UNIVERSITÉ PARIS-EST
MARNE-LA-VALLÉE

MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS
TRAVAIL ENCADRÉ DE RECHERCHE

Invariance des systèmes stochastiques : Application du principe de Brézis-Browder

Travail réalisé par : Mohammed Hajji

Proposé par : Dan GOREAC

05 Juin 2018.

Table des matières

1 Présentation du problème

1.1 Cadre général

Le concept d'équation différentielle stochastique généralise celui d'équation différentielle ordinaire aux processus stochastiques. La formalisation théorique de ce problème à elle seule a posé problème aux mathématiciens, et il a fallu attendre les années 1940 et les travaux du mathématicien japonais Itô Kiyoshi pour la définition de l'intégrale stochastique. Il s'agit d'étendre la notion d'intégrale de Lebesgue aux processus stochastiques selon un mouvement brownien.
Les équations différentielles stochastiques servent de modèle mathématique à des systèmes faisant intervenir deux types de forces, l'une déterministe et l'autre aléatoire. Tels des cours de bourse ou l'évolution du prix d'un actif dans un marché financier.

Dans cet article, le but est de trouver des conditions sur un fermé $\mathbf{K}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que la solution du système (1), défini par l'équation différentielle de la forme,

$$\begin{cases} dX_t^{\xi} = f\left(X_t^{\xi}\right) dt + g\left(X_t^{\xi}\right) dW_t, \\ X_t^{\xi} = \xi \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

pour toute condition initial $\xi \in \mathbf{K}$ reste dans $\mathbf{K}$ au cours du temps. Cette propriété est appelée "*invariance*".

Nous étudierons en premier temps le principe de Brézis-Browder sur des ensembles ayant certaines propriétés. Ce principe nous sera ensuite crucial pour prolonger les solutions définies sur un intervalle local de $[t, T]$ à une solution globale définie sur l'intervalle $[t, T]$ en entier. Nous définirons ensuite la notion de tangente généralisée et nous verrons sa relation avec la notion de l'invariance d'une manière détaillée. Nous verrons en particulier, comment on peut construire à partir des conditions de tangente généralisée(ou quasi-tangence) une solution invariante locale, et on applique le principe de Brézis-Browder pour montrer que la solution est globale sur un intervalle de temps choisi.

1.2 Notions Préliminaires

Notation 1. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires continues et $L_2(\mathbb{R}^n)$ sa norme usuelle.

Nous supposerons dans toute la suite que les fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dans le système (1) sont des fonctions Lipschitziennes. ce qui est équivalent à dire :
Il existe c>0 tel que,

$$\begin{cases} |f(x) - f(y)| \leq c\big|x - y|, \ et & (A1) \\ |f(x)| \leq c(1+|x|), \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Il existe c>0 tel que,

$$\begin{cases} |g(x) - g(y)| \leq c\big|x-y|, \ et & (A2) \\ |g(x)|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq c(1+|x|), \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Rappelons tout de même, des résultats fondamentaux de la théorie des probabilités qui seront utilisés fréquemment par la suite dans la construction des éléments stochastiques.

Définition 1. *On considère un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*,*

- *Une filtration est une famille croissante de sous tribus* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *de* $\mathcal{F}$*.*
- *On appelle* $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ *espace probabilisé filtré.*
- *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est adapté si, pour tout* $t \geq 0$*,* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*
- *Si* $\mathcal{F}_t$ *est la tribu engendrée par les processus adaptés et continues, un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit* $\mathcal{F}_t$*-prévisible lorsqu'il est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Rappelons qu'un processus X_t^ξ $\mathcal{F}_t$-prévisible avec $E\left[\left|X_t^\xi\right|^2\right] < \infty$ est solution de l'équation différentielle stochastique du système (1) si

$$X_t^\xi(s) = \xi + \int_t^s f(X_t^\xi(r))\,\mathrm{d}r \ + \int_t^s g(X_t^\xi(r))\mathrm{d}W_r, \qquad dP - \text{presque sûrement.} \tag{2}$$

Sous les hypothèses $(A1)$ et $(A2)$ sur les fonction f et g, nous remarquons par le théorème de Cauchy-Lipschitz que le système admet une unique solution s'écrit sous la forme (2) et que cette solution X_t^ξ est continue.

Notation 2. $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P; \mathbf{K})$ signifie, $\xi \in \mathbf{K}$ et $E\left[\left|\xi\right|^2\right] < \infty$.
Nous allons maintenant introduire la notion de relation de pré-ordre, qui permet de comparer les éléments dans un ensemble $\mathcal{S}$. De façon informelle, une relation binaire sur un ensemble $\mathcal{S}$ est une proposition qui lie entre eux certains éléments de cet ensemble. Autrement dire, une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble $\mathcal{S}$ est définie par une partie $\mathcal{G}$ de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$. Si $(a, b) \in \mathcal{G}$ on dit que a est en relation avec b et on le note "$a\mathcal{R}b$".

Définition 2. *Une relation de pré-ordre "* $\preceq$ *" sur un ensemble* $\mathcal{S}$ *est une relation binaire réflexive et transitive. C'est-à-dire,*

- *Pour tout* $a \in \mathcal{S}$*,* $\quad a \preceq a.$ $\qquad$ *(réflexivité)*
- *Pour tous* $(a, b, c) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathcal{S}$*,* $\quad a \preceq b$ *et* $b \preceq c \Longrightarrow a \preceq c$ $\quad$ *(transitivité)*

1.3 Lemme de Gronwall

Nous rappelons aussi le lemme de Gronwall, dont on aura besoin dans la suite.

Lemme 1 (de Gronwall)**.** *Soient* $u, v : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$*, deux fonctions continues telles que, pour une constant* $C \geq 0$*, on a,*

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} u(r)v(r)\,\mathrm{d}r, \quad \textit{pour tout } t \in \big[t_0, t_1\big],$$

Alors,

$$u(t) \leq C\,exp\left(\int_{t_0}^{t} v(r)\,\mathrm{d}r\right), \quad \textit{pour tout } t \in \big[t_0, t_1\big].$$

Démonstration. Si $u = 0$ ou $v = 0$ le résultat est évident. Supposons $u(t) > 0$, $v(t) > 0$ pour tout $t \in \big[t_0, t_1\big]$ et $C \geq 0$. On définit les fonctions

$$f(t) = C + \textstyle\int_{t_0}^{t} u(r)v(r)\,\mathrm{d}r, \qquad g(t) = C\exp\left(\textstyle\int_{t_0}^{t} v(r)\,\mathrm{d}r\right).$$

On veut démontrer que si $u(t) \leq f(t)$ alors $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in \big[t_0, t_1\big]$. On note que $g(t) > 0$ $\big($par hypothèse $C \geq 0$ *et* $u, v > 0\big)$ et de pls, plus $\quad f(t_0) = g(t_0) = C$.
Donc il suffit de démontrer que

$$\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)' = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g^2(t)} \leq 0. \tag{3}$$

par définition de $f(t)$ et $g(t)$,

$$f'(t) = u(t)v(t),$$

et

$$g'(t) = Cv(t)\,\exp\left(\int_{t_0}^{t} v(r)\mathrm{d}r\right).$$

par hypothèse on a, $u(t) \leq f(t)$, donc,

$$f'(t) \leq f(t)v(t),$$

et,

$$g'(t) = g(t)v(t).$$

d'où on obtient,

$$f'(t)g(t) - f(t)g'(t) \leq f(t)v(t)g(t) - f(t)v(t)g(t) = 0.$$

L'inéquation (3) est bien satisfaite. D'où le résultat. □

.

2 Introduction

2.1 Principe de Brézis-Browder

Le but dans cette partie est de démontrer un principe très simple sur un ensemble $\mathcal{S}$ muni d'une relation de pré-ordre "$\preceq$". Ce principe est similaire au lemme de Zorn. Il est basé sur,

L'axiome des choix dépendants : Si $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur un ensemble non vide $\mathcal{S}$ telle que pour tout $\xi \in \mathcal{S}$ l'ensemble $\{\eta \in \mathcal{S}, \eta \mathcal{R} \xi\}$ est non vide, alors pour tout $\xi \in \mathcal{S}$ il existe une suite $(\xi_k)_k$ dans $\mathcal{S}$ tel que $\xi_0 = \xi$ et $\xi_k \mathcal{R} \xi_{k+1}$.

