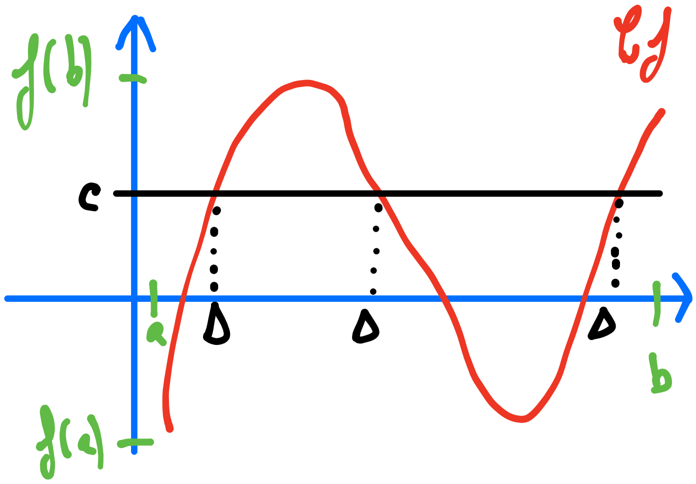
ANALYSE

• Théorème valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue sur un intervalle réel $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteint par f en un point de $[a,b]$.



Dans ce cas général, il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(\Delta) = c$

• DÉMONSTRATION:

Étape 1 : transformation affine

Soit c une valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. On considère la fonction

$$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) - c & \text{si } f(a) \leq f(b) \\ -f(x) + c & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, on a $g(a) \leq 0 \leq g(b)$ (⧖)

En effet :

- si $f(a) \leq f(b)$, alors $f(a) \leq c \leq f(b)$, d'où (⧖)
- sinon, $f(b) \leq c \leq f(a)$, donc $-f(b) \geq -c \geq -f(a)$

Etape 2: dichotomie BUT: $\exists b \in [a,b] : g(b) = 0$

- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que a_n et b_n soit construit de telle manière que:

$$\begin{cases} a_n \leq b_n \\ g(a_n) \leq 0 \leq g(b_n) \end{cases}$$, ce qui est vrai, par (Z), pour $n=0$

On considère $m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, le milieu du segment $[a,b]$

i) si $g(m_n) \geqslant 0$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$

ii) si $g(m_n) < 0$, alors on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$

- Par construction, on a donc $\begin{cases} \underbrace{a_n \leq a_{n+1}} \leq \underbrace{b_{n+1} \leq b_n} \\ g(a_{n+1}) \leq 0 \leq g(b_{n+1}) \end{cases}$

A l'issue de cette construction itérative, on obtient une suite croissante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite décroissante $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $g(a_n) \leq 0 \leq g(b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers une même limite $l \in [a,b]$.

Or g est continue sur $[a,b]$ car f l'est donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} \overset{\leq 0}{g(a_n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \overset{\geqslant 0}{g(b_n)} = g(l) = \underline{0}$ d'où $\boxed{f(l) = c}$

Pour utiliser le TVI, il faut que:

- fonction f doit être continue sur l'intervalle $[a,b]$
- le réel k doit être compris entre $f(a)$ et $f(b)$:
  - f strictement croissante, $k \in [f(a); f(b)]$

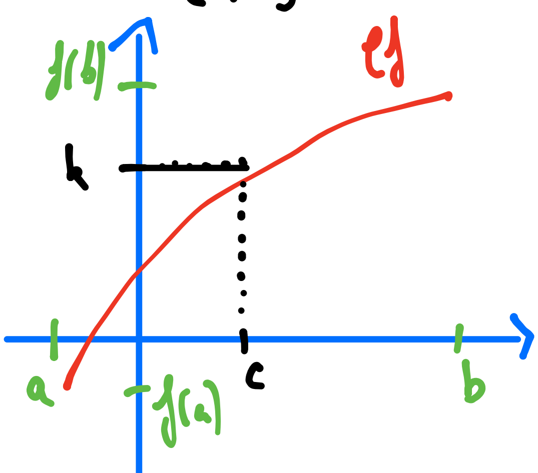
· f strictement décroissante, $k \in [f(b); f(a)]$

• Corollaire du TVI

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$, alors quel que soit le réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a,b]$

Pour utiliser le corollaire du TVI, il faut:

- fonction f doit être continue sur l'intervalle $[a,b]$
- le réel k doit être compris entre $f(a)$ et $f(b)$:
  - f strictement croissante, $k \in [f(a); f(b)]$
  - f strictement décroissante, $k \in [f(b); f(a)]$
- fonction f doit être strictement monotone sur $[a,b]$:
  - f doit être strictement croissante ou strictement décroissante sur $[a,b]$



f définie, continue et strictement croissante $\forall k \in [f(a), f(b)]$, $\exists ! \, c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$

• Sous suite

Soit (U_n) une suite et $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. La suite $(U_{\phi(n)})$ s'appelle sous-suite de (U_n). Une sous-suite de (U_n) est donc une suite fabriquée à partir de (U_n) en sélectionnant certains termes

• Suites adjacentes

Les suites (U_n) et (V_n) sont dites adjacentes si elles vérifient 3 conditions:

- (U_n) croissante
- (V_n) décroissante
- $\lim (V_n - U_n) = 0$

• Valeur d'adhérence

Limite d'une sous-suite qui converge.

