Janina Geiser, Mat Nr. 6420269
Michael Hufschmidt, Mat.Nr. 6436122
Farina Ohm, Mat Nr. 6314051
Annika Seidel, Mat Nr. 6420536

Aufgabe 1

Gegeben sind:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,01 \end{pmatrix} \quad ; \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1005 \end{pmatrix}$$

Exakte Lösung: Die exakte Lösung x des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ ermitteln wir über die Cramersche Regel mit den Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,01 \end{pmatrix} \quad ; \qquad A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ b_2 & 1,01 \end{pmatrix} \quad ; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 1 & b_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Diese haben die Determinanten:

$$\mathrm{Det}(A) = 1,01 - 1 = \frac{1}{100} \; ; \qquad \mathrm{Det}(A_1) = 1,01 \cdot b_1 - b_2 \; ; \qquad \mathrm{Det}(A_2) = b_2 - b_1 \tag{2}$$

Das ergibt:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\mathrm{Det}(A_1)}{\mathrm{Det}(A)} = 100 \cdot (1,01 \cdot b_1 - b_2) \\ x_2 &= \frac{\mathrm{Det}(A_2)}{\mathrm{Det}(A)} = 100 \cdot (b_2 - b_1) \end{aligned} \tag{3}$$

Mit dem Zahlenwerten für b ergibt das $x_1 = 500$ und $x_2 = 500$.

Lösung mit ungenauem b: Für fehlerbehaftete $\tilde{b}_i = (1+\varepsilon_i) \cdot b_i$ ergeben sich fehlerbehaftete Lösungen $\tilde{x}_i$. Durch Einestzen der $\tilde{b}_i$ in Gleichung (3) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= 100 \cdot (1,01 \cdot \tilde{b}_1 - \tilde{b}_2) = 100 \cdot (1,01 \cdot (1+\varepsilon_1) \cdot b_1 - (1+\varepsilon_2) \cdot b_2)) \\ &= x_1 + 100 \cdot (1,01 \cdot \varepsilon_1 \cdot b_1 - \varepsilon_2 \cdot b_2) \\ \tilde{x}_2 &= 100 \cdot (\tilde{b}_2 - \tilde{b}_1) = 100 \cdot ((1+\varepsilon_2) \cdot b_2 - (1+\varepsilon_1) \cdot b_1)) \\ &= x_2 + 100 \cdot (\varepsilon_2 \cdot b_2 - \varepsilon_1 \cdot b_1) \end{aligned} \tag{4}$$

Mit dem Zahlenwerten für b ergibt das

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_1 + 101000 \cdot \varepsilon_1 - 100500 \cdot \varepsilon_2 \\ \tilde{x}_2 &= x_2 + 105000 \cdot \varepsilon_2 - 100000 \cdot \varepsilon_1 \end{aligned} \tag{5}$$

Da die Vorzeichen der Fehler ε_i unbekannt sind, können sie im ungünstigen Fall auch verschieden sein; dann addieren sich die beiden Fehler-Terme. Mit $\varepsilon := \max(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|)$ kann man dann den „worst case" absoluten Fehler $|\tilde{\tilde{x}}_i - x_i|$ abschätzen:

$$\begin{aligned} |\tilde{\tilde{x}}_1 - x_1| &\leq 101000 \cdot |\varepsilon_1| + 100500 \cdot |\varepsilon_2| \leq 201500 \cdot \varepsilon \\ |\tilde{\tilde{x}}_2 - x_2| &\leq 100500 \cdot |\varepsilon_1| + 100000 \cdot |\varepsilon_2| \leq 200500 \cdot \varepsilon \end{aligned} \tag{6}$$

Und für die relativen Fehler ergibt sich dann mit $x_1 = x_2 = 500$:

$$\left| \frac{\tilde{\tilde{x}}_1 - x_1}{x_1} \right| \leq 403 \cdot \varepsilon \; ; \qquad \left| \frac{\tilde{\tilde{x}}_2 - x_2}{x_2} \right| \leq 401 \cdot \varepsilon \tag{7}$$