Définition 3. *Soit "$\preceq$" une relation de pré-ordre sur un ensemble $\mathcal{S}$ et $\mathcal{N} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ une fonction croissante. Un élément $\overline{\xi} \in \mathcal{S}$ est dit $\mathcal{N}$-maximal si, $\mathcal{N}\left(\overline{\xi}\right) = \mathcal{N}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathcal{S}$ et $\overline{\xi} \preceq \xi$.*

Nous disposons maintenant des outils nécessaires pour énoncer le résultat principal, i.e le principe de Brézis-Browder, sur tout ensemble muni d'une relation de pré-ordre.

Théorème 1. *Soit $\mathcal{S}$ un ensemble quelconque et "$\preceq$" une relation de pré-ordre sur $\mathcal{S}$. $\mathcal{N} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ une fonction. Si :*

i) Toute suite croissante de $\mathcal{S}$ admet une borne supérieure dans $\mathcal{S}$,

ii) La fonction $\mathcal{N}$ est croissante,

alors, pour tout $x_0 \in \mathcal{S}$, il existe un un élément $\overline{x} \in \mathcal{S}$, $\mathcal{N}$-maximal satisfaisant $x_0 \preceq \overline{x}$.

Démonstration. On utilise une démonstration par l'absurde. Supposons tout d'abord que la fonction $\mathcal{N}$ est croissante. Notons :

$$\mathfrak{J}_1(x) = \{y \in \mathcal{S}, x \preceq y\},$$

et

$$\mathfrak{J}_2(x) = \sup\{\mathcal{N}(y), y \in \mathfrak{J}_1(x)\},$$

On fixe un élément x_0 dans $\mathfrak{J}_1$ et on introduit la relation binaire suivante :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow y \in \mathfrak{J}_1(x) \text{ et } \frac{1}{2}\big(\mathcal{N}(x) + \mathfrak{J}_2(x)\big) < \mathcal{N}(y).$$

Supposons par absurde qu'il n'existe pas d'élément $\mathcal{N}$-maximal qui appartient à $\mathfrak{J}_1(x_0)$. Cela est équivaut à dire, pour tout $x \in \mathfrak{J}_1(x_0)$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x) &< \mathfrak{J}_2(x), \\ \Leftrightarrow \quad -\frac{(\mathfrak{J}_2(x) - \mathcal{N}(x))}{2} &< \quad 0, \\ \Leftrightarrow \quad \mathfrak{J}_2(x) - \frac{(\mathfrak{J}_2(x) - \mathcal{N}(x))}{2} &< \mathfrak{J}_2(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe un élément $y \in \mathfrak{J}_1(x)$ tel que,

$$\mathfrak{I}_2(x) - \frac{1}{2}\left(\mathfrak{I}_2(x) - \mathcal{N}(x)\right) < \mathcal{N}(y),$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\mathcal{N}(x) + \mathfrak{I}_2(x)\right) < \mathcal{N}(y).$$

donc $x\mathcal{R}y$. Nous pouvons maintenant appliquer l'axiome des choix dépendants pour déduire l'existence d'une suite $(x_k)_k$ telle que, $x_k\mathcal{R}x_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cela signifie,

$$x_k \preceq x_{k+1},$$

et

$$\frac{1}{2}\left(\mathfrak{I}_2(x_k) + \mathcal{N}(x_k)\right) < \mathcal{N}(x_{k+1}), \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\mathcal{N}(x_k) + \mathcal{N}(x_k)\right) \leq \frac{1}{2}\left(\mathfrak{I}_2(x_k) + \mathcal{N}(x_k)\right) < \mathcal{N}(x_{k+1}).$$

donc $\mathcal{N}(x_k) < \mathcal{N}(x_{k+1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Comme la suite $(\mathcal{N}(x_k))_k$ est strictement croissante et $\mathcal{N}$ une fonction croissante, la suite $(x_k)_k$ est aussi croissante car,

$$\mathcal{N}(x_k) < \mathcal{N}(x_{k+1}) \Longleftrightarrow x_k \leqslant x_{k+1}, \qquad \text{pour k } \in \mathbb{N}.$$

Par la condition (i) du Théorème.1, comme $(x_k)_k$ est une suite dans $\mathcal{S}$, elle admet une borne supérieure dans $\mathcal{N}$. i.e, il existe un élément $\overline{x} \in \mathcal{S}$ tel que $x_k \preceq \overline{x}$ pour tout k dans $\mathbb{N}$. Montrons que cet élément $\overline{x}$ est $\mathcal{N}$-maximal, soit $y \in \mathfrak{I}_1(\overline{x})$ un élément arbitraire fixé ($y \in \mathcal{S}$). Évidemment $y \in \mathfrak{I}_1(x_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ par transitivité de "$\preceq$", et puisque $(x_k)_k$ admet une borne supérieur, $(\mathcal{N}(x_k))_k$ admet aussi une borne supérieur. Donc la suite $(\mathcal{N}(x_k))_k$ est convergente.
Par croissance de $\mathcal{N}$ nous pouvons écrire,

$$\lim_{k\to+\infty} \mathcal{N}(x_k) \leqslant \mathcal{N}(\overline{x}) \leqslant \mathcal{N}(y). \tag{5}$$

Par (4) nous avons aussi,

$$\mathfrak{I}_2(x_k) \leqslant 2\mathcal{N}(x_{k+1}) - \mathcal{N}(x_k) \text{ et } \mathcal{N}(y) \leqslant \mathfrak{I}_2(x_k),$$

car $y \in \mathfrak{I}_1(x_k)$.
Donc

$$\mathcal{N}(y) \leqslant \mathfrak{I}_2(x_k) \leqslant 2\mathcal{N}(x_{k+1}) - \mathcal{N}(x_k).$$

En passant à la limite,

$$\lim_k \left(2\mathcal{N}(x_{k+1}) - \mathcal{N}(x_k)\right) \leqslant \mathcal{N}(\overline{x}),$$

car $\lim_k (\mathcal{N}(x_{k+1})) = \lim_k (\mathcal{N}(x_k))$.
Par conséquent,

$$\mathcal{N}(y) \leqslant \lim_k \mathcal{N}(x_k) \leqslant \mathcal{N}(\overline{x}). \tag{6}$$

En combinant les deux inégalités (5) et (6) nous obtenons $\mathcal{N}(y) = \mathcal{N}(\overline{x})$. Donc $\overline{x}$ est $\mathcal{N}$-maximal. Cela contredit l'hypothèse de départ et achève la preuve. $\square$

2.2 Tangente généralisée

Dans cette partie, nous allons définir la notion de tangente généralisée et sa propriété équivalente, sur les ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$.

Définition 4. *Un ensemble fermé $\boldsymbol{K} \subset \mathbb{R}^n$ satisfait la condition de la tangente généralisée si, pour tout $t \in [0, T[$ et pour tout $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P; \boldsymbol{K})$,*

$$\liminf_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \left\{ \frac{1}{h} E\left[\mid \varsigma - \eta \mid^2 \right] + \frac{1}{h^2} E\left[\left| E^{\mathcal{F}_t}\left[\varsigma - \eta \right] \right|^2 \right] \right\} := 0$$

où, $\qquad (\varsigma, \eta) \in \mathcal{S}(t, h)\xi \times L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t+h}, P; K)$,

et $\qquad \mathcal{S}(t, h)\xi = \xi + hf(\xi) + [W(t+h) - W(t)]\, g(\xi)$.

La proposition suivante est une conséquence directe de la définition précédente :

Proposition 1. *Un ensemble fermé $\boldsymbol{K} \subset \mathbb{R}^n$ satisfait la condition de la tangente généralisée, pour tout $t \in [0, T[$, et pour tout $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P; K)$, si et seulement si, il existe une suite de réels positifs h_n convergente vers 0 ; $h_n \underset{n}{\to} 0$, et une suite de variables aléatoires $p_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t+h}, P; \mathbb{R}^n)$ telles que les deux assertions suivantes soient satisfaites :*

a) $\lim_n \left(E\left[|p_n|^2 \right] + \dfrac{1}{h_n} E\left[\left| E^{\mathcal{F}_t}\left[p_n \right] \right|^2 \right] \right) = 0$,

b) $\xi + h_n f(\xi) + [W(t+h_n) - W(t)]\, g(\xi) + h_n^{\frac{1}{2}} p_n \in K$ *presque-sûrement pour tout* $1 \leqslant n$.

