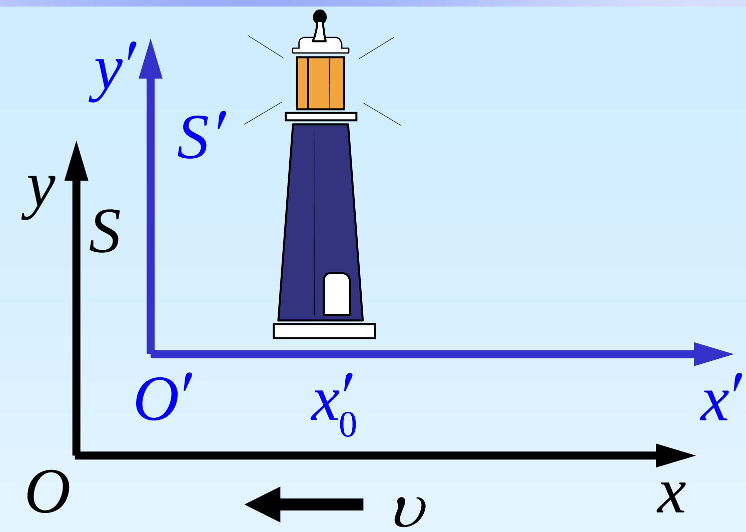
第五章 相对论

§ 5.4 相对论的时空观(续)

三. 时间的相对性



固有时τ_0：在相对观测者静止的惯性系中同一地点先后发生的两个事件之间的时间间隔。

S'系：　$x_1' = x_2'$　　$\tau_0 = t_2' - t_1'$

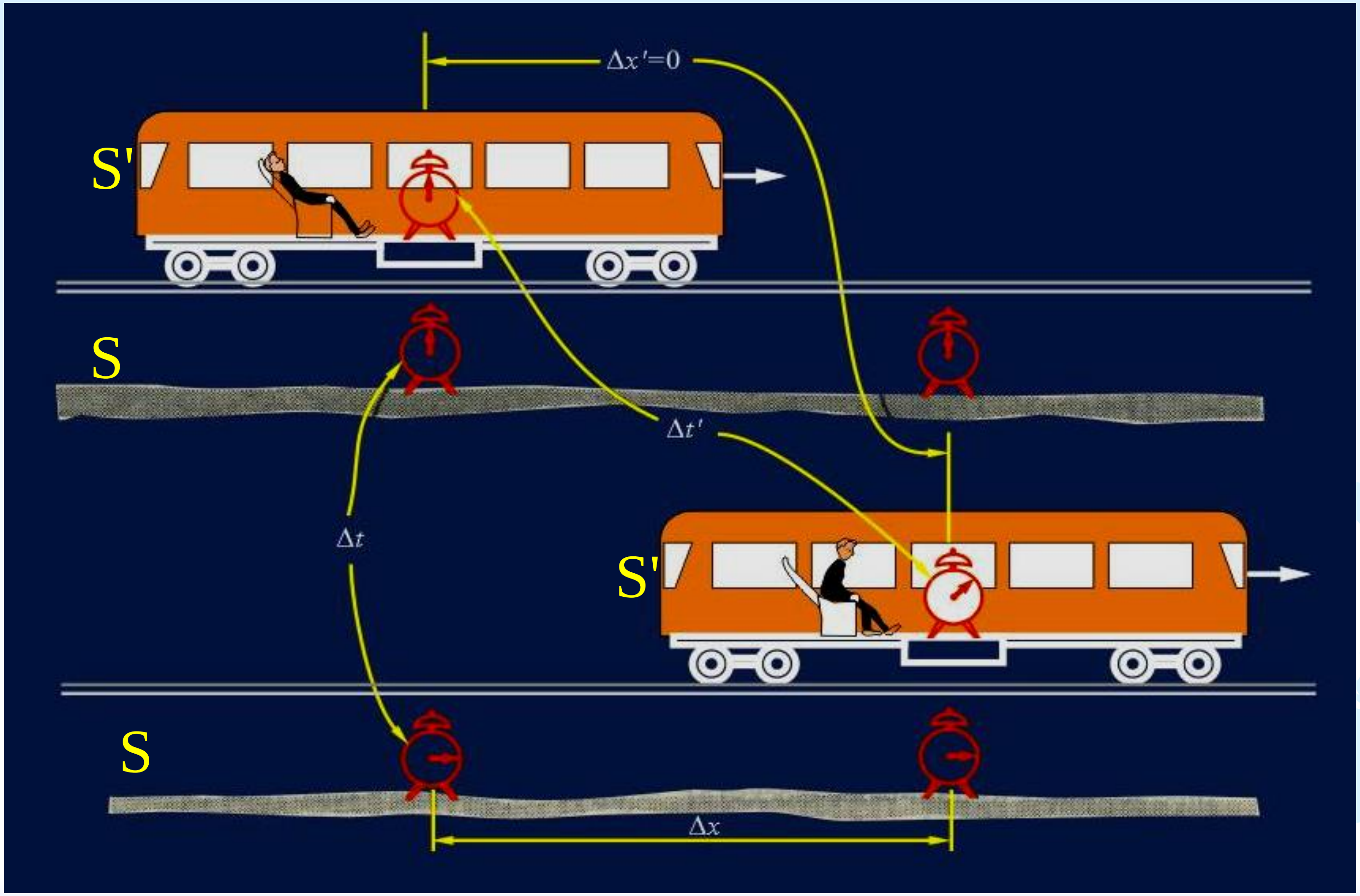
在S系观测到的时间间隔　$\tau = t_2 - t_1 = ?$

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{t_2' + \frac{\upsilon}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_1' + \frac{\upsilon}{c^2}x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{\upsilon}{c}$$

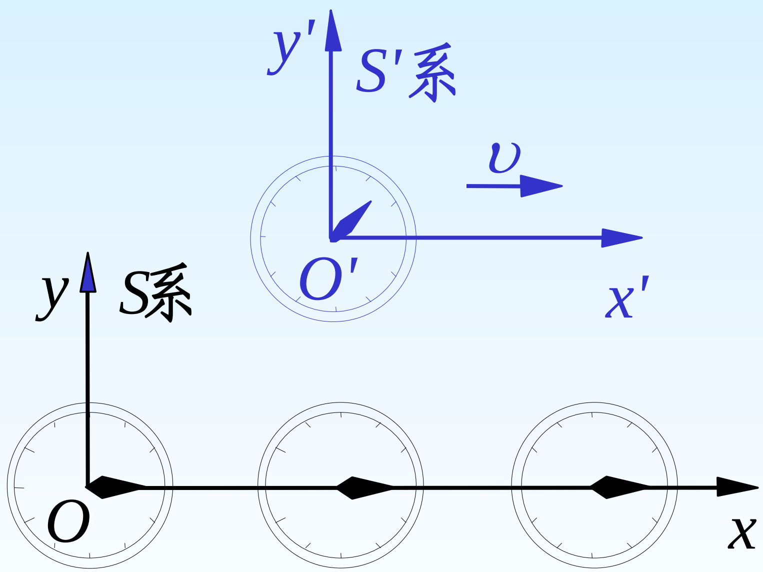
时间间隔　$\boxed{\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}}$ $> \tau_0$（时间膨胀/动钟变慢）

