Janina Geiser, Mat Nr. 6420269
Michael Hufschmidt, Mat.Nr. 6436122
Farina Ohm, Mat Nr. XXX
Annika Seidel, Mat Nr. YYY

Aufgabe 1

Gegeben sind:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \; ; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,01 \end{pmatrix} \; ; \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1005 \end{pmatrix}$$

Exakte Lösung: Die exakte Lösung x des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ ermitteln wir über die Cramersche Regel mit den Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,01 \end{pmatrix} \; ; \qquad A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ b_2 & 1,01 \end{pmatrix} \; ; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 1 & b_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Diese haben die Determinanten:

$$\mathrm{Det}(A) = 1,01 - 1 = \frac{1}{100} \; ; \qquad \mathrm{Det}(A_1) = 1,01 \cdot b_1 - b_2 \; ; \qquad \mathrm{Det}(A_2) = b_2 - b_1 \tag{2}$$

Das ergibt:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\mathrm{Det}(A_1)}{\mathrm{Det}(A)} = 100 \cdot (1,01 \cdot b_1 - b_2) \\ x_2 &= \frac{\mathrm{Det}(A_2)}{\mathrm{Det}(A)} = 100 \cdot (b_2 - b_1) \end{aligned} \tag{3}$$

Mit dem Zahlenwerten für b ergibt das $x_1 = 500$ und $x_2 = 500$.

Lösung mit ungenauem b: Für fehlerbehaftete $\tilde{b}_i = (1+\varepsilon_i) \cdot b_i$ ergeben sich fehlerbehaftete Lösungen $\tilde{x}_i$. Durch Einestzen der $\tilde{b}_i$ in Gleichung (3) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= 100 \cdot (1,01 \cdot \tilde{b}_1 - \tilde{b}_2) = 100 \cdot (1,01 \cdot (1 + \varepsilon_1) \cdot b_1 - (1 + \varepsilon_2) \cdot b_2)) \\ &= x_1 + 100 \cdot (1,01 \cdot \varepsilon_1 \cdot b_1 - \varepsilon_2 \cdot b_2) \\ \tilde{x}_2 &= 100 \cdot (\tilde{b}_2 - \tilde{b}_1) = 100 \cdot ((1 + \varepsilon_2) \cdot b_2 - (1 + \varepsilon_1) \cdot b_1)) \\ &= x_2 + 100 \cdot (\varepsilon_2 \cdot b_2 - \varepsilon_1 \cdot b_1) \end{aligned} \tag{4}$$

Mit dem Zahlenwerten für b ergibt das

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_1 + 101000 \cdot \varepsilon_1 - 100500 \cdot \varepsilon_2 \\ \tilde{x}_2 &= x_2 + 105000 \cdot \varepsilon_2 - 100000 \cdot \varepsilon_1 \end{aligned} \tag{5}$$

Da die Vorzeichen der Fehler ε_i unbekannt sind, können sie im ungünstigen Fall auch verschieden sein; dann addieren sich die beiden Fehler-Terme. Mit $\varepsilon := \max(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|)$ kann man dann den „worst case" absoluten Fehler $|\tilde{\tilde{x}}_i - x_i|$ abschätzen:

$$\begin{aligned} |\tilde{\tilde{x}}_1 - x_1| &\leq 101000 \cdot |\varepsilon_1| + 100500 \cdot |\varepsilon_2| \leq 201500 \cdot \varepsilon \\ |\tilde{\tilde{x}}_2 - x_2| &\leq 100500 \cdot |\varepsilon_1| + 100000 \cdot |\varepsilon_2| \leq 200500 \cdot \varepsilon \end{aligned} \tag{6}$$

Und für die relativen Fehler ergibt sich dann mit $x_1 = x_2 = 500$:

$$\left| \frac{\tilde{\tilde{x}}_1 - x_1}{x_1} \right| \leq 403 \cdot \varepsilon \; ; \qquad \left| \frac{\tilde{\tilde{x}}_2 - x_2}{x_2} \right| \leq 401 \cdot \varepsilon \tag{7}$$

Aufgabe 2

Hier könnt ihr Euch austoben