第一章　质点运动学

1-1. 时间与空间（自学）
1-2. 质点 参考系和坐标系（物体的点模型）
1-3. 位置矢量与轨道方程
1-4. 速度矢量
1-5. 加速度矢量
1-6. 运动学中的逆问题
1-7. 角速度
1-8. 极坐标系与自然坐标系

1.7 角速度

1. 角量描述

简化描述某些运动，例如圆周运动。

如图，$\Delta t \to 0$ 时，$\Delta\varphi \to \mathrm{d}\varphi$

角速度：
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

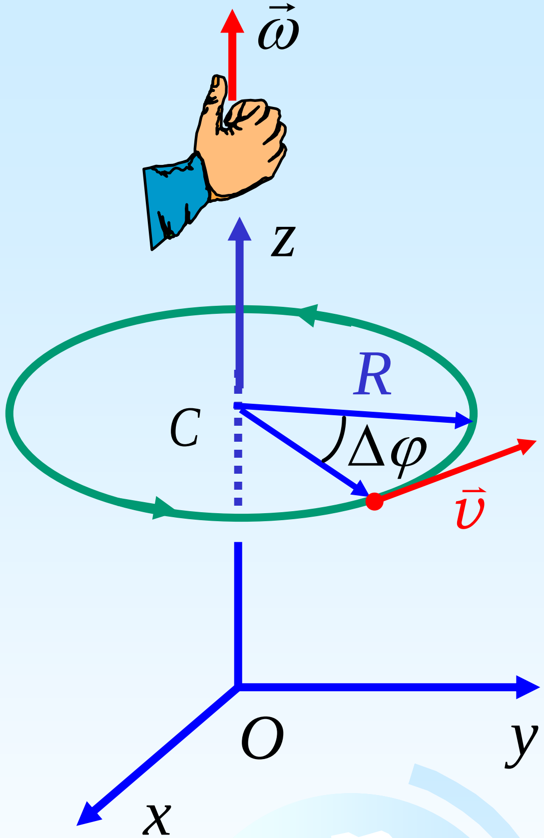
(规定）方向：右手螺旋定则

矢量表示：$\boxed{\vec{\omega} = \omega\vec{k}}$

单位：rad/s （旋转一周 = 2π rad)

若 z 轴固定，可进一步定义角加速度

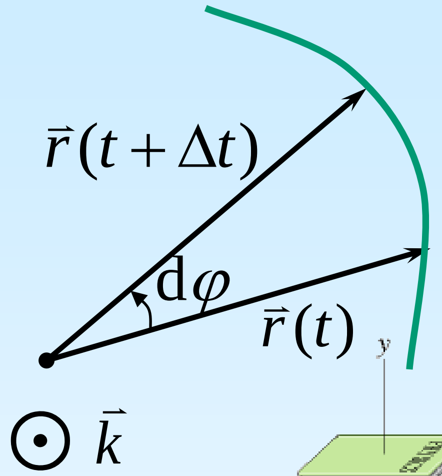
$$\boxed{\vec{\beta} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\vec{k} + \omega\frac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t} = \beta\vec{k}}$$



角速度和角加速度都沿转轴方向！

- 讨论：无限小角位移矢量

$$\mathrm{d}\vec{\varphi}=\mathrm{d}\varphi\vec{k}$$



初、末态矢量与转动正方向满足右手螺旋定则，可相加.

