



模糊计算

Fuzzy Computation



ARTIFICIAL INTELLIGENCE

- ✿ 用数学的眼光看世界，可把我们身边的现象划分为
 - ✦ 确定性现象：如水加温到**100°C**就沸腾
 - 靠经典数学去刻画
 - ✦ 随机现象：如掷筛子，观看那一面向上
 - 靠概率统计去刻画
 - ✦ 模糊现象：如 “今天天气很热”， “他很年轻”， ...
 - 准确？有多大的水分？靠模糊数学去刻画
- ✿ 现实世界中遇到的对象多是这种模糊的,不确定性的类型
- ✿ 模糊集合正反映了这类“亦此亦彼”的模糊性
- ✿ 模糊数学是研究模糊现象的定量处理方法

主要内容

- ✿ 模糊集理论
- ✿ 模糊集合的并、交、补运算
- ✿ 模糊逻辑
- ✿ 模糊控制系统
- ✿ 模糊计算

1.模糊集理论 (Fuzzy Sets)

- ✿ 扎德(Zadeh) 1965年提出
 - ✦ In 1965 **Lotfi Zadeh**, published his famous paper “Fuzzy sets”.
- ✿ 是模糊计算的数学基础
- ✿ 广泛应用于推理、控制、决策等领域



1.模糊集理论

What are fuzzy sets?

- ❑ $A = \{x \mid x \text{ is a person whose age not more than 30}\}$
- ❑ $B = \{x \mid x \text{ is a young person}\}$

$$\mu_A : U \rightarrow \{0,1\}$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

$$\mu_B : U \rightarrow [0,1]$$

1.模糊集理论

- 定义全集 U 的模糊子集 A

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in U\},$$

μ_A
membership functions
(隶属函数)

- $\mu_A(x)$

- x 对 A 的隶属度

- 取值范围—— $[0,1]$

- 例：设有论域： $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，用模糊集表示出模糊概念“大数”

