

Übungen zur Vorlesung Numerische Mathematik, WS 2014/15
Blatt 02 zum 27.10.2014

von	Janina Geiser	Mat Nr. 6420269
	Michael Hufschmidt	Mat.Nr. 6436122
	Farina Ohm	Mat Nr. 6314051
	Annika Seidel	Mat Nr. 6420536

Inhalt...

Aufgabe 3

a)

b)

c)

Aufgabe 4

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Nach Vorlesung gilt: $\boxed{\text{cond}_{\|\cdot\|}(A) = \|A\| * \|A^{-1}\|}$

Wir berechnen also A^{-1} mithilfe des Gauss-Jordan-Verfahren und erhalten:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow (I|A^{-1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right)$$

Daraus folgt:

Spaltensummennorm:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| + \left| -\frac{1}{\sqrt{2}} \right|, \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \right\} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \|A^{-1}\|_1 &= \max \left\{ \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| + \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right|, \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right| + \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \right\} = \sqrt{2} \\ \text{cond}_{\|\cdot\|_1}(A) &= \|A\|_1 * \|A^{-1}\|_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} * \sqrt{2} = 2 \end{aligned}$$

Spektralnrm:

Wir bestimmen $A^T * A$:

$$A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T * A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $A^T * A$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \det((A^T * A) - \lambda * E) &= (1 - \lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \\ \|A\|_2 &= \sqrt{\lambda_{\max}(A^T * A)} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

Weiterhin bestimmen wir $(A^{-1})^T * (A^{-1})$:

$$(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^T * (A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $(A^{-1})^T * (A^{-1})$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \det(((A^{-1})^T * (A^{-1}) - \lambda * E) &= (1 - \lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \\ \|A^{-1}\|_2 &= \sqrt{\lambda_{\max}((A^{-1})^T * (A^{-1}))} = \sqrt{1} = 1 \\ \Rightarrow \text{cond}_{\|\cdot\|_2}(A) &= \|A\|_2 * \|A^{-1}\|_2 = 1 * 1 = 1 \end{aligned}$$

Zeilensummennorm:

$$\begin{aligned}\|A\|_{\infty} &= \max \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|, \left| -\frac{1}{\sqrt{2}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \right\} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \|A^{-1}\|_{\infty} &= \max \left\{ \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| + \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right|, \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| + \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \right\} = \sqrt{2} \\ \text{cond}_{\|\cdot\|_{\infty}}(A) &= \|A\|_{\infty} * \|A^{-1}\|_{\infty} = \frac{2}{\sqrt{2}} * \sqrt{2} = 2\end{aligned}$$

Gegeben:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Analog zu oben berechnen wir B^{-1} :

$$(B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow (I|B^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Daraus folgt:

Spaltensummennorm:

$$\begin{aligned}\|B\|_1 &= \max \{ |1| + |0| + |0|, |2| + |1| + |1|, |0| + |0| + |1| \} = 4 \\ \|B^{-1}\|_1 &= \max \{ |1| + |0| + |0|, |-2| + |1| + |-1|, |0| + |0| + |1| \} = 4 \\ \text{cond}_{\|\cdot\|_1}(B) &= \|B\|_1 * \|B^{-1}\|_1 = 4 * 4 = 16\end{aligned}$$

Spektralnrm:

Wir bestimmen $B^T * B$:

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T * B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $B^T * B$ bestimmen:

$$\begin{aligned}\det((B^T * B) - \lambda * E) &= -\lambda^3 + 8 * \lambda^2 - 8 * \lambda + 1 \\ -\lambda^3 + 8 * \lambda^2 - 8 * \lambda + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5}) \\ \Rightarrow \lambda_2 &= 1 \\ \Rightarrow \lambda_3 &= \frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5}) \\ \|B\|_2 &= \sqrt{\lambda_{\max}(B^T * B)} = \sqrt{\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})}\end{aligned}$$

Weiterhin bestimmen wir $(B^{-1})^T * (B^{-1})$:

$$(B^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (B^{-1})^T * (B^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $(B^{-1})^T * (B^{-1})$ bestimmen:

$$\det((B^{-1})^T * (B^{-1}) - \lambda * E) = -\lambda^3 + 8 * \lambda^2 - 8 * \lambda + 1$$

$$-\lambda^3 + 8 * \lambda^2 - 8 * \lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5})$$

$$\|B^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}((B^{-1})^T * B^{-1})} = \sqrt{\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})}$$

$$\text{cond}_{\|\cdot\|_2}(B) = \|B\|_2 * \|B^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})} * \sqrt{\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})} = \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})$$

Zeilensummennorm:

$$\|B\|_{\infty} = \max\{|1| + |2| + |0|, |0| + |1| + |0|, |0| + |1| + |1|\} = 3$$

$$\|B^{-1}\|_{\infty} = \max\{|1| + |-2| + |0|, |0| + |1| + |0|, |0| + |-1| + |1|\} = 3$$

$$\text{cond}_{\|\cdot\|_{\infty}}(B) = \|B\|_{\infty} * \|B^{-1}\|_{\infty} = 3 * 3 = 9$$

Aufgabe 5

Aufgabe 6