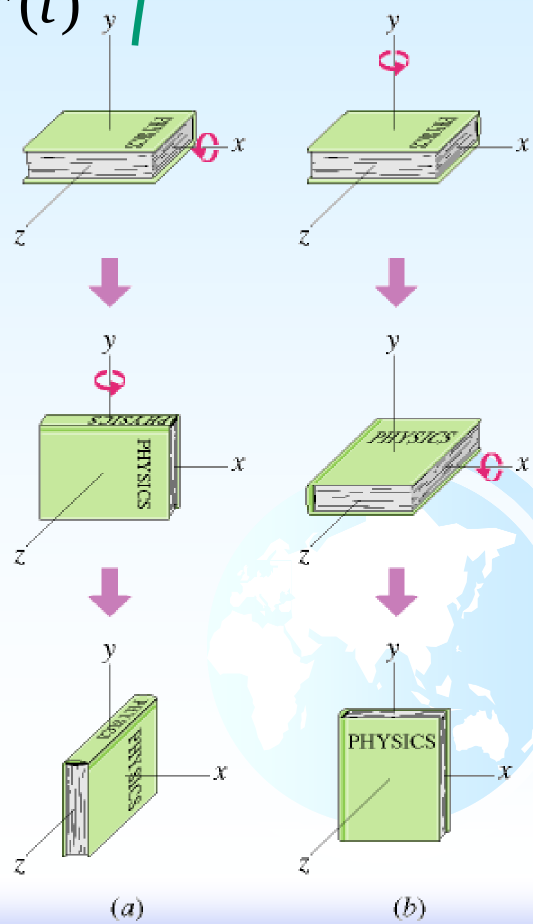
无限小角位移是矢量.

无限小角位移与有限角位移一样吗?

有限角位移不满足矢量加法的交换律!

$$\vec{A}+\vec{B}\neq\vec{B}+\vec{A}$$

$\Rightarrow$ 有限角位移不是矢量!!!



2. 线量与角量的关系：

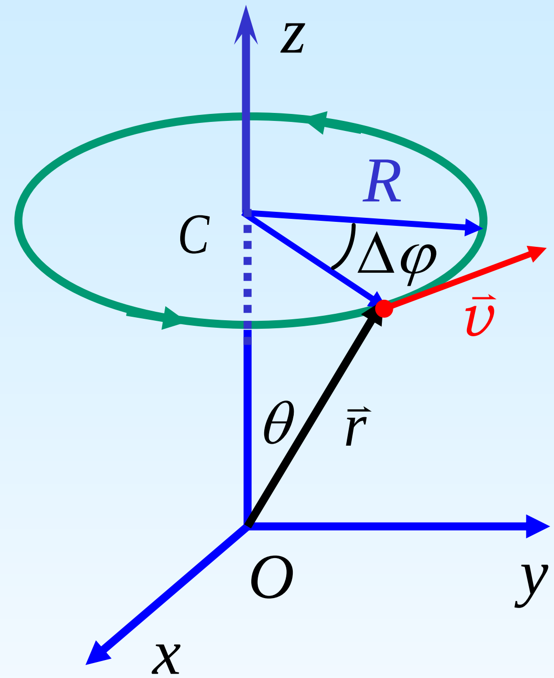
相对于C点： $\boxed{\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\varphi}$

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = R\omega$$

相对于O点： $\upsilon = \omega r \sin\theta$

$\Rightarrow$ 一般(矢量)形式：

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$ （矢量叉乘！）



同理，加速度

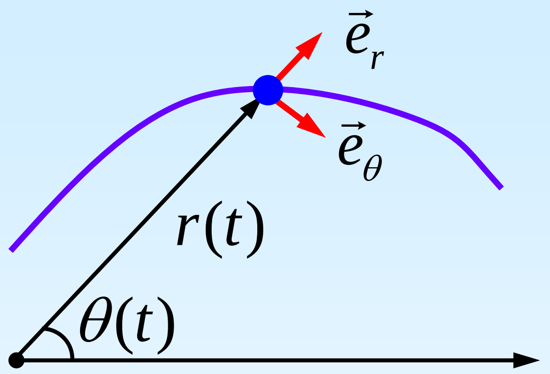
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$$

加速度出现两项： $\boxed{\vec{a}_{切} = \vec{\beta} \times \vec{r}, \quad \vec{a}_{向心} = \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}}$

1.8 极坐标系和自然坐标系

1. 极坐标系

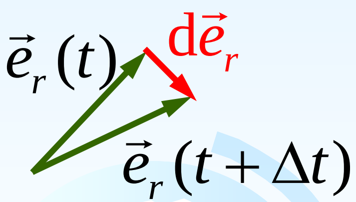
变量r,θ，描述2维平面曲线运动较方便.



