стью абсолютная погрешность $|f(x+h)-f(x)|$ в значении функции при достаточно малых h может быть заменена модулем значения дифференциала $|df(x)h|=|f'(x)h|$ на смещении h.

Тогда относительная погрешность может быть вычислена как отношение $\frac{|f'(x)h|}{|f(x)|}=\frac{|df(x)h|}{|f(x)|}$ или как модуль произведения $\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right||h|$ логарифмической производной функции на величину абсолютной погрешности аргумента.

Заметим, кстати, что если $f(x)=\ln x$, то $d\ln x=\frac{dx}{x}$ и абсолютная погрешность в определении значения логарифма равна относительной погрешности в определении аргумента. Это обстоятельство прекрасно используется, например, в логарифмической линейке (и многих других приборах с неравномерным масштабом шкал). А именно, представим себе, что с каждой точкой числовой оси, лежащей правее нуля, мы связали ее координату y и записали ее над точкой, а под этой точкой записали число $x=e^y$. Тогда $y=\ln x$. Одна и та же числовая полуось оказалась наделенной одной равномерной шкалой y и одной неравномерной (ее называют логарифмической) шкалой x. Чтобы найти $\ln x$, надо установить визир на числе x и прочитать наверху соответствующее число y. Поскольку точность установки визира на какую-то точку не зависит от числа x или y, ей отвечающего, и измеряется некоторой величиной Δy (длиной отрезка возможного уклонения) в равномерной шкале, то при определении по числу x его логарифма y мы будем иметь примерно одну и ту же абсолютную погрешность, а при определении числа по его логарифму будем иметь примерно одинаковую относительную погрешность во всех частях шкалы.

Пример 8. Продифференцируем функцию $u(x)^{v(x)}$, где $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции и $u(x)>0$. Запишем $u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$ и воспользуемся следствием 2

$$\frac{de^{v(x)\ln u(x)}}{dx}=e^{v(x)\ln u(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)=$$
$$=u(x)^{v(x)}\cdot v'(x)\ln u(x)+v(x)u(x)^{v(x)-1}\cdot u'(x).$$

3. Дифференцирование обратной функции

Теорема 3 (теорема о производной обратной функции). *Пусть функции $f\colon X\to Y$, $f^{-1}\colon Y\to X$ взаимно обратны и непрерывны в точках $x_0\in X$ и $f(x_0)=y_0\in Y$ соответственно. Если функция f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0)\neq 0$, то функция f^{-1} также дифференцируема в точке y_0, причем*

$$(f^{-1})'(y_0)=(f'(x_0))^{-1}.$$

◄ Поскольку функции $f\colon X\to Y$, $f^{-1}\colon Y\to X$ взаимно обратны, то величины $f(x)-f(x_0)$, $f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)$ при $y=f(x)$ не обращаются в нуль, если $x\neq x_0$. Из непрерывности f в x_0 и f^{-1} в y_0 можно, кроме того, заключить, что $(X\ni x\to x_0)\Leftrightarrow(Y\ni y\to y_0)$. Используя теперь теорему о пределе композиции функций и арифметические свойства предела, находим

$$\lim_{Y\ni y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{X\ni x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{X\ni x\to x_0}\frac{1}{\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Таким образом, показано, что в точке y_0 функция $f^{-1}\colon Y\to X$ имеет производную и

$$(f^{-1})'(y_0)=(f'(x_0))^{-1}. \ \blacktriangleright$$

Замечание 1. Если бы нам заранее было известно, что функция f^{-1} дифференцируема в точке y_0, то из тождества $(f^{-1}\circ f)(x)=x$ по теореме о дифференцировании композиции функций мы сразу же нашли бы, что $(f^{-1})'(y_0)\cdot f'(x_0)=1$.

Замечание 2. Условие $f'(x_0)\neq 0$, очевидно, равносильно тому, что отображение $h\mapsto f'(x_0)h$, осуществляемое дифференциалом $df(x_0)\colon T\mathbb{R}(x_0)\to \to T\mathbb{R}(y_0)$, имеет обратное отображение $[df(x_0)]^{-1}\colon T\mathbb{R}(y_0)\to T\mathbb{R}(x_0)$, задаваемое формулой $\tau\mapsto(f'(x_0))^{-1}\tau$.

