第八章　时间序列模型

§ 8.1 时间序列平稳性和单位根检验**

§ 8.2 随机时间序列分析模型

§ 8.3 协整与误差修正模型*

§8.1 时间序列平稳性和单位根检验**

Stationary Time Serial and Unit Root Test

一、时间序列的平稳性

二、单整序列

三、单位根检验

- 经典时间序列分析模型：
  - 包括**MA**、**AR**、**ARMA**模型
  - 平稳时间序列模型
  - 分析<u>时间序列自身</u>的变化规律

- 现代时间序列分析模型：
  - 分析<u>时间序列之间的结构关系</u>
  - 单位根检验、协整检验是核心内容
  - 现代宏观计量经济学的主要内容

一、时间序列的平稳性
Stationary Time Series

1.问题的提出

- 经典计量经济模型常用到的数据有：
  - 时间序列数据（time-series data)；
  - 截面数据(cross-sectional data)
  - 平行/面板数据（panel data/time-series cross-section data)

- 时间序列数据，是最常见、也是最常用到的数据。

- 经典回归分析暗含着一个重要假设：数据是平稳的。

- 数据非平稳，大样本下的统计推断基础（中心极限定理）——“一致性”要求——被破坏。
- 数据非平稳，往往导致出现“虚假回归”（Spurious Regression）问题。
  - 表现为两个本来没有任何因果关系的变量，却有很高的相关性（如都含有时间趋势项t）。
  - 例如：如果有两列时间序列数据表现出一致的变化趋势（非平稳的），即使它们没有任何有意义的关系，但进行回归、也可表现出较高的可决系数。

2、平稳性的定义*

- 假定某个时间序列是由某一随机过程（stochastic process）生成的，即假定时间序列$\{X_t\}$（t=1, 2, …）的每个数值、都是从一个概率分布中随机得到，如果满足下列条件：
  - 均值 $E(X_t)=\mu$，是与时间t 无关的常数；
  - 方差 $Var(X_t)=\sigma^2$，也是与时间t 无关的常数；
  - 协方差 $Cov(X_t, X_{t+k})=\gamma_k$，只与时期间隔k有关、而与时间t 无关的常数；
- 则称该随机时间序列是平稳的（stationary)，而该随机过程是一平稳随机过程（stationary stochastic process）。

宽/弱平稳、广义平稳

- 白噪声（white noise）过程是平稳的：

$$X_t=\mu_t \ ， \quad \mu_t \sim N(0,\sigma^2)$$

- 随机游走（random walk）过程是非平稳的：

$$X_t=X_{t-1}+\mu_t \ ， \quad \mu_t \sim N(0,\sigma^2)$$

$$Var(X_t)=t\sigma^2$$

- 随机游走的一阶差分（first difference）是平稳的：

$$\Delta X_t=X_t-X_{t-1}=\mu_t \ , \ \mu_t \sim N(0,\sigma^2)$$

- 如果一个时间序列是非平稳的，它常常可通过取差分的方法而形成平稳序列。

二、平稳性的图示判断

说明

- 本节的概念是很重要（ACF/PACF/Q），属于经典时间序列分析。
- 在实际应用研究中，一般直接采用单位根检验、来判断平稳性，图示判断应用较少。
- 建议作为自学内容。

三、平稳性的单位根检验
（unit root test）

1、DF检验（Dicky-Fuller Test）

$$X_t = X_{t-1} + \mu_t$$

随机游走，非平稳

$$X_t = \rho X_{t-1} + \mu_t$$

对该式回归，如果确实发现**ρ=1**，则称随机变量X_t有一个单位根。

$$\Delta X_t = (\rho - 1) X_{t-1} + \mu_t$$
$$= \delta X_{t-1} + \mu_t$$

等价于通过该式判断是否存在**δ=0**。

- 通过上式判断Xt是否有单位根，就是时间序列平稳性的单位根检验。

- 一般检验模型

$$\boxed{X_t = \alpha + \rho X_{t-1} + \mu_t}$$

$$\boxed{\Delta X_t = \alpha + \delta X_{t-1} + \mu_t}$$

零假设　　H0：δ=0
备择假设 H1：δ<0

可通过OLS法下的t检验完成。

- 但是，在零假设（序列非平稳）下，即使在大样本下、t统计量也是有偏误的（向下偏倚），通常的t检验无法使用。

- Dicky和Fuller于1976年提出了这一情形下t统计量服从的分布（这时的t统计量，称为**τ统计量**），即DF分布。

- 由于**τ统计量的向下偏倚性**，它呈现围绕小于零均值的偏态分布。

显著性水平	样本容量					t分布临界值
	25	50	100	500	∝	(n=∝)
0.01	-3.75	-3.58	-3.51	-3.44	-3.43	-2.33
0.05	-3.00	-2.93	-2.89	-2.87	-2.86	-1.65
0.10	-2.63	-2.60	-2.58	-2.57	-2.57	-1.28

- **如果τ <临界值，则拒绝零假设**

H_0：δ =0

认为时间序列不存在单位根，是平稳的。

单尾检验

2、ADF检验（Augment Dickey-Fuller test）

- 为什么将DF检验扩展为ADF检验？

- DF检验假定时间序列是由具有白噪声随机误差项的一阶自回归过程AR(1)生成的。

但在实际检验中，时间序列可能由**更高阶自回归过程**生成，或者随机误差项并非是白噪声：用OLS法进行估计，均会表现出**随机误差项出现自相关**、导致DF检验无效。

- 如果时间序列含有明显随时间变化的某种趋势（如上升或下降），也容易导致DF检验中的自相关随机误差项问题。

- ADF检验模型

$$\boxed{\Delta X_t = \delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t}$$

模型1

$$\boxed{\Delta X_t = \alpha + \delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t}$$

模型2

$$\boxed{\Delta X_t = \alpha + \beta t + \delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t}$$

模型3

零假设　　H0：δ=0

备择假设　H1：δ<0

- 检验过程
  - 实际检验时从模型3（既有截距，又有趋势）开始，然后模型2、模型1。
  - 何时检验拒绝零假设（即不存在单位根、为平稳序列），何时停止检验。
  - 否则，就要继续检验，直到检验完模型1为止。
- 检验原理与DF检验相同，只是对模型1、2、3进行检验时，有各自相应的临界值表。
- 检验模型滞后项阶数确定：以随机项不存在序列相关为准则（基于AIC/SIC的自动选择为辅）。

模型	统计量	样本容量	0.01	0.025	0.05	0.10
1	τ_δ	25	−2.66	−2.26	−1.95	−1.60
		50	−2.62	−2.25	−1.95	−1.61
		100	−2.60	−2.24	−1.95	−1.61
		250	−2.58	−2.23	−1.95	−1.61
		500	−2.58	−2.23	−1.95	−1.61
		>500	−2.58	−2.23	−1.95	−1.61
2	τ_δ	25	−3.75	−3.33	−3.00	−2.62
		50	−3.58	−3.22	−2.93	−2.60
		100	−3.51	−3.17	−2.89	−2.58
		250	−3.46	−3.14	−2.88	−2.57
		500	−3.44	−3.13	−2.87	−2.57
		>500	−3.43	−3.12	−2.86	−2.57
	τ_α	25	3.41	2.97	2.61	2.20
		50	3.28	2.89	2.56	2.18
		100	3.22	2.86	2.54	2.17
		250	3.19	2.84	2.53	2.16
		500	3.18	2.83	2.52	2.16
		>500	3.18	2.83	2.52	2.16

模型	统计量	样本容量	0.01	0.025	0.05	0.10
3	τ_δ	25	-4.38	-3.95	-3.60	-3.24
		50	-4.15	-3.80	-3.50	-3.18
		100	-4.04	-3.73	-3.45	-3.15
		250	-3.99	-3.69	-3.43	-3.13
		500	-3.98	-3.68	-3.42	-3.13
		>500	-3.96	-3.66	-3.41	-3.12
	τ_α	25	4.05	3.59	3.20	2.77
		50	3.87	3.47	3.14	2.75
		100	3.78	3.42	3.11	2.73
		250	3.74	3.39	3.09	2.73
		500	3.72	3.38	3.08	2.72
		>500	3.71	3.38	3.08	2.72
	τ_β	25	3.74	3.25	2.85	2.39
		50	3.60	3.18	2.81	2.38
		100	3.53	3.14	2.79	2.38
		250	3.49	3.12	2.79	2.38
		500	3.48	3.11	2.78	2.38
		>500	3.46	3.11	2.78	2.38

- 一个简单的检验过程（经验：亦可结合原序列的线性/非线性形式）：
  - 同时估计出上述三个模型的适当形式，然后通过ADF临界值表检验零假设H_0：$\delta=0$。
  - 只要其中有一个模型的检验结果、拒绝了零假设，就可以认为时间序列是平稳的；
  - 当三个模型都不能拒绝零假设时，则认为时间序列是非平稳的。

3、例：检验1978-2000年间中国支出法GDP时间序列的平稳性

- 教材例8.1.6：检验1978~2006年间中国实际支出法国内生产总值GDPC时间序列的平稳性。
- 下面演示的是：检验1978~2000年间中国支出法国内生产总值GDPC时间序列的平稳性。
- 方法原理和过程是一样的，例8.1.6可以作为同学的练习。

- **首先检验模型3，经过偿试，模型3取2阶滞后：**

$$\Delta GDP_t = -1011.33 + 229.27T + 0.0093GDP_{t-1} + 1.50\Delta GDP_{t-1} - 1.01\Delta GDP_{t-2}$$

（-1.26） (1.91) (0.31) (8.94) (-4.95)

LM（1）=0.92， LM（2）=4.16

δ系数的t＞临界值，不能拒绝存在单位根的零假设。

小于5%显著性水平下“自由度分别为1与2的χ^2分布的临界值”，可见不存在自相关性；

因此，该模型的设定是正确的。

时间T的t统计量、小于ADF临界值，因此不能拒绝不存在趋势项的零假设。

需进一步检验模型2 。

- **检验模型2，经试验，模型2中滞后项取2阶：**

$$\Delta GDP_t = 357.45 + 0.057GDP_{t-1} + 1.65\Delta GDP_{t-1} - 1.15\Delta GDP_{t-2}$$

（-0.90） (3.38) (10.40) (-5.63)

LM（1）=0.57 LM（2）=2.85

LM检验表明模型残差不存在自相关性，因此该模型的设定是正确的。

GDP_{t-1}参数值的t统计量为正值，大于临界值，**不能拒绝存在单位根的零假设**。

常数项的t统计量小于AFD分布表中的临界值，**不能拒绝不存常数项的零假设。**

需进一步检验模型1。

- **检验模型1，经试验，模型1中滞后项取2阶：**

$$\Delta GDP_t = 0.063GDP_{t-1} + 1.701\Delta GDP_{t-1} - 1.194\Delta GDP_{t-2}$$

（4.15） (11.46) (-6.05)

