بررسی ابرتقارن در معادله ی دیراک

میثم حسن دوست

پروژه کارشناسی

استاد راهنما : دکتر سادات گوشه

۱۰ مرداد ۱۴۰۲

فهرست مطالب

۱ مقدمه ۳

۲ ابرتقارن برای معادله ی شرودینگر ۳

۳ ابرتقارن برای معادله ی دیراک ۶

۴ ابرتقارن برای معادله ی دیراک در فضا-زمان FRW ۱۰

۵ نتایج ۱۵

۱ مقدمه

ابرتقارن (SUSY) به عنوان پاسخی به تلاش‌های فیزیکدانان برای به دست آوردن توصیفی یکپارچه از همه برهمکنش‌های اساسی طبیعت پدید آمد. SUSY درجات آزادی بوزونی و فرمیونی را با ترکیب آنها در میدان‌های ابری مرتبط می‌کند که توصیف ظریف‌تری از طبیعت ارائه می‌دهد. جبر درگیر در SUSY یک جبر لی درجه بندی شده است که تحت ترکیبی از روابط جابجایی و پاد جابجایی بسته می شود. در اینجا می توان به این نکته اشاره کرد که تاکنون هیچ شواهد تجربی مبنی بر تحقق SUSY در طبیعت وجود نداشته است.

هنگامی که مردم شروع به مطالعه های جنبه های مختلف مکانیک کوانتومی ابرتقارن (SUSY QM) کردند ، مشخص شد که این زمینه در نوع خود جالب است . در واقع این زمینه به ما کمک می کند که با استفاده از روابط جبری ، سیستم های جفت شده ای بسازیم و با به دست آوردن توابع موج و ترازهای انرژی یک سیستم ، به حل تحلیلی تمامی مشخصات سیستم دیگر بپردازیم ، این روش به ما کمک می کند که سیستم هایی که دارای پتانسیل های پیچیده است را بدون اینکه روش مستقیمی برای حل آن به کار بگیریم ، به صورت غیر مستقیم از طریق سیستم جفت شده اش حل کنیم که در نوع خود جالب است .

۲ ابرتقارن برای معادله ی شرودینگر

در ابتدا از هامیلتونی کواتومی یک ذره شروع می کنیم ($c = \hbar = 2m = 1$)

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x)$$

حال برای حالت پایه ی این سیستم ($E = 0$) داریم

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_0 + V_1(x)\psi_0 = 0$$

بنابراین داریم

$$V_1(x) = \frac{\psi_0''}{\psi_0}$$

که با استفاده از پتانسیل می توانیم تابع موج حالت پایه را به دست آوریم .

حال دو عملگر A و $A^\dagger$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$A = \frac{d}{dx} + W(x) \ , \ A^\dagger = -\frac{d}{dx} + W(x) \tag{۱}$$

که در آن $W(x)$ را $Superpotential$ می گویند . حال هامیلتونی گفته شده را می توان با استفاده از عملگرهای فوق به صورت زیر نوشت

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) = A^\dagger A$$

که در این صورت ، پتانسیل بر حسب $W(x)$ به شکل

$$V_1(x) = W^2(x) - W'(x) \tag{۲}$$

می باشد .
معادله ی ۲ یک معادله ی دیفرانسیلی ریکاتی می باشد و جواب این معادله برای حالت پایه به صورت زیر است

$$W(x) = -\frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)}$$

حال در قدم بعد ما یک هامیلتونی ثانویه ای از طریق عملگرهای تعریف شده ، می سازیم که پتانسیل این سیستم به صورت زیر می باشد

$$H_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) = AA^\dagger \ \ , \ \ V_2(x) = W^2(x) + W'(x) \tag{۳}$$

که در واقع ابرتقارن بین دو سیستم H_1 و H_2 ایجاد کردیم . حال به دنبال یاقتن تقارن بین ویژه مقادیر و ویژه حالت های دو سیستم هستیم ؛ برای این کار ابتدا داریم

$$AH_1 = H_2A \ \ , \ \ H_1A^\dagger = A^\dagger H_2 \tag{۴}$$

سپس

$$\begin{aligned} &H_1\psi_n^1 = A^\dagger A\psi_n^1 = E_n^1\psi_n^1 \\ &AH_1\psi_n^1 = H_2A\psi_n^1 = E_n^1(A\psi_n^1) \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به اینکه حالت پایه هامیلتونی اول صفر می باشد ، داریم

$$E_n^2 = E_{n+1}^1 \ \ , \ \ E_0^1 = 0 \tag{۵}$$

$$\psi_n^2 = [E_{n+1}^1]^{-1/2}A\psi_{n+1}^1 \tag{۶}$$

$$\psi_{n+1}^1 = [E_n^2]^{-1/2}A^\dagger\psi_n^2 \tag{۷}$$

حال به عنوان مثال ، فرض گنید سیستم چاه مربعی با پتانسیل بی نهایت داریم

$$\begin{aligned} V(x) = \ & \ 0 \ , \ 0 \le x \le L, \\ & = \infty \ , \ otherwise \end{aligned}$$

