Namen: Farina Ohm, Janina Geiser, Michael Hufschmidt, Annika Seidel

Aufgabe 2:

a) zu zeigen: strikt diagonaldominante Matrizen sind invertierbar

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{\text{nxn}}$ und $x_1, ..., x_2 \in \mathbb{R}$ dann gilt $0 = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} * x_1 & \dots & a_{1n} * x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} * x_1 & \dots & a_{nn} * x_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} * x_1 & \dots & a_{1n} * x_n & = 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} * x_1 & \dots & a_{nn} * x_n & = 0 \end{pmatrix}$ (*)

Sei weiterhin i $\in \{1, ..., n\}$, s.d. $|x_i| \geq |x_j| \forall k = \{1, ..., n\}$.

Aus (*) folgt dann für die i-te Zeile: $\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = 0 \Leftrightarrow x_i a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j a_{ij} = 0$

Wir nehmen nun an das $x_i \neq 0$ ist und führen dies zum Widerspruch:

$|x_i||a_{ii}| = |\sum_{j=1, j \neq i}^{n} x_j a_{ij}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |x_j||a_{ij}| = |x_j| \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \leq |x_i| \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| < |x_i||a_{ii}|$

Der letzte Schritt folgt dabei direkt aus der strikten Diagonaldominanz von A.
Wir erhalten also: $|x_i||a_{ii}| < |x_i||a_{ii}|$ Widerspruch! $\Rightarrow x_i = 0$.
Da aber $|x_i| \geq |x_j| \; \forall j = \{1, ..., n\}$ gilt, folgt auch $x_j = 0 \; \forall j = \{1, ..., n\}$
Der Kern von A ist trivial $\Leftrightarrow$ A ist invertierbar

b) zu zeigen: A hermitisch, diagonaldominant und $a_{11}, ..., a_{nn}$ nicht negativ $\Rightarrow A \geq 0$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert und $x \in \mathbb{R}^{\text{n}}$ Einheitsvektor von A, dann gilt $Ax = \lambda x$. Nomieren wir weiterhin die Einheitsvektoren mit der Maxinumsnorm, sodass $||x||_\infty = 1$ und wählen $i \in 1, ..., n$ s.d. $|x_i| = 1$, dann gilt:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i \Leftrightarrow a_{ii} x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i$

Wir substrahieren auf beiden Seiten der Gleichung $a_{ii} x_i$:
$\lambda x_i - a_{ii} x_i = (\lambda - a_{ii}) * x_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{ij} x_j$
$|\lambda - a_{ii}| * \underbrace{|x_i|}_{=1} = |\sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{ij} x_j| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \underbrace{|x_j|}_{\leq 1} \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$
Also folgt daraus: $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_i j|$
Mit der Formel für die Diagonaldominanz $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \Leftrightarrow |a_{ii}| - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \geq 0$ folgt dann:

$0 \leq a_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \leq \lambda \leq a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$

Es folgt also $\lambda \geq 0 \Rightarrow$ alle Eigenwerte sind nicht negativ $\Rightarrow A$ ist positiv semidefinit

c) zu zeigen: A hermitisch, strikt diagonaldominant und $a_{11}, ..., a_{nn}$ nicht negativ $\Rightarrow A > 0$

Der Beweis ist analog zu b). Nur folgt aus der strikten Diagonaldominanz $|a_{ii}| < \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_i j| \Leftrightarrow$ $|a_{ii}| - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_i j| < 0$ folgendes:

$0 < a_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_i j| \leq \lambda \leq a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_i j|$

Es folgt also $\lambda > 0 \Rightarrow$ alle Eigenwerte sind positiv $\Rightarrow A$ ist positiv definit