LM（1）=0.17 LM（2）=2.67

LM检验表明模型残差项不存在自相关性，因此模型的设定是正确的。

GDP_{t-1}参数值的t统计量为正值，大于临界值，**不能拒绝存在单位根的零假设。**

可断定中国支出法GDP时间序列是非平稳的。

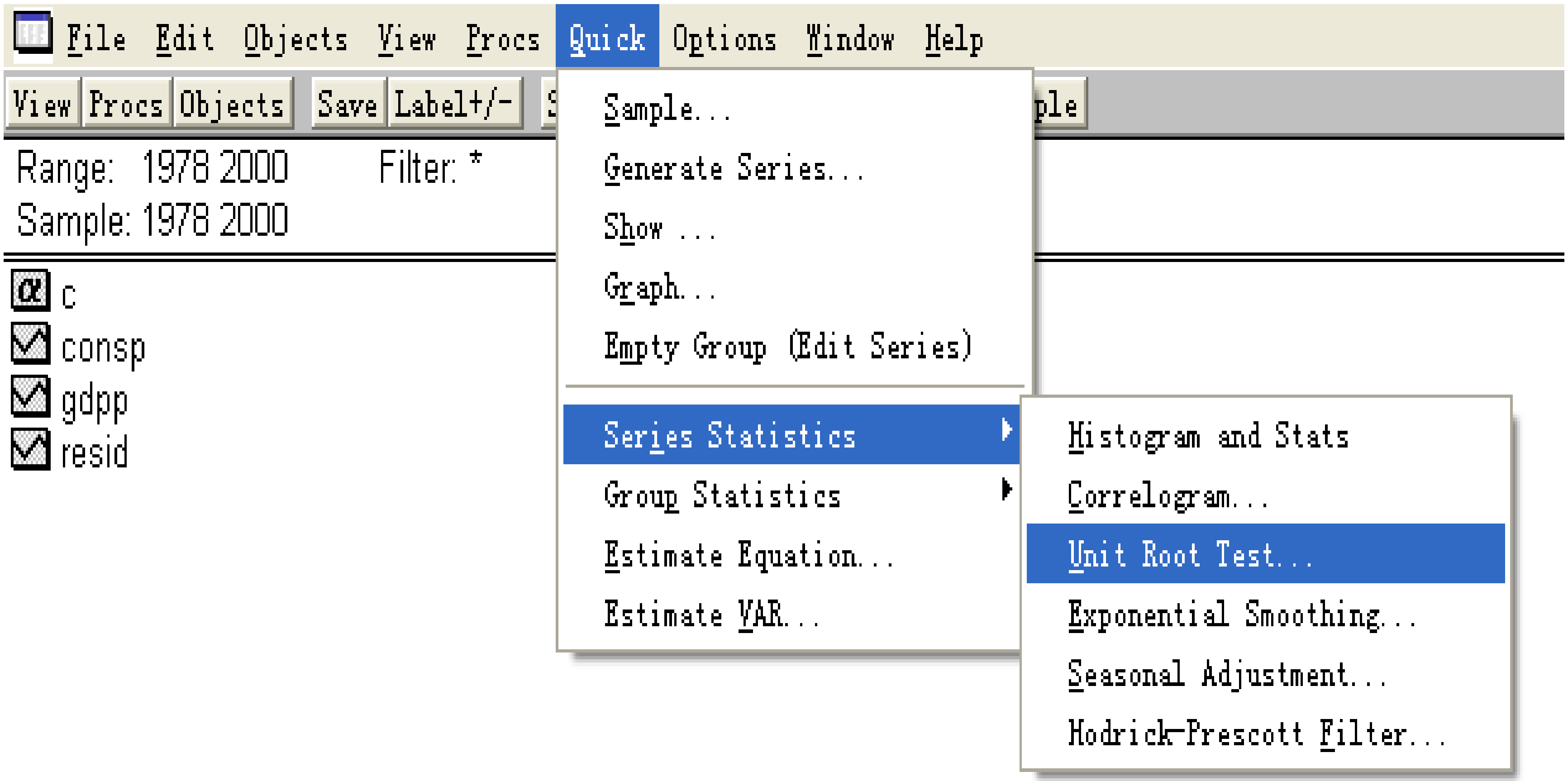
ADF检验在Eviews中的实现

File Edit Objects View Procs Quick Options

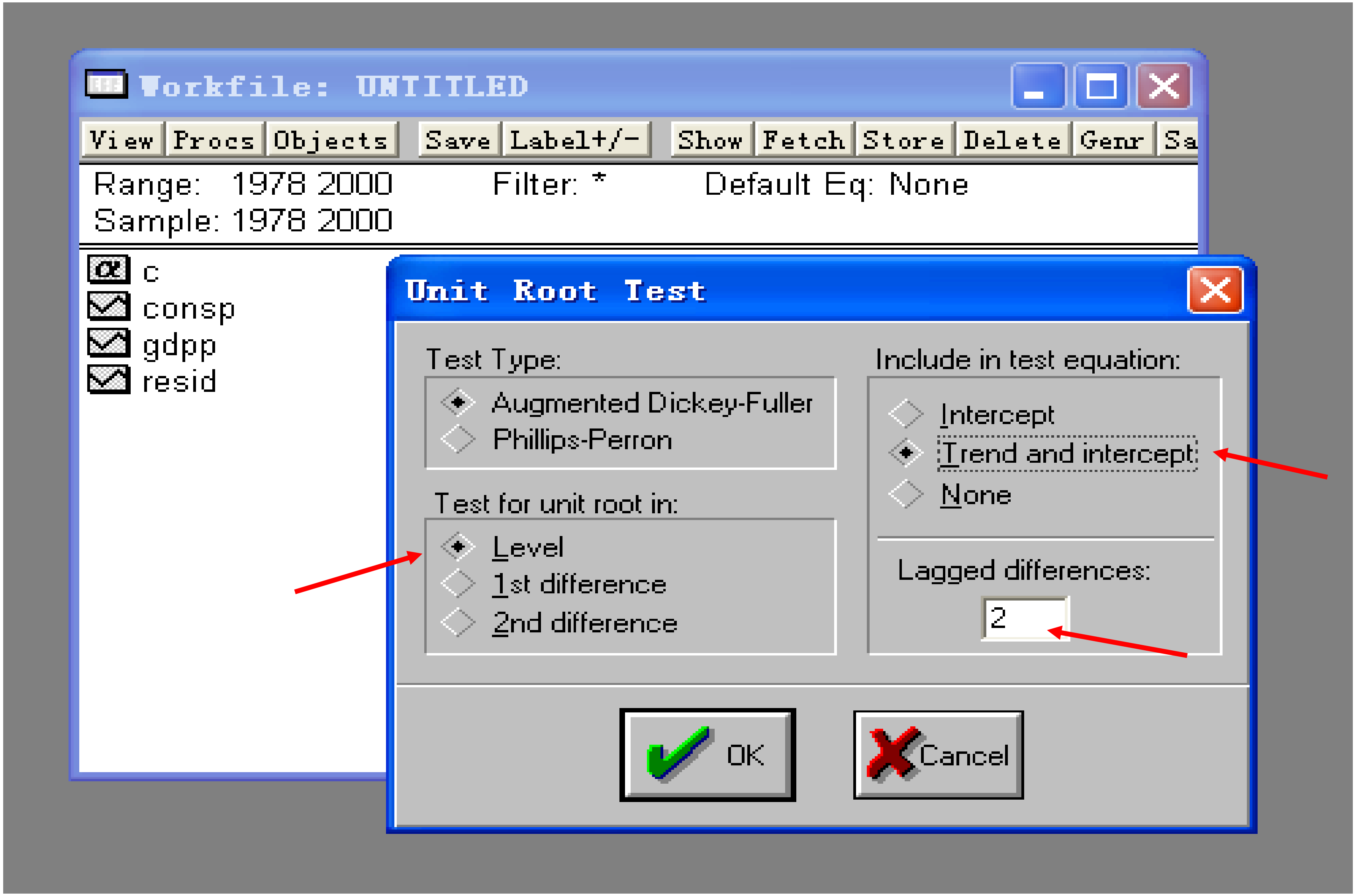
View Procs Objects Print Name Freeze Edit+/- Smp

obs	CONSP	GDPP
1978	395.8000	675.1000
1979	437.0000	716.9000
1980	464.1000	763.7000
1981	501.9000	792.4000
1982	533.5000	851.1000
1983	572.8000	931.4000
1984	635.6000	1059.200
1985	716.0000	1185.200
1986	746.5000	1269.600
1987	788.3000	1393.600
1988	836.4000	1527.000
1989	779.7000	1565.900
1990	797.1000	1602.300
1991	861.4000	1727.200
1992	966.6000	1949.800
1993	1048.600	2187.900
1994	1108.700	2436.100
1995	1213.100	2663.700
1996	1322.800	2889.100
1997	1380.900	3111.900
1998	1460.600	3323.100
1999	1564.400	3529.300
2000	1690.800	3789.700

ADF检验在Eviews中的实现



ADF检验在Eviews中的实现—检验GDPP



ADF检验在Eviews中的实现——检验GDPP

Augmented Dickey-Fuller Unit R			
ADF Test Statistic	-0.038831	1% Critical Value*	-4.5000
		5% Critical Value	-3.6591
		10% Critical Value	-3.2677

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(GDPP)
Method: Least Squares
Date: 05/22/05 Time: 18:03
Sample(adjusted): 1981 2000
Included observations: 20 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
GDPP(-1)	-0.001794	0.046202	-0.038831	0.9695
D(GDPP(-1))	0.880258	0.218718	4.024632	0.0011
D(GDPP(-2))	-0.574849	0.239245	-2.402761	0.0297
C	5.271304	19.11790	0.275726	0.7865
@TREND(1978)	8.132340	6.527117	1.245931	0.2319