Démonstration. ($\Leftarrow$) Supposons une suite de réels positifs $h_n \underset{n}{\to} 0$, et une suite de variables aléatoires $p_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t+h}, P; K)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose,

$$\varsigma_n = \xi + h_n f(\xi) + [W(t+h_n) - W(t)]\, g(\xi).$$

d'après **b)**,

$$\varsigma_n + h_n^{\frac{1}{2}} p_n \in K,$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\eta_n \in K$ tel que,

$$\eta_n = \xi + h_n f(\xi) + [W(t+h_n) - W(t)]\, g(\xi) + h_n^{\frac{1}{2}} p_n.$$

donc,

$$h_n^{\frac{1}{2}} p_n + \varsigma_n = \eta_n,$$

$$\Leftrightarrow \eta_n - \varsigma_n = h_n^{\frac{1}{2}} p_n.$$

Remplaçons p_n dans **a)**,

$$\frac{1}{h_n} E\left[\mid \varsigma_n - \eta_n \mid^2 \right] = \frac{1}{h_n} h_n E\left[\mid \ p_n \mid^2 \right] = E\left[\mid \ p_n \mid^2 \right]. \tag{7}$$

$$\frac{1}{h_n^2} E\left[\left| E^{\mathcal{F}_t}\left[\varsigma_n - \eta_n \right] \right|^2 \right] = \frac{1}{h_n^2} h_n E\left[\left| E^{\mathcal{F}_t}\left[p_n \right] \right|^2 \right] = \frac{1}{h_n} E\left[\left| E^{\mathcal{F}_t}\left[p_n \right] \right|^2 \right]. \tag{8}$$

En sommant (7) et (8) on obtient,

$$\frac{1}{h_n}E\left[\mid \varsigma_n-\eta_n\mid^2\right]+\frac{1}{h_n^2}E\left[\left|E^{\mathcal{F}_t}\left[\varsigma_n-\eta_n\right]\right|^2\right]=E\left[\mid\ p_n\mid^2\right]+\frac{1}{h_n}E\left[\left|E^{\mathcal{F}_t}\left[p_n\right]\right|^2\right].$$

Par **a)** et par passage à la limite,

$$\lim_n\left(\frac{1}{h_n}E\left[\mid \varsigma_n-\eta_n\mid^2\right]+\frac{1}{h_n^2}E\left[\left|E^{\mathcal{F}_t}\left[\varsigma_n-\eta\right]\right|^2\right]\right)=0.$$

□

3 Invariance des systèmes stochastiques

3.1 Notion d'invariance

Définition 5. *Un ensemble fermé $\boldsymbol{K}\subset\mathbb{R}^n$ est dit invariant par rapport au système(1), pour tout $t\in[0,T[$, et pour toute condition initiale $\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P;\boldsymbol{K})$, si,*

$$X_t^{\xi}(s)\in\boldsymbol{K}\ dP-presque\ surement\ pour\ tout\ s\in[0,T].$$

ou d'une manière equivalente, pour tout $\varepsilon>0$,

$$d^2\Big(X_t^{\xi}(s),L^2(\Omega,\mathcal{F}_s,P;\boldsymbol{K})\Big)<\varepsilon,\qquad pour\quad tout\ s\in[0,T].$$

Remarque 2. Dans la définition de l'invariance, nous considérons $L^2(\Omega,\mathcal{F}_s,P;\mathbf{K})$ comme un sous ensemble fermé de $L^2(\Omega,\mathcal{F}_s,P;\mathbb{R}^n)$ et $d^2(\cdot,\ L^2(\Omega,\mathcal{F}_s,P;\mathbf{K}))$ la distance usuelle sur $L^2(\Omega,\mathcal{F}_s,P;\mathbb{R}^n)$ c'est-à-dire,

$$d^2\big(\zeta,L^2(\Omega,\mathcal{F}_s,P;\mathbf{K})\big):=\inf\Big\{|\zeta-\eta|^2:\eta\in\ L^2(\Omega,\mathcal{F}_s,P;\mathbf{K}))\Big\}$$

pour tout $\zeta\in\ L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P;\mathbb{R}^n)$ et pour tout $s\in[0,T]$

3.2 Relation entre tangente généralisée et invariance

Nous énonçons maintenant le résultat principal de cet article liant les deux notions, invariance et tangence généralisée.

Théorème 2. *Supposons que (A1) et (A2) soient vrais, $\boldsymbol{K}\subset\mathbb{R}^n$ un ensemble fermé non vide. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\boldsymbol{K}$ est invariant par rapport au système (1),*
2. *$\boldsymbol{K}$ satisfait les conditions de la tangente généralisée par rapport au système (1).*

Démonstration.
$1\Rightarrow 2.$

Soient $t\in\,]0,T[$ arbitraire, $h\in]0,1[$ assez petit et $\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P;\mathbf{K})$. Supposons $\mathbf{K}$ est invariant par rapport au système (1), alors la solution du système (1) X_t^{ξ} satisfait,

$$d(X_t^{\xi}(s),L^2(\Omega,\mathcal{F}_s,P;K))<h^3,\quad pour\ tout\ s\in[t,T].\tag{9}$$

En particulier, il existe un variable aléatoire $\eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t+h}, P; K)$, tel que

$$E\left[\mid X_t^\xi(t+h) - \eta \mid^2\right] < h^3. \tag{10}$$

Par continuité de la solution X_t^ξ du système (1), il existe une constante C tel que,

$$\sup_{s\in[t,t+h]} E\left[\mid X_t^\xi(s) - \xi \mid^2\right] \leqslant C(s-t) < Ch. \tag{11}$$

où C ne dépend que des coefficients de Lipschitz de f et g, de ξ, et du temps-horizon T (mais C ne dépend pas de h). par l'inégalité (11) et les hypothèses (A1) et (A2) sur f et g respectivement,

$$\sup_{s\in[t,t+h]} E\left[\mid f(X_t^\xi(s)) - f(\xi) \mid^2\right] < Ch, \tag{12}$$

et

$$\sup_{s\in[t,t+h]} E\left[\mid g(X_t^\xi(s)) - g(\xi) \mid^2\right] < Ch. \tag{13}$$

Par la suite, on introduit la variable aléatoire,

$$q_h = \eta - \xi - hf(\xi) - [W(t+h) - W(t)]\, g(\xi). \tag{14}$$

Ce qui est équivalent à

$$q_h = \eta - X_t^\xi(t+h) + X_t^\xi(t+h) - \xi - hf(\xi) - [W(t+h) - W(t)]\, g(\xi).$$

$$\begin{aligned} E\left[\mid q_h \mid^2\right] <& C\Big(E\left[\mid X_t^\xi(t+h) - \eta \mid^2\right] \\ &+ E\left[\left|\int_t^{t+h} \left[f(X_t^\xi(s)) - f(\xi)\right] \mathrm{d}s\right|^2\right] \\ &+ E\left[\left|\int_t^{t+h} \left[g(X_t^\xi(s)) - g(\xi)\right] \mathrm{dW}_s\right|^2\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

en combinant (10),(12) et (13),

$$E\left[|q_h|^2\right] < Ch^2 \tag{16}$$

et

$$E\left[|E^{\mathcal{F}_t}[q_h]|^2\right] \leq Ch^3 \tag{17}$$

Introduisons, la variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable suivante,

$$p_h = \frac{1}{\sqrt{h}} q_h. \tag{18}$$

Donc,

$$E\left[|p_h|^2\right] = \frac{1}{h} E\left[|q_h|^2\right],$$

et par (16)

$$E\left[|p_h|^2\right] \leq C\frac{1}{h}h^2 \leq Ch. \tag{19}$$

De même par (17)

$$\frac{1}{h}E\left[|E^{\mathcal{F}_t}\left[p_h\right]|^2\right] \leq C\frac{1}{h^2}h^3 \leq Ch. \tag{20}$$

En sommant (19) et (20) et par passage à la limite quand h tend vers 0^+,

$$\lim_{h\to 0^+} E\left[|p_h|^2\right] + \frac{1}{h}E\left[|E^{\mathcal{F}_t}\left[p_h\right]|^2\right] = 0.$$

et comme

$$\sqrt{h}p_h = q_h$$

et d'après (14)

$$\sqrt{h}p_h = \eta - \xi - hf(\xi) - \left[W\left(t+h\right) - W\left(t\right)\right]g(\xi).$$

donc,

$$\sqrt{h}p_h + \xi + hf(\xi) + \left[W\left(t+h\right) - W\left(t\right)\right]g(\xi) = \eta \in \mathbf{K},\ \text{par le choix de } \eta.$$

Nous avons donc démontrer $1 \Rightarrow 2$. □

$1 \Leftarrow 2$

Supposons maintenant que $\mathbf{K}$ satisfait la condition de quasi-tangence. Le but est de démontrer que $\mathbf{K}$ est invariant. Pour cela, nous introduisons la notion de ε-solution :

