现代管理科学方法
（第5讲）

郭仁拥 博士/教授/博导

讲授内容

1. 车辆路径问题的背景与描述
2. 车辆路径问题的刻画与分类
3. 节点路径问题的描述与分类

1. 车辆路径问题的背景与描述

- **车辆路径问题（Vehicle Routing Problems, VRP）**关注货物投递（送件或取件）活动的管理，属于运输与物流科学领域
- **运营决策：**满足一定的运营需求前提，如何有效安排车辆运行路径，以达到预定目标
- **车辆路径：**定义了车辆的运行路线和调度安排

- 车辆路径问题包括：
  - 静态问题：服务需求是固定的和已知的
  - 动态问题：当车辆已经开始他们的服务时，全部或部分服务需求才已知（车辆路径可能被实时确定或改变）
- 本节介绍问题的主要假设：
  - 问题是静态的
  - 有效车辆是同质的（每个车辆提供同样服务）

VRP的特征和主要部分

- **路径网络中车辆提供的货物运输**
- **主要部分：道路网络；顾客；车辆；仓库；司机；运营约束（全局的、单个路径的）；优化目标**

道路网络：一个图 $G=(V,A)$、$G=(V,E)$ 或 $G=(V,A\cup E)$

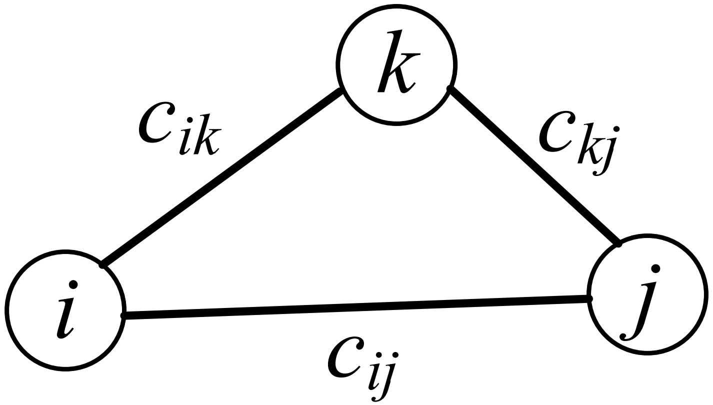
- 有向的、无向的或混合的
- 稀疏的（$|A|=O(|V|)$）、密集的（$|A|=O(|V|^2)$）
- 无向图：大规模道路网络（国家、区域）
- 有向图：小规模道路网络（城市）

道路网络：

顶点（仓库、顾客、道路交叉点）—$V=\{0,1,2,\cdots n\}$

弧（道路）—有向弧$(i,j)\in A$；无向弧$e\in E$

- 弧长度或旅行费用c_{ij}，$\forall\ (i,j)\in A$
- 弧旅行时间t_{ij}，$\forall\ (i,j)\in A$
- 三角不等式$c_{ij}\le c_{ik}+c_{kj}$，$\forall\ i,j,k$



顾客：

- 需要服务的实体
- 与顶点或弧相结合
- 服务需求⇒运送货物或原料的数量
- 特征：服务时间窗；期望服务开始时间（考虑惩罚）；（装载/卸货）服务时间；车辆通用性；是否可以分批服务

车辆：

- 车队数量规模（固定或可变）
- 公司或外包车队（固定车辆费用）
- 涉及仓库（一个、多个、可变化数量）
- 车辆运送能力（允许最大装载、重量、体积）
- 货物兼容性（易腐货物、危险原料）
- 与街道的兼容
- 装载/卸货过程
- 运输费用（与里程、时间、燃料、历程、装载有关）

司机：

- 雇员或车主
- 协会（工会）和合同条款
- 工作周期、轮班和休息
- 是否可以加班

仓库：

- 一个或多个
- 可用车辆的数量和类型
- 设置优先服务顾客⇒可分解问题

运营约束：相关运输类型、 服务质量、司机工作合同

- 分为两类：局部约束（单个路径）；全局约束（整体路径集）
- **局部约束**：车辆运输能力；最大允许路径距离/持续时间；时间约束（到达、离开、时间窗）；服务类型（接载/pickup、投递/delivery、两者都有）；顾客服务位次—接载/投递、干线运输/回程
- **全局约束**：最大车辆数量；最大路径数量（针对车辆或仓库）；工作量平衡；工作周期和轮班（路径间最小时间）

