矢量运算初步

矢量运算初步

矢量: 同时具有大小和方向, 并遵从平行四边形加法法则的量

几何表示: 长度↔大小; 箭头↔方向 $\vec{A}$

符号表示: 手写: 字母上方加箭头, 如 $\vec{a},\vec{F}$

印刷: 斜黑体 (或黑体, 或同手写)

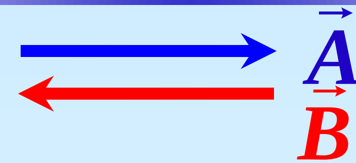
相等: 大小、方向都相等 $\vec{A}$ $\vec{B}$ $\vec{A}=\vec{B}$

平移(自由)矢量: 平移后大小、方向都不变

模: 只表示大小. $\left|\vec{A}\right| = A$ A

单位矢量: 只表示方向, 模为1. $\vec{A}^0 = \dfrac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} \equiv \hat{A}$

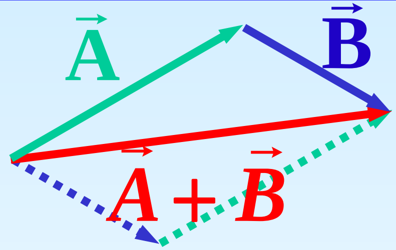
负矢量: 大小相等、方向相反.



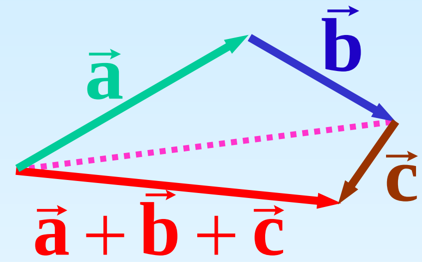
$\vec{B} = -\vec{A}$

加法: 平行四边形/三角形法则

$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$



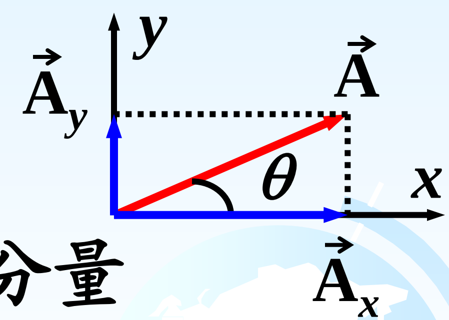
→多边形法则



减法: 加一个负矢量 $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$

若$\vec{A}//\vec{B}$, $\vec{C}$的大小为A和B的代数和

矢量分解: 反用平行四边形法则



常见: 将一个矢量分解为相互垂直的分量

2维: $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$

其中 $\vec{i}, \vec{j}$: x, y方向的单位矢量, 也可记为 $\hat{i}, \hat{j}$ 或 $\vec{e}_i, \vec{e}_j$

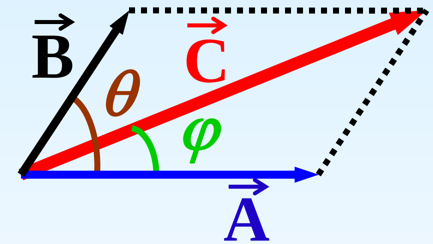
A_x, A_y: $\vec{A}$在x, y方向的分量（是标量）

3维: $\vec{A}=\vec{A}_x+\vec{A}_y+\vec{A}_z=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{A}\pm\vec{B}=(A_x\pm B_x)\vec{i}+(A_y\pm B_y)\vec{j}+(A_z\pm B_z)\vec{k}$

合矢量与分矢量的关系:

如图，$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$



$$C=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$$

$$\tan\varphi=\frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}$$

特例: 直角坐标系时

$$\boxed{A=\sqrt{A_x^2+A_y^2}; \qquad \varphi=\arctan\frac{A_y}{A_x}}$$

矢量的乘法:

数乘: $m\vec{A}$ 　大小: $m|\vec{A}|$ 　方向: $\uparrow\ \vec{A}$

标积(点积): $\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$, 标量!!!

- 满足交换律: $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

  分配律: $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

- 直角坐标系(3D):

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

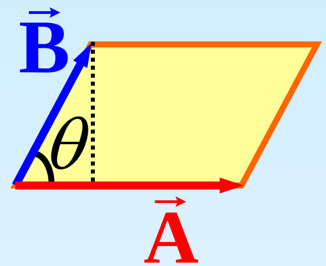
其中用到:

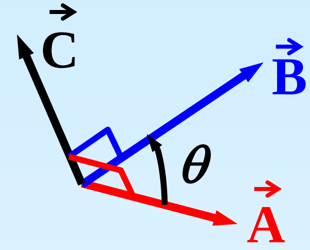
$$\begin{cases} \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1 \\ \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0 \end{cases}$$

矢积(叉积): $\boxed{\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}}$ 矢量!!!

大小: $\left|\vec{C}\right|\equiv C=AB\sin\theta$

方向: 符合右手定则





四指: $\vec{A}\to\vec{B}$ (小于π的夹角), 拇指: 沿$\vec{C}$

- 不满足交换律! $\boxed{\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}}$
- 满足分配律: $\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$
- 直角坐标系(3D): $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$

$$=(A_yB_z-B_yA_z)\vec{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\vec{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{k}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

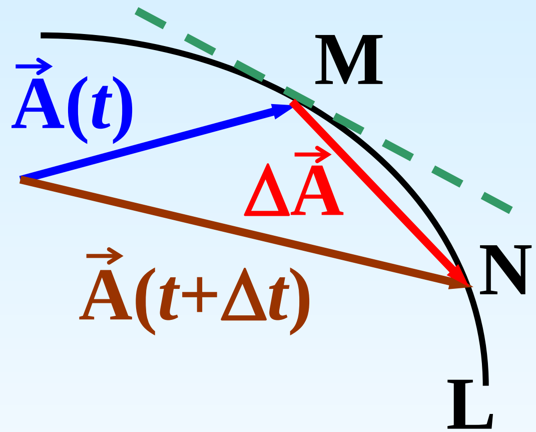
注意：红线上三元素的乘积冠以正号，蓝线上三元素的乘积冠以负号.

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2$$
$$- a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

矢量导数

若 $\vec{A}=\vec{A}(t)=A_x(t)\vec{i}+A_y(t)\vec{j}+A_z(t)\vec{k}$

如图，$\Delta\vec{A}=\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)$



矢量$\vec{A}$的导数：

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}$$

$$\therefore\quad \frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{dA_x}{dt}\vec{i}+\frac{dA_y}{dt}\vec{j}+\frac{dA_z}{dt}\vec{k}$$

常用公式:

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B})=\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[f(t)\vec{A}(t)]=\frac{df(t)}{dt}\vec{A}(t)+f(t)\frac{d\vec{A}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}+\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}+\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}$$

注意!