Übungen zur Vorlesung Numerische Mathematik, WS 2014/15
Blatt 01 zum 20.10.2014

von		
	Janina Geiser	Mat Nr. 6420269
	Michael Hufschmidt	Mat.Nr. 6436122
	Farina Ohm	Mat Nr. 6314051
	Annika Seidel	Mat Nr. 6420536

Aufgabe 1

Gegeben sind:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,01 \end{pmatrix} \;; \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1005 \end{pmatrix}$$

Lösung mit exaktem b: Die exakte Lösung x des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ ermitteln wir über die Cramersche Regel mit den Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,01 \end{pmatrix} \;; \qquad A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ b_2 & 1,01 \end{pmatrix} \;; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 1 & b_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Diese haben die Determinanten:

$$\mathrm{Det}(A) = 1,01 - 1 = \frac{1}{100} \;; \qquad \mathrm{Det}(A_1) = 1,01 \cdot b_1 - b_2 \;; \qquad \mathrm{Det}(A_2) = b_2 - b_1 \tag{2}$$

Das ergibt:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\mathrm{Det}(A_1)}{\mathrm{Det}(A)} = 100 \cdot (1,01 \cdot b_1 - b_2) \\ x_2 &= \frac{\mathrm{Det}(A_2)}{\mathrm{Det}(A)} = 100 \cdot (b_2 - b_1) \end{aligned} \tag{3}$$

Mit dem Zahlenwerten für b ergibt das $x_1 = 500$ und $x_2 = 500$.

Lösung mit ungenauem b: Für fehlerbehaftete $\tilde{b}_i = (1+\varepsilon_i) \cdot b_i$ ergeben sich fehlerbehaftete Lösungen $\tilde{x}_i$. Durch Einestzen der $\tilde{b}_i$ in Gleichung (3) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= 100 \cdot (1,01 \cdot \tilde{b}_1 - \tilde{b}_2) = 100 \cdot (1,01 \cdot (1+\varepsilon_1) \cdot b_1 - (1+\varepsilon_2) \cdot b_2)) \\ &= x_1 + 100 \cdot (1,01 \cdot \varepsilon_1 \cdot b_1 - \varepsilon_2 \cdot b_2) \\ \tilde{x}_2 &= 100 \cdot (\tilde{b}_2 - \tilde{b}_1) = 100 \cdot ((1+\varepsilon_2) \cdot b_2 - (1+\varepsilon_1) \cdot b_1)) \\ &= x_2 + 100 \cdot (\varepsilon_2 \cdot b_2 - \varepsilon_1 \cdot b_1) \end{aligned} \tag{4}$$

Mit dem Zahlenwerten für b ergibt das

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_1 + 101000 \cdot \varepsilon_1 - 100500 \cdot \varepsilon_2 \\ \tilde{x}_2 &= x_2 + 105000 \cdot \varepsilon_2 - 100000 \cdot \varepsilon_1 \end{aligned} \tag{5}$$

Da die Vorzeichen der Fehler ε_i unbekannt sind, können sie im ungünstigen Fall auch verschieden sein; dann addieren sich die beiden Fehler-Terme. Mit $\varepsilon := \max(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|)$ kann man dann den „worst case“ absoluten Fehler $|\tilde{\tilde{x}}_i - x_i|$ abschätzen:

$$\begin{aligned} |\tilde{\tilde{x}}_1 - x_1| &\leq 101000 \cdot |\varepsilon_1| + 100500 \cdot |\varepsilon_2| \leq 201500 \cdot \varepsilon \\ |\tilde{\tilde{x}}_2 - x_2| &\leq 100500 \cdot |\varepsilon_1| + 100000 \cdot |\varepsilon_2| \leq 200500 \cdot \varepsilon \end{aligned} \tag{6}$$

Und für die relativen Fehler ergibt sich dann mit $x_1 = x_2 = 500$:

$$\left| \frac{\tilde{\tilde{x}}_1 - x_1}{x_1} \right| \leq 403 \cdot \varepsilon \;; \qquad \left| \frac{\tilde{\tilde{x}}_2 - x_2}{x_2} \right| \leq 401 \cdot \varepsilon \tag{7}$$

Aufgabe 2

a) Zu zeigen: Strikt diagonaldominante Matrizen sind invertierbar.