Définition 6. *Supposons que f et g vérifient respectivement les hypothèses (A1) et (A2), pour tout $0 \leqslant t \leqslant \widehat{T} \leqslant T$, $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P; K)$, et ε un réel positif. Une ε-solution par rapport au système (1) est le quadruplet $(\sigma, \varphi, \psi, Y)$ défini comme suit :*

(a) $\sigma : [t, \widehat{T}] \longmapsto [t, \widehat{T}]$ *une fonction non décroissante et vérifie,*

$$s - \varepsilon \leqslant \sigma(s) \leqslant s, \qquad \textit{pour tout } s \in [t, \widehat{T}].$$

(b) $\varphi : [t, \widehat{T}] \times \Omega \longmapsto \mathbb{R}^n$ *un processus prévisible et*

$$E\left[\int_t^{\widehat{T}} \mid \varphi(x) \mid^2 \mathrm{d}s\right] \ \leqslant\ (\widehat{T} - t)\varepsilon.$$

(c) $\psi : [t, \widehat{T}] \times \Omega \longmapsto L_2(\mathbb{R}^n)$ *un processus prévisible et*

$$E\left[\int_t^{\widehat{T}} \mid \psi(x) \mid^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \mathrm{d}s\right] \ \leqslant\ (\widehat{T} - t)\varepsilon.$$

(d) $Y : [t, \widehat{T}] \times \Omega \longmapsto \mathbb{R}^n$ *un processus prévisible et*

$$Y(s) = \xi + \int_t^s f(Y(\sigma(r)))\,\mathrm{d}r + \int_t^s g(Y(\sigma(r)))\mathrm{d}W_r + \int_t^s \varphi(r)\,\mathrm{d}r + \int_t^s \psi(r)\mathrm{d}W_r,$$

pour tout $s \in [t, \widehat{T}]$.

(e) *Pour tout* $s \in [t, \widehat{T}]$, $Y(\sigma(s)) \in K$, *dP−presque-surement et* $Y(\widehat{T}) \in K$ *dP−presque sûrement. De plus,*

$$E\left[|Y(s) - Y(\sigma(s))|^2\right] \leqslant \varepsilon, \qquad \text{pour tout } s \in [t, \widehat{T}].$$

La proposition suivante, ajoute d'autres propriétés de régularité du composant Y d'une ε-solution par rapport au système (1).

Proposition 2. *Supposons que f et g vérifient respectivement les hypothèses (A1) et (A2). Si* $0 \leqslant t \leqslant \widehat{T} \leqslant T$, $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P; \boldsymbol{K})$, *$\varepsilon$ un réel positif tel que* $\varepsilon \in]0,1[$ *et* $(\sigma, \varphi, \psi, Y)$ *une ε-solution du système*(1)*, alors*

1. *Il exite une constnate C telle que,*

$$\sup_{s \in [t, \widehat{T}]} E\left[|Y(s)|^2\right] \leqslant C, \tag{21}$$

   où C dépend uniquement de T et ξ..

2. *Le processus Y est continu en moyenne quadratique, autrement dire, si* $s \longrightarrow s'$,

$$E\left[\left|Y(s') - Y(s)\right|^2\right] \longrightarrow 0. \tag{22}$$

   pour tout $s, s' \in [t, \widehat{T}]$ *et* $s \leqslant s'$.

Démonstration.
Commençons par 1. On fixe s dans $[t, \widehat{T}]$,

$$\begin{aligned} E\left[|Y(s)|^2\right] = E\Bigg[\Bigg|\xi \ + \int_t^s f(Y(\sigma(r)))\,\mathrm{d}r \ + \ \int_t^s g(Y(\sigma(r)))\mathrm{d}W_r \\ + \int_t^s \varphi(r)\,\mathrm{d}r + \int_t^s \psi(r)\mathrm{d}W_r\Bigg|^2\Bigg] \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} E\left[|Y(s)|^2\right] \leqslant C \Bigg(& E\left[|\xi|^2\right] \\ & + E\left[\left(\int_t^s \left|f(Y(\sigma(r)))\,\mathrm{d}r\right|\right)^2\right] \\ & + E\left[\left(\int_t^s \left|g(Y(\sigma(r)))\mathrm{d}W_r\right|\right)^2\right] \\ & + E\left[\int_t^s |\ \varphi(x)\ |^2\ \mathrm{d}s\right] + E\left[\int_t^s |\ \psi(x)\ |^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\ \mathrm{d}s\right]\Bigg). \end{aligned}$$

Notons :

$$I_1 = E\left[|\xi|^2\right].$$

$$I_2 = E\left[\left(\int_t^s \left|f(Y(\sigma(r)))\,\mathrm{d}r\right.\right)^2\right].$$

$$I_3 = E\left[\left(\int_t^s \left|g(Y(\sigma(r)))\right|\mathrm{d}W_r\right)^2\right].$$

$$I_4 = E\left[\int_t^s |\ \varphi(x)\ |^2\ \mathrm{d}s\right] + E\left[\int_t^s |\ \psi(x)\ |^2_{L^2(E,\mathbb{R}^n)}\ \mathrm{d}s\right].$$

Comme $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P; \mathbf{K})$, il existe une constante C strictement positive telle que :

$$I_1 \leqslant C.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$I_2 \leqslant \; C(s-t)E\left[\int_t^s \left|f(Y(\sigma(r)))\right|^2 \mathrm{d}r\right].$$

$$I_2 \leqslant \; CE\left[\int_t^s \left|f(Y(\sigma(r)))\right|^2 \mathrm{d}r\right].$$

Par l'hypothèse $(A1)$ sur f,

$$\big||f(Y(\sigma(r)))| - |f(Y(r))|\big| \leqslant \big|f(Y(\sigma(r))) - f(Y(r))\big| \leqslant C\big|Y(\sigma(r)) - Y(r)\big|,$$

pour tout $r \in [t, s]$.

Donc,

$$\left|f(Y(\sigma(r)))\right|^2 \leqslant C\left(\left|f(Y(r))\right|^2 + \left|Y(\sigma(r)) - Y(r)\right|^2\right) \qquad \textit{pour tout } r \in [t, s].$$

$$E\left[\int_t^s \left|f(Y(\sigma(r)))\right|^2 \mathrm{d}r\right] \leqslant C\int_t^s E\left[\left|f(Y(r))\right|^2\right] \mathrm{d}r \quad + \quad C\int_t^s E\left[\left|Y(\sigma(r)) - Y(r)\right|^2\right] \mathrm{d}r.$$

en utilisant l'inégalité de Jensen.

Par la propriété (e) de la définition sur Y,

$$E\left[\left|Y(\sigma(r)) - Y(r)\right|^2\right] \leqslant \varepsilon \; < 1, \qquad \textit{pour tout } r \in [t, s]$$

et par l'hypothèse $(A1)$ sur f,

$$\int_t^s E\left[\left|f(Y(r))\right|^2\right] \mathrm{d}r \quad \leqslant C\left(\int_t^s E\left[\left|Y(r)\right|^2\right] \mathrm{d}r + 1\right).$$

donc,

$$I_2 \leqslant C\left(\int_t^s E\left[\left|Y(r)\right|^2\right] \mathrm{d}r + 1\right).$$

$I_3 = E\left[\left(\int_t^s \left|g(Y(\sigma(r)))\right| \mathrm{d}W_r\right)^2\right]$, et par l'isométrie d'Itô :
$I_3 = E\left[\int_t^s \left|g(Y(\sigma(r)))\right|^2 \mathrm{d}r\right]$.
En utilisant l'hypothèse $(A2)$ sur g et les mêmes arguments utilisés sur I_2 pour I_3 on obtient :

$$I_3 \leqslant C\left(\int_t^s E\left[\left|Y(r)\right|^2\right] \mathrm{d}r + 1\right).$$

