## Aufgabe 1

Gegeben sind:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
;  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,01 \end{pmatrix}$ ;  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1005 \end{pmatrix}$ 

**Exakte Lösung:** Die exakte Lösung x des linearen Gleichungssystems  $A \cdot x = b$  ermitteln wir über die Cramersche Regel mit den Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,01 \end{pmatrix} \; ; \qquad A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ b_2 & 1,01 \end{pmatrix} \; ; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 1 & b_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Diese haben die Determinanten:

$$\operatorname{Det}(A) = 1,01 - 1 = \frac{1}{100}; \quad \operatorname{Det}(A_1) = 1,01 \cdot b_1 - b_2; \quad \operatorname{Det}(A_2) = b_2 - b_1$$
 (2)

Das ergibt:

$$x_{1} = \frac{\operatorname{Det}(A_{1})}{\operatorname{Det}(A)} = 100 \cdot (1, 01 \cdot b_{1} - b_{2})$$

$$x_{2} = \frac{\operatorname{Det}(A_{2})}{\operatorname{Det}(A)} = 100 \cdot (b_{2} - b_{1})$$
(3)

Mit dem Zahlenwerten für b ergibt das  $x_1 = 500$  und  $x_2 = 500$ .

**Lösung mit ungenauem b:** Für fehlerbehaftete  $\tilde{b}_i = (1+\varepsilon_i) \cdot b_i$  ergeben sich fehlerbehaftete Lösungen  $\tilde{x}_i$ . Durch Einestzen der  $\tilde{b}_i$  in Gleichung (3) ergibt sich:

$$\tilde{x}_{1} = 100 \cdot (1, 01 \cdot \tilde{b}_{1} - \tilde{b}_{2}) = 100 \cdot (1, 01 \cdot (1 + \varepsilon_{1}) \cdot b_{1} - (1 + \varepsilon_{2}) \cdot b_{2})) 
= x_{1} + 100 \cdot (1, 01 \cdot \varepsilon_{1} \cdot b_{1} - \varepsilon_{2} \cdot b_{2}) 
\tilde{x}_{2} = 100 \cdot (\tilde{b}_{2} - \tilde{b}_{1}) = 100 \cdot ((1 + \varepsilon_{2}) \cdot b_{2} - (1 + \varepsilon_{1}) \cdot b_{1})) 
= x_{2} + 100 \cdot (\varepsilon_{2} \cdot b_{2} - \varepsilon_{1} \cdot b_{1})$$
(4)

Mit dem Zahlenwerten für b ergibt das

$$\tilde{x}_1 = x_1 + 101000 \cdot \varepsilon_1 - 100500 \cdot \varepsilon_2 
\tilde{x}_2 = x_2 + 105000 \cdot \varepsilon_2 - 100000 \cdot \varepsilon_1$$
(5)

Da die Vorzeichen der Fehler  $\varepsilon_i$  unbekannt sind, können sie im ungünstigen Fall auch verschieden sein; dann addieren sich die beiden Fehler-Terme. Mit  $\varepsilon := \max(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|)$  kann man dann den "worst case" absoluten Fehler  $|\tilde{x}_i - x_i|$  abschätzen:

$$|\tilde{\tilde{x}}_1 - x_1| \le 101000 \cdot |\varepsilon_1| + 100500 \cdot |\varepsilon_2| \le 201500 \cdot \varepsilon |\tilde{\tilde{x}}_2 - x_2| \le 100500 \cdot |\varepsilon_1| + 100000 \cdot |\varepsilon_2| \le 200500 \cdot \varepsilon$$
(6)

Und für die relativen Fehler ergibt sich dann mit  $x_1 = x_2 = 500$ :

$$\left| \frac{\tilde{\tilde{x}}_1 - x_1}{x_1} \right| \le 403 \cdot \varepsilon \; ; \qquad \left| \frac{\tilde{\tilde{x}}_2 - x_2}{x_2} \right| \le 401 \cdot \varepsilon \tag{7}$$