می دانیم تابع موج حالت پایه برای این سیستم به صورت

$$\psi_0^1 = (\frac{2}{L})^{1/2}\sin(\frac{\pi x}{L})$$

و تراز انرژی در این حالت

$$E_0 = \frac{\pi^2}{L^2}$$

حال با توجه به ساختمان بندی ابرتقارن ، باید حالت پایه ی یک سیستم دارای تراز صفر باشد ، در این صورت باید داشته باشیم ، $H_1 = H - E_0$ ، و بدین ترتیب تراز های انرژی سیستم اول برابر با

$$E_n^1 = \frac{n(n+2)\pi^2}{L^2}$$

می باشد و توابع موج برای این سیستم به صورت زیر است

$$\psi_n^1 = (\frac{2}{L})^{1/2} \sin(\frac{(n+1)\pi x}{L})$$

حال $W(x)$ ، $Superpotential$ ، به فرم زیر تبدیل می شود

$$W(x) = -\frac{\pi}{L} \cot(\pi x/L)$$

حال با توجه به عبارت ۴ ، پتانسیل سیستم دوم را می توانیم به دست آوریم که به صورت زیر می باشد

$$V_2(x) = \frac{\pi^2}{L^2}[2cosec^2(\frac{\pi x}{L}) - 1]$$

توابع موج این سیستم از عبارت های ۶ ، ۷ حاصل می شود . برای نمونه ، توابع موج حالت پایه و اولین حالت برانگیخته سیستم دوم به صورت زیر می باشد

$$\psi_0^2 = -2\sqrt{\frac{2}{3L}} \sin^2(\frac{\pi x}{L})$$
$$\psi_1^2 = -\frac{2}{\sqrt{L}} \sin(\frac{\pi x}{L}) \sin(\frac{2\pi x}{L})$$

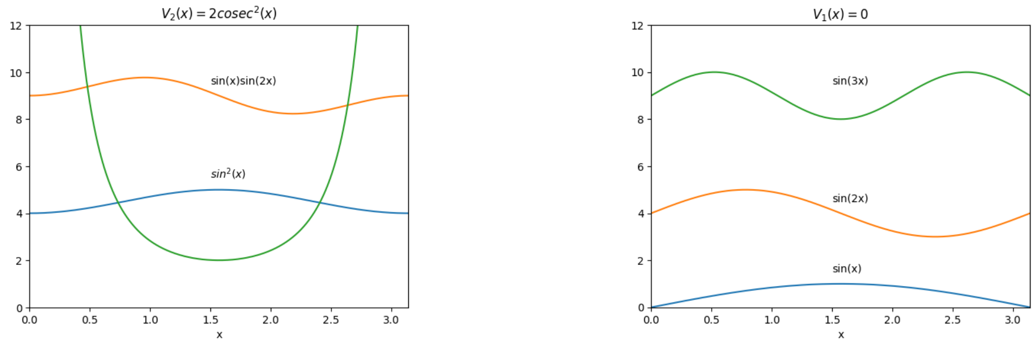
بنابراین با استفاده از ابرتقارن نشان دادیم سیستم هایی که دارای پتانسیل

$$V_{p+1}(x) = \frac{\pi^2}{2mL^2}[p(p+1)cosec^2(\frac{\pi x}{L}) - p^2]$$

می باشند ، توابع موج در حالت پایه زیر را در اختیار دارند

$$\psi_0^{p+1} \propto \sin^{p+1}(\frac{\pi x}{L})$$

و در واقع ابرتقارن ، حل تحلیلی برای سیستم هایی که دارای پتانسیل های پیچیده هستند را ارائه می دهد
.