目标：

- 最小化全局运输费用+司机和车辆固定费用
- 最小化车辆或司机数量
- 路径平衡
- 最小化无服务（或部分服务）乘客的惩罚

⇒多个相互冲突的目标

其他性质：

- 服务分担到多天
- 一天内车辆走过更多路径
- 一个顾客有更多需求
- 部分或全部需求不是提前已知的（动态实时问题）
- 随机的或时间相关的弧费用或旅行时间

2. 车辆路径问题的刻画与分类

问题刻画：

考虑一个图 $G=(V,A\bigcup E)$，满足给定运营约束，确定一个具有 M 个闭环路径的集合，服务集合 $U\subseteq V$ 中顶点和集合 $R\subseteq A\bigcup E$ 中边，使得费用最小

一个路径的费用=该路径上所有边的费用的和

应用：货物收集和投递；废物收集；街道清洁；校车路线；拨号叫车服务系统；残障人员运输；销售人员路线

两类问题：

节点路径问题（Node Routing Problem, NRP）

- 顾客/需求集中在顶点位置（集合$U \neq \varnothing$， $R = \varnothing$）
- 常常称作VRP或车辆调度问题（Vehicle Scheduling Problem）

弧路径问题（Arc Routing Problem, ARP）

- 顾客/需求均匀分布在边上（集合$R \neq \varnothing$， $U = \varnothing$）

无运营约束问题

- NRP退化为旅行商问题（Traveling Salesman Problem, TSP）
- ARP退化为中国乡村邮差问题（Rural Chinese Postman Problem, RCPP）
- 满足 $R = A$ 的ARP退化为中国邮差问题（Chinese Postman Problem, CPP）

