

## 第四章:不确定性推理

**不确定性推理 (reasoning with uncertainty) 也称不精确推理，是一种建立在非经典逻辑基础上的基于不确定性知识的推理。**

**所谓不确定性推理是从不确定性的初始证据出发，通过运用不确定性的知识，最终推出具有一定程度的不确定性但却是合理或者近乎合理的结论的思维过程。**

**例：**

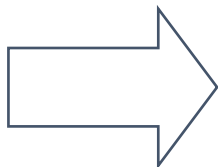
**如果乌云密布\电闪雷鸣，则可能要下暴雨。**

**如果头痛发烧，则大概是患了感冒。**

# 不确定性推理

■不精确思维并非专家的习惯或爱好所至，而是客观现实的要求。

- 很多原因导致同一结果
- 推理所需的信息不完备
- 背景知识不足
- 信息描述模糊
- 信息中含有噪声
- 规划是模糊的
- 推理能力不足
- 解题方案不唯一



在人类的知识和思维行为中，精确性只是相对的，不精确性才是绝对的。知识工程需要各种适应不同类的不同精确性特点的不精确性知识描述方法和推理方法。

# 不确定性推理

- 在客观世界中，由于事物发展的随机性和复杂性，人类认识的不完全、不可靠、不精确和不一致性，自然语言中存在的模糊性和歧义性，使得现实世界中的事物以及事物之间的关系极其复杂，带来了大量的不确定性。
- 大多数要求智能行为的任务都具有某种程度的不确定。
- 不确定性可以理解为在缺少足够信息的情况下做出判断。

# 不确定性推理

- **确定性推理**是建立在经典逻辑基础上的
- 经典逻辑的基础之一就是集合论
- 这在很多实际情况中是很难做到的，如高、矮、胖、瘦就很难精确地分开。
- **经典逻辑不适合用来处理不确定性。**
- **不确定推理**是建立在非经典逻辑基础上的一种推理，它是对不确定性知识的运用与处理。
- **不确定性推理就是从不确定性初始证据出发，通过运用不确定性的知识，最终推出具有一定程度的不确定性但却是合理或者近乎合理的结论的思维过程。**

# 不确定性推理

- 在专家系统中，不确定性表现在证据、规则和推理三个方面，需要对专家系统中的事实与规则给出不确定性描述，并在此基础上建立不确定性的传递计算方法。
- 要实现对不确定性知识的表达，须解决：
  - 表示问题
  - 计算问题
  - 语义问题

## 4.1 不确定性推理中的基本问题

**要实现对不确定性知识的处理，必须要解决不确定知识的表示问题，不确定信息的计算问题，以及不确定性表示和计算的语义解释问题。**

### 1. 表示问题

- 1、知识不确定性的表示
- 2、证据的不确定性表示
- 3、结论的不确定性表示

### 2. 度量问题

量度和数值的取值范围

### 3. 计算问题

- 1、不确定性的传递算法
- 2、结论不确定性的合成
- 3、组合证据的不确定性算法

# 表示问题

表示问题指的是采用什么方法描述不确定性。通常有数值表示和非数值的语义表示方法。数值表示便于计算、比较；非数值表示，是一种定性的描述。

在专家系统中的“不确定性” 分为：（E是规则的前提即证据，H是该规则的结论）

知识的不确定性 ( $E \rightarrow H$ ,  $f(H, E)$ )

它表示相应知识的不确定性程度，称为知识或规则强度。

（规则的不确定性——用一个数值  $f(H, E)$  表示，称为规则强度）

证据的不确定性 ( $E$ ,  $C(E)$ )

它表示证据E为真的程度  $C(E)$ 。它有两种来源：初始证据 (医疗诊断中的症状、化验结果等数据 来源于观察)；前面推出的结论作为当前证据 (通过计算得到)。

**结论的不确定性** ：由于知识和证据具有不确定性,结论也不确定

# 度量问题

- 在进行不确定性的表示时，还需考虑不确定性的量度和数值的取值范围 如 $C(E)$ 和 $f(H, E)$ 的取值范围为多大，只有这样每个数据才会有确定的意义
- 在确定一量度方法及其范围时，应注意：
  - ① 量度要能充分表达相应的知识和证据的**不确定性程度**
  - ② 量度范围的指定应**便于**领域专家及用户对不确定性的**估计**
  - ③ 量度要**便于**对不确定性的**更新**进行**计算**，而且对结论算出的不确定性量度**不能超出**量度规定的**范围**
  - ④ 量度的确定应当是**直观的**，同时应有相应的**理论依据**



# 不确定性的更新算法

- 不精确推理的根本目的是根据用户提供的初始证据，通过运用不确定性知识，最终推出不确定性的结论，并推算出结论为确定性的程度
- 不确定性的更新问题——在推理过程中如何考虑知识不确定性的动态积累和传递

更新算法也是不确定性的计算问题

# 计算问题

- 计算问题主要指不确定性的**传播与更新**，即**获得新信息的过程**。
- 它是在领域专家给出的**规则强度**和用户给出的**原始证据的不确定性**的基础上，定义一组函数，求出结论的不确定性度量。
- 它主要包括如下三个方面：

## (1)不确定性的传递算法

已知规则的前提E的不确定性 $C(E)$ 和规则强度 $f(H, E)$ ，求假设H的不确定性 $C(H)$ ，即定义函数 $g_1$ ，使得：

$$C(H) = g_1(C(E), f(H, E))$$

# 计算问题

## (2) 结论不确定性合成

即已知由两个**独立的证据E1和E2**, 求得的假设H的不确定性度量 $C_1(H)$ 和 $C_2(H)$ , 求证据E1和E2的组合导致的假设H的不确定性 $C(H)$ , 即定义函数 $g_2$ , 使得:

$$C(H) = g_2(C_1(H), C_2(H))$$

## (3) 组合证据的不确定性算法

已知证据E1和E2的不确定性度量 $C(E1)$ 和 $C(E2)$ , 求证据E1和E2的析取和合取的不确定性, 即定义函数 $g_3$ 和 $g_4$ 使得:

$$C(E1 \wedge E2) = g_3(C(E1), C(E2))$$

$$C(E1 \vee E2) = g_4(C(E1), C(E2))$$

## (1) 最大最小法

$$C(E1 \wedge E2) = \min \{C(E1), C(E2)\}$$

$$C(E1 \vee E2) = \max \{C(E1), C(E2)\}$$

## (2) 概率方法 (要求事件之间完全独立)

$$C(E1 \wedge E2) = C(E1) \times C(E2)$$

$$C(E1 \vee E2) = C(E1) + C(E2) - C(E1) \times C(E2)$$

## (3) 有界方法

$$C(E1 \wedge E2) = \max \{0, C(E1) + C(E2) - 1\}$$

$$C(E1 \vee E2) = \min \{1, C(E1) + C(E2)\}$$

【注】：上述C(E)表示证据E为真的程度，如可信度、概率等。每组公式都有相应的适用范围和使用条件。

# 不确定性的匹配算法

- 推理中，为了找到所需的知识，需要用知识的前提条件与已知证据进行**匹配**，只有匹配成功的知识才有可能被应用
- 在**确定性推理**中，知识是否匹配成功很容易确定的
- 在**不精确推理**中，由于知识和证据都具有不确定性，而且知识所要求的不确定性程度与证据**实际具有的不确定性程度不一定相同**，因而就出现了“怎样才算匹配成功？”的问题

# 不确定性的匹配算法

- 对怎样才算匹配成功?，常用的解决方法：
  - 设计一个算法用来计算匹配双方**相似的程度**，另外再指定一个**相似的限度**，用来衡量匹配双方相似的程度是否落在指定的限度内。如果落在指定的限度内，就称它们是**可匹配**的，相应的知识可被应用，否则就称它们是**不可匹配**的，相应的知识不可应用
  - 用来计算匹配双方相似程度的算法称为**不确定性匹配算法**，用来指出相似的限度称为**阈值**

## 4.3 概率推理

- 概率论——研究随机现象中数量规律的科学
- 随机现象——在相同的条件下重复进行某种实验时，所得实验结果不一定完全相同且不可预知的现象。——掷硬币的实验
- 人工智能所讨论的不确定性现象，虽然不完全是随机的过程，但是实践证明，采用概率论的思想方法考虑能够得到较好的结果
-

## 4.3 概率推理

- **随机实验**：随机实验是一个可观察结果的人工或自然的过程，其产生的结果可能不止一个，且不能事先确定会产生什么结果
- **样本空间**：样本空间是一个随机实验的全部可能出现的结果的集合，通常记作 $\Omega$ ， $\Omega$ 中的点（即一个可能出现的实验结果）称为样本点，通常记作 $\omega$
- **随机事件**：随机事件是一个随机实验的一些可能结果的集合，是样本空间的一个子集。常用大写字母A,B,C,...表示