شکل ۱: چاه پتانسیل بینهایت و پتانسیل $2cosec^2(x)$

۳ ابرتقارن برای معادله ی دیراک

حال می خواهیم از روش ابرتقارن در مکانیک کوانتومی استفاده کنیم و برای معادله ی شرودینگر نسبیتی که به همان معادله ی دیراک است پیاده سازی کنیم . برای این کار ابتدا به تعاریف اولیه برای معادله ی دیراک می پردازیم ؛ معادله ی دیراک به فرم زیر می باشد

$$i\gamma^\mu(x)(\partial_\mu + im)\psi = 0$$

که در آن γ^μ ماتریس های 4×4 دیراک می باشد و این ماتریس های ویژگی پاد جابجایی زیر را دارا می باشند

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_{4\times4}$$

که در آن $g^{\mu\nu}$ متریک مینکوفسکی

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

می باشد و از طرفی خود ماتریس های دیراک را می توان برحسب ماتریس های پاولی به صورت زیر نوشت

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i = -\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_{i]} & 0 \end{pmatrix}$$

حال ما به بررسی معادله ی دیراک در یک میدان اسکالر لورنتز $1+1$ بعد می پردازیم . برای این کار ابتدا فرض می کنیم

$$m \to m + \phi(x) = \phi(x)$$

که $\phi(x)$ میدان اسکالر می باشد . حال با استفاده از معادله ی دیراک داریم

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x,t)-\phi(x)\psi(x,t)=0$$

از فرم معادله ی بالا می توان استفاده کرد و جواب عمومی معادله ی دیفرانسیل فوق را به صورت زیر بیان کرد

$$\psi(x,t)=exp(-i\omega t)\psi(x)$$

و با جایگذاری خواهیم داشت

$$\gamma^0\omega\psi(x)+i\gamma^1\frac{d}{dx}\psi(x)-\phi(x)\psi(x)=0$$

حال با توجه به اینکه در $1+1$ بعد هستیم ، ماتریس های دیراک می توانند به شکل زیر تقلیل پیدا کنند

$$\gamma^0=\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\ \ ,\ \ \gamma^1=-\gamma_1=i\sigma_3=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix} \tag{۸}$$

و با توجه به اینکه جواب های معادله دیراک ، جواب دو اسپینور آن است می توان تابع موج را به دو تابع موج جداسازی کنیم و داشته باشیم

$$\psi(x)=\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\\psi_2(x)\end{pmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{pmatrix}-\frac{d}{dx}-\phi(x)&\omega\\\omega&\frac{d}{dx}-\phi(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\\psi_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

که بدین ترتیب دستگاه معادلات زیر را در اختیار داریم

$$\left[\frac{d}{dx}+\phi(x)\right]\psi_1(x)=\omega\psi_2(x)$$
$$\left[-\frac{d}{dx}+\phi(x)\right]\psi_2(x)=\omega\psi_1(x)$$

که بدین ترتیب عملگر های سازنده ی ابرتقارن های ، یعنی ، A و $A^\dagger$ را می توان به صورت زیر تعریف کرد

$$A=\frac{d}{dx}+\phi(x)\ \ ,\ \ A^\dagger=-\frac{d}{dx}+\phi(x) \tag{۹}$$

و

$$A\psi_1(x) = \omega\psi_2(x) \qquad (۱۰)$$

$$A^\dagger\psi_2(x) = \omega\psi_1(x) \qquad (۱۱)$$

بنابراین داریم

$$A^\dagger A\psi_1(x) = \omega^2\psi_1(x) \ \ , \ \ AA^\dagger\psi_2(x) = \omega^2\psi_2(x) \qquad (۱۲)$$

که در اینجا میدان اسکالر ، $\phi(x)$، نقش $W(x)$ را بازی می کند و با انتخاب $W(x)$ می توانیم معادلات فوق را حل کنیم در این صورت ، پتانسیل ها به صورت زیر می باشند

$$V_{1,2}(x) = \phi^2(x) \mp \phi^{'}(x)$$

. به طور مثال فرض کنید میدان اسکالر

$$\phi(x) = B\coth(\alpha x)$$

در اختیار داریم . در این صورت می دانیم توابع موج ، تراز های انرژی و پتانسیل برای سیستم اول به صورت زیر می باشد [۱]

$$\begin{aligned}
&V_1(x) = B^2 + (B^2 + B\alpha)cosech^2\alpha x \\
&E_n^1 = B^2 - (B - n\alpha)^2 \\
&\psi_n^1(x) = (y^2-1)^{-s/2}P_n^{(-s-1/2,-s-1/2)}(y) \\
&y = \cosh\alpha x \ \ , \ \ s = \frac{A}{\alpha}
\end{aligned}$$

حال با استفاده از عبارت های ۹ و ۱۲ خواهیم داشت

$$A = \frac{d}{dx} + B\coth(\alpha x) \ \ , \ \ A^\dagger = -\frac{d}{dx} + B\coth(\alpha x)$$