说明

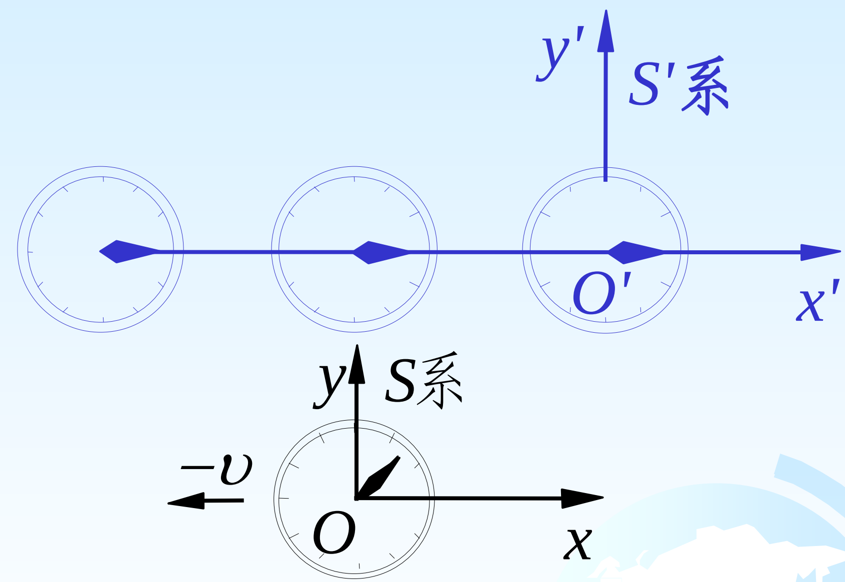
(1)运动惯性系中测得的时间间隔比固有时间长(<u>固有时最短</u>)，这就是相对论的时间延缓或运动时钟变慢.



(2) 动钟变慢满足相对性原理：S'和S系都认为对方的钟慢了：
“你看我的钟慢，我看你的钟也慢了”



(a) S系的观察者观测，S'系的钟较自己的钟走得慢



(b) S'的观察者观测，S系的钟较自己的钟走得慢

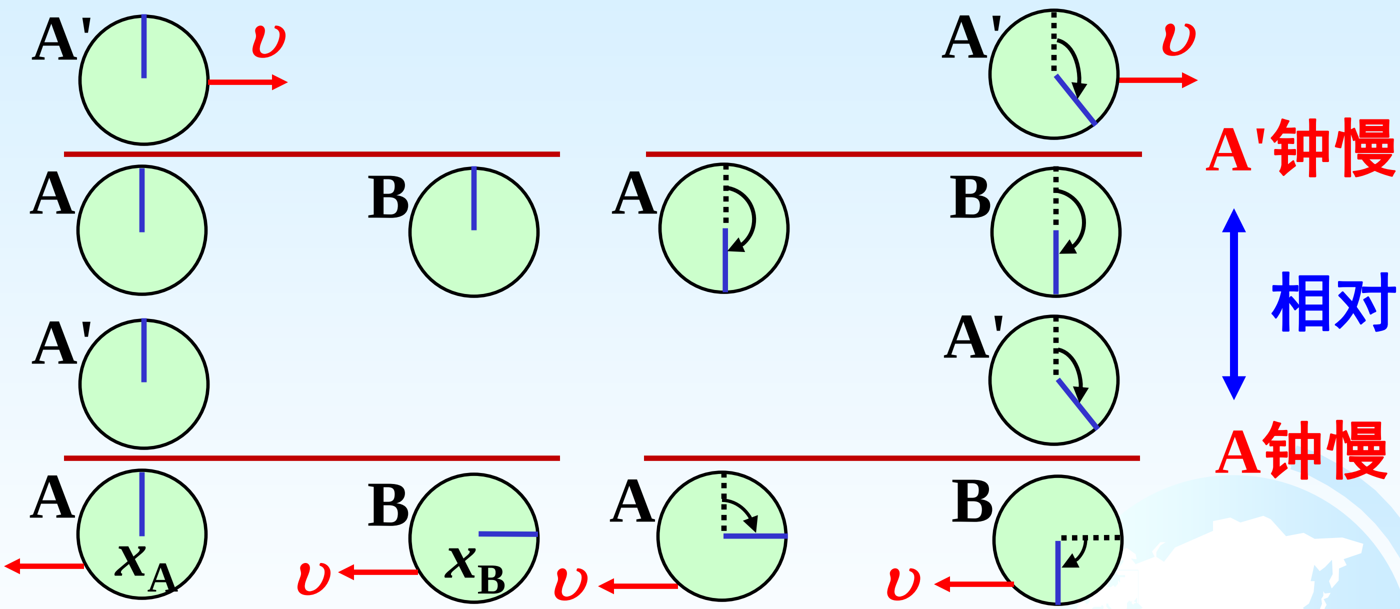
(2) 动钟变慢满足相对性原理：*S'*和*S*系都认为对方的钟慢了：“你看我的钟慢，我看你的钟也慢了” 但钟的读数(数字显示)唯一确定！?

S地面上看：

(AB同时)

S'火车上看：

(AB不同时)

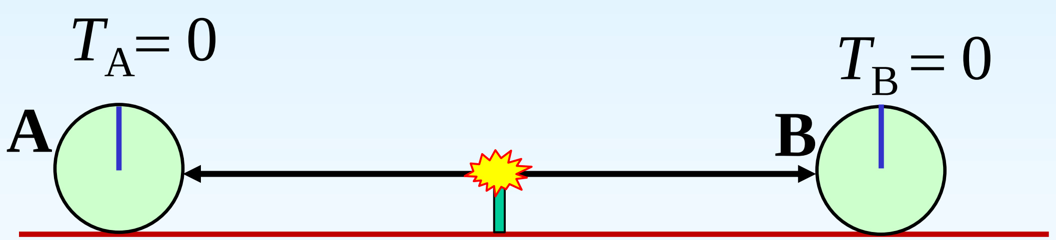


$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \frac{(t_B - t_A) - \frac{-\upsilon}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{-\frac{-\upsilon}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1-\beta^2}} > 0$$

(B钟超前A钟！)

(3) 动钟变慢是光速不变原理的直接推论，源于同时性的相对性，不涉及时钟的任何机械原因和原子内部的任何过程。

爱因斯坦对钟：钟**A**、**B**相同，距离中点发光信号，**A**、**B** 接受信号后立即把各自的钟置零 ⇒两钟对准(自身参考系)

