匹配市场
（买卖双方直接见面的市场）

（第10章）

10.1 二部图与完美匹配

匹配市场体现的几个原则：

——人们可能对不同商品有不同喜好

——价格可以使商品分配分散化

——这些价格可以产生最优的社会分配

下面将通过逐步完善的模型来解释这些问题

介绍模型前，首先有如下的假设：

——商品可以按照人们的喜好进行分类；

——这些喜好是以网络化形式表达的；

——没有明确的买入、卖出、或价格设定。

10.1 二部图与完美匹配

1、二部图：

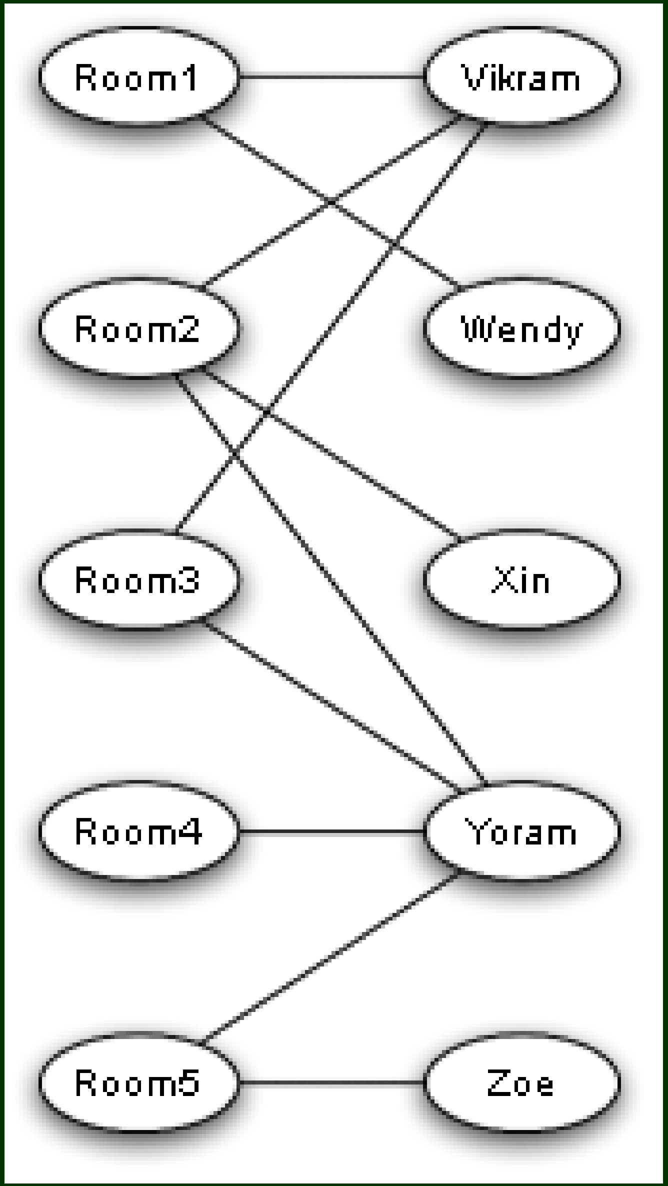
我们首先解决二部图匹配问题，看下面的一个例子：

例：假设大学宿舍管理员要为每个新学年返校的学生分配房间，每个房间一个学生，而学校要求每个学生都列出自己能够接受的房间选项清单。学生们对房间可以有不同的喜好，如更大、更安静或阳光更好等，这样，学生们列出的清单就会以复杂的方式重合。

我们用一个图来表示学生们的清单。每个学生以一个节点代表，每个房间也以节点代表，如果某学生把某个房间列在他的清单上，就有一条线把该学生和房间连起来。

10.1 二部图与完美匹配

图10.1代表了5个学生和5个房间的例子（其中，名叫Vikram的学生列出了 1、2 、3号房间，而名叫Wendy的学生只列出了1号房间）。这种图叫做二部图（bipartite graph），具有一种很重要的性质，此前在第 4 章讨论网络从属问题的时候见过。二部图中的节点被分为两组（ 或称“两类”），每条边连接的必须是 不同组别中的节点。这个图中的两组分别是学生和房间。就像第4章中二部图可表现人们在不同活动中的参与情况，本章用它表示一类人或事物和另外一类人或事物的匹配。图 10.1所示是个二部图 ，两组不同的节点分成平行的两列 ，每条边的两个端点分别在不同的列。



10.1 二部图与完美匹配

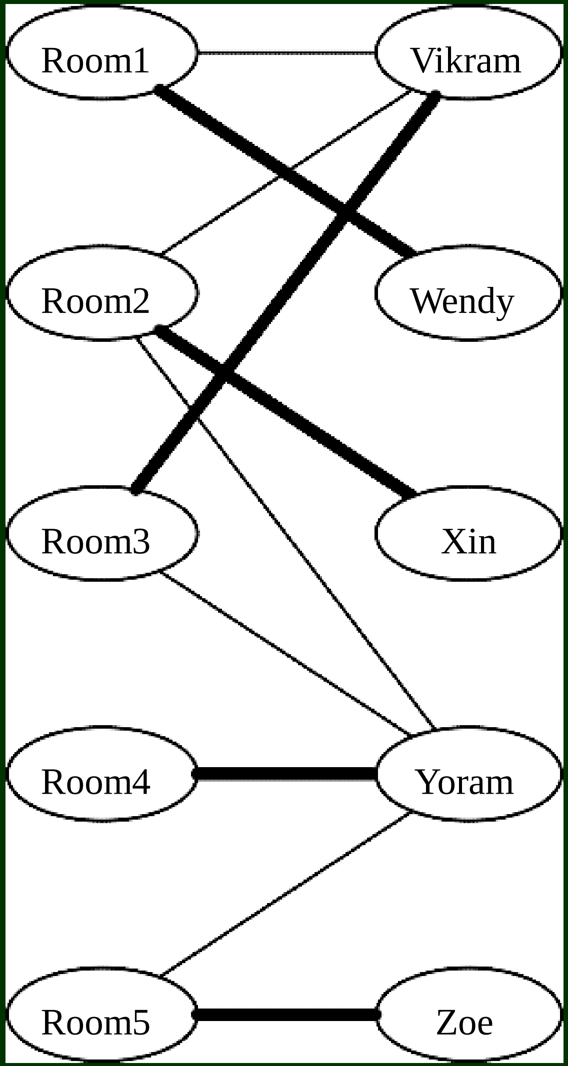
2、完美匹配（perfect matching ）：

当二部图的 两边有数目相同的节点 ，一个完美匹配就是左右节点的配对：

（1）每个节点都有边连接到另外一列的节点 。

（2）不会出现左边两个节点同时连到右边同一个节点上。

如图 10. 1(b ）所示 ，也可以从边的角度来考量完美匹配——一个完美匹配就是二部图中的一组边，图中的每个节点恰好是一条边的端点 。

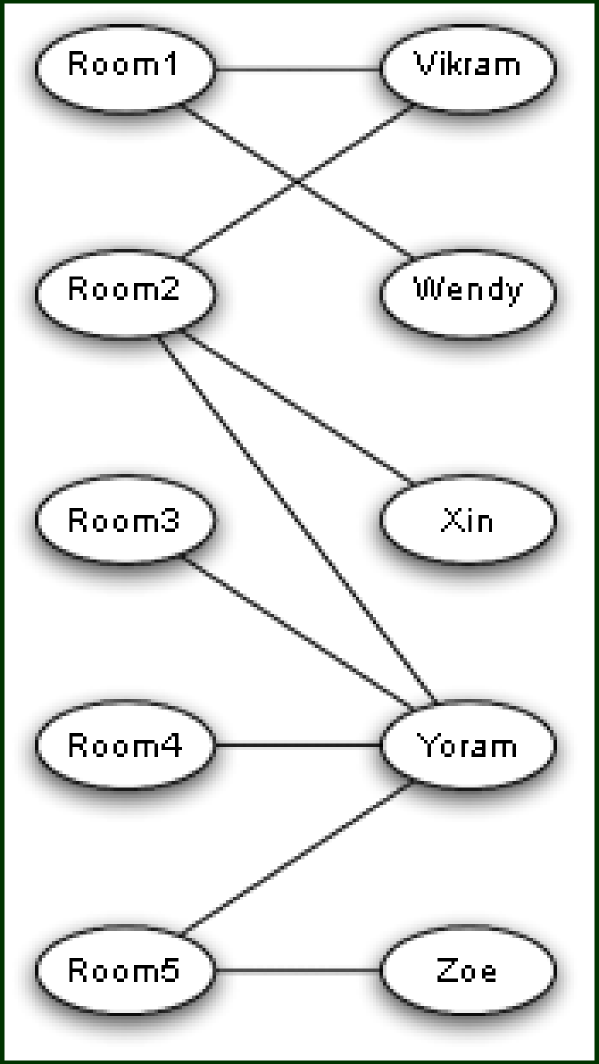


10.1 二部图与完美匹配

3、受限组

为说明二部图中存在完美匹配，指出有关边的集合就足够了。但如果一个二部图没有完美匹配呢？如何断言一个二部图中不存在任何完美匹配？人们很自然想到一种方法是把所有可能性都试一遍，最后表明不可能配对成功 。但事实上基于图10.2的逻辑有一种简便的方式证明不存在完美匹配 。

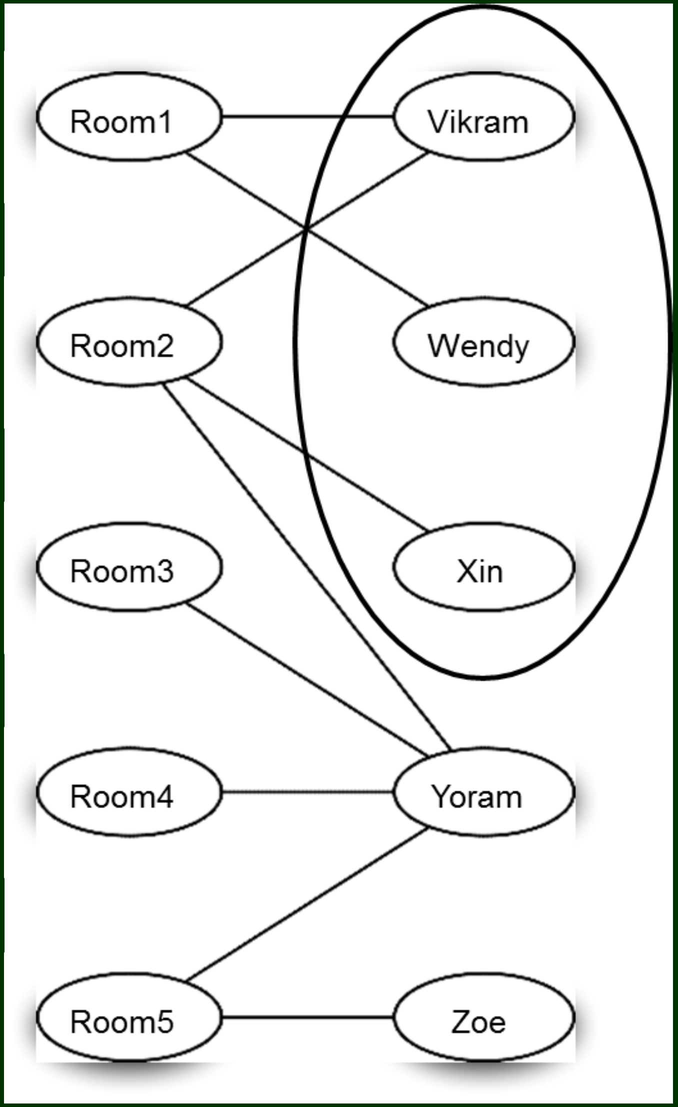
在图10.2里，Vikram 、Wendy和Xin三个人一共只提供了两个可被接受的选项，因此不能形成一个完美匹配——他们之一必然要被分到一个不喜欢的房间。



10.1 二部图与完美匹配

3、受限组

将这三个学生形成的节点组称为“受限组”，原因是连接他们和二部图另一组节点的边限制了完美匹配的形成。这个例子指出了一个普遍的现象，可以通过对受限组的定义来加以明确。首先，取二部图右边任何一组节点S，将左边通过边与其相连的节点称为S的邻居，用N(S)表示所有S邻居的集合 。最后，如果S比N(S)的数量大——也就是说,S比N(S)包含更多的节点,那么右边的S就受限制。



10.1 二部图与完美匹配

匹配定理（Matching Theorem）

不论任何时候，一幅二部图中出现一组受限集合S，即表示不可能有完美匹配,S中的每个节点都要匹配到N(S)中的一个节点，但S中所含节点比N(S)中多，所以不可行。很容易看到受限组阻碍了完美匹配的形成。同时，受限组也是完美匹配的唯一阻碍。这就是被称为匹配定理的要点。

匹配定理：如果一个两边节点相等的二部图无法形成完美匹配，那么它一定包含一个受限组。（10.6将进行详细证明）

现在运用学生和宿舍的例子来思考匹配定理。当学生提交了他们可接受的房间清单后，宿舍管理员很容易向学生解释安排的结果。他或者可以宣布一个完美匹配，每个学生得到自己喜爱的房间，或者他可以指出一组学生提供的选择范围太小，从而无法进行分配。这样一组学生就是受限组。

10.2估值与最优分配

前面所讲的二部图匹配问题说明了简单市场形式中的一个方面：个体以可接受的选项方式表达他们对某些对象的偏好；一个完美匹配体现了满足他们偏好的对象的分配方案；而如果不存在完美匹配，则是因为系统中包含“限制”的阻碍。

下面来更加深入地讨论二部图匹配市场的问题。首先，允许每个人表达偏好时不是用二元方式表达“接受”或“不接受”，而是以数值来表示他们对每个对象的喜爱程度。对前面10.1节中学生和宿舍的例子而言，就是让每个学生对每个房间给一个数值评价来表明他们对房间的满意程度，而不是仅给出一张可接受的房间清单。

10.2估值与最优分配

图10.3(a）是三个学生和三个房间的例子，例如Xin对于1、2、3号房间的估值分别为12、2和4（而Yoram对1、2、3号房间的估值分别为8、7和6）。注意学生们对于每个房间的评价可能存在异议。

