# 3.4 消解原理

- **回顾：**
  - （1）谓词公式、原子公式、复合公式、合式公式；
  - （2）推理规则、置换、合一、最通用合一者；
  - （3）合式公式的等价关系；

表达式集 $\{P[x, f(y), B], P[x, f(B), B]\}$

置换：$s = \{A/x, B/y\}$

$P[x, f(y), B]s = P[x, f(B), B]s = P[A, f(B), B]$

最通用合一者：$s = \{B/y\}$

- What is reasoning(推理)?
- *Resolution（消解）*
- Rule Based Deduction（基于规则的演绎）
- Production-rule System（产生式系统）

# 什么是推理

- Ability (知识) and Process (过程) of making decision based on facts and knowledge.
  - *Mechanism* (机制)

    How to do reasoning theoretically?
  - *Control Strategy (控制策略)*

    How to realize the mechanism?

# 什么是推理

- According to logical basis

  Deduction（演绎） vs. Induction（归纳）

- According to the certainty of knowledge

  Reasoning under certainty（确定） vs. uncertainty（不确定）

- According to the monotony of reasoning process

  Monotonic（单调） vs. Non-monotonic（非单调）

# 推理的过程

- Inference Direction (推理方向)

  Facts → Conclusions (Forward chain, Data-driven)

  Facts ← Conclusions (Backward chain, Goal-driven)

  Facts $\boxed{\leftrightarrow}$ Conclusions (Bi-directional)

- Conflict Resolution (冲突解决)

  Sort knowledge for improving reasoning efficiency

- Search

# 谓词逻辑的推理是如何进行的？

- 推理过程多种多样
- 例1：
  - 如果今天不下雨，我就去你家
  - 今天没有下雨
- 例2：
  - 小王说他下午或者去图书馆或者在家休息
  - 小王没去图书馆

- 计算机如何选择？

# 消解原理（归结原理）Resolution Principle

- 美国数学家鲁滨逊提出消解原理（1965年）
- 基本的出发点：要证明一个命题为真都可以通过证明其否命题为假来得到
- 将多样的推理规则简化为一个——消解

鲁滨逊

# 什么叫消解

- 例1：
  - 小王说他下午或者去图书馆或者在家休息
  - 小王没去图书馆

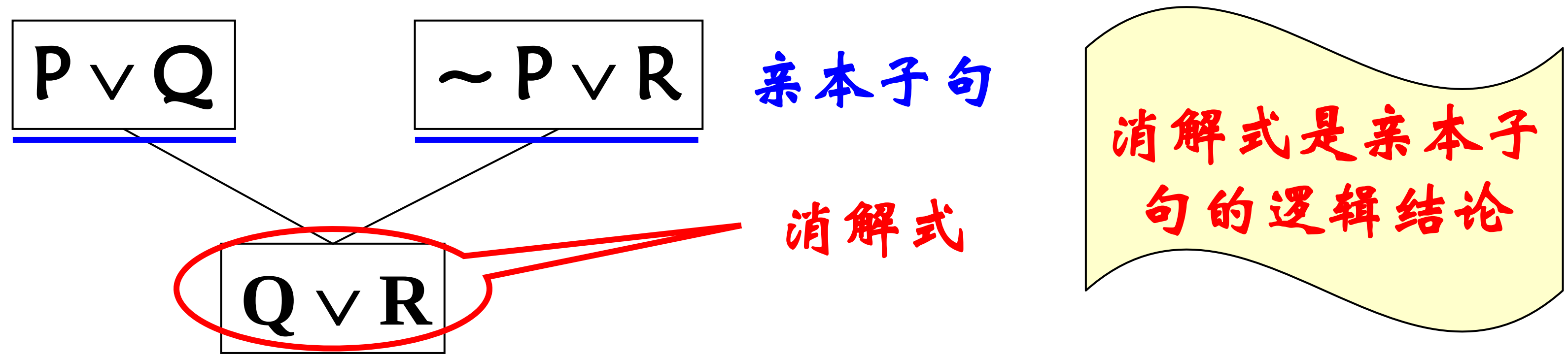
R——小王下午去图书馆

S——小王下午在家休息

$$\left.\begin{array}{r} R \vee S \\ \sim R \end{array}\right\} \Rightarrow S$$

- 例2：
  - 如果今天不下雨，我就去你家　　$\sim P \rightarrow Q \Leftrightarrow P \vee Q$
  - 今天没有下雨　　$\sim P$

