Vector Calculus HW5

เขียน by หมาน

6/6/2026

ในแบบฝึกหัดชุดนี้เราจะฝึกการ**อินทริเกตตามพื้นผิว (Surface Integral)**

1. พิจารณาพื้นผิว S ต่อไปนี้

$$S = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2 \,, z = 0\} \tag{1}$$

ซึ่งเป็นวงกลมรัศมี R ที่อยู่บนระนาบ $z = 0$
เราเลือกที่จะบรรยายพื้นผิว S ด้วยสมการอิงตัวแปรเสริม (parametric equation) ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(r, \theta) &= (r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, 0) \\ 0 \leq r &\leq R \\ 0 \leq \theta &\leq 2\pi \end{aligned} \tag{2}$$

เรียก $\mathbf{r}$ ว่า **เวกเตอร์บอกตำแหน่งพื้นผิว** กำหนดให้ $\mathbf{n}$ แทนเวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิว S ในทุก ๆ จุด เราสามารถหา $\mathbf{n}$ ได้ดังต่อไปนี้

$$\mathbf{n} = \frac{1}{dS}\, d\mathbf{S} \tag{3}$$

เมื่อ $d\mathbf{S}$ หาได้จากเวกเตอร์บอกตำแหน่งพื้นผิว $\mathbf{r}(u, v)$ ตามวิธีดังต่อไปนี้

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \tag{4}$$

(a) จงแสดงว่าสำหรับพื้นผิว S ของวงกลมรัศมี R ในข้อนี้

$$d\mathbf{S} = r^2\, dr\, d\theta\, \mathbf{e}_z \tag{5}$$

(หมายเหตุ เครื่องหมายสุดท้ายอาจเป็นบวกหรือลบขึ้นอยู่กับ u, v ที่เราเลือก)

(b) จงแสดงว่า

$$\int_S \mathbf{e}_z \cdot d\mathbf{S} = \int_S dS = \pi R^2 \tag{6}$$

2. พิจารณาพื้นผิวทรงกลม S

$$S = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = a^2\} \tag{7}$$

   (a) จงเขียนเวกเตอร์บอกตำแหน่งพื้นผิวสำหรับผิวทรงกลมนี้

   (b) จงเขียน dS

   (c) จงหาพื้นที่ผิวของทรงกลมนี้

3. กำหนดฟังก์ชันค่าสเกลาร์ $f(x, y, z) = xy + z$ และพื้นผิว S ที่กำหนดโดย $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ เมื่อ $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ จงหา

$$\int_S f \, dS = 20\pi \tag{8}$$

4. กำหนดฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, 2)$ และพื้นผิว S ที่กำหนดโดย $z = \sqrt{1 - y^2}$ เมื่อ $0 \leq x \leq 5$ จงแสดงว่า

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 20 \tag{9}$$