و

$$\begin{aligned}
A^\dagger A\psi_1(x) &= \left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x)\right]\psi_n^1(x) = E_n^1\psi_n^1(x) = \omega^2\psi_n^1(x) \\
AA^\dagger\psi_n^2(x) &= \left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x)\right]\psi_n^2(x) = E_n^2\psi_n^2(x) = \omega^2\psi_n^2(x)
\end{aligned}$$

بدین ترتیب برای سیستم دوم داریم

$$\begin{aligned}
&V_2(x) = B^2 + (B^2 - B\alpha)cosech^2\alpha x \\
&E_n^1 = B^2 - (B - n\alpha)^2 \\
&\psi_n^2(x) = A\psi_n^1(x) = \left[\frac{d}{dx} + B\coth(\alpha x)\right](y^2-1)^{-s/2}P_n^{(-s-1/2,-s-1/2)}(y) \\
&y = \cosh\alpha x \ \ , \ \ s = \frac{A}{\alpha}
\end{aligned}$$

حال برای محاسبه ی تابع موج سیستم دوم ، ابتدا از مشتق گیری از چندجمله ای ژاکوبی شروع می کنیم که در حالت کلی به صورت زیر می باشد

$$\frac{d^k}{dx^k}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1+k)}{2^k\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}P_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(x) \qquad (۱۳)$$

که به ازای $k = 1$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}P_n^{(-s-1/2,-s-1/2)}(y) &= -\frac{2s-n}{2}P_n^{(-s+1/2,-s+1/2)}(y)\frac{dy}{dx}\\ &= -\frac{2s-n}{2}\alpha\sinh(ax)P_n^{(-s+1/2,-s+1/2)}(y)\end{aligned}$$

در این صورت تابع موج به شکل زیر در می آید

$$\begin{aligned}\psi_n^2(x) = (y^2-1)^{-s/2}\Big[&B(1+\coth(\alpha x))P_n^{(-s-1/2,-s-1/2)}(y)\\ &-\frac{2B-n\alpha}{2}\sinh(ax)P_n^{(-s+1/2,-s+1/2)}(y)\Big]\end{aligned}$$

و از طرفی

$$\omega_n = \pm[B^2-(B-n\alpha)^2]^{1/2}$$

بنابراین با استفاده از روش ابرتقارن ، جواب معادله ی دیراک برای میدان اسکالر $\phi(x) = B\coth(\alpha x)$ برابر است با

$$\psi_n(x) = \begin{pmatrix} exp(-i\omega_n^1 t)\psi_n^1(x)\\ exp(-i\omega_n^2 t)\psi_n^2(x)\end{pmatrix}$$

که در آن

$$\begin{aligned}&\psi_n^1(x) = (y^2-1)^{-s/2}P_n^{(-s-1/2,-s-1/2)}(y)\\ &\psi_n^2(x) = (y^2-1)^{-s/2}\Big[B(1+\coth(\alpha x))P_n^{(-s-1/2,-s-1/2)}(y)\\ &-\frac{2B-n\alpha}{2}\sinh(ax)P_n^{(-s+1/2,-s+1/2)}(y)\Big]\\ &\omega_n^{1,2} = \pm[B^2-(B-n\alpha)^2]^{1/2}\\ &y = \cosh\alpha x \quad , \quad s = \frac{A}{\alpha}\end{aligned}$$

۴ ابرتقارن برای معادله ی دیراک در فضا-زمان FRW

تا اینجا ابرتقارن را برای معادله ی شرودینگر و معادله ی دیراک به کار بردیم و دیدیم که می توانیم در هر شرایطی از ابرتقارن در مکانیک کوانتومی برای حل معادلات شرودینگر و دیراک استفاده کنیم . حال سوالی که پیش می آید این است که آیا می توان برای معادله ی دیراک در منحنی فضا-زمان ، ابرتقارن مکانیک کوانتومی $SUSY$ را ایجاد کرد و با استفاده از آن به حل معادلات پرداخت یا خیر؟
ما از متریک FRW برای بررسی این کار استفاده می کنیم . این متریک به صورت زیر می باشد

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[\frac{dr^2}{\sqrt{1-kr^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2]$$

که در آن k انحنای فضا زمان ما را مشخص می کند که یکی از سه حالت $(1, 0, -1)$ می باشد و $a(t)$ پارامتر مقیاس مدل ما می باشد که برای راحتی ما در $1+1$ بعد بررسی می کنیم .
حال از معادله ی دیراک برای فضا-زمان FRW داریم

$$i\gamma^\mu(x)(\partial_\mu - \Gamma_\mu(x) + im)\psi = 0 \tag{۱۴}$$

که در آن $\gamma^\mu(x)$ ماتریس های دیراک وابسته به منحنی هستند و $\Gamma_\mu(x)$ ، $SpinConnection$ ، می باشند که هر دو از روابط زیر به دست می آید

$$\gamma^\mu(x) = e^\nu_\mu \gamma^\nu \quad , \quad \Gamma_\mu(x) = \frac{1}{4} g_{\lambda\rho}(e^a_{\nu,\mu} e^\rho_a - \Gamma^\rho_{\nu\mu}) S^{\lambda\nu}$$