# 什么叫消解




- 消解只能在仅含否定和析取联接词的公式（子句）间进行
- 必须先把公式化成规范的形式（范式，子句集）

# 含变量的消解

- 例： 苏格拉底论断

  凡人都会死.　　$(\forall x)(\text{Man}(x) \Rightarrow \text{Mortal}(x))$

  苏格拉底是人.　　Man (Socrates)

  如何得到结论：苏格拉底会死.　　Mortal(Socrates)

- 要完成消解还面临几个问题
  - “⇒”和“∀”必须去掉
    - $\text{Man}(x) \Rightarrow \text{Mortal}(x) \Leftrightarrow \sim \text{Man}(x) \vee \text{Mortal}$
    - “∀”怎么办？

  化为子句集

- 如果能去掉“∀”，$\sim$Man ($x$) 和Man (Socrates)也不能构成互补对，形式不一样，怎么办？

  置换与合一

# Terminology(相关术语)

- Literal （文字）
  - Atomic sentences and their negation
  - E.g. $P$ , $\sim P$, $Q(x, y)$, $\sim R(f(x, y), z)$
- Clause（子句）
  - disjunction of literals
  - E.g. $P(x) \vee Q(x)$ , $\sim R(x,\ f(y)) \vee S(x,g(x))$
- Conjunctive Normal Form（CNF, 合取范式）
  - conjunction of clauses
- Clause Set（子句集）
  - $\{ P(x) \vee Q(x)$ , $\sim R(x, f(y)) \vee S(x, g(x))\}$
  - Equals: $(P(x) \vee Q(x)) \wedge (\sim R(x, f(y)) \vee S(x, g(x)))$

- 消解原理（Resolution Principle）：
  - （1）一种用于*子句*公式集的重要推理规则；
  - （2）*子句*是由*文字*的析取组成的公式；
  - （3）一个原子公式和原子公式的否定叫作*文字*；

- 消解的过程：**消解规则应用于母体子句对，以便产生倒出子句；**

举例：{ E1∨E2 ，～E2∨E3 } 消解倒出 E1∨E3

问题：如何求取子句集？消解过程怎么进行？

# 子句集的求取（共9步）

将下列谓词公式化为一个子句集

$$(\forall x)\{P(x)\Rightarrow\{(\forall y)[\underline{P(y)\Rightarrow P(f(x,y))}]\wedge\sim(\forall y)[\underline{Q(x,y)\Rightarrow P(y)}]\}\}$$

- (1) 消去蕴涵符号

  只应用∨和～符号，以～A∨B替换A⇒B。

(1) $(\forall x)\{\sim P(x)\vee\{(\forall y)[\sim P(y)\vee P(f(x,y))]\wedge\sim(\forall y)[\sim Q(x,y)\vee P(y)]\}\}$

## (2) 减少否定的辖域范围

每个否定符号只用到一个谓词符号上。反复应用狄·摩根定律：$\sim(P \vee Q)$ 等价于 $\sim P \wedge \sim Q$

和 $\sim(\forall x)P(x)$ 等价于 $(\exists x)[\sim P(x)]$

(1) $(\forall x)\{\sim P(x) \vee \{(\forall y)[\sim P(y) \vee P(f(x, y))] \wedge \sim(\forall y)[\sim Q(x, y) \vee P(y)]\}\}$

$\Downarrow$

(2) $(\forall x)\{\sim P(x) \vee \{(\forall y)[\sim P(y) \vee P(f(x, y))] \wedge (\exists y)[Q(x, y) \wedge \sim P(y)]\}\}$

