله ی ۱۷ ابتدا باید شرایط مرزی سیستم را بر روی توابع موج اعمال کرد . با توجه به اینکه مرز ما در $x = 0$ است خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \psi_n(0^+) = \psi_n(0^-) \\ \psi_n'(0^+) - \psi_n'(0^-) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} V_{nn'} \delta(x) \psi_n(x) dx = -2 \sum_{n'=1}^{\infty} v_{nn'} \psi_n'(0^{\pm}) \end{cases} \quad (18)$$

حال به حل معادله ی شرودینگر ۱۷ می پردازیم . ابتدا به این نکته اشاره کنیم که انرژی مورد نظر ما در محدوده ی $E_1 < E < E_2$ می باشد . با توجه به این نکته می توان گفت تابع موج تراز اول ، با برخورد به پتانسیل جاذب ، دچار بازتاب می شود ولی برای تابع موج تراز دوم این گونه نیست و بدون هیچ اثری به راه خودش ادامه می دهد و با این تفسیر ، می توان توابع موج را به صورت زیر نوشت :

$$\psi_1(x) = \begin{cases} a_1 e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x} , & x < 0 , \quad k_1 = \frac{\sqrt{2m(E-E_1)}}{\hbar} \\ c_1 e^{ik_1 x} , & x > 0 \end{cases} \quad (۱۹)$$

و

$$\psi_2(x) = \begin{cases} b_2 e^{|k_2|x} , & x < 0 , \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E_2-E)}}{\hbar} \\ c_2 e^{-|k_2|x} , & x > 0 \end{cases} \quad (۲۰)$$

با توجه به این دو تابع موج درمی یابیم که پتانسیل جاذب یا همان (qunatum dot) نقش ترکیب کردن این دو تابع موج را قبل و بعد از تحت تاثیر قرار دادن بازی می کند و به نوعی بعد از تاثیر قرار دادن موج اولیه ، دو موج تشکیل شده با هم تداخل می کنند که به نوعی انگار جفت شدگی ای مانند نوسانگرهای کلاسیکی بخش قبل دارند .

حال شرایط مرزی ۱۸ را برای توابع موج ۱۹ و ۲۰ اعمال می کنیم . بنابراین خواهیم داشت :

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = c_1 , \quad b_2 = c_2 \\ ik_1 c_1 - ik_1(a_1 - b_1) = -2(v_{11}c_1 + v_{12}c_2) \Rightarrow (ik_1 + v_{11})c_1 + v_{12}c_2 = ik_1 a_1 \\ -|k_2|(c_2 - b_2) = -2[v_{12}c_1 + (-|k_2| + v_{22})c_2] \Rightarrow v_{12}c_1 + (-|k_2| + v_{22})c_2 = 0 \end{cases}$$

حال برای به دست آوردن ضرایب c_1 , c_2 می توان از ماتریس پراکندگی [۶] استفاده کرد و نوشت :

$$[-2i\mathbf{K} + \mathbf{V}]\mathbf{T} = -2i\mathbf{K}$$

که در آن ، \mathbf{K} ماتریس قطری دارای عناصر بردار موج $K_{mn} = k_m \delta_{mn} = (E - E_m)^{1/2} \delta_{mn}$ ، ماتریس \mathbf{V} ، ماتریس پتانسیل و ماتریس \mathbf{T} ، ماتریس ضرایب عبور می باشد . بنابراین خواهیم داشت :

$$\begin{pmatrix} ik_1 + v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & -|k_2| + v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ik_1 a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ik_1 + v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & -|k_2| + v_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} ik_1 a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

که خواهیم داشت :

$$c_1 = \frac{ik_1(-|k_2| + v_{22})}{(ik_1 + v_{11})(-|k_2| + v_{22}) - v_{12}^2} a_1$$

$$c_2 = -\frac{ik_1 v_{12}}{(ik_1 + v_{11})(-|k_2| + v_{22}) - v_{12}^2} a_1$$

با کمی دقت متوجه می شویم عبارات بالا، شبیه معادلات ۵ می باشند و به گونه ای هم ارزی بین حالت کلاسیکی و کوانتومی در دامنه ها دارند زیرا به نظرم در این سیستم کوانتومی، اعمال پتانسیل جاذب باعث این شده است که بعد عبور موج اولیه از این پتانسیل، دو موج در اختیار داشته باشیم که با استفاده از شرایط مرزی با هم جفت شدگی دارند و به نوعی، ذاتی مانند دو نوسانگر جفت شده کلاسیکی عمل کنند.