که

$$S^{\lambda\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\lambda(x), \gamma^\nu(x)]$$

حال در این متریک داریم

$$\gamma^0(x) = \gamma_0 \quad , \quad \gamma^1(x) = -\frac{\sqrt{1-kr^2}}{a(t)}\gamma_1 \tag{۱۵}$$

$$\Gamma_0(x) = 0 \quad , \quad \Gamma_1(x) = \frac{\dot{a}(t)}{2\sqrt{1-kr^2}}\gamma_0\gamma_1 \tag{۱۶}$$

حال با جایگذاری آن در معادله ی دیراک ۱۴ داریم

$$\left[\gamma_0(\partial_t + \frac{\dot{a}(t)}{2a(t)}) - \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a(t)}\gamma_1\partial_r + imI\right]\psi = 0$$

حال مانند بخش قبل چون در $1+1$ بعد بررسی می کنیم ، ماتریس های دیراک مانند ۸ تبدیل می شوند و فرم ماتریسی معادله به صورت زیر می شوند

$$\begin{pmatrix} i\frac{\sqrt{1-kr^2}}{a(t)}\partial_r + im & \partial_t + \frac{\dot{a}(t)}{2a(t)} \\ \partial_t + \frac{\dot{a}(t)}{2a(t)} & -i\frac{\sqrt{1-kr^2}}{a(t)}\partial_r + im \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(r,t) \\ \psi_2(r,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

بنابراین

$$i[\frac{\sqrt{1-kr^2}}{a(t)}\partial_r + m]\psi_1(r,t) + (\partial_t + \frac{\dot{a}(t)}{2a(t)})\psi_2(r,t) = 0$$
$$i[-\frac{\sqrt{1-kr^2}}{a(t)}\partial_r + m]\psi_2(r,t) + (\partial_t + \frac{\dot{a}(t)}{2a(t)})\psi_1(r,t) = 0$$

حال با استفاده از روش جداسازی متغیرها می توان نوشت

$$\psi_1(r,t) = T_1(t)\psi_1(r) \quad , \quad \psi_2(r,t) = T_2(t)\psi_2(r)$$

و بدین ترتیب برای بخش زمانی خواهیم داشت

$$i\omega_1 T_1(t) = -(\partial_t + \frac{\dot{a}(t)}{2a(t)})T_2(t)$$
$$i\omega_2 T_2(t) = -(\partial_t + \frac{\dot{a}(t)}{2a(t)})T_1(t)$$

و برای بخش شعاعی داریم

$$[\partial_r + \frac{ma(t)}{\sqrt{1-kr^2}}]\psi_1(r) = \frac{\omega_1 a(t)}{\sqrt{1-kr^2}}\psi_2(r)$$
$$[-\partial_r + \frac{ma(t)}{\sqrt{1-kr^2}}]\psi_2(r) = \frac{\omega_2 a(t)}{\sqrt{1-kr^2}}\psi_1(r)$$

بنابراین ابرتقارن به صورت زیر ظاهر می شود

$$A(r,t)\psi_1(r) = \omega_1^{'}\psi_2(r) \quad , \quad A = \partial_r + \frac{ma(t)}{\sqrt{1-kr^2}} \quad , \quad \omega_1^{'} = \frac{\omega_1 a(t)}{\sqrt{1-kr^2}} \qquad (۱۷)$$

$$A^{\dagger}(r,t)\psi_2(r) = \omega_2^{'}\psi_1(r) \quad , \quad A^{\dagger} = -\partial_r + \frac{ma(t)}{\sqrt{1-kr^2}} \quad , \quad \omega_2^{'} = \frac{\omega_2 a(t)}{\sqrt{1-kr^2}} \qquad (۱۸)$$