## (3) 变量标准化

对变量改名，以保证每个量词有其自己唯一的变量符号。

## (3) 变量标准化

对变量改名，以保证每个量词有其自己唯一的变量符号。

对哑元（虚构变量）改名，以保证每个量词有其自己唯一的哑元。

(2) $(\forall x)\{\sim P(x) \lor \{(\forall y)[\sim P(y) \lor P(f(x, y))] \land (\exists y)[Q(x, y) \land \sim P(y)]\}\}$

$\Downarrow$

(3) $(\forall x)\{\sim P(x) \lor \{(\forall y)[\sim P(y) \lor P(f(x,y))] \land (\exists w)[Q(x,w) \land \sim P(w)]\}\}$

- (4) 消去存在量词
  - 情况1："∃"在"∀"的辖域范围内
    - 使用Skolem函数替换
    - 例： $\forall x \exists y\,\mathrm{Height}(x, y) => \forall x\,\mathrm{Height}(x, f(x))$
    - Skolem函数$f(x)$表明了$y$与$x$之间的依赖或映射关系
    - 例： $\forall x \forall y \exists z\,P(x, y, z) => \forall x \forall y\,P(x, y, f(x, y))$
  - 情况2："∃"不在"∀"的辖域范围内
    - 使用常量替换
    - $\exists x \forall y\,P(x, y) => \forall y\,P(A, y)$

(3) $(\forall x)\{\sim P(x) \vee \{(\forall y)[\sim P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge (\exists w)[Q(x,w) \wedge \sim P(w)]\}\}$

$w = g(x)$为一Skolem函数

(4) $(\forall x)\{\sim P(x) \vee \{(\forall y)[\sim P(y) \vee P(f(x, y))] \wedge [Q(x, g(x)) \wedge \sim P(g(x))]\}\}$

- (5) 化为前束形
- 把所有全称量词移到公式的左边，并使每个量词的辖域包括这个量词后面公式的整个部分。
- 

前束形={前缀}　　　{母式}

全称量词串　无量词公式

(4) $(\forall x)\{\sim P(x) \vee \{(\forall y)[\sim P(y) \vee P(f(x, y))] \wedge [Q(x, g(x)) \wedge \sim P(g(x))]\}\}$

$\Downarrow$

(5) $(\forall x)(\forall y)\underline{\{\sim P(x) \vee \{[\sim P(y) \vee P(f(x, y))] \wedge [Q(x, g(x)) \wedge \sim P(g(x))]\}\}}$

- (6) 母式化合取范式
- 任何母式都可写成由一些谓词公式和(或)谓词公式的否定的析取的有限集组成的合取。(分配律)

(5) $(\forall x)(\forall y)\{\underline{\sim P(x) \vee \{[\sim P(y) \vee P(f(x, y))] \wedge [Q(x, g(x)) \wedge \sim P(g(x))]\}}\}$

$\Downarrow$

(6) $\underline{(\forall x)(\forall y)}\{[\sim P(x) \vee \sim P(y) \vee P(f(x, y))] \wedge [\sim P(x) \vee Q(x, g(x))] \wedge [\sim P(x) \vee \sim P(g(x))]\}$

## (7) 消去全程量词

- 所有余下的量词均被全称量词量化了。消去前缀，即消去明显出现的全称量词。

(6) $(\forall x)(\forall y)\{[\sim P(x) \vee \sim P(y) \vee P(f(x, y))] \wedge [\sim P(x) \vee Q(x, g(x))] \wedge [\sim P(x) \vee \sim P(g(x))]\}$

⇩

(7) $\{[\sim P(x) \vee \sim P(y) \vee P(f(x, y))] \wedge [\sim P(x) \vee Q(x, g(x))] \wedge [\sim P(x) \vee \sim P(g(x))]\}$

- (8) 消去连词符号∧

  用{A, B}代替(A∧B)，消去符号∧，得到一个有限集，其中每个公式是文字的析取（子句）。

- (9) 更换变量名

  使一个变量符号不出现在一个以上的子句中。

(7) $\{[\sim P(x) \vee \sim P(y) \vee P(f(x, y))] \wedge [\sim P(x) \vee Q(x, g(x))] \wedge [\sim P(x) \vee \sim P(g(x))]\}$