## 4.3 概率推理

- 两个事件A与B可能有以下几种特殊关系：
  - **包含**：若事件B发生则事件A也发生，称“A包含B”，或“B包含于A”，记作 $A \supset B$ 或 $B \subset A$
  - **等价**：若 $A \supset B$ 且 $B \subset A$ ，即A与B同时发生或同时不发生，则称A与B等价，记作 $A=B$
  - **互斥**：若A与B不能同时发生，则称A与B互斥，记作 $AB=\varphi$
  - **对立**：若A与B互斥，且必有一个发生，则称A与B对立，记作 $A=\sim B$ 或 $B=\sim A$ ，又称A为B的余事件，或B为A的余事件
- 任意两个事件不一定会是上述几种关系中的一种

## 4.3 概率推理

- 设 $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n$ 为一些事件，它们有下述的运算：
  - **交**：记 $C =$ “ $A$ 与 $B$ 同时发生”，称为事件 $A$ 与 $B$ 的交， $C = \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$ ，记作 $C = A \cap B$ 或 $C = AB$
  - **并**：记 $C =$ “ $A$ 与 $B$ 中至少有一个发生”，称为事件 $A$ 与 $B$ 的并， $C = \{\omega | \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$ ，记作 $C = A \cup B$
  - **差**：记 $C =$ “ $A$ 发生而 $B$ 不发生”，称为事件 $A$ 与 $B$ 的差， $C = \{\omega | \omega \in A \text{ 但 } \omega \notin B\}$ ，记作或 $C = A \setminus B$ 或 $C = A - B$
  - **求余**： $\sim A = \Omega \setminus A$

## 4.3 概率推理

- 事件的运算有以下几种性质：

- **交换率：**  $A \cup B = B \cup A$        $AB = BA$

- **结合律：**  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$   
 $(AB)C = A(BC)$

- **分配律：**  $(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$   
 $(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$

- **摩根率：**  $\sim (\bigcap_{i=1}^n A_i) = \bigcup_{i=1}^n \sim A_i$        $\sim (\bigcup_{i=1}^n A_i) = \bigcap_{i=1}^n \sim A_i$

- **事件计算的优先顺序为：求余，交，差和并**

## 4.3 概率推理

- 定义：设 $\Omega$ 为一个随机实验的样本空间，对 $\Omega$ 上的任意事件 $A$ ，规定一个实数与之对应，记为 $P(A)$ ，满足以下三条基本性质，称为事件A发生的概率：
  1.  $0 \leq P(A) \leq 1$
  2.  $P(\Omega) = 1 \quad P(\phi) = 0$
  3. 若二事件 $A, B$ 互斥，即 $AB = \phi$ ，则
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
- 以上三条基本规定是符合常识的

## 4.3 概率推理

### ■ 定义:

- 设 $\{A_n, n=1, 2, \dots\}$ 为一组有限或可列无穷多个事件, 两两不相交, 且  $\sum A_n = \Omega$ , 则称事件族 $\{A_n, n=1, 2, \dots\}$ 为样本空间 $\Omega$ 的一个完备事件族
- 又若对任意事件B有 $BA_n = A_n$ 或 $\varnothing$ ,  $n=1, 2, \dots$ , 则称 $\{A_n, n=1, 2, \dots\}$ 为基本事件族

## 4.3 概率推理

- 完备事件族与基本事件族有如下的性质：
- 定理：

– 若 $\{A_n, n=1, 2, \dots\}$ 为一完备事件族，则

$$\sum_n P(A_n) = 1 \quad , \quad \text{且对于一事件} B \text{有} \quad P(B) = \sum_n P(A_n B)$$

– 又若 $\{A_n, n=1, 2, \dots\}$ 为一基本事件族，则

$$P(B) = \sum_{A_n \subset B} P(A_n)$$

## 4.3 概率推理

- **统计概率**也称古典概率，是通过对某一事件出现的频率定义的。统计概率具有以下性质：
  - 对任意事件A，有  $0 \leq P(A) \leq 1$
  - 必然事件  $\Omega$  的概率  $P(\Omega) = 1$ ，不可能事件  $\phi$  的概率  $P(\phi) = 0$
  - 对任意事件A，有  $P(\sim A) = 1 - P(A)$
  - 设事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ( $k \leq n$ ) 是两两互不相容的事件，则  $P(\bigcup_{i=1}^k A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$
  - 设A, B是两事件，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

## 4.3 概率推理

- 定义：设A, B为事件且 $P(A) > 0$ ，称

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件A已发生的条件下，事件B的**条件概率**， $P(A)$ 在概率推理中称为**边缘概率**

- 简称 $P(B|A)$ 为给定A时B发生的概率。 $P(AB)$ 称为A与B的**联合概率**。有联合概率公式：

$$P(AB) = P(B | A)P(A)$$



## 4.3 概率推理

- $0 \leq P(B | A) \leq 1$
- $P(\Omega | A) = 1$  ,  $P(\phi | A) = 0$
- 若  $B_1 B_2 = \phi$  则

$$P(B_1 + B_2 | A) = P(B_1 | A) + P(B_2 | A)$$

- **乘法公式**:  $P(AB) = P(A)P(B | A)$

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

- **全概率公式**: 设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  互不相交,  $\sum A_i = \Omega$ , 且  $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$  则对于任意事件  $A$  有
$$P(A) = \sum_i P(A_i)P(A | A_i)$$

## 4.3 概率推理

- 设 $A, B_1, B_2, \dots, B_n$ 为一些事件,  $P(A) > 0$ ,  $B_1, B_2, \dots, B_n$ 互不相交,  $P(B_i) > 0, i=1, 2, \dots, n$ , 且 $\sum_i P(B_i) = 1$ , 则对于 $k=1, 2, \dots, n$ ,

$$P(B_k | A) = \frac{P(B_k)P(A | B_k)}{\sum_i P(B_i)P(A | B_i)} \quad \text{(贝叶斯公式)}$$

- 贝叶斯公式容易由条件概率的定义、乘法公式和全概率公式得到
- 在贝叶斯公式中,  $P(B_i), i=1, 2, \dots, n$ 称为先验概率, 而 $P(B_i | A), i=1, 2, \dots, n$ 称为后验概率也是条件概率

## 4.3.2 概率推理方法

设有如下产生式规则：

**IF  $E$  THEN  $H$**

其中， $E$ 为前提条件， $H$ 为结论，具有随机性。

根据概率论中条件概率的含义，我们可以用**条件概率**表示上述产生式规则的**不确定性程度**，即表示为在证据出现的条件下，结论 $H$ 成立的确定性程度。

对于复合条件

**$E = E_1 \text{ AND } E_2 \text{ AND } \dots \text{ AND } E_n$**

可以用条件概率作为在证据出现时结论的确定程度。

## 4.3.2 概率推理方法

### Bayes定理

设  $A, B_1, B_2, \dots, B_n$  为一些事件,  $P(A) > 0, B_1, B_2, \dots, B_n$  互不相交,  $P(B_i) > 0, i=1, 2, \dots, n$ , 且  $\sum_i P(B_i) = 1$  则对于  $k = 1, 2, \dots, n$ , 有,

$$P(B_k | A) = \frac{P(B_k)P(A | B_k)}{\sum_i P(B_i)P(A | B_i)}$$

Bayes公式容易由条件概率的定义、乘法公式和全概率公式得到。在Bayes公式中, 称为先验概率, 而称为后验概率, 也就是条件概率。

## 4.3.2 概率推理方法

### 1. 单个证据的情况

如果用产生式规则

IF  $E$  THEN  $H_i$       $i = 1, 2, \dots, n$

其中前提条件 $E$ 代替Bayes公式中 $B$ , 用 $H_i$ 代替公式中的 $A_i$ 就可得到

$$P(H_i | E) = \frac{P(E | H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^n P(E | H_j)P(H_j)} \quad \dots$$

这就是说, 当已知结论 $H_i$ 的先验概率, 并且已知结论 $H_i(i=1,2,\dots)$ 成立时前提条件 $E$ 所对应的证据出现的条件概率 $P(E/H_i)$ , 就可以用上式求出相应证据出现时结论 $H_i$ 的条件概率 $P(H_i/E)$ 。

