第四章　动能与势能

- 4.1 功、功率和动能定理
- 4.2 保守力的功
- 4.3 保守力场中的势能
- 4.4 功能原理与机械能守恒定律
- 4.5 三种宇宙速度
- 4.6 两体碰撞

脉络：

牛顿第二定律
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

功的定义
$$A_{ab} = \int_a^b \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

质点

动能定理
$$A_{ab} = \Delta E_k$$

质点系

动能定理
$$A_{ab}^{外} + A_{ab}^{内} = \sum \Delta E_{ki}$$

保守力定义
$$\oint \vec{f}_c \cdot d\vec{r} = 0$$

质点系

$$A_{ab} = -\Delta E_p$$

功能原理
$$A_{ab}^{外} + A_{非保}^{内} = \Delta E$$

机械能守恒定律
$$A^{外} + A_{非保}^{内} = 0 时, E = 常量$$

意义：

研究力作用经过一段空间后物体运动状态的变化。

⇒给定力的分布（力场）后物体在其中运动的规律

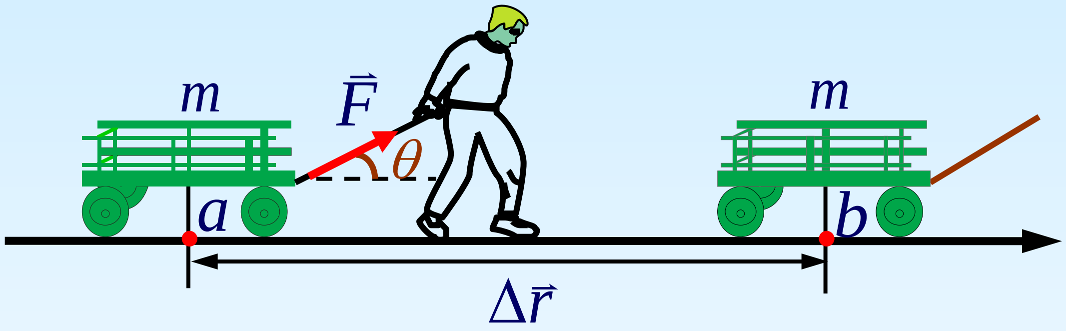
⇒机械运动的能量和其他形式能量之间交换转化的规律

⇒现代物理学中，能量在许多领域成为比力更基础的概念（例如，对"场"的研究可以不用"力"的概念，但动量、能量等必不可少）

4. 1 功、功率和动能定理

1.功的定义

(1) 恒力的功



恒力 $\vec{F}$ ，夹角θ

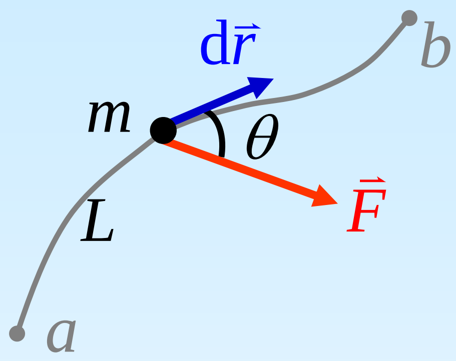
位移 $\Delta\vec{r}$，路程Δs

功 $A=(F\cos\theta)\Delta s=F|\Delta\vec{r}|\cos\theta$

$$A=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

- 功是标量
- 功有正功、负功之分，功的正负取决于θ。
- 力对物体作负功 ⇔ 物体反抗外力作功。

(2) 变力的功



质点m受到变力$\vec{F}$作用，沿曲线L运动

$\vec{F}$ 在位移元 $\mathrm{d}\vec{r}$上的元功：

$$\boxed{\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\mathrm{d}s\cos\theta} \quad (\because |\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s\ )$$

$$\boxed{A_F(a\to b) = \int_{a(L)}^{b}\mathrm{d}A_{\vec{F}} = \int_{a(L)}^{b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}$$ —— 功的定义式