3. 节点路径问题的描述与分类

- 关注货物的分配/聚集
- 主要部分：车辆、仓库、司机、道路网络
- 问题解：一组车队走过的一个路径集，要求：

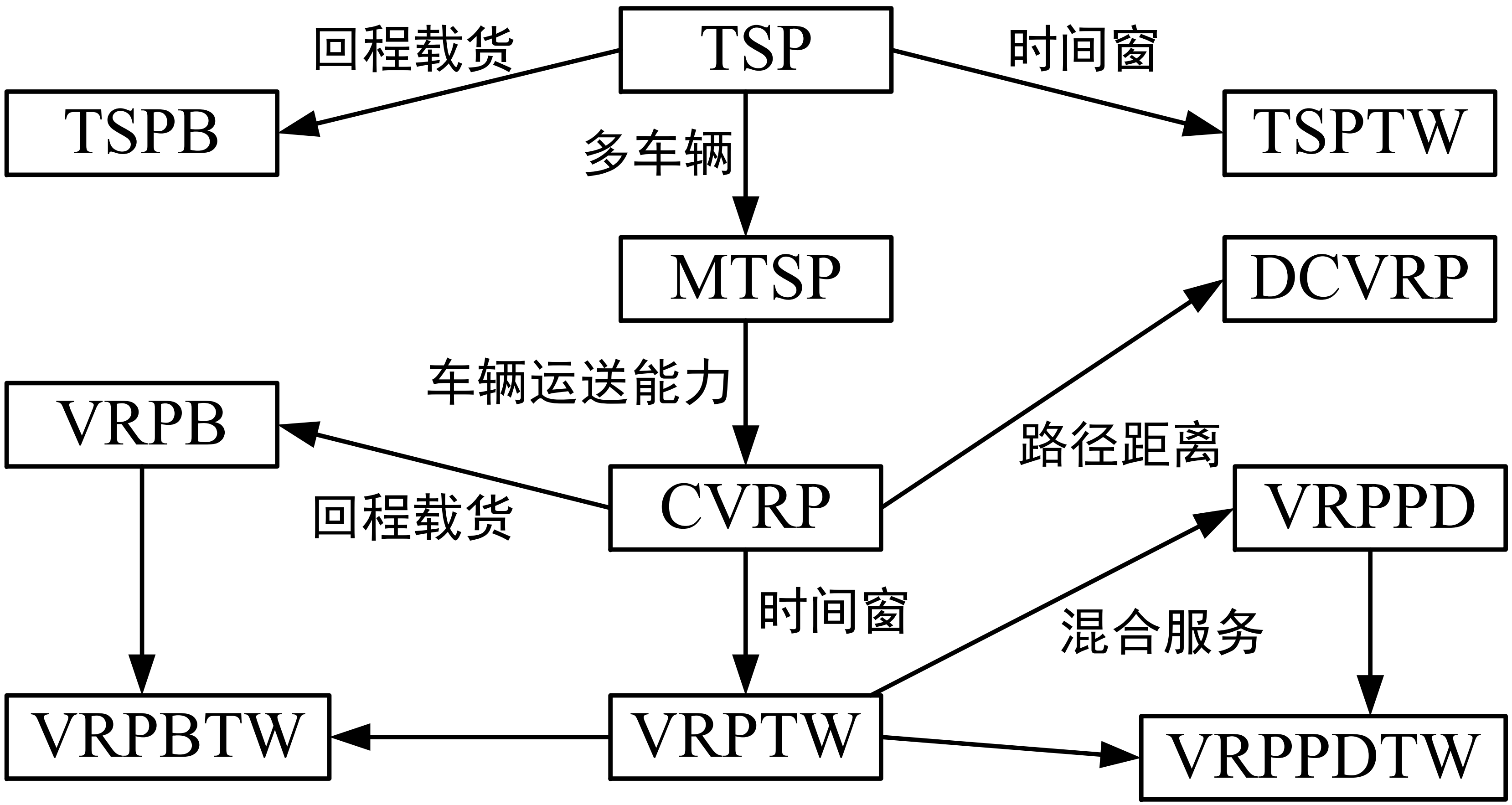
① 每个路径以车辆仓库为起点和终点

② 顾客的需求被满足

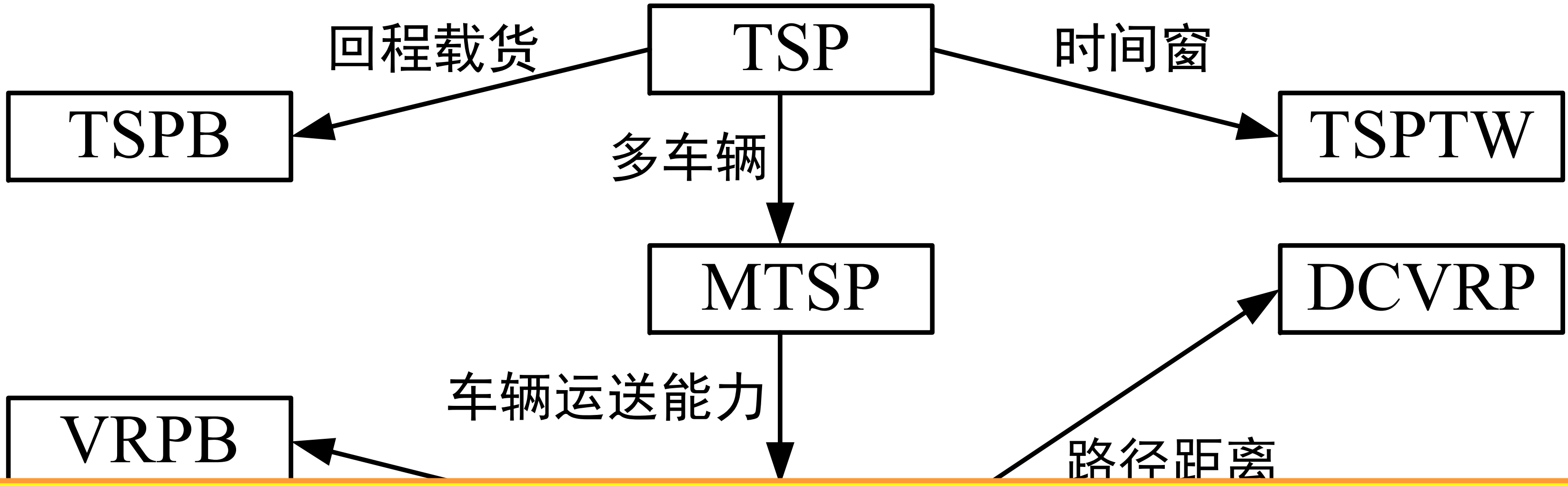
③ 运行约束被满足

④ 最小化全局运输费用

多类节点路径问题（NRP）间的关系