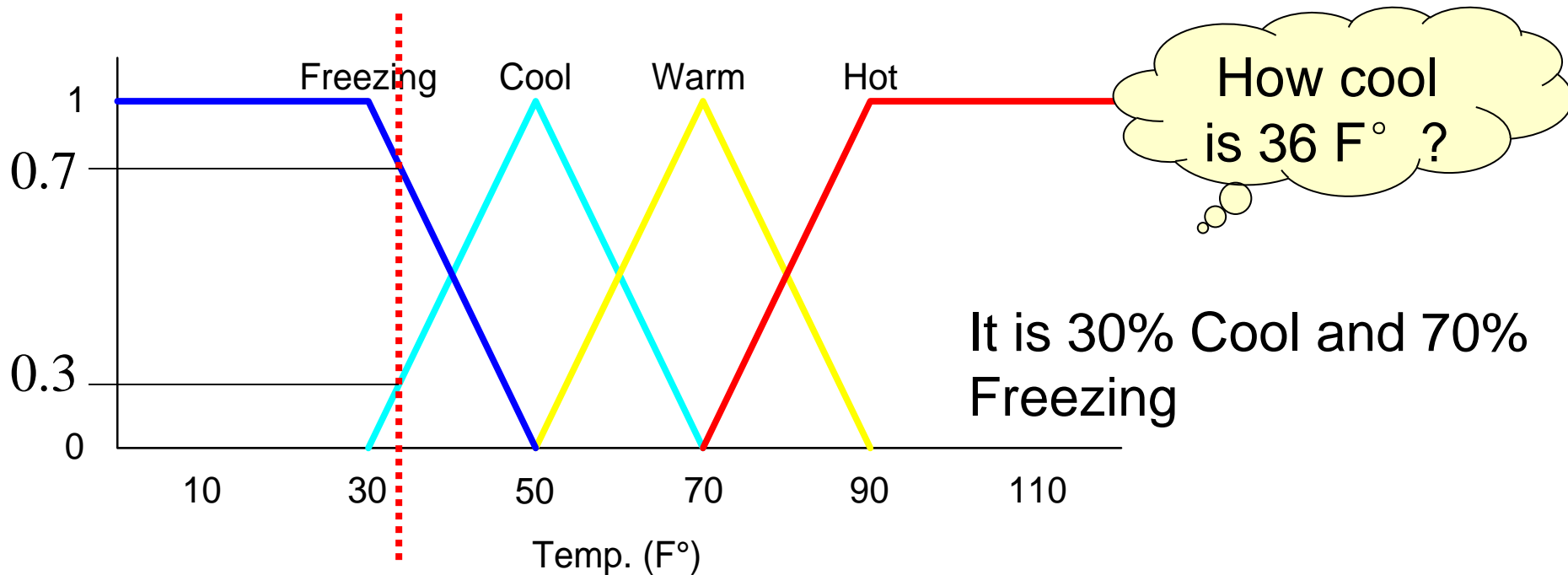
- 设 A 表示“大数”的模糊集， μ_A 为其隶属函数

则有： $A = \{0/1, 0.1/2, 0.5/3, 0.8/4, 1/5\}$

1. 模糊集理论—Membership Functions

Temp: {Freezing, Cool, Warm, Hot}

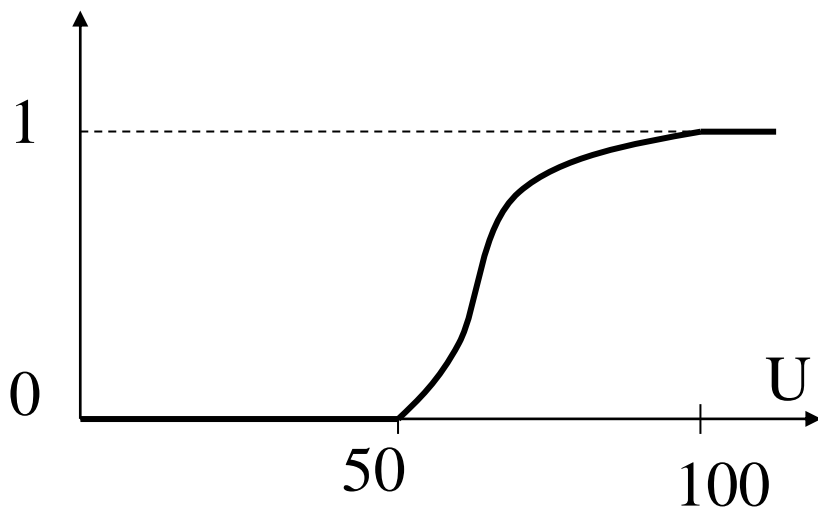
Degree of Truth or "Membership"



1.模糊集理论—Membership Functions

- 论域 U 是连续的情况
- 模糊集可用实函数表示
- 例：考虑年龄集 $U=[0,100]$ ， A = “年老”，扎德给出的 “年老” 集函数刻画

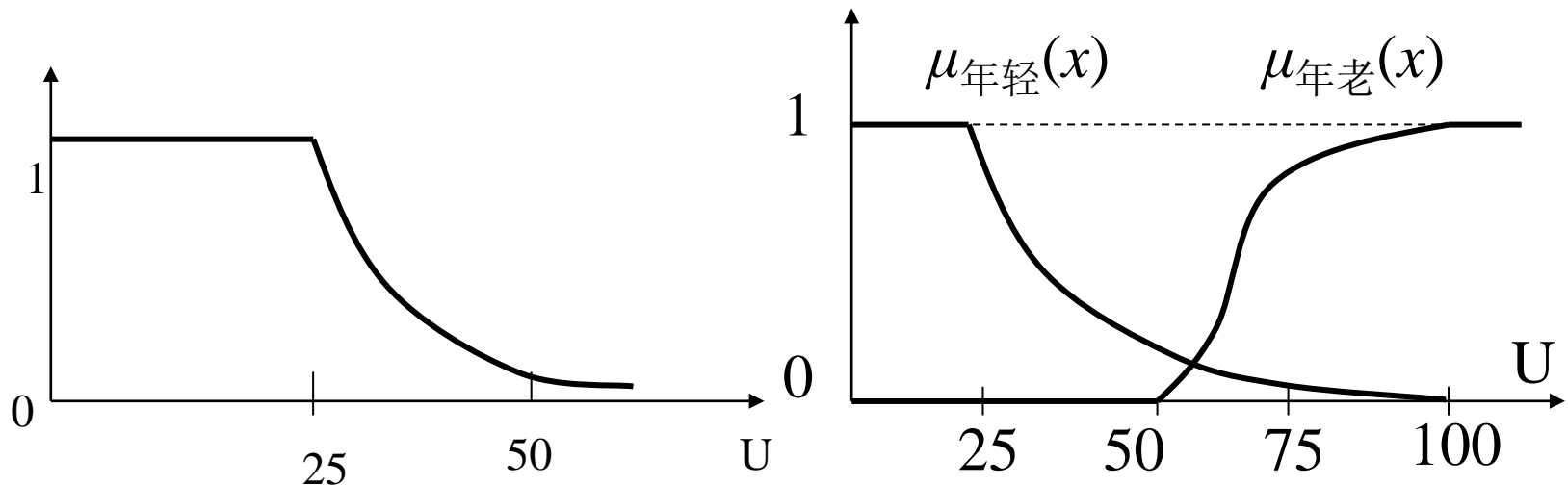
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 50 \\ (1 + (\frac{x-50}{5})^{-2})^{-1} & 50 \leq x \leq 100 \end{cases}$$



1.模糊集理论—Membership Functions

✿ **B= “年轻”**，扎德给出它的隶属函数：

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 25 \\ (1 + (\frac{x-25}{5})^2)^{-1} & 25 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

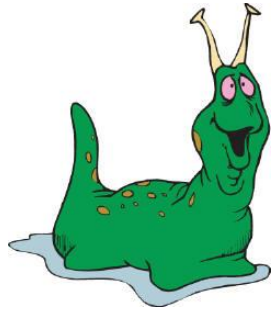


2.模糊集合的并、交、补运算

- ✚ 设 A 、 B 为论域 U 上的两个模糊集合。则 $A \cup B$ 、 $A \cap B$ 、 A 的补集也是论域上的模糊集合
- ✚ 并集：将对应的论域元素的隶属度两两取大
- ✚ 交集：将对应的论域元素的隶属度两两取小
- ✚ 补集：将集合的每一个元素的隶属度取反