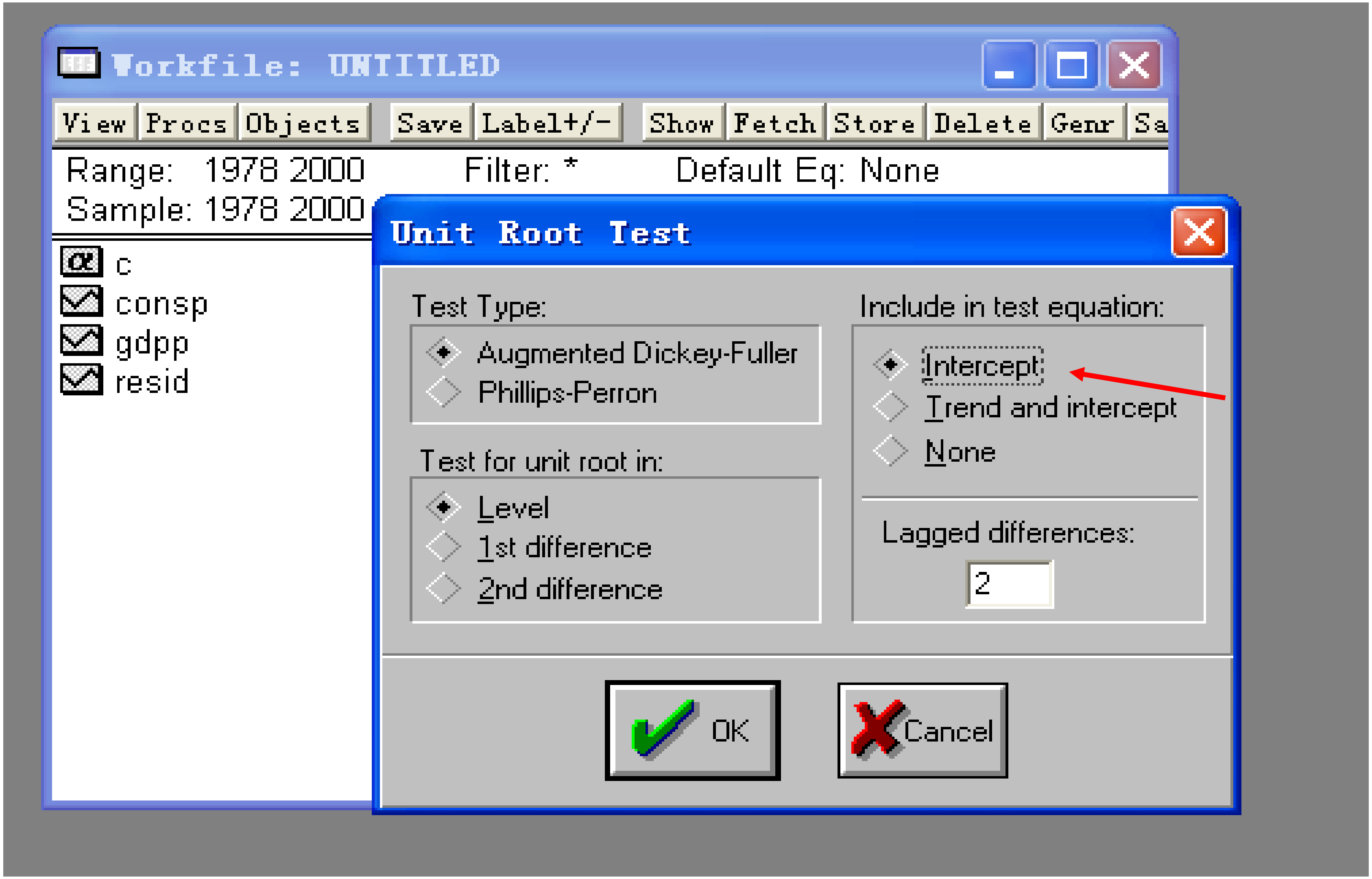
R-squared	0.841967	Mean dependent var	151.3000
Adjusted R-squared	0.799825	S.D. dependent var	79.09023
S.E. of regression	35.38567	Akaike info criterion	10.18281
Sum squared resid	18782.19	Schwarz criterion	10.43174
Log likelihood	-96.82809	F-statistic	19.97927
Durbin-Watson stat	1.840754	Prob(F-statistic)	0.000007

- 从GDPP(-1)的检验值看，其 t/τ统计量值-0.038831 > 临界值，不能拒绝存在单位根的零假设。

同时，由于时间项T的t统计量1.245931、也小于ADF分布表中的临界值，因此不能拒绝不存在趋势项的零假设。

需进一步检验模型2。

ADF检验在Eviews中的实现—检验GDPP



ADF检验在Eviews中的实现—检验GDPP

Augmented Dickey-Fuller U

ADF Test Statistic	2.731343	1% Critical Value*	-3.8067
		5% Critical Value	-3.0199
		10% Critical Value	-2.6502

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(GDPP)
Method: Least Squares
Date: 05/22/05 Time: 18:09
Sample(adjusted): 1981 2000
Included observations: 20 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
GDPP(-1)	0.051026	0.018682	2.731343	0.0148
D(GDPP(-1))	0.947957	0.215487	4.399143	0.0004
D(GDPP(-2))	-0.632943	0.238673	-2.651923	0.0174
C	8.014599	19.31570	0.414927	0.6837

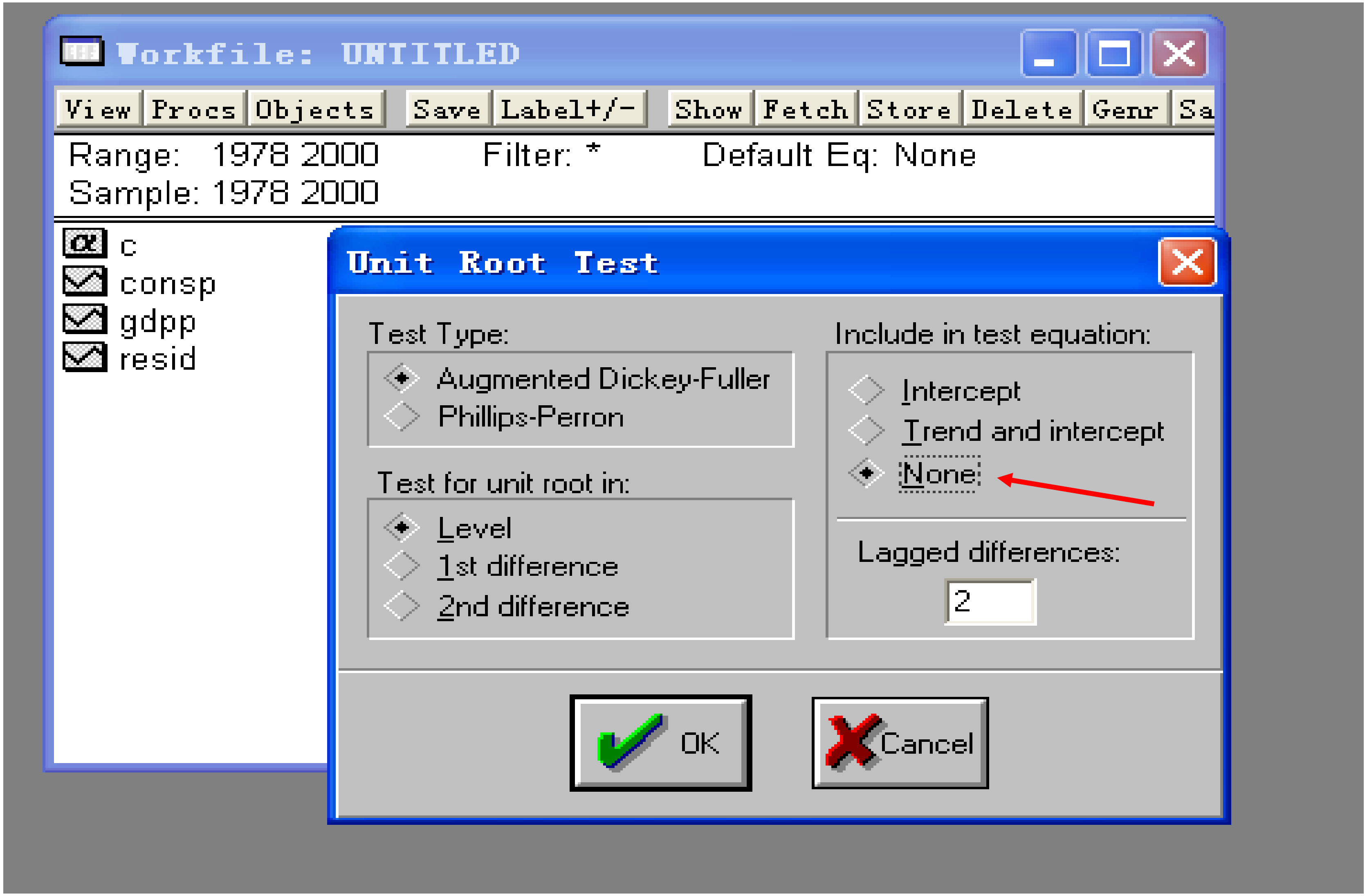
R-squared	0.825613	Mean dependent var	151.3000
Adjusted R-squared	0.792915	S.D. dependent var	79.09023
S.E. of regression	35.99127	Akaike info criterion	10.18129
Sum squared resid	20725.95	Schwarz criterion	10.38043
Log likelihood	-97.81287	F-statistic	25.24991
Durbin-Watson stat	1.888226	Prob(F-statistic)	0.000003

- 从GDPP(-1)的参数值看，其t统计量的值大于临界值，不能拒绝存在单位根的零假设。

同时，由于常数项的t统计量也小于ADF分布表中的临界值，因此不能拒绝不存在趋势项的零假设。

需进一步检验模型1。

ADF检验在Eviews中的实现—检验GDPP



ADF检验在Eviews中的实现—GDPP

Augmented Dickey-Fu

ADF Test Statistic	3.403305	1%	Critical Value*	-2.6889
		5%	Critical Value	-1.9592
		10%	Critical Value	-1.6246

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(GDPP)
Method: Least Squares
Date: 05/22/05 Time: 18:14
Sample(adjusted): 1981 2000
Included observations: 20 after adjusting endpoints

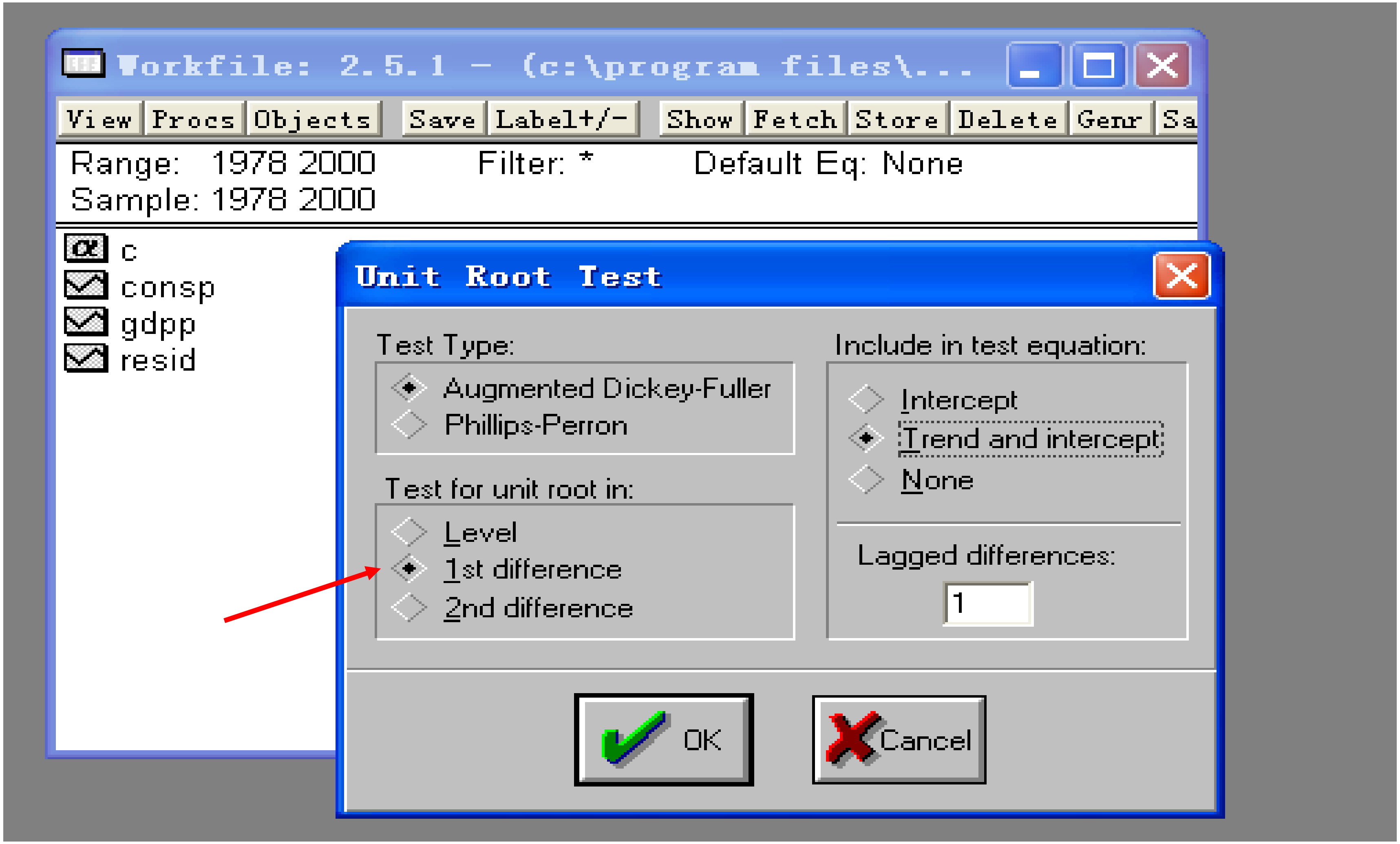
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
GDPP(-1)	0.054682	0.016067	3.403305	0.0034
D(GDPP(-1))	0.962464	0.207390	4.640852	0.0002
D(GDPP(-2))	-0.649078	0.229679	-2.826018	0.0116