Pour I_4 ,on a par les propriétés (b) et (c) de la définition :

$$I_4 = E\left[\int_t^s \mid \phi(x) \mid^2 \mathrm{d}s\right] + E\left[\int_t^s \mid \psi(x) \mid^2_{L^2(E, \mathbb{R}^n)} \mathrm{d}s\right] \leqslant C\varepsilon < C.$$

$$I_4 < C.$$

comme,

$$E\left[|Y(s)|^2\right] \leqslant C(I_1+I_2+I_3+I_4),$$

il existe une constante C strictement positive telle que,

$$E\left[|Y(s)|^2\right] \leqslant C\left(\int_t^s E\left[\left|Y(r)\right|^2\right] \mathrm{d}r + 1\right).$$

et par le lemme de Gronwall

$$E\left[|Y(s)|^2\right] \leqslant C.$$

Pour démontrer l'assertion 2, on fixe s' dans $[t,\widehat{T}]$. Pour tout s tel que $t \leqslant s \leqslant s'$, et par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\left|Y(s')-Y(s)\right| \leqslant & \Big|\int_s^{s'} f(Y(\sigma(r)))\,\mathrm{d}r\Big| \\ & + \Big|\int_s^{s'} g(Y(\sigma(r)))\mathrm{d}W_r\Big| \\ & + \Big|\int_s^{s'} \varphi(r)\,\mathrm{d}r\Big| + \Big|\int_s^{s'} \psi(r)\mathrm{d}W_r\Big|.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}E\left[\left|Y(s')-Y(s)\right|^2\right] \leqslant & C\Bigg(E\left[\Big|\int_s^{s'} f(Y(\sigma(r)))\,\mathrm{d}r\Big|^2\right] \\ & + \ E\left[\Big|\int_s^{s'} g(Y(\sigma(r)))\mathrm{d}W_r\Big|^2\right] \\ & + \ E\left[\Big|\int_s^{s'} \varphi(r)\,\mathrm{d}r\Big|^2\right] + E\left[\Big|\int_s^{s'} \psi(r)\mathrm{d}W_r\Big|^2\right]\Bigg). \\ & = C(I_1+I_2+I_3).\end{aligned}$$

Par l'hypothèse $(A1)$ sur f,

$$I_1 \leqslant E\left[\Big|\int_s^{s'} (1+Y(\sigma(r)))\ \mathrm{d}r\Big|^2\right].$$

Utilisons la propriété (21) de la composante Y de la ε-solution,

$$I_1 \leqslant C(s'-s)^2.$$

Par passage à la limite quand s' tend vers s,

$$\lim_{s\to s'} I_1 = 0.$$

Pour I_2, l'isométrie d'Itô, nous permet d'écrire

$$E\left[\Big|\int_s^{s'} g(Y(\sigma(r)))\mathrm{d}W_r\Big|^2\right] = E\left[\int_s^{s'} \left|g(Y(\sigma(r)))\right|^2 \mathrm{d}r\right].$$

Donc,

$$I_2 = E\left[\int_s^{s'} \left|g(Y(\sigma(r)))\right|^2 \mathrm{d}r\right].$$

Par l'hypothèse $(A2)$ sur g,

$$I_2 \leqslant E\left[\int_s^{s'} \left|(1 + Y(\sigma(r)))\right|^2 \mathrm{d}r\right].$$

Utilisons la propriété (21) de la composante Y de la ε-solution,

$$I_2 \leqslant C(s' - s).$$

Par passage à la limite quand s' tend vers s,

$$\lim_{s' \to s} I_2 = 0.$$

Les propriétés (b) et (c) de la **définition 6** impliques,

$$I_3 \leqslant 2(s' - s)\varepsilon.$$

Par passage à la limite quand s' tend vers s,

$$\underline{\lim_{s' \to s} I_3 = 0.}$$

Finalement,

$$\lim_{s' \to s} E\left[\left|Y(s') - Y(s)\right|^2\right] = 0.$$

Ce qui montre que le processus Y est continu en moyenne quadratique et achève la preuve. $\square$

L'étape principale de la preuve du théorème consiste à construire des solutions invariantes locales, pour cela nous prouverons le lemme suivant :

Lemme 2. *Supposons que f et g vérifient respectivement les hypothèses $(A1)$ et $(A2)$, $\boldsymbol{K} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé non vide satisfaisant les conditions de la tangente généralisée par rapport au système* (1)*. Alors, pour tout $t \in [0, T]$, pour toute condition initiale $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P; \boldsymbol{K})$, pour tout temps-horizon $\widehat{T} \in [0, T]$ et pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe une ε-solution par rapport au système* (1) *notée $(\sigma, \varphi, \psi, Y)$ définie sur $[t, \widehat{T}]$.*

Démonstration. Nous fixons $t \in [0, T]$, $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P; K)$, $\widehat{T}$ et $\varepsilon \in]0, 1[$. la preuve du lemme se fait en trois étapes :

<u>Étape 1</u> On commence par démontrer l'existence d'une ε-solution par rapport au système (1) dans un intervalle assez petit $[t, t+\delta]$. Pour cela, nous fixons ε' dans $]0,\varepsilon[$, et par la propriété de la tangente généralisée de $\mathbf{K}$, on note l'existence d'un réel positif $\delta \in]0, \varepsilon'[$ et une variable aléatoire $p \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t+\delta}, P; K)$ tels que

$$E\left[|p|^2\right] + \frac{1}{\delta} E\left[|E^{\mathcal{F}_t}[p]|^2\right] \leqslant \varepsilon',$$

et

$$\xi \ + \ \delta f(\xi) + [W\,(t+\delta) - W\,(t)]\, g(\xi) \ + \delta^{\frac{1}{2}} p \in \mathbf{K}, \quad dP\text{−presque-surement.} \tag{23}$$

On définit la fonction $\sigma : [t, t+\delta] \longrightarrow [t, t+\delta]$ par $\sigma(s) = t$, pour tout $s \in [t, t+\delta]$. En appliquant le théorème de représentation des martingales pour la variable aléatoire p, il existe un processus prévisible η, définit sur $[t, t+\delta]$ tel que

$$p = E^{\mathcal{F}_t}[p] + \int_t^{t+\delta} \eta_s \mathrm{d}W_r, \qquad dP - \text{presque-sûrement.} \tag{24}$$

On introduit $\varphi : [t, t+\delta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donné par

$$\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} E^{\mathcal{F}_t}[p], \qquad \text{pour tout } s \in [t, t+\delta].$$

et $\psi : [t, t+\delta] \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ donné par

$$\psi(s) = \sqrt{\delta}\eta_s, \qquad \text{pour tout } s \in [t, t+\delta].$$

Nous définissons le processus Y par

$Y(s) = \xi + (s-t)\, f(\xi) \, + \, (W(s) - W(t))\, g(\xi) + \int_t^s \varphi(r)\mathrm{d}r \, + \int_t^s \psi(r)\mathrm{d}W_r$,
pour tout $s \in [t, t+\delta]$.

Le but est de montrer que (σ, ϕ, ψ, Y) est une ε-solution par rapport au système (1). La condition (a) de la **définition 6** est bien satisfaite car σ est non décroissante et comme

$$t - \varepsilon < t - \varepsilon' \leqslant \sigma(s) \leqslant s, \qquad \text{pour tout } s \in [t, t+\delta],$$

alors

$$t - \varepsilon < \sigma(s) \leqslant s \qquad \text{pour tout } s \in [t, t+\delta].$$

Par le choix de Y, la condition (d) de la **définition 6** est bien satisfaite aussi. Pour montrer (b) et (c) on utilise la propriété de tangente généralisée de l'ensemble $\mathbf{K}$. Par (24), et en utilisant l'isométrie d'Itô on peut écrire

$$E\left[|p|^2\right] = E\left[\left|E^{\mathcal{F}_t}[p]\right|^2\right] + E\left[\int_t^{t+\delta} |\eta_s|^2 \mathrm{d}W_r\right],$$

Par (23),

$$E\left[|p|^2\right] + \frac{1}{\delta} E\left[|E^{\mathcal{F}_t}[p]|^2\right]$$

$$= E\left[\left|E^{\mathcal{F}_t}[p]\right|^2\right] + E\left[\int_t^{t+\delta} |\eta_s|^2 \mathrm{d}W_r\right] + \frac{1}{\delta} E\left[|E^{\mathcal{F}_t}[p]|^2\right] \leqslant \varepsilon'. \tag{25}$$

et (25) implique

$$E\left[\left|E^{\mathcal{F}_t}\left[p\right]\right|^2\right] \leqslant \varepsilon'.$$

$$E\left[\int_t^{t+\delta} |\eta_s|^2 \mathrm{d}s\right] \leqslant \varepsilon'.$$

$$\frac{1}{\delta}E\left[|E^{\mathcal{F}_t}\left[p\right]|^2\right] \leqslant \varepsilon'.$$

et comme $\varphi(s) = \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}E^{\mathcal{F}_t}\left[p\right] \quad$ pour tout $s \in [t, t+\delta]$, alors

$$E\left[\int_t^{t+\delta} \mid \varphi(s) \mid^2 \mathrm{d}s\right] \; \leqslant \; \delta\varepsilon'.$$

De même pour ψ. Comme $\psi(s) = \sqrt{\delta}\eta_s$ alors,

$$E\left[\int_t^{t+\delta} \mid \psi(s) \mid^2_{L^2(E,\mathbb{R}^n)} \mathrm{d}s\right] \; \leqslant \delta\varepsilon'.$$