3.模糊逻辑 (Fuzzy logic)

Traditional representation of logic



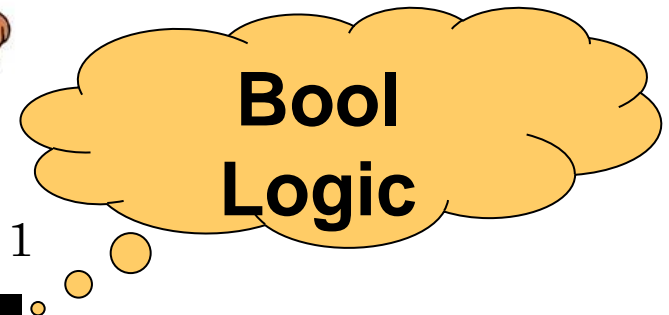
Slow

Speed = 0



Fast

Speed = 1



```
bool speed;  
get the speed  
if ( speed == 0) {  
    // speed is slow}  
else {    // speed is fast}
```

3.模糊逻辑

Multi-valued
Logic



Slowest

Slow

Fast

Fastest

```
float speed;  
get the speed  
if speed is slowest  
{.....}  
else if speed is slow  
{.....}  
else if speed is fast  
{.....}  
else speed is fastest  
{.....}
```

模糊语言变量
(*Fuzzy Linguistic Variables*)

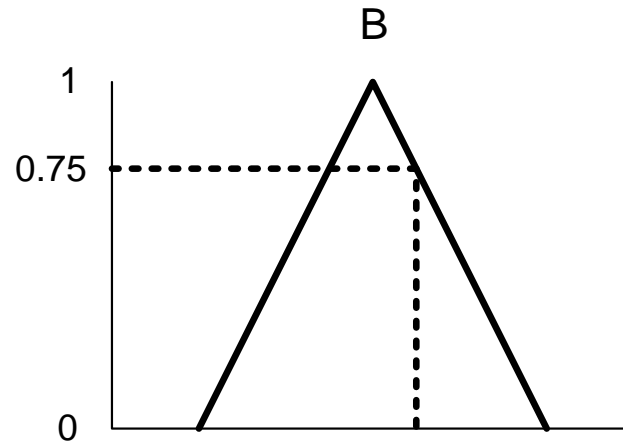
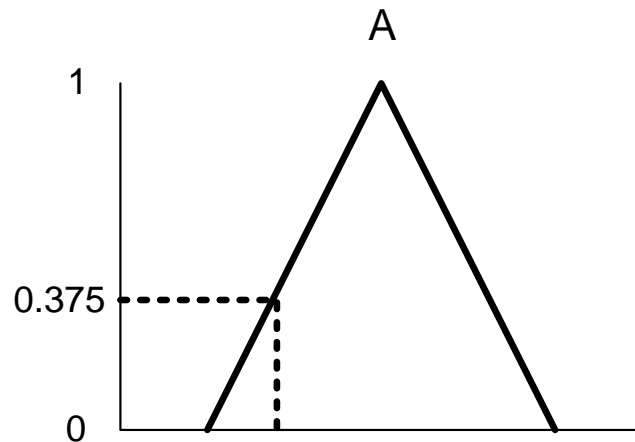
3.模糊逻辑

- ⊕ How do we use fuzzy membership functions in predicate logic?
- ⊕ Fuzzy logic Connectives:
 - ⊗ Fuzzy Conjunction, \wedge
 - ⊗ Fuzzy Disjunction, \vee
- ⊕ Operate on degrees of membership in fuzzy sets

3. 模糊逻辑 —— Fuzzy Disjunction

✚ $A \vee B \triangleq \max(A, B)$

✚ $A \vee B = C$ "Quality C is the disjunction of Quality A and B"

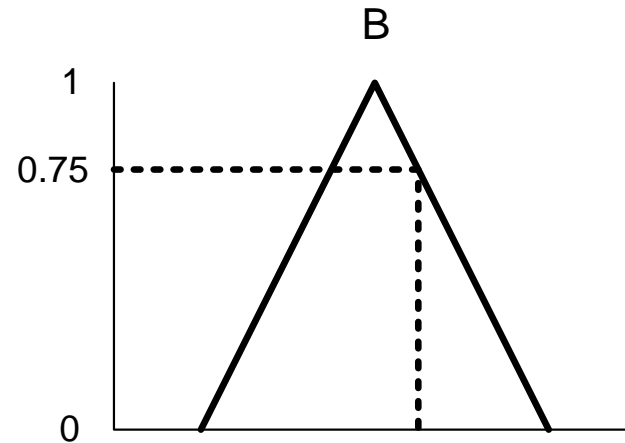
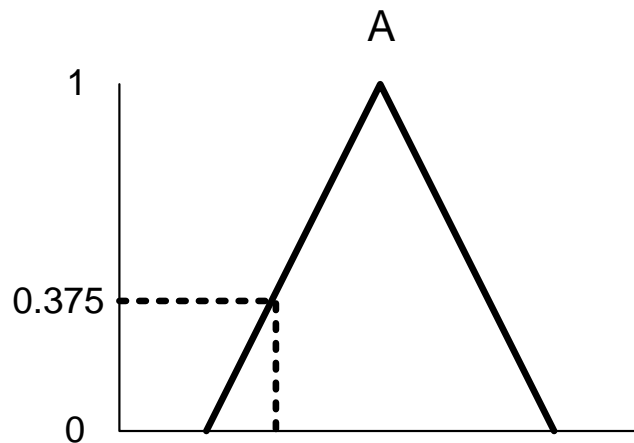