多类节点路径问题（NRP）间的关系



旅行商问题（Traveling Salesman Problem, TSP）

考虑回程载货的旅行商问题（Traveling Salesman Problem with Backhauls, TSPB）

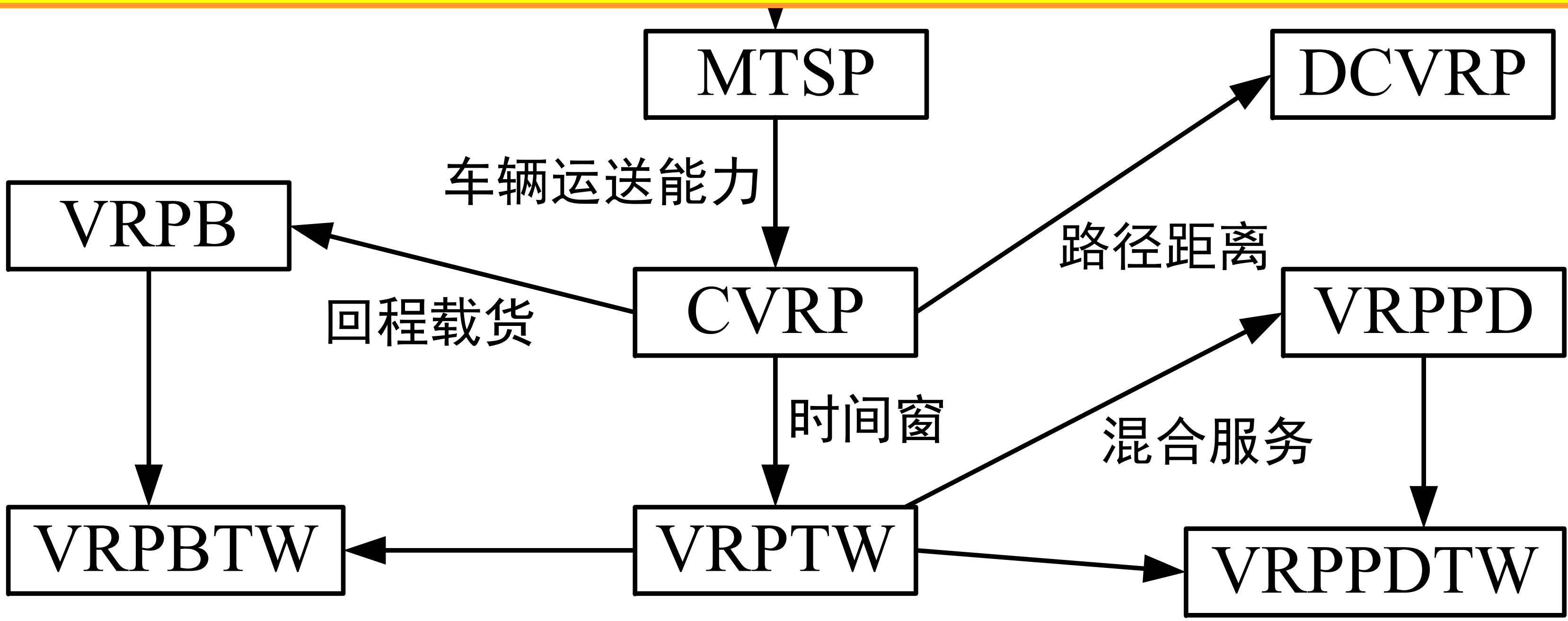
考虑时间窗的旅行商问题（Traveling Salesman Problem with Time Windows, TSPTW）

