

**Übungen zur Vorlesung Numerische Mathematik, WS 2014/15**  
**Blatt 02 zum 27.10.2014**

von	Janina Geiser	Mat Nr. 6420269
	Michael Hufschmidt	Mat.Nr. 6436122
	Farina Ohm	Mat Nr. 6314051
	Annika Seidel	Mat Nr. 6420536

---

### Aufgabe 3

a) Seien  $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$  und  $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ , zu zeigen:  $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$

$$\sigma(AB) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists x \neq 0 : (AB)x = \lambda x\}$$

$$\sigma(AB) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists x \neq 0 : (AB)x = \lambda x, \lambda \neq 0\}$$

Wir müssen also folgendes zeigen:

$$\lambda \in \sigma(AB) \setminus \{0\} \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(BA) \setminus \{0\} \quad (1)$$

" $\Rightarrow$ ": Sei  $\lambda \neq 0$  ein Eigenwert von  $AB$  und  $x \neq 0$  Eigenvektor von  $AB$ , dann folgt:

$$(AB)x = \lambda x \quad (2)$$

$$BABx = B\lambda x = \lambda Bx \quad (3)$$

$$BA(Bx) = \lambda(Bx) \quad (4)$$

Wir bezeichnen  $y = (Bx)$  und müssen jetzt nur noch zeigen, dass  $y \neq 0$  ist, damit  $\lambda$  auch Eigenwert von  $BA$  ist. Dafür nehmen wir  $y = 0$  an und führen dies zum Widerspruch:

$$0 = Bx$$

$$0 = A \cdot 0 = ABx \stackrel{(2)}{=} \underbrace{\lambda}_{\neq 0} x \Rightarrow x = 0 \quad \text{Widerspruch!} \Rightarrow y = Bx \neq 0$$

Daraus folgt:  $Bx$  ist Eigenvektor von  $BA$ , also ist  $\lambda$  Eigenwert von  $BA$ .

" $\Leftarrow$ ": Analog zu " $\Rightarrow$ " mit vertauschten  $A$  und  $B$ .

Q.e.d.

b) Seien  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ , zu zeigen:  $\sigma(AB) = \sigma(BA)$

Der Beweis läuft für  $\lambda \neq 0$  analog zu a)

Wir betrachten also nur noch den Fall, wenn  $\lambda = 0$ :

" $\Rightarrow$ ": Für die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  von  $AB$  gilt:  $\det(AB) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$

Daher folgt:  $(\lambda = 0) \in \sigma(AB) \Leftrightarrow \det(AB) = 0$

$$0 = \det(AB) \stackrel{\text{Determinantenproduktsatz}}{=} \det(A) \cdot \det(B) \Rightarrow \det(A) = 0 \text{ oder } \det(B) = 0 \quad (5)$$

$$\det(BA) \stackrel{\text{Determinantenproduktsatz}}{=} \det(B) \cdot \det(A) \stackrel{(5)}{=} 0 \quad (6)$$

$$\Rightarrow \det(BA) = 0 \Rightarrow (\lambda = 0) \in \sigma(BA) \quad (7)$$

" $\Leftarrow$ ": Analog zu " $\Rightarrow$ " mit vertauschtem  $A$  und  $B$

Q.e.d.

c) Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$  und das euklidische Skalarprodukt auf  $\mathbb{K}^n$ , zu zeigen:  $(\text{im} A)^\perp = \ker A^*$

$$(\text{im} A) = \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\} \quad (8)$$

$$(\text{im} A)^\perp = \{Ax | Ax = 0, x \in \mathbb{R}^n\} \quad (9)$$

$$\ker A^* = \{v | A^*v = 0\} \quad (10)$$

Der Beweis folgt direkt aus den oben genannten Definitionen und den Eigenschaften des Skalarproduktes:

" $\Leftarrow$ ":

$$v \in \ker(A^*) : \quad (11)$$

$$\forall x : 0 = \langle A^*v, x \rangle \stackrel{\text{sesquilinear}}{=} \langle v, Ax \rangle \Rightarrow v \in (\text{im} A)^\perp \quad (12)$$

" $\Rightarrow$ ":

$$x \in (\text{im} A)^\perp : \quad (13)$$

$$\forall v : 0 = \langle Ax, v \rangle \stackrel{\text{sesquilinear}}{=} \langle x, A^*v \rangle \Rightarrow x \in \ker(A^*) \quad (14)$$

Q.e.d.

