что представляется вполне естественным, если символ $\frac{dz}{dy}$ или $\frac{dy}{dx}$ рассматривать не как единый, а как отношение dz к dy или, соответственно, dy к dx. Возникающая в связи с этим идея доказательства состоит в том, чтобы рассмотреть разностное отношение

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

и затем перейти к пределу при $\Delta x \to 0$. Трудность, которая тут появляется (и с которой нам тоже отчасти пришлось считаться!), состоит в том, что Δy может быть нулем, даже если $\Delta x \neq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если имеется композиция $(f_n \circ \ldots \circ f_1)(x)$ дифференцируемых функций $y_1 = f_1(x), \ldots, y_n = f_n(y_{n-1})$, то

$$(f_n \circ \ldots \circ f_1)'(x) = f_n'(y_{n-1}) f_{n-1}'(y_{n-2}) \ldots f_1'(x)$$

$<$ При $n = 1$ утверждение очевидно.

Если оно справедливо для некоторого $n \in N$, то из теоремы 2 следует, что оно справедливо также для $n+1$, т. е. по принципу индукции установлено, что оно справедливо для любого $n \in N$. $>$

ПРИМЕР 5. Покажем, что при $\alpha \in R$ в области $x > 0$ имеем $\frac{dx^a}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}$, Т. е. $dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}dx$, и

$$(x+h)^\alpha - x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}h + o(h) \quad \text{при } h \to 0.$$

$<$ Запишем $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ и применим доказанную теорему с учетом результатов примеров 9 и 11 из & 1 и пункта b) теоремы 1. Пусть $g(y) = e^y$ и $y = f(x) = \alpha \ln x$. Тогда $x^\alpha = (g \circ f)(x)$ и

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = e^y \cdot \frac{\alpha}{x} = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.>$$

ПРИМЕР 6. Производная от логарифма модуля дифференцируемой функции часто называется логарифмической производной.

Поскольку $F(x) = \ln|f(x)| = (\ln \circ || \circ f)(x)$, то в силу результата примера 11 из $\S 1 F'(x) = (\ln|f|)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Таким образом,

$$d(\ln|f|)(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \frac{df(x)}{f(x)}$$

ПРИМЕР 7. Абсолютная и относительная погрешности значения дифференцируемой функции, вьзванньe погрешностями в задании аргумента. Если функция f дифференцируема в точке x, то

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \alpha(x;h)$$

где $\alpha(x;h) = o(h)$ при $h \to 0$.

Таким образом, если при вычислении значения $f(x)$ функции аргумент x определен с абсолютной погрешностью h, то вызванная этой погрешностью абсолютная погрешность $|f(x+h)-f(x)|$ в значении функции при достаточно малых h может быть заменена модулем значения дифференциала $|df(x)h| = |f'(x)h|$ на смещении h.

Тогда относительная погрешность может быть вычислена как отношение $\frac{|f'(x)h|}{|f(x)|} = \frac{|df(x)h|}{|f(x)|}$ или как модуль произведения $\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| |h|$ логарифмической производной функции на величину абсолютной погрешности аргумента.

Заметим, кстати, что если $f(x) = \ln x$, то $d\ln x = \frac{dx}{x}$ и абсолютная погрешность в определении значения логарифма равна относительной погрешности в определении аргумента. Это обстоятельство прекрасно используется, например, в логарифмической линейке (и многих других приборах с неравномерным масштабом шкал). А именно, представим себе, что с каждой точкой числовой оси, лежащей правее нуля, мы связали ее координату у и записали ее над точкой, а под этой точкой записали число $x = e^y$. Тогда $y = = \ln x$. Одна и та же числовая полуось оказалась наделенной одной равномерной шкалой у и одной неравномерной (ее называют логарифмической) шкалой x. Чтобы найти $\ln x$, надо установить визир на числе x и прочитать наверху соответствующее число y. Поскольку точность установки визира на какую-то точку не зависит от числа x или y, ей отвечающего, и измеряется некоторой величиной Δy (длиной отрезка возможного уклонения) в равномерной шкале, то при определении по числу x его логарифма y мы будем иметь примерно одну и ту же абсолютную погрешность, а при определении числа по его логарифму будем иметь примерно одинаковую относительную погрешность во всех частях шкалы.

