۱ تابع دلتای دیراک

در سال ۱۸۸۰، دانشمند برق خودآموخته اولیور هویساید تابع زیر را معرفی کرد.

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & for \;\; x > 0 \\ 0 & for \;\; x < 0 \end{cases}$$

که به آن تابع پله ای هویساید گفته می شود. این تابع یک ناپیوستگی در نقطه ی $x = 0$ دارد که معمولا در زمینه تحلیل سیگنال‌های الکتریکی استفاده می‌شود. علاوه بر این مهم است که این تابع در زمینه ی فیزیک آماری کوانتومی هم مورد استفاده قرار می گیرد.رابطه ی این تابع با فیزیک به تابع توزیع فرمی–دیراک برمیگردد که به صورت زیر تعریف می شود

$$F_\beta(x) = \frac{1}{e^{\beta x} + 1} \tag{۱}$$

که در سال ۱۹۲۶ توسط انریکو فرمی و پل دیراک پیشنهاد شد تا توزیع آماری کوانتومی الکترون‌ها در فلزات را توصیف کند، که $\beta = 1/(kBT)$ متناسب با معکوس دمای مطلق T است (با kB ثابت بولتزمن) و $x = \epsilon - \mu$ انرژی ϵ الکترون نسبت به پتانسیل شیمیایی μ است، تبدیل $F_\beta(x)$ به تابع $\Theta(x)$ در حد دمای بسیار کوچک T می شود. به عبارت دیگر

$$\lim_{\beta \to \infty} F_\beta(x) = \Theta(-x) = \begin{cases} 0 & for \;\; x > 0 \\ 1 & for \;\; x < 0 \end{cases}$$

الهام گرفته شده از کار هویساید، با هدف توصیف چگالی بار بسیار محلی، در سال ۱۹۳۰ پل دیراک به بررسی "تابع" زیر پرداخت

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & for \;\; x = 0 \\ 0 & for \;\; x \neq 0 \end{cases} \tag{۲}$$

که این تابع ویژگی زیر را دارد

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{۳}$$

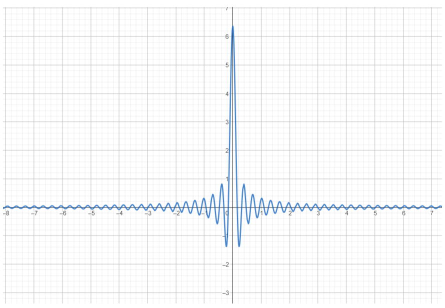
حال بعضی مواقع مانند تابع توزیع فرمی-دیراک با میل دادن متغیری به سمت بی نهایت یا صفر ، تابع توزیع به تابع های آشنایی میل می کنند به طور مثال همانطور که گفته شد ، تابع توزیع فرمی-دیراک با میل دادن β به سمت بی نهایت تبدیل به تابع پله ای هویساید می شود.
برای تابع دلتای دیراک هم توابع توزیعی وجود دارند که با میل دادن پارامتری از آن تابع توزیع به تابع دلتای دیراک تبدیل می شود مانند تابع توزیع

$$\delta_n(x) = \frac{sin(nx)}{\pi x}$$

که

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \delta(x)$$

و به صورت شماتیک داریم



شکل ۱: در شکل فوق تابع $\delta_n(x)$ به ازای $n = 10$ را مشاهده می کنید و همانطور که مشخص است با افزایش n به تابع دلتای دیراک تبدیل می شود

در ادامه به اثبات این موضوع می پردازید(برای مطالعه ی بیشتر راجع به توابع توزیع پیشنهاد می شود فصل ۵ کتاب مبانی فیزیک ریاضیاتی صدری حسنی را بخوانید).
حال با توجه به توضیحات فوق و ویژگی های تابع دلتای دیراک ، به سوالات زیر پاسخ دهید

۱-۱ سوالات

۱-۱-۱ ویژگی های تابع دلتای دیراک

ویژگی های دیگر تابع دلتای دیراک را ثابت کنید.

1. $\delta(x) = \delta(-x)$
2. $\dfrac{d}{dx}\delta(x) = -\dfrac{d}{dx}\delta(-x)$
3. $\delta(ax) = \dfrac{\delta(x)}{|a|}$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$
5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)dx = -f'(a)$

۲-۱-۱ توابع توزیع

با در نظر گرفتن تعریف زیر برای $\delta_n(x)$،

$$\delta_n(x) = \frac{sin(nx)}{\pi x}$$

ثابت کنید

6. $\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(x)$

راهنمایی : از ویژگی های تابع دلتای دیراک استفاده کنید.