Übungen zur Vorlesung Numerische Mathematik, WS 2014/15
Blatt 02 zum 27.10.2014

von	Janina Geiser	Mat Nr. 6420269
	Michael Hufschmidt	Mat.Nr. 6436122
	Farina Ohm	Mat Nr. 6314051
	Annika Seidel	Mat Nr. 6420536

Aufgabe 3

a) Seien $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$, zu zeigen: $\sigma(AB)\backslash\{0\} = \sigma(BA)\backslash\{0\}$

$\sigma(AB) = \{\lambda \in \mathbb{K} | \exists x \neq 0 : (AB)x = \lambda x\}$
$\sigma(AB)\backslash\{0\} = \{\lambda \in \mathbb{K} | \exists x \neq 0 : (AB)x = \lambda x, \lambda \neq 0\}$

Wir müssen also folgendes zeigen:

$$\lambda \in \sigma(AB)\backslash\{0\} \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(BA)\backslash\{0\} \tag{1}$$

" $\Rightarrow$ ": Sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von AB und $x \neq 0$ Eigenvektor von AB, dann folgt:

$$(AB)x = \lambda x \tag{2}$$
$$BABx = B\lambda x = \lambda Bx \tag{3}$$
$$BA(Bx) = \lambda(Bx) \tag{4}$$

Wir bezeichnen $y = (Bx)$ und müssen jetzt nur noch zeigen, dass $y \neq 0$ ist, damit λ auch Eigenwert von BA ist. Dafür nehmen wir $y = 0$ an und führen dies zum Widerspruch:

$$0 = Bx$$
$$0 = A \cdot 0 = ABx \overset{(2)}{=} \underbrace{\lambda}_{\neq 0} x \Rightarrow x = 0 \quad \text{Widerspruch!} \Rightarrow y = Bx \neq 0$$

Daraus folgt: Bx ist Eigenvektor von BA, also ist λ Eigenwert von BA.

" $\Leftarrow$ ": Analog zu " $\Rightarrow$ " mit vertauschten A und B.

Q.e.d.

b) Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, zu zeigen: $\sigma(AB) = \sigma(BA)$

Der Beweis läuft für $\lambda \neq 0$ analog zu a)
Wir betrachten also nur noch den Fall, wenn $\lambda = 0$:

" $\Rightarrow$ ": Für die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von AB gilt: $\det(AB) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$
Daher folgt: $(\lambda = 0) \in \sigma(AB) \Leftrightarrow \det(AB) = 0$

$$0 = \det(AB) \overset{Determinantenproduktsatz}{=} \det(A) \cdot \det(B) \quad \Rightarrow \det(A) = 0 \text{ oder } \det(B) = 0 \tag{5}$$
$$\det(BA) \overset{Determinantenproduktsatz}{=} \det(B) \cdot \det(A) \overset{(5)}{=} 0 \tag{6}$$
$$\Rightarrow \det(BA) = 0 \ \Rightarrow (\lambda = 0) \in \sigma(BA) \tag{7}$$

" $\Leftarrow$ ": Analog zu " $\Rightarrow$ " mit vertauschtem A und B

Q.e.d.

c) Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$, zu zeigen: $(\mathrm{im}A)^\perp = \ker A^*$

$$(\mathrm{im}A) = \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\} \tag{8}$$
$$(\mathrm{im}A)^\perp = \{Ax | Ax = 0, x \in \mathbb{R}^n\} \tag{9}$$
$$\ker A^* = \{v | A^* v = 0\} \tag{10}$$

Der Beweis folgt direkt aus den oben genannten Definitionen und den Eigenschaften des Skalaproduktes:

"$\Leftarrow$":

$$v \in \ker(A^*) : \tag{11}$$
$$\forall x : 0 =< A^* v, x > \overset{sesquilinear}{=} < v, Ax > \Rightarrow v \in (\mathrm{im}A)^\perp \tag{12}$$

"$\Rightarrow$":

$$x \in (\mathrm{im}A)^\perp : \tag{13}$$
$$\forall v : 0 =< Ax, v > \overset{sesquilinear}{=} < x, A^* v > \Rightarrow x \in \ker(A^*) \tag{14}$$

Q.e.d.