- 基矢：径向单位矢量 $\vec{e}_r$

  横向单位矢量 $\vec{e}_\theta$

<u>与直角坐标系的区别</u>：$\vec{e}_r,\vec{e}_\theta$随时间变化！



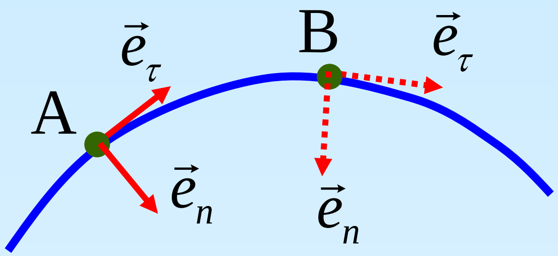
- 位矢：$\vec{r}(t)=r(t)\vec{e}_r$
- 速度：$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}(r\vec{e}_r)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r+r\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$

$\mathrm{d}\vec{e}_r=1\cdot\mathrm{d}\theta\cdot\vec{e}_\theta$

$$\boxed{\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta}$$

径向速度 横向速度

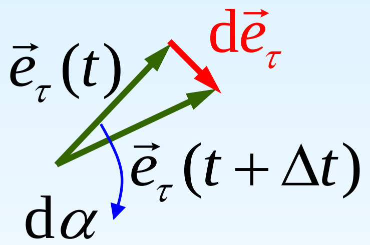
2. 自然坐标系（本性坐标系）



- 基矢：切向单位矢量 $\vec{e}_\tau$
  法向单位矢量 $\vec{e}_n$

$\vec{e}_\tau$，$\vec{e}_n$ 的方向是时间的函数 ➡ $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\tau}{\mathrm{d}t}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_n}{\mathrm{d}t} \neq 0$

- 速度 $\vec{\upsilon} = \upsilon \vec{e}_\tau$



- 加速度 $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\upsilon \vec{e}_\tau) = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau + \upsilon \dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\tau}{\mathrm{d}t}$

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\tau}{\mathrm{d}t} = ?$ $\quad \mathrm{d}\vec{e}_\tau = 1 \cdot \mathrm{d}\alpha \cdot \vec{e}_n \quad \dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\tau}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\vec{e}_n = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_n = \dfrac{\upsilon}{\rho}\vec{e}_n$

$$\boxed{\vec{a} = a_\tau \vec{e}_\tau + a_n \vec{e}_n = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau + \frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{e}_n}$$

$$\boxed{a_\tau = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}, \quad a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}}$$

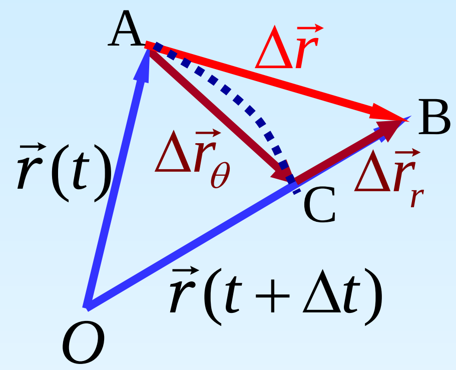
ρ为A点附近曲线的密切圆的曲率半径 $\boxed{\rho = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}}$

3. 位移、速度矢量三角形

① 位移矢量三角形 $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_\theta + \Delta\vec{r}_r$

$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_\theta + \vec{\upsilon}_r$

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_\theta}{\mathrm{d}t}$ —横向速度 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_r}{\mathrm{d}t}$ —径向速度

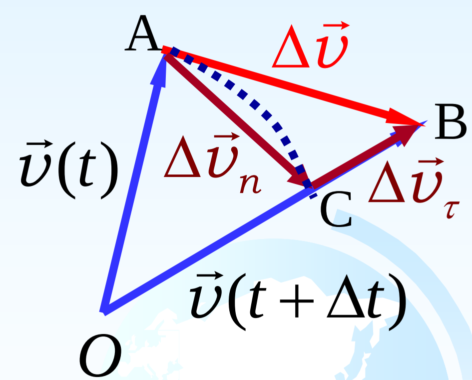


② 速度矢量三角形 $\Delta\vec{\upsilon} = \Delta\vec{\upsilon}_n + \Delta\vec{\upsilon}_\tau$