⇓

(8) $\{\sim P(x) \vee \sim P(y) \vee P(f(x, y)),$
$\sim P(x) \vee Q(x, g(x)),$
$\sim P(x) \vee \sim P(g(x))\}$

⇒

(9) $\{\sim P(x1) \vee \sim P(y) \vee P(f(x1, y)),$
$\sim P(x2) \vee Q(x2, g(x2)),$
$\sim P(x3) \vee \sim P(g(x3))\}$

# Question

- 求子句集：

"Everyone who loves all animals is loved by someone."

$\forall x \{[\forall y (Animal(y) \Rightarrow Loves(x,y))] \Rightarrow \exists y\ Loves(y,x)\}$

# Answer

$\forall x\,\{[\forall y\,(\mathrm{Animal}(y) \Rightarrow \mathrm{Loves}(x,y))] \Rightarrow \exists y\ \mathrm{Loves}(y,x)\}$

1. 消去蕴含符号 $\forall x\,(\sim \forall y\,(\sim Animal(y) \vee Loves(x, y)) \vee \exists y\ Loves(y, x))$

2. 减小否定辖域范围 $\forall x\,(\exists y \sim(\sim Animal(y) \vee Loves(x, y)) \vee \exists y\ Loves(y, x))$

$\forall x\,(\exists y\,(Animal(y) \wedge \sim Loves(x,y)) \vee \exists y\ Loves(y, x))$

3. 变量标准化

$\forall x\,(\exists y\,(Animal(y) \wedge \sim Loves(x, y)) \vee \exists \mathbf{z}\ Loves(\boldsymbol{z}, x))$

4. 消去存在量词 $\forall x\,((Animal(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \wedge \sim Loves(x, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))) \vee Loves(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), x))$

*接上页*

$$\forall x\,((Animal(f(x)) \wedge \sim Loves(x, f(x))) \vee Loves(g(x), x))$$

5. 化为合取范式 $\forall x\,((Animal(f(x)) \vee Loves(g(x),x)) \wedge (\sim Loves(x, f(x)) \vee Loves(g(x),x)))$

6. 消去全称量词

$$(Animal(f(x)) \vee Loves(g(x), x)) \wedge (\sim Loves(x, f(x)) \vee Loves(g(x), x))$$

7. 消去连词符号∧，变子句集

$$\{\, Animal(f(x)) \vee Loves(g(x), x),\ \sim Loves(x, f(x)) \vee Loves(g(x), x) \,\}$$

8. 变量标准化

(1) $Animal(f(x1)) \vee Loves(g(x1), x1)$

(2) $\sim Loves(x2, f(x2)) \vee Loves(g(x2), x2)$

# 消解推理规则
# Resolution Inference Rules

- 消解式的定义
  - 令$L_1$, $L_2$为两任意原子公式；$L_1$和$L_2$具有相同的谓词符号，但一般具有不同的变量。
  - 已知两子句$L_1 \vee \alpha$和$\sim L_2 \vee \beta$,如果$L_1$和$L_2$具有**最一般合一者** $\sigma$，那么通过消解可以从这两个父辈子句推导出一个新子句$(\alpha \vee \beta)\sigma$。这个新子句叫做消解式。

# 证明

**Resolution:**

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = L \vee \alpha \\ C_2 = \sim L \vee \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \; C_{12} = \alpha \vee \beta$$

