باسمه تعالی

آزمون پایان‌ترم درس مکانیک کوانتمی ۳

۱۳۹۹/۱۰/۱۷

(چگالی) لاگرانژی

$$\mathscr{L}_0 = -\frac{1}{2}\partial_\mu h_{\nu\rho}\partial^\mu h^{\nu\rho}$$

را که در آن $h_{\mu\nu}(x)$ یک میدان تنسوری درفضازمان و $\mu,\nu,\rho = 0,1,2,3$ است، درنظر بگیرید.

۱- در حالت کلی تعداد تعداد پارامترهای مستقل $h_{\mu\nu}$ (در هر نقطهٔ فضازمان) چندتاست؟

۲- اگر $h_{\mu\nu}$ یک میدان تنسوری حقیقی باشد، تعداد پارامترهای مستقل آن چندتاست؟

۳- اگر $h_{\mu\nu}$ یک میدان حقیقی متقارن باشد، تعداد پارامترهای مستقل آن چندتاست؟

در ادامه، $h_{\mu\nu}$ را یک میدان تنسوری حقیقی متقارن فرض کنید.

۴- لاگرانژی $\mathscr{L}_0$ چه تقارن خارجی‌ای دارد؟ آیا این تقارن موضعی است یا جهانی؟

۵- لاگرانژی $\mathscr{L}_0$ چه تقارن داخلی‌ای دارد؟ آیا این تقارن موضعی است یا جهانی؟

۶- معادلهٔ حرکت را برای $h_{\mu\nu}(x)$ بدست آورید.

۷- جواب کلی معادلهٔ دیفرانسیل فوق را برای $h_{\mu\nu}(x)$ بنویسید.

در واقع، کلی‌ترین و ساده‌ترین (چگالی) لاگرانژی برای یک میدان تنسوری حقیقی متقارنِ مرتبهٔ ۲، از درجهٔ دومِ ∂h و ناوردا تحت تبدیلات لورنتس و

$$\text{(i)} \qquad h_{\mu\nu} \longrightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu$$

است ((تا سقف یک چهار-دیورژانس) که در آن X^μ هر میدان برداری دل‌خواهی می‌تواند باشد)، به شکل زیر است

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu h_{\nu\rho}\partial^\mu h^{\nu\rho} + \partial_\mu h_{\nu\rho}\partial^\nu h^{\mu\rho} - \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h + \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h$$

که در آن $h_{\mu\nu}$ یک میدان تنسوری متقارن حقیقی مرتبهٔ ۲، $h = h^\mu{}_\mu = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$، $\eta = diag(1,-1,-1,-1)$ متریک مینکووسکی و $\mu,\nu,\rho,\sigma,\delta = 0,1,2,3$ است. براساس این تقارن‌ها به‌علاوهٔ تقارن‌هایی دیگری نظیر اتحاد بیانکی (Bianchi identity) (که دانستن هیچ‌کدام در پاسخ به این سؤال اهمیتی ندارد)، می‌توان پیمانه‌هایی ثابت (fix) کرد که تحت آن‌ها

$$\text{(ii)} \qquad \partial_\mu h^{\mu\nu} = 0 \qquad \text{transverse gauge}$$ (پیمانهٔ عرضی)

$$\text{(iii)} \qquad h = 0 \qquad \text{traceless gauge}$$ (پیمانهٔ بدون ردّ)

همهٔ این‌ها باعث می‌شود معادلات حرکت $\mathscr{L}$، بعد از اعمال پیمانه‌های فوق، دقیقاً با معادلات حرکت $\mathscr{L}_0$ یکی شود و درضمن $h_{\mu\nu}$ فقط دو پارامتر مستقل داشته باشد که در یک دستگاه مختصات مناسب، که در آن انتشار موج متناظر در راستای محور $\hat{z}$ فرض می‌شود، به شکل

$$h_+ \propto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_\times \propto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

قابل نمایش هستند.

۸- میدان $h_{\mu\nu}$ چند قطبش (polarization) دارد؟

۹- تکانهٔ مزدوج این میدان را حساب کنید.

۱۰- همیلتونی این میدان را بدست آورید.

۱۱- جرم ذرهٔ متناظر با میدان را مشخص کنید.

۱۲- ترم برهم‌کنشی را مشخص کنید.

۱۳-ترم منبع را مشخص کنید.

۱۴-جابه‌جاگرهای هم‌زمان غیرصفر را بنویسید.

۱۵-سعی کنید $h_{\mu\nu}(x)$ را (به عنوان یک میدان کلاسیک) برحسب مُدها بسط دهید.

۱۶-با ارتقاء ضرایب بسط قسمت قبل به اپراتور، $\hat{h}_{\mu\nu}(x)$ را بدست آورید.

۱۷-همیلتونی را کوانتیزه و نرمال‌مرتب کنید.

۱۸-تصور می‌کنید این میدان معرف ذره‌ای با چه اسپینی باشد؟

با توجه به این که انتشار موج در راستای $\hat{z}$ فرض شده است پس برای هلیسیتی داریم $\hat{h} = J^z$. اما چون میدان ما تنسوری مرتبهٔ دو (قابل نمایش با ماتریس‌ها) است، پس به یاد داشته باشید عمل مناسب J^z روی میدان $h_{\mu\nu}$، به شکل $J^{z\dagger} h_{\mu\nu} J^z$ خواهد بود.

۱۹-نشان دهید h_+ و $h_\times$ ویژه‌حالت‌های J^z هستند.

۲۰-اگر تابع گرین معادلهٔ کلاین-گوردون $\mathrm{G}_{KG}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2}$ باشد (p چاربردار انرژی تکانه است)، تابع گرین متناظر با معادلهٔ حرکت این میدان، یعنی $\mathrm{G}_h(p)$ را بدست آورید.

۲۱-اگر انرژی ذرهٔ متناظر را $E \equiv p^0$ بگیریم، قطب‌های $\Delta_h(t, \mathbf{p})$ را در صفحهٔ مختلط p^0 مشخص کنید.

۲۲-براساس پاسخ ۲۰ و ۲۱، انتشاردهندهٔ میدان فوق، یعنی $\Delta_h(p)$ را حساب نمایید.

۲۳-انتگرالی برای $\Delta_h(t, \mathbf{p})$ برحسب $\Delta_h(p)$ بنویسید.

۲۴-با توجه به (۱۹) و (۲۰)، انتگرال فوق را با انتخاب مسیری مناسب اصلاح کنید.

۲۵- براساس (i)، $D\mathcal{L}$ را حساب نمایید.

۲۶- جریان نوتر متناظر با تبدیل (i) را بدست آورید.

موفق باشید. شجاعی