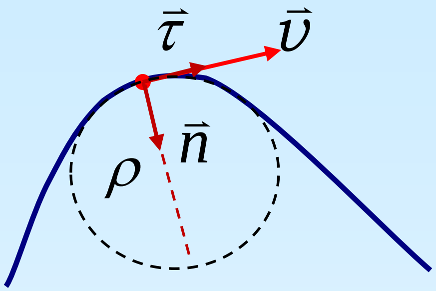
$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_n}{\mathrm{d}t}$ —法向加速度

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_\tau}{\mathrm{d}t}$ —切向加速度



4.切向加速度与法向加速度



- 切向加速度 $\boxed{a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}}$ 描述速度大小变化的快慢
- 法向加速度 $\boxed{a_n = \dfrac{\upsilon^2}{\rho}}$ 描述速度垂直方向上变化的快慢

说明:

1. $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}t$ 是速率对时间的一阶导数，是切向加速度的大小，而不是加速度的大小！ 加速度的大小是 $|\mathrm{d}\vec{\upsilon}|/\mathrm{d}t$

一般情况下 $|\mathrm{d}\vec{\upsilon}| \neq \mathrm{d}\upsilon$

2. 法向加速度既正比于速度的大小，又正比于改变的角度。

3. 法向加速度总是正的。其方向总是指向轨道的凹侧；而切向加速度可正可负。速率增大时，$a_\tau > 0$，加速度方向偏向前进方向。

$\vec{e}_\tau$, $\vec{e}_n$ 的物理意义：

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}=a_n\vec{e}_n+a_\tau\vec{e}_\tau$$

法向　切向

$\Delta t\to 0$, $\Delta\vec{v}_n$ 沿A点的法向方向，$\Delta\vec{v}_\tau$ 沿A点的切向方向。

法向加速度保持速度大小不变，反映速度方向改变的快慢；切向加速度保持速度方向不变，反映速度大小改变的快慢。

特例：

$a_\tau=0$　匀速率曲线运动

$a_n=0$　直线运动

$a_\tau=0,\ \ a_n=c$　匀速圆周运动

讨论下面各种说法的正误或确切与否

(1) 物体(质点)具有恒定的速率时，必作直线运动。×

(2) 物体具有恒定的速度时，必作直线运动。√

(3) 物体的加速度等于恒量时，必作直线运动。×

(4) 在直线运动中，r 的方向始终不变。×

(5)物体作曲线运动时必定有加速度，加速度的法向分量必不为零。√

(6)物体作曲线运动时，其加速度一定指向内切圆一方(即凹侧)。√

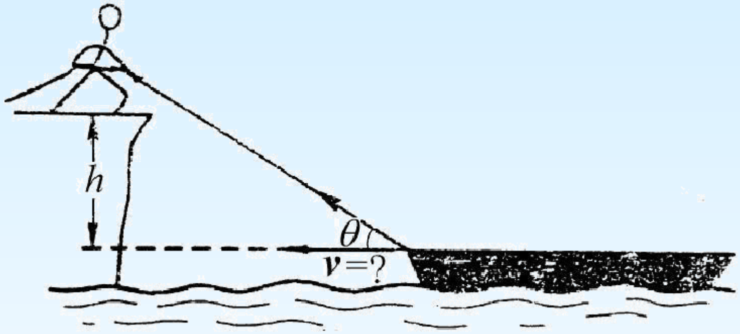
(7)物体作曲线运动时，其速度一定沿切线方向，即$vn \equiv 0$，所以$an \equiv 0$。×