多车辆旅行商问题（Multiple Traveling Salesman Problem, MTSP）

考虑车辆运送能力的车辆路径问题（Capacitated Vehicle Routing Problem, CVRP）

考虑距离约束的车辆路径问题（Distance Constrained Vehicle Routing Problem, DCVRP）

考虑回程载货的车辆路径问题（Vehicle Routing Problem with Backhauls, VRPB）

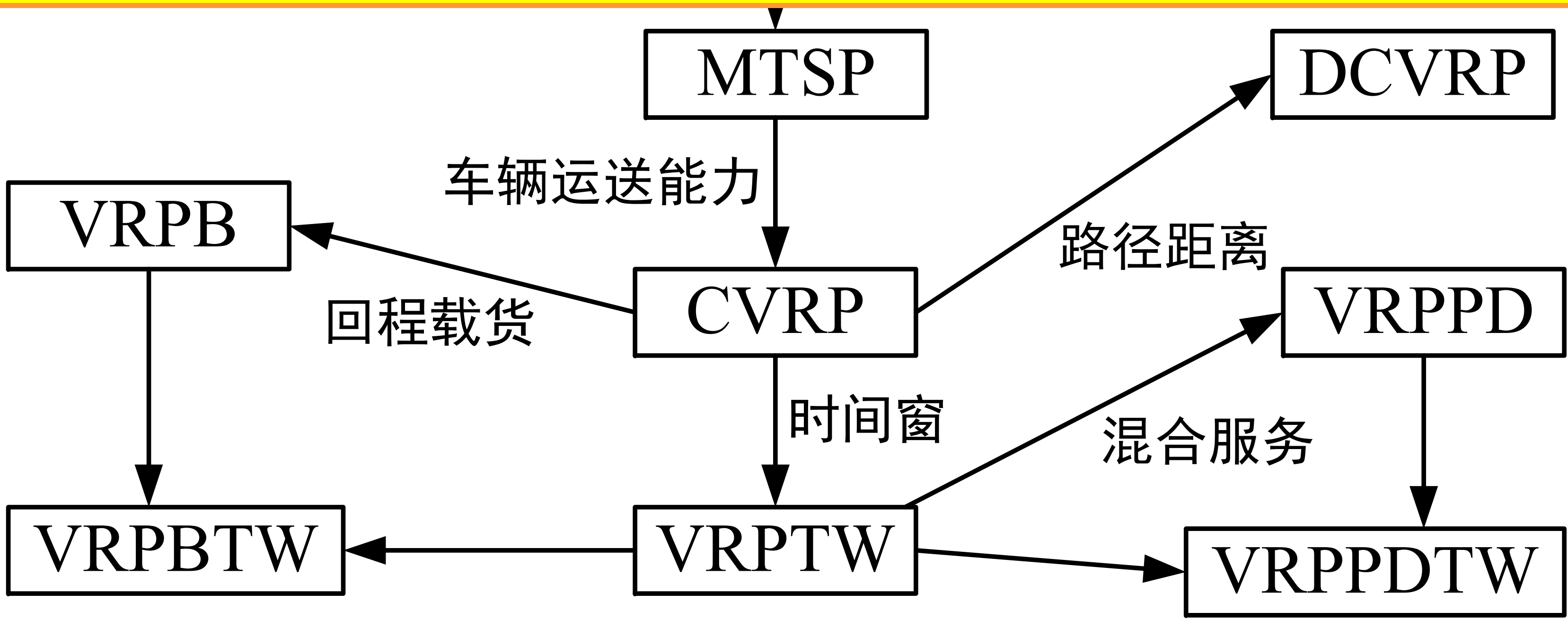


考虑时间窗的车辆路径问题（Vehicle Routing Problem with Time Windows, VRPTW）

考虑接载投递的车辆路径问题（Vehicle Routing Problem with Pickup and Delivery, VRPPD）

同时考虑回程载货和时间窗的车辆路径问题（VRPBTW）

同时考虑接载投递和时间窗的车辆路径问题（VRPPDTW）



节点路径问题的道路图：

$G=(V,A)$（强）联通的➞ $G'=(V,A')$ 完全图

顶点集 $V=\{0,1,2,\cdots n\}$， $|V|=n+1$

0—仓库；$1,2,\cdots n$—顾客的位置（城市）

$\forall\ (i,j)\in A'$， $c_{ij}\geq 0$ 是城市 i 到 j 的最小旅行费用（距离）

对于无向图 $G'=(V,E')$， 定义 $\delta(i)=\{(i,j):(i,j)\in E'\}$，$\forall\ i\in V$

对于有向图 $G'=(V,A')$， 定义 $\delta^{+}(i)=\{(i,j):(i,j)\in A'\}$ 和 $\delta^{-}(i)=\{(j,i):(j,i)\in A'\}$， $\forall\ i\in V$