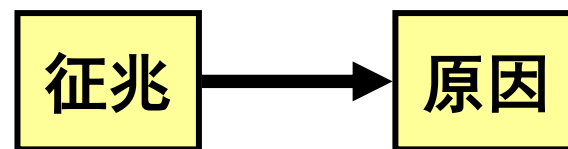
## 4.3.2 概率推理方法

### 2. 多个证据的情况

**对于有多个证据  $E_1, E_2, \dots, E_m$  和多个结论  $H_1, H_2, \dots, H_n$  并且每个证据都以一定程度支持结论的情况，上面的式子可进一步扩充为**

$$P(H_i / E_1 E_2 \cdots E_m) = \frac{P(E_1 / H_i) P(E_2 / H_i) \cdots P(E_m / H_i) P(H_i)}{\sum_{j=1}^n P(E_1 / H_j) P(E_2 / H_j) \cdots P(E_m / H_j) P(H_j)}$$

# Bayes用于不确定性推理



## ■ (1)后验概率

- **P**——征兆（证据**E**），汽车轮子发出刺耳的噪声；
- **Q**——原因（结论**H**），汽车刹车失调；
- 后验概率 $p(Q/P)$ ;

$$p(Q/P) = \frac{p(P/Q) \cdot p(Q)}{p(P)} = 0.88$$

先验概率 $p(P)$

$$p(P)=0.04$$

征兆**P**

原因**Q**

$$p(P/Q)=0.7$$

$$p(Q)=0.05$$

先验概率 $p(Q)$

## 4.3 概率方法

概率推理方法的优点是它有较强的**理论背景**和良好的**数学特征**，当证据及结论**彼此独立**时计算的**复杂度比较低**。其缺点是要求给出结论  $H_i$  的**先验概率**  $P(H_i)$  及证据  $E_j$  的**条件概率**  $P(E_j / H_i)$ ，尽管有些时候  $P(E_j / H_i)$  比  $P(H_i / E_j)$  相对容易得到，但总的来说，要想得到这些数据仍然是一件**相当困难的工作**。另外，Bayes公式的应用条件是很严格的，它要求各事件互相独立等，如若证据间存在**依赖关系**，就**不能直接使用这个方法**。



# 不确定性推理方法分类

纯概率方法虽然有严密的理论依据，但它通常要求给出事件的**先验概率和条件概率**，而这些数据又**不易获得**，因此其应用受到了限制。为了解决这这个问题，人们在概率理论的基础上发展起来了一些新的方法及理论：

## 1、主观Bayes方法

它是PROSPECTOR专家系统中使用的**不确定推理模型**，是对Bayes公式修正后形成的一种**不确定推理方法**。

## 2、可信度方法

它是MYCIN专家系统中使用的**不确定推理模型**，它以**确定性理论为基础**，方法简单、易用。

## 3、证据理论

它通过定义**信任函数、似然函数**，把知道和不知道区别开来。

## 4.4 主观Bayes方法

R.O.Duda等人于1976年提出了一种不确定性推理模型。在这个模型中，他们称推理方法为主观Bayes方法，并成功的将这种方法应用于地矿勘探系统PROSPECTOR中，

它是一种利用新的信息将先验概率 $P(H)$ 更新为后验概率 $P(H|E)$ 的一种计算方法。

在这种方法中，引入了两个数值 (LS, LN)

前者体现规则成立的**充分性**，后者则表现了规则成立的**必要性**

这种表示既考虑了事件A的出现对其结果B的**支持**，又考虑了A的不出现对B的**影响**

## 4.4 主观Bayes方法

Bayes公式: **P: 证据(E)** **Q: 结论 (H)**

$$p(Q / P) = \frac{p(P / Q) \cdot p(Q)}{p(P)}$$

先验概率 $p(P)$ 比先验概率 $p(Q)$ 更难获得

对Bayes理论进行改进, 消去先验概率 $p(P)$ ;

$$p(Q / P) = \frac{p(P / Q) \cdot p(Q)}{p(P)} \quad \textcircled{1}$$

$$p(\neg Q / P) = \frac{p(P / \neg Q) \cdot p(\neg Q)}{p(P)} \quad \textcircled{2}$$

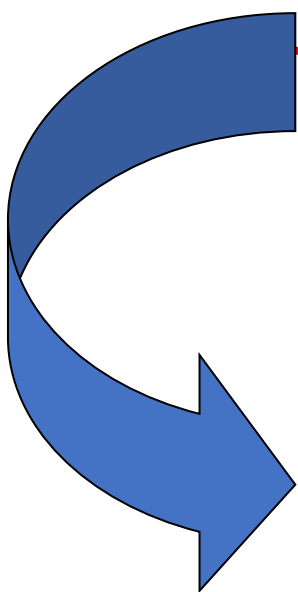
## 4.4 主观Bayes方法

$$p(Q / P) = \frac{p(P / Q) \cdot p(Q)}{p(P)}$$

①

$$p(\neg Q / P) = \frac{p(P / \neg Q) \cdot p(\neg Q)}{p(P)}$$

②


$$\frac{p(Q / P)}{p(\neg Q / P)} = \frac{p(P / Q) \cdot p(Q)}{p(P / \neg Q) \cdot p(\neg Q)}$$

## 4.4 主观Bayes方法

$$\frac{p(Q/P)}{p(\neg Q/P)} = \frac{p(P/Q) \cdot p(Q)}{p(P/\neg Q) \cdot p(\neg Q)}$$

$$O(Q) = \frac{p(Q)}{p(\neg Q)} = \frac{p(Q)}{1 - p(Q)}$$

**$O(Q)$ 随 $p(Q)$ 增大而增大**

①  $p(Q)=0, O(Q)=0$ ;

②  $p(Q)=1, O(Q)=\infty$ ;

**命题 $Q$ 的先验几率 $O(Q)$ :**  
 **$Q$ 成立的先验概率 $p(Q)$**   
**和**  
 **$Q$ 不成立的先验概率 $p(\neg Q)$**   
**之比**

## 4.4 主观Bayes方法

$$\frac{p(Q/P)}{p(\neg Q/P)} = \frac{p(P/Q) \bullet p(Q)}{p(P/\neg Q) \bullet p(\neg Q)}$$

命题Q的后验几率 $O(Q/P)$   
前提P成立情况下,  
Q成立的后验概率 $p(Q/P)$   
和  
Q不成立的后验概率 $p(\neg Q/P)$   
之比

$$\frac{p(Q/P)}{p(\neg Q/P)} = \frac{p(P/Q)}{p(P/\neg Q)} \bullet O(Q)$$

## 4.4 主观Bayes方法

命题Q的后验几率 $O(Q/P)$   
前提P成立情况下,  
Q成立的后验概率 $p(Q/P)$   
和  
Q不成立的后验概率 $p(\neg Q/P)$   
之比

$$\frac{p(Q/P)}{p(\neg Q/P)} = \frac{p(P/Q)}{p(P/\neg Q)} \cdot O(Q)$$

$$LS = \frac{p(P/Q)}{p(P/\neg Q)}$$

$$O(Q/P) = LS \cdot O(Q) \quad \textcircled{3}$$

## 4.4 主观Bayes方法

**P: 证据 Q: 结论**

$$\boxed{O(Q/P)} = \boxed{LS} \bullet \boxed{O(Q)} \quad \textcircled{3} \quad O(Q) = \frac{p(Q)}{p(\neg Q)}$$
$$O(Q/P) = \frac{p(Q/P)}{p(\neg Q/P)}$$

- 命题**Q**的先验几率**O(Q)**;
- 命题**Q**的后验几率**O(Q/P)**;
- **LS**——推理规则**P⇒Q**成立的充分性因子;
  - 表示**P**成立对**Q**成立的影响力;
- 公式**③**称为
  - Bayes公式的几率似然形式

$$LS = \frac{p(P/Q)}{p(P/\neg Q)}$$



## 4.4 主观Bayes方法

命题Q的后验几率 $O(Q/\neg P)$   
前提P不成立情况下,  
Q成立的后验概率 $p(Q/\neg P)$   
和  
Q不成立的后验概率 $p(\neg Q/\neg P)$   
之比

$$\frac{p(Q/\neg P)}{p(\neg Q/\neg P)} = \frac{p(\neg P/Q)}{p(\neg P/\neg Q)} \cdot O(Q)$$

$$LN = \frac{p(\neg P/Q)}{p(\neg P/\neg Q)}$$

$$O(Q/\neg P) = LN \cdot O(Q) \quad \textcircled{4}$$

$$p(Q / P) = \frac{p(P / Q) \bullet p(Q)}{p(P)} \quad \textcircled{1}$$

$$p(\neg Q / P) = \frac{p(P / \neg Q) \bullet p(\neg Q)}{p(P)} \quad \textcircled{2}$$



$$p(Q / \neg P) = \frac{p(\neg P / Q) \bullet p(Q)}{p(\neg P)} \quad \textcircled{1}$$

$$p(\neg Q / \neg P) = \frac{p(\neg P / \neg Q) \bullet p(\neg Q)}{p(\neg P)} \quad \textcircled{2}$$