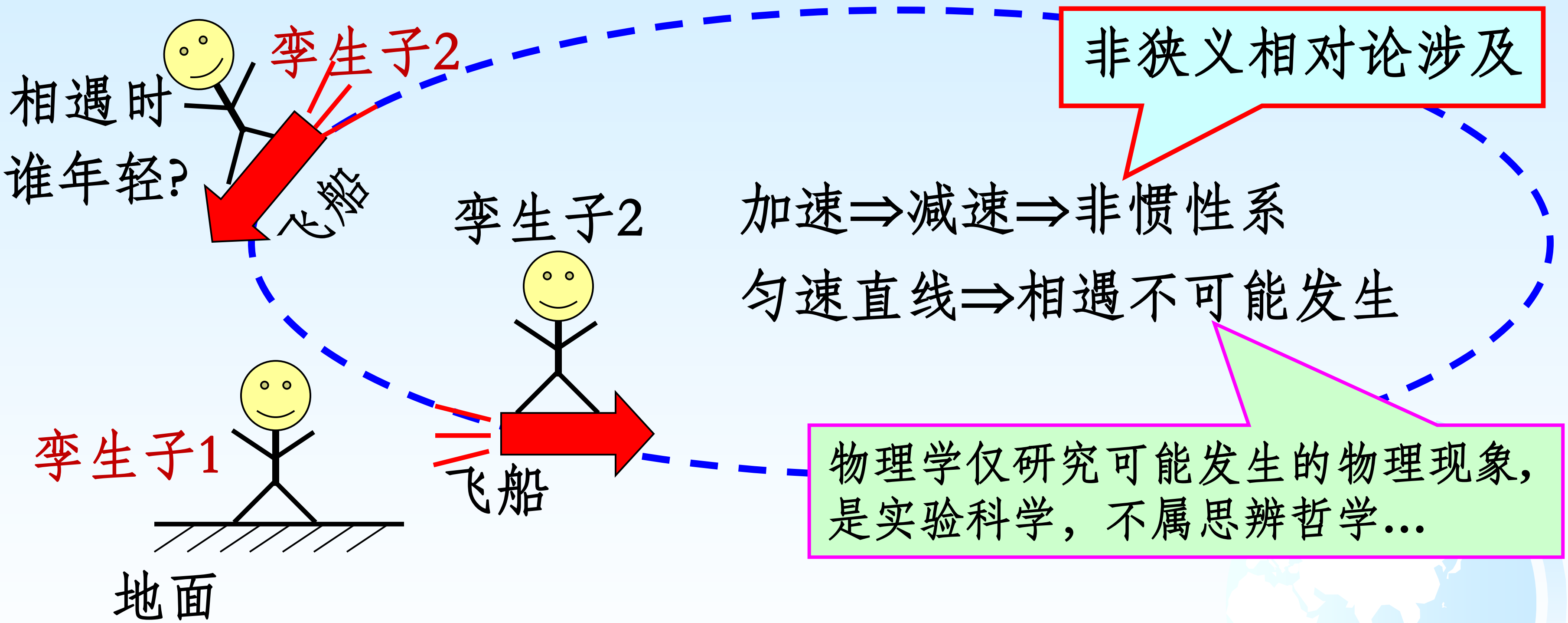


(4) 运动时钟变慢，不仅限于任何计时装置变慢，也是指一切发生在运动物体上的过程相对静止的观测者来说都变慢了，运动参考系中的一切物理、化学过程，如单摆、弹簧振子、乃至观测者的生命节奏都变慢了（孪生子佯谬?)

孪生子佯谬

S系：S'系钟慢 ⇒ “天上方一日，地上已千年”

S'系：S系钟慢 ⇒ “地上方一日，天上已千年



天、地不对称，地球可认为是惯性系，火箭不是。火箭返回必有加速度，超出狭义相对论的适用范围。按照广义相对论，宇航员更年轻。

(5) 动钟变慢已被许多实验和观察事实所证实.

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{\upsilon}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} > \Delta t$$

*S*同地⇒ $x_1 = x_2$

S静系看S'动系总有 $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} > \tau_0$

例：带电**π**介子的静止寿命 $\tau_0 = 2.2\times10^{-6}$**s**，在高空($h > 10$km)处产生的**π** 介子却能到达地面 ($\upsilon \approx 0.999c$)

若不考虑相对论效应，则 $h = \tau_0\upsilon < \tau_0 c \approx 660\text{m}$ ⇒与实验不合

若考虑相对论效应，则 $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 49.2\times10^{-6}\text{s} >> \tau_0$

$\Rightarrow h = \tau\upsilon \approx 14.8\text{km}$ ⇒与实验吻合

四. 其他相关问题

1. 因果关系

狭义相对论中，“同时”是相对的，但因果关系是绝对的。

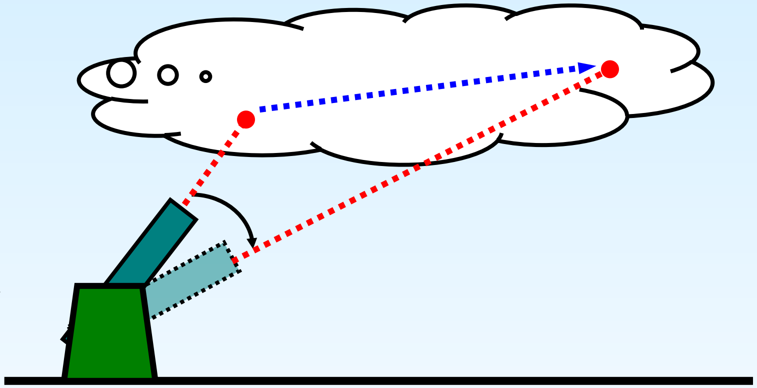
- “因果”靠物质相互作用联系，传递速度$\le c$
- 凡在以极限速度传递的信息到达前发生的事件，与信息源是无关的。

推论：某坐标系内同时发生的事件无因果关系。且在任意坐标系内仍无因果关系。

2.表观超光速运动

*c*为物质运动或物质相互作用的速度极限，不排除表观上的超光速现象。

- 探照灯夜间划过天空时，光点在云层上的速度。
- 平行轨道之间旋转一长直杆，杆轨交点的速度
- 相速度可> *c*，群速度恒< *c*.



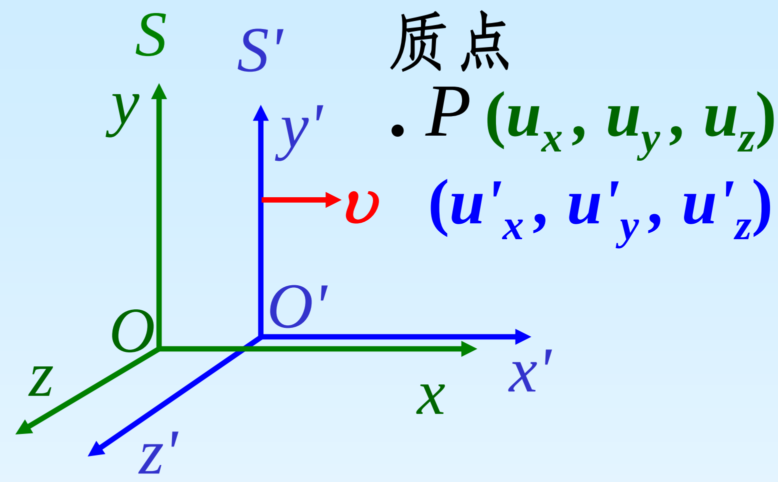
相速度：电磁波的恒定相位点的推进速度。
群速度：许多不同频率的正弦电磁波的合成信号在介质中传播的速度，代表能量的传播速度。

此外，天文观测曾报道有超光速运动，但原因不清。

§ 5.6 相对论速度变换公式

质点P在空间运动，其速度在各惯性系下不同

建立$(u_x, u_y, u_z) \sim (u'_x, u'_y, u'_z)$ 关系



S系中的速度： $u_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ $u_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ $u_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$

S'系中的速度： $u'_x = \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$ $u'_y = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}$ $u'_z = \dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}$

由洛伦兹坐标变换有

$$\mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}x - \upsilon \mathrm{d}t}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \quad \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z, \quad \mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t - \upsilon \mathrm{d}x/c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

5.6 相对论速度变换公式

$$\mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}x - \upsilon \mathrm{d}t}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}},\qquad \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y,\qquad \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z,\qquad \mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t - \upsilon \mathrm{d}x/c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

$S \rightarrow S'$(正变换)

$$u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_x - \upsilon}{1-u_x\upsilon/c^2}$$

$$u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-u_x\upsilon/c^2}$$

$$u'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-u_x\upsilon/c^2}$$

$S' \rightarrow S$ (逆变换)

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{u'_x + \upsilon}{1+u'_x\upsilon/c^2}$$

$$u_x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+u'_x\upsilon/c^2}$$

$$u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{u'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1+u'_x\upsilon/c^2}$$

易证：$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2 = c^2$

这表明**S**系中的光速变换到**S'**中仍是光速c，光速不变！

说明

(1) 当u和v远小于光速时，相对论速度变换定理又回到伽利略变换，因此伽利略变换是相对论速度变换的低速近似.

