Vector Calculus HW8

เขียน by หมาน

9/6/2026

ในแบบฝึกหัดชุดนี้เราจะฝึกการใช้ **Delta Function**

1. เดลต้าฟังก์ชัน $\delta(x)$ ถูกนิยามดังต่อไปนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta(x - x') f(x') = f(x) \tag{1}$$

   (a) สำหรับจำนวนจริง $a \neq 0$ จงแสดงว่า

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{2}$$

   (Hint: Integration by part)

   (b) สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่อง $f(x)$ จงแสดงว่า

$$f(x)\frac{d\delta(x)}{dx} = -\frac{df(x)}{dx}\delta(x) \tag{3}$$

   (Hint: Integration by part)

   (c) จงคำนวณค่าต่อไปนี้

      1. $\int_{-1}^{1} dx(4x^2 + 2x - 1)\,\delta(1 - 2x)$
      2. $\int_{-2}^{0} dx(3x^3 + 2x)\,\dfrac{\delta(3x + 1)}{dx}$

2. (Optional) ในข้อนี้เราจะลองหัดเขียนความหนาแน่นของประจุในรูปของ Delta function กำหนดให้ประจุ Q กระจายตัวบนผิว ฉนวนทรงกลมรัศมี R ทำให้มีความหนาแน่นเชิงพื้นที่สม่ำเสมอ σ
   เมื่อเราใช้พิกัดเชิงขั้ว (r, θ, ϕ) พบว่าสามารถบรรยายการกระจายตัวได้ด้วยฟังก์ชันความหนาแน่น $\rho(r, \theta, \phi)$
   จงเขียน $\rho(r, \theta, \phi)$ ในรูป Delta function ของพิกัดเชิงขั้ว
   Hint 1: $\rho(r, \theta, \phi) \neq Q\delta(r - R)$
   Hint 2: $Q = \int_V \rho(r, \theta, \phi)\, dV$