سوال ۱ مسیر $x=my^2$ را در نظر بگیرید.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{3x^2+y^4} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=my^2}} \frac{my^4}{3m^2y^4+y^4}$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=my^2}} \frac{y^4 m}{y^4(3m^2+1)} = \frac{m}{3m^2+1}$$

چون به m وابسته است پس حد وجود ندارد.

(۸) زیرا تابع در مبدأ پیوسته نیست.

هر مسیر ۴

سوال ۲ بردار نرمال صفحه مماس بر رویه، بردار گرادیان است و می‌دانیم دو صفحه عمود بر هم هستند اگر بردار نرمال دو صفحه بر هم عمود باشند و بنابراین نشان می‌دهیم ضرب نقطه‌ای بردار گرادیان دو رویه در نقطه P برابر صفر است.

$$F(x,y,z)=x^2+2y^2-4z^2=8$$

$$G(x,y,z)=4x^2-y^2+2z^2=14$$

$\nabla F=\langle 2x,4y,-8z\rangle$ (۲) $\quad \nabla F|_P=\langle 4,8,-8\rangle$ (۱)

$\nabla G=\langle 8x,-2y,4z\rangle$ (۲) $\quad \nabla G|_P=\langle 16,-4,4\rangle$ (۱)

$\nabla F\cdot\nabla G|_P = 4\times16-8\times4-8\times4=0$ (۲)

پس دو بردار بر هم عمودند یعنی دو صفحه مماس بر هم عمودند.

سوال ۳

$\frac{\partial z}{\partial x}=f(\frac{x}{y})+x(\frac{1}{y})f'(\frac{x}{y})+y(\frac{1}{y})g'(\frac{x}{y})$ (۴)

$\frac{\partial z}{\partial y}=x(\frac{-x}{y^2})f'(\frac{x}{y})+g(\frac{x}{y})+y(\frac{-x}{y^2})g'(\frac{x}{y})$ (۴)

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xf(\frac{x}{y})+\frac{x^2}{y}f'(\frac{x}{y})+xg'(\frac{x}{y})$$

$$-\frac{x^2}{y}f'(\frac{x}{y})+yg(\frac{x}{y})-xg'(\frac{x}{y})$$

$= xf(x/y)+yg(x/y)=z$ (۲)

سوال ۴ بیشترین مقدار مشتق جهتی تابع برابر است با $|\nabla f|$.

$$\nabla f=\left\langle \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\rangle$$

$=\left\langle \frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right\rangle$ (۴)

$|\nabla f|=\sqrt{\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}}=\sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}}$ (۲)

لذا مقدار $|\nabla f|$ در هر نقطه روی $x^2+y^2=a^2$ برابر است با $\sqrt{\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{a}$ (۲). بنابراین مقداری ثابت است.

سوال ۵

$$f(x,y)=x^2-y^2-2x+1$$

$f_x=2x-2$ (۱) $\quad 2x-2=0 \Rightarrow x=1$ (۱)

$f_y=-2y$ (۱) $\quad -2y=0\Rightarrow y=0$

$f_{xx}=2,\quad f_{yy}=(-2)\quad f_{xy}=0$ (۳)

$D(1,0)=-4<0$ (۱) $(1,0)$ نقطه زینی است.

برای نقاط روی مرز، ضرایب لاگرانژ را به کار می‌بریم.

$$\begin{cases}\nabla f=\lambda\nabla g\\ g(x,y)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x-2=\lambda 2x & (1)\\ -2y=\lambda 8y & (2)\\ x^2+4y^2-4=0 & (3)\end{cases}$$ (۳)

$\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ $y=0$ یا $\lambda=\frac{-1}{4}$

اگر $y=0$ از (۳) داریم $x=\pm 2$ (۲)

$A(2,0)$

$B(-2,0)$

اگر $\lambda=\frac{-1}{4}$ از (۱) داریم $x=\frac{4}{5}$ و از (۳) داریم

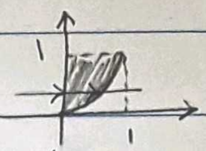
$\frac{16}{25}+4y^2=4 \Rightarrow y=\pm\sqrt{21}/5$ (۲)

$C(\frac{4}{5},\sqrt{21}/5)\quad D(4/5,-\sqrt{21}/5)$

$f(A)=1,\quad f(B)=9$ max (۱) $f(C)=f(D)=\frac{-4}{5}$ (۱) min

سوال ۶ الف

$I=\int_0^1\int_{x^2}^1 2xy^2 e^{yx^2}\,dy\,dx$



$x^2\le y\le 1$

$0\le x\le 1$

$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt y} 2xy^2 e^{yx^2}\,dx\,dy$ (۲)

(۲) $=\int_0^1 y e^{yx^2}\Big|_{x=0}^{\sqrt y} dy=\int_0^1 y(e^{y^2}-1)\,dy$ (۱)

(۲) $=\frac12 e^{y^2}-\frac{y^2}{2}\Big|_0^1=\frac12 e-\frac12-\frac12$ (۱)

ب) $I=\iint_D\left(\sqrt{xy}+\sqrt{\frac yx}\right)dA$

$\begin{cases} u=xy\\ v=y/x\end{cases}$ (۲) $\begin{cases} xy=1\Rightarrow u=1\\ xy=2\Rightarrow u=2\\ y/x=1\Rightarrow v=1\\ y/x=2\Rightarrow v=2\end{cases}$ (۲)