## Aufgabe 2

a) zu zeigen: strikt diagonaldominante Matrizen sind invertierbar

$$\begin{aligned} & \operatorname{Sei} A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{\operatorname{nxn}} \text{ und } x_1, \dots, x_2 \in \mathbb{R} \text{ dann gilt } 0 = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} * x_1 & \dots & a_{1n} * x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} * x_1 & \dots & a_{nn} * x_n \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} * x_1 & \dots & a_{1n} * x_n & = 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} * x_1 & \dots & a_{nn} * x_n & = 0 \end{pmatrix} (*)$$

Sei weiterhin  $i \in \{1, ..., n\}$ , s.d.  $|x_i| \ge |x_i| \forall k = \{1, ..., n\}$ .

Aus (\*) folgt dann für die i-te Zeile: 
$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = 0 \Leftrightarrow x_i a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \ j \neq i}}^{n} x_j a_{ij} = 0$$

Wir nehmen nun an das  $x_i \neq 0$  ist und führen dies zum Widerspruch:

$$|x_i||a_{ii}| = |\sum_{j=1, j\neq i}^n x_j a_{ij}| \le \sum_{j=1, j\neq i}^n |x_j||a_{ij}|$$
$$= |x_j| \sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{ij}| \le |x_i| \sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{ij}| < |x_i||a_{ii}|$$

Der letzte Schritt folgt dabei direkt aus der strikten Diagonaldominanz von A.

Wir erhalten also:  $|x_i||a_{ii}| < |x_i||a_{ii}|$  Widerspruch!  $\Rightarrow x_i = 0$ .

Da aber  $|x_i| \ge |x_j| \ \forall j = \{1, ..., n\}$  gilt, folgt auch  $x_j = 0 \ \forall j = \{1, ..., n\}$ 

Der Kern von A ist trivial ⇔ A ist invertierbar

b) zu zeigen: A hermitisch, diagonaldominant und  $a_{11},...,a_{nn}$  nicht negativ  $\Rightarrow A \geq 0$ 

Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein Eigenwert und  $x \in \mathbb{R}^n$  Einheitsvektor von A, dann gilt  $Ax = \lambda x$ . Nomieren wir weiterhin die Einheitsvektoren mit der Maxinumsnorm, sodass  $||x||_{\infty} = 1$  und wählen  $i \in \{1,...,n\}$ s.d.  $|x_i| = 1$ , dann gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i \Leftrightarrow a_{ii} x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i$$

Wir substrahieren auf beiden Seiten der Gleichung  $a_{ii}x_i$ :

$$\begin{array}{l} \lambda x_i - a_{ii} x_i = (\lambda - a_{ii}) * x_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j \\ |\lambda - a_{ii}| * |x_i| = |\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \\ = 1 \end{array}$$

Also folgt daraus:  $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{i}j|$ Mit der Formel für die Diagonaldominanz  $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \Leftrightarrow |a_{ii}| - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \geq 0$ folgt dann:

$$0 \le a_{ii} - \sum_{j=1, j \ne i}^{n} |a_{ij}| \le \lambda \le a_{ii} + \sum_{j=1, j \ne i}^{n} |a_{ij}|$$

Es folgt also  $\lambda \geq 0 \Rightarrow$  alle Eigenwerte sind nicht negativ  $\Rightarrow A$  ist positiv semidefinit

c) zu zeigen: A hermitisch, strikt diagonaldominant und  $a_{11},...,a_{nn}$  nicht negativ  $\Rightarrow A > 0$ 

Der Beweis ist analog zu b). Nur folgt aus der strikten Diagonaldominanz  $|a_{ii}| < \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \Leftrightarrow |a_{ii}| - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| < 0$  folgendes:

$$0 < a_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \le \lambda \le a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Es folgt also  $\lambda>0\Rightarrow$  alle Eigenwerte sind positiv  $\Rightarrow A$  ist positiv definit