Übungen zur Vorlesung Numerische Mathematik, WS 2014/15
Blatt 02 zum 27.10.2014

von	Janina Geiser	Mat Nr. 6420269
	Michael Hufschmidt	Mat.Nr. 6436122
	Farina Ohm	Mat Nr. 6314051
	Annika Seidel	Mat Nr. 6420536

Inhalt...

Aufgabe 3

a)

b)

c)

Aufgabe 4

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Nach Vorlesung gilt: $\boxed{\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A) = \|A\| * \|A^{-1}\|}$

Wir berechnen also A^{-1} mithilfe des Gauss-Jordan-Verfahren und erhalten:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (I|A^{-1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right)$$

Daraus folgt:
Spaltensummennorm:

$$\|A\|_1 = \max\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| + \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|\right\} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \max\left\{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|, \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\right\} = \sqrt{2}$$

$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_1}(A) = \|A|_1 * \|A^{-1}\|_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} * \sqrt{2} = 2$$

euklidische Norm:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(A) = \|A|_2 * \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{2} * \sqrt{2} = 2$$

Zeilensummennorm:

$$\|A\|_\infty = \max\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|, \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|\right\} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max\left\{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|, \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\right\} = \sqrt{2}$$

$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A) = \|A|_\infty * \|A^{-1}\|_\infty = \frac{2}{\sqrt{2}} * \sqrt{2} = 2$$

Gegeben:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Analog zu oben berechnen wir B^{-1}:

$$(B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (I|B^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Daraus folgt:
Spaltensummennorm:

$$\|B\|_1 = \max\{|1| + |0| + |0|, |2| + |1| + |1|, |0| + |0| + |1|\} = 4$$
$$\|B^{-1}\|_1 = \max\{|1| + |0| + |0|, |-2| + |1| + |-1|, |0| + |0| + |1|\} = 4$$
$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_1}(B) = \|B|_1 * \|B^{-1}\|_1 = 4 * 4 = 16$$

euklidische Norm:

$$\|B\|_2 = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{8}$$
$$\|B^{-1}\|_2 = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + (-2)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{8}$$
$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(B) = \|B|_2 * \|B^{-1}\|_2 = \sqrt{8} * \sqrt{8} = 8$$

Zeilensummennorm:

$$\|B\|_\infty = \max\{|1| + |2| + |0|, |0| + |1| + |0|, |0| + |1| + |1|\} = 3$$
$$\|B^{-1}\|_\infty = \max\{|1| + |-2| + |0|, |0| + |1| + |0|, |0| + |-1| + |1|\} = 3$$
$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(B) = \|B|_\infty * \|B^{-1}\|_\infty = 3 * 3 = 9$$

Aufgabe 5

Aufgabe 6