#### Aufgabe 4

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Nach Vorlesung gilt:  $\boxed{\text{cond}_{\|\cdot\|}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|}$

Wir berechnen also  $A^{-1}$  mithilfe des Gauss-Jordan-Verfahren und erhalten:

$$(A|I) = \left( \begin{array}{cc|cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow (I|A^{-1}) = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right)$$

Daraus folgt:

Spaltensummennorm:

$$\|A\|_1 = \max \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| + \left| -\frac{1}{\sqrt{2}} \right|, \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \right\} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \max \left\{ \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| + \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right|, \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right| + \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \right\} = \sqrt{2}$$

$$\text{cond}_{\|\cdot\|_1}(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} * \sqrt{2} = 2$$

Spektralnrm:

Wir bestimmen  $A^T \cdot A$ :

$$A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von  $A^T \cdot A$  bestimmen:

$$\det((A^T \cdot A) - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)} = \sqrt{1} = 1$$

Weiterhin bestimmen wir  $(A^{-1})^T \cdot (A^{-1})$ :

$$(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^T \cdot (A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von  $(A^{-1})^T \cdot (A^{-1})$  bestimmen:

$$\det(((A^{-1})^T \cdot (A^{-1}) - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}((A^{-1})^T \cdot (A^{-1}))} = \sqrt{1} = 1$$

$$\Rightarrow \text{cond}_{\|\cdot\|_2}(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = 1 \cdot 1 = 1$$

Zeilensummennorm:

$$\begin{aligned}\|A\|_{\infty} &= \max \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|, \left| -\frac{1}{\sqrt{2}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \right\} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \|A^{-1}\|_{\infty} &= \max \left\{ \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| + \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right|, \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| + \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \right\} = \sqrt{2} \\ \text{cond}_{\|\cdot\|_{\infty}}(A) &= \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 2\end{aligned}$$

Gegeben:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Analog zu oben berechnen wir  $B^{-1}$ :

$$(B|I) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow (I|B^{-1}) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Daraus folgt:

Spaltensummennorm:

$$\begin{aligned}\|B\|_1 &= \max \{ |1| + |0| + |0|, |2| + |1| + |1|, |0| + |0| + |1| \} = 4 \\ \|B^{-1}\|_1 &= \max \{ |1| + |0| + |0|, |-2| + |1| + |-1|, |0| + |0| + |1| \} = 4 \\ \text{cond}_{\|\cdot\|_1}(B) &= \|B\|_1 \cdot \|B^{-1}\|_1 = 4 \cdot 4 = 16\end{aligned}$$

Spektralnrm:

Wir bestimmen  $B^T \cdot B$ :

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von  $B^T \cdot B$  bestimmen:

$$\begin{aligned}\det((B^T \cdot B) - \lambda I) &= -\lambda^3 + 8 \cdot \lambda^2 - 8 \cdot \lambda + 1 \\ -\lambda^3 + 8 \cdot \lambda^2 - 8 \cdot \lambda + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5}) \\ \Rightarrow \lambda_2 &= 1 \\ \Rightarrow \lambda_3 &= \frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5}) \\ \|B\|_2 &= \sqrt{\lambda_{\max}(B^T \cdot B)} = \sqrt{\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})}\end{aligned}$$

Weiterhin bestimmen wir  $(B^{-1})^T \cdot (B^{-1})$ :

$$(B^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (B^{-1})^T \cdot (B^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von  $(B^{-1})^T \cdot (B^{-1})$  bestimmen:

$$\det((B^{-1})^T \cdot (B^{-1}) - \lambda I) = -\lambda^3 + 8 \cdot \lambda^2 - 8 \cdot \lambda + 1$$

$$-\lambda^3 + 8 \cdot \lambda^2 - 8 \cdot \lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5})$$

$$\|B^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}((B^{-1})^T \cdot B^{-1})} = \sqrt{\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})}$$

$$\text{cond}_{\|\cdot\|_2}(B) = \|B\|_2 \cdot \|B^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})} = \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})$$

Zeilensummennorm:

$$\|B\|_{\infty} = \max\{|1| + |2| + |0|, |0| + |1| + |0|, |0| + |1| + |1|\} = 3$$

$$\|B^{-1}\|_{\infty} = \max\{|1| + |-2| + |0|, |0| + |1| + |0|, |0| + |-1| + |1|\} = 3$$

$$\text{cond}_{\|\cdot\|_{\infty}}(B) = \|B\|_{\infty} \cdot \|B^{-1}\|_{\infty} = 3 * 3 = 9$$

## Aufgabe 5

a) zu zeigen: die Zeilensummennorm wird von der Maximumnorm induziert

$$\text{Zeilensummennorm : } \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\text{Maximumnorm : } \|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Die der Maximumnorm  $\|x\|_\infty$  zugeordnete Matrixnorm  $\|A\|_\infty$  ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &:= \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \left\{ \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \right\} \\ &= \max_i \left\{ \max_{\|x\|_\infty=1} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \right\} \stackrel{x_j = \text{sign}(a_{ij})}{=} \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| =: \text{Zeilensummennorm } \|A\|_\infty \end{aligned}$$

Q.e.d.

b) zu zeigen: die Spaltensummennorm wird von der Betragssummennorm induziert

$$\text{Spaltensummennorm : } \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

$$\text{Betragssummennorm : } \|x\|_1 = \sum_{i=1}^m |x_i|$$

Die der Betragssummennorm  $\|x\|_1$  zugeordnete Matrixnorm  $\|A\|_1$  ist gegeben durch:

$$\|A\|_1 := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \left\{ \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \right\} \quad (15)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| =: \text{Spaltensummennorm } \|A\|_1 \quad (16)$$

(\*)Die Summe im Betrag wird für festes i für dasjenige j maximal bei dem  $a_{ij}$  maximal ist und  $x_j = 1$  ist.

Q.e.d.

## Aufgabe 6

TODO: Farina/Michael