## 4.4 主观Bayes方法

$$O(Q) = \frac{p(Q)}{p(\neg Q)}$$

$$O(Q/P) = \frac{p(Q/P)}{p(\neg Q/P)}$$

$$O(Q/\neg P) = \frac{p(Q/\neg P)}{p(\neg Q/\neg P)}$$

$$O(Q/P) = LS \bullet O(Q) \quad \textcircled{3}$$

$$O(Q/\neg P) = LN \bullet O(Q) \quad \textcircled{4}$$

▣ **LS**——推理规则**P⇒Q**成立的充分性因子； ★

▣ **LN**——推理规则**P⇒Q**成立的必要性因子； ★

## 4.4 主观Bayes方法

$$O(Q / P) = LS \bullet O(Q) \quad \textcircled{3}$$

$$O(Q / \neg P) = LN \bullet O(Q) \quad \textcircled{4}$$

□ **LS**——充分性因子

- $=1: O(Q/P)=O(Q)$ , P对Q无影响;
- $>1: O(Q/P)>O(Q)$ , P支持Q;
- $<1: O(Q/P)<O(Q)$ , P不支持Q;

□ **LN**——必要性因子

- $=1: O(Q/\neg P)=O(Q)$ ,  $\neg P$ 对Q无影响;
- $>1: O(Q/\neg P)>O(Q)$ ,  $\neg P$ 支持Q;
- $<1: O(Q/\neg P)<O(Q)$ ,  $\neg P$ 不支持Q;

## 4.4 主观Bayes方法

$$O(Q) = \frac{p(Q)}{p(\neg Q)}$$

$$O(Q / P) = LS \bullet O(Q) \quad \textcircled{3}$$

$$O(Q / P) = \frac{p(Q / P)}{p(\neg Q / P)}$$

$$O(Q / \neg P) = LN \bullet O(Q) \quad \textcircled{4}$$

$$O(Q / \neg P) = \frac{p(Q / \neg P)}{p(\neg Q / \neg P)}$$

□ **LS**——推理规则 **$P \Rightarrow Q$** 成立的充分性因子；

■ 表示**P成立**对Q成立的影响力；

□ **LN**——推理规则 **$P \Rightarrow Q$** 成立的必要性因子；

■ 表示**P不成立**对Q成立的影响力；

## 4.4 主观Bayes方法

$$O(Q / P) = LS \bullet O(Q) \quad \textcircled{3}$$

$$O(Q / \neg P) = LN \bullet O(Q) \quad \textcircled{4}$$

□ 基于专家主观估计的 $LS$ （和 $LN$ ）而演算出来的后验概率 $p(Q/P)$ 称为主观概率；

$$LS \bullet O(Q) \rightarrow O(Q / P) = \frac{p(Q / P)}{p(\neg Q / P)} = \frac{p(Q / P)}{1 - p(Q / P)}$$

$$LN \bullet O(Q) \rightarrow O(Q / \neg P) = \frac{p(Q / \neg P)}{p(\neg Q / \neg P)} = \frac{p(Q / \neg P)}{1 - p(Q / \neg P)}$$

□ 上述推算主观概率的方法称为主观Bayes方法；

$$O(Q/P) = LS * O(Q) \quad O(Q) = \frac{P(Q)}{P(\sim Q)}$$

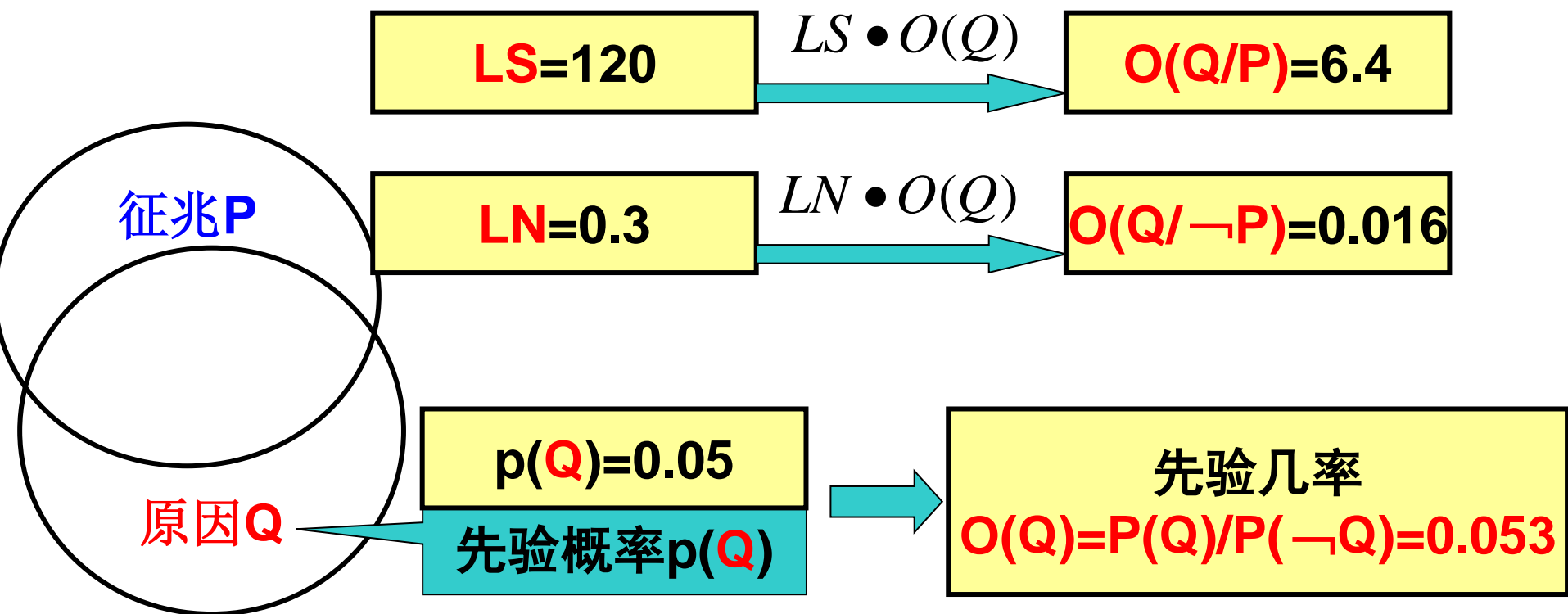
$$O(Q/P) = \frac{p(Q/P)}{p(\sim Q/P)} = \frac{p(Q/P)}{1-p(Q/P)} \quad \Rightarrow \quad P(Q/P) = \frac{O(Q/P)}{1+O(Q/P)}$$

$$\begin{aligned} P(Q/P) &= \frac{O(Q/P)}{1+O(Q/P)} = \frac{LS * O(Q)}{1+LS * O(Q)} = \frac{LS * \frac{P(Q)}{P(\sim Q)}}{1+LS * \frac{P(Q)}{P(\sim Q)}} = \frac{LS * P(Q)}{1-P(Q)+LS * P(Q)} \\ &= \frac{LS * P(Q)}{(LS-1) * P(Q) + 1} \end{aligned}$$