✚ $(A \vee B = C) \Rightarrow (C = 0.75)$

3. 模糊逻辑 —— Fuzzy Conjunction

✚ $A \wedge B \triangleq \min(A, B)$

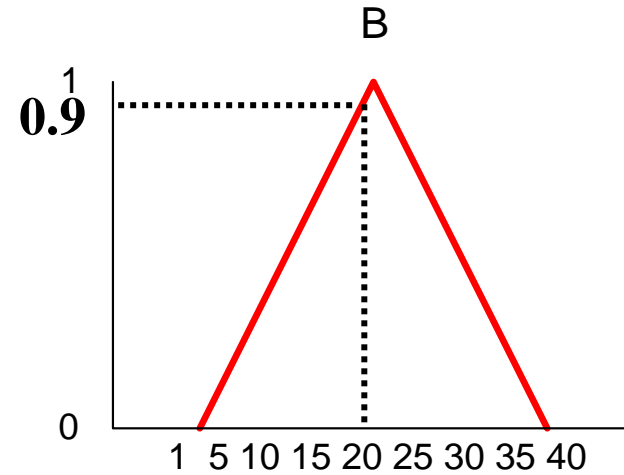
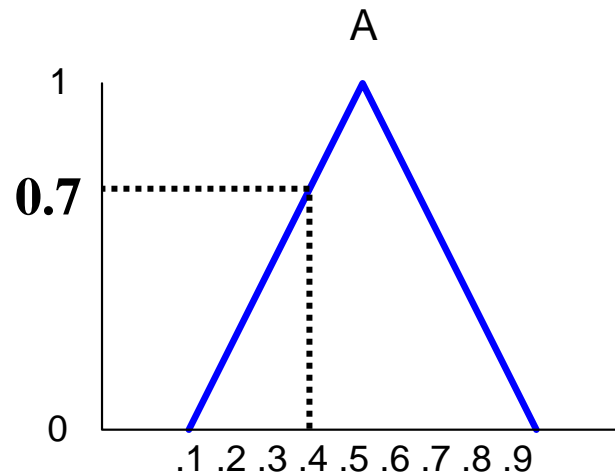
✚ $A \wedge B = C$ "Quality C is the conjunction of Quality A and B"



✚ $(A \wedge B = C) \Rightarrow (C = 0.375)$

3.模糊逻辑 —— Fuzzy Conjunction

- Example: Calculate $A \wedge B$ given that A is .4 and B is 20



- Determine degrees of membership:

$A = 0.7$

$B = 0.9$

- Apply Fuzzy AND

$A \wedge B = \min(A, B) = 0.7$

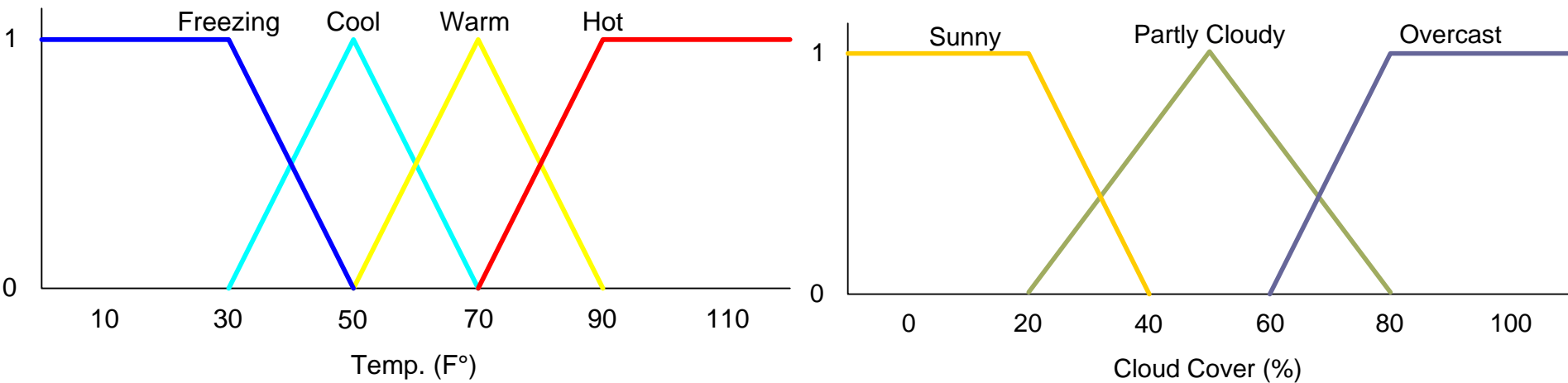
4.模糊控制系统

- ✿ Fuzzy Logic provides a more efficient and resourceful way to solve Control Systems (应用于控制系统)
- ✿ Fuzzy Control combines the use of fuzzy linguistic variables with fuzzy logic (使用模糊逻辑进行系统控制)
- ✿ Examples
 - ▣ Speed Control
 - How fast am I going to drive today?
 - It depends on the weather.
 - Disjunction and Conjunction

