Übungen zur Vorlesung Numerische Mathematik, WS 2014/15
Blatt 02 zum 27.10.2014

von	Janina Geiser	Mat Nr. 6420269
	Michael Hufschmidt	Mat.Nr. 6436122
	Farina Ohm	Mat Nr. 6314051
	Annika Seidel	Mat Nr. 6420536

Aufgabe 3

a)

$$Seien A \in \mathbb{K}^n \tag{1}$$

b) TODO: Annika

c) TODO: Annika

Aufgabe 4

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Nach Vorlesung gilt: $\boxed{\text{cond}_{\|\cdot\|}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|}$

Wir berechnen also A^{-1} mithilfe des Gauss-Jordan-Verfahren und erhalten:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (I|A^{-1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right)$$

Daraus folgt:
<u>Spaltensummennorm:</u>

$$\|A\|_1 = \max\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| + \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|\right\} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \max\left\{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|, \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\right\} = \sqrt{2}$$

$$\text{cond}_{\|\cdot\|_1}(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} * \sqrt{2} = 2$$

<u>Spektralnorm:</u>
Wir bestimmen $A^T \cdot A$:

$$A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $A^T \cdot A$ bestimmen:

$$\det\big((A^T \cdot A) - \lambda I\big) = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T \cdot A)} = \sqrt{1} = 1$$

Weiterhin bestimmen wir $(A^{-1})^T \cdot (A^{-1})$:

$$(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^T \cdot (A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $(A^{-1})^T \cdot (A^{-1})$ bestimmen:

$$\det\big(((A^{-1})^T \cdot (A^{-1}) - \lambda I\big) = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}((A^{-1})^T \cdot A^{-1})} = \sqrt{1} = 1$$

$$\Rightarrow \text{cond}_{\|\cdot\|_2}(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = 1 \cdot 1 = 1$$

Zeilensummennorm:

$$\|A\|_\infty = \max\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|, \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|\right\} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$\|A^{-1}\|_\infty = \max\left\{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|, \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| + \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\right\} = \sqrt{2}$$
$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A) = \|A\|_\infty * \|A^{-1}\|_\infty = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Gegeben:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Analog zu oben berechnen wir B^{-1}:

$$(B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (I|B^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Daraus folgt:
Spaltensummennorm:

$$\|B\|_1 = \max\{|1| + |0| + |0|, |2| + |1| + |1|, |0| + |0| + |1|\} = 4$$
$$\|B^{-1}\|_1 = \max\{|1| + |0| + |0|, |-2| + |1| + |-1|, |0| + |0| + |1|\} = 4$$
$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_1}(B) = \|B\|_1 \cdot \|B^{-1}\|_1 = 4 \cdot 4 = 16$$

Spektralnorm:
Wir bestimmen $B^T \cdot B$:

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $B^T \cdot B$ bestimmen:

$$\det\big((B^T \cdot B) - \lambda I\big) = -\lambda^3 + 8 \cdot \lambda^2 - 8 \cdot \lambda + 1$$
$$-\lambda^3 + 8 \cdot \lambda^2 - 8 \cdot \lambda + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})$$
$$\Rightarrow \lambda_2 = 1$$
$$\Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5})$$
$$\|B\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(B^T \cdot B)} = \sqrt{\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})}$$

Weiterhin bestimmen wir $(B^{-1})^T \cdot (B^{-1})$:

$$(B^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (B^{-1})^T \cdot (B^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $(B^{-1})^T \cdot (B^{-1})$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
&\det\big(((B^{-1})^T \cdot (B^{-1}) - \lambda I\big) = -\lambda^3 + 8 \cdot \lambda^2 - 8 \cdot \lambda + 1 \\
&-\lambda^3 + 8 \cdot \lambda^2 - 8 \cdot \lambda + 1 = 0 \\
&\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5}) \\
&\Rightarrow \lambda_2 = 1 \\
&\Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5}) \\
&\|B^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}((B^{-1})^T \cdot B^{-1})} = \sqrt{\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})} \\
&\text{cond}_{\|\cdot\|_2}(B) = \|B\|_2 \cdot \|B^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})} = \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})
\end{aligned}$$

<u>Zeilensummennorm:</u>

$$\begin{aligned}
&\|B\|_\infty = \max\{|1| + |2| + |0|, |0| + |1| + |0|, |0| + |1| + |1|\} = 3 \\
&\|B^{-1}\|_\infty = \max\{|1| + |-2| + |0|, |0| + |1| + |0|, |0| + |-1| + |1|\} = 3 \\
&\text{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(B) = \|B\|_\infty \cdot \|B^{-1}\|_\infty = 3 * 3 = 9
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Aufgabe 6

TODO: Farina/Michael