最终后验概率的公式,之和 P(Q) 和LS 有关系

## 4.4 主观Bayes方法

- **P**——**征兆**，汽车轮子发出刺耳的噪声；
- **Q**——**原因**，汽车刹车失调；

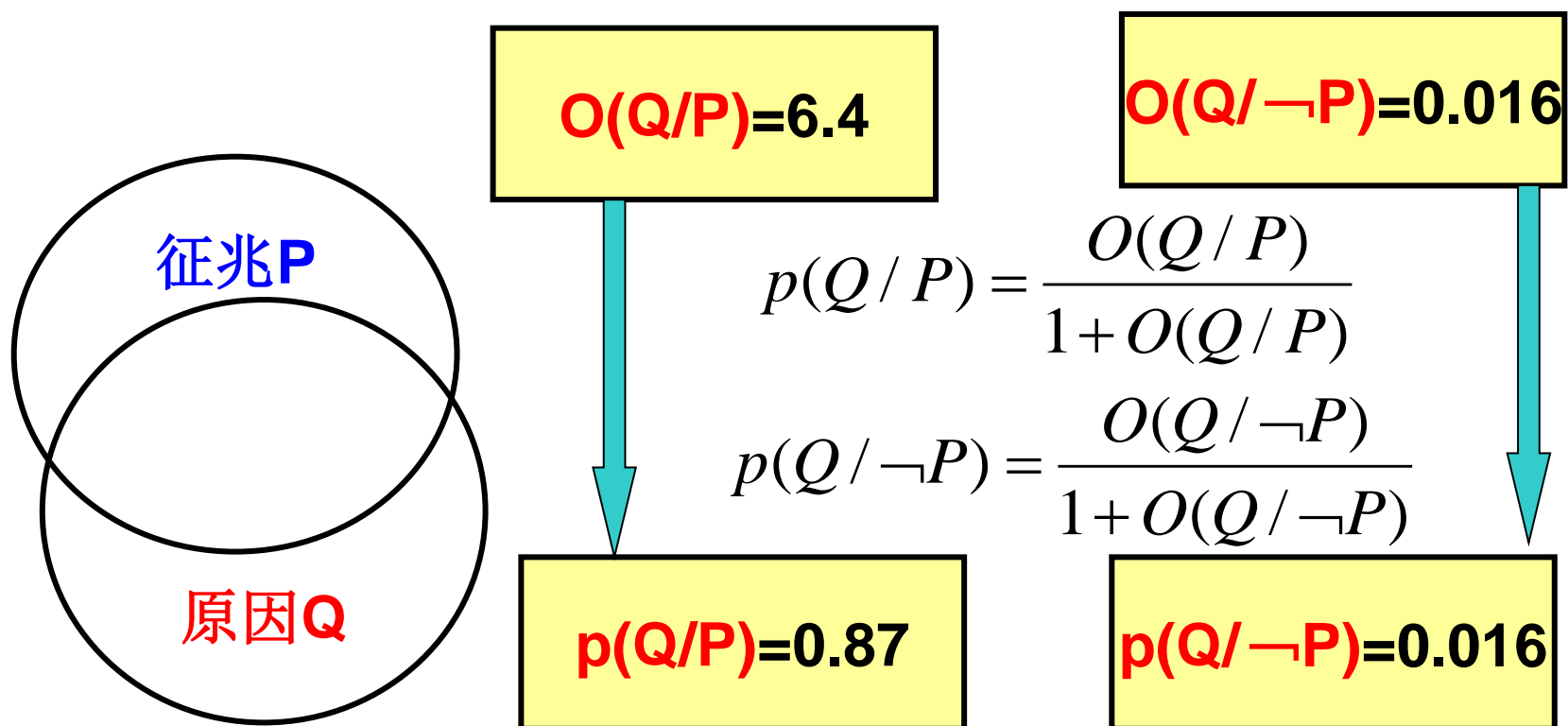




## 4.4 主观Bayes方法

**P**——**征兆**，汽车轮子发出刺耳的噪声；

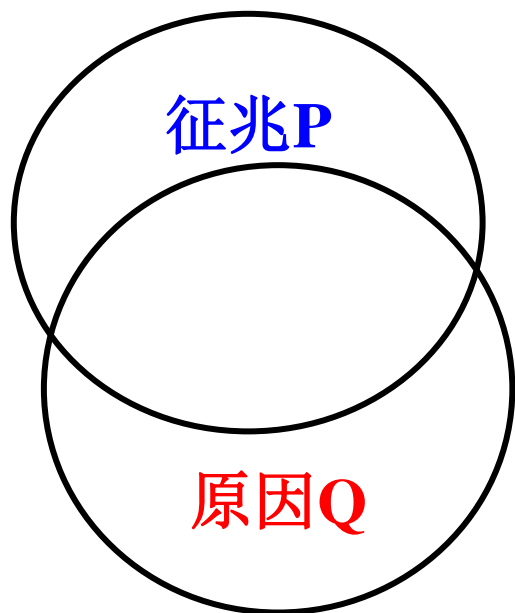
**Q**——**原因**，汽车刹车失调；



## 4.4 主观Bayes方法

与 传统Bayes方法的比较

**P**——**征兆**，汽车轮子发出刺耳的噪声；  
**Q**——**原因**，汽车刹车失调；



$$LS=120$$

$$p(Q)=0.05$$

主观Bayes方法

$$p(Q/P)=0.87$$

$$p(P)=0.04$$

$$p(Q)=0.05$$

$$p(P/Q)=0.7$$

Bayes公式

$$p(Q/P)=0.88$$

## 4.4 主观Bayes方法

### 知识不确定性的表示

在主观Bayes方法中，知识是用产生式规则表示的，具体形式为

***IF E THEN (LS, LN) H (P(H))***

其中

- (1)  $E$  是该知识的前提条件。它既可以是一个简单条件，也可以是复合条件。
- (2)  $H$  是结论。 $P(H)$  是  $H$  的先验概率，它指出在没有任何证据情况下的结论  $H$  为真的概率，即  $H$  的一般可能性。其值由领域专家根据以往的实践及经验给出。
- (3)  $(LS, LN)$  为规则强度。其值由领域专家给出。 $LS$ ,  $LN$  相当于知识的静态强度。 $LS$ :  $E$  的出现对  $H$  的支持程度,  $LN$ :  $E$  的出现对  $H$  的不支持程度。

## 4.4 主观Bayes方法

### 证据的不确定性

#### 1. 证据肯定存在的情况

在证据 $E$ 肯定存在时，把先验几率 $O(H)$ 更新为后验几率 $O(H/E)$ 的计算公式为

$$O(H / E) = LS \times O(H)$$

如果将上式换成概率，就可得到

$$P(H / E) = \frac{LS \times P(H)}{(LS - 1) \times P(H) + 1}$$

这是把先验概率 $P(H)$ 更新为后验概率 $P(H/E)$ 的计算公式。

## 4.4 主观Bayes方法

### 2. 证据肯定不存在的情况

在证据 $E$ 肯定不存在时，把先验几率 $O(H)$ 更新为后验几率 $O(H/\sim E)$ 的计算公式为

$$O(H/\sim E) = LN \times O(H)$$

如果将上式换成概率，就可得到

$$P(H/\sim E) = \frac{LN \times P(H)}{(LN - 1) \times P(H) + 1}$$

这是把先验概率 $P(H)$ 更新为后验概率 $P(H/\sim E)$ 的计算公式。

## 4.4 主观Bayes方法

### 3. 证据不确定的情况

在证据不确定的情况下，不能再用上面的公式计算后验概率，而要用杜达等人1976年证明了的公式

$$P(H / S) = P(H / E) \times P(E / S) + P(H / \sim E) \times P(\sim E / S) \quad (4.26)$$

来计算。  **$P(E/S)$  是观察S对证据E的支持度.**

## 4.4 主观Bayes方法

下面分四种情况讨论这个公式(4.26):

(1) 当 $P(E/S)=1$ 时, , 此时式(4.26)变成

$$P(H / S) = P(H / E) = \frac{LS \times P(H)}{(LS - 1) \times P(H) + 1}$$

这就是证据肯定存在的情况。

(2) 当 $P(E/S)=0$ 时, , 此时式(4.26)变成

$$P(H / S) = P(H / \neg E) = \frac{LN \times P(H)}{(LN - 1) \times P(H) + 1}$$

这就是证据肯定不存在的情况。

## 4.4 主观Bayes方法

**(3) 当 $P(E/S)=P(E)$ 时，表示E与S无关，利用全概率公式将公式(4.26)变为**

$$P(H / S) = P(H / E) \times P(E) + P(H / \neg E) \times P(\neg E) = P(H)$$

**(4) 当 $P(E/S)$ 为其它值时，通过分段线性插值就可得计算 $P(H/S)$ 的公式**

$$P(H / S) = \begin{cases} P(H / \neg E) + \frac{P(H) - P(H / \neg E)}{P(E)} \times P(E / S) & \text{当 } 0 \leq P(E / S) < P(E) \\ P(H) + \frac{P(H / E) - P(H)}{1 - P(E)} \times [P(E / S) - P(E)] & \text{当 } P(E) \leq P(E / S) \leq 1 \end{cases}$$