$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x\\ -\frac{y}{x^2} & \frac1x\end{vmatrix}=\frac yx+\frac yx=2\frac yx$

$J=\frac{1}{2y/x}=\frac{1}{2v}$ (۲)

$I=\int_1^2\int_1^2(\sqrt u+\sqrt v)\frac{1}{2v}\,dv\,du$ (۱)

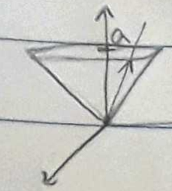
$=\int_1^2\left(\frac{\sqrt u}{2}\ln v+\sqrt v\Big|_1^2\right)du$

$=\int_1^2\left(\sqrt u\,\frac{\ln 2}{2}+\sqrt2-1\right)du$ (۲)

$=\frac{\ln 2}{2}\,\frac{u^{3/2}}{3/2}+(\sqrt2-1)u\Big|_1^2$ (۱)

$=\frac{\ln 2}{2}\left(\frac{2\,2^{3/2}}{3}-\frac23\right)+(\sqrt2-1)$

ج)



$z=a\Rightarrow\rho\cos\varphi=a$

$\Rightarrow\rho=\frac{a}{\cos\varphi}$

$z=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow\rho\cos\varphi=\rho\sin\varphi$

$\Rightarrow\tan\varphi=1\Rightarrow\varphi=\pi/4$

$\begin{cases} z=a\\ z=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}\Rightarrow\boxed{r=a}$ تصویر

$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)^{3/2}\,dv$

$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}}\rho^3\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$ (۱) (۱) (۱) (۱) (۱)

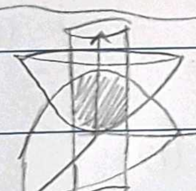
$=(2\pi)\int_0^{\pi/4}\frac{\rho^6}{6}\Big|_0^{a/\cos\varphi}\sin\varphi\,d\varphi$ (۲)

$=(2\pi)\int_0^{\pi/4}\frac{a^6}{6}\cos^{-6}\varphi\,\sin\varphi\,d\varphi$ (۱)

$=\frac{2\pi a^6}{6}\left(-\frac{\cos^{-5}\varphi}{-5}\Big|_0^{\pi/4}\right)$ (۲)

$=\frac{2\pi a^6}{6\times5}\left(\frac{1}{(\sqrt2)^5}-1\right)$

سوال ۷



$x^2+y^2=1\Rightarrow r=1$

V (۱) $=\iiint_E dv=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$ (۱) (۱) (۱) (۱)

$=(2\pi)\int_0^1\left(\sqrt{4-r^2}-r^2\right)r\,dr$ (۲)

$=(2\pi)\left(-\frac{\sqrt{4-r^2}}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1$ (۲)

$=2\pi\left(-\frac{\sqrt3}{2}+1-\frac14\right)$ (۱)

سوال ۸ ابتدا پایستاری میدان را بررسی می‌کنیم.

$$P = 2xy\cos(x^2) - 2x\sin(x^2)$$

$$Q = \sin(x^2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x\cos(x^2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\cos(x^2)$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ پس میدان پایستار است. ۴

$$\int P\,dx = \int\left(2xy\cos(x^2) - 2x\sin(x^2)\right)dx$$

$$= y\sin(x^2) + \cos(x^2)$$

$$\int Q\,dy = \int \sin(x^2)\,dy = y\sin(x^2)$$

بنابراین تابع پتانسیل به صورت زیر است.

$$f(x,y) = y\sin(x^2) + \cos(x^2)$$ ۴

بنابراین

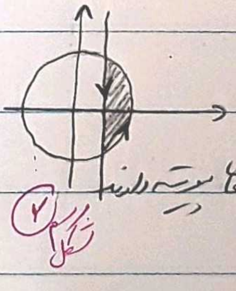
$$\int_C F.dr = f(B) - f(A)$$

$$= f(\sqrt{\pi},1) - f(0,0)$$ ۲

$$= \sin\pi + \cos\pi - 0 - \cos 0$$

$$= -1-1 = \boxed{-2}$$ ۱

سوال ۹



چون C مسیر بسته ساده و جهت‌دار و تکه‌ای هموار است و مولفه‌ها مشتق‌های جزئی پیوسته دارند

۲ رسم شکل

لذا قضیه گرین را استفاده می‌کنیم.

$$\int_C F.dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$ ۱

$$= \iint_D \left((y+1)\frac{2x}{x^2+y^2} - x\frac{2y}{x^2+y^2}\right)dA$$

۲ ۲

$$= \iint_D \frac{2x}{x^2+y^2}\,dA$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\sqrt{2}} \frac{2r\cos\theta}{r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

۱ ۱ ۱ ۱

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\sqrt{2}} 2\cos\theta\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\cos\theta}\right)\cos\theta\,d\theta$$ ۲

$$= 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\sqrt{2}\cos\theta - 1\right)d\theta$$

$$= 2\left(\sqrt{2}\sin\theta - \theta\right)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 2\left(\sqrt{2}\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{2\pi}{4}\right)$$ ۲