$$\forall\ S\subseteq V,\quad \delta(S)=\{(i,j):(i,j)\in A',i\in S,j\notin S\}$$
$$\cup\{(i,j):(i,j)\in A',i\notin S,j\in S\}$$

三角不等式（TI）：

给定完全图$G'=(V,A')$，$\forall\ i,j,k\in V$，有$c_{ij}\le c_{ik}+c_{kj}$

欧式问题： 顶点是平面上的点，两点间费用是两点间的欧式距离（费用矩阵是对称的）

TSP（无运营约束的节点路径问题）

- 一个旅行商需要访问位于不同城市的顾客，访问结束后返回家（单个车辆）
- 道路图 $G=(V,A) \rightarrow G'=(V,A')$ 完全图
- V =顾客的城市和旅行商的家（仓库）； $|V|=n$
- $\forall\ (i,j)\in A'$， $c_{ij}\geq 0$ 是城市 i 到 j 的最小旅行费用（距离）
- 问题的解：一个具有最小费用的路径，以仓库为起点和终点，经过每个顾客

G' 中可行解：G' 中的任意Hamiltonian圈

Hamiltonian圈：一个闭合路径，经过每个顶点仅仅一次

问题的解：G' 中最小费用Hamiltonian圈

两个情形：有向图（非对称TSP，ATSP，$c_{ij} \neq c_{ji}$）和无向图（对称TSP, STSP，$c_{ij} = c_{ji}$）

计算复杂性：强NP难题

MTSP（多车辆旅行商问题）

- M 辆车
- 一个共同的仓库
- 每辆车（每个销售商）必须访问至少一个顾客
- 问题的解：M 条最小费用路径，均以仓库为起点和终点，保证每个顾客被访问恰恰一次

CVRP（考虑车辆运送能力的车辆路径问题）

K 辆相同的车；C 是车辆运送能力；一个共同的仓库

$\forall\, i \in V \setminus \{0\}$，一个需求 $d_i \geq 0$ 被定义（$d_0 = 0$），使得 $d_i \leq C$