**该公式称为EH公式或UED公式。**



## 4.4 主观Bayes方法

### 4. 组合证据的情况

(1) 当组合证据是多个单一证据的合取时, 即

$$E = E_1 \text{ and } E_2 \text{ and } \dots \text{ and } E_n$$

时, 如果已知  $P(E_1 / S), P(E_2 / S), \dots, P(E_n / S)$ , 则

$$P(E / S) = \min\{P(E_1 / S), P(E_2 / S), \dots, P(E_n / S)\}$$

(2) 当组合证据  $E$  是多个单一证据的析取时, 即

$$E = E_1 \text{ or } E_2 \text{ or } \dots \text{ or } E_n$$

时, 如果已知  $P(E_1 / S), P(E_2 / S), \dots, P(E_n / S)$  则,

$$P(E / S) = \max\{P(E_1 / S), P(E_2 / S), \dots, P(E_n / S)\}$$

“非” 运算用下式计算

$$P(\neg E / S) = 1 - P(E / S)$$

## 4.4 主观Bayes方法

### 结论不确定性的合成算法

若有 $n$ 条知识都支持相同的结论，而且每条知识的前提条件所对应的证据  $E_i (i = 1, 2, \dots, n)$  都有相应的观察  $S_i$  与之对应，此时只要先对每条知识分别求出  $O(H / S_i)$  然后就可运用下述公式求出  $O(H / S_1, S_2, \dots, S_n)$

$$O(H / S_1, S_2, \dots, S_n) = \frac{O(H / S_1)}{O(H)} \times \frac{O(H / S_2)}{O(H)} \times \dots \times \frac{O(H / S_n)}{O(H)} \times O(H)$$

$$P(H / S_1, S_2, \dots, S_n) = \frac{O(H / S_1, S_2, \dots, S_n)}{1 + O(H / S_1, S_2, \dots, S_n)}$$

## 4.4 主观Bayes方法

### 4.4.6 主观Bayes方法的主要优缺点

#### ★主观Bayes方法的主要优点如下：

- (1) 主观Bayes方法中的计算公式大多是在概率论的基础上推导出来的，具有**较坚实的理论基础**。
- (2) 知识的静态强度LS及LN是由领域专家根据实验经验给出的，这就**避免了大量的数据统计工作**。另外，它既用LS指出了证据E对结论H的支持程度，又用LN指出了E对H的必要性程度，这就**比较全面地反映了证据与结论间因果关系**，符合现实世界中某些领域的实际情况，使推出的结论有较准确的确定性。

## 4.4 主观Bayes方法

**(3) 主观Bayes方法不仅给出了在证据肯定存在或肯定不存在情况下由H的先验概率更新为后验概率的方法，而且还给出了在证据不确定情况下更新先验概率为后验概率的方法。另外，由其推理过程可以看出，它确实实现了不确定性的逐级传递。因此，可以说主观Bayes方法是一种比较实用且较灵活的不确定性推理方法。**

### **★它的主要缺点如下**

- (1) 要求领域专家在给出知识的同时给出H的先验概率 $P(H)$ ，这是比较困难的。**
- (2) Bayes方法中关于事件间独立性的要求使主观Bayes方法的应用受到了限制。**

## 4.5 可信度方法

- 1975年肖特里菲 (E. H. Shortliffe) 等人在确定性理论 (theory of confirmation) 的基础上, 结合概率论等提出的一种不确定性推理方法。
- 优点: 直观、简单, 且效果好。

所谓可信度就是在实际生活中根据自己的经验对某一事物或现象进行观察, **判断相信其为真的程度**。

例如, 张三昨天没有上课, 他的理由是**肚子疼**, 就此理由而言, 听话的人可能完全相信, 也可能完全不相信, 也可能在**某种程度上相信**, 这与张三平时的表现和人们对他的话相信程度有关。

这里的相信程度就是我们说的可信度。可信度也称为**确定性因子**。

## 4.5 可信度方法

显然，可信度具有较大的**主观性和经验性**，其准确性是难以把握的。但是，对于**某一具体领域而言**，由于该领域的专家具有丰富的专业知识和实践经验，要给出该领域知识可信度还是**完全有可能的**。另外，**人工智能**所面临的问题，通常都较**难用精确的数学模型进行描述**，而且**先验概率及条件概率的确定也比较困难**，因此用可信度来表示知识及证据的不确定性仍然不失为一种可行的方法。

- **可信度**：根据经验对一个事物或现象为真的相信程度。
- 可信度带有较大的**主观性和经验性**，其准确性难以把握。
- **C - F模型**：基于可信度表示的不确定性推理的基本方法。

## 4.5 可信度方法

### 4.5.2 C---F模型

**C-F模型是基于可信度表示的不确定性推理的基本方法，其他可信度方法都是在此基础上发展起来的。**

**1. 知识不确定性的表示**

**2. 证据不确定性的表示**

**3. 组合证据不确定性的算法**

**4. 不确定性的传递算法**

**5. 结论不确定性的合成算法**



■ 产生式规则表示:

IF  $E$  THEN  $H$  ( $CF(H, E)$ )

$CF(H, E)$  : 可信度因子 (certainty factor) ,  
反映前提条件与结论的联系强度。

IF 头痛 AND 流涕 THEN 感冒 (0.7)

# C - F模型

## 1. 知识不确定性的表示

- $CF(H, E)$  的取值范围:  $[-1, 1]$ 。
- 若由于相应证据的出现增加结论  $H$  为真的可信度, 则  $CF(H, E) > 0$ , 证据的出现越是支持  $H$  为真, 就使  $CF(H, E)$  的值越大。
- 反之,  $CF(H, E) < 0$ , 证据的出现越是支持  $H$  为假,  $CF(H, E)$  的值就越小。
- 若证据的出现与否与  $H$  无关, 则  $CF(H, E) = 0$ 。

# C - F模型

## 2. 证据不确定性的表示

$CF(E)=0.6$ :  $E$ 的可信度为0.6

- 证据 $E$ 的可信度取值范围:  $[-1, 1]$ 。
- 对于初始证据, 若所有观察 $S$ 能肯定它为真, 则 $CF(E)=1$ 。
- 若肯定它为假, 则  $CF(E)=-1$ 。
- 若以某种程度为真, 则  $0 < CF(E) < 1$ 。
- 若以某种程度为假, 则  $-1 < CF(E) < 0$ 。
- 若未获得任何相关的观察, 则  $CF(E)=0$ 。

# C - F模型

## 2. 证据不确定性的表示

- 静态强度  $CF(H, E)$  : 知识的强度, 即当  $E$  所对应的证据为真时对  $H$  的影响程度。
- 动态强度  $CF(E)$  : 证据  $E$  当前的不确定性程度。

# C - F模型

## 3. 组合证据不确定性的算法

- 组合证据：多个单一证据的合取

$$E = E_1 \text{ AND } E_2 \text{ AND } \cdots \text{ AND } E_n$$

则  $CF(E) = \min\{CF(E_1), CF(E_2), \dots, CF(E_n)\}$

- 组合证据：多个单一证据的析取

$$E = E_1 \text{ OR } E_2 \text{ OR } \cdots \text{ OR } E_n$$

则  $CF(E) = \max\{CF(E_1), CF(E_2), \dots, CF(E_n)\}$

# C - F模型

## 4. 不确定性的传递算法

- C - F模型中的不确定性推理：从不确定的初始证据出发，通过运用相关的不确定性知识，最终得出结论并求出结论的可信度值。结论  $H$  的可信度由下式计算：

$$CF(H) = CF(H, E) \times \max\{0, CF(E)\}$$

当  $CF(E) < 0$  时，则  $CF(H) = 0$

当  $CF(E) = 1$  时，则  $CF(H) = CF(H, E)$

# C - F模型

## 5. 结论不确定性的合成算法

■ 设知识:

IF  $E_1$  THEN  $H$  ( $CF(H, E_1)$ )

IF  $E_2$  THEN  $H$  ( $CF(H, E_2)$ )

(1) 分别对每一条知识求出 $CF(H)$  :

$$CF_1(H) = CF(H, E_1) \times \max\{0, CF(E_1)\}$$

$$CF_2(H) = CF(H, E_2) \times \max\{0, CF(E_2)\}$$

# C - F模型

## 5. 结论不确定性的合成算法

(2) 求出 $E_1$ 与 $E_2$ 对 $H$ 的综合影响所形成的可信度  $CF_{1,2}(H)$ :

$$CF_{1,2}(H) = \begin{cases} CF_1(H) + CF_2(H) - CF_1(H)CF_2(H) & \text{若 } CF_1(H) \geq 0, \quad CF_2(H) \geq 0 \\ CF_1(H) + CF_2(H) + CF_1(H)CF_2(H) & \text{若 } CF_1(H) < 0, \quad CF_2(H) < 0 \\ \frac{CF_1(H) + CF_2(H)}{1 - \min\{|CF_1(H)|, |CF_2(H)|\}} & \text{若 } CF_1(H) \text{ 与 } CF_2(H) \text{ 异号} \end{cases}$$



# C - F模型

• 例4 设有如下一组知识:

$r_1: \quad IF \quad E_1 \quad THEN \quad H \quad (0.8)$

$r_2: \quad IF \quad E_2 \quad THEN \quad H \quad (0.6)$

$r_3: \quad IF \quad E_3 \quad THEN \quad H \quad (-0.5)$

$r_4: \quad IF \quad E_4 \quad AND \quad (E_5 \quad OR \quad E_6) \quad THEN \quad E_1 \quad (0.7)$

$r_5: \quad IF \quad E_7 \quad AND \quad E_8 \quad THEN \quad E_3 \quad (0.9)$

已知:  $CF(E_2)=0.8, CF(E_4)=0.5, CF(E_5)=0.6, CF(E_6)=0.7,$

$CF(E_7)=0.6, CF(E_8)=0.9.$

求:  $CF(H)$

# C - F模型

解：

$r_4$ ： 第一步：对每一条规则求出 $CF(H)$ 。

$$\begin{aligned} CF(E_1) &= 0.7 \times \max\{0, CF[E_4 \text{ AND } (E_5 \text{ OR } E_6)]\} \\ &= 0.7 \times \max\{0, \min\{CF(E_4), CF(E_5 \text{ OR } E_6)\}\} \\ &= 0.7 \times \max\{0, \min\{CF(E_4), \max\{CF(E_5), CF(E_6)\}\}\} \\ &= 0.7 \times \max\{0, \min\{0.5, \max\{0.6, 0.7\}\}\} \\ &= 0.7 \times \max\{0, 0.5\} \\ &= 0.35 \end{aligned}$$

# C - F模型

解：

第一步：对每一条规则求出 $CF(H)$ 。

$$\begin{aligned}r_5: \quad CF(E_3) &= 0.9 \times \max\{0, CF(E_7 \text{ AND } E_8)\} \\&= 0.9 \times \max\{0, \min\{CF(E_7), CF(E_8)\}\} \\&= 0.9 \times \max\{0, \min\{0.6, 0.9\}\} \\&= 0.9 \times \max\{0, 0.6\} \\&= 0.54\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_1: \quad CF_1(H) &= 0.8 \times \max\{0, CF(E_1)\} \\&= 0.8 \times \max\{0, 0.35\} \\&= 0.28\end{aligned}$$

# C - F模型

解：

第一步：对每一条规则求出 $CF(H)$ 。

$$\begin{aligned}r_2 : \quad CF_2(H) &= 0.6 \times \max\{0, CF(E_2)\} \\ &= 0.6 \times \max\{0, 0.8\} \\ &= 0.48\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_3 : \quad CF_3(H) &= -0.5 \times \max\{0, CF(E_3)\} \\ &= -0.5 \times \max\{0, 0.54\} \\ &= -0.27\end{aligned}$$

## C - F模型

第二步：根据结论不确定性的合成算法得到：

$$\begin{aligned} CF_{1,2}(H) &= CF_1(H) + CF_2(H) - CF_1(H) \times CF_2(H) \\ &= 0.28 + 0.48 - 0.28 \times 0.48 = 0.63 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CF_{1,2,3}(H) &= \frac{CF_{1,2}(H) + CF_3(H)}{1 - \min\{|CF_{1,2}(H)|, |CF_3(H)|\}} \\ &= \frac{0.63 - 0.27}{1 - \min\{0.63, 0.27\}} = \frac{0.36}{0.73} = 0.49 \end{aligned}$$

综合可信度：  $CF(H) = 0.49$

## 4.6 证据理论

- 证据理论(theory of evidence): 又称D - S理论, 是德普斯特 (A. P. Dempster) 首先提出, 沙佛 (G. Shafer) 进一步发展起来的一种处理不确定性的理论。
- 1981年巴纳特 (J. A. Barnett) 把该理论引入专家系统中, 同年卡威 (J. Garvey) 等人用它实现了不确定性推理。
- 目前, 在证据理论的基础上已经发展了多种不确定性推理模型。

## 4.6 证据理论

- 概率分配函数
- 信任函数
- 似然函数
- 信任函数与似然函数的关系
- 概率分配函数的正交和（证据的组合）

# ① 概率分配函数

- 设  $D$  是变量  $x$  所有可能取值的集合，且  $D$  中的元素是互斥的，在任一时刻  $x$  都取且只能取  $D$  中的某一个元素为值，则称  $D$  为  $x$  的**样本空间**。
- 在证据理论中， $D$  的任何一个子集  $A$  都对应于一个关于  $x$  的命题，称该命题为“ $x$  的值是在  $A$  中”。
- 设  $x$ ：所看到的颜色， $D=\{\text{红}, \text{黄}, \text{蓝}\}$ ，  
则  $A=\{\text{红}\}$ ：“ $x$  是红色”；  
 $A=\{\text{红}, \text{蓝}\}$ ：“ $x$  或者是红色，或者是蓝色”。



## ① 概率分配函数

- 设 $D$ 为样本空间，领域内的命题都用 $D$ 的子集表示，则**概率分配函数**（basic probability assignment function）定义如下：

**定义4.4** 设函数  $M: 2^D \rightarrow [0,1]$ , （对任何一个属于 $D$ 的子集 $A$ ，命它对应一个数 $M \in [0, 1]$ ） 且满足

$$M(\Phi) = 0$$

$$\sum_{A \subseteq D} M(A) = 1$$

则  $M: 2^D$  上的基本概率分配函数， $M(A) : A$  的基本概率数。

# ① 概率分配函数

几点说明:

(1) 设样本空间 $D$ 中有 $n$ 个元素, 则 $D$ 中子集的个数为 $2^n$ 个。

$2^D$ :  
■ 设  $D=\{\text{红, 黄, 蓝}\}$

(2) 相  
上的一  
■ 设  $D=\{\text{红, 黄, 蓝}\}$   
则其子集个数  $2^3=8$ , 具体为:

$A \subset D$   
 $A=\{\text{红}\}, A=\{\text{黄}\}, A=\{\text{蓝}\}, A=\{\text{红, 黄}\},$   
 $A=\{\text{红, 蓝}\}, A=\{\text{黄, 蓝}\}, A=\{\text{红, 黄, 蓝}\}, A=\{\Phi\}$

(3) 相  
■ 例如, 设  $A=\{\text{红}\},$   
 $M(A)=0.3$ : 命题“ $x$ 是红色”的信任度是0.3。

## ② 信任函数

**定义4.5** 命题的信任函数 (belief function)  $Bel:$

$$2^D \rightarrow [0,1] \quad \text{且} \quad Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} M(B) \quad \forall A \subseteq D$$

: 对命题A为真的总的信任程度。

$Bel(A)$

- 由  $\begin{cases} \text{设 } D = \{\text{红, 黄, 蓝}\} \\ M(\{\text{红}\}) = 0.3, \quad M(\{\text{黄}\}) = 0, \quad M(\{\text{红, 黄}\}) = 0.2, \end{cases}$

$B$

$$Bel(\{\text{红, 黄}\}) = M(\{\text{红}\}) + M(\{\text{黄}\}) + M(\{\text{红, 黄}\})$$

$B$

$$= 0.3 + 0.2 = 0.5$$

$$\sum_{B \subseteq D}$$

### ③ 似然函数

- 似然函数 (plausibility function) : 不可驳斥函数或上限函数。

定义4.6 似然函数  $Pl: 2^D \rightarrow [0,1]$  且

$$Pl(A) = 1 - Bel(\neg A) \quad \text{对所有的 } A \subseteq D$$

- 设  $D = \{\text{红}, \text{黄}, \text{蓝}\}$

$$M(\{\text{红}\}) = 0.3, \quad M(\{\text{黄}\}) = 0, \quad M(\{\text{红}, \text{黄}\}) = 0.2,$$

$$\begin{aligned} Bel(\{\text{红}, \text{黄}\}) &= M(\{\text{红}\}) + M(\{\text{黄}\}) + M(\{\text{红}, \text{黄}\}) \\ &= 0.3 + 0.2 = 0.5 \end{aligned}$$

$$Pl(\{\text{蓝}\}) = 1 - Bel(\neg\{\text{蓝}\}) = 1 - Bel(\{\text{红}, \text{黄}\}) = 1 - 0.5 = 0.5$$

## ④ 信任函数与似然函数的关系

因为 
$$Bel(A) + Bel(\neg A) = \sum_{B \subseteq A} M(B) + \sum_{C \subseteq \neg A} M(C)$$
$$\leq \sum_{E \subseteq D} M(E) = 1$$