ПРИМЕР 8. Продифференцируем функцию $u(x)^{\nu(x)}$, где $u(x)$ и $v(x)-$ дифференцируемые функции и $u(x) > 0$. Запишем $u(x)^{\nu(x)} = e^{\nu(x)\ln u(x)}$ и воспользуемся следствием 2

$$\frac{de^{v(x)\ln u(x)}}{dx} = e^{v(x)\ln u(x)} \left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right) =$$
$$= u(x)^{v(x)} \cdot v'(x)\ln u(x) + v(x)u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x).$$

3. Дифференцирование обратной функции

ТЕОРЕМА 3 (теорема о производной обратной функции). Пусть функции $f : X \to Y, f^{-1} : Y \to X$ взаимно обратны и непрерывны в точках $x_0 \in X$ и $f(x_0) = y_0 \in Y$ соответственно. Если функция f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то функция f^{-1} также дифференцируема в точке y_0, причем

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \left(f'(x_0)\right)^{-1}$$

$<$ Поскольку функции $f : X \to Y, f^{-1} : Y \to X$ взаимно обратны, то величины $f(x)-f(x_0), f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)$ при $y = f(x)$ не обращаются в нуль, если $x \neq \neq x_0$. Из непрерывности f в x_0 и f^{-1} в y_0 можно, кроме того, заключить, что $(X \ni x \to x_0) \Leftrightarrow (Y \ni y \to y_0)$. Используя теперь теорему о пределе композиции функций и арифметические свойства предела, находим

$$\lim_{Y \ni y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \ni x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \ni x \to x_0} \frac{1}{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}. >$$

Таким образом, показано, что в точке y_0 функция $f^{-1} : Y \to X$ имеет производную и

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \left(f'(x_0)\right)^{-1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если бы нам заранее было известно, что функция f^{-1} дифференцируема в точке y_0, то из тождества $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$ по теореме о дифференцировании композиции функций мы сразу же нашли бы, что $\left(f^{-1}\right)'(y_0) \cdot f'(x_0) = 1$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие $f'(x_0) \neq 0$, очевидно, равносильно тому, что отображение $h \mapsto f'(x_0)\,h$, осуществляемое дифференциалом $df(x_0) : TR(x_0) \to \to TR(y_0)$, имеет обратное отображение $[df(x_0)]^{-1} : TR(y_0) \to TR(x_0)$, задаваемое формулой $\tau \mapsto \left(f'(x_0)\right)^{-1} \tau$.

Значит, в терминах дифференциалов вторую фразу формулировки теоремы 3 можно было бы записать следующим образом:

Если функция f дифференцируема в точке x_0 и в этой точке ее дифференциал df $(x_0) : TR(x_0) \to TR(y_0)$ обратим, то дифференциал функции f^{-1}, обратной κf, существует в точке $y_0 = f(x_0)$ и является отображением

$$df^{-1}(y_0) = [df(x_0)]^{-1} : TR(y_0) \to TR(x_0),$$

обратным к отображению $df(x_0) : TR(x_0) \to TR(y_0)$.

ПРИМЕР 9. Покажем, что $\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ при $|y| < 1$. Функции $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ и arcsin: $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ взаимно обратны и непрерывны (см. гл. IV, §2, пример 8), причем $\sin' x = \cos x \neq 0$, если $|x| < \pi/2$. При $|x| < \pi/2$ для значений $y = \sin x$ имеем $|y| < 1$. Таким образом, по теореме 3

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Знак перед радикалом выбран с учетом того, что $\cos x > 0$ при $|x| < \pi/2$.

ПРИМЕР 10. Рассуждая, как и в предыдущем примере, можно показать (с учетом примера 9 из § 2 гл. IV), что

$$\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \text{ при } |y| < 1.$$

Действительно,

$$\arccos' y = \frac{1}{\cos' x} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Знак перед радикалом выбран с учетом того, что $\sin x > 0$, если $0 < x < \pi$.