

Aufgabe 1

Gegeben sind:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,01 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1005 \end{pmatrix}$$

Lösung mit exaktem b: Die exakte Lösung x des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ ermitteln wir über die Cramersche Regel mit den Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,01 \end{pmatrix}; \quad A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ b_2 & 1,01 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 1 & b_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Diese haben die Determinanten:

$$\text{Det}(A) = 1,01 - 1 = \frac{1}{100}; \quad \text{Det}(A_1) = 1,01 \cdot b_1 - b_2; \quad \text{Det}(A_2) = b_2 - b_1 \quad (2)$$

Das ergibt:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\text{Det}(A_1)}{\text{Det}(A)} = 100 \cdot (1,01 \cdot b_1 - b_2) \\ x_2 &= \frac{\text{Det}(A_2)}{\text{Det}(A)} = 100 \cdot (b_2 - b_1) \end{aligned} \quad (3)$$

Mit dem Zahlenwerten für b ergibt das $x_1 = 500$ und $x_2 = 500$.

Lösung mit ungenauem b: Für fehlerbehaftete $\tilde{b}_i = (1 + \varepsilon_i) \cdot b_i$ ergeben sich fehlerbehaftete Lösungen \tilde{x}_i . Durch Einsetzen der \tilde{b}_i in Gleichung (3) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= 100 \cdot (1,01 \cdot \tilde{b}_1 - \tilde{b}_2) = 100 \cdot (1,01 \cdot (1 + \varepsilon_1) \cdot b_1 - (1 + \varepsilon_2) \cdot b_2) \\ &= x_1 + 100 \cdot (1,01 \cdot \varepsilon_1 \cdot b_1 - \varepsilon_2 \cdot b_2) \\ \tilde{x}_2 &= 100 \cdot (\tilde{b}_2 - \tilde{b}_1) = 100 \cdot ((1 + \varepsilon_2) \cdot b_2 - (1 + \varepsilon_1) \cdot b_1) \\ &= x_2 + 100 \cdot (\varepsilon_2 \cdot b_2 - \varepsilon_1 \cdot b_1) \end{aligned} \quad (4)$$

Mit dem Zahlenwerten für b ergibt das

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_1 + 101000 \cdot \varepsilon_1 - 100500 \cdot \varepsilon_2 \\ \tilde{x}_2 &= x_2 + 105000 \cdot \varepsilon_2 - 100000 \cdot \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (5)$$

Da die Vorzeichen der Fehler ε_i unbekannt sind, können sie im ungünstigen Fall auch verschieden sein; dann addieren sich die beiden Fehler-Terme. Mit $\varepsilon := \max(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|)$ kann man dann den „worst case“ absoluten Fehler $|\tilde{x}_i - x_i|$ abschätzen:

$$\begin{aligned} |\tilde{x}_1 - x_1| &\leq 101000 \cdot |\varepsilon_1| + 100500 \cdot |\varepsilon_2| \leq 201500 \cdot \varepsilon \\ |\tilde{x}_2 - x_2| &\leq 100500 \cdot |\varepsilon_1| + 100000 \cdot |\varepsilon_2| \leq 200500 \cdot \varepsilon \end{aligned} \quad (6)$$

Und für die relativen Fehler ergibt sich dann mit $x_1 = x_2 = 500$:

$$\left| \frac{\tilde{x}_1 - x_1}{x_1} \right| \leq 403 \cdot \varepsilon; \quad \left| \frac{\tilde{x}_2 - x_2}{x_2} \right| \leq 401 \cdot \varepsilon \quad (7)$$

Aufgabe 2

a) Zu zeigen: Strikt diagonaldominante Matrizen sind invertierbar. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n} \text{ und } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:

$$0 = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} * x_1 & \dots & a_{1n} * x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} * x_1 & \dots & a_{nn} * x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} * x_1 & \dots & a_{1n} * x_n & = 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} * x_1 & \dots & a_{nn} * x_n & = 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Sei weiterhin $i \in \{1, \dots, n\}$, s.d. $|x_i| \geq |x_j| \forall j = \{1, \dots, n\}$. Aus (8) folgt dann für die i-te Zeile:

$$\sum_{j=1}^n x_j a_{ij} = 0 \Leftrightarrow x_i a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j a_{ij} = 0$$

Wir nehmen nun an das $x_i \neq 0$ ist und führen dies zum Widerspruch:

$$\begin{aligned} |x_i| |a_{ii}| &= \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j a_{ij} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |x_j| |a_{ij}| = \\ &= |x_j| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \leq |x_i| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |x_i| |a_{ii}| \end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt dabei direkt aus der strikten Diagonaldominanz von A.

Wir erhalten also: $|x_i| |a_{ii}| < |x_i| |a_{ii}|$ Widerspruch!

$\Rightarrow x_i = 0$. Da aber $|x_i| \geq |x_j| \forall j = \{1, \dots, n\}$ gilt, folgt auch $x_j = 0 \forall j = \{1, \dots, n\}$. Der Kern von A ist trivial $\Leftrightarrow A$ ist invertierbar.

b) Zu zeigen: A hermitisch, diagonaldominant und a_{11}, \dots, a_{nn} nicht negativ $\Rightarrow A \geq 0$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert und $x \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektor von A, dann gilt $Ax = \lambda x$. Normieren wir weiterhin die Einheitsvektoren mit der Maximumsnorm, sodass $\|x\|_\infty = 1$ und wählen $i \in \{1, \dots, n\}$ s.d. $|x_i| = 1$, dann gilt:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \lambda x_i \Leftrightarrow a_{ii} x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j = \lambda x_i$$

Wir subtrahieren auf beiden Seiten der Gleichung $a_{ii} x_i$:

$$\begin{aligned} \lambda x_i - a_{ii} x_i &= (\lambda - a_{ii}) * x_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j \\ |\lambda - a_{ii}| * |x_i| &= \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \end{aligned}$$

Also folgt daraus: $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$. Mit der Formel für die Diagonaldominanz

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \Leftrightarrow |a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \geq 0$$

folgt dann:

$$0 \leq a_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \leq \lambda \leq a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Es folgt also $\lambda \geq 0 \Rightarrow$ alle Eigenwerte sind nicht negativ $\Rightarrow A$ ist positiv semidefinit.

c) Zu zeigen: A hermitisch, strikt diagonaldominant und a_{11}, \dots, a_{nn} positiv $\Rightarrow A > 0$

Der Beweis ist analog zu b). Nur folgt aus der strikten Diagonaldominanz

$$|a_{ii}| < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \Leftrightarrow |a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < 0$$

folgendes:

$$0 < a_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \leq \lambda \leq a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Es folgt also $\lambda > 0 \Rightarrow$ alle Eigenwerte sind positiv $\Rightarrow A$ ist positiv definit.