حال ضرایب عبور و بازتاب را برای تراز اول به دست می آوریم:

$$t_{11} = \frac{c_1}{a_1} = \frac{ik_1(-|k_2| + v_{22})}{(ik_1 + v_{11})(-|k_2| + v_{22}) - v_{12}^2} \quad (21)$$

$$r_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{-v_{11}(-|k_2| + v_{22}) + v_{12}^2}{(ik_1 + v_{11})(-|k_2| + v_{22}) - v_{12}^2} \quad (22)$$

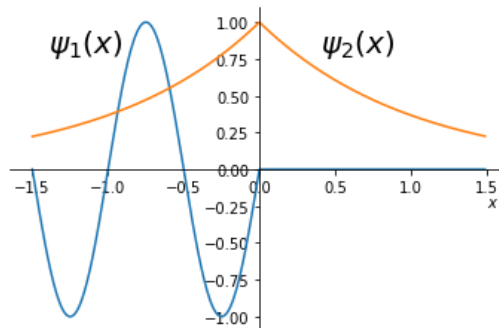
حال به بررسی حالت های ضرایب عبور و بازتاب بالا برای تراز اول می پردازیم.

در معادله ی ۲۱ عبارت $-|k_2| + v_{22}$ برابر با صفر شود، آنگاه ضرایب عبور و بازتاب به ترتیب برابر با صفر و -1 می باشد و این اتفاق به این معنی است که موج اولیه بعد از برخورد به تیغه (پتانسیل جاذب)، از آن نمی تواند عبور کند و به طور ناگهانی انرژی آن به صفر می رسد؛ دقت کنید که این پدیده فقط برای تراز اول رخ می دهد زیرا شرطی که برای پتانسیل جاذب در نظر گرفتیم این بود که انرژی آن بین محدوده ی $E_1 < E < E_2$ می باشد و بنابراین همانطور که در توابع موج بالا دیدیم، تابع موج تراز اول تحت تاثیر قرار می گیرد.

بنابراین اگر موج اولیه در تراز اول نتواند از پتانسیل جاذب عبور کند، خواهیم داشت $-|k_2| + v_{22} = 0$ که در واقع انرژی صفر (E_{zero}) را می توان از این شرط به دست آورد که به صورت زیر می باشد:

$$E_{zero} = E_2 - \frac{\hbar^2 v_{22}^2}{2m} \quad (23)$$

در واقع در این انرژی، موج نمی تواند از پتانسیل جاذب عبور کند. به این منظور نمودار تابع موج تراز اول و دوم را در شرایطی که موج اولیه در تراز اول نمی تواند از پتانسیل جاذب عبور کند را در شکل زیر رسم کرده ایم:



شکل ۱۸: در زمانی که $t_{11} = 0$ ، تابع موج تراز اول همانطور که مشاهده می کنید، عبور نمی کند.

حال اگر $-v_{11}(-|k_2| + v_{22}) + v_{12}^2 = 0$ ، آنگاه بنا به تفسیر قبل می توان گفت که تمام موج اولیه از تیغه (یا پتانسیل جاذب) عبور می کند و به نوعی تیغه شفاف می باشد و هیچ بازتابی نخواهد داشت ($r_{11} = 0$) .

در این شرایط انرژی تیغه به حداکثر مقدار خود می رسد و برابر می شود با :

$$E_{max} = E_2 - \frac{\hbar^2}{2m}(v_{22} - \frac{v_{12}^2}{v_{11}})^2 \quad (24)$$

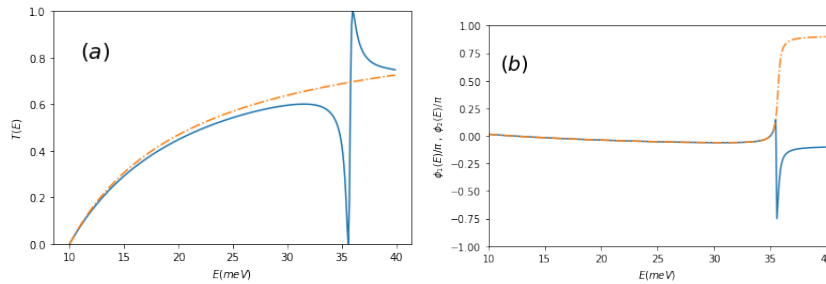
حال با توجه به عبارات به دست آمده با توجه به داده های مقاله [۳] ، که به صورت

$$W = 23.7nm , m(GaAs) = 0.067m_0 , E_1 = 10meV , E_2 = 40meV$$

$$Y_s = 0.55W , W_s = 0.5W , a_s V_s = 0.1eVnm , V_s = 100meV$$

$$\frac{\hbar^2 v_{11}^2}{2m} = 11.33meV , \frac{\hbar^2 v_{22}^2}{2m} = 4.40meV , \frac{\hbar^2 v_{12}^2}{2m} = 0.34meV$$

می باشد نمودارهای زیر را رسم کرده ایم .