伽利略正变换 $\begin{cases} u'_x \approx u_x - \upsilon \\ u'_y \approx u_y \\ u'_z \approx u_z \end{cases}$　　伽利略逆变换 $\begin{cases} u_x \approx u'_x + \upsilon \\ u_y \approx u'_y \\ u_z \approx u'_z \end{cases}$

(2) 相对论速度变换定理与光速不变原理在逻辑上必然自洽，

$u'_x = c$ 或 $\upsilon = c$ 或均为c时都成立

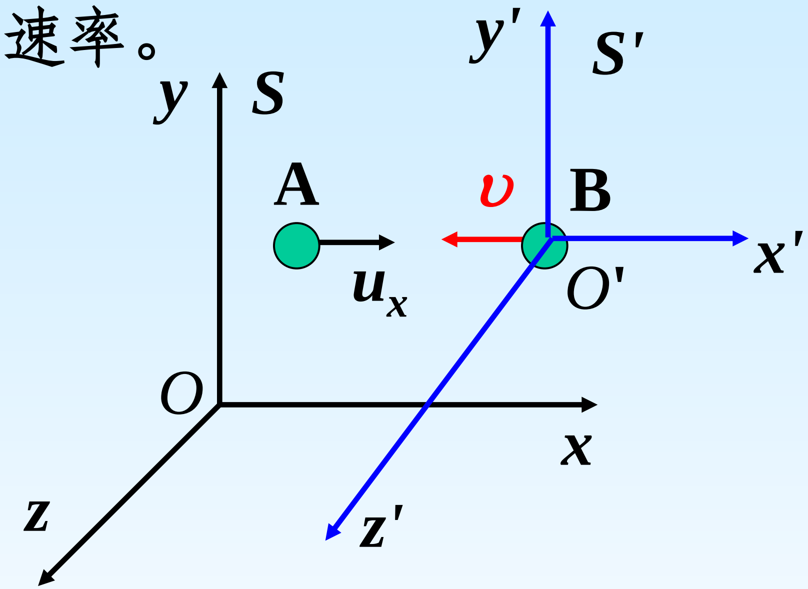
$$u_x = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + u'_x \upsilon / c^2}$$

$\Rightarrow$ 真空中的光速c是物体运动速度的极限.

(3) 在垂直于υ的方向上，速度变换存在相对论效应！

5.6 相对论速度变换公式

例： 两质点A，B相对运动如图，其速率相对实验室坐标S来说都为0.9c，求A相对B的速率。



解： 将S'坐标系建在B上

则S'相对于S的速度为

$$\upsilon = -0.9c$$

质点A相对于S的速度为

$$u_x = 0.9c$$

质点A相对于S'(即B)的速度为

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \dfrac{\upsilon}{c^2}u_x} = \frac{0.9c - (-0.9c)}{1 - \dfrac{(-0.9c)}{c^2}0.9c} = \frac{1.8c}{1.81} = 0.9945\,c < c \text{光速}$$

讨论：若站在实验室坐标S来看，A与B之间的速度差是多少？

答： $u_A - u_B = 0.9\,c - (-0.9\,c) = 1.8\,c > c$ 如何解释？讨论…

提示：相对论只针对相对`彼此，不涉及第三者…

§5.7 狭义相对论中的质量、能量和动量

1. 概述

相对性原理要求：物理定律具有洛伦兹变换不变性

S系中的物理规律 $f(x,y,z,t)$

洛伦兹正变换

洛伦兹逆变换

S'系中的物理规律 $f'(x',y',z',t')$

物理定律的数学形式相同

牛顿定律(三维力)不具有洛伦兹不变性

$$F_x = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \neq m\frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t'^2} = F'_x \rightarrow \text{不符合相对性原理}$$

$a \rightarrow \upsilon \uparrow$ 且 t 足够长 $\rightarrow \upsilon > c \rightarrow$ 不符合光速不变性

∴ 牛顿定律应该修正 ⇒ 建立相对论力学

2. 质速关系

• 定性分析：

外力作用　　时间足够长

若m恒定 $\Rightarrow a \to \upsilon\uparrow$，$t\uparrow \to \upsilon > c$ $\Rightarrow$ 违背光速不变原理

若m变 $\Rightarrow \upsilon\uparrow \to m\uparrow$ 并且 $\upsilon \to c \Rightarrow m \to \infty$ $\Rightarrow$ 确保 $\upsilon < c$

• 定量分析的基础：

基础：动量守恒、能量守恒、质量守恒，且 $\boxed{\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})}{\mathrm{d}t}}$

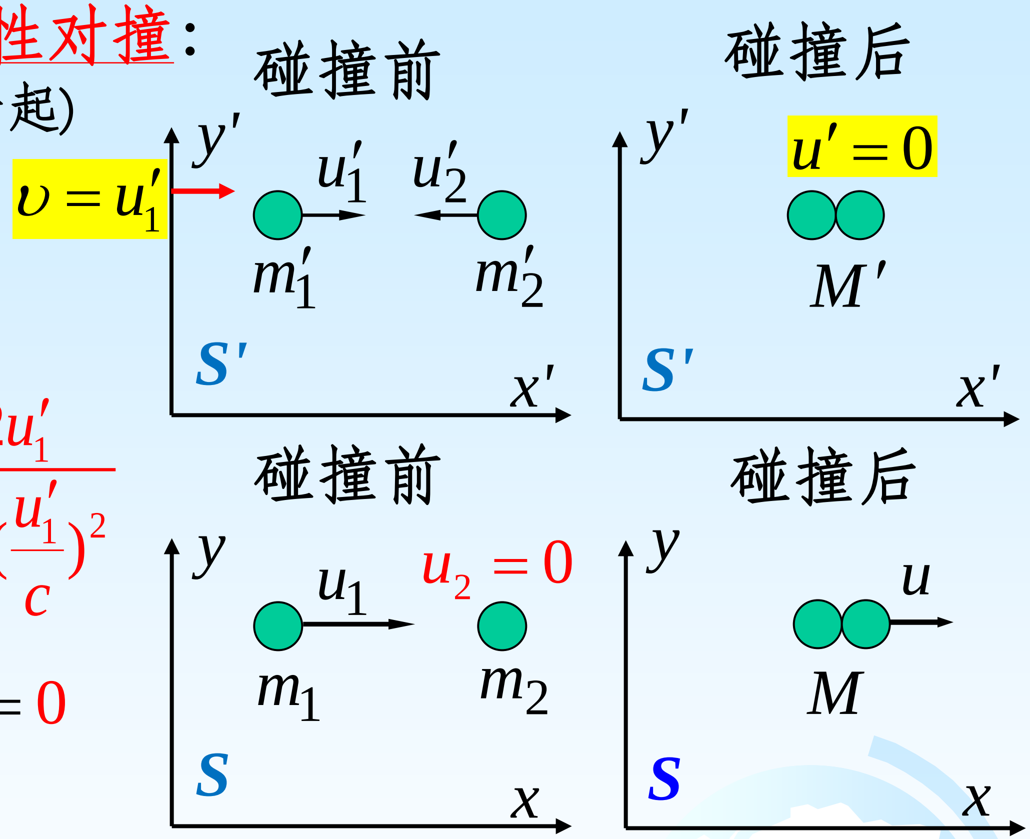
1923年康普顿效应证明了
这些守恒在微观高速情况下也成立

各惯性系下
的力学定律

由此可导出狭义相对论下的质量-速度关系(质速关系)

两完全相同小球完全非弹性对撞：

(碰后粘在一起)



碰撞前:

S'： $\vec{u}_1' = -\vec{u}_2'$, $m_1' = m_2'$

S： 以 u_1' 相对 S' 向左运动

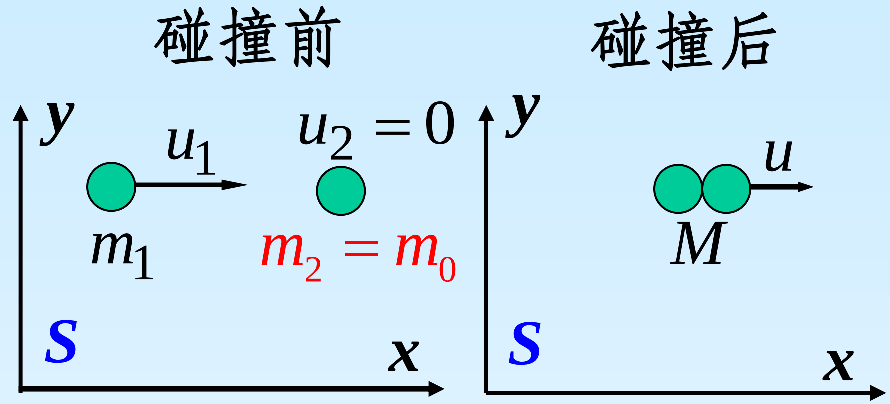
$$u_1 = \frac{u_1' + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2} u_1'} = \frac{u_1' + u_1'}{1 + \frac{u_1'}{c^2} u_1'} = \frac{2u_1'}{1 + (\frac{u_1'}{c})^2}$$

$$u_2 = \frac{u_2' + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2} u_2'} = \frac{-u_1' + u_1'}{1 + \frac{\upsilon}{c^2}(-u_2')} = 0$$

碰撞后: S' 系： 动量守恒 $m'_1 u'_1 + m'_2 u'_2 = M' u' = 0 \Rightarrow u' = 0$

S 系： $u = \frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2} u'} = \frac{0 + \upsilon}{1 + \frac{u_1'}{c^2} 0} = \upsilon \quad \Rightarrow u = \upsilon = u_1'$

由动量守恒和质量守恒：



$$m_1 u_1 = Mu，\quad 其中 M = m_1 + m_0$$

$$\therefore \quad m_1 = m_0 \frac{u}{u_1 - u}$$

$$\boxed{u = \upsilon = u_1'}$$

$$由\ u_1 = \frac{2u_1'}{1+\left(\frac{u_1'}{c}\right)^2} = \frac{2u}{1+\left(\frac{u}{c}\right)^2} = \frac{2uc^2}{c^2+u^2} \Rightarrow u_1 c^2 + u_1 u^2 = 2uc^2$$

$$u_1 u^2 - 2c^2 u + u_1 c^2 = 0$$

$$u = \frac{2c^2 \pm \sqrt{(2c^2)^2 - 4u_1(u_1 c^2)}}{2u_1} = \frac{c^2}{u_1}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}\right]$$

$\because u < c$ (光速)

$\therefore$ 取负号

$$\therefore \quad m_1 = m_0 \frac{u}{u_1 - u} = m_0 \frac{c^2}{u_1}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}\right] \Bigg/ \left\{u_1 - \frac{c^2}{u_1}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}\right]\right\}$$

$$\therefore\ m_1 = m_0 \frac{u}{u_1 - u} = m_0 \frac{c^2}{u_1}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}\right] \Big/ \left\{u_1 - \frac{c^2}{u_1}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}\right]\right\}$$

$$= m_0 \frac{c^2}{u_1^2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}\right]\left[1 + \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}\right] \Big/ \left[1 + \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}\right]\left\{1 - \frac{c^2}{u_1^2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}\right]\right\}$$

$$= m_0 \frac{c^2}{u_1^2}\left[1^2 - (1 - \frac{u_1^2}{c^2})\right] \Big/ \left\{\left[1 + \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}\right] - \frac{c^2}{u_1^2}\left[1^2 - (1 - \frac{u_1^2}{c^2})\right]\right\} = m_0 \Big/ \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}$$

$$m_1=\cdots=m_0\Big/\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}$$

m_1是小球1在运动(u_1)时的质量

m_0是小球1静止时($u_1=0$)的质量

相对论质速关系式：

$$\boxed{m=m_0\Big/\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

υ—物体运动速度

m_0—静止质量

意义： 揭示了物体质量m与其运动速度υ密切相关$\Rightarrow$ $\upsilon\uparrow\rightarrow m\uparrow$

- $\upsilon=0\rightarrow m=m_0$ — 静止质量；
- $\upsilon\rightarrow c\Rightarrow m\rightarrow\infty\Rightarrow\ \upsilon<c$

  1901年考夫曼测得电子质量随速度增大，证实了质速关系
- 以$\upsilon=c$运动的粒子，其静止质量 必为零，即$m_0=0$

3. 质能关系

目的：找出质量-能量的关系式，并应用之。

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}} = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}\mathrm{d}t = \vec{\upsilon}\cdot(\vec{F}\mathrm{d}t) = \vec{\upsilon}\cdot\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})$$

$$E_{\mathrm{k}} = \int_0^{\upsilon}\vec{\upsilon}\cdot\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})$$ (假设质点运动方向与受力方向相同)

$$= \int_0^{\upsilon}\upsilon\mathrm{d}(m\upsilon) = \int_0^{\upsilon} m\upsilon\mathrm{d}\upsilon + \upsilon^2\mathrm{d}m$$

将 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$ 改写为 $m^2c^2 - m^2\upsilon^2 = m_0{}^2c^2$

两边微分 $2mc^2\mathrm{d}m - m^2 2\upsilon\mathrm{d}\upsilon - \upsilon^2 2m\mathrm{d}m = 0$

同除以**2*m***，并移项有 $c^2\,\mathrm{d}m = m\upsilon\,\mathrm{d}\upsilon + \upsilon^2\,\mathrm{d}m$

于是 $E_{\mathrm{k}} = \int_{m_0}^{m} c^2\,\mathrm{d}m$

⇒ 相对论动能： $\boxed{E_{\mathrm{k}} = mc^2 - m_0c^2}$

$\Rightarrow$ 相对论动能： $\boxed{E_k = mc^2 - m_0c^2}$

讨论：

①当 $\upsilon << c$ 时， $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \cdots \qquad |x| < 1$

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$

$$= m_0c^2\left[(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2 + \cdots) - 1\right] \approx \frac{1}{2}m_0\upsilon^2$$

在低速下与牛顿力学一致$\Rightarrow$ 合理

②从 数学形式上看，应是两项能量之差.

第1项 mc^2—动态能量，称为相对论能量或总能量

第2项 m_0c^2— 静态能量，称为静止能量或静能

③揭示了一种与物体质量相联系的能量形式

$\Rightarrow$ 相对论质能关系式： $\boxed{E = mc^2}$

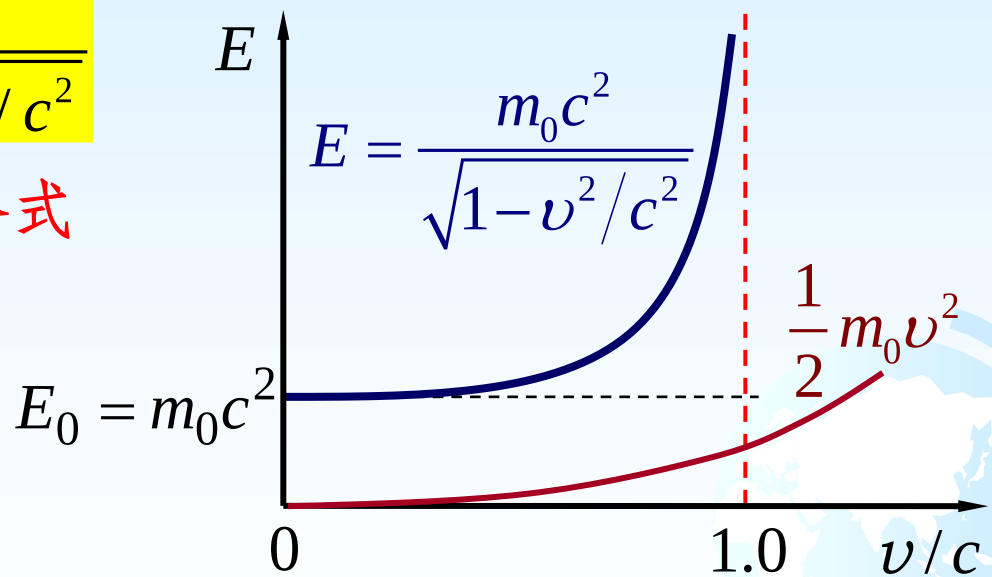
相对论动能可以改写为 $\boxed{mc^2 = E_k + m_0c^2}$