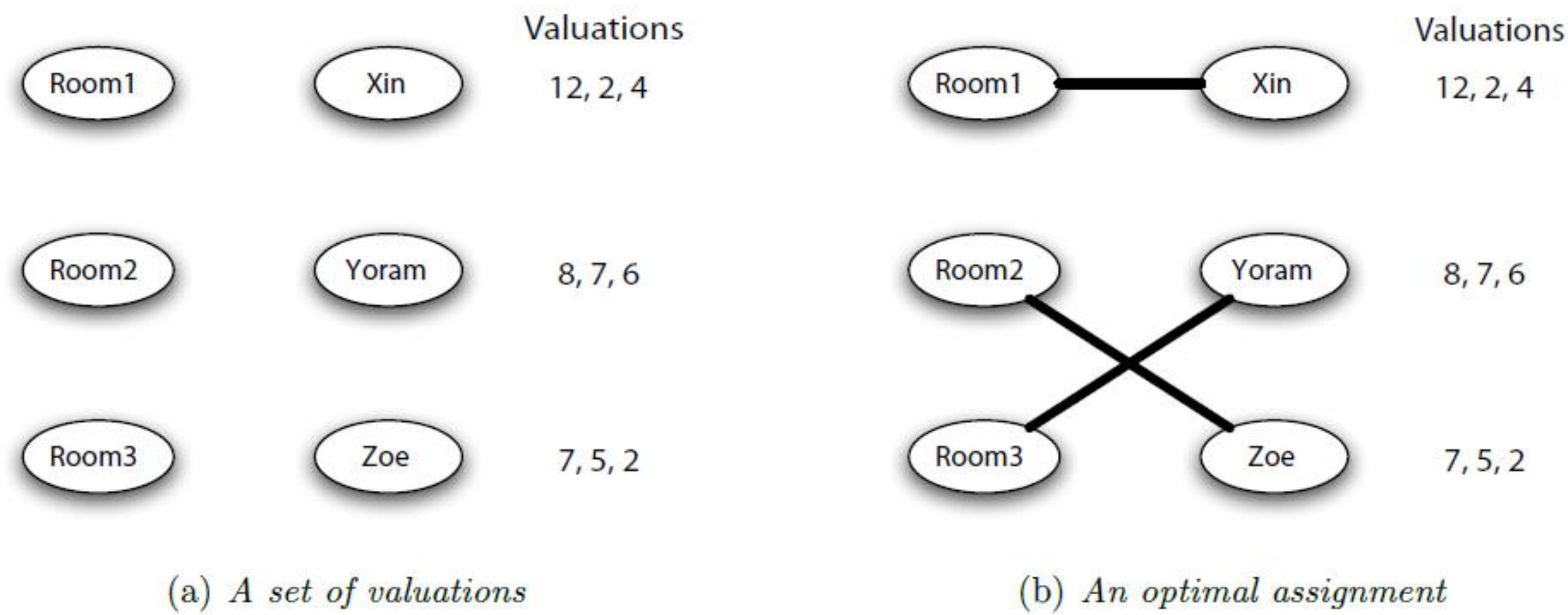


Figure 10.3: (a) A set of valuations. Each person's valuations for the objects appears as a list next to them. (b) An optimal assignment with respect to these valuations.

10.2估值与最优分配

在一组个体对一组对象进行估值的场合，可以定义一种量，来评估将那些对象分配给不同个体的方案的质量，比如：可以定义分配方案的质量等于每个人所得到的对象估值的总和。这样，图10.3（b）中展示出分配结果的质量为12+6+5=23。

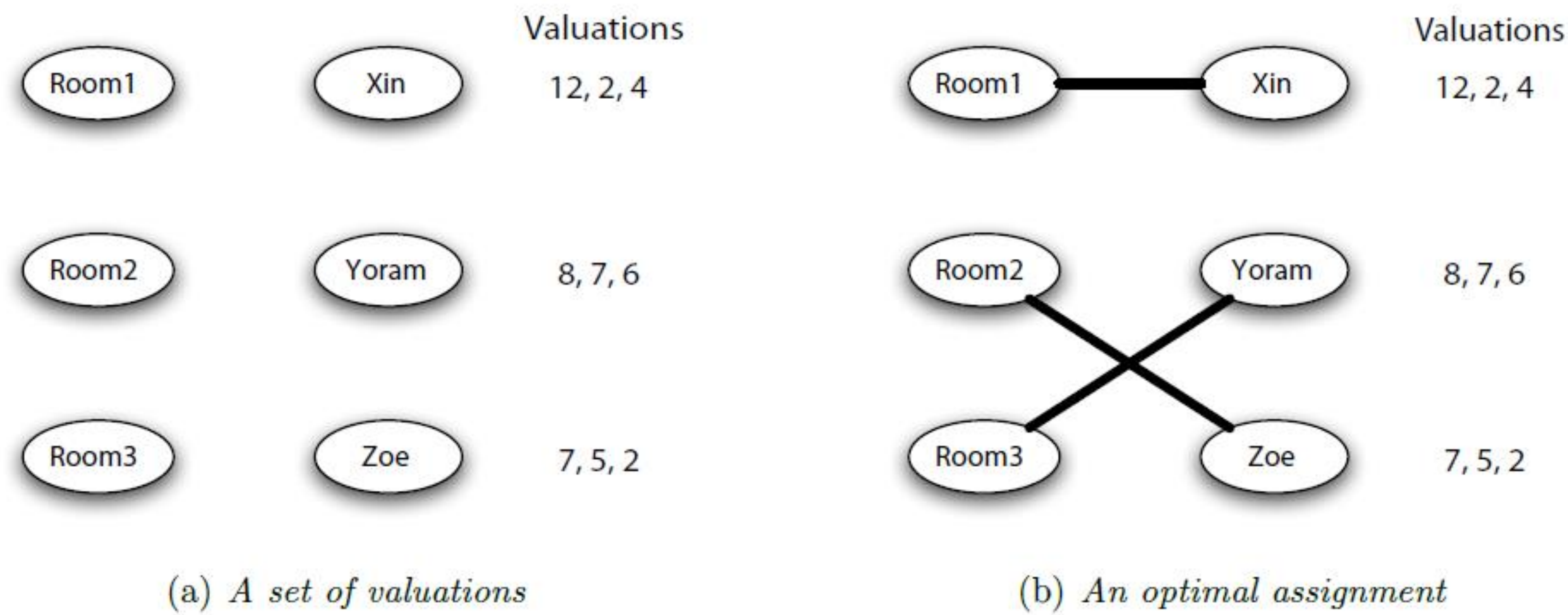


Figure 10.3: (a) A set of valuations. Each person's valuations for the objects appears as a list next to them. (b) An optimal assignment with respect to these valuations.

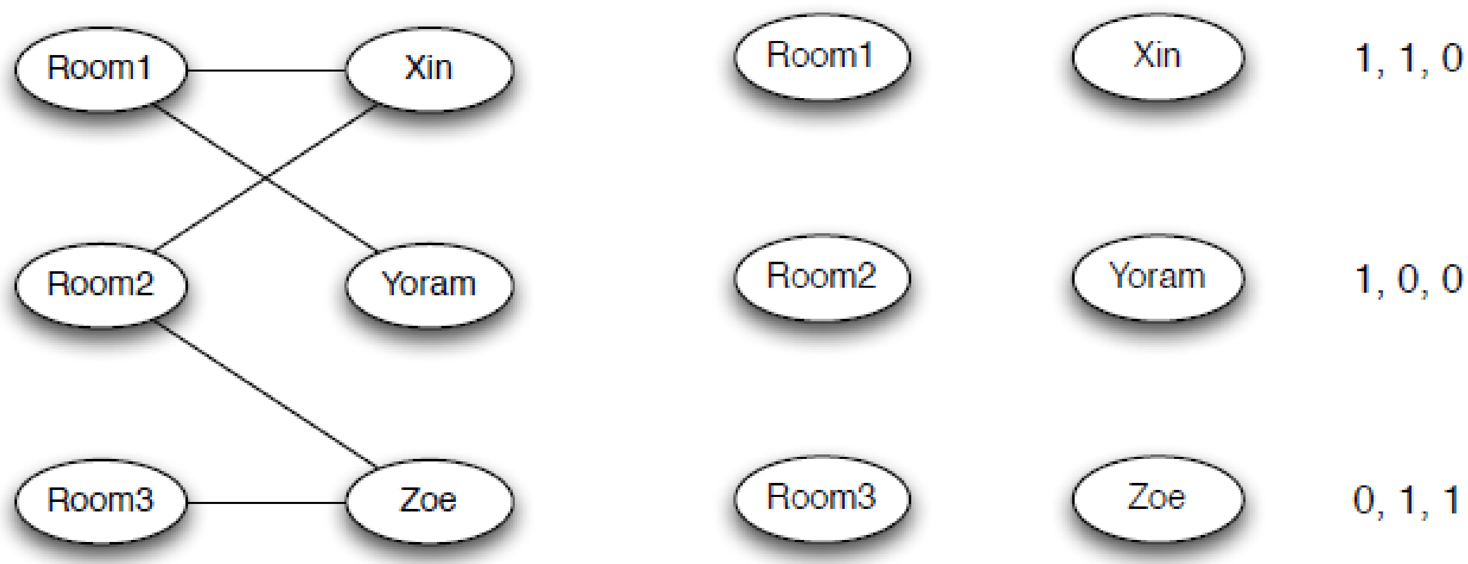
10.2估值与最优分配

如果宿舍管理员知道每个学生对每个房间的评价数值，那么一个合理分配房间的办法就是寻求达到尽可能高的分配方案质量。我们将之称为最优分配，因为这种方法使得每个人的开心程度之和最高。在图10.3中可以看到那是一个最优分配方案。当然，虽然最优分配提高了总的满意程度，它并不能保证给每个人最想要的房间。比如在图10.3(b）中，所有学生都认为1号房间最好，但只有一个学生能得到它。

具体来说，寻求最优分配的问题有时也对应10.1节中二部图匹配的问题。特别是，可以看到二部图匹配问题是最优分配问题的一个特例。下面阐述原因。

10.2估值与最优分配

在10.1节中谈到的学生和房间数目相等，每个学生提交一份可接受的房间清单，而不提供数字估值，这样便形成一个如图10.4(a）所示的二部图，我们想要知道其中是否包含完美分配。这个问题也可以用估值和最优分配的观点来表达。

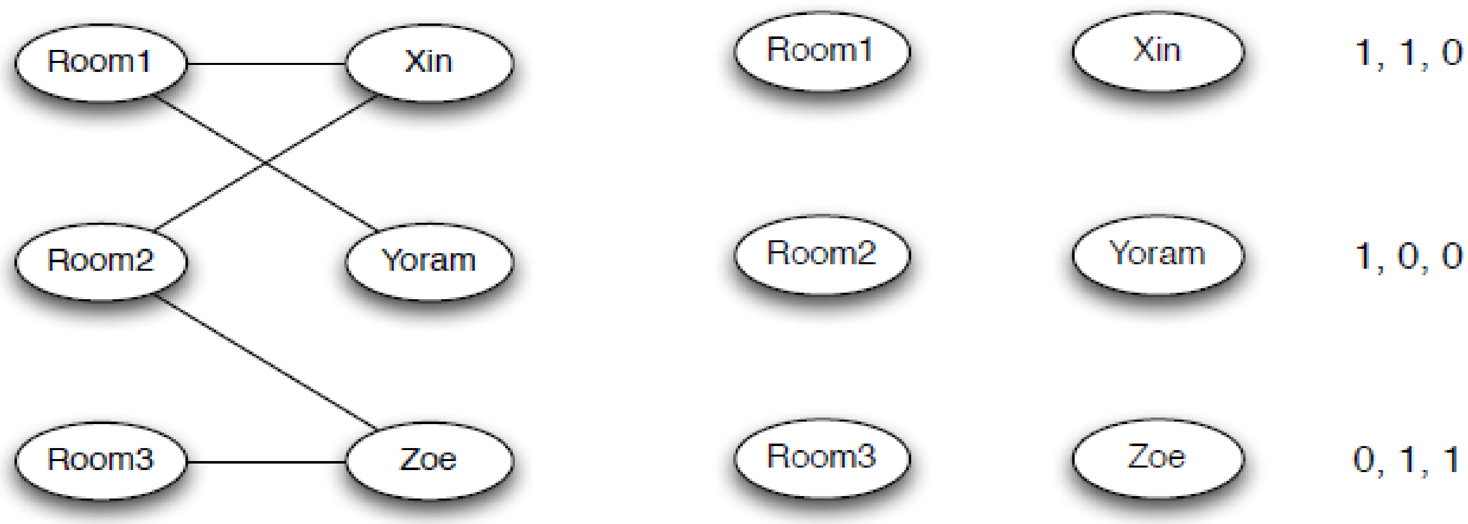


(a) *A bipartite graph*

(b) *A set of valuations encoding the search for a perfect matching*

10.2估值与最优分配

对于学生接受的每个房间，我们将其估值定为1，而对于他们没看上的房间，我们将其估值定为0，将这个原则应用于图10.4(a），就得到图10.4(b）。当我们能给每个学生提供他认为是1而不是0的房间时就产生了完美匹配，即最优分配的质量（价值）和学生数一致。这个简单例子说明了二部图匹配问题如何隐含在寻找最优分配问题之中。



(a) *A bipartite graph*

(b) *A set of valuations encoding the search for a perfect matching*

10.3价格与市场清仓性质

至此，我们一直在用一种比喻，即“一个管理员”通过对每个人送来的数据进行中央计算，来得到完美匹配，或最优分配。虽然有很多类似市场的行为是以这种方式来进行的（如学生和宿舍的问题），但更标准的市场情景是没有如此强的中央协调，每个个人只是在商品的价格和他对其估值的基础上来做出决定。

对此情况的把握是我们对市场匹配问题形式化的重要一步，即理解价格如何在非集中式的市场活动中发挥作用。我们会看到如果以某产品的定价策略来代替一个中央管理员，让个体根据他们对产品的评估寻求最佳个人利益，这样也能产生最优分配。

10.3价格与市场清仓性质

为了更好地解释这个问题，我们稍微改变上述学生与宿舍匹配的例子，让价格的角色更为自然一些。假设有一批卖家，每人都有一套房子要出售；同时有相等数量的买家，每人都需要买一套房子。与前面的情形类似，每个买家对每套房屋都有自己的估值，不同买家对同一套房屋可有不同的估价。买家j对卖家i所持有房屋的估价用v_{ji}来表示，下标i和j表示该估值对应的潜在买卖双方的标识。我们同时假设每个估值都是正整数（0,1,2……），假设卖家对每套房子的估值均为0，他们只在乎从买家收到的金额，对此我们如下来说明。

注：出于简化的考虑，假设卖家对他们的房子都估值为0，如果需要，也可以直接采取这样的论点："0"在此其实只是代表某种极小的基数，所有其他估值和价格都表示在它之上的量。这种分析也不难用于卖家可能对房子有不同估值的场合。由于这些更一般的模型对我们要建立的基本概念没什么太大帮助，我们就用估值为0的假设.