**Proof:**

$$\because C_1 = \alpha \vee L \Leftrightarrow \sim \alpha \Rightarrow L \;\text{且}, C_2 = \sim L \vee \beta \Leftrightarrow L \Rightarrow \beta$$

$$\therefore C_1 \wedge C_2 \Leftrightarrow (\sim \alpha \Rightarrow L) \wedge (L \Leftrightarrow \beta)$$

$$[(\sim \alpha \Rightarrow L) \wedge (L \Leftrightarrow \beta)] \Rightarrow [\sim \alpha \Rightarrow \beta]$$

$$\sim \alpha \Rightarrow \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \vee \beta = C_{12}$$

$$\therefore C_{12} = C_1 \wedge C_2$$

# 消解式例子

## (a) 空子句 NIL Clause

父辈子句 $P$ $\sim P$

NIL

## (b) 假言推理 Modus ponens

$P$ $\sim P \vee Q$ （$P \Rightarrow Q$）

$Q$

## (c) 合并 Combination

$P \vee Q$ $\sim P \vee Q$

$Q \vee Q = Q$

## (d) 重言式 Tautologies

$P \vee Q \quad \sim P \vee \sim Q$

$\boxed{Q \vee \sim Q}$

$P \vee Q \quad \sim P \vee \sim Q$

$\boxed{P \vee \sim P}$

## (e) 链式（三段论） Chain

$\sim P \vee Q \quad \sim Q \vee R$

$\boxed{\sim P \vee R}$

# 含有变量的消解
# Resolution with Variable

- 含有变量的子句的消解
  - 要把消解推理规则推广到含有变量的子句，必须找到一个作用于父辈子句的置换，使父辈子句含有互补文字。

- Example

$P[x,f(y)] \vee Q(x) \vee R[f(a),y]$ $\sim P[f(f(a)),z] \vee R(z,w)$

$\sigma = \{f(f(a))/x,\ f(y)/z\}$

$Q[f(f(a))] \vee R(f(a), y) \vee R(f(y), w)$

# 消解反演 Resolution Refutation

## 消解反演证明

给出公式集$\{S\}$和目标公式$L$

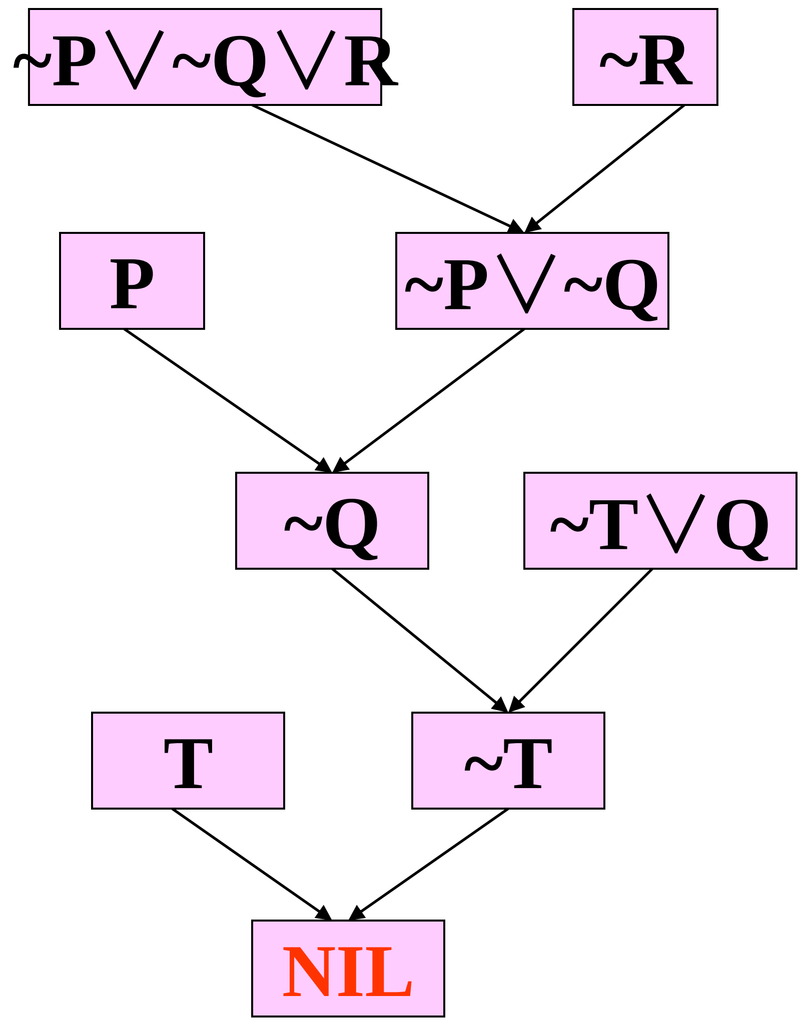
- 否定$L$，得$\sim L$；
- 把$\sim L$添加到$S$中去；
- 把新产生的集合 $T=\{\sim L, S\}$ 化成子句集；
- 应用消解原理，力图推导出一个表示矛盾的空子句。