- 过程量(与路径有关)、相对量(与参考系有关)；
- 沿运动轨迹积分⇔力的作用对空间的积累
- 难点在于线积分

(3) 多个力的功 —— 合力的功等于各分力的功之和

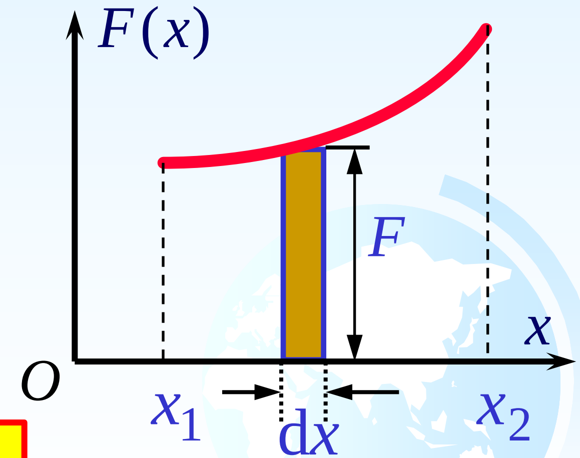
$$A=\int_{r_a}^{r_b}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n)\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int_a^b\vec{F}_1\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_a^b\vec{F}_2\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\cdots+\int_a^b\vec{F}_n\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$=A_1+A_2+\cdots+A_n$$

⇒ 直角坐标系中

$$A=\int_a^b\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z)$$



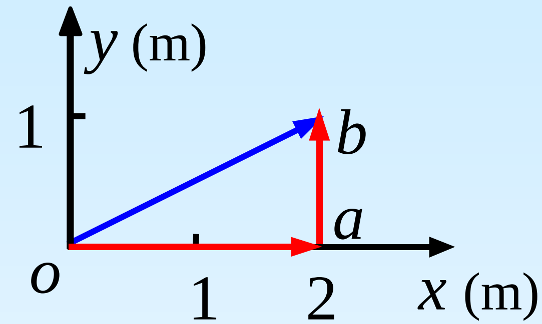
- 功在数值上等于力函数曲线下的**面积** $A=\int_{x_1}^{x_2}F(x)\mathrm{d}x$

- **(瞬时)功率：** $$\boxed{P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}}$$

例: 如图,作用于一质点的力$\vec{F}$随质点

位置的变化为: $\vec{F} = 2y\vec{i} + 4x^2\vec{j}\ \ (N)$

求其沿**oab**和**ob**所作功。



解: $$A_F(oab) = \int_{oab}(F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y) = \int_{oab}(2y\mathrm{d}x + 4x^2\mathrm{d}y)$$

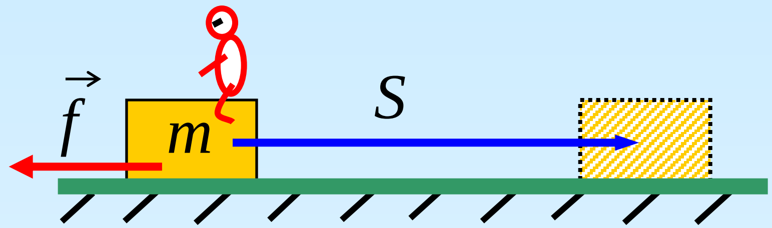
$$= \int_o^a (2y\mathrm{d}x + 4x^2\mathrm{d}y) + \int_a^b (2y\mathrm{d}x + 4x^2\mathrm{d}y) = 0 + \int_0^1 16\mathrm{d}y = 16\ \mathrm{J}$$