所以 
$$Pl(A) - Bel(A) = 1 - Bel(\neg A) - Bel(A)$$
$$= 1 - (Bel(\neg A) + Bel(A)) \geq 0$$

所以  $Pl(A) \geq Bel(A)$

$Bel(A)$  : 对A为真的信任程度。

$Pl(A)$  : 对A为非假的信任程度。

$A(Bel(A), Pl(A))$  : 对A信任程度的下限与上限。

## ⑤ 概率分配函数的正交和（证据的组合）

**定义4.7** 设 $M_1$  和  $M_2$ 是两个概率分配函数； 则其正交和 $M = M_1 \oplus M_2$  :  $M(\Phi) = 0$

$$M(A) = K^{-1} \sum_{x \cap y = A} M_1(x) M_2(y)$$

其中:  $K = 1 - \sum_{x \cap y = \Phi} M_1(x) M_2(y) = \sum_{x \cap y \neq \Phi} M_1(x) M_2(y)$

如果  $K \neq 0$ ，则正交和  $M$ 也是一个概率分配函数；

如果  $K = 0$ ，则不存在正交和  $M$ ，即没有可能存在概率函数，称 $M_1$ 与 $M_2$ 矛盾。

## ⑤ 概率分配函数的正交和（证据的组合）

**定义4.8** 设  $M_1, M_2, \dots, M_n$  是  $n$  个概率分配函数，则其正交和  $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$  为

$$M(\Phi) = 0$$

其中：

$$M(A) = K^{-1} \sum_{\bigcap A_i = A} \prod_{1 \leq i \leq n} M_i(A_i)$$

$$K = \sum_{\bigcap A_i \neq \Phi} \prod_{1 \leq i \leq n} M_i(A_i)$$

## ⑤ 概率分配函数的正交和（证据的组合）

$$M_2(\{\text{黑}\}, \{\text{白}\}, \{\text{黑, 白}\}, \Phi) = (0.6, 0.3, 0.1, 0)$$

$$M_1(\{\text{黑}\}, \{\text{白}\}, \{\text{黑, 白}\}, \Phi) = (0.3, 0.5, 0.2, 0)$$

则：

$$\begin{aligned} K &= 1 - \sum_{x \cap y = \Phi} M_1(x) M_2(y) \\ &= 1 - [M_1(\{\text{黑}\}) M_2(\{\text{白}\}) + M_1(\{\text{白}\}) M_2(\{\text{黑}\})] \\ &= 1 - [0.3 \times 0.3 + 0.5 \times 0.6] = 0.61 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(\{\text{黑}\}) &= K^{-1} \sum_{x \cap y = \{\text{黑}\}} M_1(x) M_2(y) \\ &= \frac{1}{0.61} [M_1(\{\text{黑}\}) M_2(\{\text{黑}\}) + M_1(\{\text{黑}\}) M_2(\{\text{黑, 白}\}) + \\ &\quad M_1(\{\text{黑, 白}\}) M_2(\{\text{黑}\})] \\ &= \frac{1}{0.61} [0.3 \times 0.6 + 0.3 \times 0.1 + 0.2 \times 0.6] = 0.54 \end{aligned}$$



## ⑤ 概率分配函数的正交和（证据的组合）

- 同理可得：
$$M(\{\text{白}\}) = 0.43$$
$$M(\{\text{黑}, \text{白}\}) = 0.03$$

- 组合后得到的概率分配函数：

$$M(\{\text{黑}\}, \{\text{白}\}, \{\text{黑}, \text{白}\}, \Phi) = (0.54, 0.43, 0.03, 0)$$

# 基于证据理论的不确定性推理

## □ 基于证据理论的不确定性推理的步骤:

- (1) 建立问题的样本空间 $D$ 。
- (2) 由经验给出，或者由随机性规则和事实的信度度量算基本概率分配函数。
- (3) 计算所关心的子集的信任函数值、似然函数值。
- (4) 由信任函数值、似然函数值得出结论。

# 基于证据理论的不确定性推理

例5 设有规则：

- (1) 如果 流鼻涕 则 感冒但非过敏性鼻炎 (0.9)  
或 过敏性鼻炎但非感冒 (0.1)。
- (2) 如果 眼发炎 则 感冒但非过敏性鼻炎 (0.8)  
或 过敏性鼻炎但非感冒 (0.05)。

有事实：

- (1) 小王流鼻涕 (0.9)。
- (2) 小王发眼炎 (0.4)。

问：小王患的什么病？

# 基于证据理论的不确定性推理

取样本空间： $D = \{h_1, h_2, h_3\}$

$h_1$  表示“感冒但非过敏性鼻炎”，

$h_2$  表示“过敏性鼻炎但非感冒”，

$h_3$  表示“同时得了两种病”。

取下面的基本概率分配函数：

$$M_1(\{h_1\}) = 0.9 \times 0.9 = 0.81$$

$$M_1(\{h_2\}) = 0.9 \times 0.1 = 0.09$$

$$M_1(\{h_1, h_2, h_3\}) = 1 - M_1(\{h_1\}) - M_1(\{h_2\}) = 1 - 0.81 - 0.09 = 0.1$$

$$M_2(\{h_1\}) = 0.4 \times 0.8 = 0.32$$

$$M_2(\{h_2\}) = 0.4 \times 0.05 = 0.02$$

$$M_2(\{h_1, h_2, h_3\}) = 1 - M_2(\{h_1\}) - M_2(\{h_2\}) = 1 - 0.32 - 0.02 = 0.66$$

将两个概率分配函数组合：

$$\begin{aligned} K &= 1/\{1 - [M_1(\{h_1\})M_2(\{h_2\}) + M_1(\{h_2\})M_2(\{h_1\})]\} \\ &= 1/\{1 - [0.81 \times 0.02 + 0.09 \times 0.32]\} \\ &= 1/\{1 - 0.045\} = 1/0.955 = 1.05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(\{h_1\}) &= K[M_1(\{h_1\})M_2(\{h_1\}) + M_1(\{h_1\})M_2(\{h_1, h_2, h_3\}) \\ &\quad + M_1(\{h_1, h_2, h_3\})M_2(\{h_1\})] \\ &= 1.05 \times 0.8258 = 0.87 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(\{h_2\}) &= K[M_1(\{h_2\})M_2(\{h_2\}) + M_1(\{h_2\})M_2(\{h_1, h_2, h_3\}) \\ &\quad + M_1(\{h_1, h_2, h_3\})M_2(\{h_2\})] \\ &= 1.05 \times 0.0632 = 0.066 \end{aligned}$$

$$M(\{h_1, h_2, h_3\}) = 1 - M(\{h_1\}) - M(\{h_2\}) = 1 - 0.87 - 0.066 = 0.064$$

信任函数：

$$Bel(\{h_1\}) = M(\{h_1\}) = 0.87$$

$$Bel(\{h_2\}) = M(\{h_2\}) = 0.066$$

似然函数：

$$\begin{aligned} Pl(\{h_1\}) &= 1 - Bel(\neg\{h_1\}) = 1 - Bel(\{h_2, h_3\}) \\ &= 1 - [M(\{h_2\}) + M(\{h_3\})] = 1 - [0.066 + 0] = 0.934 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pl(\{h_2\}) &= 1 - Bel(\neg\{h_2\}) = 1 - Bel(\{h_1, h_3\}) \\ &= 1 - [M(\{h_1\}) + M(\{h_3\})] = 1 - [0.87 + 0] = 0.13 \end{aligned}$$

结论：小王可能是感冒了。

## 4.6 证据理论

### 证据理论的主要优缺点

最后需要说明的是，当 $D$ 中的元素很多时，信任函数 $Bel$ 及正交和等的运算将是相当复杂的，工作量很大，这是由于需要穷举 $D$ 的所有子集，而子集的数量是 $2^{|D|}$ 的缘故。另外，证据理论要求 $D$ 中的元素是互斥的，这一点在许多应用领域也难以做到。为解决这些问题，巴尼特提出了一种方法，运用这种方法可以降低计算的复杂性并解决互斥的问题。该方法的基本思想是把 $D$ 划分为若干组，每组只包含相互排斥的元素，称为一个辨别框，求解问题时，只需在各自的辨别框上考虑概率分配的影响。

## 4.6 证据理论

**证据理论的优点是它只需满足比概率论更弱的公理系统，能处理由“不知道”所引起的不确定性，由于 $D$ 的子集可以是多个元素的集合，因而知识的结论部分可以是更一般的假设，这就便于领域专家从不同的语义层次上表达他们的知识，不必被限制在由单元素所表示的最明确的层次上。在应用证据理论时需要注意的是合理地划分辨别框及有效地控制计算的复杂性等。**