# Example 1

- 设事实的公式集合
  {P，(P∧Q)⇒R，
  (S∨T)⇒Q，T}，
  证明：R

- 否定结论，将公式化为子句，得子句集：
- {P，～P∨～Q∨R，
  ～S∨Q，～T∨Q，T，
  ～R}

消解反演树



## Example2: Happy student

- “Happy Student”：Everyone who pass the computer test and win the prize is happy. Everyone who wish study or is lucky can pass all tests. Zhang doesn’t study, but he is lucky. Every lucky person can win the prize.
- Prove：Zhang is happy

- **Solution**
  - **Step1: first-order logic representation of the problem**

**Facts or Knowledge:**

$(\forall x)$ (Pass($x$, computer) $\wedge$ Win($x$, prize)) $\Rightarrow$ Happy($x$)

$(\forall x)$ $(\forall y)$ (Study($x$) $\vee$ Lucky($x$) $\Rightarrow$ Pass($x$, $y$))

~Study(zhang) $\wedge$ Lucky(zhang)

$(\forall x)$ (Lucky($x$) $\Rightarrow$ Win($x$, prize))

**Negation of the conclusion:** ~Happy（zhang）

**Step2: Convert the sentence above into clauses**

（1） ~Pass(x, computer)∨ ~Win(x, prize)∨ Happy(x)

（2） ~Study(y)∨ Pass(y, z)

（3） ~Lucky(u)∨ Pass(u, v)

（4） ~Study(zhang)

（5） Lucky(zhang)

（6） ~Lucky(w)∨Win(w, prize)

（7） ~Happy(zhang)

## Step3: Resolve these clauses

(1)~Pass(x,computer)∨~Win(x,prize)∨Happy(x)    (7)~Happy(zhang)

{zhang/x}

~Pass(zhang,computer)∨~Win(zhang,prize)    (6)~Lucky(w)∨Win(w,prize)

{zhang/w}

(5) Lucky(zhang)    ~Pass(zhang,computer)∨~Lucky(zhang)

~Pass(zhang,computer)    (3) ~Lucky(u)∨Pass(u,v)

{zhang/u,computer/v}

~Lucky(zhang)    (5) Lucky(zhang)

NIL

## Example3: 储蓄问题

前提：每个储蓄钱的人都获得利息。

结论：如果没有利息，那么就没有人去储蓄钱

**证明：**

(1）规定原子公式：

$S(x, y)$ 表示 “$x$储蓄$y$”

$M(x)$ 表示 “$x$是钱”

$I(x)$ 表示 “$x$是利息”

$E(x, y)$ 表示 “$x$获得$y$”

(2）用谓词公式表示前提和结论：

前提：$(\forall x)[(\exists y)(S(x,y))\wedge M(y)]\Rightarrow[(\exists y)(I(y)\wedge E(x,y))]$

结论：$[\sim(\exists x)I(x)]\Rightarrow[(\forall x)(\forall y)(M(y)\Rightarrow \sim S(x,y))]$