10.3价格与市场清仓性质

1.价格和回报

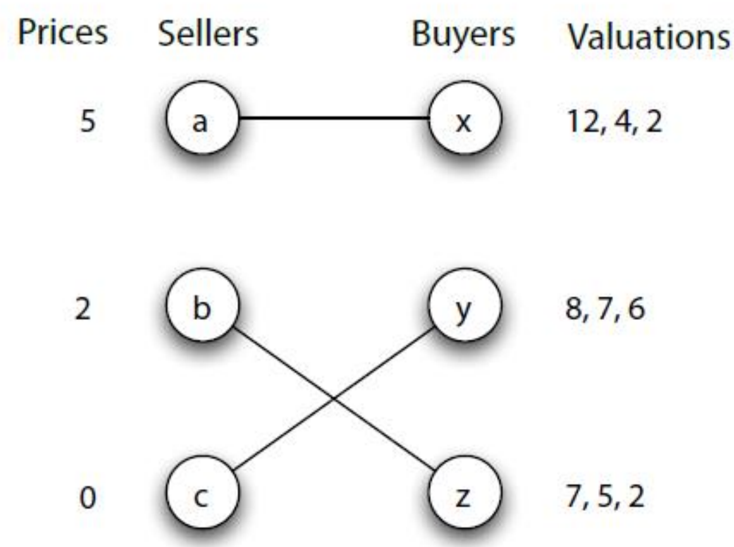
假设卖家i以P_i的价格出售自己的房子，P_i大于等于0。如果买家j从卖家i处以该价格买到此房屋，我们就说买家的回报就是她对该房屋的估值减去她需要付的钱V_{ji}-P_i。如果有一系列价格，而买家j想要最大化她的回报，她将会从给出V_{ji}-P_i最大值的那个卖家i购买，并注意以下几点。首先，如果多个卖家都给出同样的最大值，则买家可以选择任何一个卖家。其次，如果她的回报V_{ji}-P_i对于每个卖家i都是负值，那么买家将不买任何房屋，我们假设她不做交易的回报是0。

我们将能给买家j提供最大化回报的一个或多个卖家称为买家j的“偏好卖家”，前题是这些卖家提供的回报不是负数。如果V_{ji}-P_i是负数，则我们说买家j没有任何“偏好卖家”。

10.3价格与市场清仓性质

图10.5（b）~（d）展示了对于相同买家的估价，对应3组不同价格。注意，对于每位买家，他们偏好卖家的组合如何根据价格变化而变动。例如在图10.5（b）中，买家x如果从a买人得到的回报是12-5=7，如果从b买入得到的回报是4-2=2，如果从c买入得到的回报是2-0=2，这就是为什么a是她唯一的偏好卖家。同样地也可以得出买家y(3、5和6)和z(2、3和2）与卖家a、b和c分别交易的回报。

(a) *Buyer Valuations*



(b) *Market-Clearing Prices*

10.3价格与市场清仓性质

图l0.5(b）很好地表现了一种性质，如果每个买家都直接指出她最喜欢的房子，那么每个买家最后都会得到一套不同的房子：价格似乎完美解决了对于房屋购买的矛盾。尽管这是在三个买家都对卖家a的房屋评价最高的情况下发生的，是高至5的价格使得买家y和z不再寻求购买这间房屋。我们将这样一组价格称为市场清仓价格，因为它们使每间房屋都有了不同的买家。

(a) *Buyer Valuations*　　(b) *Market-Clearing Prices*

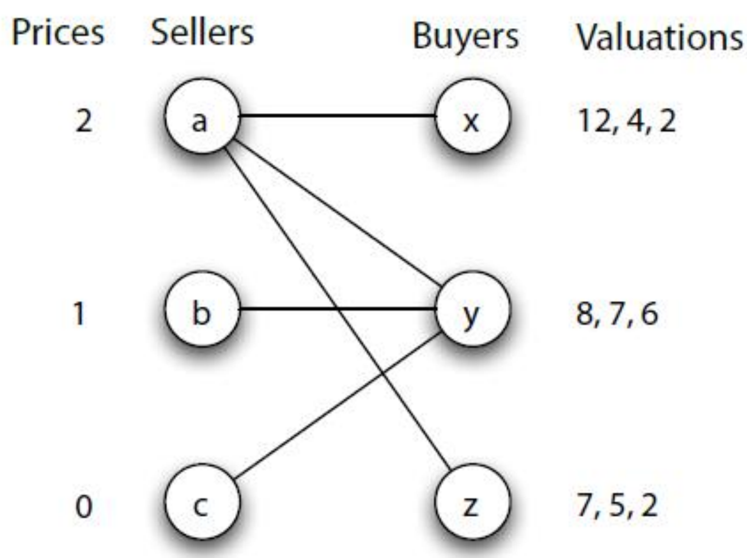
10.3价格与市场清仓性质

而相反，图10.5(c）显示了一组不能实现市场清仓的价格，因为买家x和z都想要卖家a的房屋——这样当每个买家都寻求能够最大化他们回报的房屋时，购房矛盾并没有解决（注意，虽然对于买家y来说，a、b和c都是她的偏好卖家，由于他们所给的回报相当，这并不能帮助解决x和z之间的矛盾）。

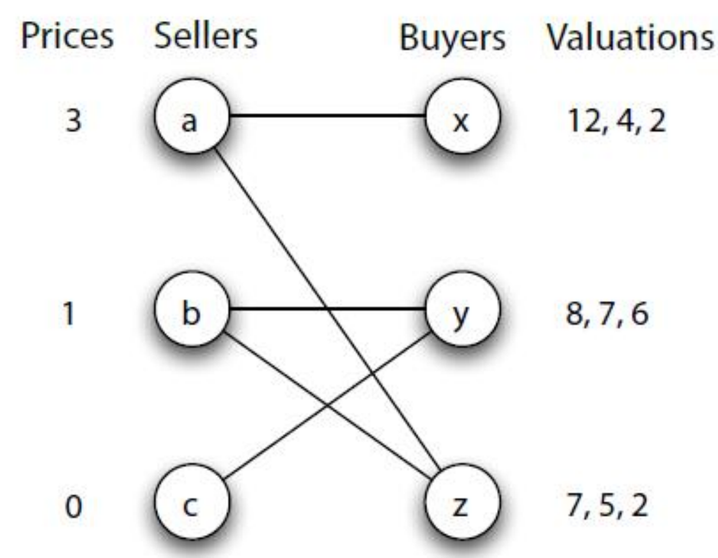
(c) *Prices that Don't Clear the Market*　　(d) *Market-Clearing Prices (Tie-Breaking Required)*

10.3价格与市场清仓性质

图10.5(d）显示了市场清仓价格这一概念的另一细微之处，即如果买家们互相协调，每人都选择一个合适的偏好卖家，这样每个买家都得到不同的房屋（这要求买家y购买卖家c的房屋而z购买b的房屋〉。由于用偏好卖家可以消除矛盾，可以说这组价格也可以实现市场清仓，虽然由于最大化回报的问题需要一点协调。某些情况下，这种“平局”是难以避免的，比如，如果所有买家对于全部商品的估值一样，那么没有任何可选的价格组合能打破这个僵局。



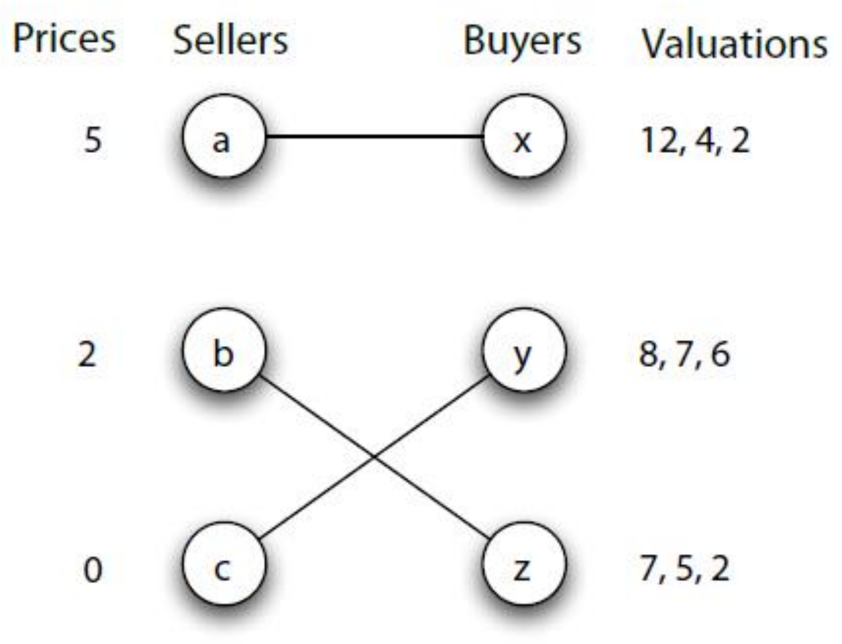
(c) *Prices that Don't Clear the Market*



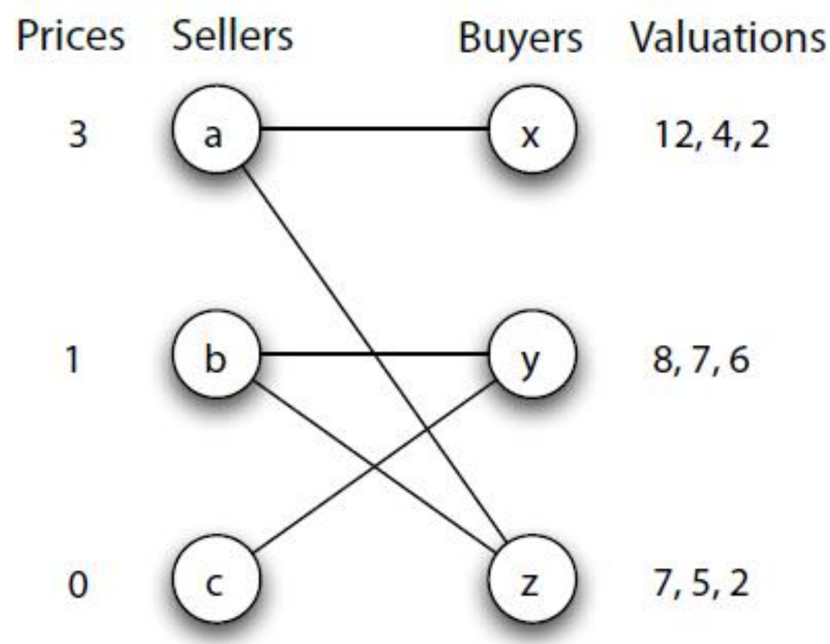
(d) *Market-Clearing Prices (Tie-Breaking Required)*

10.3价格与市场清仓性质

由于平局的存在，我们将更加一般地思考市场清仓价格。对于一组价格来说，我们只是在每个买家和她的偏好卖家直接划上边来定义一幅偏好卖家图，所以图10.5(b）至图10.5(d)就是针对每组价格形成的偏好卖家图。现在可以直接给出结论：如果一组价格形成的偏好卖家图有完美匹配，那么它就是一组市场清仓价格。



(b) *Market-Clearing Prices*



(d) *Market-Clearing Prices (Tie-Breaking Require*

10.3价格与市场清仓性质

3. 市场清仓价格的属性

在某种程度上，市场清仓价格感觉有点太好了，不可能是事实：如果卖家把价格设置正确，那么自我利益追逐就会发挥作用（同时可能需要一些针对平局的协调），所有的买家都不会阻碍别的买家而购买到不同的房屋。我们已经看到这样的价格可以在一个很小的例子中实现，但事实上在更一般的情形下也是对的，即我们有：

市场清仓价格的存在性：对于任何买家估值的组合，总存在一组市场清仓价格。

所以，市场清仓价格并不是某个个案中偶然出现的结果，它们总是存在的。但这并不明显，接下来会讨论如何构建市场清仓价格，而在这个过程中会证明它们的存在性。

先来考虑另外一个很自然的问题：市场清仓价格和社会福利之间的关系。虽然市场清仓价格能让所有买家解决他们之间的矛盾而获得不同的房屋，这是否意味着最后得出的分配是好的？其实，这里也有个很显然的事实：市场清仓价格（对于这种买卖匹配的问题）总是提供最优社会效益。

市场清仓价格的最优性：对于任何一组市场清仓价格，一个偏好卖家图中的完美匹配使估值总和在所有买家与卖家的分配中达到最高。

10.3价格与市场清仓性质

和以上关于市场清仓价格存在的结论相比，这一关于最优性的事实可以更加简单地予以论证，虽然可能更微妙。

论证如下。假设一组市场清仓价格，让**M**作为偏好卖家图中的完美匹配。现在来考虑这个匹配的回报总和，可以简单的定义为每个买家得到回报的总数。由于每个买家都会拿到能最大化自己回报的房屋，那么不论房屋如何分配，**M**都有最大的回报总和。现在希望**M**能最大化估值总和，那么回报总和如何与估值总和联系起来呢？如果买家**j**选择房屋**i**，那么她的估值是V_{ji}，她的回报是$V_{ji}-P_{i}$这样，所有买家的回报总和就是估值总和，减去价格总和：

M的回报总和=**M**的估值总和-价格总和

但是，价格总和不取决于我们选择哪种匹配（仅仅是卖家对每栋房屋的要价，不论买家能否接受这一价格）。因此，能够最大化回报总和的**M**匹配也就是能最大化估值的匹配。论证完毕。

10.3价格与市场清仓性质

思考市场清仓价格的最优性还有另外一个重要的方式，假设我们不是考虑匹配产生的估值总和，而是考虑市场上所有参与者得到的回报总和，包括卖家和买家。对于买家来说，她的回报是她对房屋的估价减去她所付的价钱。卖家的回报就是他通过出售房屋所得到的报酬。因此，在任何匹配中，所有卖家的回报总和便等同于价格总和（和哪个买家付给哪个卖家无关〉。以上论证了所有买家的回报是M匹配中估值总和减去价格总和。因此所有参与者的回报总和，包括买家和卖家，和M匹配的估值总和完全一致；关键是从买家回报总和里减去的价格和他们对于卖家回报作出的贡献是完全一致，因此价格总和可以从此计算中撤销。因此，要使所有参与者的总回报达到最大值，需要价格和相应的匹配能够达到估值总和最高，而这是通过最终首选卖家图中的市场清仓价格和完美匹配实现的。对此，给出以下总结：市场清仓价格的最优性（等价的版本）：一组市场清仓价格，和最终首选卖家圈中的完美匹配，能产生买家和卖家回报总和的最大可能值。