R-squared	0.823736	Mean dependent var	151.3000
Adjusted R-squared	0.802999	S.D. dependent var	79.09023
S.E. of regression	35.10402	Akaike info criterion	10.09199
Sum squared resid	20948.96	Schwarz criterion	10.24135
Log likelihood	-97.91989	Durbin-Watson stat	1.900159

- 从GDPP(-1)的参数值看，其t统计量值大于临界值，不能拒绝存在单位根的零假设。

  至此，可断定GDPP时间序列是非平稳的。

ADF检验在Eviews中的实现—检验△GDPP



Augmented Dickey			
ADF Test Statistic	-3.560620	1% Critical Value*	-4.5000
		5% Critical Value	-3.6591
		10% Critical Value	-3.2677

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(GDPP,2)
Method: Least Squares
Date: 05/22/05 Time: 23:05
Sample(adjusted): 1981 2000
Included observations: 20 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(GDPP(-1))	-0.697150	0.195795	-3.560620	0.0026
D(GDPP(-1),2)	0.578415	0.213914	2.703960	0.0156
C	5.211492	18.45158	0.282442	0.7812
@TREND(1978)	7.899774	2.512551	3.144125	0.0063

R-squared	0.467103	Mean dependent var	10.68000
Adjusted R-squared	0.367184	S.D. dependent var	43.07213
S.E. of regression	34.26375	Akaike info criterion	10.08291
Sum squared resid	18784.07	Schwarz criterion	10.28206
Log likelihood	-96.82909	F-statistic	4.674848
Durbin-Watson stat	1.845143	Prob(F-statistic)	0.015733

- 从△GDPP(-1)的参数值看，其t统计量的值大于临界值，不能拒绝存在单位根的零假设。

同时，由于时间项项T的t统计量3.144、也小于AFD分布表中的临界值，因此不能拒绝不存在趋势项的零假设。需进一步检验模型2 。

（在1%置信度下）

Augmented Dicke			
ADF Test Statistic	-1.367410	1% Critical Value*	-3.8067
		5% Critical Value	-3.0199
		10% Critical Value	-2.6502

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(GDPP,2)
Method: Least Squares
Date: 05/22/05 Time: 23:11
Sample(adjusted): 1981 2000
Included observations: 20 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(GDPP(-1))	-0.174956	0.127947	-1.367410	0.1893
D(GDPP(-1),2)	0.290186	0.238496	1.216735	0.2403
C	32.89693	20.00874	1.644128	0.1185

R-squared	0.137855	Mean dependent var	10.68000
Adjusted R-squared	0.036426	S.D. dependent var	43.07213
S.E. of regression	42.28038	Akaike info criterion	10.46400
Sum squared resid	30389.72	Schwarz criterion	10.61336
Log likelihood	-101.6400	F-statistic	1.359125
Durbin-Watson stat	1.651760	Prob(F-statistic)	0.283423

从△GDPP(-1)的参数值看，其统计量的值大于临界值，不能拒绝存在单位根的零假设。

同时，由于常数项的t统计量也小于AFD分布表中的临界值，因此不能拒绝不存在趋势项的零假设。

需进一步检验模型1。

Augmented Dick

ADF Test Statistic	0.145004	1%	Critical Value*	-2.6889
		5%	Critical Value	-1.9592
		10%	Critical Value	-1.6246

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(GDPP,2)
Method: Least Squares
Date: 05/22/05 Time: 23:13
Sample(adjusted): 1981 2000
Included observations: 20 after adjusting endpoints

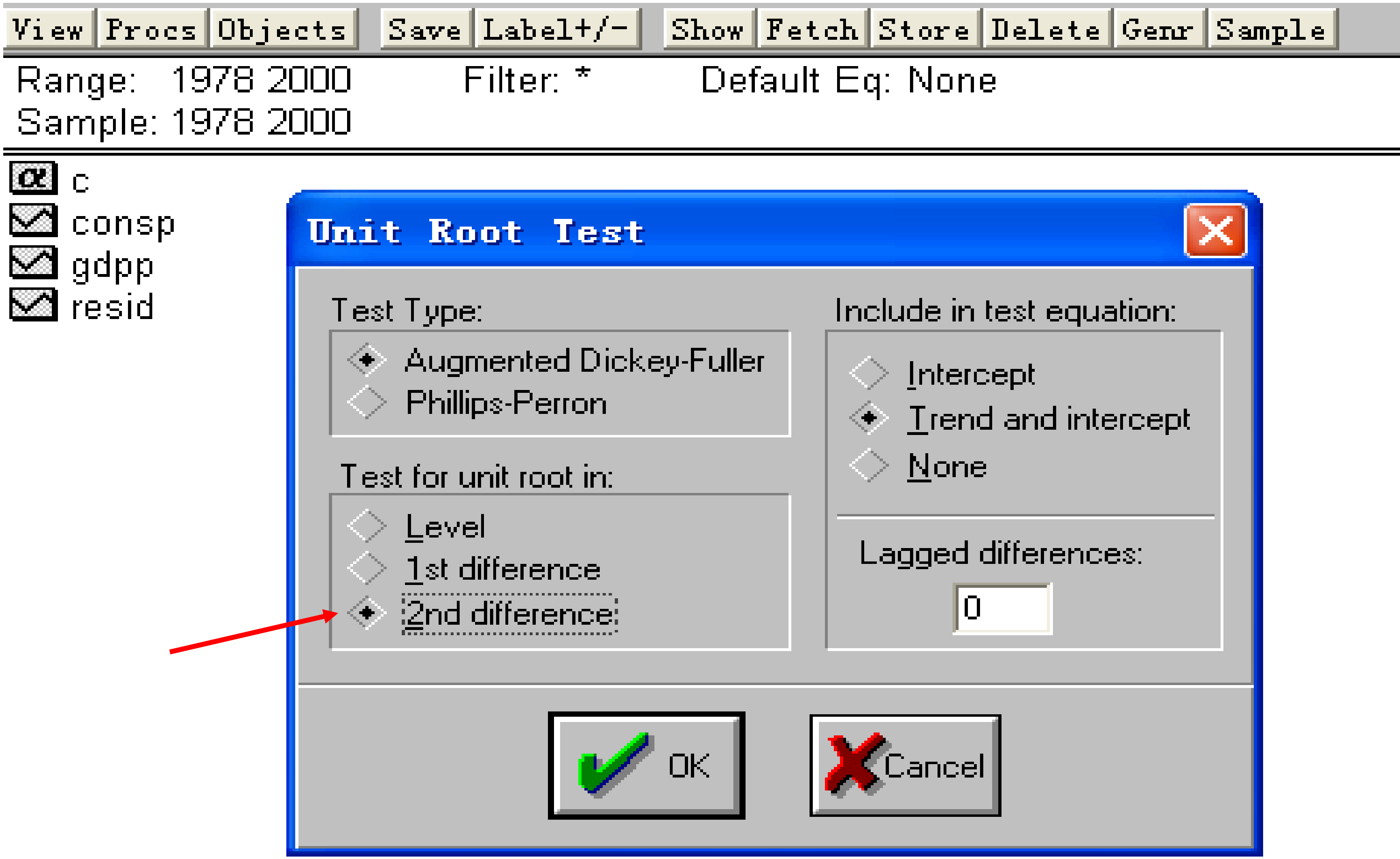
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(GDPP(-1))	0.009356	0.064523	0.145004	0.8863
D(GDPP(-1),2)	0.245722	0.247915	0.991154	0.3347

R-squared	0.000765	Mean dependent var	10.68000
Adjusted R-squared	-0.054748	S.D. dependent var	43.07213
S.E. of regression	44.23546	Akaike info criterion	10.51157
Sum squared resid	35221.97	Schwarz criterion	10.61114
Log likelihood	-103.1157	Durbin-Watson stat	1.694896

- 从△GDPP(-1)的参数值看，其统计量的值大于临界值，不能拒绝存在单位根的零假设。

至此，可断定△GDPP时间序列是非平稳的。

ADF检验在Eviews中的实现—检验Δ^2GDPP



Augmented Dickey-Fu

ADF Test Statistic	-3.209170	1% Critical Value*	-4.5000
		5% Critical Value	-3.6591
		10% Critical Value	-3.2677

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(GDPP,3)
Method: Least Squares
Date: 05/22/05 Time: 23:22
Sample(adjusted): 1981 2000
Included observations: 20 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(GDPP(-1),2)	-0.784136	0.244342	-3.209170	0.0051
C	5.018210	23.96523	0.209395	0.8366
@TREND(1978)	0.310991	1.728182	0.179953	0.8593

R-squared	0.380062	Mean dependent var	2.460000
Adjusted R-squared	0.307128	S.D. dependent var	53.46363
S.E. of regression	44.50256	Akaike info criterion	10.56645
Sum squared resid	33668.12	Schwarz criterion	10.71581
Log likelihood	-102.6645	F-statistic	5.211044
Durbin-Watson stat	1.725457	Prob(F-statistic)	0.017178

Augmented Dickey-

ADF Test Statistic	-3.313601	1% Critical Value*	-3.8067
		5% Critical Value	-3.0199
		10% Critical Value	-2.6502

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(GDPP,3)
Method: Least Squares
Date: 05/22/05 Time: 23:24
Sample(adjusted): 1981 2000
Included observations: 20 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(GDPP(-1),2)	-0.786475	0.237348	-3.313601	0.0039
C	8.924826	9.874568	0.903819	0.3780