Ainsi, les conditions (b) et (c) de la **définition 6** sont bien satisfaites. Il nous reste à montrer la dernière condition de la **définition 6**. Par choix de σ, $Y(\sigma(s)) = Y(t)$ pour tout $s \in [t, t+\delta]$, en particulier $Y(\sigma(s))$ est constant au cours du temps, donc est égal à la condition initiale, $Y(\sigma(s)) = \xi \in \mathbf{K} \quad dP-$presque-sûrement. $Y(t+\delta) \in \; \mathbf{K} \quad dP-$presque-sûrement car

$$Y(t+\delta) = \xi + \delta f(\xi) + \left(W(t+\delta) - W(t+\delta)\right) g(\xi) + \int_t^{t+\delta} \varphi(r)\mathrm{d}r + \int_t^{t+\delta} \psi(r)\mathrm{d}W_r,$$

et par le choix de φ et ψ,

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\delta} \varphi(r)\mathrm{d}r &= \int_t^{t+\delta} \frac{1}{\sqrt{\delta}}E^{\mathcal{F}_t}\left[p\right]\mathrm{d}r \\
&= \frac{\delta}{\sqrt{\delta}}E^{\mathcal{F}_t}\left[p\right] \\
&= \sqrt{\delta}E^{\mathcal{F}_t}\left[p\right].
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\delta} \varphi(r)\mathrm{d}r + \int_t^{t+\delta} \psi(r)\mathrm{d}W_r &= \sqrt{\delta}E^{\mathcal{F}_t}\left[p\right] + \int_t^{t+\delta} \sqrt{\delta}\eta_s \mathrm{d}W_r \\
&= \sqrt{\delta}\left(E^{\mathcal{F}_t}\left[p\right] + \int_t^{t+\delta} \sqrt{\delta}\eta_s \mathrm{d}W_r\right) \\
&= \sqrt{\delta}p.
\end{aligned}$$

On obtient,

$Y(t+\delta) = \xi + \delta f(\xi) + \left(W(t+\delta) - W(t)\right) g(\xi) + \sqrt{\delta}p \in K\;$ d'après (23).

Par choix de σ et pour tout $s \in [t, t+\delta]$,

$$
\begin{aligned}
E\left[\left|Y(s) - Y(\sigma(s))\right|^2\right] &= E\left[\left|Y(s) - \xi\right|^2\right] \\
&\leqslant C\left(E\left[\left(\int_t^s f(\xi)\ \mathrm{d}r\right)^2\right]\right. \\
&+ E\left[\int_t^s \left|g(\xi)\right|^2 \mathrm{d}r\right] \\
&+\ E\left[\left(\int_t^s \left|\varphi(r)\right| \mathrm{d}r\right)^2\right] + E\left[\int_t^s \left|\psi(r)\right|^2 \mathrm{d}r\right]\Bigg). \\
&\leqslant C(I_1 + I_2 + \varepsilon'). \qquad (26)
\end{aligned}
$$

En utilisant $(A1)$,

$$I_1 \leqslant C(s-t)\left(E\left[|\xi|^2\right] + 1\right).$$

Comme $s \in [t, t+\delta]$ et $\delta < \varepsilon'$,

$$I_1 \leqslant C\varepsilon'.$$

De même pour g et en utilisant $(A2)$,

$$I_2 \leqslant C\varepsilon'.$$

donc (42) s'écrit :

$$E\left[\left|Y(s) - Y(\sigma(s))\right|^2\right] \leqslant C\varepsilon'.$$

Ici, la constante C dépend uniquement de T et de ξ (C ne dépend ni de ε ni de δ). Par choix de ε' assez petit on obtient finalement

$$E\left[\left|Y(s) - Y(\sigma(s))\right|^2\right] \leqslant \varepsilon.$$

Les hypothèses (a), (b), (c), (d), et (e) de la **définition 6** sont bien vérifiées. Donc, $(\sigma, \varphi, \psi, Y)$ est une ε-solution.

Étape 2 Pour prouver l'existence d'une ε-solution sur l'intervalle $[t, \widehat{T}]$ en entier, on utilise le principe de Brézis-Browder. Soit l'ensemble

$$\mathcal{S} := \left\{\varepsilon\text{-solutions définies sur } [t, t+\alpha]\ , \quad [t, t+\alpha] \subset [t, \widehat{T}]\ ;\ \alpha > 0\right\},$$

muni de la relation de pré-ordre "$\preceq$" suivante :
Si $(\sigma_1, \varphi_1, \psi_1, Y_1)$ est définie sur l'intervalle $[t, t+\alpha_1]$ et $(\sigma_2, \varphi_2, \psi_2, Y_2)$ définie sur l'intervalle $[t, t+\alpha_2]$,

$$(\sigma_1, \varphi_1, \psi_1, Y_1) \preceq (\sigma_2, \varphi_2, \psi_2, Y_2)$$

si $\quad \alpha_1 \leqslant \alpha_2, \quad \sigma_1 = \sigma_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2,$ et $\psi_1 = \psi_2$ sur $[t, t+\alpha_1] \times \Omega$.

Le but est de prouver que chaque suite croissante d'éléments de $\mathcal{S}$ admet une borne supérieur. Pour cela, nous supposons la suite croissante

$$\mathcal{D} = \Big\{ (\sigma_n, \varphi_n, \psi_n, Y_n) \text{ définies respectivent sur } [t, t+\alpha_n], n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

et

$$\alpha = \sup_n \alpha_n.$$

Si $\alpha = \alpha_n$ l'élément $(\sigma_n, \varphi_n, \psi_n, Y_n)$ est une borne supérieur pour un certain n $\big((\sigma_n, \varphi_n, \psi_n, Y_n)$ est un maximum$\big)$. Si $\mathcal{D}$ n'admet pas de maximum, puisque $(\sigma_n)_n$ est une suite de fonctions croissante et $\sigma_n(\alpha_n)$ est dans le fermé $[t, t+\alpha]$ on a,

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(\alpha_n) \in [t+\alpha].$$

Cela nous permet de définir une fonction $\sigma : [t, t+\alpha] \longrightarrow [t+\alpha]$

$$\sigma(s) = \begin{cases} \sigma_n(s), & \text{si } s \in [t, t+\alpha_n], \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n(t+\alpha_n), & \text{si } s = t+\alpha. \end{cases}$$

Donc σ satisfait la condition (a) de la définition.
Pour $s \in [t, t+\alpha]$ on définit

$$\varphi(s) = \begin{cases} \varphi_n(s), & \text{si } s \in [t, t+\alpha_n], \\ 0, & \text{si } s = t+\alpha. \end{cases}$$

et

$$\psi(s) = \begin{cases} \psi_n(s), & \text{si } s \in [t, t+\alpha_n], \\ 0, & \text{si } s = t+\alpha. \end{cases}$$

On peut étendre φ sur $[t+\alpha_n, t+\alpha]$ en posant

$$\varphi_n(s) = 0, \quad \text{pour tout s } \in [t+\alpha_n, t+\alpha].$$

φ est la limite simple de la suite de processus prévisibles φ_n. Donc φ est un processus prévisible. La propriété (b) de la **définition 6** nous permet d'écrire

$$E\left[\int_t^{t+\alpha} \mid \varphi_n(s) \mid^2 \mathrm{d}s\right] \leqslant \alpha_n\varepsilon, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par une simple application de théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty} \int_t^{t+\alpha} \mid \varphi_n(s) \mid^2 \mathrm{d}s = \int_t^{t+\alpha} \mid \varphi(s) \mid^2 \mathrm{d}s.$$

donc

$$E\left[\int_t^{t+\alpha} \mid \varphi(s) \mid^2 \mathrm{d}s\right] \leqslant \alpha\varepsilon. \tag{27}$$

Ainsi, la propriété (b) sur φ est satisfaite. Par les mêmes arguments sur ψ, on obtient

$$E\left[\int_t^{t+\alpha} \mid \psi(s) \mid^2 \mathrm{d}s\right] \leqslant \alpha\varepsilon. \tag{28}$$