(8)只有法向加速度的运动一定是圆周运动。×

(9)只有切向加速度的运动一定是直线运动。√

返回 退出

例: 如图示，岸高h，人用绳经滑轮拉船靠岸，若绳与水面夹角为θ时，人左行速度为υ_0，加速度为a_0(均未必是常量)，试求此时船的左行速度υ和加速度a。

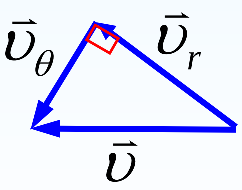


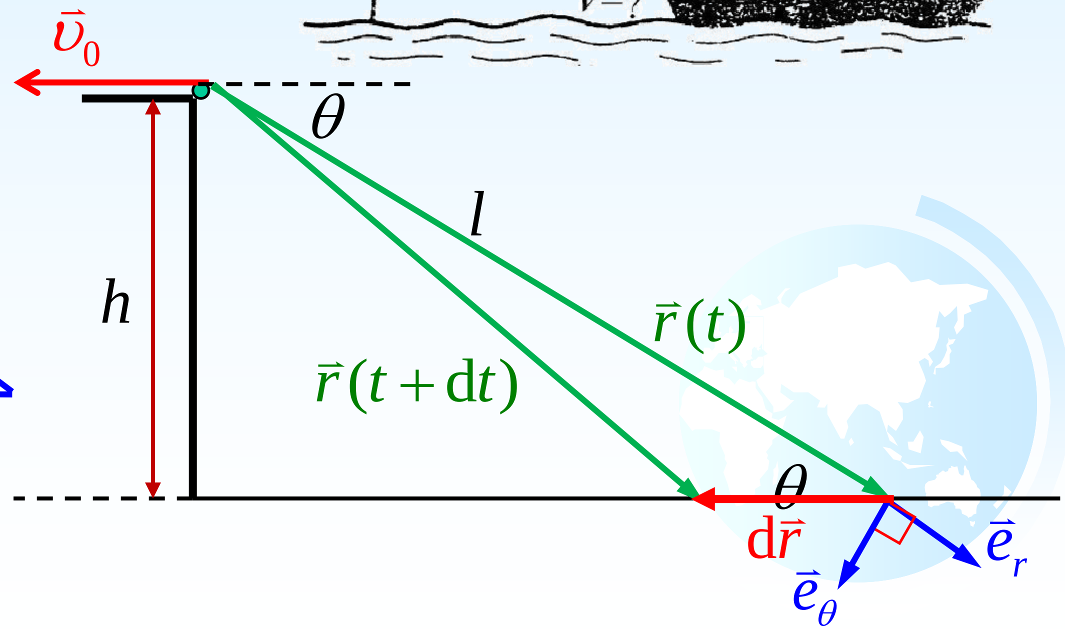
解一: $\vec{r}(t) = r\vec{e}_r$

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta = \vec{\upsilon}_r + \vec{\upsilon}_\theta$$

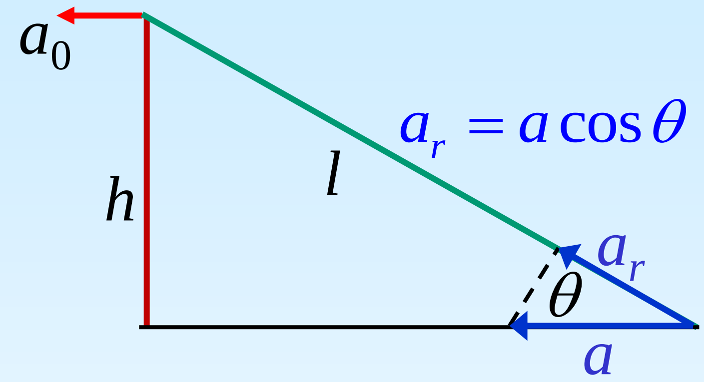
$$\upsilon_0 = \upsilon_r$$

$$\boxed{\upsilon = \frac{\upsilon_0}{\cos\theta}}$$





加速度$\vec{a}$水平向左，沿绳指向河岸的分量为$\vec{a}_r$



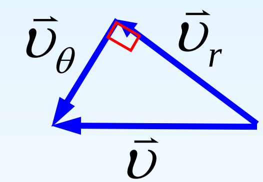
$\vec{a}_r$中有两部分: 由绳子缩短引起的径向加速度和绕轴的旋转向心加速度，两者方向相同，故