$\forall\, S \subseteq V$，定义 $d(S) = \sum_{i \in S} d_i$

每辆车辆履行最多一条路径

$K \geq K_{\min}$，这里 $K_{\min}$ 是服务所有顾客的最小车辆数（$K_{\min}$ 可以由近似求解一个装箱问题来确定）

$\forall\, S \subseteq V \setminus \{0\}$，定义 $r(S)$ 是服务 S 中顾客的最小车辆数

$$r(S) = \lceil d(S)/C \rceil$$

问题的解：具有最小费用的一个K条路径（闭环）集合，使得（1）每个闭环均访问仓库；（2）每个顾客由恰恰一条路径访问；（3）一条路径访问的顾客需求和不超过C

问题的简单变化：

[1] 如果$K \geq K_{\min}$，一些车辆可能不被使用（发现最多K条路径；使用车辆费用固定；发现最小路径数）

[2] 不同的车辆运送能力C_k，$k=1,2,\cdots,K$

[3] 每条路径包含超过一个顾客

计算复杂性：强NP难题；CVRP推广了TSP

DCVRP（考虑距离约束的车辆路径问题）

CVRP的一个变化

- 运送能力约束替换为最大路径长度（时间）约束
- $\forall\ (i,j)\in A'$，$t_{ij}\geq 0$ 是城市 i 到 j 的旅行长度（时间）
- $T=$最大路径长度（时间）；T_k，$k=1,2,\cdots,K$ 如果车辆是不同的
- $\forall\ i\in V$，一个服务时间 s_i 可以被定义，添加到旅行时间（$t'_{ij}=t_{ij}+s_i/2+s_j/2$）
- 问题的解：最小总长度（时间）解
- DC-CVRP：距离和车辆运送能力均有约束

VRPTW（考虑时间窗的车辆路径问题）

CVRP的一个变化

- $\forall\ i \in V$，一个时间窗（TW）被定义作时间区间$[a_i, b_i]$
- $\forall\ i \in V \setminus \{0\}$，一个服务时间$s_i$被给定
- $\forall\ (i, j) \in A'$,一个旅行时间 $t_{ij} \geq 0$被给定
- 每个顾客的服务必须在他的时间窗内开始
- 如果车辆早到达，车辆需要等待到时间a_i

- 问题的解：一个K条路径（闭环）集合，具有最小费用，使得（1）每个闭环均访问仓库；（2）每个顾客由恰恰一条路径访问；（3）一条路径访问的顾客需求和不超过C；（4）对于每个顾客，服务在时间窗$[a_i, b_i]$内开始，车辆停s_i个时间单位
- 计算复杂性：强NP难题；推广了CVRP（$a_i = 0$和$b_i = \infty$）
- TSPTW是一个特殊情形（$K = 1$和$C \geq d(V)$）

VRPB（考虑回程载货的车辆路径问题）

CVRP的一个扩展

- 顾客被分为干线运输顾客（Linehaul customers, LC）和回程顾客（Backhaul customers, BC）两类
- $V = L \cup B$，$|L| = n$，$|B| = m$
- 车辆送件（deliver）给LC；从BC取件（pick up）
- 一条路径经过的LC和BC需满足先后服务位次；所有LC的服务先于任一BC的服务
- $\forall\, i \in B$，d_i 是被聚集的需求；$\forall\, i \in L$，d_i 是被投递的需求

- 一般来说，仅仅包含BC的路径不被允许
- $K \geq \max\{K_L, K_B\}$，K_θ 是服务 θ 类顾客的最小车辆数
- 问题的解：一个具有最小费用的 K 条路径（闭环）集合，使得（1）每个闭环均访问仓库；（2）每个顾客由恰恰一条路径访问；（3）一条路径访问的**LC需求和**以及**BC需求和**均不超过 C；（4）每条路径上，所有LC的服务必须先于BC的服务
- 计算复杂性：强NP难题；推广了CVRP（$B = \varnothing$）
- TSPB是一个特殊情形（$K = 1$ 和 $C \geq \max\left\{d(L), d(B)\right\}$）

VRPPD（考虑接载投递的车辆路径问题）

CVRP的一个进一步扩展

- 每个顾客结合两个量：d_i—投递货物的需求；p_i—接载货物的需求
- 假设货物是同质的
- 对于每个顾客，定义：O_i—投递需求的原点集；D_i—接载需求的终点集
- 在每个顾客位置，投递先于接载

- 问题的解：一个具有最小费用的K条路径（闭环）集合，使得（1）每个闭环均访问仓库；（2）每个顾客由恰恰一条路径访问；（3）沿着路径，车辆的当前装载是非负的，而且不超过车辆运送能力C；（4）对于任意顾客i，O_i中顾客（不同于仓库）的服务先于i；D_i中顾客（不同于仓库）的服务晚于i

- 如果需求的原点和终点是相同的（例如，仓库），它们可能不被明显考虑⇒同时接载投递的车辆路径问题（VRPSPD）
- 计算复杂性：强NP难题；推广了CVRP（$O_i = D_i = \{0\}$ 和 $p_i = 0$，$\forall\ i$）
- TSPPD是一个特殊情形（$K = 1$）