爱因斯坦定义：$E_0 = m_0c^2$ 物体静止时的能量 ——静止能量

$E = mc^2$ 物体相对论能量 ——总能量

$$\boxed{E = mc^2} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

—— 相对论质能公式



多个粒子相互作用时

$$\sum E_i = \sum m_i c^2 = \text{常量}$$ (相对论能量守恒)

$$\sum m_i = \text{常量}$$ (相对论质量守恒)

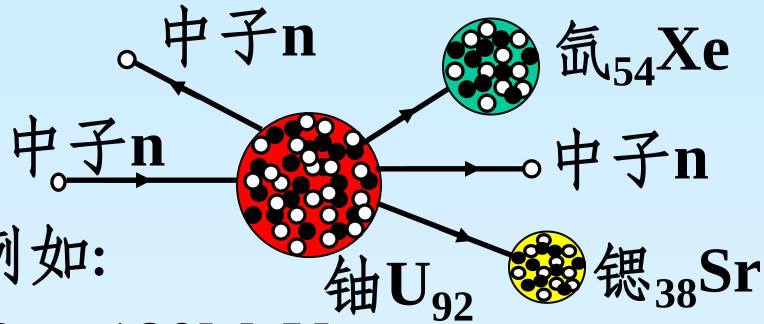
在相对论中能量守恒与质量守恒两个定律统一.

由质能关系有： $\boxed{\Delta E = \Delta m c^2}$

相对论的质量变化必然伴随能量的变化

——原子能(核能)利用的理论依据.

应用——原子核能利用:



(1)重核裂变放能

重原子核在中子撞击下可能裂变，例如:

$$\text{中子n}+\text{铀}\,{}^{235}_{92}U\rightarrow\begin{cases}\text{氙}\,{}^{140}_{54}Xe+\text{锶}\,{}^{94}_{38}Sr+2n+180MeV\\ \text{钡}\,{}^{141}_{56}Ba+{}^{92}_{36}Kr+3\,{}^{1}_{0}n+173MeV\end{cases}$$

各静止质量m_0: $m_n=1.0086654\ \text{amu}$; $m_U=235.043925\ \text{amu}$

$m_{Ba}=140.914363\ \text{amu}$; $m_{Kr}=91.926270\ \text{amu}$

⇒质量亏损: $\Delta m=m_U-m_{Ba}-m_{Kr}-2m_n=\cdots$

$=0.1859612\ \text{amu}=0.308775555\times10^{-27}\text{kg}$

$\Rightarrow M^0_{\text{前}}>M^0_{\text{后}}\Rightarrow$ 放能 $\quad \Delta E=\left(M^0_{\text{前}}-M^0_{\text{后}}\right)c^2\approx2.7753\times10^{-11}\text{J}$

⇒一般而言，平均每个**U-235**裂变可放出大约185MeV能量

⇒1kg铀^{235}相当于2700吨标准煤 **(1kg标准煤=7000kcal=29307kJ)**

⇒原子弹/核能利用

(2)轻核聚变放能

轻原子核在极高温度下聚变为较重的原子核。是宇宙中重元素出现的途径，也是恒星产生巨大能量的来源。

例如：

$$\underset{\text{氘}}{{}^2_1\mathrm{H}} + \underset{\text{氚}}{{}^3_1\mathrm{H}} \xrightarrow{\text{极高温}} \underset{\text{氦}}{{}^4_2\mathrm{He}} + \underset{\text{中子}}{{}^1_0\mathrm{n}}$$

$$\text{静止质量(amu)}\quad \underbrace{2.014102 \quad 3.016040}_{M_{0\text{前}}} \quad \underbrace{4.002603 \quad 1.0086654}_{M_{0\text{后}}}$$

$\therefore M_{0\text{前}} > M_{0\text{后}}$ ⇒质量亏损⇒放能

$$\Delta E = \left(M_{0\text{前}} - M_{0\text{后}}\right)c^2 = \cdots = 2.795\times10^{-12}\,\mathrm{J}$$

$$E = \Delta E / M^0_{\text{前}} = 3.348\times10^{14}\,\mathrm{J/kg}$$

⇒ **1kg**这种核燃料大约相当于**1.14 ×10⁴吨**的标准煤

应用：由原子弹提供极高温 ⇒氢弹

可控热源(如多路高能激光束聚焦)⇒ 受控核聚变

4. 能量动量关系　（目的：相对论中的能量与动量关系式）

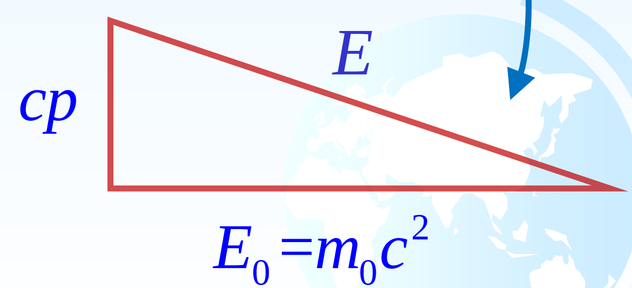
狭义相对论中动量定义仍为 $\boxed{p = m\upsilon}$

但内容已完全不同！ $p = \dfrac{m_0 \upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$

相对论质能关系 $E = mc^2 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\upsilon^2/c^2)}} \Rightarrow m^2 c^4 (1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}) = m_0^2 c^4$

⇒相对论能量动量关系式：$\boxed{E^2 = m^2 c^4 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4}$

- 特例：对于$m_0 = 0$ 的粒子 $\boxed{E = cp}$



$\Rightarrow$ 光子动量为：$\boxed{p = \dfrac{E}{c} = mc}$ $\Rightarrow \upsilon = c$

- 能量-动量不可分割性，可类比时间-空间关系.