R-squared	0.378881	Mean dependent var	2.460000
Adjusted R-squared	0.344374	S.D. dependent var	53.46363
S.E. of regression	43.28988	Akaike info criterion	10.46835
Sum squared resid	33732.25	Schwarz criterion	10.56793
Log likelihood	-102.6835	F-statistic	10.97995
Durbin-Watson stat	1.721379	Prob(F-statistic)	0.003864

Augmented Dickey-F

ADF Test Statistic	-3.213591	1%	Critical Value*	-2.6889
		5%	Critical Value	-1.9592
		10%	Critical Value	-1.6246

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(GDPP,3)
Method: Least Squares
Date: 05/22/05 Time: 23:25
Sample(adjusted): 1981 2000
Included observations: 20 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(GDPP(-1),2)	-0.744091	0.231545	-3.213591	0.0046

R-squared	0.350693	Mean dependent var	2.460000
Adjusted R-squared	0.350693	S.D. dependent var	53.46363
S.E. of regression	43.08078	Akaike info criterion	10.41274
Sum squared resid	35263.11	Schwarz criterion	10.46252
Log likelihood	-103.1274	Durbin-Watson stat	1.685785

• 从Δ^2GDPP(-1)参数值看，其统计量的值小于临界值，拒绝存在单位根的零假设。

至此，可断定Δ^2GDPP时间序列是平稳的。

GDPP是I(2)过程。

*4、平稳性检验的其它方法 （略）

- **PP检验**（**Phillips-Perron**）
  - 检验模型中不引入滞后项，以避免自由度损失降低检验效力。
  - 直接采用Newey-West一致估计式作为调整因子，修正一阶自回归模型得出的统计量。
  - 一种非参数检验方法

$$\boxed{\Delta x_t = \alpha + \beta t + \delta x_{t-1} + \varepsilon_t}$$

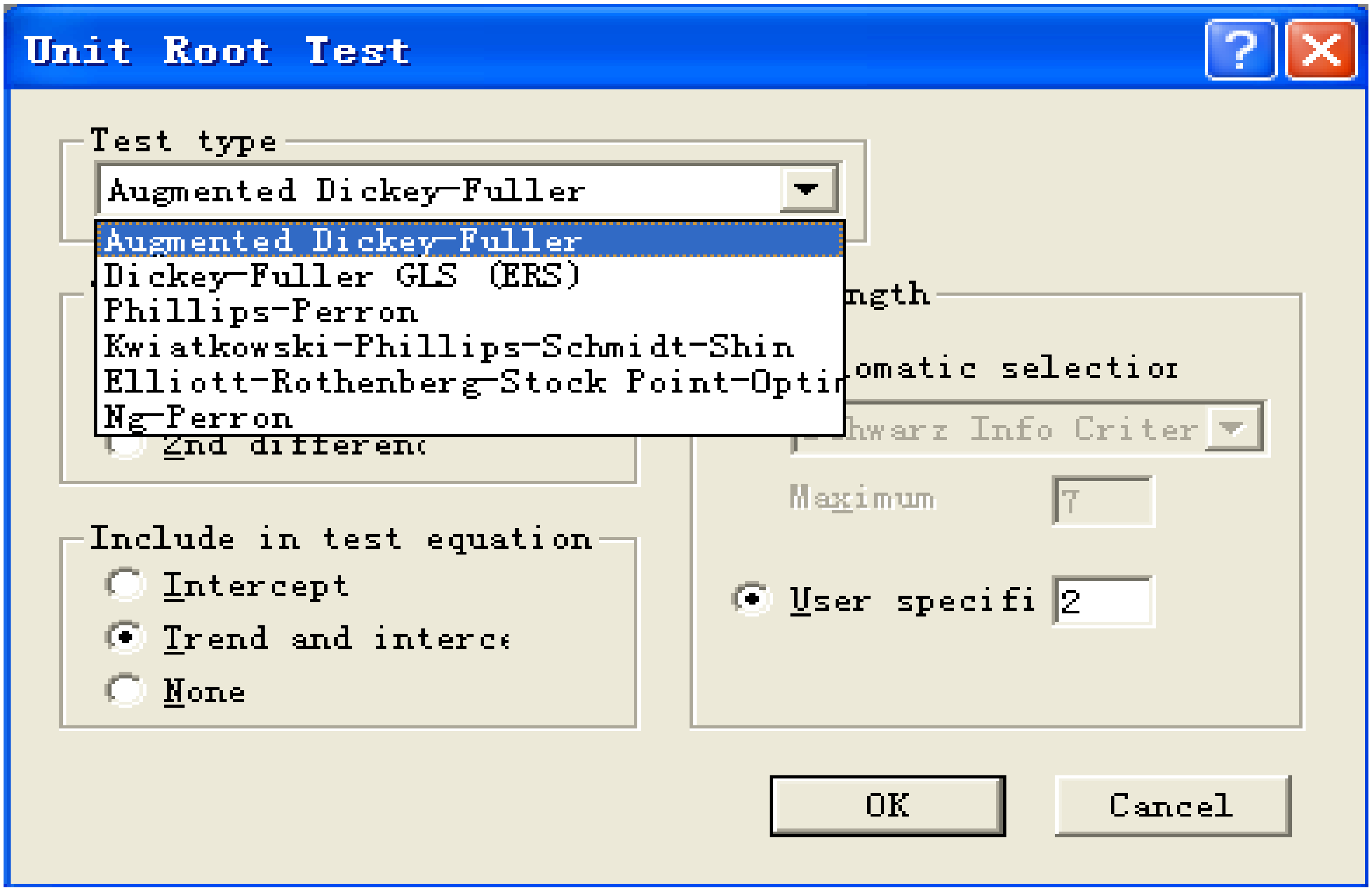
- 霍尔工具变量方法
  - 用工具变量法估计ADF检验模型。
  - 用X_{t-k}和ΔX_{t-i-k}作为y_{t-1}和ΔX_{t-i}的工具变量。
  - 检验统计量仍然服从ADF分布。

$$\boxed{\Delta X_t = \alpha + \beta t + \delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t}$$

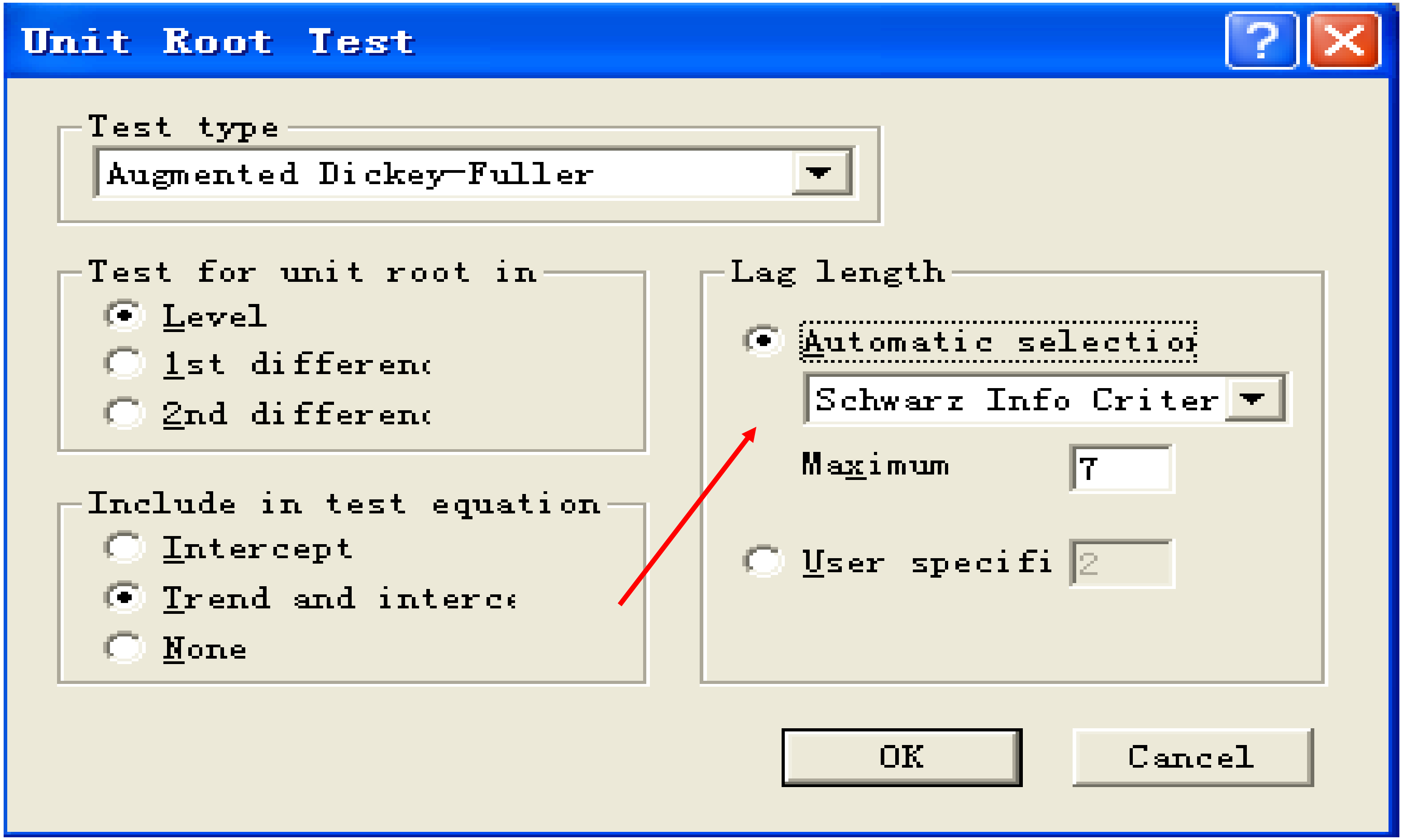
- **DF-GLS 方法（Elliott, Rothenberg, Stock,ERS）***
  - 去势（趋势、均值）。
  - 对去势后的序列进行**ADF**型检验。
  - 采用**GLS**估计检验模型。
  - 证明具有更良好的性质。

- **KPSS方法（Kwiatkowski,Philips,Schmidt,Shin）**
  - 检验趋势平稳
  - 非参数检验方法
- **其它方法**
  - **LMC(Leybourne,McCabe)**
  - **Ng-Perron**

Eviews 中提供的检验方法



Eviews 中提供的滞后阶数选择



四、单整、趋势平稳与差分平稳

1、单整（integrated Serial）

- 如果一个时间序列经过一次差分变成平稳的，就称原序列是一阶单整（integrated of 1）序列，记为I(1)。
- 一般地，如果一个时间序列**经过d次差分**后变成平稳序列，则称原序列是d 阶单整（integrated of d）序列，记为**I(d)**。
  - 例如上述人均GDP序列，即为I(2)序列。
- I(0)代表一平稳时间序列。