4.模糊控制系统— E.g. Speed Control

Inputs

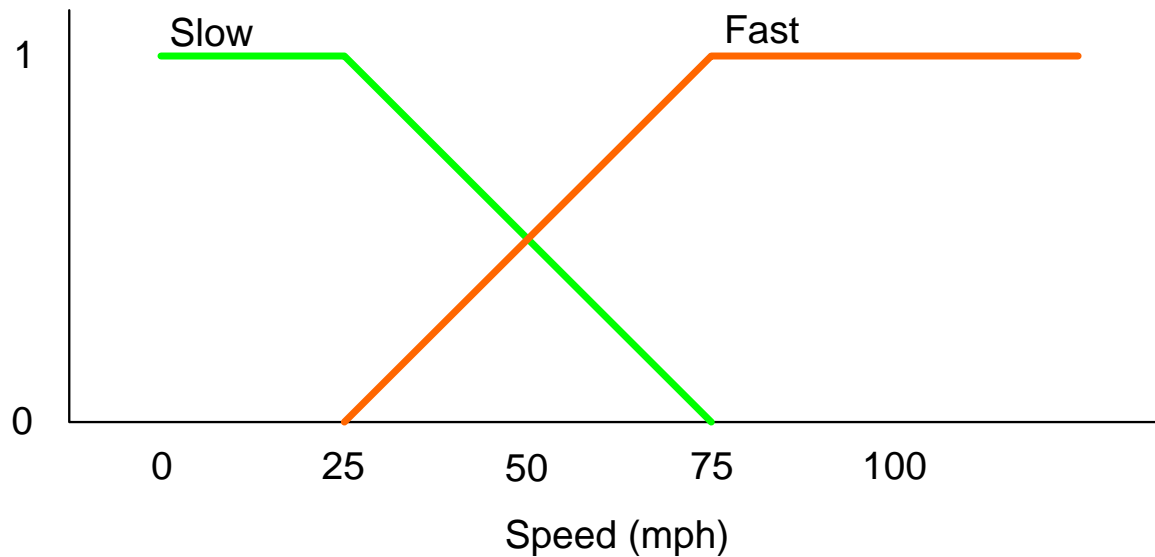
- ❏ Temperature: {Freezing, Cool, Warm, Hot}
- ❏ Cover: {Sunny, Cloudy, Overcast}



4.模糊控制系统— E.g. Speed Control

Output

Speed: {Slow, Fast}



4.模糊控制系统— E.g. Speed Control

Rules

- ❑ If it's Sunny and Warm, drive Fast

Sunny(Cover) ∧ Warm(Temp) ⇒ Fast(Speed)

- ❑ If it's Cloudy and Cool, drive Slow

Cloudy(Cover) ∧ Cool(Temp) ⇒ Slow(Speed)

- ❑ Driving Speed is the combination of output of these rules...

4.模糊控制系统— E.g. Speed Control

Speed Calculation: How fast will I go if it is

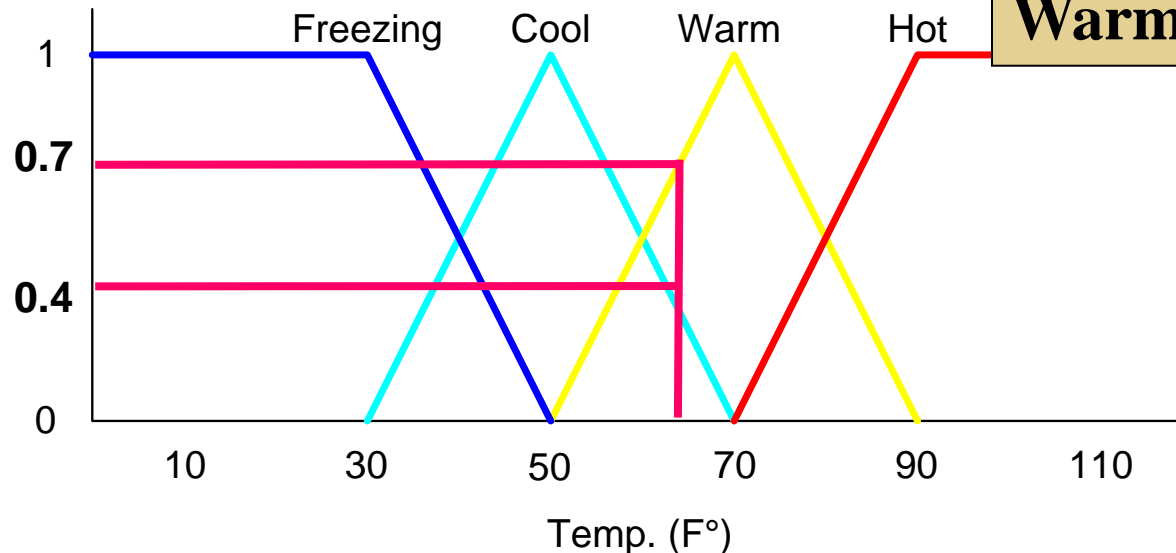
65 F°

25 % Cloud Cover ?