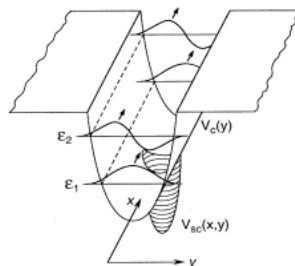


شکل ۱۹: در شکل (a) تشدید فانو برای ضریب عبور در حالت کوانتومی را مشاهده می کنید (منحنی توپر) که اگر پتانسیل جاذب در مرکز باشد ، منحنی خط چین می باشد. شکل (b) فاز موج های اولیه و ثانویه را نمایش می دهد.

با توجه به نمودار (a) مشاهده می کنیم که ساختار تشدید فانو (خط پررنگ) در $E_{zero} = 35.60meV$ به یک باره سقوط کرده و ناگهان در $E_R = 36.01meV$ به پیک خود بر می گردد . با توجه به داده های بالا ، دریافتیم که اگر پتانسیل جاذب در مرکز دستگاه مختصات واقع شود که ماتریس پتانسیل قطری شود آنگاه به تبع $v_{12} = v_{21} = 0$ و در این زمان طبق نمودار (a) ، منحنی خط چین تشکیل می شود .

در نمودار (b) رفتار فاز ها برای زمانی که موج از پتانسیل جاذب عبور کرده اند را نسبت به موج اولیه نشان می دهد . فاز موج اول بعد از عبور از نقطه ی ضد تشدید به حالت قبلی خود بر نمی گردد و با اختلاف کمی به حالت تعادل می رسد و در طرف دیگر همانطور که در نمودار (b) مشاهده می کنید ، موج دوم بعد از عبور از پتانسیل جاذب (ضد تشدید) ، به فاز π می رسد .

برای درک سه بعدی شکل ۱۷ ، به شکل زیر دقت کنید



شکل ۲۰: شکل سه بعدی فرآیند موجبر الکتریکی و تاثیر پتانسیل ها

۳ نتیجه گیری

حل تحلیلی برای N نوسانگر جفت شده با توجه به یکسان بودن جرم ها و ثوابت فنر ارائه شد و برای دو نوسانگر جفت شده با استفاده از حل عددی، نمودارهایی رسم شد که حل تحلیلی ارائه شده را تصدیق می کرد و با استفاده از آن ها، پدیده ی ضد تشدید (Anti-Resonance) را بررسی کردیم که به طور مثال اگر به نوسانگر j ام، نیروی وادارنده وارد شود، فرکانس های ضد تشدید چه مقدار هایی خواهند داشت و اگر به نوسانگر اول نیروی وادارنده وارد شود با توجه به تقارن، آخرین نوسانگر تحت پدیده ی ضد تشدید قرار نخواهد گرفت. متد ها و تکنیک هایی به صورت تجربی وجود دارد که در رفرنس [۴] آورده شده است.

در ادامه به بحث تشدید فانو و مرتبط شدن بحث تشدید و ضدتشدید نوسانگرهای جفت شده به حالت کوانتومی پرداخته شد و به این مهم دست یافتیم که فرمول فانو رو از حالت کلاسیکی به دست آوردیم و در حالت کوانتومی با استفاده از پتانسیل جاذب امواج اولیه را مختل کردیم و با استفاده از تداخل امواج عبوری و بازتابی، نمودارهای ضرایب عبور و فازهای امواج را رسم کردیم که این منحنی ها در انرژی صفر (E_{zero}) دچار ضد تشدید می شوند که به نوعی هم ارز با فرکانس ضدتشدید در حالت کلاسیکی است.

References

- [۱] Somayyeh Belbasi ، M.Ebrahim Foulaadvand ، Yong S.Joe Am. J. Phys ، ۸۲ ۳۲ (۲۰۱۴)
- [۲] میثم حسن دوست ، بررسی $N \geq 2$ نوسانگر جفت شده
- [۳] Yong S Joe، Arkady M Satanin ، Chang Sub Kim Yong S Joe et al ۲۰۰۶ Phys. Scr. ۷۴ ۲۵۹
- [۴] R. Givens، O. F. de Alcantara Bonfim، and R. B. Ormond، "Direct observation of normal modes in coupled oscillators،" Am. J. Phys. ، ۷۱ ۹۰-۸۷ .(۲۰۰۳)
- [۵] Masatomi Iizawa ، Satoshi Kosugi ، Fumihiro Koike ، Yoshiro Azuma،arXiv:۱۸۱۰...۰۶۲۷

[९] Erkan Tekman , Philip F. Bagwell ,Phys.Rev.B ॲ९. ॷॡ