绳长缩短变化引起

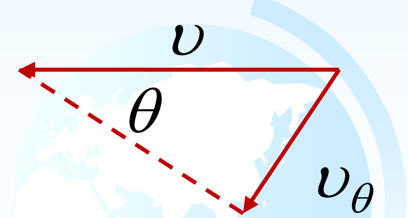
$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_r = a_0 + \frac{\upsilon_\theta^2}{l}$$

旋转的向心项



$$\upsilon_\theta = \upsilon\sin\theta \qquad l = \frac{h}{\sin\theta}$$



$$a_r = a_0 + \frac{\upsilon_0^2}{h}\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}$$

$$a = \frac{a_0}{\cos\theta} + \frac{\upsilon_0^2}{h}\tan^3\theta$$

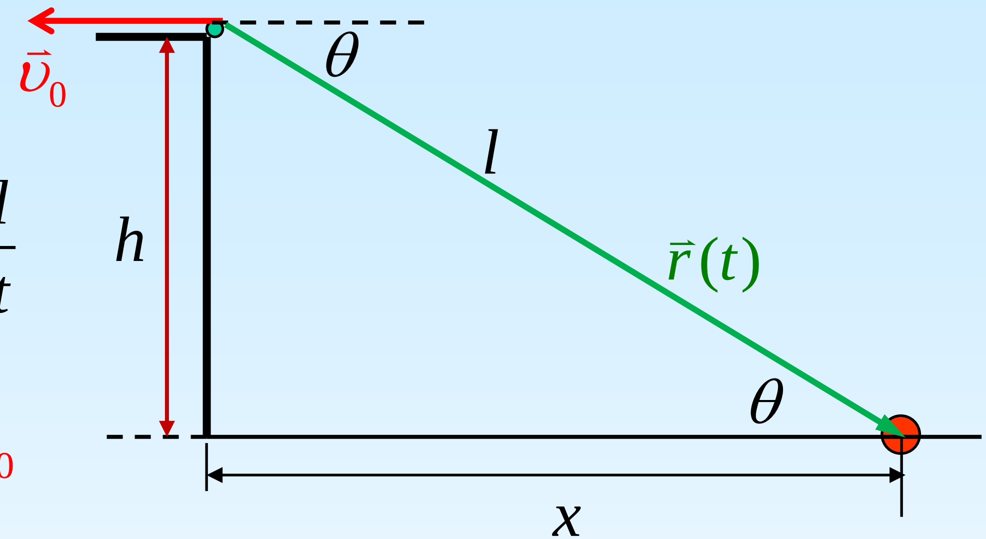
解二:

$$x^2 = l^2 - h^2$$

两边对 t 求导: $2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2l\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{x}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}\upsilon_0$$

(其中 $\upsilon_0 = \dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$)



对t再次求导: $2\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2x\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 2\left(\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2l\dfrac{\mathrm{d}^2l}{\mathrm{d}t^2}$

利用: $\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \upsilon_0$, $\dfrac{\mathrm{d}^2l}{\mathrm{d}t^2} = a_0$, $x = \dfrac{-h}{\tan\theta}$