10.4构造一组清仓价格

达成市场清仓价格的过程有点像拍卖，不仅是我们在第9章中讨论过的单品拍卖，而是有许多商品的拍卖，并且许多买家对它们有不同的估值。

下面描述这个拍卖过程。起初所有卖家都把价格设置为0，买家通过选择他们的偏好卖家作出反应，然后来看最终的偏好卖家图。如果此图含有完美匹配问题就解决了；否则，这也是问题所在，即有一部分买家S受限。

假设其邻居N(S)是卖家。也就是说S中的买家只想要N(S) ，但N(S)中的卖家比S中的买家少。因此N(S)内的卖家很抢手，有太多的买家关注他们。他们的反应便是把价格提高一个单位，然后继续拍卖。

在价格形成过程中还有一个因素，是在价格上的“减少”操作。如果能让价格“伸缩”，以保持最小的值为0，会有助于这个过程的描述。因此，如果遇到所有价格都大于0，假设最小的价值P大于0，那么我们可以从每个价格中都减去P，这使最低的价格降到0，而其他所有价格也都调整了相同值。

10.4构造一组清仓价格

一般的拍卖过程正如我们上面所描述。

(1）每轮开始时，会有一组既定价格，最小值等于**0**。

(2）我们构造偏好卖家图，检查是否有完美匹配。

(3）如果有，过程结束，目前的价格即为市场清仓价。

(4）如果没有，我们找到一组受限买家**S**和他们的邻居**N(S)**。

(5) N(S)中的每个卖家（同时〉把出价提高一个单位。

(6）如果需要，我们统一约减卖家价格，让每个价格都减少相同数额以使得最低价格为零。

(7）用新的价格开始下一轮拍卖。

10.4构造一组清仓价格

图10.6显示了当我们把拍卖过程应用于图10.5所示例子时的情况。

图10.6所示的例子展示了这个拍卖中应当强调的两点。首先，当任何一轮中出现多于一个“过多被关注”的卖家N(S）时，在本组中所有的卖家同时提高他们的价格。如在图10.6的第三轮，N(S）组包含a和b，所以他们都提高了价格，产生的价格作为第四轮开始价。

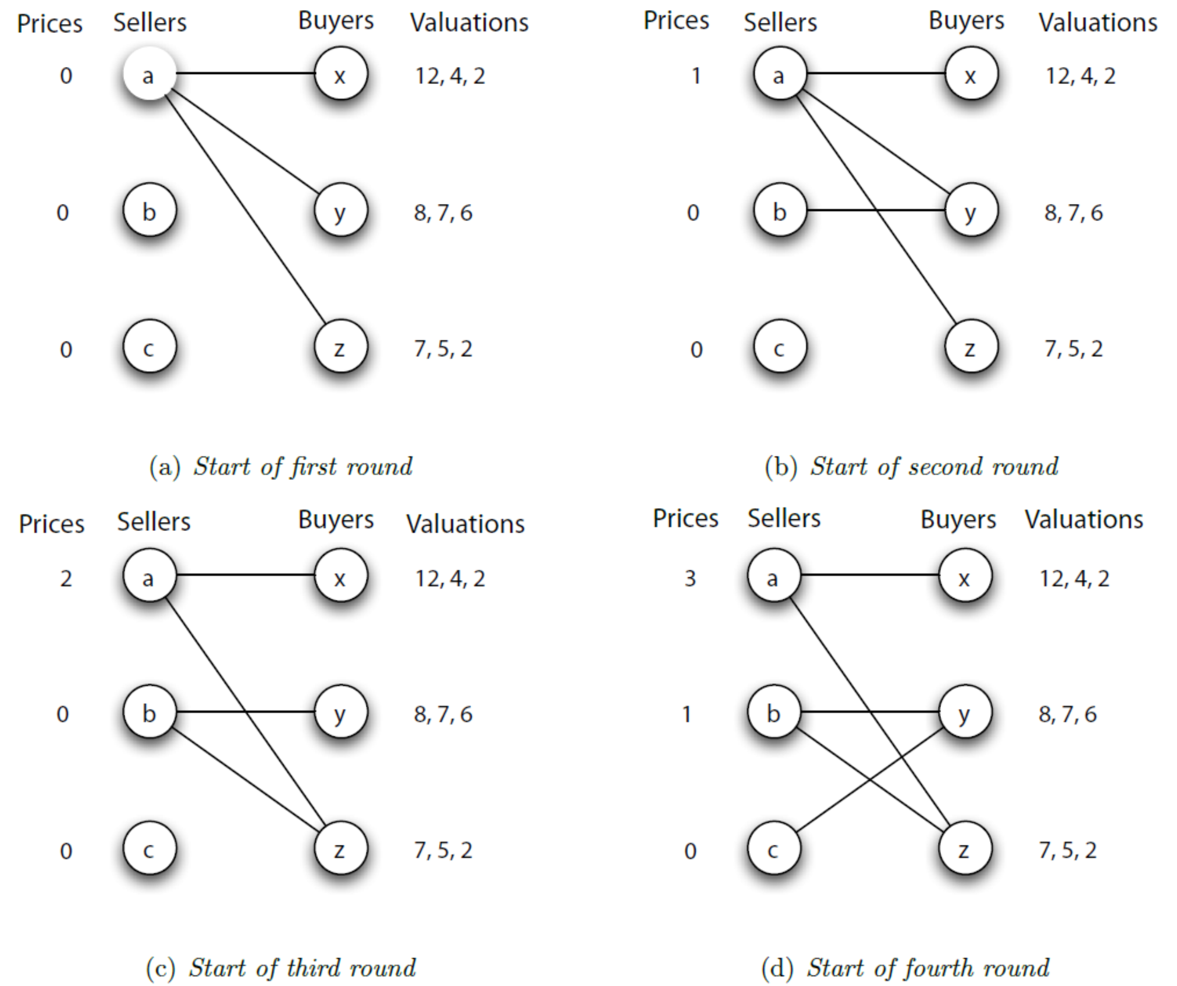


Figure 10.6: The auction procedure applied to the example from Figure 10.5. Each separate picture shows steps (i) and (ii) of successive rounds, in which the preferred-seller graph for that round is constructed.

10.4构造一组清仓价格

图10.6显示了当我们把拍卖过程应用于图10.5所示例子时的情况。

其次，当图10.6里的拍卖过程产生了图10.6(d）里的市场清仓价格，从图10.5(b）了解了对于同一组买家估价，还可能存在另外的市场清仓价格。

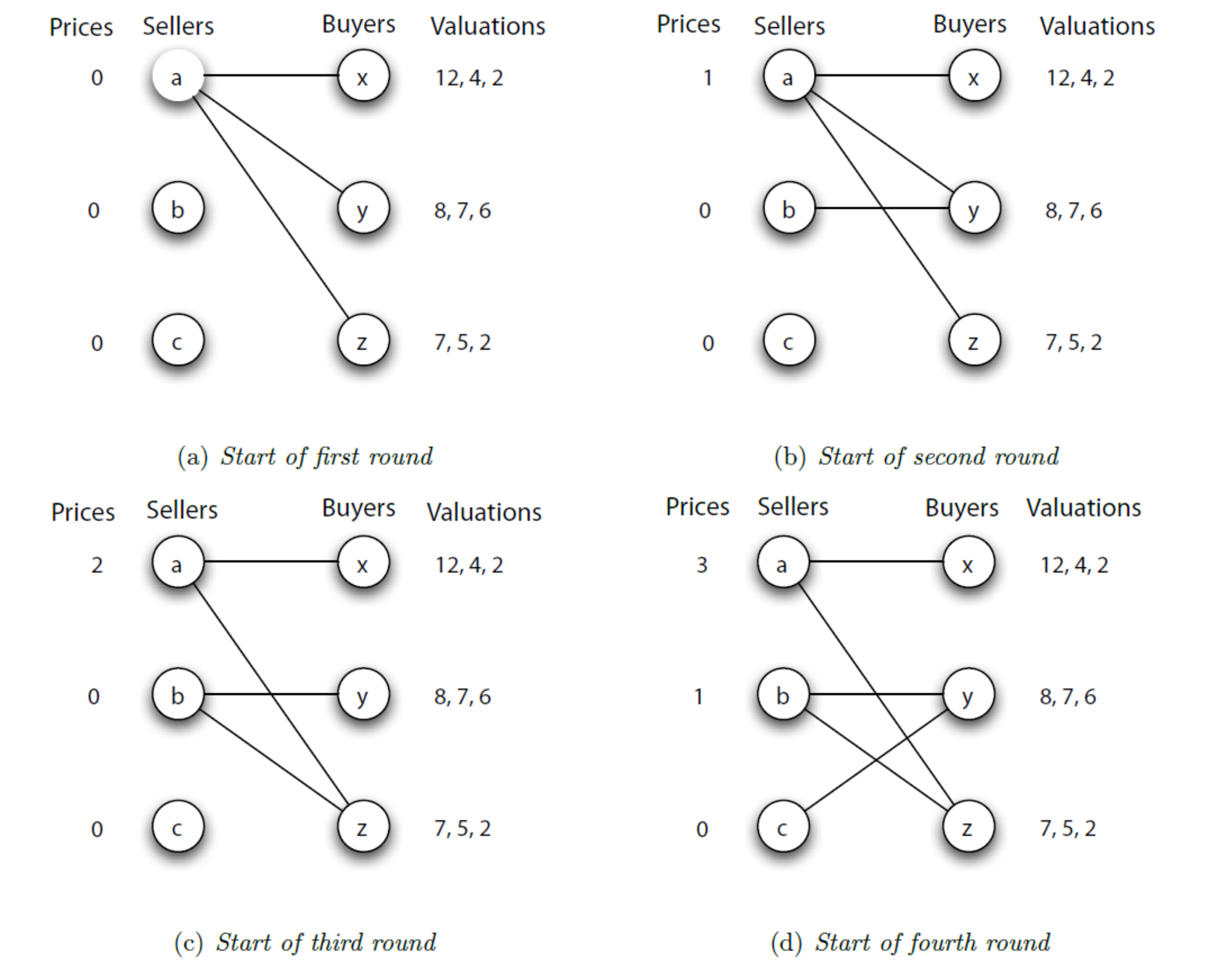
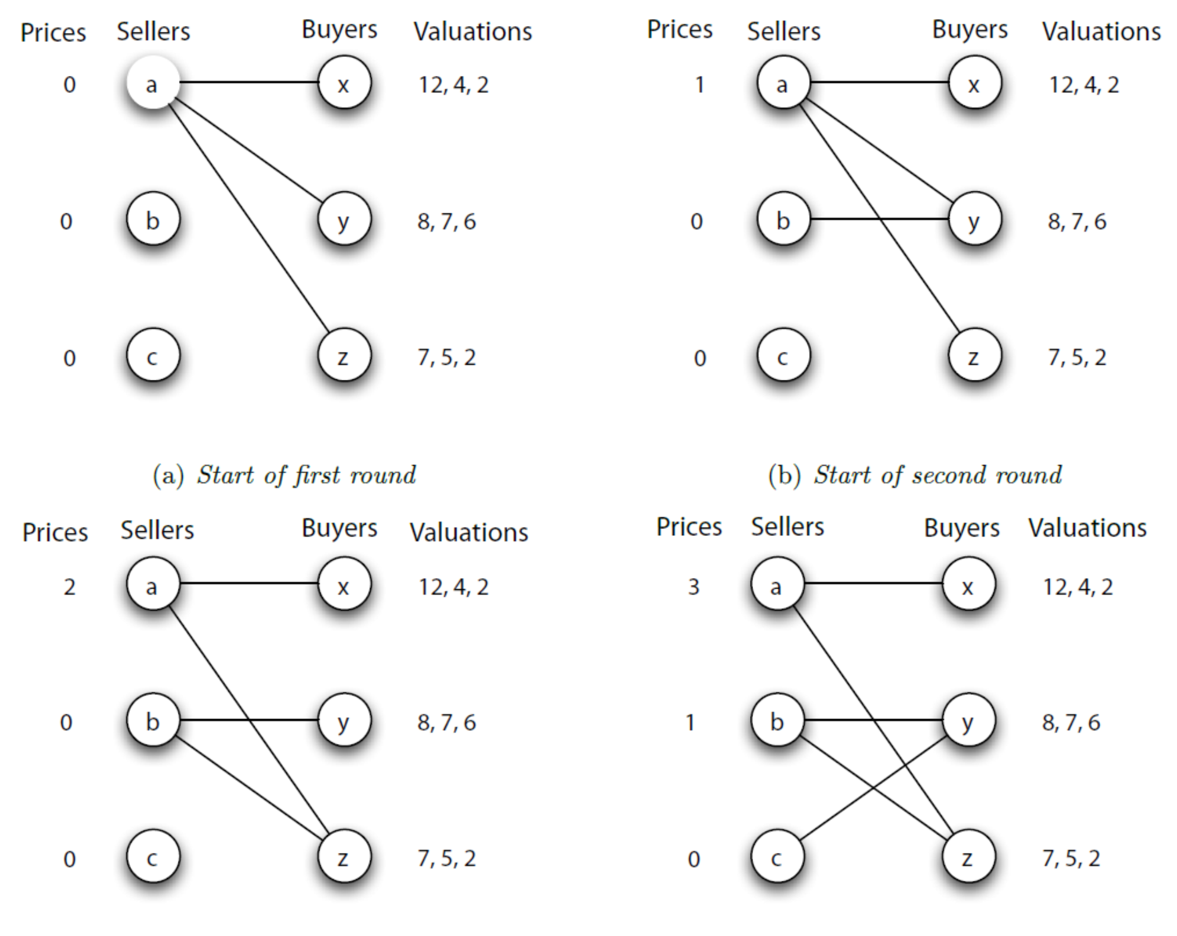


Figure 10.6: The auction procedure applied to the example from Figure 10.5. Each separate picture shows steps (i) and (ii) of successive rounds, in which the preferred-seller graph for that round is constructed.

