Vector Calculus HW1

เขียน by หมาน

5/6/2026

ต่อไปนี้เราจะใช้ Einstein Summation Notation กล่าวคือเมื่อมี index ที่ซ้ำกันโผล่มา นั่นหมายความว่าเราทำ summation ของ index นั้น

$$A_i B_i \overset{\text{put}}{=} \sum_{i=1}^{n} A_i B_i \tag{1}$$

นอกจากนี้เรายังมีเอกลักษณ์ที่ควรรู้และจำได้อยู่สองอันนั่นคือ

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl} \tag{2}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \tag{3}$$

เมื่อ ϵ_{ijk} คือ Levi-Civitta symbol และ δ_{ij} คือ Dirac Delta
นอกจากนี้ เมื่อเขียนตัวหนา เช่น $\mathbf{A}$ นั่นหมายความว่า $\mathbf{A}$ เป็นเวกเตอร์ 3 มิติ

1. จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้ โดยใช้ Einstein Summation

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \tag{4}$$

   เมื่อ $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{B}$ เป็นเวกเตอร์ 3 มิติ

2. จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้โดยใช้ (2), (3) และ Einstein Summation

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \tag{5}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \tag{6}$$

3. (Optional) จงพิสูจน์ (2) และ (3)