• Suite de Cauchy

Soit (U_n) une suite réelle; on dit que (U_n) est une suite de Cauchy si:

$\cdot \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,n) \in \mathbb{N}^2 (p \geq N \text{ et } n \geq N \Rightarrow |U_p - U_n| < \varepsilon)$

· Toute suite convergente est de Cauchy

· DEMONSTRATION :

① Suite convergente : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_c \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|U_n - \ell\| \leq \varepsilon$

② Suite Cauchy : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_q, \|U_p - U_n\| \leq \varepsilon$

· On veut montrer que ① => ②

$\|U_p - U_n\| = \|U_p - \ell + \ell - U_n\| \leq \underbrace{\|U_p - \ell\|}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{\|U_q - \ell\|}_{\leq \varepsilon/2}$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_{\varepsilon_2}$, $\|U_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

donc $\forall p, q \geq N_{\varepsilon_2}$, $\|U_p - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|U_q - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

On a donc $\|U_p - U_q\| = \|U_p - \ell + \ell - U_q\| \leq \|U_p - \ell\| + \|\ell - U_q\|$

donc $\|U_p - U_q\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

· Toute suite de Cauchy converge

· DÉMONSTRATION

· Toute suite de cauchy est bornée

Par def, si $(U_n)_n$ est de Cauchy alors,
$\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t $\forall n,m \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ $m \geq n_0$ $|U_n - U_m| \leq 1$
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, $|U_n| \leq \underbrace{|U_n - U_{n_0}|}_{\leq 1} + |U_{n_0}| \leq \underbrace{1 + |U_{n_0}|}_{M}$

Pour $n \leq n_0$, $|U_n| \leq 0 \leq k \leq n_0, |U_k| = A$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n| \leq \max(M, A)$

- <u>Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence alors la suite converge vers cette valeur</u>

Soit $(U_n)_n$ une suite de Cauchy et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ extractrice et $u \in \mathbb{K}$ tq $\lim_n U_{\varphi(n)} = u$

Soit $\varepsilon > 0$, par hypothèse, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq pour $(n,m) \in \mathbb{N}^2$,
$n \geq n_0$, $m \geq n_0$, $|U_n - U_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)
$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, $|U_{\varphi(n)} - u| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)
Posons $n_2 = \max(n_0, n_1)$ et soit $n \in \mathbb{N}$ $n \geq n_2$, on prend
$m = \varphi(n_2) \geq n_2 \geq n_0$
$$|U_n - u| = |U_n - U_{\varphi(n_2)} + U_{\varphi(n_2)} - u|$$
$$\leq \underbrace{|\overset{\geq n_0}{U_n} - \overset{\geq 0}{U_{\varphi(n_2)}}|}_{\text{d'après (1)} \ \varepsilon/2} + \underbrace{|U_{\overset{\geq n_1}{\varphi(n_2)}} - u|}_{< \varepsilon/2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
En résumé, on a prouvé que
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2, |U_n - u| < \varepsilon$
donc (U_n) converge vers u.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée. Alors on peut extraire une suite convergente de (U_n).

DÉMONSTRATION: (Pour les cas réels)

Posons $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [a,b]^{\mathbb{N}}$, avec $a,b \in \mathbb{R}$
Maintenant considérons les intervalles $[a; \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}; b]$
Nous pouvons en conclure que soit $[a; \frac{a+b}{2}]$ ou $[\frac{a+b}{2}; b]$ contient une infinité de termes de la suite. Si nous prenons cet intervalle qui a une infinité de termes et que nous le scindons en 2, on pourra récupérer un intervalle 2 fois plus petit avec une infinité de termes.
Si nous considérons $I_0 = [a;b]$ et $I_1 = \begin{cases} [a; \frac{a+b}{2}] \\ \text{ou } [\frac{a+b}{2}; b] \end{cases}$ $\boxed{(b_n - a_n)}$

Par récurrence imédiate, la longueur de I_n est $\frac{b-a}{2^n}$
Donc la longueur I_n tend vers ℓ.
Nous allons construire une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, U_{\varphi(n)} \in I_n$

Initialisation

$\varphi(0) = 0$ or $U_0 \in [a,b]$ par définition donc $U_0 \in I_0$

• Récurrence

Montrons que $\mathbb{P}(n) \Rightarrow \mathbb{P}(n+1)$

$I_n = [a_n ; b_n]$

$I_{n+1} = \left[a_n ; \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ ou $I_{n+1} = \left[\frac{a_n+b_n}{2} ; b_n\right]$

On pose $\varphi(n+1) = m$, m le plus petit entier tel que $m > \varphi(n)$ et $u_m \in I_m$

On pose $v_n = u_{\varphi(n)}$

$\Rightarrow a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$

$\Rightarrow a_n \leq v_n \leq b_n$

Par th des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$

Par conséquent, il existe une sous-suite v_n convergente.

• DÉMONSTRATION: (pour les cas complexes)

Supposons le th de B-W vrai pour les suites réelles bornées.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée. Définissons (a_n) et (b_n) suites réelles comme suit:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n + i \cdot b_n$$

La suite (u_n) étant bornée, les suites réelles (a_n) et (b_n) sont bornées. On peut appliquer le th de B-W dessus:

1) $\exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $(a_{\varphi(n)})$ converge vers l_1.

2) Comme $(b_{\varphi(n)})$ est aussi une suite réelle bornée, $\exists \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $(b_{\varphi(\psi(n))})$ converge vers l_2.

En posant $\theta = \varphi \circ \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, on obtient que $(a_{\theta(n)})$ converge vers l_1 comme sous-suite d'une suite convergente et $(b_{\theta(n)})$ converge vers l_2 donc que $(u_{\theta(n)})$ converge $l_1 + i \cdot l_2$

Le th de B-W est donc aussi vrai pour les suites complexes bornées.