10.4构造一组清仓价格

整个过程如下：每个图分别表示相继轮次的第(1）和第（2)步，其中构成了该轮次的偏好卖家圈。在第一轮，所有价格从0开始，所有买家形成受限集合S，而N(S）只包含卖家a。于是a将其价格提高一个单位，拍卖进入第二轮。



(a) *Start of first round*

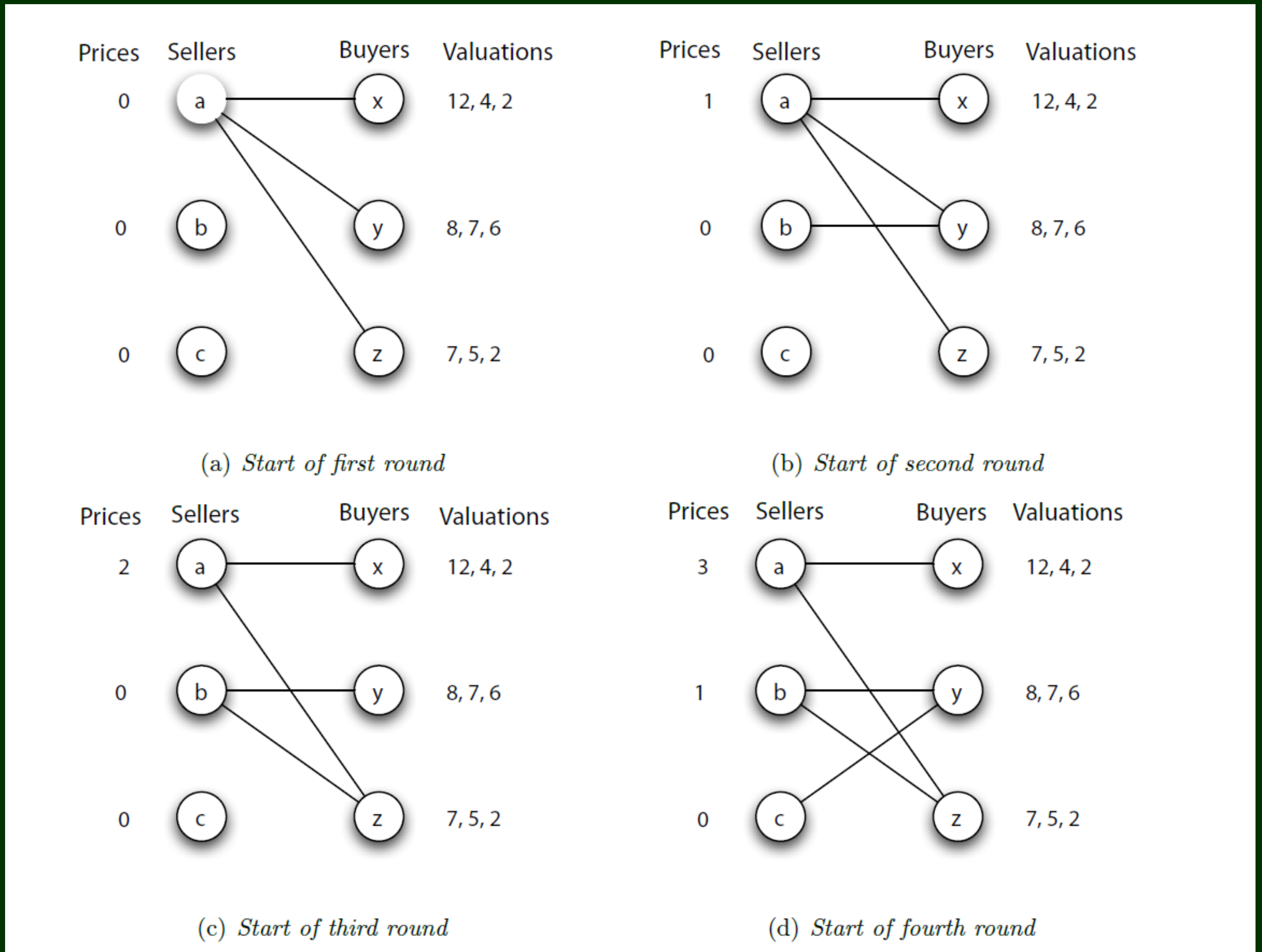
(b) *Start of second round*

(c) *Start of third round*

(d) *Start of fourth round*

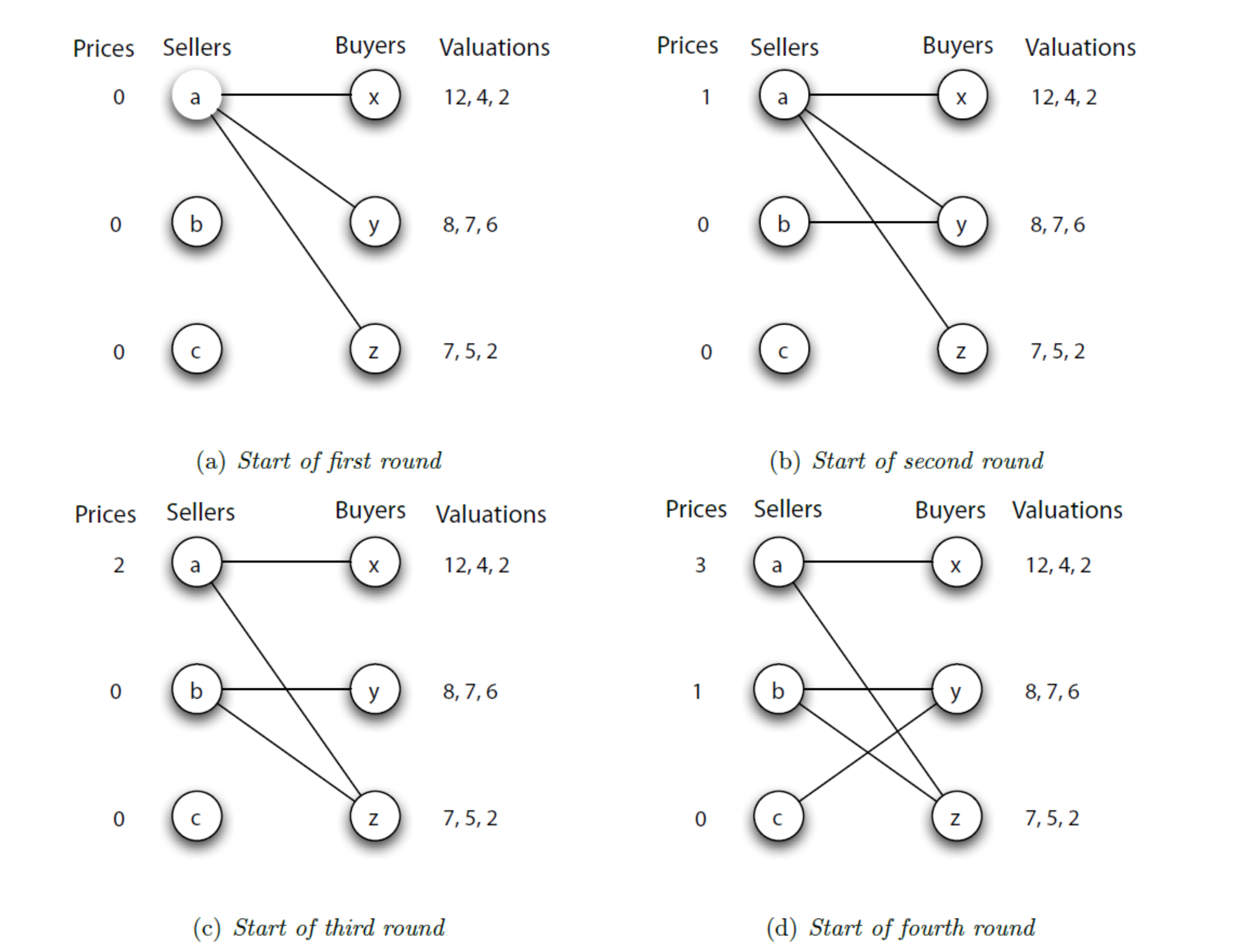
10.4构造一组清仓价格

在第二轮，买家x和z形成受限集，N（S）还是只包含卖家a，他再次将其价格提高一个单位，拍卖进入第三轮。



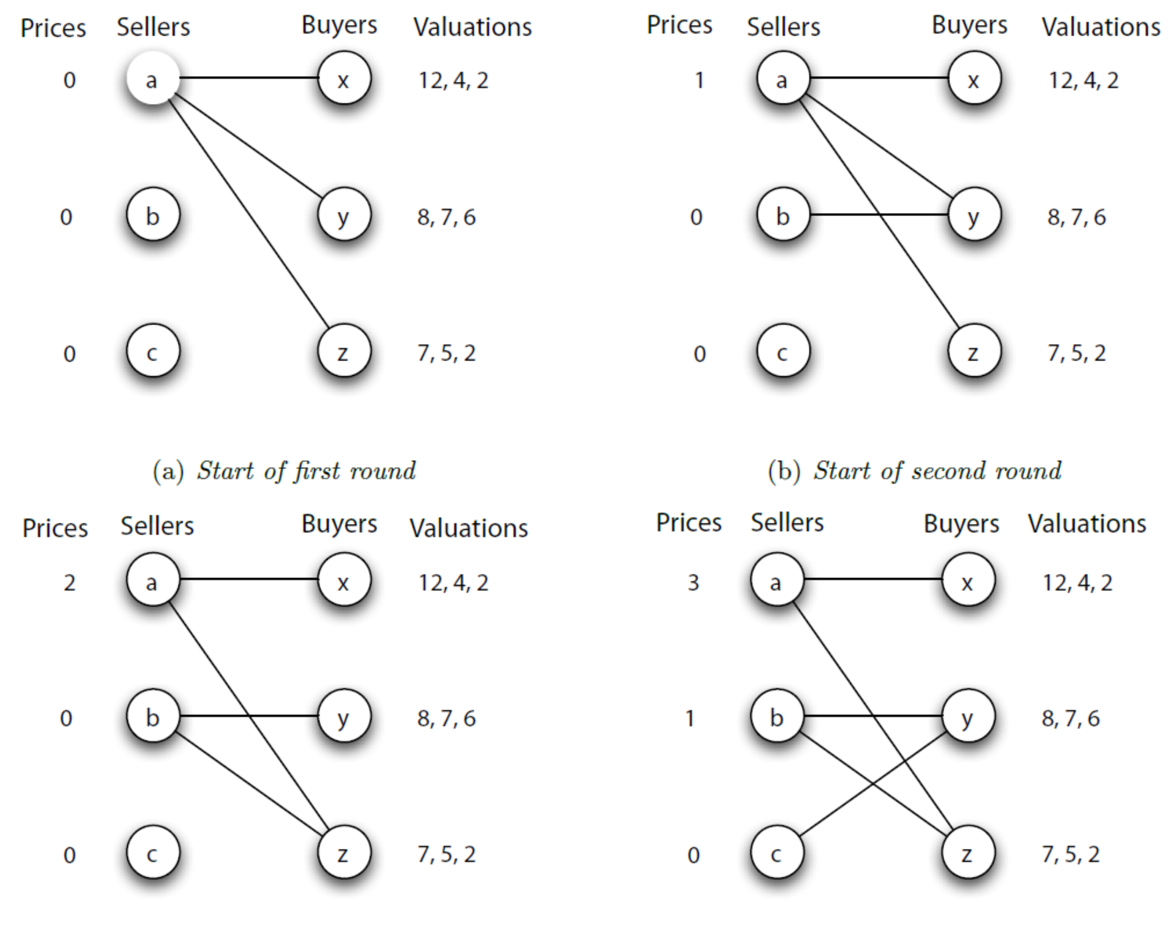
10.4构造一组清仓价格

第三轮，我们可能识别出不同的受限集，S还是所有买家，但N(S）包含a和b。这没意味着在一轮中可有多种做法来运行拍卖过程，不管是哪一种，当拍卖结束的时候，都会导致市场清仓价格。



10.4构造一组清仓价格

在第三轮，所有买家形成受限集，N（S）包含卖家a和b。此时a和b同时分别将他们的价格提高一个单位，拍卖进入第四轮。在第四轮，我们建立偏好卖家图，发现它包含一个完美匹配，因而当前价格是市场清仓价，拍卖结束。



(a) *Start of first round*

(b) *Start of second round*

(c) *Start of third round*

(d) *Start of fourth round*

10.4构造一组清仓价格

说明拍卖一定会结束

我们定义的拍卖过程有一个关键性质：只有达成了清仓价格它才能结束，否则会一直继续。因此，如果能证明，对于买家的任何估值，拍卖过程都一定会结束，也就是说不可能没完没了，则就证明了清仓价格总是存在的。

然而，这种拍卖一定会结束并不是显而易见的。例如，考虑图10.6中的拍卖活动序列：价格改变，在不同的时间点上形成不同的受限集合，拍卖最终停在了一组市场清仓价格上。这会是一般情况吗？为什么不可能存在一组估值，使得价格来回变化，总有一些买家受限，从而拍卖结束不了呢？

事实上，这里的价格不可能没完没了地变，拍卖一定会结束。为证明这一点，我们将看到有某种“势能”支撑着这种拍卖活动，随着过程的进行而逐渐消耗；拍卖总是从一定量的初始势能开始，直到耗尽。

10.4构造一组清仓价格

这种势能概念的精确定义如下。对于任何当前价格集合，定义一个买家的势能(potential of a buyer）是她当前可能获得的最大回报。也就是她通过实现购买可能得到的潜在回报，如果当前价格是市场清仓价格，她就可以得到这个回报。也定义一个卖家的势能(potential of a seller）为他当前给出的价格。也就是他通过实现出售可能得到的潜在回报，如果当前价格是市场清仓价格，他就可以得到这个回报。最后定义拍卖的势能为所有参与者的势能之和，包括买家与卖家。在拍卖过程中这种势能是如何变化的？开始，所有卖家的势能为0，每个买家的势能等于其最大估值，于是拍卖的势能就是某个整数$P_0 \geqslant 0$。同样，在拍卖每一轮开始的时候，每个人的势能至少为0。卖家是因为他们的价格至少为0。由于在每轮的价格约减后，最低的价格总是0，因而买家的回报至少要好于购买0价格的物品，即她们的势能至少为0。这也意味着在每轮开始的时候，每个买家都至少有一个偏好卖家。最后，由于买家和卖家的势能在每一轮开始的时

10.4构造一组清仓价格

现在，只有价格变化势能才能变化，且这只有在前述过程中的第（5）和（6）步才可能发生。我们注意到，前面所定义的价格约减并不改变拍卖的势能：如果从每个价格中减去p，每个卖家的势能下降p，但买家的势能提升p，相互抵消了。最后，在第（5）步，N(S）中的每个卖家将他们的价格提高一个单位，拍卖的势能会如何变化？N(S）中每个卖家的势能上升一个单位，但S中的每个买家的势能下降一个单位，相当于她们喜欢的房子都涨价了。由于S中的节点比N(S）中的多，拍卖的势能下降得比上升的多至少一个单位，于是整个势能至少下降一个单位。