Step

1. Fuzzification(模糊化): **Calculate Input Membership Levels**

a. temperature



65 F° \Rightarrow Cool = 0.4,
Warm = 0.7

4.模糊控制系统— E.g. Speed Control

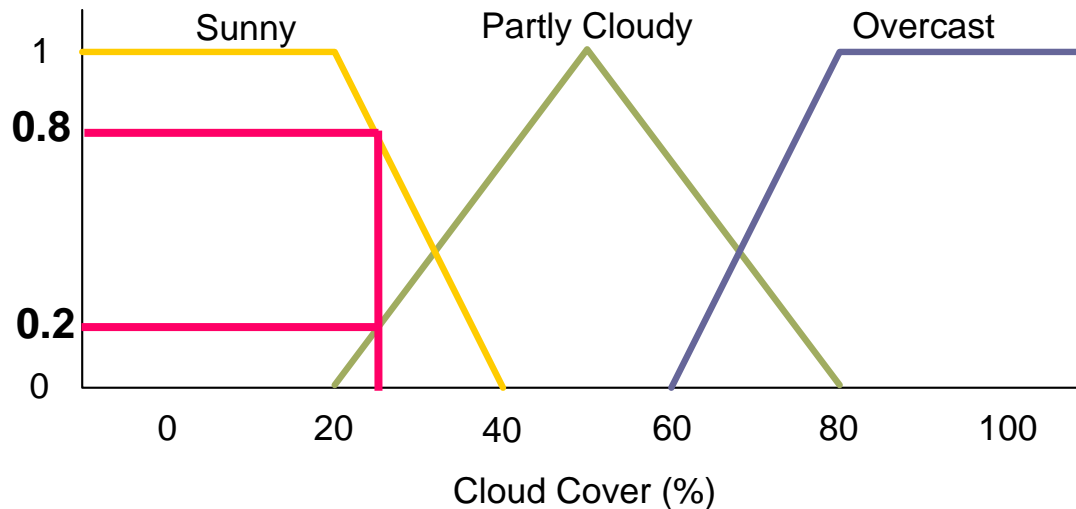
Step

1. Fuzzification(模糊化): **Calculate Input Membership Levels**

a. Temperature

b. Cover

25% Cover \Rightarrow Sunny = 0.8,
Cloudy = 0.2



4.模糊控制系统— E.g. Speed Control

✚ Step

1. Fuzzification (模糊化)
2. Calculating (根据规则计算)
 - a. If it's Sunny and Warm, drive Fast
 $Sunny(Cover) \wedge Warm(Temp) \Rightarrow Fast(Speed)$
 $0.8 \wedge 0.7 = 0.7$
 $\Rightarrow \text{Fast} = 0.7$
 - b. If it's Cloudy and Cool, drive Slow
 $Cloudy(Cover) \wedge Cool(Temp) \Rightarrow Slow(Speed)$
 $0.2 \wedge 0.4 = 0.2$
 $\Rightarrow \text{Slow} = 0.2$