对于动能是 E_k 的粒子，总能量为

$$E = E_k + m_0c^2$$

代入 $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$

有 $E_k^2 + 2E_km_0c^2 = p^2c^2$

当 $\upsilon << c$ 时，$E_k << 2m_0c^2$

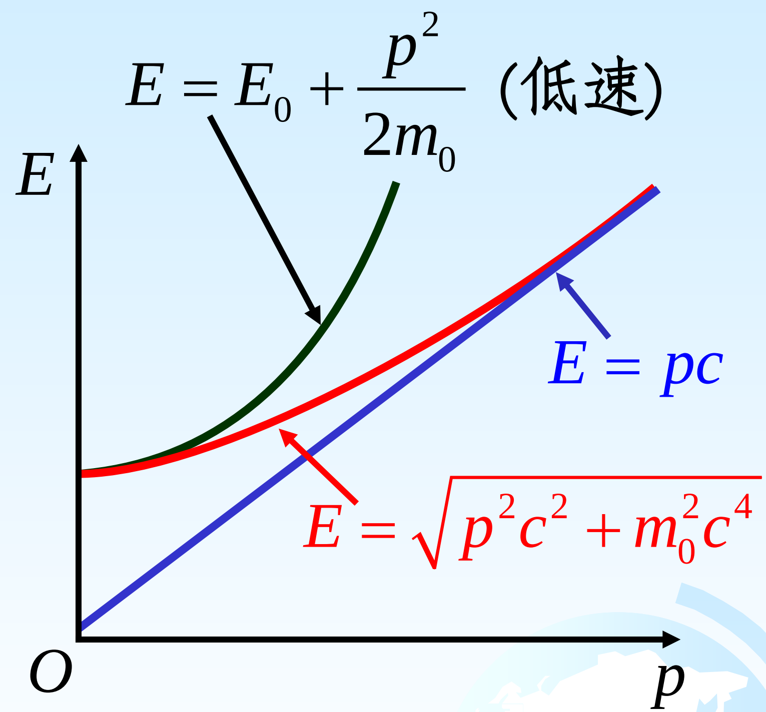
上式的第一项可以忽略,即

$$2E_km_0c^2 = p^2c^2$$

于是有

$$\boxed{E_k = \frac{p^2}{2m_0}} \qquad \boxed{E = E_0 + \frac{p^2}{2m_0}}$$

物体低速运动时能量动量关系



质点运动定律的讨论

1. 质能关系要求修改“牛一”的描述。

“不受外界作用”⇒“没有任何能量传递”

2. “牛二”：

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$ 的含义与前不同（$\vec{p},m$）

3. 粒子受力与运动状态有关⇒“牛三”不再成立。

S系中$\vec{f}$与$\vec{f}'$等值反向，在S'系中不再成立。

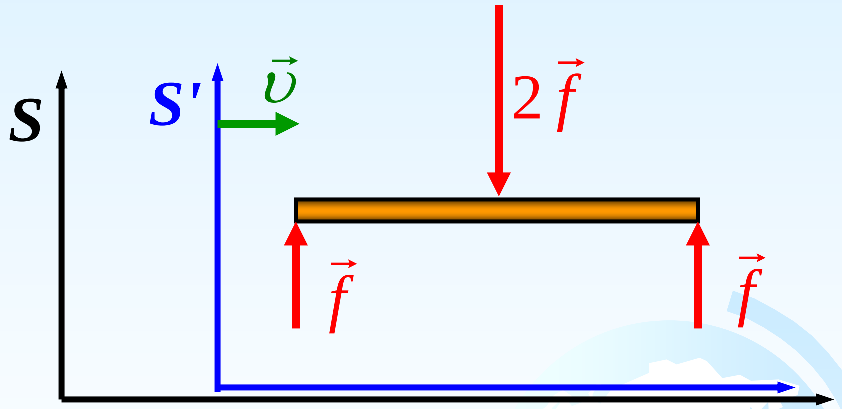
光速有限⇒无超距作用⇒作用-反作用需要时间

比较：牛顿力学：　时间绝对+牛三 → 动量守恒

相对论：　时间相对+牛三无效→ 动量守恒

4.广延物体的力学复杂得多。

例：如图，杆在S'系中静止，若同时在S'系中加力如图，杆保持平衡。



但在S系中，各力不是同时加在杆上(先左后右)。

作业:

1.10，1.12, 1.14, 1.15, 1.18

※回顾三维空间

①三维矢量与坐标的选择有关

两坐标系基矢

设三维空间中有两个直角坐标系$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$及$(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$

某一矢量在两坐标系表示为

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}\rightarrow\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$$

$$\vec{F}'=F_x'\vec{i}'+F_y'\vec{j}'+F_z'\vec{k}'\rightarrow\vec{F}'=(F_x',F_y',F_z')$$

两坐标系基矢间经过渡矩阵[c]相互变换如下：

$$\begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{z}' \end{pmatrix} = [c]\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = [c]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} F_x' \\ F_y' \\ F_z' \end{pmatrix} = [c]\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

②三维标量：物理量与坐标选择无关→如时间、距离、质量等

两点距离：$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2$ 与坐标选择无关

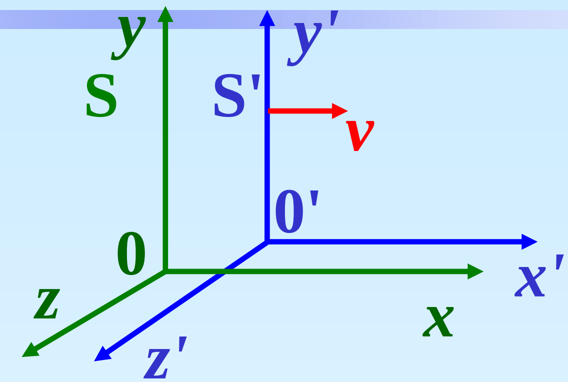
※建立四维空间

目的：在四维空间中找出一组基矢，

使四维力满足洛伦兹变换的不变性

寻找四维标量：

$t=t'=0$时,0和0'点重合且都开始发出光波，在t时刻两光波面如下：



S: $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$

S': $x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0$

上两式属光讯号联系的两事件的情况。

若不是光讯号联系，由两坐标变换关系为线性和等价性有

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=M^2$$

$$\downarrow$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2+x_4'^2=M^2$$

见阚仲元“电动力学教程”P198

可见M与坐标的选择无关⇒与三维空间类比

∴M可视为四维空间中的两点距离

其中：$\boxed{x_4=ict;\quad x'_4=ict'}$ $\quad i=\sqrt{-1}$ (复数)

两基矢(x_1, x_2, x_3, x_4)与(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)可经洛伦兹变换相互变换

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad y' = y,\quad z' = z,\quad t' = \frac{t - (v/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$x'_1 = \frac{x_1 + i\beta x_4}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad x'_2 = x_2,\quad x'_3 = x_3,\quad x'_4 = \frac{-i\beta x_1 + x_4}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x_4 = ict;\quad x'_4 = ict'$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

过渡矩阵[C]

在四维空间中某一矢量

在S系中：(F_1, F_2, F_3, F_4)

在S'系中：(F'_1, F'_2, F_3, F'_4)

该矢量在两坐标系间变换

$$\begin{pmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \\ F'_4 \end{pmatrix} = [C] \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \\ \vec{l}'_4 \end{pmatrix} = [C] \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \\ \vec{l} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$x_4 = ict \qquad (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$

例 静止的带电π介子的半衰期为1.77×10^{-8}s（不稳定粒子数目减少一半经历的时间称为半衰期，即当$t=T_{1/2}$时$N=N_0/2$）．今有一束平行运动的介子，速率为$0.99c$，在离开π介子源(加速器中的靶)39m处，发现它的强度已减少为原来强度的一半．

求 试解释这一实验结果．

解 (1) 用经典力学解释实验结果

π介子束在半衰期内即半数衰变前通过的路程为

$$S=uT_{1/2}=0.99\times3\times10^{8}\times1.77\times10^{-8}\,\mathrm{m}=5.3\mathrm{m}$$

与实验结果矛盾，π介子的运动速度接近光速，牛顿力学已不适用，必须考虑相对论效应．

(2) 用运动时钟变慢效应解释实验结果

- 设相对π介子静止的参考系为S′系，π介子半衰期在S′系为 1.77×10^{-8}s，是固有时间 τ_0 .
- 设实验室参考系为S系. S′系相对于S系的运动速度为 $0.99c$，在S系中观测，π介子以高速运动，测得的半衰期应为运动时间

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{1.77\times10^{-8}}{\sqrt{1-(\frac{0.99c}{c})^2}}\mathrm{s}=1.26\times10^{-7}\mathrm{s}$$

π介子在这段时间内通过的路程为

$$S=u\tau=0.99\times3\times10^{8}\times1.26\times10^{-7}=37.5\,\mathrm{m}$$

这与实验结果基本吻合.