Donc la propriété (c) est aussi satisfaite.
Rappelons que

$$Y_n(t+\alpha_n) = \xi \; + \int_t^{t+\alpha} 1_{[t,t+\alpha_n]} f(Y_n(\sigma_n(r)))\,\mathrm{d}r \; + \int_t^{t+\alpha} 1_{[t,t+\alpha_n]} g(Y_n(\sigma_n(r)))\mathrm{d}W_r$$
$$+ \int_t^{t+\alpha} 1_{[t,t+\alpha_n]} \varphi_n(r)\,\mathrm{d}r + \int_t^{t+\alpha} 1_{[t,t+\alpha_n]} \psi_n(r)\mathrm{d}W_r.$$

d'après (21), on note l'existe d'une constante $C > 0$ telle que,

$$\sup_{s\in[t,t+\alpha]} E\left[|Y_n(s)|^2\right] \leqslant C, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par passage à la limite, et en utilisant le théorème de convergence dominée, on déduit l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n(t+\alpha_n)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t+\alpha}, P; \mathbb{R}^n)$. De plus, comme K est un fermé cette limite est dans K dP-presque sûrement. On peut maintenant définir

$$Y(s) = \begin{cases} Y_n(s), & \text{si } s \in [t, t+\alpha_n], \\ \lim\limits_{n\to+\infty} Y_n(t+\alpha_n), & \text{si } s = t+\alpha. \end{cases}$$

Y est un processus prévisible comme limite d'une suite de processus prévisibles.
Nous vérifions par la suite la propriété (e) de la **définition 6**. On veut montrer que $Y(\sigma(s)) \in K$, dP-presque sûrement pour $s \in [t, t+\alpha]$. Si $s \in [t, t+\alpha_n]$, $Y(\sigma(s)) \in K$, dP-presque sûrement car dans ce cas $Y(\sigma(s)) = Y_n(\sigma(s))$. Sinon, si $s = t+\alpha$, en utilisant le fait que

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(t+\alpha_n) = \sigma(t+\alpha).$$

et la convergence en moyenne quadratique de Y on a,

$$E\left[\left|Y(\sigma_n(t+\alpha_n)) - Y(\sigma(t+\alpha)\right|^2\right] \longrightarrow_n 0.$$

donc, $Y(\sigma(t+\alpha)) \in K, \quad dP -$ presque sûrement.
Il nous reste à vérifier

$$E\left[|Y(s) - Y(\sigma(s))|^2\right] \;\leqslant\; \varepsilon, \; \textit{pour tout } s \in [t, t+\alpha].$$

Lorsque $s \in [t, t+\alpha_n]$, l'inégalité précédente est vérifiée car dans ce cas $Y(s) = Y_n(s)$, et on rappelle

$$E\left[|Y(t+\alpha_n) - Y(\sigma(t+\alpha_n))|^2\right] \;\leqslant\; \varepsilon, \; \textit{pour tout } n \in \mathbb{N} \textit{ et pour tout } s \in [t, t+\alpha_n].$$

Sinon, si $s = t+\alpha$, par définition de Y et σ et la la continuité de Y on obtient,

$$E\left[|Y(t+\alpha) - Y(\sigma(t+\alpha))|^2\right] \;\leqslant\; \varepsilon.$$

Nous avons donc prouvé que $(\sigma, \varphi, \psi, Y)$ est une ε-solution définie sur l'intervalle $[t, t+\alpha_n]$ et que cette dernière est une borne supérieur de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{S}$. Nous introduisons la fonction croissante $\mathcal{N}$ donné par

$$\mathcal{N}: \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}_+$$

$$\mathcal{N}((\sigma,\varphi,\psi,Y)=\alpha.$$

On a finalement tous hypothèses pour appliquer le théorème de Brézis-Browder, donc il existe un élément $\mathcal{N}$-maximal dans $\mathcal{S}$ noté $(\sigma^*,\varphi^*,\psi^*,Y^*)$ et défini sur $[t,t+\alpha^*]$.

Étape 3 Le but dans cette étape est de montrer que $t+\alpha^*=\widehat{T}$. Supposons par absurde que $t+\alpha^*<\widehat{T}$. Par définition de Y^*, $Y^*(t+\alpha^*)\in K$, et comme K satisfait la condition de tangente généralisée, alors pour tout $\varepsilon'<\varepsilon$, il existe $0<\delta^*\leqslant min\{\widehat{T}-t-\alpha^*,\varepsilon'\}$ et $p^*\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_{t+\alpha^*+\delta^*},P;K)$ tels que

$$E\left[|p^*|^2\right]+\frac{1}{\delta^*}E\left[|E^{\mathcal{F}_{t+\alpha^*}}[p^*]|^2\right]\leqslant\varepsilon',$$

et

$$Y^*(t+\alpha^*)+\ \delta^*f(Y^*(t+\alpha^*))+\left[W\left(t+\alpha^*+\delta^*\right)-W\left(t+\alpha^*\right)\right]g(Y^*(t+\alpha^*)) \\ +\ \sqrt{\delta^*}p\in\mathbf{K},\ \text{ dP- presque-surement.} \tag{29}$$

En appliquant le théorème de représentation des martingales pour la variable aléatoire p^*, il existe un processus prévisible η^*, défini sur $[t+\alpha^*,t+\alpha^*+\delta]$ tel que,

$$p^*=E^{\mathcal{F}_{t+\alpha^*}}[p^*]+\int_t^{t+\alpha^*+\delta}\eta^*_s\mathrm{d}W_r,\qquad dP-\text{presque-sûrement.} \tag{30}$$

Introduisons les fonctions,

$$\sigma(s)=\begin{cases}\sigma^*(s), & \text{si } s\in[t,t+\alpha^*],\\ t+\alpha^*, & \text{si } s\in[t+\alpha^*,t+\alpha^*+\delta^*],\end{cases} \tag{31}$$

$$\varphi(s)=\begin{cases}\varphi^*(s), & \text{si } s\in[t,t+\alpha^*],\\ \dfrac{1}{\sqrt{\delta^*}}E^{\mathcal{F}_{t+\alpha^*}}[p^*], & \text{si } s\in[t+\alpha^*,t+\alpha^*+\delta^*],\end{cases} \tag{32}$$

$$\psi(s)=\begin{cases}\psi^*(s), & \text{si } s\in[t,t+\alpha^*],\\ \sqrt{\delta^*}\eta_s, & \text{si } s\in[t+\alpha^*,t+\alpha^*+\delta^*],\end{cases} \tag{33}$$

et,

$$Y(s)=\begin{cases}Y^*(s), \quad \text{si } s\in[t,t+\alpha^*],\\ Y^*(t+\alpha^*)\ +\delta^*f(Y^*(t+\alpha^*))\\ \ +\left[W\left(t+\alpha^*+\delta^*\right)-W\left(t+\alpha^*\right)\right]g(Y^*(t+\alpha^*))\\ \ +\displaystyle\int_{t+\alpha^*}^s\varphi(r)\mathrm{d}r\ +\int_{t+\alpha^*}^s\psi(r)\mathrm{d}W_r\\ \text{si } s\in[t+\alpha^*,t+\alpha^*+\delta^*].\end{cases} \tag{34}$$

En ré-appliquant l'étape 1 pour un $\varepsilon'<\varepsilon$, nous déduisons que (σ,φ,ψ,Y) est un élément de $\mathcal{S}$. Mais comme (σ,φ,ψ,Y) est défini sur$[t,t+\alpha^*]$, $(\sigma^*,\varphi^*,\psi^*,Y^*)$ est défini sur $[t,t+\alpha^*+\delta^*]$ et $t+\alpha^*<t+\alpha^*+\delta^*$, $\sigma=\sigma^*$, $\varphi=\varphi^*$, $\psi=\psi^*$, sur $[t,+\alpha^*]$ alors,

$$(\sigma^*,\varphi^*,\psi^*,Y^*)\preceq(\sigma,\varphi,\psi,Y).$$

et,

$$\begin{cases} \mathcal{N}((\sigma^*, \varphi^*, \psi^*, Y^*)) = t + \alpha^* + \delta^*, \\ \mathcal{N}((\sigma, \varphi, \psi, Y)) = t + \alpha^*. \end{cases}$$

Donc, $\mathcal{N}((\sigma^*, \varphi^*, \psi^*, Y^*)) < \mathcal{N}((\sigma, \varphi, \psi, Y))$, ce qui est en contradiction avec le fait que $(\sigma^*, \varphi^*, \psi^*, Y^*)$ est $\mathcal{N}$-maximal. D'où, t+$\alpha^* = \widehat{T}$ et nous concluons que $(\sigma^*, \varphi^*, \psi^*, Y^*)$ est une ε-solution définie sur $\left[t, \widehat{T}\right]$. Ce qui achève la preuve du lemme.

□

Nous possédons désormais l'outillage nécessaire pour établir la démonstration réciproque du **théorème 2**.