Значит, в терминах дифференциалов вторую фразу формулировки теоремы 3 можно было бы записать следующим образом:

Если функция f дифференцируема в точке x_0 и в этой точке ее дифференциал $df(x_0)\colon T\mathbb{R}(x_0)\to T\mathbb{R}(y_0)$ обратим, то дифференциал функции f^{-1}, обратной к f, существует в точке $y_0=f(x_0)$ и является отображением

$$df^{-1}(y_0)=[df(x_0)]^{-1}\colon T\mathbb{R}(y_0)\to T\mathbb{R}(x_0),$$

обратным к отображению $df(x_0)\colon T\mathbb{R}(x_0)\to T\mathbb{R}(y_0)$.

Пример 9. Покажем, что $\arcsin' y=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ при $|y|<1$.

Функции $\sin\colon[-\pi/2,\pi/2]\to[-1,1]$ и $\arcsin\colon[-1,1]\to[-\pi/2,\pi/2]$ взаимно обратны и непрерывны (см. гл. IV, § 2, пример 8), причем $\sin' x=\cos x\neq 0$, если $|x|<\pi/2$. При $|x|<\pi/2$ для значений $y=\sin x$ имеем $|y|<1$.

Таким образом, по теореме 3

$$\arcsin' y=\frac{1}{\sin' x}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Знак перед радикалом выбран с учетом того, что $\cos x>0$ при $|x|<\pi/2$.

Пример 10. Рассуждая, как и в предыдущем примере, можно показать (с учетом примера 9 из § 2 гл. IV), что

$$\arccos' y=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\quad \text{при } |y|<1.$$

Действительно,

$$\arccos' y=\frac{1}{\cos' x}=-\frac{1}{\sin x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Знак перед радикалом выбран с учетом того, что $\sin x>0$, если $0<x<\pi$.

что представляется вполне естественным, если символ $\frac{dz}{dy}$ или $\frac{dy}{dx}$ рассматривать не как единый, а как отношение dz к dy или, соответственно, dy к dx.

Возникающая в связи с этим идея доказательства состоит в том, чтобы рассмотреть разностное отношение

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

и затем перейти к пределу при $\Delta x \to 0$. Трудность, которая тут появляется (и с которой нам тоже отчасти пришлось считаться!), состоит в том, что Δy может быть нулем, даже если $\Delta x \neq 0$.

Следствие 2. *Если имеется композиция* $(f_n \circ \ldots \circ f_1)(x)$ *дифференцируемых функций* $y_1 = f_1(x), \ldots, y_n = f_n(y_{n-1})$, *то*

$$(f_n \circ \ldots \circ f_1)'(x) = f_n'(y_{n-1}) f_{n-1}'(y_{n-2}) \ldots f_1'(x).$$

◄ При $n = 1$ утверждение очевидно.

Если оно справедливо для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то из теоремы 2 следует, что оно справедливо также для $n+1$, т. е. по принципу индукции установлено, что оно справедливо для любого $n \in \mathbb{N}$. ►

Пример 5. Покажем, что при $\alpha \in \mathbb{R}$ в области $x > 0$ имеем $\frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}$, т. е. $dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} dx$, и

$$(x+h)^\alpha - x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} h + o(h) \quad \text{при } h \to 0.$$

◄ Запишем $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ и применим доказанную теорему с учетом результатов примеров 9 и 11 из § 1 и пункта b) теоремы 1.

Пусть $g(y) = e^y$ и $y = f(x) = \alpha \ln x$. Тогда $x^\alpha = (g \circ f)(x)$ и

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = e^y \cdot \frac{\alpha}{x} = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}. \ ►$$

Пример 6. Производная от логарифма модуля дифференцируемой функции часто называется *логарифмической производной*.

Поскольку $F(x) = \ln|f(x)| = (\ln \circ \mid\ \mid \circ f)(x)$, то в силу результата примера 11 из § 1 $F'(x) = (\ln|f|)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Таким образом,

$$d(\ln|f|)(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{df(x)}{f(x)}.$$

Пример 7. *Абсолютная и относительная погрешности значения дифференцируемой функции, вызванные погрешностями в задании аргумента.* Если функция f дифференцируема в точке x, то

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \alpha(x; h),$$

где $\alpha(x; h) = o(h)$ при $h \to 0$.

Таким образом, если при вычислении значения $f(x)$ функции аргумент x определен с абсолютной погрешностью h, то вызванная этой погрешно-