这样，说明了在拍卖的每一轮，势能至少降低一个单位。也就是说，拍卖从某个势能值P_0开始，并且不可能低于0，于是它一定会在P_0轮以内结束，我们得到市场清仓价格。

10.5与单品拍卖的关系

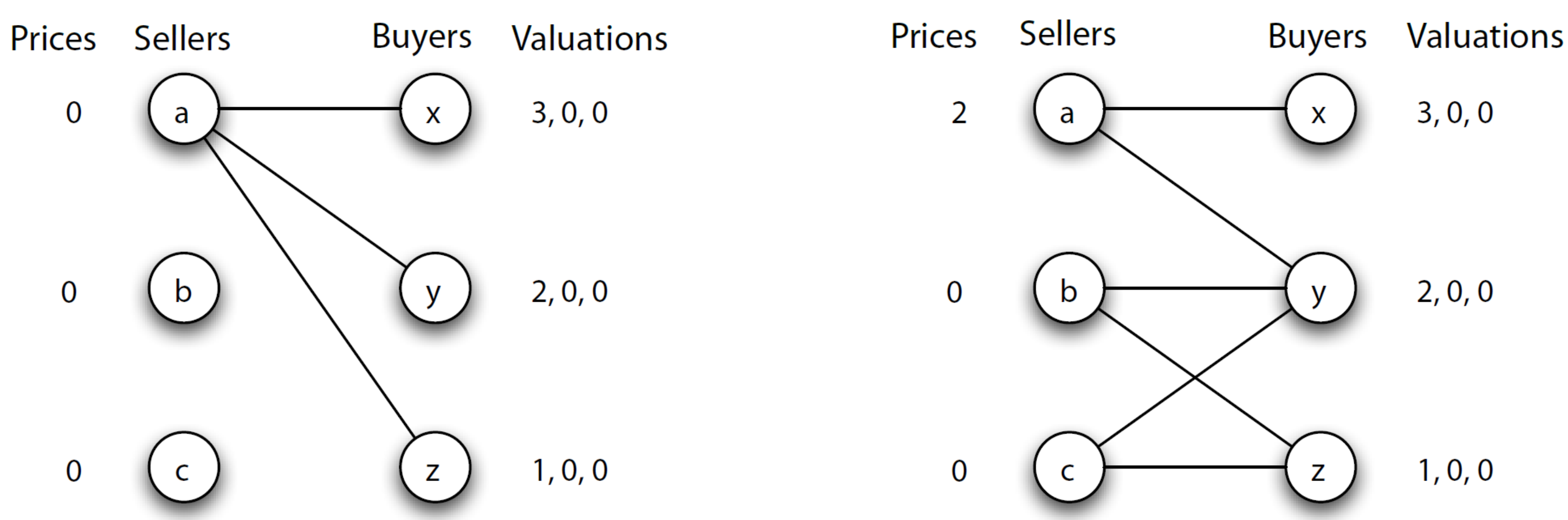
在第9章谈到过单品拍卖问题，而这里讨论的基于二部图的拍卖是一种比较复杂的情况。这两者之间有什么关系吗？事实上，我们有一种自然的方法，将单品拍卖看成是二部图拍卖的一个特例，在过程与结果上都能吻合。

设我们有n个买家，一个卖家，拍卖一件物品，买家j对于该物品的估值为叫V_j。为把这种情形映射到基于完美匹配的模型，我们需要买家与卖家的数量相等，这做起来不难：额外创建n-1个“虚构的”卖家（概念上，代表n-1种不同的使买家不能成交的方式），让每个买家对这些虚假卖家的物品估值为0。设真正卖家的标号为1，这意味着有V_{1j}-V_j，即买家j对真实物品的估值，且对所有虚构卖家i>1，V_{ij}=0。

现在我们就有了个地道的二部图模型实例：从买家与卖家的完美匹配中，可以看到哪个买家与真正的卖家匹配（买到了该物品），从市场清仓价格可以看到真实物品的出售价格。

10.5与单品拍卖的关系

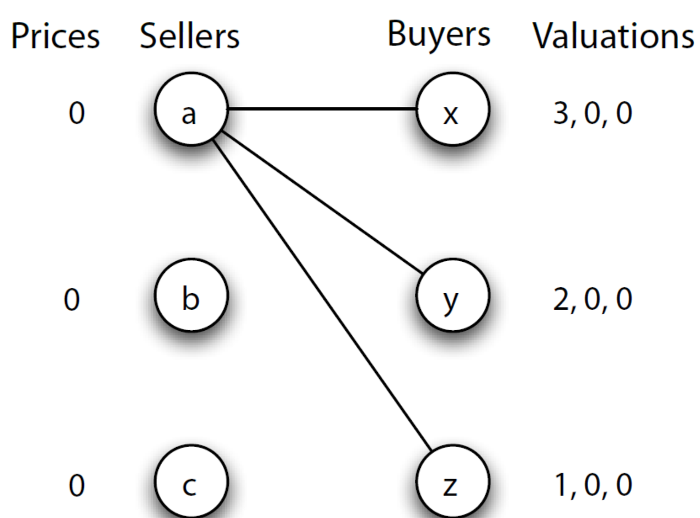
此外，为形成市场清仓价格所进行的基于受限集提升价格的过程，在此也有一个自然的含义。该过程的一个简单例子如图10.7所示。最初，所有买家认定真实卖家为她们的偏好卖家（假设她们对物品都有正的估值）。我们看到的第一个受限集合S包含所有买家，N(S）就是那个真实卖家。



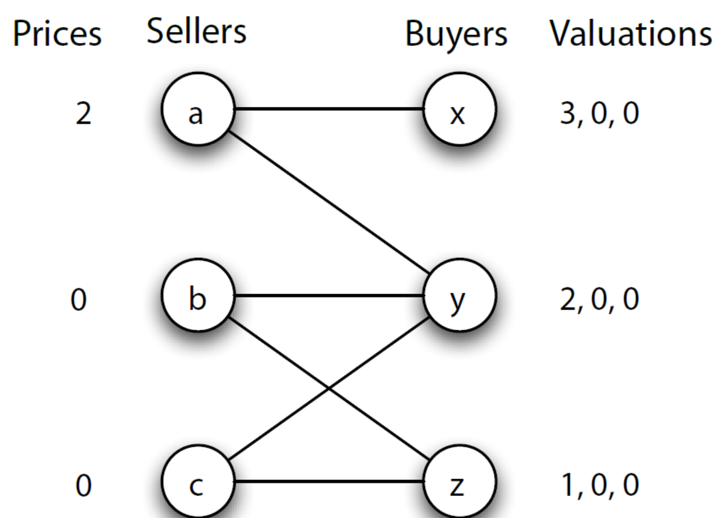
(a) *Start of the Auction*　　(b) *End of the Auction*

10.5与单品拍卖的关系

然后，该卖家将价格提高一个单位。如此继续，直到只剩两个买家还将该卖家作为偏好卖家：这两个买家形成S，而N(S）还是那个卖家。这个过程中，所有虚构卖家的价格保持0不变。真实卖家的价格继续升高，直到只有一个买家依然将其看成是偏好卖家，完美匹配形成。此时正是给出第二高估值的买家被排除的时刻。换言之，最高估值的买家得到了物品，但付出的是次高估值的价格。因此，二部图过程精确地实现了增价拍卖。



(a) *Start of the Auction*



(b) *End of the Auction*

10.6深度学习材料：匹配定理的一种证明

断言：如果一个二部图（左右两边的节点数相同）中不存在完美匹配，则它必定包含一个受限集合。

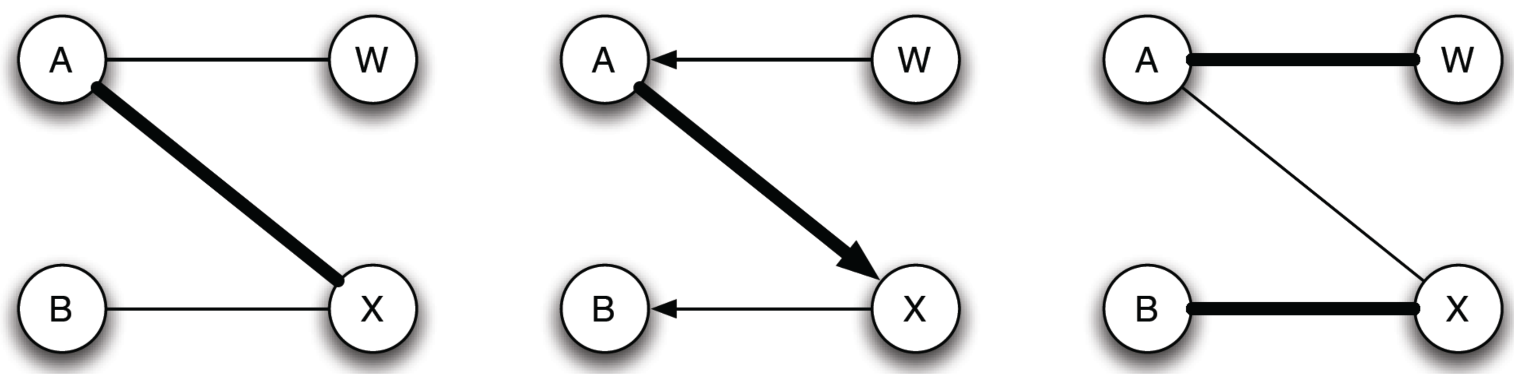
证明这一断言的难点是，要有一种方法，在已知不存在完美匹配的条件下找到一个受限集合。我们的计划如下：取一个左右两边节点数相同，但没有完美匹配的二部图。考虑其中的一个最大匹配（即所包含的节点数尽可能多〉，我们要试图将它放大，即从图的两边分别增加→个节点。这应该是不可能的（因为所提到的匹配是最大的），要说明的是，当这个努力失败的时候，它就产生了一个受限集合。

自然，这种策略中有许多细节需要处理，第一个问题是考虑如何“放大”二部图中的一个匹配。这实际上就是整个证明的关键。

10.6深度学习材料：匹配定理的一种证明

1.交替与增强通路

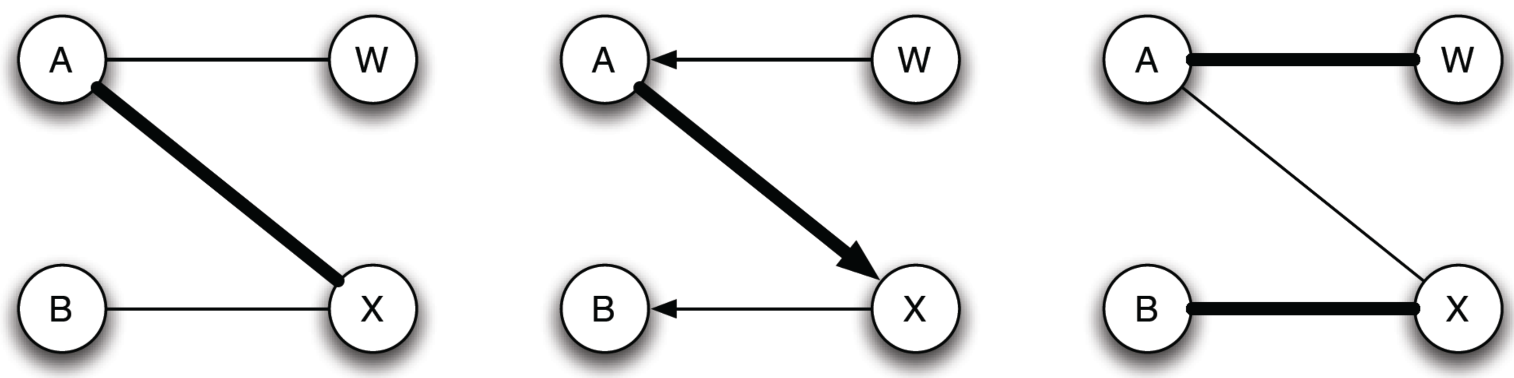
现在需要先忘掉受限集合的事情，集中考虑匹配以及如何将它们放大。作为第一个例子，考虑图**10.8(a**）中的二部图，粗体边指出一个匹配。（称在匹配中用到的边为匹配边，没用在匹配中的边为“非匹配边”）这个匹配不是一个最大匹配，因为由**W-A**和**X-B**构成的是一个更大的匹配，如图**10.8(c**）所示。



(a) *A matching that is not of maximum size* (b) *An augmenting path* (c) *A larger (perfect) matching*

10.6深度学习材料：匹配定理的一种证明

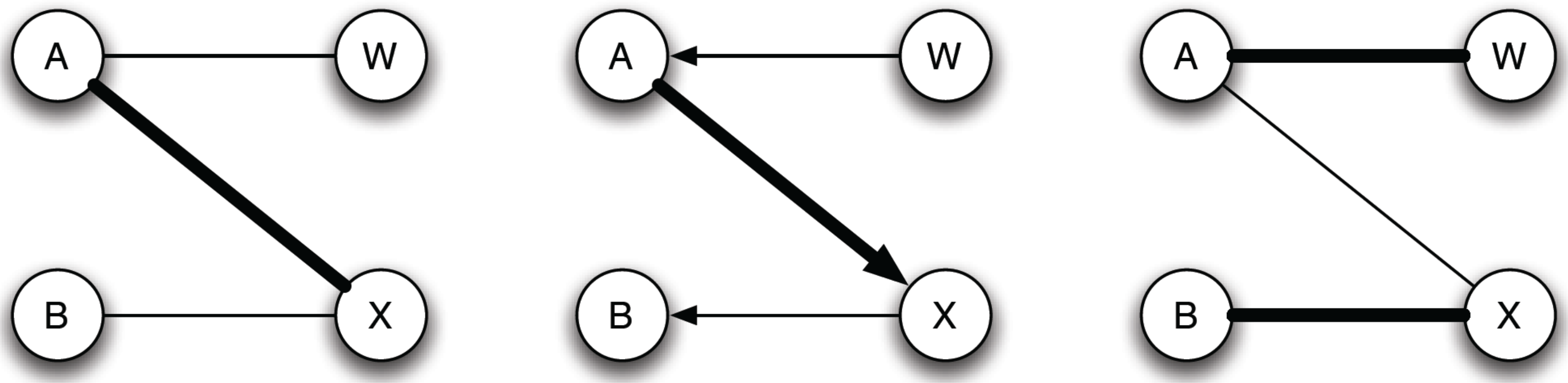
对这个例子，通过观察就可以发现更大的匹配。但对于比较复杂的二部图，则需要有一个系统的方法来做这件事。以图**10.8(a**）为例，从节点**W**开始，要找一个匹配，既包含它也包含所有已经在匹配中的节点。**W**是否能与**A**匹配？并不是很明显，因为**A**已经与**X**匹配了。于是尝试拆散**A**和**X**的匹配，让**W**和**A**匹配。这使得**X**成为自由节点，然后将其和**B**匹配。这样，匹配得到了放大。这个过程如图**10.8(b**）所示。