با توجه به عبارت های به دست آمده ، زمانی می توانیم ادعا کنیم که ابرتقارن مکانیک کوانتومی $(SUSYQM)$ برای حل معادله ی دیراک در فضا-زمان FRW صادق است که عملگرهای A و $A^{\dagger}$ تابعیت زمانی نداشته باشند و این یعنی پارامتر مقیاس، $a(t)$، ثابت باشد و به بیان دیگر ، کیهان ایستا باشد . در این حالت می توانیم بگوییم ابرتقارن مکانیک کوانتومی برای حل معادله صادق است ولی اگر کیهان از حالت ایستا خارج شود آنگاه ابرتقارن مکانیک کوانتومی شکسته می شود .
حال با پی بردن به این قضیه ، برای حالتی که کیهان ایستا باشد ، معادلات فریدمان را حل می کنیم و پارامتر مقایس را از آن به دست می آوریم و در معادلات ۱۷ و ۱۸ قرار می دهیم و جواب های معادله ی

دیراک را با استفاده از ابرتقارن مکانیک کوانتومی پیدا می کنیم . بنابراین از معادلات فریدمان خواهیم داشت

$$(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)})^2 = \frac{8\pi G\rho + \Lambda}{3} - \frac{k}{a^2(t)} \quad , \quad \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \qquad (۱۹)$$

با توجه به اینکه باید کیهان ایستا باشد ، بنابراین $\dot{a}(t) = 0$ و

$$a = \left[\frac{3k}{8\pi G\rho + \Lambda}\right]^{1/2} \qquad (۲۰)$$

بنابراین معادلات ۱۷ و ۱۸ به صورت زیر تبدیل می شوند

$$A(r)\psi_1(r) = \omega_1'\psi_2(r) \quad , \quad A = \partial_r + \frac{ma}{\sqrt{1-kr^2}} \quad , \quad \omega_1' = \frac{\omega_1 a}{\sqrt{1-kr^2}}$$
$$A^\dagger(r)\psi_2(r) = \omega_2'\psi_1(r) \quad , \quad A^\dagger = -\partial_r + \frac{ma}{\sqrt{1-kr^2}} \quad , \quad \omega_2' = \frac{\omega_2 a}{\sqrt{1-kr^2}}$$

که در آن a از معادله ی ۲۰ به دست می آید .
با تغییر متغیر

$$\psi_i(r) \rightarrow \frac{\psi_i(r)}{\sqrt{1-kr^2}}$$

معادلات به صورت ساده تر زیر درمی آیند

$$A(r)\psi_1(r) = \omega_1 a\psi_2(r) \quad , \quad A = \partial_r + \frac{ma}{\sqrt{1-kr^2}} \qquad (۲۱)$$

$$A^\dagger(r)\psi_2(r) = \omega_2 a\psi_1(r) \quad , \quad A^\dagger = -\partial_r + \frac{ma}{\sqrt{1-kr^2}} \qquad (۲۲)$$

که در آن $W(x)$ عبارت $\frac{ma}{\sqrt{1-kr^2}}$ می باشد.
بنابراین معادلات بخش زمانی و شعاعی برای ابرتقارن مکانیک کوانتومی به صورت زیر می باشند

$$i\omega_1 T_1(t) = -\partial_t T_2(t) \qquad (۲۳)$$

$$i\omega_2 T_2(t) = -\partial_t T_1(t) \qquad (۲۴)$$

$$A(r)\psi_1(r) = \omega_1 a\psi_2(r) \quad , \quad A = \partial_r + \frac{ma}{\sqrt{1-kr^2}} \qquad (۲۵)$$

$$A^\dagger(r)\psi_2(r) = \omega_2 a\psi_1(r) \quad , \quad A^\dagger = -\partial_r + \frac{ma}{\sqrt{1-kr^2}} \qquad (۲۶)$$

که در آن a از معادله ی ۲۰ به دست می آید که تابعیت صریح انحنا را در خود دارد (k) ؛ بنابراین اگر انحنای فضا-زمان ما صفر باشد (تخت یا $flat$) آنگاه ابرتقارن مکانیک کوانتومی وجود نخواهد داشت یا به بیانی دیگر اگر کیهان ما از انحناهای -1 یا $+1$ به انحنای تخت برگردد ، ابرتقارن ما شکسته می

شود .
حال اگر مانند بخش قبل یک میدان اسکالر لورنتز $1+1$ بعد درنظر بگیریم با تغییر متغیر زیر می توان معادلات فوق را به صورت زیر تبدیل کرد که برای ساختن ابرتقارن مکانیک کوانتومی عام تر است

$$m \to m + \phi(r) = \phi(r)$$

بنابراین معادلات ۲۳ تا ۲۶ به صورت زیر تبدیل می شوند

$$i\omega_1 T_1(t) = -\partial_t T_2(t) \tag{۲۷}$$

$$i\omega_2 T_2(t) = -\partial_t T_1(t) \tag{۲۸}$$

$$A(r)\psi_1(r) = \omega_1 a\psi_2(r) \ \ , \ \ A = \partial_r + \frac{\phi(r)a}{\sqrt{1-kr^2}} \tag{۲۹}$$

$$A^{\dagger}(r)\psi_2(r) = \omega_2 a\psi_1(r) \ \ , \ \ A^{\dagger} = -\partial_r + \frac{\phi(r)a}{\sqrt{1-kr^2}} \tag{۳۰}$$