Aufgabe 4

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Nach Vorlesung gilt: $\boxed{\operatorname{cond}_{\|\cdot\|}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|}$

Wir berechnen also A^{-1} mithilfe des Gauss-Jordan-Verfahren und erhalten:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (I|A^{-1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right)$$

Daraus folgt:
<u>Spaltensummennorm:</u>

$$\|A\|_1 = \max\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| + \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|\right\} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \max\left\{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|, \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\right\} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{cond}_{\|\cdot\|_1}(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} * \sqrt{2} = 2$$

<u>Spektralnorm:</u>
Wir bestimmen $A^T \cdot A$:

$$A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $A^T \cdot A$ bestimmen:

$$\det\big((A^T \cdot A) - \lambda I\big) = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T \cdot A)} = \sqrt{1} = 1$$

Weiterhin bestimmen wir $(A^{-1})^T \cdot (A^{-1})$:

$$(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^T \cdot (A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $(A^{-1})^T \cdot (A^{-1})$ bestimmen:

$$\det\big((A^{-1})^T \cdot (A^{-1}) - \lambda I\big) = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}((A^{-1})^T \cdot A^{-1})} = \sqrt{1} = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{cond}_{\|\cdot\|_2}(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = 1 \cdot 1 = 1$$

Zeilensummennorm:

$$\|A\|_\infty = \max\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|, \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|\right\} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max\left\{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|, \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\right\} = \sqrt{2}$$

$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A) = \|A\|_\infty * \|A^{-1}\|_\infty = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Gegeben:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Analog zu oben berechnen wir B^{-1}:

$$(B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (I|B^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Daraus folgt:
Spaltensummennorm:

$$\|B\|_1 = \max\{|1| + |0| + |0|, |2| + |1| + |1|, |0| + |0| + |1|\} = 4$$

$$\|B^{-1}\|_1 = \max\{|1| + |0| + |0|, |-2| + |1| + |-1|, |0| + |0| + |1|\} = 4$$

$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_1}(B) = \|B\|_1 \cdot \|B^{-1}\|_1 = 4 \cdot 4 = 16$$

Spektralnorm:
Wir bestimmen $B^T \cdot B$:

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $B^T \cdot B$ bestimmen:

$$\det\big((B^T \cdot B) - \lambda I\big) = -\lambda^3 + 8 \cdot \lambda^2 - 8 \cdot \lambda + 1$$

$$-\lambda^3 + 8 \cdot \lambda^2 - 8 \cdot \lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5})$$

$$\|B\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(B^T \cdot B)} = \sqrt{\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})}$$

Weiterhin bestimmen wir $(B^{-1})^T \cdot (B^{-1})$:

$$(B^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (B^{-1})^T \cdot (B^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $(B^{-1})^T \cdot (B^{-1})$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
&\det\big((B^{-1})^T \cdot (B^{-1}) - \lambda I\big) = -\lambda^3 + 8 \cdot \lambda^2 - 8 \cdot \lambda + 1 \\
&-\lambda^3 + 8 \cdot \lambda^2 - 8 \cdot \lambda + 1 = 0 \\
&\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5}) \\
&\Rightarrow \lambda_2 = 1 \\
&\Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5}) \\
&\|B^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}((B^{-1})^T \cdot B^{-1})} = \sqrt{\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})} \\
&\text{cond}_{\|\cdot\|_2}(B) = \|B\|_2 \cdot \|B^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})} = \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})
\end{aligned}$$

<u>Zeilensummennorm:</u>

$$\begin{aligned}
&\|B\|_\infty = \max\{|1| + |2| + |0|, |0| + |1| + |0|, |0| + |1| + |1|\} = 3 \\
&\|B^{-1}\|_\infty = \max\{|1| + |-2| + |0|, |0| + |1| + |0|, |0| + |-1| + |1|\} = 3 \\
&\text{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(B) = \|B\|_\infty \cdot \|B^{-1}\|_\infty = 3 * 3 = 9
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) zu zeigen: die Zeilensummennorm wird von der Maximumnorm induziert

Zeilensummennorm :$\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Maximumnorm :$\|x\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$

Die der Maximumnorm $\|x\|_\infty$ zugeordnete Matrixnorm $\|A\|_\infty$ ist gegeben durch:

$$\|A\|_\infty := \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1}\|Ax\|_\infty = \max_{\|x\|=1}\left\{\max_i \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|\right\}$$

$$= \max_i \left\{\max_{\|x\|=1} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|\right\} \overset{x_j=sign(a_{ij})}{=} \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| =: \text{Zeilensummennorm}\|A\|_\infty$$

Q.e.d.

b) zu zeigen: die Spaltensummennorm wird von der Betragssummennorm induziert

Spaltensummennorm :$\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

Betragssummenmnorm :$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$

Die der Betragssummennorm $\|x\|_1$ zugeordnete Matrixnorm $\|A\|_1$ ist gegeben durch:

$$\|A\|_1 := \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1}\|Ax\|_1 = \max_{\|x\|=1}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|\right\} = ...$$

TODO!!!

Aufgabe 6

TODO: Farina/Michael