(3) 用长度收缩效应解释实验结果

在S′的半衰期为 $\tau_0 = 1.77\times10^{-8}\text{s}$，π介子系的观测者认为，实验室参考系即S系的尺子是运动的尺子，是要缩短的，S系测得的当π介子束的强度减少到原强度的一半时前进的距离为39m，在S′系只有

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = 39\times\sqrt{1-(\frac{0.99c}{c})^2}\,\text{m} = 5.5\,\text{m}$$

通过这段距离所需的时间等于

$$t = \frac{L}{u} = \frac{5.5}{0.99c} = \frac{5.5}{2.97\times10^8}\text{s} = 1.86\times10^{-8}\text{s}$$

与π介子系测得的半衰期基本一致.

讨论

(1)用牛顿力学解释实验结果时，利用了S系（实验室系）的长度测量结果（39m），又利用了S′系（介子系）的时间测量结果（1.77×10^{-8}s），导致与实验结果矛盾的结论.

(2)运动时钟变慢效应解释实验结果，利用了S系(实验室系)的测量结果（长度:39m；时间:1.26×10^{-7}s）. 实验室的观测者测量的π介子运动时的半衰期比静止时大得多. 在半衰期内可通过39m.

(3)用长度收缩效应解释实验结果，利用S′系(π介子系)的长度和时间测量结果(长度:5.5m；时间:1.77×10^{-8}s). 运动着的π介子观测到实验室的空间距离缩短了，在它的固有半衰期内能通过这段距离.

(4)相对论的时钟变慢与长度收缩总是紧密联系在一起的。所有验证相对论时钟变慢效应的近代物理实验，都同样验证了相对论长度收缩效应.

设有宇宙飞船*A*和*B*，固有长度均为l_0=100m，沿同一方向匀速飞行，在飞船*B*上观测到飞船*A*的船头、船尾经过飞船*B*船头的时间间隔为0.6×10^{-7}s，则飞船*B*相对于飞船*A*的速度是__________。

在B 船中观察A船的长度

$$l = l_0\sqrt{1-(v/c)^2}$$

在B 船船头观察A船船头船尾飞过的时间间隔

$$\tau_0 = \frac{l}{v} = \frac{l_0\sqrt{1-(v/c)^2}}{v} = \frac{3}{5}\times 10^{-7}\,s$$

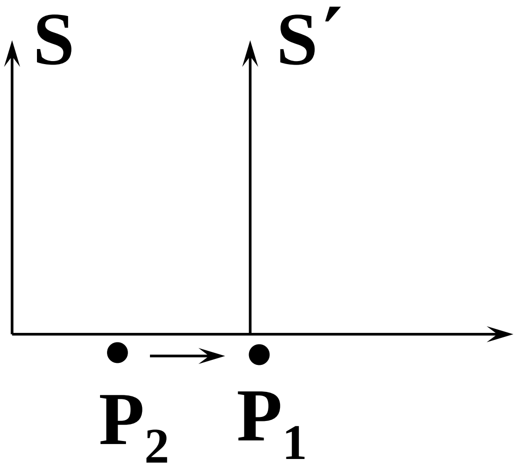
$$v = 0.984c$$

在S系中x=0处有一静止光源，在t=0时辐射了一个光脉冲P_1，在$t=\tau$时辐射了第二个光脉冲P_2。S'系以$u=v$ 相对S系运动，S'系的观测者于$t'=0$，$x'=0$处接受到第一个脉冲。求此观测者在$x'=0$处接受到第二个脉冲的时刻

解：光源在x=0，t=τ辐射第二个脉冲时，在S′系测出其位置及时刻：

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{-v\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



而第二个脉冲从x'到0所需时间：

$$\Delta t' = |x'|/c$$

$$\Delta t' = \frac{v\tau}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

所以，观测者在x'=0接受第二个脉冲的时刻

$$\tau' = t' + \Delta t' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(1 + \frac{v}{c}\right) = \tau\left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c}\right)^{1/2}$$

根据相对论力学，动能为0.25 MeV的电子，其运动速度约等于（c表示真空中的光速，电子的静能m_0c^2 = 0.51 MeV）

(A) 0.1c　　(B) 0.5 c

(C) 0.75 c　　(D) 0.85 c

$\boxed{C}$

解：$E_k = mc^2 - m_0c^2 = 0.25\,MeV$

$$m_0c^2 = 0.51\,MeV$$

$$\therefore mc^2 - m_0c^2 = \frac{25}{51}m_0c^2 \qquad \therefore m = \frac{76}{51}m_0$$

$$\because m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \therefore \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{76}{51}$$

$$\therefore v = 0.75c$$

一匀质矩形薄板在它静止时测得其长为 a，宽为 b，质量为m_0，由此可算出其面密度为m_0/ab，假定该薄板沿长度方向以接近光速的速度 u 作直线运动，此时再测算该矩形薄板的面密度，则为：

(A) $\dfrac{m_0\sqrt{1-(u/c)^2}}{ab}$　　(B) $\dfrac{m_0}{ab[\sqrt{1-(u/c)^2}]^2}$

$\boxed{B}$

(C) $\dfrac{m_0}{ab\sqrt{1-(u/c)^2}}$　　(D) $\dfrac{m_0}{ab[\sqrt{1-(u/c)^2}]^{3/2}}$

解：　$m = m_0/\sqrt{1-(u/c)^2}$　　$S = ba\sqrt{1-(u/c)^2}$

$$\sigma = m/S = m_0/ab(1-u^2/c^2)$$

两个静止质量都是 m_0 的小球，其中一个静止，另一个以 $v = 0.8c$ 运动。在它们作对心碰撞后粘在一起，求碰撞后合成小球的静止质量。

解：两球系统碰撞前、后能量守恒：

$$m_0\cancel{c^2} + m\cancel{c^2} = M\cancel{c^2}$$

碰后合成小球的质量

$$\Rightarrow m_0 + m = M \cdots\cdots(1)$$

两球系统碰撞前、后动量守恒：

$$mv = MV \cdots\cdots(2)$$

碰后合成小球的速度

将 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \dfrac{m_0}{0.6}$ 代入（1）

得 $M = \dfrac{8}{3}m_0$

由（2） $V = \dfrac{mv}{M}$

$$= \frac{(m_0/0.6)\times 0.8c}{(8/3)m_0} = 0.5c$$

再由 $M = \dfrac{M_0}{\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}}$

得 $M_0 = M\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}$

$$= \frac{8}{3}m_0\sqrt{1-(\frac{0.5c}{c})^2}$$

$$= 2.31m_0$$

两个质点A和B，静止质量均为m_0．质点A静止，质点B的动能为$6m_0c^2$．设A、B两质点相撞并结合成为一个复合质点．求复合质点的静止质量．

解：设复合质点静止质量为M_0，运动时质量为M．由能量守恒定律可得

$$Mc^2 = m_0c^2 + mc^2$$

其中mc^2为相撞前质点B的能量

$$mc^2 = m_0c^2 + 6m_0c^2 = 7m_0c^2 \longrightarrow M = 8m_0$$

设质点B的动量为p_B，复合质点的动量为p．由动量守恒定律：

$$p = p_B$$

利用动量与能量关系，

对于质点B $$p_B^2c^2 + m_0^2c^4 = m^2c^4 = 49m_0^2c^4$$

对于复合质点 $$P^2c^2 + M_0^2c^4 = M^2c^4 = 64m_0^2c^4$$

$$M_0^2 = 64m_0^2 - 48m_0^2 = 16m_0^2$$

$$M_0 = 4m_0$$