حال با انتخاب میدان اسکالر $\phi(r)$ می توان از ابرتقارن ماکینک کوانتومی برای حل قسمت شعاعی معادله ی دیراک استفاده کرد . به طور مثال میدان اسکالر $\phi(r) = B\tanh(\alpha r)\sqrt{1-kr^2}$ را در نظر می گیریم .
معادلات ۲۷ و ۳۰ به صورت زیر تبدیل می شوند

$$\begin{aligned}
&i\omega T_1(t) = -\partial_t T_2(t)\\
&i\omega T_2(t) = -\partial_t T_1(t)\\
&A(r)\psi_1(r) = \omega a\psi_2(r) \ \ , \ \ A = \partial_r + B\tanh(\alpha r)a\\
&A^{\dagger}(r)\psi_2(r) = \omega a\psi_1(r) \ \ , \ \ A^{\dagger} = -\partial_r + B\tanh(\alpha r)a
\end{aligned}$$

با فرض اینکه $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.
بنابراین معادلات زمان به صورت زیر می شوند

$$T_1(t) = Aexp(-i\omega t) + Bexp(+i\omega t) \quad T_2(t) = Cexp(-i\omega t) + Dexp(+i\omega t)$$

که با توجه به این شرط مرزی که توابع موج باید در بینهایت ، متناهی شوند ، بنابراین $B, D = 0$ و

$$T_1(t) = Aexp(-i\omega t) \quad T_2(t) = Cexp(-i\omega t)$$

و معادلات شعاعی ، با استفاده از ابرتقارن مکانیک کوانتومی [۱] به شکل زیر در می آیند

$$\begin{aligned}
&W(r) = Ba\tanh(\alpha r)\\
&V_1(r) = (Ba)^2 - Ba(Ba+\alpha)sech^2(\alpha r)\\
&E_n^1 = \omega^2 = (Ba)^2 - (Ba - n\alpha)^2\\
&\psi_n^1(y) = i^n(1+y^2)^{-s/2}P_n^{-s-1/2,-s-1/2}(iy)\\
&y = sinh(\alpha r) \ \ , \ \ s = \frac{Ba}{\alpha}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\omega_n = \pm[(Ba)^2 - (Ba - n\alpha)]^{1/2}$$

و تابع موج سیستم دوم (ψ_n^2) برابر است با

$$\begin{aligned}\psi_n^2(y) &= \left[\frac{d}{dr} + Ba\tanh(\alpha r)\right]\psi_n^1(y)\\ &= \left[\frac{d}{dr} + Ba\tanh(\alpha r)\right] i^n(1+y^2)^{-s/2}P_n^{-s-1/2,-s-1/2}(iy)\\ &= i^n\left[\frac{d}{dr} + Ba\tanh(\alpha r)\right](1+y^2)^{-s/2}P_n^{-s-1/2,-s-1/2}(iy)\end{aligned}$$

که با استفاده از عبارت ۱۳ داریم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}P_n^{(-s-1/2,-s-1/2)}(y) &= -i\frac{2s-n}{2}P_n^{(-s+1/2,-s+1/2)}(y)\frac{dy}{dx}\\ &= -\frac{2s-n}{2}\alpha\cosh{(ax)}P_n^{(-s+1/2,-s+1/2)}(y)\end{aligned}$$

و بدین ترتیب

$$\begin{aligned}\psi_n^2(y) = i^n(y^2+1)^{-s/2}\Big[&Ba(1+\tanh(\alpha r))P_n^{(-s-1/2,-s-1/2)}(iy)\\ &- \frac{2Ba-n\alpha}{2}\cosh{(ax)}P_n^{(-s+1/2,-s+1/2)}(iy)\Big]\end{aligned}$$

