Prof. Dr. Kai Lawonn
Dr. Pepe Eulzer

Übungsblatt 8
Abgabe: 01.06.2025

Illustrative Visualisierung

Abgabe in Moodle über die Schaltfläche *Übungsaufgaben* → *Übungsblatt 8: Abgabe*. Sie können bis 23:59 Uhr des o.g. Datums abgeben. Achten Sie darauf, dass die letzte Abgabe bewertet wird.

Aufgabe 1 Krümmung (12 Punkte)

In `task8_1.py` ist ein Höhenfeld durch die Funktion $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ gegeben. Die diskreten Punkte sind durch die Matrizen X, Y und Z abgebildet. Es soll nun die Krümmung des Höhenfeldes bestimmt und per Colormap dargestellt werden (in der Vorlesung Kapitel *Curvature Measurement*).

a) (2 Punkte)
Berechnen Sie für jeden diskreten Punkt des Höhenfeldes die Hesse Matrix H. Die notwendigen Ableitungen können Sie manuell lösen und im Code explizit ausschreiben.

b) (2 Punkte)
Berechnen Sie für jeden diskreten Punkt des Höhenfeldes den Operator P. Auch hier können Sie die Ableitungen explizit schreiben.

c) (2 Punkte)
Berechnen Sie für jeden diskreten Punkt des Höhenfeldes die Matrix G in allgemeiner Form:

$$G = -\frac{PHP}{|\nabla f|}$$

d) (2 Punkte)
Berechnen Sie für jeden diskreten Punkt des Höhenfeldes die Spur T der Matrix G.

e) (2 Punkte)
Berechnen Sie für jeden diskreten Punkt des Höhenfeldes die Frobenius Norm F der Matrix G:

$$|G|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |g_{i,j}|^2}$$

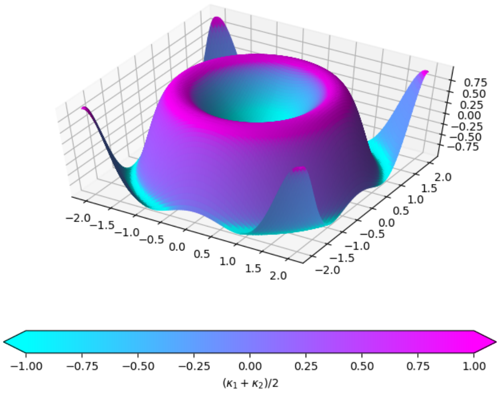
f) (2 Punkte)
Berechnen Sie für jeden diskreten Punkt des Höhenfeldes die mittlere Krümmung $\frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$.

Das Ergebnis wird bereits korrekt skaliert und mit einer Colormap geplottet.

Hinweise:

- Die Funktion lässt sich auch durch die Gleichung $\sin(x^2 + y^2) - z = 0$ ausdrücken. Das erlaubt es, die Normale und Hesse-Matrix zu bestimmen.
- Numpy unterstützt viele Funktionen der Vektor- und Matrixarithmetik (siehe Cheatsheat *Vectors and Matrices*).
- Für das äußere Produkt zweier Vektoren sollte `np.outer` verwendet werden. Transponieren und Matrixmultiplikation ist mathematisch korrekt, funktioniert aber mit Numpys Syntax nicht in jedem Fall.

Das Ergebnis sollte so aussehen:



Aufgabe 2 Theorie **(3 Punkte)**

Geben Sie die Antworten auf die Theorieaufgaben direkt in Moodle ein.

a) (2 Punkte)
Gegeben sei das differenzierbare Skalarfeld $f(x, y) = x^2 - 3y$. Berechnen Sie die kovariante Ableitung $D_{v(x,y)} f(x, y)$ entlang des Vektors $v(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix}$.

b) (1 Punkt)
Feature Lines sind immer abhängig von der Blickrichtung des Betrachters.

(a) Wahr.

(b) Falsch.