$y = 0, \mathrm{d}y = 0$　　　　$x = 2$

$$A_F(ob) = \int_{ob}(2y\mathrm{d}x + 4x^2\mathrm{d}y)$$ 利用 $y = x/2$

$$= \int_0^2 x\mathrm{d}x + \int_0^2 2x^2\mathrm{d}x = 7.3\ \mathrm{J}$$

2. 一对力作功

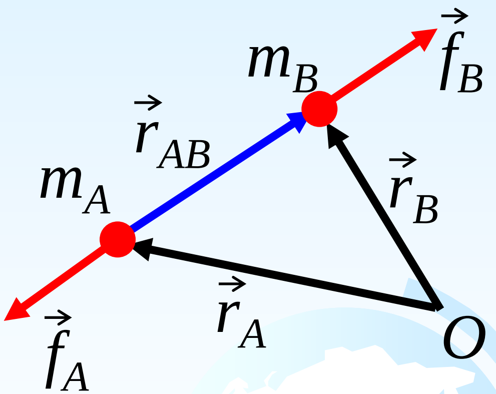


如图, 一物体在地面滑动,

地面系：$\vec{f}$ 作负功 $\Rightarrow$ 生热

m 静止系：有摩擦没位移, $\vec{f}$不作功

$\Rightarrow$ "摩擦生热" 与参考系有关?



如图, 相互作用力（一对力）$\vec{f}_A = -\vec{f}_B$

若位移为 $d\vec{r}_A$、$d\vec{r}_B$

则这对力所作总元功为：

$$dA = \vec{f}_A \cdot d\vec{r}_A + \vec{f}_B \cdot d\vec{r}_B$$

$$= \vec{f}_B \cdot (d\vec{r}_B - d\vec{r}_A) = \vec{f}_B \cdot d(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

即：$dA = \vec{f}_B \cdot d\vec{r}_{AB}$ (与相对位移有关)

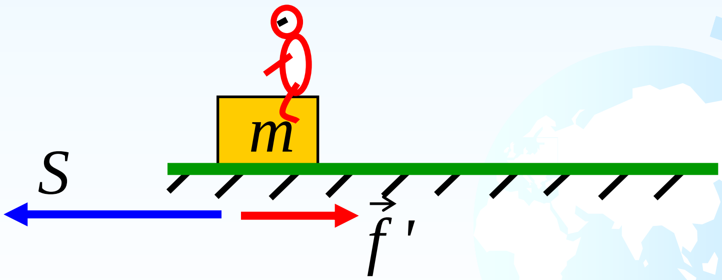
可见，一对力作功有如下特点：

1) 选参考系：如选取其中一个为参考系，则 $\mathrm{d}\vec{r}_{AB}$ 就是另一物体的位移.

2) 无相对运动或相对运动方向与力的方向垂直，则这对力所作的总功为零.

$\Rightarrow$ 一对正压力／静摩擦力／刚体内力之功恒为零.

3) 注意区分一对力的功和单个力的功，上述结论对单个力可能不成立!



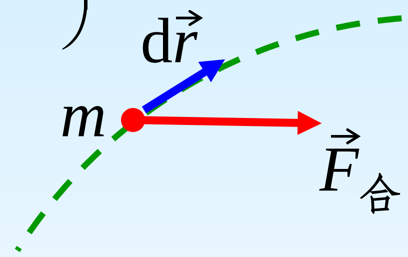
回到开始的问题:

m静止系：这时 $f\,'$摩擦生热 $\Rightarrow$ 摩擦生热与参考系无关!

3. 动能定理

(1) 质点的动能及动能定理

$$\mathrm{d}A_{合}=\vec{F}_{合}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\ =m\vec{\upsilon}\cdot\mathrm{d}\vec{\upsilon}=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m\upsilon^2\right)$$