- 现实经济生活中，只有少数经济指标的时间序列表现为平稳的，如利率等;
- 大多数指标的时间序列，是非平稳的：

　　1）以当年价表示的消费额、收入、存量数据等，常是2阶单整的；

　　2）以不变价格表示的消费额、收入、流量数据等，常表现为1阶单整。

- 大多数非平稳的时间序列，一般可通过一次或多次差分的形式变为平稳的。

　　但也有一些时间序列，无论经过多少次差分，都不能变为平稳的——这种序列被称为非单整的（non-integrated）。

2、趋势平稳与差分平稳随机过程

$$X_t = \alpha + \beta t + \rho X_{t-1} + \mu_t$$

- 含有一阶自回归的随机过程：
  - 如果ρ=1，β=0，X_t成为一带位移的随机游走过程。根据α的正负，X_t表现出明显的上升或下降趋势。这种趋势称为随机性趋势（stochastic trend）。
  - 如果ρ=0，β≠0，X_t成为一带时间趋势的随机变化过程。根据β的正负，X_t表现出明显的上升或下降趋势。这种趋势称为确定性趋势（deterministic trend）。
  - 如果ρ=1，β≠0，则X_t包含有确定性与随机性两种趋势。

- 判断一个非平稳时间序列的趋势是随机性的、还是确定性的，可通过ADF检验中所用的第3个模型进行——该模型中已引入了表示确定性趋势的时间变量，即分离出了确定性趋势影响。
  - 如果检验结果表明所给时间序列有单位根，且时间变量前的参数显著为零，则该序列显示出随机性趋势；
  - 如果没有单位根，且时间变量前的参数显著地异于零，则该序列显示出确定性趋势。

- 差分平稳过程和趋势平稳过程
  - 具有随机性趋势的时间序列<u>**通过差分的方法**</u>消除随机性趋势。该时间序列称为差分平稳过程（difference stationary process）；
  - 具有确定性趋势的时间序列<u>**通过除去时间趋势项**</u>消除确定性趋势。该时间序列称为趋势平稳过程（trend stationary process）。

§8.2 随机时间序列分析模型
Stochastic Time Serial Model

一、时间序列模型概述

二、随机时间序列模型的平稳性条件

三、随机时间序列模型的识别

四、随机时间序列模型的估计

五、随机时间序列模型的检验

说明

- 严格从理论体系讲，本节内容属于时间序列分析，但不属于我们所定义的狭义的计量经济学。
- 本节内容一般不纳入计量经济学的课堂教学内容，供没有学习过应用数理统计或者经济预测课程的同学自学。
- 课件只提供一个简单的思路。

一、时间序列模型概述

1、时间序列模型

- 两类时间序列模型
  - 时间序列结构模型：通过协整分析，建立反映不同时间序列之间结构关系的模型，揭示了不同时间序列在每个时点上都存在的结构关系。
  - 随机时间序列模型：揭示时间序列不同时点观测值之间的关系，也称为无条件预测模型。
- 随机性时间序列模型包括：**AR(p)**、**MA(q)**、**ARMA(p,q)**。
- 随机性时间序列模型，并不属于现代计量经济学。

2、随机时间序列模型的适用性

- 用于无条件预测
  - 结构模型用于预测的条件：建立正确的结构模型，给定外生变量的预测值。
  - 无条件预测模型的优点。
- 结构模型的简化形式
  - 结构模型经常可以通过约化和简化，变换为随及时间序列模型。

二、随机时间序列模型的平稳性条件

1、AR(p)模型的平稳性条件

- 随机时间序列模型的平稳性，可通过它所生成的随机时间序列的平稳性来判断。
- 如果一个p阶自回归模型AR(p)生成的时间序列是平稳的，就说该AR(p)模型是平稳的；否则，就说该AR(p)模型是非平稳的。

- 考虑p阶自回归模型AR(p)

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$LX_t = X_{t-1}, L^2 X_t = X_{t-2}, \cdots, L^p X_t = X_{t-p}$$

$$(1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \cdots - \varphi_p L^p) X_t = \varepsilon_t$$

$$\Phi(L) = (1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \cdots - \varphi_p L^p)$$

$$\Phi(z) = (1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z^2 - \cdots - \varphi_p z^p) = 0$$

AR(p)的特征方程

可以证明，如果该特征方程的所有根在单位圆外（根的模大于1），则**AR(p)**模型是平稳的。

容易得到如下平稳性条件

$$\boxed{X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t} \longrightarrow \boxed{|\varphi| < 1}$$

$$\boxed{X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\varphi_1 + \varphi_2 < 1, \varphi_1 - \varphi_2 < 1, |\varphi_2| < 1}$$

$$\boxed{X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\boxed{\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_p < 1} \qquad \boxed{|\varphi_1| + |\varphi_2| + \cdots + |\varphi_p| < 1}$$

2、MA(q)模型的平稳性

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$E(X_t) = E(\varepsilon_t) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) - \cdots - \theta_q E(\varepsilon_{t-q}) = 0$$

$$\gamma_0 = Var\left(X_t\right) = (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\delta_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = Cov(X_t, X_{t-1}) = (-\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3 + \cdots + \theta_{q-1}\theta_q)\delta_\varepsilon^2$$

……

$$\gamma_{q-1} = Cov(X_t, X_{t-q+1}) = (-\theta_{q-1} + \theta_1\theta_q)\delta_\varepsilon^2$$

$$\gamma_q = Cov(X_t, X_{t-q}) = -\theta_q \delta_\varepsilon^2$$

当滞后期大于q时，X的自协方差系数为0。

- 有限阶移动平均模型总是平稳的。

3、ARMA(p,q)模型的平稳性

$$\boxed{X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}}$$

- **ARMA(p,q)**平稳性取决于**AR(p)**的平稳性。
- 当AR(p)部分平稳时，则该ARMA(p,q)模型是平稳的，否则，不是平稳的。

4、总结

- 一个平稳的时间序列总可以找到生成它的平稳的随机过程或模型。
- 一个非平稳的随机时间序列通常可以通过差分的方法将它变换为平稳的，对差分后平稳的时间序列也可找出对应的平稳随机过程或模型。
- 如果将一个非平稳时间序列通过d次差分，将它变为平稳的，然后用一个平稳的ARMA(p, q)模型作为它的生成模型，则该原始时间序列是一个自回归单整移动平均（autoregressive integrated moving average）时间序列，记为ARIMA(p, d, q)。

三、随机时间序列模型的识别

- 所谓随机时间序列模型的识别，就是对于一个平稳的随机时间序列，找出生成它的合适的随机过程或模型，即判断该时间序列是遵循一纯AR过程、还是遵循一纯MA过程或ARMA过程。
- 所使用的工具主要是时间序列的自相关函数（autocorrelation function，ACF）及偏自相关函数（partial autocorrelation function， PACF ）。

1、AR(p)过程

- 自相关函数ACF

k期滞后自协方差

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E(X_{t-k}(\varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t)) \\ &= \varphi_1 \gamma_{k-1} + \varphi_2 \gamma_{k-2} + \cdots + \varphi_p \gamma_{k-p}\end{aligned}$$

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0 = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \varphi_p \rho_{k-p}$$

k阶自相关函数

可见，无论k有多大， ρ_k的计算均与其1到p阶滞后的自相关函数有关，因此呈拖尾状。如果AR(p)是平稳的，则$|\rho_k|$递减且趋于零。

- 偏自相关函数

自相关函数ACF(k)给出了X_t与X_{t-1}的总体相关性，但总体相关性可能掩盖了变量间完全不同的隐含关系。

与之相反，X_t与X_{t-k}间的偏自相关函数(partial autocorrelation，简记为PACF)则是消除了中间变量X_{t-1}，…，X_{t-k+1} 带来的间接相关后的直接相关性，它是在已知序列值X_{t-1}，…，X_{t-k+1}的条件下，X_t与X_{t-k}间关系的度量。

AR(p)的一个主要特征是:k>p时，$\rho_k^*=Corr(X_t,X_{t-k})=0$ ，即ρ_k^*在p以后是截尾的。

- 随机时间序列的识别原则：

  若Xt的偏自相关函数在p以后截尾，即**k>p**时，ρ_k*=0，而它的自相关函数ρ_k是拖尾的，则此序列是自回归AR(p)序列。

2、MA(q)过程

- **MA(q)模型的识别规则：**若随机序列的自相关函数截尾，即自q以后，$\rho_k=0$（ k>q）；而它的偏自相关函数是拖尾的，则此序列是滑动平均MA(q)序列。

3、ARMA(p, q)过程

- ARMA(p,q)模型的识别规则：若随机序列的自相关函数和偏自相关函数都是拖尾的，则此序列是ARMA(p,q)序列。
- 实际上，ARMA(p,q)过程的偏自相关函数，可能在p阶滞后前有几项明显的尖柱（spikes），但从p阶滞后项开始逐渐趋向于零；而它的自相关函数则是在q阶滞后前有几项明显的尖柱，从q阶滞后项开始逐渐趋向于零。

四、随机时间序列模型的估计

- AR(p)、MA(q)、ARMA(p,q)模型的估计方法较多，大体上分为3类：
  - 最小二乘估计；
  - 矩估计；
  - 利用自相关函数的直接估计。
- 下面有选择地加以介绍。

1. AR(p)模型的Yule Walker方程估计

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \varphi_p \rho_{k-p}$$

$\rho_k = \rho_{-k}$

$$\rho_1 = \varphi_1 + \varphi_2 \rho_1 + \cdots + \varphi_p \rho_{p-'1}$$

$$\rho_2 = \varphi_1 \rho_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_p \rho_{p-2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\rho_p = \varphi_1 \rho_{p-1} + \varphi_2 \rho_{p-1} + \cdots \varphi_p \rho_{p-k}$$

此方程组被称为Yule Walker方程组。该方程组建立了AR(p)模型的模型参数$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$与自相关函数$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$的关系。

$$\begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_0 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_0 & \cdots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \vdots & & & \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \cdots & \hat{\rho}_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_t = X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \cdots - \varphi_p X_{t-p}$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = E\varepsilon_t^2 = \cdots = \gamma_0 - \sum_{i,j=1}^{p} \varphi_i \varphi_j \gamma_{j-i}$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \hat{\gamma}_0 - \sum_{i,j=1}^{p} \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j \hat{\gamma}_{j-i}$$

2. MA(q)模型的矩估计

将MA(q)模型的自协方差函数中的各个量用估计量代替，得到：

$$\hat{\gamma}_k=\begin{cases}\hat{\sigma}_\varepsilon^2(1+\hat{\theta}_1^2+\hat{\theta}_2^2+\cdots+\hat{\theta}_q^2) & \text{当}k=0\\ \hat{\sigma}_\varepsilon^2(-\hat{\theta}_k+\hat{\theta}_1\hat{\theta}_{k+1}+\cdots+\hat{\theta}_{q-k}\hat{\theta}_q) & \text{当}1\le k\le q\\ 0 & \text{当}k>q\end{cases}$$

非线性方程组，用直接法或迭代法求解。常用的迭代方法有线性迭代法和Newton-Raphsan迭代法。

$$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\cdots\hat{\theta}_q,\hat{\sigma}_\varepsilon^2$$

3. ARMA(p, q)模型的矩估计

- 在 **ARMA(p,q)** 中共有 **(p+q+1)** 个待估参数 $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_p$与$\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_q$以及$\sigma_\varepsilon^2$，其估计量计算步骤及公式如下：