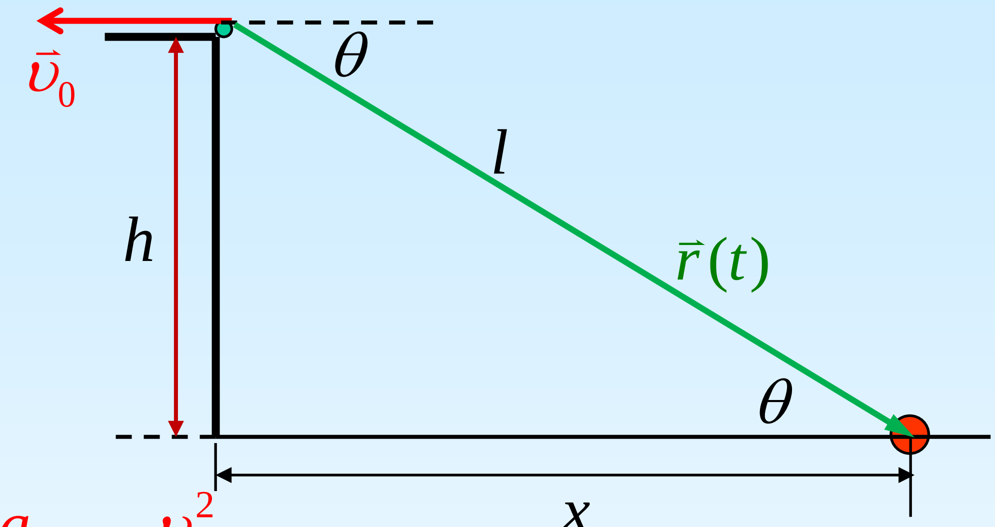
$$\Rightarrow \upsilon^2 + xa = \upsilon_0^2 + la_0$$

$$\upsilon^2 + xa = \upsilon_0^2 + la_0$$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{x}\left[\upsilon_0^2 + la_0 - \upsilon^2\right]$$

$$= \frac{a_0}{\cos\theta} + \frac{1}{x}\left[\upsilon_0^2 - \upsilon^2\right]$$

$$= \frac{a_0}{\cos\theta} + \frac{1}{x}\upsilon_0^2 \frac{-\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{a_0}{\cos\theta} + \frac{\upsilon_0^2}{h}\tan^3\theta$$



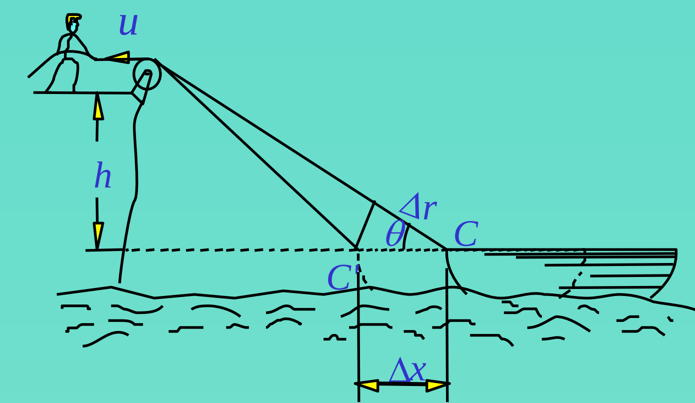
或：

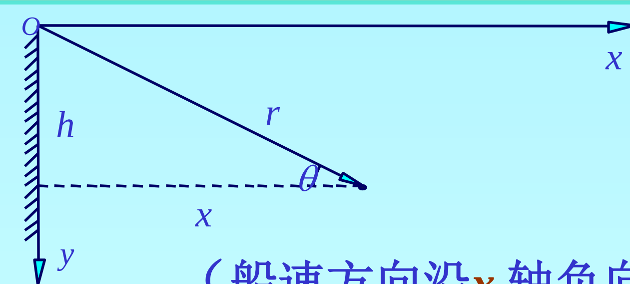
$$a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\upsilon_0}{\cos\theta}\right) = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\mathrm{d}\upsilon_0}{\mathrm{d}t} + \upsilon_0 \frac{-\sin\theta}{-\cos^2\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$= \cdots = \frac{a_0}{\cos\theta} + \frac{\upsilon_0^2 \sin^3\theta}{h\cos^3\theta} = \frac{a_0}{\cos\theta} + \frac{\upsilon_0^2}{h}\tan^3\theta$$

例 在离水面高为h 的岸边，有人用绳子拉小船靠岸，人以不变的速率u 收绳。

求 当船在离岸距离为x 时的速度和加速度。





解 任意时刻船的位矢 $\vec{r}=x\vec{i}+h\vec{j}$

设船靠岸的速度为 $\vec{\upsilon}$

$$\vec{\upsilon}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\vec{j}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}=\upsilon_x\vec{i}$$