定义质点的动能为：$\boxed{E_k=\frac{1}{2}m\upsilon^2}$

质点的动能定理：$\boxed{\mathrm{d}A_{合}=\mathrm{d}E_k}$ ← 微分形式

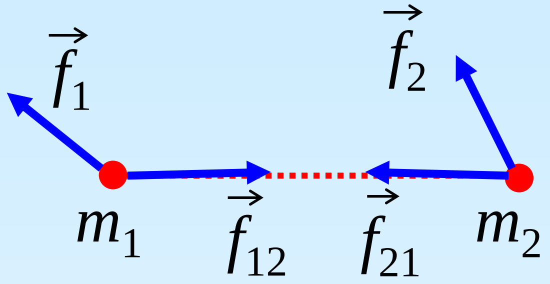
$\boxed{A_{合}=\Delta E_k}$ ← 积分形式

某过程中质点动能的增量等于它所受合力在该过程中作的功.

$$\boxed{A_{合}=\frac{1}{2}m\upsilon^2-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2}$$

- 只对惯性系适用，在所有惯性系中形式相同.

(2) 质点系的动能定理



对m_1, m_2分别用动能定理，有:

$$\left(\vec{f}_1+\vec{f}_{12}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r}_1=\mathrm{d}E_{k1}$$

$$\left(\vec{f}_2+\vec{f}_{21}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r}_2=\mathrm{d}E_{k2}$$

相加得: $\underline{\vec{f}_1\cdot \mathrm{d}\vec{r}_1+\vec{f}_2\cdot \mathrm{d}\vec{r}_2}+\underline{\vec{f}_{12}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_1+\vec{f}_{21}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_2}=\underline{\mathrm{d}E_{k1}+\mathrm{d}E_{k2}}$

$$\boxed{\mathrm{d}A_{外}+\mathrm{d}A_{内}=\mathrm{d}E_k}$$

类推到N个质点仍成立，称为质点系的动能定理.

积分形式: $\boxed{A_{外}+A_{内}=\Delta E_k}$ $\leftarrow$ (末态−初态)

任一过程中质点系动能的增量等于外力作功与内力作功之和.

- 反映功能转化的量值关系，适用于惯性系;
- 质点系内各质点有不同位移

  ⇒先求各外力作功再求代数和$A_{外}$;
- 内力成对出现，但内力功的和不一定为零.

  成对内力作功之和与参考系的选择无关:

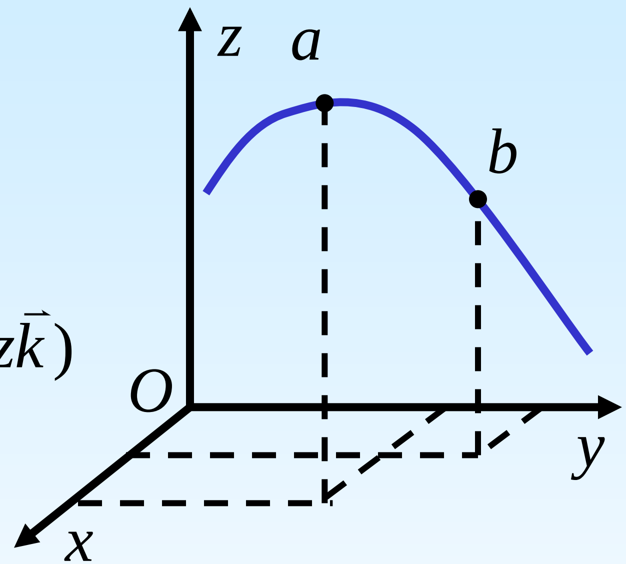
$$\vec{f}_{12}\cdot d\vec{r}_1+\vec{f}_{21}\cdot d\vec{r}_2=\vec{f}_{12}\cdot(d\vec{r}_1-d\vec{r}_2)=\vec{f}_{21}\cdot(d\vec{r}_2-d\vec{r}_1)$$

解题时应注意:

- 外力、内力都可作功，都可改变系统动能;
- 要分析受力情况,各个力是否作功,作正功还是负功;
- 要明确初、末态,确定其动能。

4.2 常见力的功

1.重力的功 (直角坐标下运算)



$$A_F\left(a\rightarrow b\right)=\int_{a(L)}^{b}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int_{a(L)}^{b}(F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k})\cdot(\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}+\mathrm{d}z\vec{k})$$

$$\boxed{=\int_{a(L)}^{b}F_x\mathrm{d}x+\int_{a(L)}^{b}F_y\mathrm{d}y+\int_{a(L)}^{b}F_z\mathrm{d}z}$$

质量为m物体的重力： $\vec{F}=-mg\vec{k}$

$$\boxed{A=\int_{1(L)}^{2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{a(L)}^{b}-mg\mathrm{d}z=mg(z_a-z_b)}$$

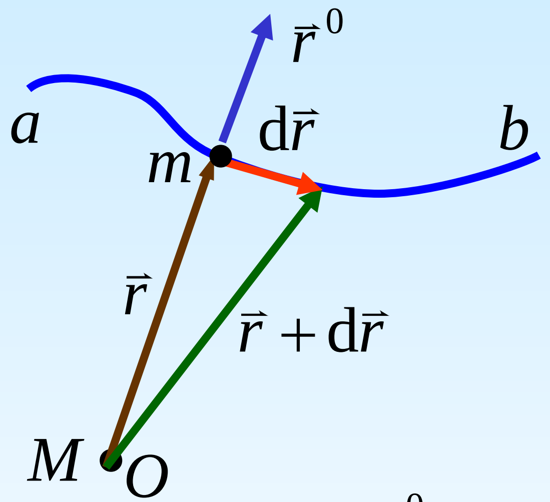
只和始末位置有关！

2.万有引力的功 (点积直接化为标量)

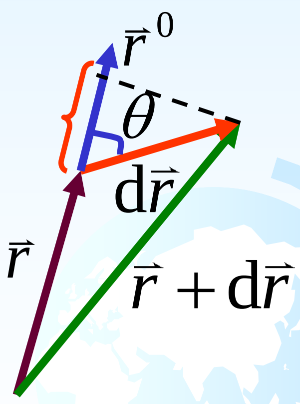
$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{r}^{\,0}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\boxed{\vec{r}^{\,0}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \left|\vec{r}^{\,0}\right|\cdot\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\theta = \mathrm{d}r}$$



$$\mathrm{d}A = -\frac{GMm}{r^2}\mathrm{d}r$$



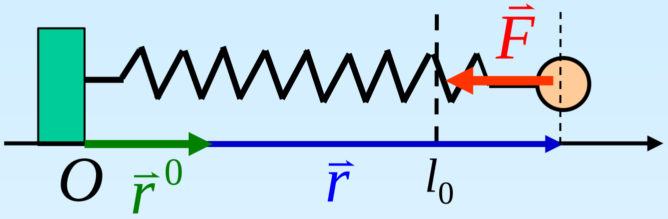
$$A_{ab(L)} = \int_{a(L)}^{b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\int_{r_a}^{r_b}\frac{GMm}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$\boxed{= GMm\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\right)}$$

只和始末位置有关!

3. 弹性力的功

弹簧原长l_0，相对伸长 $(r-l_0)$



弹性限度内:

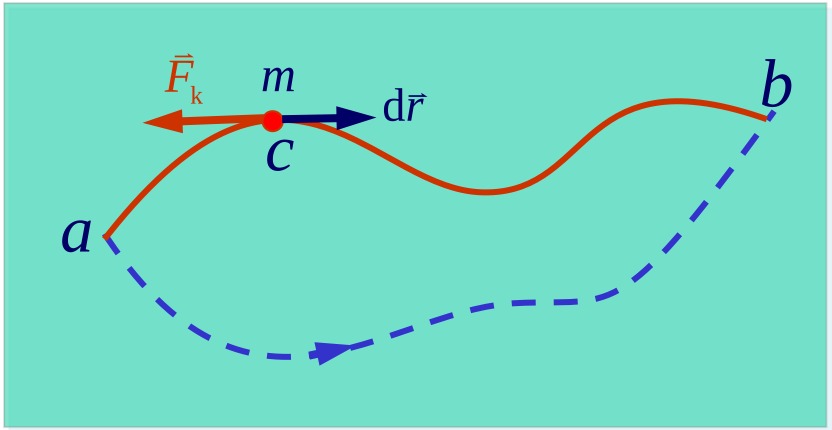
$$\vec{F}=-k(r-l_0)\vec{r}^{\,0}$$

$$A_{\vec{F}}=\int_{a\to b(L)}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{a\to b(L)}-k(r-l_0)\vec{r}^{\,0}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int_a^b -k(r-l_0)\cdot\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}k(r_a-l_0)^2-\frac{1}{2}k(r_b-l_0)^2$$ 只和始末位置有关!

4. 摩擦力的功



元功 $dA = \vec{F}_k \cdot d\vec{r}$

$$= F_k |d\vec{r}| \cos\pi = -F_k ds$$

总功 $A_{ab} = \int dA = -F_k \int_a^b ds$

$$= -F_k s_{ab}$$ （F_k为常量）

➢ 结论：摩擦力的功与路径有关。

例：用水平力极缓慢地将**m**拉高**h**，求A_f．

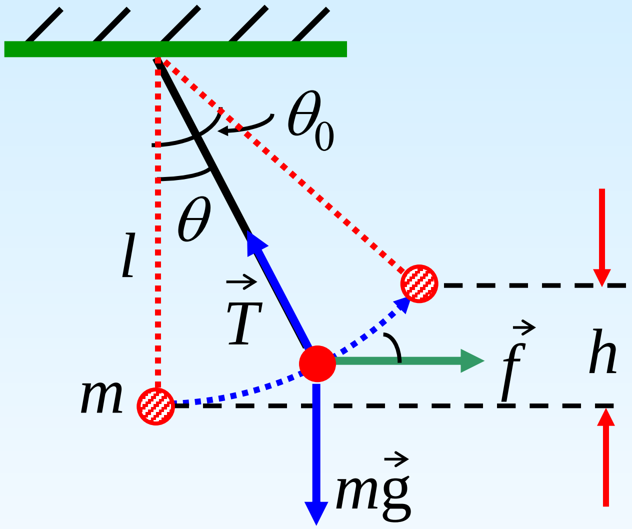
解：$\because$ m的动能不变

$$\therefore\ A_{合}=A_G+A_T+A_f=0$$

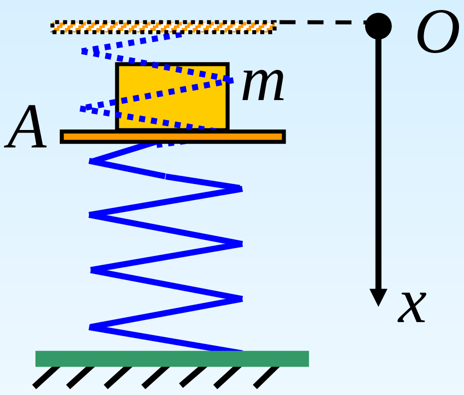
又：$A_T=0$；

$$A_G=-mg\Delta h=-mgh$$

$$\Rightarrow\ A_f=-A_G-A_T=mgh$$



例: 如图, 求弹簧(劲度系数k)为原长, 无初速加上物体m时, 弹簧的最大压缩量x_m, 设A板质量不计.