4.模糊控制系统— E.g. Speed Control

❖ Step

1. Fuzzification
2. Calculating

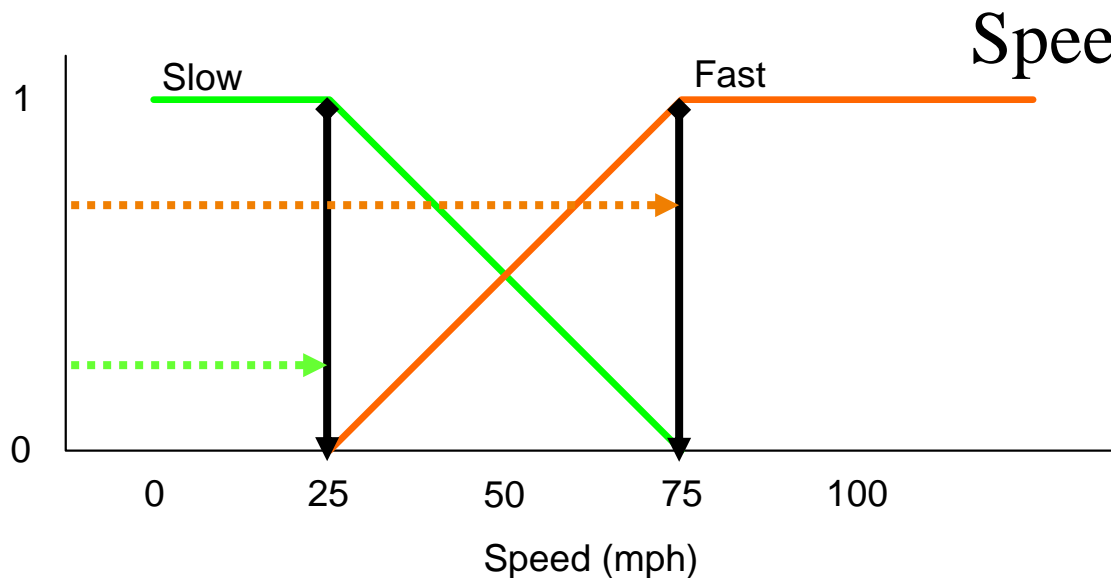


3. Defuzzification(解模糊、去模糊化、模糊判决): Constructing the Output

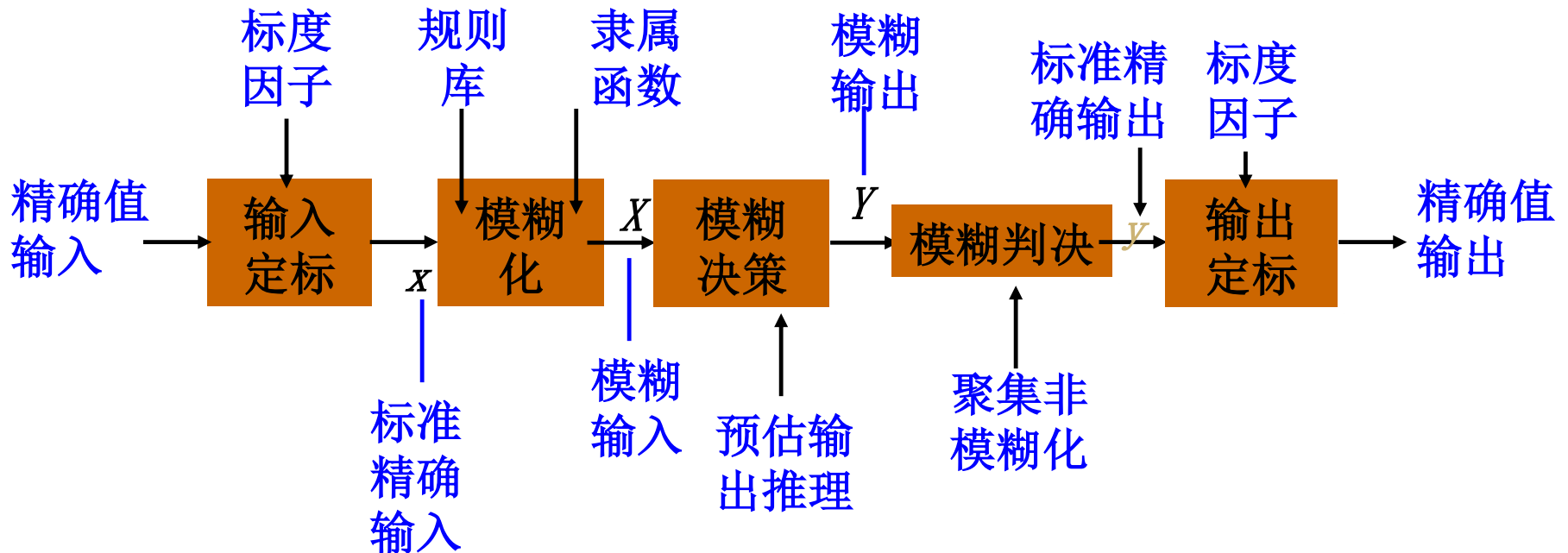
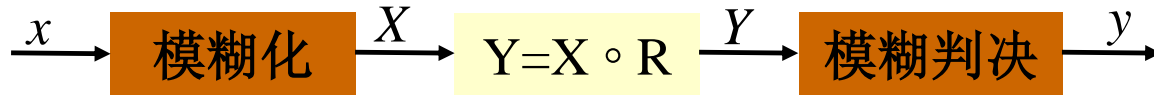
4.模糊控制系统— E.g. Speed Control

Defuzzification

- Speed is 20% Slow and 70% Fast
- Find centroids(重心): Location where membership is 100%



5.模糊计算——基本结构



5.模糊计算——建立隶属函数的方法

模糊统计法

- ❖ 把论域 U 划分为若干区间。
- ❖ 选择 n 个具有正确判断力的评判员，请他们分别给出模糊概念应该属于的区段。
- ❖ 假设 n 个评判员给出的区段中覆盖某个区间的次数为 m ，则当 n 足够大时，就可把 m/n 作为该区间中值对 A 的隶属度。
- ❖ 对每个区间的中值点求出隶属度后，就可绘制出 A 的隶属度函数曲线。

5.模糊计算——建立隶属函数的方法

✚ 对比排序法

- ✚ 对有限论域，如果直接为每一个元素确定隶属度是困难的，则可通过对论域中的因素两两比较，确定一个元素相对于另一个元素隶属于该模糊概念的隶属度，然后对每一个元素的所有隶属度进行加权平均得到最后的隶属度。

5.模糊计算——建立隶属函数的方法

专家评判法

- 设论域为 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ， A 是 U 上待定隶属函数的模糊集。
- 请 m 位专家分别对每一个 u_i 给出一个隶属度的估计值，求出平均值及离差 S_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$)

$$\bar{S}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S_{ij} \qquad d_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\bar{S}_i - S_{ij})^2$$

- 检查离差是否小于或等于事先指定的阈值 ε ，如果大于 ε ，则请专家重新给出估计值，然后再计算平均值和离差。重复这一过程，直到离差小于或等于 ε 时为止。然后请专家给出自己所估计值的“确信度”，设为 c_1, c_2, \dots, c_n ，求其平均值，若该平均值达到一定的阈值，则就以