任意时刻小船到岸边的距离x 都满足

$$x=\sqrt{r^2-h^2}$$

$$\upsilon_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{r^2-h^2}=\frac{r}{\sqrt{r^2-h^2}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

按题意 $u=-\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 是人收绳的速率，因为绳长r 随时间在缩短，故 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}<0$

（船速方向沿x 轴负向）

则有 $\upsilon_x=-\frac{r}{\sqrt{r^2-h^2}}u=-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}u \Rightarrow \vec{\upsilon}=-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}u\vec{i}$

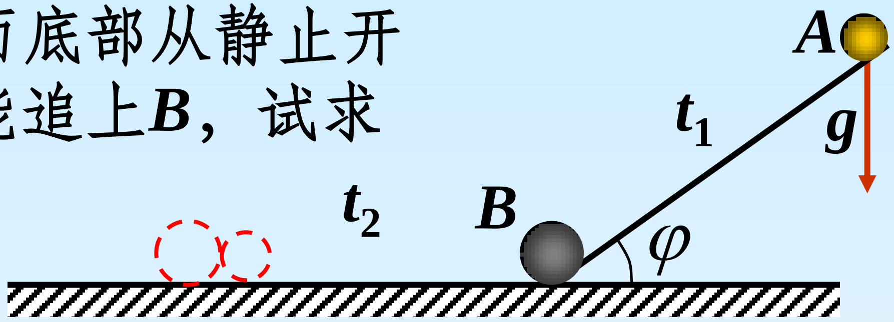
船靠岸的速率为 $\upsilon=|\vec{\upsilon}|=\frac{u}{\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}}=\frac{u}{\cos\theta}>u$ 船的加速度为 $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}$

$$a_x=\frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}u\right)=u\frac{h^2}{x^2\sqrt{x^2+h^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{-u^2h^2}{x^3}$$

即 $\vec{a}=a_x\vec{i}=-\frac{u^2h^2}{x^3}\vec{i}$

方向沿x 轴负向）

例： 如图，小球A在倾角为φ的光滑斜面顶部从静止下滑，同时大球B在斜面底部从静止开始匀加速离开斜面。若A不能追上B，试求**B的加速度a的取值范围**。



解： 分析：a越小，A越能追上B，

先求A恰能追上B的加速度临界值。

设A滑到底部的速度为v_A，所用时间为 $t_1 = \dfrac{v_A}{g\sin\varphi}$

经t_2时间，A恰能追上B的条件
$$\begin{cases} \text{路程} \quad v_A t_2 = \dfrac{1}{2}a(t_1+t_2)^2 \\ \text{速度} \quad v_A = a(t_1+t_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}g\sin\varphi$$

$\Rightarrow$ B的加速度a的取值范围 $a > \dfrac{1}{2}g\sin\varphi$

作业： 1.12, 1.16, 1.18, 1.19

质点沿半径为0.10m的圆周运动，其角位移θ与时间 t 的关系为：$\theta = 5 + 2t^3$ 。当 t＝1s时，它的加速度的大小为

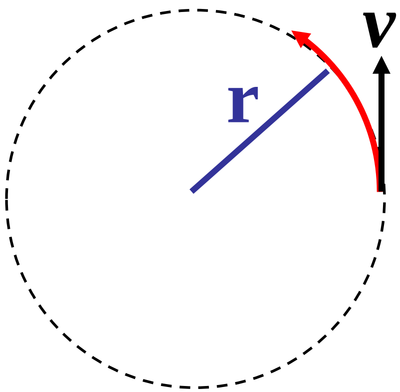
A. 3.6 m / s²； B. 3.8 m / s²； C. 1.2m / s²； D. 2.4m / s²。

$$\because \ \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{t}} + \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{n}} \qquad \therefore a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

而

$$a_t = r\beta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} = r12t$$

$$a_n = r\omega^2 = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = r36t^4$$



$$\therefore a = \sqrt{1.2^2 + 3.6^2} = 3.8m/s^2$$

B正确