$1 \Leftarrow 2$

Par hypothèse, $\mathbf{K}$ satisfait la condition de la tangente généralisée par rapport au système (1). Fixons $t \in [t, T], \xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P; \mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon \in]0, 1[$. Nous rappelons qu'une solution X_t^ξ du système (1) s'écrit de la forme,

$$X_t^\xi(s) = \xi + \int_t^s f(X_t^\xi(r))\,\mathrm{d}r \; + \; \int_t^s g(X_t^\xi(r))\mathrm{d}W_r, \qquad dP - \text{presque sûrement.}$$

Le lemme nous assure l'existence d'une ε-solution $(\sigma, \varphi, \psi, Y)$ définie sur l'intervalle $\left[t, T\right]$. Nous rappelons que

$$Y(s) = \xi + \textstyle\int_t^s f(Y(\sigma(r)))\,\mathrm{d}r + \int_t^s g(Y(\sigma(r)))\mathrm{d}W_r + \int_t^s \varphi(r)\,\mathrm{d}r + \int_t^s \psi(r)\mathrm{d}W_r, \quad .$$

pour tout $s \in [t, T]$.

et pour tout $s \in \left[t, T\right]$, $Y(\sigma(s)) \in \mathbf{K}$, $dP-$presque sûrement et $Y(T) \in \mathbf{K}$ $dP-$presque sûrement. De plus,

$$E\left[|Y(s) - Y(\sigma(s))|^2\right] \leqslant \varepsilon, \qquad \textit{pour tout } s \in [t, T]. \tag{35}$$

Pour montrer le sens réciproque du **théorème 2**, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$

$$d^2\Big(X_t^\xi(s), L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, P; \mathbf{K})\Big) < \varepsilon, \qquad \textit{pour tout } s \in [t, T].$$

Par définition de la distance d^2,

$$d^2\Big(X_t^\xi(s), L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, P; \mathbf{K})\Big) \leqslant E\left[\left|X_t^\xi(s) - Y(\sigma(s))\right|^2\right].$$

et par l'égalité de Pythagore,

$$\leqslant 2\left(E\left[\left|Y(s) - Y(\sigma(s))\right|^2\right] + E\left[\left|X_t^\xi(s) - Y(s)\right|^2\right]\right). \tag{36}$$

Nous avons l'estimation de $E\left[|Y(s) - Y(\sigma(s))|^2\right]$ par (35). Il nous reste d'estimer $E\left[\left|X_t^\xi(s) - Y(s)\right|^2\right]$ pour tout $s \in [t, T]$.

Tout d'abord,

$$\left|X_t^\xi(s)-Y(s)\right|^2=\left|\xi\ +\int_t^s f(Y(\sigma(r)))\,\mathrm{d}r\ +\ \int_t^s g(Y(\sigma(r)))\mathrm{d}W_r+\int_t^s \varphi(r)\,\mathrm{d}r\right.$$
$$\left.+\int_t^s \psi(r)\mathrm{d}W_r-\xi-\int_t^s f(X_t^\xi(r))\,\mathrm{d}r\ -\ \int_t^s g(X_t^\xi(r))\mathrm{d}W_r\right|^2$$

Ensuite,

$$\left|X_t^\xi(s)-Y(s)\right|^2=\left|\int_t^s f(Y(\sigma(r)))\,\mathrm{d}r-\int_t^s f(X_t^\xi(r))\mathrm{d}r+\int_t^s g(Y(\sigma(r)))\mathrm{d}W_r-\int_t^s g(X_t^\xi(r))\mathrm{d}W_r\right.$$
$$\left.+\int_t^s \varphi(r)\,\mathrm{d}r+\int_t^s \psi(r)\mathrm{d}W_r\mathrm{d}r\quad\right|^2$$

et en utilisant l'égalité de Pythagore,

$$\left|\int_t^s f(Y(\sigma(r)))\,\mathrm{d}r-\int_t^s f(X_t^\xi(r))\mathrm{d}r\right|^2=\left|\int_t^s f(Y(r))-f(X_t^\xi(r))\,\mathrm{d}r\right|^2+\left|\int_t^s f(Y(r))-f(X(\sigma(r)))\,\mathrm{d}r\right|^2,$$

et

$$\left|\int_t^s g(Y(\sigma(r)))\mathrm{d}W_r-\int_t^s g(X_t^\xi(r))\mathrm{d}W_r\right|^2=\left|\int_t^s g(Y(r))\ \mathrm{d}W_r-\int_t^s g(X_t^\xi(r))\ \mathrm{d}W_r\right|^2$$
$$+\ \left|\int_t^s g(Y(\sigma(r)))\mathrm{d}W_r-\int_t^s g((r))\mathrm{d}W_r\right|^2.$$

Nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned}E\left[\left|X_t^\xi(s)-Y(s)\right|^2\right]\leqslant C\Bigg(&E\left[\left(\left|\int_t^s f(Y(r))-f(X_t^\xi(r))\,\mathrm{d}r\right|\right)^2\right]\\&+E\left[\left|\int_t^s f(Y(r))-f(Y(\sigma(r)))\,\mathrm{d}r\right|^2\right]\\&+E\left[\left|\int_t^s g(Y(r))-g(X_t^\xi(r)\,\mathrm{d}W_r\right|^2\right]\\&+E\left[\left|\int_t^s g(Y(r))-g(Y(\sigma(r)))\,\mathrm{d}W_r\right|^2\right]\\&+E\left[\int_t^s\mid\varphi(x)\mid^2\mathrm{d}s\right]+E\left[\int_t^s\mid\psi(x)\mid^2_{L^2(E,\mathbb{R}^n)}\mathrm{d}s\right]\Bigg)\\&=C(I_1+I_2+I_3+I_4+I_5).\end{aligned}\tag{37}$$

En appliquant $(A1)$ à I_1,

$$I_1\leqslant CE\left[\left(\int_t^s\left|Y(r)-X_t^\xi(r)\right|\mathrm{d}r\right)^2\right],$$

Et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$I_1\leqslant C\left(\int_t^s E\left[\left|Y(r)-X_t^\xi(r)\right|^2\right]\mathrm{d}r\right).\tag{38}$$

Par le même argument pour I_2 nous trouvons,

$$I_2 \leqslant C\left(\int_t^s E\left[\left|Y(r)-Y(\sigma(r))\right|^2\right] \mathrm{d}r\right).$$

et par (35)

$$I_2 \leqslant C\varepsilon. \tag{39}$$

Pour I_3 On applique $(A2)$,

$$I_3 \leqslant CE\left[\left(\int_t^s \left|Y(r)-X_t^{\xi}(r)\right| \mathrm{d}r\right)^2\right],$$

Et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$I_3 \leqslant C\left(\int_t^s E\left[\left|Y(r)-X_t^{\xi}(r)\right|^2\right] \mathrm{d}r\right). \tag{40}$$

Par le même argument pour I_4 nous trouvons,

$$I_4 \leqslant C\left(\int_t^s E\left[\left|Y(r)-Y(\sigma(r))\right|^2\right] \mathrm{d}r\right).$$

l'inégalité (35) nous permet d'obtenir

$$I_4 \leqslant C\varepsilon. \tag{41}$$

Pour I_5 les propriété (b) et (c) sur φ et ψ nous donnent directement,

$$I_5 \leqslant C\varepsilon. \tag{42}$$

Finalement, d'après (38), (39), (40), (41) et (42), (37) s'écrit,

$$E\left[\left|X_t^{\xi}(s)-Y(s)\right|^2\right] \leqslant C\left(\varepsilon+\int_t^s E\left[\left|Y(r)-X_t^{\xi}(r)\right|^2\right] \mathrm{d}r\right) \text{pour tout } s \in \left[t,T\right].$$

une simple application du lemme de Gronwall nous donne,

$$E\left[\left|X_t^{\xi}(s)-Y(s)\right|^2\right] \leqslant C\varepsilon e^{(s-t)}$$

donc

$$E\left[\left|X_t^{\xi}(s)-Y(s)\right|^2\right] \leqslant C\varepsilon \tag{43}$$

En substituant (43) et (35) dans (36), nous obtenons,

$$d^2\left(X_t^{\xi}(s), L^2(\Omega,\mathcal{F}_s,P;\mathbf{K})\right) \leqslant C\varepsilon, \qquad \text{pour tout s} \in \left[t,T\right].$$

La conclusion se déduit du fait que C est indépendant de ε $\left(\text{et } s \in \left[t,T\right]\right)$, ε est arbitraire dans$\left]0,1\right[$. La preuve du théorème réciproque est maintenant complète.

Référence :

Ovidiu Carja, Mihai Necula, Ioan I. Vrabie