(3) 化为子句形

把前提化为子句形：

1) $\sim S(x,y) \vee \sim M(y) \vee I(f(x))$

2) $\sim S(x,y) \vee \sim M(y) \vee E(x,f(x))$

把结论的否定化为子句形：

3) $\sim I(z)$

4) $S(\mathrm{a},\mathrm{b})$

5) $M(\mathrm{b})$

# (4) 消解反演求空子句（NIL）

$\sim S(x,y) \vee \sim M(y) \vee I(f(x))$　　　$\sim I(z)$

$\sigma=\{f(x)/z\}$

子句（6）$\sim S(x,y) \vee \sim M(y)$　　　$S(a,b)$

$\sigma=\{a/x, b/y\}$

子句（7）$\sim M(b)$　　　$M(b)$

NIL

储蓄问题反演树

- 消解反演求解
  - 把由目标公式的否定产生的每个子句添加到目标公式否定之否定的子句中去。
  - 按照反演树，执行和以前相同的消解，直至在根部得到某个子句止。
  - 用根部的子句作为一个回答语句
- 实质
  - 根部为NIL 变换为 根部为回答语句

# Example 4

- Given： “Zhang and Li are classmates; If $x$ and $y$ are classmates, then the classroom of $x$ is the one of $y$, Now Zhang is at 302 classroom.”
  Question： “Now which classroom is Li at?”
- Answer：
  - Define the predicates:
    - $C(x, y)$ $x$ and $y$ are classmates；
    - $At(x, u)$ $x$ is at $u$ classroom。
  - Represent the given facts as *wffs*：
    - C(zhang, li)
    - $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall u)\ (C(x, y) \wedge At(x, u) \Rightarrow At(y, u))$
    - At(zhang, 302)
  - Represent the Question’s negation as *wffs*：
    - $\sim(\exists v)At(li, v)$ 即求$v$=？？？

- Convert the given facts' *wffs* to clauses:
  - C(zhang, li)
  - $\sim C(x, y) \vee \sim At(x, u) \vee At(y, u)$
  - At(zhang, 302)
- Convert the question's negation to clauses and add its negation, as **$\sim At(li, v) \vee At(li, v)$**

## Resolution (求解过程)

$\sim At(li, v) \vee At(li, v)$

$\sim C(x, y) \vee \sim At(x, u) \vee At(y, u)$

$\{li/y\ ,\ v/u\}$

$At(li, v) \vee \sim C(x, li) \vee \sim At(x, v)$

$C(zhang, li)$

$\{Zhang/x\}$

$At(li, v) \vee \sim At(zhang, v)$

$At(zhang, 302)$

$\{302/v\}$

$At(li, 302)$

## Example 5

“如果无论John到哪里去，Fido也就去那里，那么如果John在学校里，Fido在哪里呢？”

**解：**(1）用谓词公式表示命题和事实：

事实： $(\forall x)[AT(JOHN, x) \Rightarrow AT(FIDO, x)]$

$AT(JOHN, SCHOOL)$

目标： $(\exists x)\ AT(FIDO, x)$ 求$x$

(2）反演求解过程(1)：

目标否定子句： $\sim AT(FIDO, x)$

将其添加到目标否定之否定的子句中：

$$\sim AT(FIDO, x) \vee AT(FIDO, x)$$

(3）反演求解过程(2)：

$\sim AT(FIDO, x) \vee AT(FIDO, x)$　　　$\sim AT(JOHN, x) \vee AT(FIDO, x)$

$AT(FIDO, x) \vee \sim AT(JOHN, x)$　　　$AT(JOHN, SCHOOL)$

$\sigma=\{SCHOOL/x\}$

$AT(FIDO, SCHOOL)$

(4）用从根部求得答案AT(FIDO, SCHOOL )

# 作业1

- 假设已知下列事实：
  1）小李（Li）喜欢容易的（Easy）课程（Course）。
  2）小李不喜欢难的（Difficult）课程。
  3）工程类（Eng）课程都是难的。
  4）物理类（Phy）课程都是容易的。
  5）小吴（Wu）喜欢所有小李不喜欢的课程。
  6）Phy200是物理类课程。
  7）Eng300是工程类课程。
- 请用消解反演法回答下列问题：
  1）小李喜欢什么课程？
  2）小吴喜欢Eng300课程吗？

# 作业2

- 某公司招聘工作人员，A，B，C三人应试，经面试后公司表示：

  (1) 三人中至少录取一人

  (2) 如果录取A而不录取B，则一定录取C

  (3) 如果录取B，则一定录取C

问：公司一定录取谁？