\bar{S}_i 作为隶属度

5.模糊计算——建立隶属函数的方法

基本概念扩充法

- 从基本模糊概念的隶属函数出发，通过一些运算导出其它相关模糊概念的隶属函数。
- 例：假设已知“大”的隶属函数 $\mu_{\text{大}}(u)$ ，则

$$\mu_{\text{极大}}(u) = \mu_{\text{大}}^4(u)$$

$$\mu_{\text{很大}}(u) = \mu_{\text{大}}^2(u)$$

$$\mu_{\text{相当大}}(u) = \mu_{\text{大}}^{1.5}(u)$$

$$\mu_{\text{比较大}}(u) = \mu_{\text{大}}^{0.75}(u)$$

$$\mu_{\text{有点大}}(u) = \mu_{\text{大}}^{0.5}(u)$$

$$\mu_{\text{稍许有点大}}(u) = \mu_{\text{大}}^{0.25}(u)$$

5.模糊计算——模糊判决方法

- 在推理得到的模糊集合中取一个相对最能代表这个模糊集合的单值的过程就称作解模糊或模糊判决 (Defuzzification)
- 模糊判决可以采用不同的方法
 - 重心法
 - 最大隶属度方法
 - 加权平均法
 - 隶属度限幅元素平均法
- 例 “水温适中”
 - 假设 “水温适中” 的模糊集为：

$$\begin{aligned}\mu_N(x_i) = \{ & 0.0/0 + 0.0/10 + 0.33/20 + 0.67/30 \\ & + 1.0/40 + 1.0/50 + 0.75/60 + 0.5/70 + 0.25/80 \\ & + 0.0/90 + 0.0/100 \}\end{aligned}$$

5.模糊计算——模糊判决方法

✿ 重心法

- ✿ 取模糊隶属函数曲线与横坐标轴围成面积的重心作为代表点
- ✿ 理论上应该计算输出范围内一系列连续点的重心，但实际上是计算输出范围内整个采样点的重心，用足够小的取样间隔来提供所需要的精度

$$u = \frac{\int_x x \mu_N(x) dx}{\int_x \mu_N(x) dx}$$

$$u = \sum x_i \cdot \mu_N(x_i) / \sum \mu_N(x_i)$$

=48.2

5.模糊计算——模糊判决方法

✿ 最大隶属度法

- ✿ 在推理结论的模糊集合中取隶属度最大的那个元素作为输出量即可
- ✿ 这种情况下其隶属函数曲线一定是正规凸模糊集合（即其曲线只能是单峰曲线）
- ✿ 例：对于“水温适中”，按最大隶属度原则，有两个元素**40**和**50**具有最大隶属度**1.0**，那就对所有取最大隶属度的元素**40**和**50**求平均值，执行量应取：

$$u_{\max} = (40 + 50) / 2 = 45$$

5.模糊计算——模糊判决方法

✚ 系数加权平均法

$$u = \sum k_i \cdot x_i / \sum k_i$$

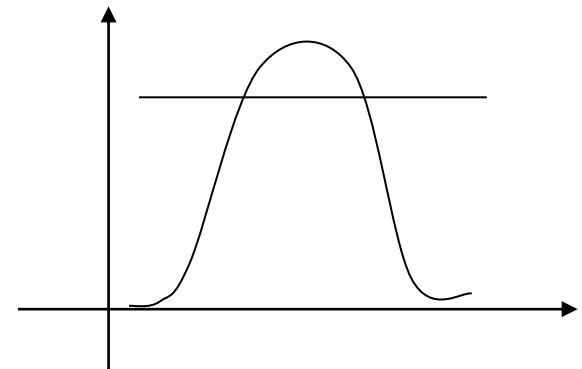
式中，系数的选择要根据实际情况而定，不同的系统就决定系统有不同的响应特性。

5.模糊计算——模糊判决方法

✿ 隶属度限幅元素平均法

- 用所确定的隶属度值 α 对隶属度函数曲线进行切割，再对切割后等于该隶属度的所有元素进行平均，用这个平均值作为输出执行量
- 例：当取 α 为最大隶属度值时，表示“完全隶属”关系，这时 $\alpha=1.0$ 。在“水温适中”的情况下， 40°C 和 50°C 的隶属度是1.0，求其平均值得到输出代表量：

$$u = (40 + 50) / 2 = 45$$



5.模糊计算—— **Drawbacks (缺点)**

- ❖ **Requires tuning of membership functions (模糊函数难以设定)**
- ❖ **Fuzzy Logic control may not scale well to large or complex problems (不适合大型复杂系统)**
- ❖ **Deals with imprecision, and vagueness(含糊), but not uncertainty (智能得到含糊的结论)**

Summary

- ✚ Fuzzy Logic provides way to calculate with imprecision and vagueness
- ✚ Fuzzy Logic can be used to represent some kinds of human expertise
- ✚ Fuzzy Membership Function
- ✚ Fuzzy Linguistic Variables
- ✚ Fuzzy AND and OR
- ✚ Fuzzy Control