(a) *A matching that is not of maximum size*　(b) *An augmenting path*　(c) *A larger (perfect) matching*

10.6深度学习材料：匹配定理的一种证明

沿着二部图中的条折线通路，交替向匹配中加入非匹配边，删去当前已用边：对这个例子而言，就是加了A-W和B-X，删去了A-X。这个折线通路是简单通路的事实很重要，即没有任何节点重复。称这种在匹配与非匹配边交替的简单通路为“交替通路”。



(a) *A matching that is not of maximum size*　(b) *An augmenting path*　(c) *A larger (perfect) matching*

10.6深度学习材料：匹配定理的一种证明

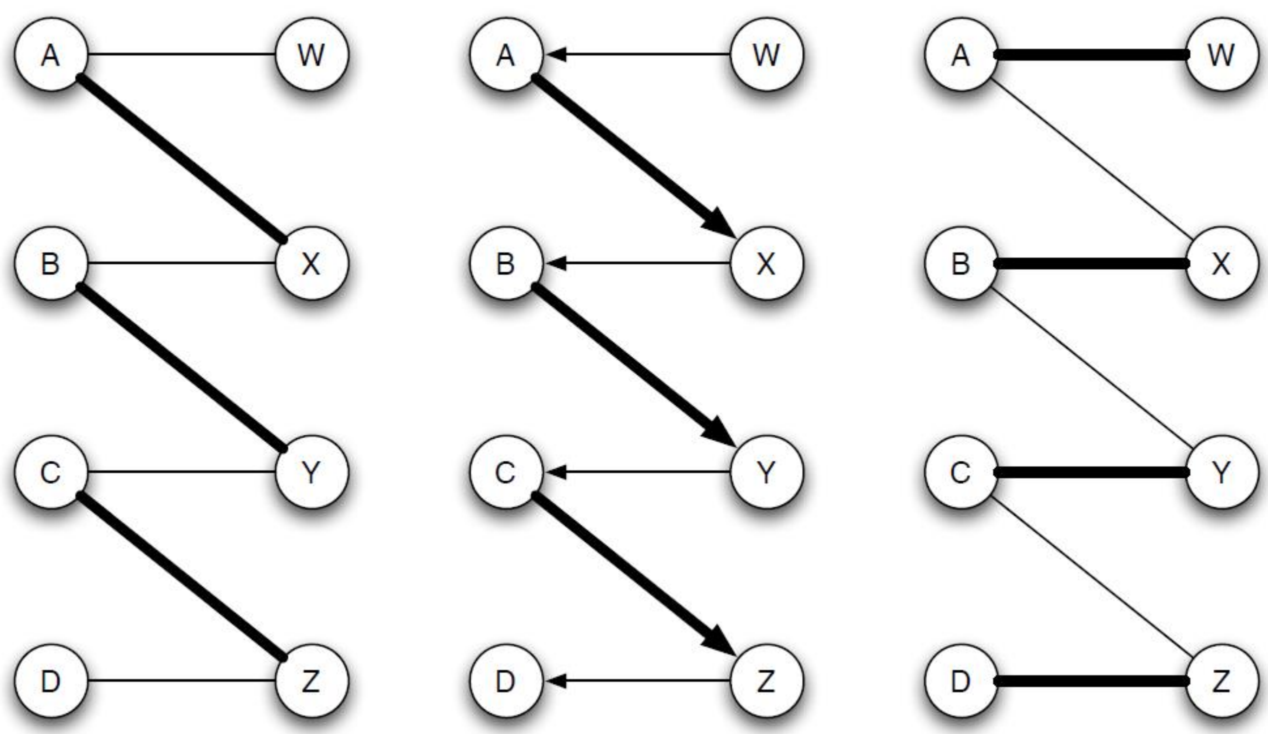
这个例子说明了一个一般情况下也成立的原理。在任何二部图中，对于一个匹配，如果能找到一个交替通路，开始与结束在非匹配的节点，那么就能交换这条通路上的边的角色：其中非匹配边形成一个新的匹配，而原来的匹配也变成非匹配边。这样，在通路上的所有节点都被匹配，不但包括以前匹配的所有节点，还有两个新节点；也就是放大了先前的匹配。总结这一段，我们有：

断言：在二部图中，对于一个匹配，如果存在一条其两个端点都是非匹配节点的交替通路，则该匹配可被放大。

看到这一点，我们称带有非匹配端点的交替通路为增强通路（**augmentingpath**，又称增强路径），因为它对应一种增强匹配的方式。

10.6深度学习材料：匹配定理的一种证明

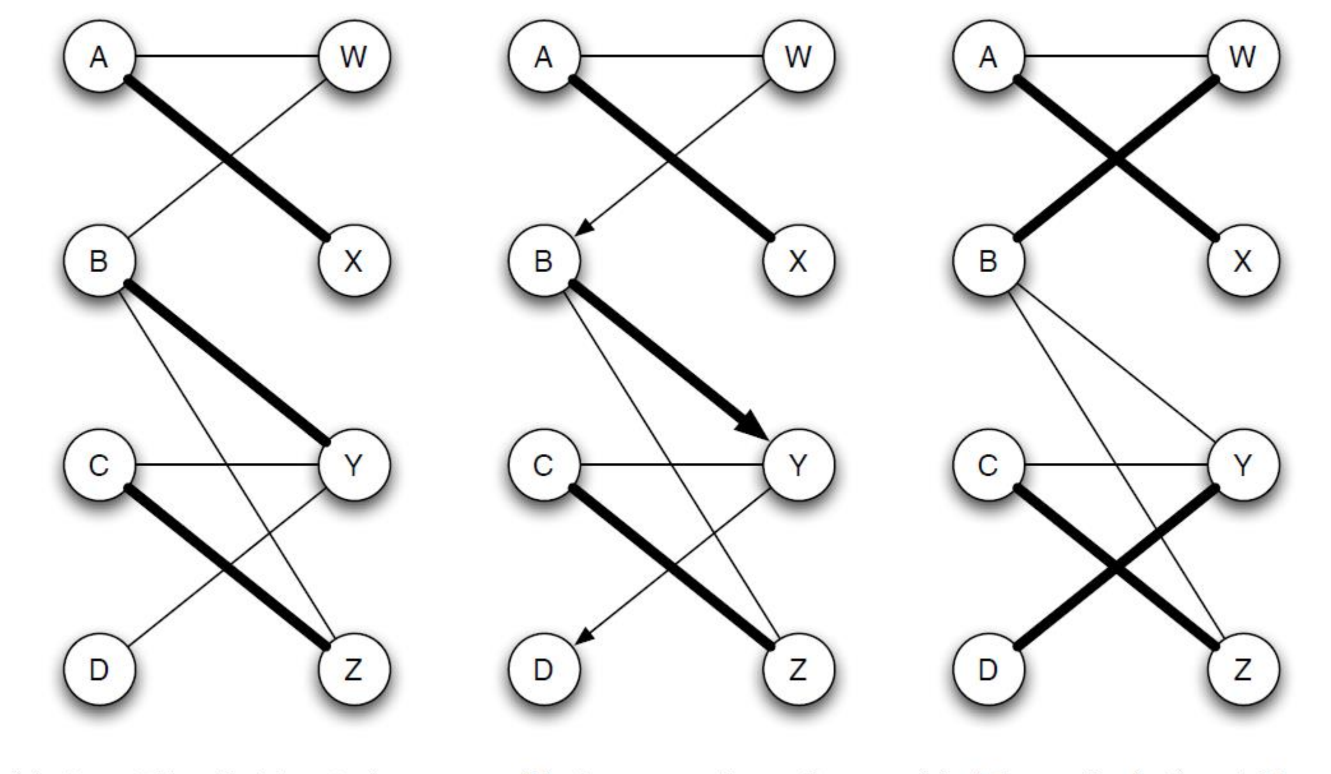
增强通路可能要比在图10.8中看到的长很多。例如，在图10.9中看到一个包含8个节点的增强通路，成功地将端点W和D包含到了匹配中。



(a) *A matching that is not of maximum size* (b) *An augmenting path* (c) *A larger (perfect) matching*

10.6深度学习材料：匹配定理的一种证明

增强通路并不容易找到。例如，考虑图**10.l0(a**）的例子，其中是一个标示了匹配的图。事实上，存在一条能成功将**W**和**D**包含到匹配中的增强通路，但即便是这样一个相对小的例子，也需要比较仔细才能找到它。此外，也有另外一些从**W**开始的交替通路，诸如**W-A-X**和**W-B-Y-C-Z**，它们都不能延伸到另一个非匹配节点**D**，还有从**W**到**D**的通路，如**W-B-Z-C-Y-D**，但不是交替的。



(a) *A matching that is not of maximum size* (b) *An augmenting path* (c) *A larger (perfect) matching*

10.6深度学习材料：匹配定理的一种证明

2. 搜索增强通路

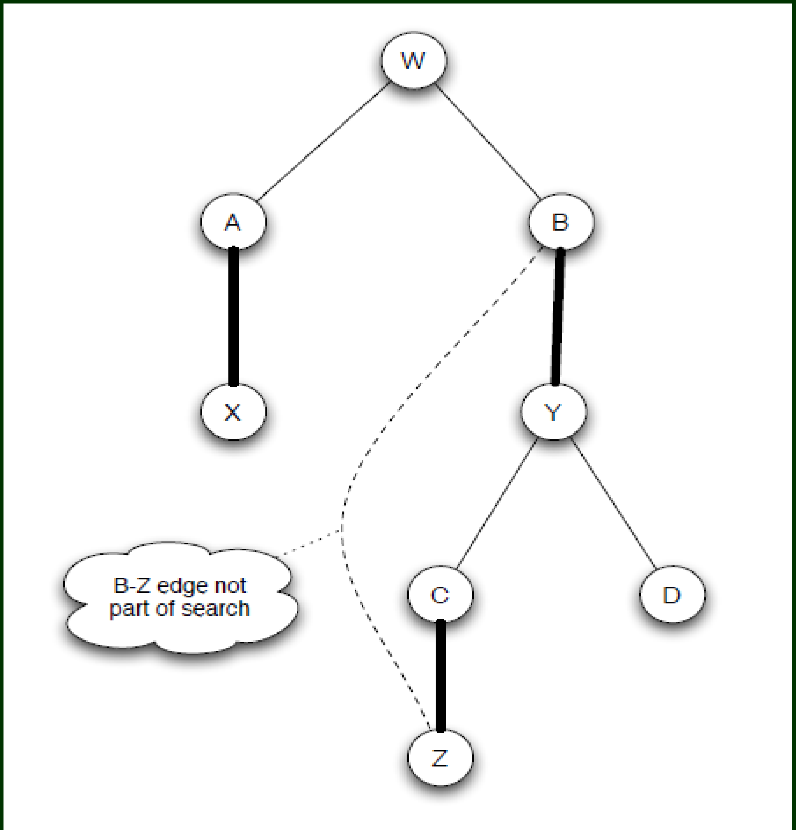
幸运的是，人们发现了个很自然的过程，可用于在指定了一个匹配的二部图中搜索一条增强通路。它是先宽搜索的一个应用，只是增加了交替的要求，称其为交替先宽搜索(alternating BFS）。

交替BFS的工作方式如下：从右边的任意一个非匹配的节点开始。然后，如同普通的先宽搜索，一层层地进展到图的其他部分，将新的节点加入到下一层，即与当前层的某节点相连但尚未考虑的那些节点。由于是二部图，这些层次所包含的节点会在图的左右两边交替。

现在来看与普通先宽搜索的不同点：由于要搜索增强通路，需要一层层向下交替的通路。这样，当用左边的节点建立新的一层时，只应该用非匹配的边，以发现新的节点；同时，当用右边的节点建立新的一层时，只应该用匹配的边来发现新的节点。

10.6深度学习材料：匹配定理的一种证明

图10.11显示了图10.10(a）的例子应用上述过程的情况。从W开始（将它看成0层），沿着非匹配边，建立第1层（包含节点A和B）。然后沿着匹配边，向右，建立第2层（包含X和Y）。再从这一层沿着非匹配边，向左，建立第3层〈含C和D）；最后，从C出发的匹配边将我们带到Z，形成第4层。注意在这个过程中，没有用B-Z边：在第1层的时候不能用它，因为当时只允许用匹配边；在第4层也不能用它，因为B已经被发现了。