- 第一步，估计$\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_p$

$$\begin{bmatrix}\hat{\varphi}_1\\ \hat{\varphi}_2\\ \vdots\\ \hat{\varphi}_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\rho}_q & \hat{\rho}_{q-1} & \cdots & \hat{\rho}_{q-p+1}\\ \hat{\rho}_{q+1} & \hat{\rho}_q & \cdots & \hat{\rho}_{q-p}\\ \vdots & & & \\ \hat{\rho}_{q+p-1} & \hat{\rho}_{q+p-2} & \cdots & \hat{\rho}_q\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{\rho}_{q+1}\\ \hat{\rho}_{q+2}\\ \vdots\\ \hat{\rho}_{q+p}\end{bmatrix}$$

- 第二步，改写模型，求$\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_q$以及$\sigma_\varepsilon^2$的估计值

$$X_t=\varphi_1 X_{t-1}+\cdots+\varphi_p X_{t-p}+\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\cdots-\theta_q\varepsilon_{t-q}$$

$$\downarrow$$

$$X_t-\varphi_1 X_{t-1}-\varphi_2 X_{t-2}-\cdots-\varphi_p X_{t-p}=\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}-\cdots-\theta_q\varepsilon_{t-q}$$

$$\tilde{X}_t=X_t-\hat{\varphi}_1 X_{t-1}-\hat{\varphi}_2 X_{t-2}-\cdots-\hat{\varphi}_p X_{t-p}$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{X}_t=\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}-\cdots-\theta_q\varepsilon_{t-q}$$

构成一个MA模型。按照估计MA模型参数的方法，可以得到$\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_q$以及$\sigma_\varepsilon^2$的估计值。

4. AR(p)的最小二乘估计

$$X_t = \hat{\varphi}_1 X_{t-1} + \hat{\varphi}_2 X_{t-2} + \cdots + \hat{\varphi}_p X_{t-p} + \hat{\varepsilon}_t$$

$$S(\hat{\varphi}) = \sum_{t=p+1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2 = \sum_{t=p+1}^{n} (X_t - \hat{\varphi}_1 X_{t-1} - \hat{\varphi}_2 X_{t-2} - \cdots - \hat{\varphi}_p X_{t-p})^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\varphi}_j} = 0$$

$$\sum_{t=p+1}^{n} (X_t - \hat{\varphi}_1 X_{t-1} - \hat{\varphi}_2 X_{t-2} - \cdots - \hat{\varphi}_p X_{t-p}) X_{t-j} = 0$$

解该方程组，就可得到待估参数的估计值。

五、模型的检验

1、残差项的白噪声检验

- 由于ARMA(p,q)模型的识别与估计是在假设随机扰动项是一白噪声的基础上进行的，因此，如果估计的模型确认正确的话，残差应代表一白噪声序列。
- 如果通过所估计的模型计算的样本残差不代表一白噪声，则说明模型的识别与估计有误，需重新识别与估计。
- 在实际检验时，主要检验残差序列是否存在自相关。

- 可用Q_{LB}统计量进行$\chi 2$检验：在给定显著性水平下，可计算不同滞后期的Q_{LB}值，通过与$\chi 2$分布表中的相应临界值比较，来检验是否拒绝残差序列为白噪声的假设。若大于相应临界值，则应拒绝所估计的模型，需重新识别与估计。

2、AIC与SBC模型选择标准

- 在多组通过识别检验的（p, q）值选择最适当的模型。
- 常用的模型选择的判别标准有：赤池信息法（**Akaike information criterion**，简记为AIC）与施瓦兹贝叶斯法（**Schwartz Bayesian criterion**，简记为SBC）：

$$AIC = T\ln(RSS) + 2n$$

$$SBC = T\ln(RSS) + n\ln(T)$$

- 在选择可能的模型时，AIC与SBC越小越好。

§ 8.3 协整与误差修正模型

Cointegration and Error Correction Model

一、长期均衡与协整分析*

二、协整检验

三、误差修正模型*

一、长期均衡与协整分析
Equilibrium and Cointegration

1、问题的提出

- 经典回归模型（classical regression model），是建立在平稳数据变量基础上的；

  对非平稳变量，不能直接使用经典回归模型，否则会出现虚假回归等诸多问题；由于许多经济变量是非平稳的，这就给经典的回归分析方法带来了很大限制。

- 但是，如果非平稳变量之间有着长期稳定关系，即它们之间是协整的（cointegration），则可使用经典回归模型方法建立回归模型的。

  例如，中国居民人均消费水平与人均GDP变量的例子：从经济理论上说，人均GDP决定着居民人均消费水平，它们之间可能有着长期稳定关系，即它们之间是协整的。

2、长期均衡

- 经济理论指出，某些经济变量间确实存在着长期均衡关系——这种均衡关系意味着经济系统不存在破坏均衡的内在机制，如果变量在某时期受到干扰后、短时间偏离其长期均衡点，则均衡机制将会在下一期进行调整、以使其重新回到均衡状态。

假设X与Y间的长期“均衡关系”由式描述

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \mu_t$$

该均衡关系意味着:

给定X的一个值，Y相应的均衡值、随之确定为 $\alpha_0+\alpha_1 X$。

- 在t-1期末，存在下述三种情形之一：
  - Y等于它的均衡值：$Y_{t-1}= \alpha_0+\alpha_1X_{t-1}$ ；
  - Y小于它的均衡值：$Y_{t-1}< \alpha_0+\alpha_1X_{t-1}$ ；
  - Y大于它的均衡值：$Y_{t-1}> \alpha_0+\alpha_1X_{t-1}$ ；

- 在时期t，假设X有一个变化量ΔX_t：

1）如果变量X与Y在时期t、与t-1末期均满足它们间的长期均衡关系，即上述第一种情况，则Y的相应变化量为:

$$\Delta Y_t = \alpha_1 \Delta X_t + v_t \qquad v_t = \mu_t - \mu_{t-1}$$

2）如果t-1期末，发生了上述第二种情况，即Y_{t-1}的值小于其均衡值，则t期末Y_t的变化、往往会比第一种情形下Y的变化ΔY_t大一些；

3）反之，如果t-1期末Y_{t-1}的值大于其均衡值，则t期末Y的变化、往往会小于第一种情形下的ΔY_t。

- 可见，如果$Y_t=\alpha_0+\alpha_1X_t+\mu_t$正确提示了X与Y间的长期稳定的"均衡关系"，则意味着Y对其均衡点的偏离从本质上说是"临时性"的。

- 一个重要的假设就是：随机扰动项μ_t必须是平稳序列。

如果μ_t有随机性趋势（上升或下降），则会导致Y对其均衡点的任何偏离、都会被长期累积下来而不能被消除。

- 式$Y_t=\alpha_0+\alpha_1 X_t+\mu_t$中，随机扰动项$\mu_t$、也被称为**非均衡误差**（**disequilibrium error**），它是变量X与Y的一个线性组合：

$$\boxed{\mu_t = Y_t - \alpha_0 - \alpha_1 X_t}$$

- 如果X与Y间的长期均衡关系正确，该式表述的非均衡误差应是一平稳时间序列、且具有零期望值，即是具有0均值的I(0)序列。

- **非平稳时间序列的“线性组合”，也可能成为平稳的；此时，称变量X与Y是协整的（cointegrated）。**

3、协整

- 如果序列$\{X_{1t},X_{2t},\ldots,X_{kt}\}$都是d阶单整，存在向量$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$，使得：

$$Z_t=\alpha X^T \sim I(d-b),$$

其中，$b>0$（降阶），$X=(X_{1t},X_{2t},\ldots,X_{kt})^T$，则认为序列$\{X_{1t},X_{2t},\ldots,X_{kt}\}$是(d, b)阶协整，记为$X_t \sim CI(d,b)$，$\alpha$为协整向量（cointegrated vector）。

- 如果两个变量都是单整变量，只有当它们的单整阶数相同时，才可能协整；

如果它们的单整阶数不相同，就不可能协整。

- 3个以上的变量，如果具有不同的单整阶数，有可能经过线性组合、构成低阶单整变量。

$$W_t \sim I(1),\quad V_t \sim I(2),\quad U_t \sim I(2)$$

$$P_t = aV_t + bU_t \sim I(1)$$
$$Q_t = cW_t + eP_t \sim I(0)$$

$$V_t, U_t \sim CI(2,1)$$
$$W_t, P_t \sim CI(1,1)$$

- “（d,d）阶协整” 是一类非常重要的协整关系，它的经济意义在于：

两个变量，虽然它们具有各自的长期波动规律，但是如果它们是（d,d）阶协整的，则它们之间存在着一个**长期稳定的比例关系**。

例如，中国CPC和GDPPC，各自都是2阶单整：如果它们是(2, 2)阶协整，说明它们之间存在着一个长期稳定的比例关系；从计量经济学模型的意义上讲，建立如下居民人均消费函数模型是合理的。

$$\boxed{CPC_t = \alpha_0 + \alpha_1 GDPPC_t + \mu_t}$$

- 此时，尽管两个时间序列是非平稳的，也可以用经典的回归分析方法建立回归模型。

- 从这里，我们已经初步认识到：检验<u>变量之间的协整关系</u>，对建立计量经济学模型是非常重要的。

而且，从变量之间是否具有协整关系出发选择模型的变量，其数据基础是牢固的，其统计性质是优良的。

二、协整检验—EG检验

1、两变量的Engle-Granger检验

- 为检验两变量Y_t，X_t是否为协整，Engle和Granger于1987年提出两步检验法，也称为EG检验。

第一步，用OLS估计方程 $Y_t=\alpha_0+\alpha_1 X_t+\mu_t$

并计算非均衡误差，得到：

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{Y}_t &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_t \\ \hat{e}_t &= Y_t - \hat{Y}_t\end{aligned}}$$

称为**协整回归(cointegrating)**或静态回归**(static regression)**。

第二步，检验$\hat{e}_t$的单整性。如果$\hat{e}_t$为稳定序列，则认为变量Y_t, X_t为(1,1)阶协整；如果$\hat{e}_t$为1阶单整，则认为变量Y_t, X_t为(2,1)阶协整；…。

- 非均衡误差的单整性的检验方法，仍然是DF检验或者ADF检验。

- 需要注意是，这里DF或ADF检验、是针对**“协整回归计算出的误差项”**（非均衡误差的估计），而非真正的非均衡误差。

而OLS法采用了残差最小平方和原理，因此估计量δ是向下偏倚的，这样将导致拒绝零假设的机会比实际情形大。

于是对e_t平稳性检验的DF与ADF临界值，应该比正常的DF与ADF临界值还要小。

- MacKinnon(1991)通过模拟试验、给出了双变量协整ADF检验的临界值。

表 8.3.1　　双变量协整 ADF 检验临界值

样本容量	显著性水平 0.01	显著性水平 0.05	显著性水平 0.10
25	−4.37	−3.59	−3.22
50	−4.12	−3.46	−3.13
100	−4.01	−3.39	−3.09
∞	−3.90	−3.33	−3.05