Beweis-Idee: Wir zeigen dass der Kern von A leer ist, d.h $\ker(A) = \emptyset$. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonaldominant ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Definitionsgemäß ist $\ker(A) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid x \neq 0 \text{ und } A \cdot x = 0\}$. Für ein $x \in \ker(A)$, gilt dann also $0 = A \cdot x$, d.h.

$$\begin{aligned}
0 &= a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \\
0 &= a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n \\
&\cdots \\
0 &= a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n
\end{aligned} \tag{8}$$

Aus diesem Gleichungssystem wählen wir nun die i-te Zeile, wobei i durch $|x_i| \geq |x_j| \ \forall\ j = \{1, \cdots, n\}$ gegeben ist. Dann wird:

$$\begin{aligned}
0 = a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = a_{ii} \cdot x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} \cdot x_j \\
\Rightarrow a_{ii} \cdot x_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} \cdot x_j
\end{aligned} \tag{9}$$

Dann gilt für die Beträge von Gleichung (9):

$$|a_{ii} \cdot x_i| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} \cdot x_j \right| \overset{\text{Dreiecks-Ungleichung}}{\leq} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij} \cdot x_j| = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| \tag{10}$$

Wir können (9) nun abschätzen, da $|x_i|$ die betragsmäßig größte Komponente von x ist:

$$|a_{ii} \cdot x_i| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_i| = |x_i| \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \tag{11}$$

Gleichung (11) durch $|x_i| \neq 0$ dividiert ergibt:

$$|a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \overset{\text{strikte Diagonaldominanz}}{<} |a_{ii}| \tag{12}$$

Wir erhalten also: $|a_{ii}| < |a_{ii}|$ – Widerspruch! Die Annahme $|x_i| \geq 0$ ist also falsch. Da aber $|x_i| \geq |x_j| \ \forall j = \{1, \cdots, n\}$ gilt, folgt auch $x_j = 0 \ \forall j = \{1, \cdots, n\}$ Der Kern von A ist somit trivial und dann ist A invertierbar.

b) Zu zeigen: A hermitisch, diagonaldominant und $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ nicht negativ $\Rightarrow A \geq 0$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert und $x \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektor von A, dann gilt $Ax = \lambda x$. Nomieren wir weiterhin die Einheitsvektoren mit der Maxinumsnorm, sodass $\|x\|_\infty = 1$ und wählen $i \in \{1, \cdots, n\}$ s.d. $|x_i| = 1$, dann gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i \Leftrightarrow a_{ii} x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i$$

Wir substrahieren auf beiden Seiten der Gleichung $a_{ii}x_i$:

$$\lambda x_i - a_{ii}x_i = (\lambda - a_{ii}) * x_i = \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j$$

$$|\lambda - a_{ii}| * \underbrace{|x_i|}_{=1} = \left| \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\underbrace{|x_j|}_{\leq 1} \leq \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Also folgt daraus: $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$. Mit der Formel für die Diagonaldominanz

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \Leftrightarrow |a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \geq 0$$

folgt dann:

$$0 \leq a_{ii} - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \leq \lambda \leq a_{ii} + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Es folgt also $\lambda \geq 0 \Rightarrow$ alle Eigenwerte sind nicht negativ $\Rightarrow A$ ist positiv semidefinit.

c) Zu zeigen: A hermitisch, strikt diagonaldominant und $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ positiv $\Rightarrow A > 0$
Der Beweis ist analog zu b). Nur folgt aus der strikten Diagonaldominanz

$$|a_{ii}| < \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \Leftrightarrow |a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < 0$$

folgendes:

$$0 < a_{ii} - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \leq \lambda \leq a_{ii} + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Es folgt also $\lambda > 0 \Rightarrow$ alle Eigenwerte sind positiv $\Rightarrow A$ ist positiv definit.