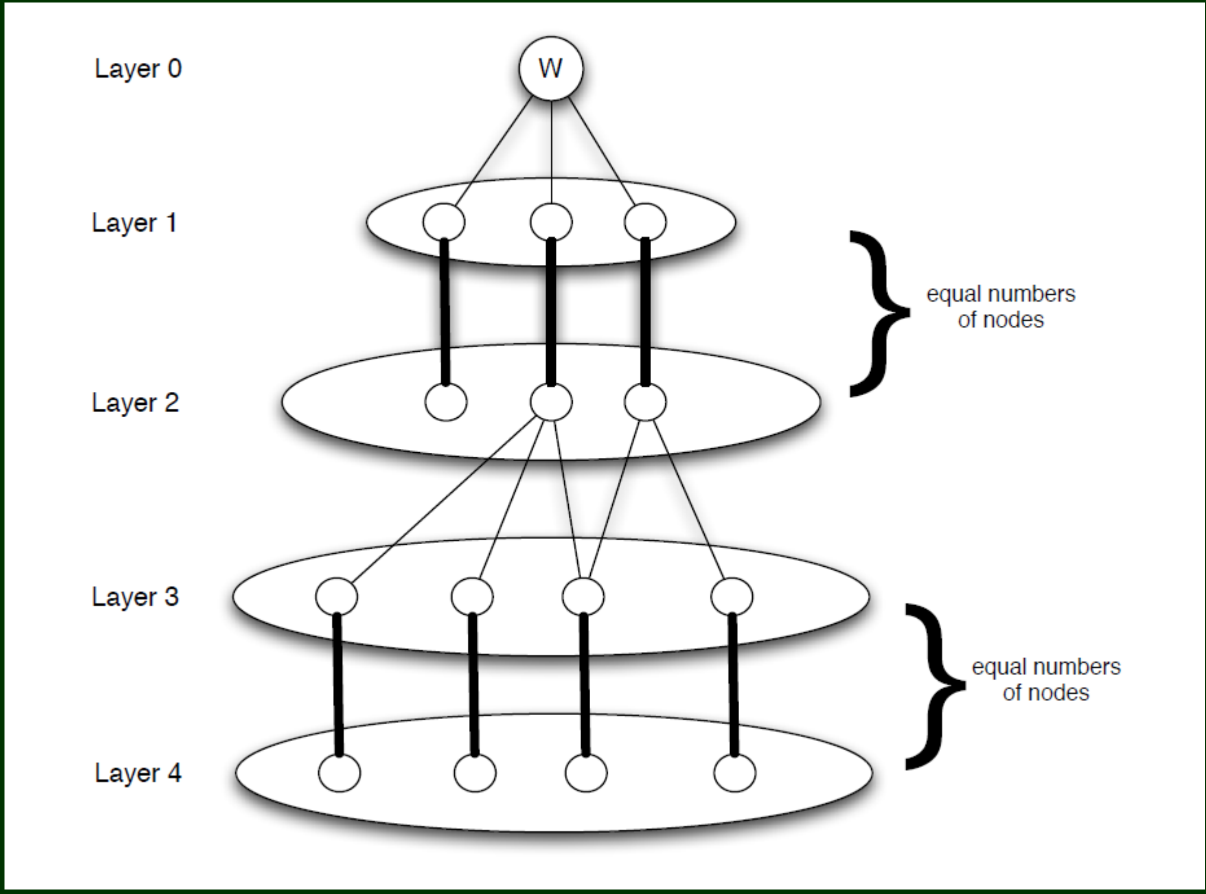


现在，关键是要看到，如果这种交替先宽搜索过程一旦产生了一个层次，其中包含一个来自图的左边的非匹配节点，我们就发现了一条增强通路（从而就扩大了匹配〉。只需要从0层的非匹配节点开始，沿着一条通路向下直到来自左边的那个非匹配节点。这条通路上的边将是在非匹配与匹配之间交替的，因此可作为一条增强通路。

10.6深度学习材料：匹配定理的一种证明

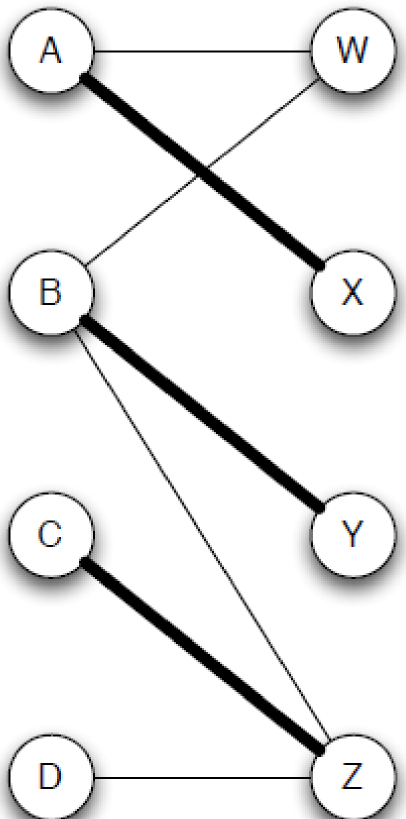
3. 增强通路与受限组

这种搜索增强通路的系统化方法留下了一个基本问题：如果这个搜索过程没能找到一个增强通路，一定就没有完美匹配吗？我们将说明，当交替先宽搜索没能找到一个增强通路的时候，可以从这个失败的搜索中提取出一个受限组，从而证明不存在完美匹配。现在来看怎么做。考虑任意二部图，假设我们正在寻找一个不完美的匹配。进一步地，设从右边一个未匹配节点W开始做交替先宽搜索，没能达到一个左边未匹配的节点。这个搜索过程的结果层次将类似于图10.12所示。

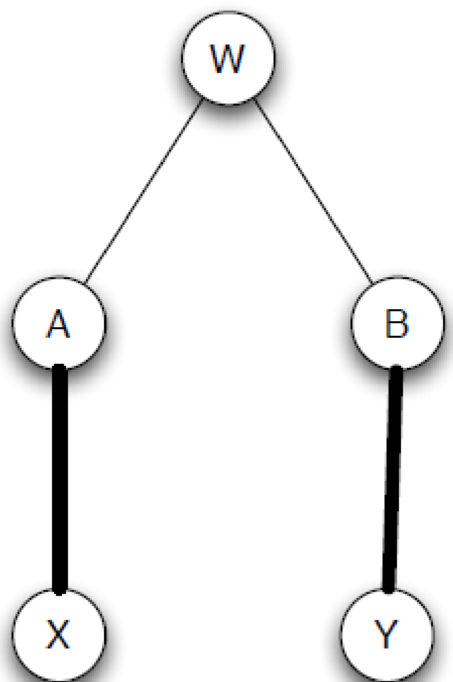


10.6深度学习材料：匹配定理的一种证明

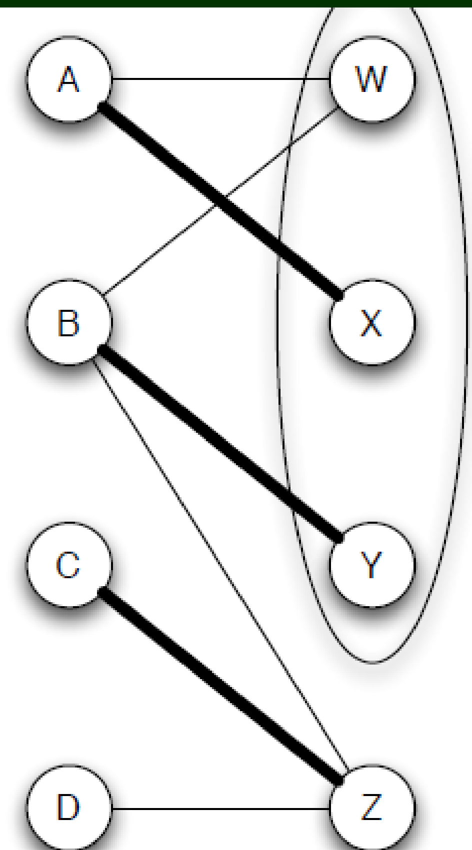
具体来说，图10.13(a）给出了一个没有完美匹配的图的例子，图10.13(b）则是在这例子上做交替先宽搜索对应的层次。



(a) *A maximum matching that is not perfect*



(b) *A failed search for an augmenting path*



(c) *The resulting constricted set*

10.6深度学习材料：匹配定理的一种证明

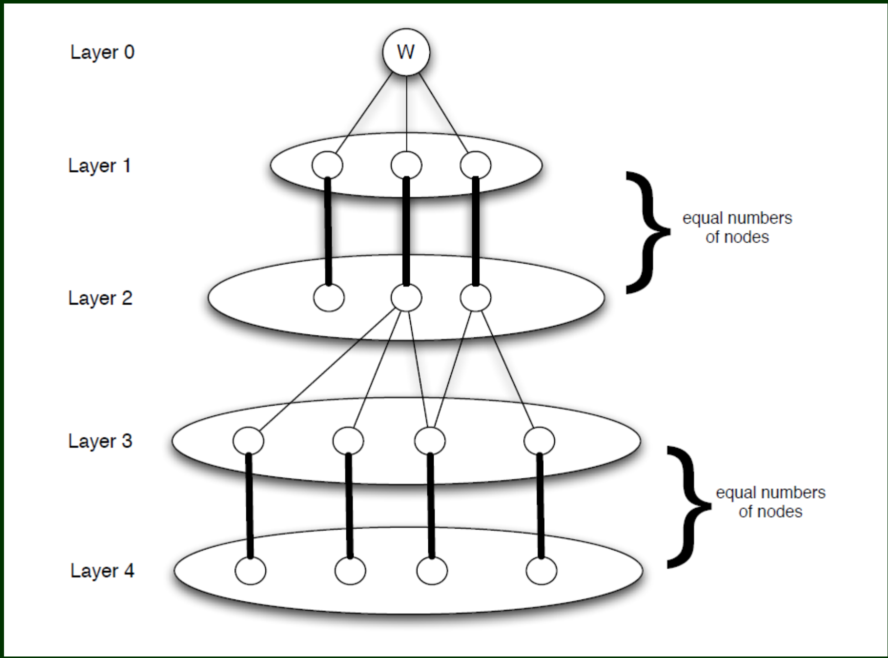
从这个失败的搜索中，可以观察到一些结构信息。

(1）首先，偶数层包含的节点来自右边，奇数层的节点来自左边。

(2）此外，奇数层中节点的个数与紧跟着的偶数层中的节点个数相等。这是因为从奇数层不会到达一个未匹配节点，因此在每一个奇数层，节点都通过它们的匹配边连到下一层的不同节点，如图10.12所示。

(3）这样，不算0层中的节点W，偶数层中的节点数与奇数层的节点数一样多。算上W的话，偶数层的节点数比奇数层恰好多一个。

(4）最后，偶数层的每一个节点的邻居都出现在图的某一个层中。这是因为除W之外的每一个偶数层节点在上一层有它的配对节点，如果它的某个邻居没有出现在高层，则会在下面的层次中被加进去，因为在该层我们允许用非匹配边来展开搜索。



10.6深度学习材料：匹配定理的一种证明

注意，对于奇数层的每个节点而言，它们的邻居节点不一定出现在某层中。例如，图10.13(b）中，节点B的邻居Z就没出现在任何层。这是因为按照交替先宽搜索的规则，从B出发仅允许用匹配边，从而没能加进Z。

将这些观察综合起来，发现如下事实：在一个失败的交替先宽搜索结束之际，所有偶数层中的节点集合形成一个受限集合。这就是因为右边的节点集合S要比它左边的邻居集合严格大一点。图10.13(b）和图10.13(c）给出了一个例子的细节。

这就完成了我们的计划：从失败的交替先宽搜索中提取出一个受限集合。总结如下。

断言：考虑任何指明了一个匹配的二部图，设W是右边的任何未匹配节点。如果不存在一个从W开始的增强通路，则存在一个包含W的受限组。

10.6深度学习材料：匹配定理的一种证明

4. 匹配定理

刚才发现的事实是证明匹配定理的关键一步。有了它，剩下的就容易了。考虑左右两边节点数相等的二部图，假设它没有完美匹配。取一个最大的匹配，即包含的边尽可能多。由于这个匹配不是完美匹配，且由于二部图的两边节点数一样多，那么在右边一定存在一个未匹配的节点W。我们知道，此时不可能有一个包含W的增强通路，否则该匹配就可以被扩大，与它是最大匹配的前提矛盾。现在，按照前面得到的结论，既然没有从W开始的增强通路，就一定有一个包含W的受限节点集合。这样，就推断出了在没有完美匹配的二部图中受限集合的存在性，从而完成了匹配定理的证明。

10.6深度学习材料：匹配定理的一种证明

5. 完美匹配的计算

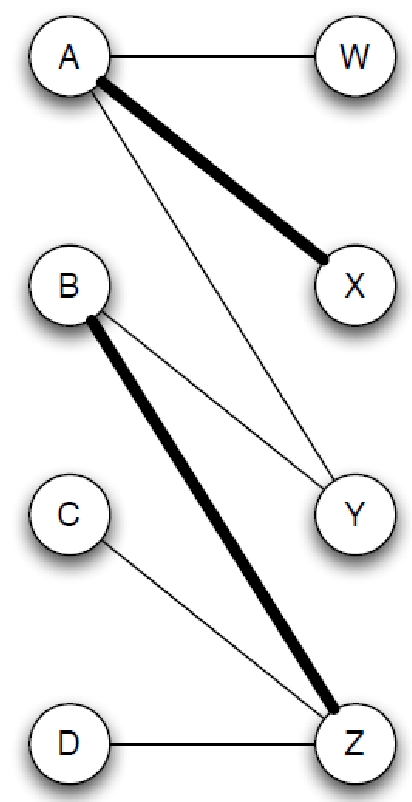
上述分析的一个副产品是我们实际上得到了一个高效确定一个图是否存在完美匹配，且如果存在就得到一个完美匹配，如果不存在就得到一个受限集合的方法。该方法如下：

给定左右两边节点相等的二部图，运行一个匹配操作序列，其中每个匹配比前一个匹配多一条边。从空匹配开始，即其中没有节点情况。下面是一般的过程：观察当前的匹配，并在图中找到一个未匹配的节点W。利用交替先宽搜索从W开始搜索一条增强通路。若成功，就从结果增强通路中得到一个扩大的匹配，将它看成是当前匹配，继续这个过程。如果失败，过程就结束，并得到一个受限集合，也就证明了该图没有完美匹配。

此过程得到的匹配一个比一个大，其中匹配的个数不会多于二部图每一边的节点数。因此过程结束的时候，要么达到一个完美匹配，要么得到一个受限集合。

10.6深度学习材料：匹配定理的一种证明

一个有趣的问题是，当这个过程以一个受限集合结束的时候，也得到了一个最大匹配吗？答案是否定的。考虑如图10.14所示的例子，若试图从W开始找到一条增强通路，结果将是失败（得到由W和X构成的受限集合）。这对于证明不存在完美匹配是足够了。然而，它不意味着当前匹配是一个最大匹配：如果从Y开始来寻找增强通路，就会成功，产生路径Y-B-Z-Do换言之，若要找最大匹配，而不仅是完美匹配，从哪里开始进行搜索增强通路是有讲究的，二部图中某些部分可能“楔死了”，而另外的部分还可能有扩大匹配的潜力。



10.6深度学习材料：匹配定理的一种证明

不过，上述过程的变体形式可以保证产生一个最大匹配。这里不讨论所有细节，但基本思想不难。如果从右边的任何节点开始都找不到增强通路，那么当前匹配就是一个最大匹配。这说明，如果我们在不断寻找更大匹配的过程中，总是一一尝试右边的每一个节点，那么，要么其中一个成功了，要么当前的匹配就是一个最大匹配。这听起来很麻烦，要考虑到右边的每一个节点，但事实上可以做得相当高效，即在交替先宽搜索开始的时候让右边所有未匹配节点都在0层，其他照常。如果在某层达到了左边的一个未匹配节点，就可以沿着到达它的通路上溯到0层，从而产生一个增强通路。

人们做了许多工作，试图提高在二部图中寻找最大匹配的效率。可能的改进包括交替先宽搜索的不同版本，例如同时寻找多个增强路径，从而减少中间匹配的数量。但一般而言，人们还不知道寻找最大匹配的最高效率如何，这依然是个未决的研究问题。