- 例8.3.1 利用1978-2006年中国居民总量消费Y与总量可支配收入X的数据，检验它们取对数的序列lnY与lnX间的协整关系。
  - 分别对lnY与lnX进行单位根检验，结论：它们均是I(1)序列 。
  - 进行协整回归。
  - 对协整回归的残差序列进行单位根检验，结论：残差序列是平稳的。
  - 由此判断中国居民总量消费的对数序列lnY与总可支配收入的对数序列lnX是（1,1）阶协整的。
  - 验证了该两变量的对数序列间存在长期稳定的“均衡”关系。

2、多变量协整关系的检验—扩展的E-G检验

多变量协整关系的检验要比双变量复杂一些，主要在于协整变量间可能存在“多种”稳定的线性组合。

假设有4个I(1)变量Z、X、Y、W，它们有如下的长期均衡关系：

$$\boxed{Z_t = \alpha_0 + \alpha_1 W_t + \alpha_2 X_t + \alpha_3 Y_t + \mu_t}$$

非均衡误差项μ_t，应是I(0)序列：

$$\boxed{\mu_t = Z_t - \alpha_0 - \alpha_1 W_t - \alpha_2 X_t - \alpha_3 Y_t}$$

然而，如果Z与W，X与Y间分别存在长期均衡关系：

$$Z_t = \beta_0 + \beta_1 W_t + v_{1t}$$
$$X_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_t + v_{2t}$$

则非均衡误差项v_{1t}、v_{2t}一定是稳定序列I(0)。于是**v_{1t}、v_{2t}的任意线性组合**也是稳定的。例如

$$v_t = v_{1t} + v_{2t} = Z_t - \beta_0 - \gamma_0 - \beta_1 W_t + X_t - \gamma_1 Y_t$$

一定是I(0)序列。

由于v_t象μ_t一样，也是Z、X、Y、W四个变量的线性组合，由此v_t 式也成为该四变量的**另一稳定线性组合**。

（1，$-\alpha_0, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3$）是对应于$\mu_t$ 式的协整向量，（$1, -\beta_0-\gamma_0, -\beta_1, 1, -\gamma_1$）是对应于$v_t$式的协整向量。

- 检验程序：
- 对多变量协整检验过程，基本与双变量情形相同，即需检验变量是否具有同阶单整性，以及是否存在稳定的线性组合。
- 在检验是否存在稳定的线性组合时，需通过设置一个变量为被解释变量，其他变量为解释变量，进行OLS估计并检验残差序列是否平稳。
- 如果不平稳，则需**更换被解释变量**，进行同样的OLS估计及相应残差项检验。
- 当所有变量、都被作为被解释变量检验之后，仍不能得到平稳的残差项序列，则认为这些变量间不存在（d,d）阶协整。

• 检验残差项是否平稳的DF与ADF检验临界值、要比通常的DF与ADF检验临界值小，而且该临界值还受到所检验的变量个数的影响。

MacKinnon(1991)通过模拟试验得到的不同变量协整检验的临界值。

表 8.3.2　　多变量协整检验 ADF 临界值

样本容量	变量数=3 显著性水平			变量数=4 显著性水平			变量数=6 显著性水平		
	0.01	0.05	0.1	0.01	0.05	0.1	0.01	0.05	0.1
25	-4.92	-4.1	-3.71	-5.43	-4.56	-4.15	-6.36	-5.41	-4.96
50	-4.59	-3.92	-3.58	-5.02	-4.32	-3.98	-5.78	-5.05	-4.69
100	-4.44	-3.83	-3.51	-4.83	-4.21	-3.89	-5.51	-4.88	-4.56
∝	-4.30	-3.74	-3.45	-4.65	-4.1	-3.81	-5.24	-4.7	-4.42

3、重要讨论：协整方程等价于均衡方程？

<Econometric Analysis>(fifth edition)p649-650

In the *fully specified* regression model

$$y_t = \beta x_t + \varepsilon_t$$

If the two series are both I(1), then there *may* be a β such that

$$\varepsilon_t = y_t - \beta x_t$$

is I(0). Two series that satisfy this requirement are said to be cointegrated. In such a case, we can distinguish between a long-run relationship between y_t and x_t, that is, the manner in which the two variables drift upward together, and the short-run dynamics, that is, the relationship between deviation of y_t from its long-run trend and deviation of x_t from its long-run trend.

<Basic Econometrics>(fourth edition)p822

Economically speaking, two variables will be cointegrated if they have a long-term, or equilibrium, relationship between them.

<Essentials of Econometrics>(fourth edition)p384

Even if the time series of y_t and x_t are nonstationary, it is quite possible that there is still a(long-run) stable or equilibrium relationship between the two.

……

We can say that although y_t and x_t are individually nonstationary, their linear combination is stationary. That is, the two time series are cointegrated, or, in other words, there seems to be a long-run or equilibrium relationship between the two variables.

- 协整方程具有统计意义，而均衡方程具有经济意义。

  时间序列之间在经济上存在均衡关系，在统计上一定存在协整关系；反之，在统计上存在协整关系的时间序列之间，在经济上并不一定存在均衡关系。

  协整关系，是均衡关系的必要条件、但不是充分条件。

  – 例如：农场居民人均消费和城镇居民人均收入之间存在协整关系，但是它们在经济上并不存在均衡关系。
  – 例如：经济增长率和通货膨胀率之间存在协整关系，但是它们在经济上并不存在均衡关系。

- 均衡方程中，应包含均衡系统中的所有时间序列；而协整方程中，可只包含其中的一部分时间序列。
  - 例如：在GDP核算系统中，包括GDP、消费额、资本形成额、净出口额：均衡关系存在于4个序列之间，而协整关系可存在于任意2个、或3个序列之间。

- 协整方程的随机扰动项，是平稳的；而均衡方程的随机扰动项，必须是白噪声。

- 结论：不能由协整导出均衡，只能用协整检验均衡

四、误差修正模型
Error Correction Model, ECM

1、一般差分模型的问题

- 对非稳定时间序列，可通过差分方法、将其化为稳定序列，然后再建立经典的回归分析模型。

$$\boxed{Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \mu_t}$$

$$\boxed{\Delta Y_t = \alpha_1 \Delta X_t + v_t} \qquad \boxed{v_t = \mu_t - \mu_{t-1}}$$

只表达了X与Y间的短期关系，而没有揭示它们间的长期关系；关于变量水平值的重要信息，将被忽略。

误差项μ_t不存在序列相关，v_t是一个一阶移动平均时间序列，因而是序列相关的。

2、误差修正模型

- 是一种具有特定形式的计量经济学模型，它的主要形式是由Davidson、 Hendry、Srba和Yeo于1978年提出的，称为DHSY模型。

$$\boxed{Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \mu_t}$$

现实经济中很少恰好处在均衡点上：
假设具有（1,1）阶ADL
自回归分布滞后形式

$$\boxed{Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \delta Y_{t-1} + \mu_t}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned}\Delta Y_t &= \beta_0 + \beta_1 \Delta X_t + (\beta_1 + \beta_2) X_{t-1} - (1-\delta) Y_{t-1} + \mu_t \\ &= \beta_1 \Delta X_t - (1-\delta) \cdot \left(Y_{t-1} - \frac{\beta_0}{1-\delta} - \frac{\beta_1 + \beta_2}{1-\delta} X_{t-1} \right) + \mu_t\end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\Delta Y_t = \beta_1 \Delta X_t - \lambda (Y_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_1 X_{t-1}) + \mu_t}$$

- Y的变化，决定于“X的变化”以及“前一时期的非均衡程度”。

- 一阶误差修正模型(first-order error correction model)的形式：

$$\boxed{\Delta Y_t = \beta_1 \Delta X_t - \lambda \cdot (Y_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_1 X_{t-1}) + \mu_t}$$

$$\boxed{\Delta Y_t = \beta_1 \Delta X_t - \lambda \cdot ecm_{t-1} + \mu_t}$$

若(t-1)时刻Y大于其长期均衡解$\alpha_0+\alpha_1 X$，*ecm*为正、则$(-\lambda ecm)$为负，使得ΔY_t减少；

若(t-1)时刻Y小于其长期均衡解$\alpha_0+\alpha_1 X$，*ecm*为负、则$(-\lambda ecm)$为正，使得ΔY_t增大。

这体现了长期非均衡误差ecm项、对短期变化的修正。

- 复杂的ECM形式（略讲），例：高阶分布滞后、多变量

$$\boxed{Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \beta_3 X_{t-2} + \delta_1 Y_{t-1} + \delta_2 Y_{t-2} + \mu_t}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\Delta Y_t = -\delta_2 \Delta Y_{t-1} + \beta_1 \Delta X_t - \beta_3 \Delta X_{t-1} - \lambda(Y_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_1 X_{t-1}) + \mu_t}$$

$$\boxed{Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \gamma_1 Z_t + \gamma_2 Z_{t-2} + \delta Y_{t-1} + \mu_t}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\Delta Y_t = \beta_1 \Delta X_t + \gamma_1 \Delta Z_t - \lambda(Y_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_1 X_{t-1} - \alpha_2 Z_{t-1}) + \mu_t}$$

- **误差修正模型的优点：**如：

a）<u>**一阶差分项的使用**</u>、消除了变量可能存在的趋势因素，从而避免了<u>虚假回归</u>问题；

b）一阶差分项的使用，也消除模型可能存在的<u>多重共线性</u>问题；

c）误差修正项的引入，保证了<u>变量水平值的信息</u>没有被忽视；

d）由于<u>误差修正项本身的平稳性</u>，使得该模型可以用经典的回归方法进行估计，尤其是模型中差分项、可使用通常的t检验与F检验来进行选取；等等。

3、误差修正模型的建立

- Granger 表述定理（Granger representaion theorem）

Engle 与 Granger 1987年提出：

如果变量X与Y是协整的，则它们间的“短期非均衡关系”、总能由一个误差修正模型表述。

$$\boxed{\Delta Y_t = lagged(\Delta Y, \Delta X) - \lambda \cdot ecm_{t-1} + \mu_t}$$

拟定的均衡模型，没有明确指出Y与X的滞后项数，可以是高阶滞后；

由于一阶差分项是I(0)变量，因此模型中也允许采用X的非滞后差分项ΔX_t。

- **建立误差修正模型：**
  - **首先**对经济系统进行观察和分析，提出**长期均衡关系**假设。
  - **然后**对变量进行协整分析，以发现变量之间的协整关系，即**检验长期均衡关系假设，并以这种关系构成误差修正项**。
  - **最后**建立短期模型，将误差修正项看作一个解释变量、连同**其它反映短期波动的解释变量**一起，建立短期模型、即误差修正模型。

- **Engle-Granger两步法**

第一步，进行协整回归（OLS法），检验变量间的协整关系，估计协整向量（长期均衡关系参数）；

第二步，若协整性存在，则以第一步求到的残差作为非均衡误差项、加入到误差修正模型中，并用OLS法估计相应参数。

需要注意的是：

在进行变量间的协整检验时：如有必要可在协整回归式中、加入趋势项，这时对残差项稳定性检验、就无须再设趋势项。

另外，第二步中**变量差分滞后项 ΔY、ΔX 的多少**，可"以残差项序列是否存在自相关性"来判断：如果存在自相关，则应新加入变量差分的滞后项。

- 直接估计法
  - 用打开误差修正项括号的方法，直接估计误差修正模型。
  - 一般不采用。