Janina Geiser, Mat Nr. 6420269
Michael Hufschmidt, Mat.Nr. 6436122
Farina Ohm, Mat Nr. 6314051
Annika Seidel, Mat Nr. 6420536

Aufgabe 2

a) zu zeigen: strikt diagonaldominante Matrizen sind invertierbar

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{\text{nxn}}$ und $x_1, ..., x_2 \in \mathbb{R}$ dann gilt $0 = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} * x_1 & \dots & a_{1n} * x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} * x_1 & \dots & a_{nn} * x_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} * x_1 & \dots & a_{1n} * x_n & = 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} * x_1 & \dots & a_{nn} * x_n & = 0 \end{pmatrix}$ (*)

Sei weiterhin i $\in \{1, ..., n\}$, s.d. $|x_i| \geq |x_j| \forall k = \{1, ..., n\}$.

Aus (*) folgt dann für die i-te Zeile: $\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = 0 \Leftrightarrow x_i a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j a_{ij} = 0$

Wir nehmen nun an das $x_i \neq 0$ ist und führen dies zum Widerspruch:

$|x_i||a_{ii}| = |\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j a_{ij}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |x_j||a_{ij}|$

$= |x_j| \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \leq |x_i| \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |x_i||a_{ii}|$

Der letzte Schritt folgt dabei direkt aus der strikten Diagonaldominanz von A.
Wir erhalten also: $|x_i||a_{ii}| < |x_i||a_{ii}|$ Widerspruch! $\Rightarrow x_i = 0$.
Da aber $|x_i| \geq |x_j| \; \forall j = \{1, ..., n\}$ gilt, folgt auch $x_j = 0 \; \forall j = \{1, ..., n\}$
Der Kern von A ist trivial $\Leftrightarrow$ A ist invertierbar

b) zu zeigen: A hermitisch, diagonaldominant und $a_{11}, ..., a_{nn}$ nicht negativ $\Rightarrow A \geq 0$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert und $x \in \mathbb{R}^{\text{n}}$ Einheitsvektor von A, dann gilt $Ax = \lambda x$. Nomieren wir weiterhin die Einheitsvektoren mit der Maxinumsnorm, sodass $||x||_\infty = 1$ und wählen $i \in \{1, ..., n\}$ s.d. $|x_i| = 1$, dann gilt:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i \Leftrightarrow a_{ii} x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i$

Wir substrahieren auf beiden Seiten der Gleichung $a_{ii} x_i$:
$\lambda x_i - a_{ii} x_i = (\lambda - a_{ii}) * x_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j$
$|\lambda - a_{ii}| * \underbrace{|x_i|}_{=1} = |\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \underbrace{|x_j|}_{\leq 1} \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$
Also folgt daraus: $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$
Mit der Formel für die Diagonaldominanz $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \Leftrightarrow |a_{ii}| - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \geq 0$ folgt dann:

$0 \leq a_{ii} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \leq \lambda \leq a_{ii} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$

Es folgt also $\lambda \geq 0 \Rightarrow$ alle Eigenwerte sind nicht negativ $\Rightarrow A$ ist positiv semidefinit

c) zu zeigen: A hermitisch, strikt diagonaldominant und $a_{11}, ..., a_{nn}$ positiv $\Rightarrow A > 0$

Der Beweis ist analog zu b). Nur folgt aus der strikten Diagonaldominanz $|a_{ii}| < \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}| \Leftrightarrow |a_{ii}| - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}| < 0$ folgendes:

$0 < a_{ii} - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}| \leq \lambda \leq a_{ii} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|$

Es folgt also $\lambda > 0 \Rightarrow$ alle Eigenwerte sind positiv $\Rightarrow A$ ist positiv definit