بنابراین جواب معادله ی دیراک در فضا-زمان FRW با انحنای k در میدان اسکالر $\phi(r) = Batanh(\alpha r)$ به صورت زیر می باشد

$$\psi_n(x) = \begin{pmatrix} exp(-i\omega_n^1 t)\psi_n^1(x)\\ exp(-i\omega_n^2 t)\psi_n^2(x)\end{pmatrix}$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
&\psi_n^1(y) = i^n(1+y^2)^{-s/2} P_n^{-s-1/2,-s-1/2}(iy) \\
&\psi_n^2(y) = i^n(y^2+1)^{-s/2} \Bigg[Ba(1+\tanh(\alpha r)) P_n^{(-s-1/2,-s-1/2)}(iy) \\
&-\frac{2Ba-n\alpha}{2}\cosh{(ax)} P_n^{(-s+1/2,-s+1/2)}(iy) \Bigg] \\
&\omega_n^{1,2} = \pm[(Ba)^2-(Ba-n\alpha)]^{1/2} \\
&y = sinh(\alpha r) \ \ , \ \ s = \frac{Ba}{\alpha} \\
&a = \left[\frac{3k}{8\pi G\rho+\Lambda}\right]^{1/2}
\end{aligned}
$$

که با استفاده از انحنای فضا ، جواب مان تغییر خواهد کرد .

۵ نتایج

ابتدا به بررسی و یادآوری ابرتقارن در مکانیک کوانتومی و معادله ی شرودینگر پرداختیم و مثالی برای یک چاه پتانسیل مربعی بینهایت حل کردیم ، سپس به حل معادله ی دیراک در فضا-زمان مینکوفسکی از طریق ابرتقارن مکانیک کوانتومی پرداختیم و پس از واکاوی این روش برای این معادله به حل معادله ی دیراک بر روی یک میدان اسکالر پرداختیم .
پس از حل و صادق بودن ابرتقارن مکانیک کوانتومی ، سعی بر بررسی این زمینه برای معادله ی دیراک فضا-زمان FRW نمودیم . سوالی که از نظرم جالب می آمد این بود که آیا می شود برای هر پارامتر مقیاس و انحنایی از کیهان ، ابرتقارن مکانیک کوانتومی را سازمان بندی کرد که با بررسی بیشتر به این نتیجه رسیدیم که برای یک کیهان ایستا یا به بیان کیهان شناسان ، برای کیهان انیشتین ، فقط این پدیده صادق است و اگر کیهان از حالت ایستا خارج شود ، آنگاه ابرتقارن مکانیک کوانتومی شکسته می شود . سوال هایی که در آینده به بررسی آن ها می پردازم این است که آیا این ابرتقارن مکانیک کوانتومی را می توان از حالت ایستایی که برای معادلات شرودنیگر و دیراک حل کریدم را برای حالت غیر ایستا هم ایجاد کنیم و در واقع برای معادلات وابسته به زمان هم برقرار کنیم و اگر به توان این کار را انجام داد ، آنگاه شاید بتوان برای کیهان های غیر ایستا هم معادلات دیراک را از طریق ابرتقارن ها حل کرد و سوال دیگر هم این است که آیا می توان با اختلالی کوچک برای کیهان ایستا ، از ابرتقارن استفاده کرد و اتفاقاتی را که برای جواب های معادله ی دیراک می افتد را پیش بینی کرد یا خیر ؟!

مراجع

[1] F.Cooper , A.Khare , U.sukhatme , *Supersymmetry in Quantum Mechanics*

[2] Xin-Bing Huang , *Exact solutions of the Dirac equation in Robertson-Walker space-time*, https://arxiv.org/abs/gr-qc/0501077

[3] M.Bender , D.Mannheim , symmetry in relativistic quantum mechanics,arXiv:hep-th/1107.0501v1

[4] M.A.Wasay ,*Supersymmetric quantum mechanics and topology* , http://arxiv.org/abs/1603.07691v1

[5] V. K. Oikonomou ,*Hidden Supersymmetry in Dirac Fermion Quasinormal Modes of Black Holes* , https://arxiv.org/abs/1204.2395

[6] Ozlem Ye¸silta¸s , *Dirac Equation In The Curved Spacetime and Generalized Uncertainty Principle: A fundamental quantum mechanical approach with energy dependent potentials* , https://arxiv.org/abs/1904.07859

[7] Ö. Yeşiltaş , *Non-Hermitian Dirac Hamiltonian in three dimensional gravity and pseudo-supersymmetry* ,

[8] David J. Fernandez C , *Trends in supersymmetric quantum mechanics* , https://arxiv.org/abs/1811.06449

[9] Senan Sekhon , *Supersymmetric Quantum Mechanics: Light at the End of the (Quantum) Tunnel*, https://arxiv.org/abs/2203.14693

[10] S. Jalalzadeh, S. M. M. Rasouli, P. V. Moniz , *Shape Invariant Potentials in Supersymmetric Quantum Cosmology* , https://arxiv.org/abs/2206.00083

[11] N.D.Birrell , P.C.W.Davies ,*Quantum fields in curved space*

[12] Ashok Das ,*Quantum fields Theory*