解: 物体从 $x=0$ 到 $x=x_m$ 时, 重力和支撑力的功分别为:

$$A_1 = mgx_m > 0$$

$$A_2 = \int_0^{x_m} (-kx)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}kx_m^2 < 0$$

根据动能定理有:

$$mgx_m - \frac{1}{2}kx_m^2 = 0 - 0$$

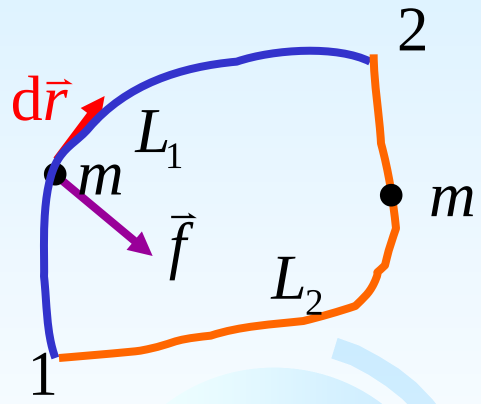
即， $x_m = 2\dfrac{mg}{k}$

4. 3 保守力场中的势能

1. 保守力和非保守力

(1)保守力（conservative force）

作功只与始、末位置有关,与路径无关的力。



对保守力作功，有：

$$\int_{(1)L_1}^{(2)} \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_{(1)L_2}^{(2)} \vec{f}\cdot d\vec{r} = -\int_{(2)L_2}^{(1)} \vec{f}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_{(1)_{L_1}}^{(2)} \vec{f}\cdot d\vec{r} + \int_{(2)_{L_2}}^{(1)} \vec{f}\cdot d\vec{r} = 0$$

$$\boxed{\oint_L \vec{f}\cdot d\vec{r} = 0}$$

保守力对沿闭合路径运动一周的质点(物体)所作的功为零--保守力的另一种定义.

(2).非保守力

作功与路径有关的力称为非保守力。

- 摩擦力(耗散力)：一对滑动摩擦力作功恒为负
- 爆炸力：作功为正

若质点在某空间内任一位置都受到保守力作用

⇒ 该空间存在保守力场

(如: 重力场, 引力场……)

2. 势能

以保守力相互作用的质点系的每一个位形都储存着一种能量--势能 E_p.系统由位形1变为位形2时，势能由E_{p1}变为E_{p2}.在此过程中保守内力作功:

$$\boxed{A_{保} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p}$$

保守内力的功等于系统势能的减量.

若规定系统在位形（0）的势能为零，即规定$E_{p0}=0$，则系统在位形（1）的势能为:

$$\boxed{E_{p1} = \int_{(1)}^{(0)} \vec{f}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

说明

1.势能为保守力所特有.

2.势能属于相互作用的系统,不属于单个物体.

3.势能是相对的，但任意两点的势能差是绝对的.

4.势能不依赖于参考系的选择，但不可将势能零点的选择与参考系的选择相混淆.

5.势能为状态函数，标量，与功和能具有相同量纲.

3. 几种势能

(1) 万有引力势能

$$E_p(r)=\int_r^{"0"}-\frac{GMm}{r^2}\mathrm{d}r \qquad \boxed{E_p(r)=-\frac{GMm}{r}+C}$$

规定： $r=\infty \quad E_p(\infty)=0$

则： $\boxed{E_p(r)=-\frac{GMm}{r}}$

(2) 重力势能

$$E_p(z)=\int_z^{"0"}-mg\mathrm{d}z \qquad \boxed{E_p(z)=mgz+C}$$

规定：$z=0 \quad E_p(0)=0$ $\boxed{E_p(z)=mgz}$

$z=z_0 \quad E_p(z_0)=0$ $\boxed{E_p(z)=mgz-mgz_0}$

(3) 弹性势能

$$E_p(x)=\int_x^{"0"} -kx\mathrm{d}x \qquad \boxed{E_p(x)=\frac{1}{2}kx^2 \;+C}$$

规定平衡位置 $x=0 \quad E_p(0)=0$

$$\boxed{E_p(x)=\frac{1}{2}kx^2}$$

- 保守力与势能的关系

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} \qquad (1)$$

直角坐标系中，**$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$**的全微分

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$= \left(\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot (\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k})$$

$$= \left(\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad (2)$$

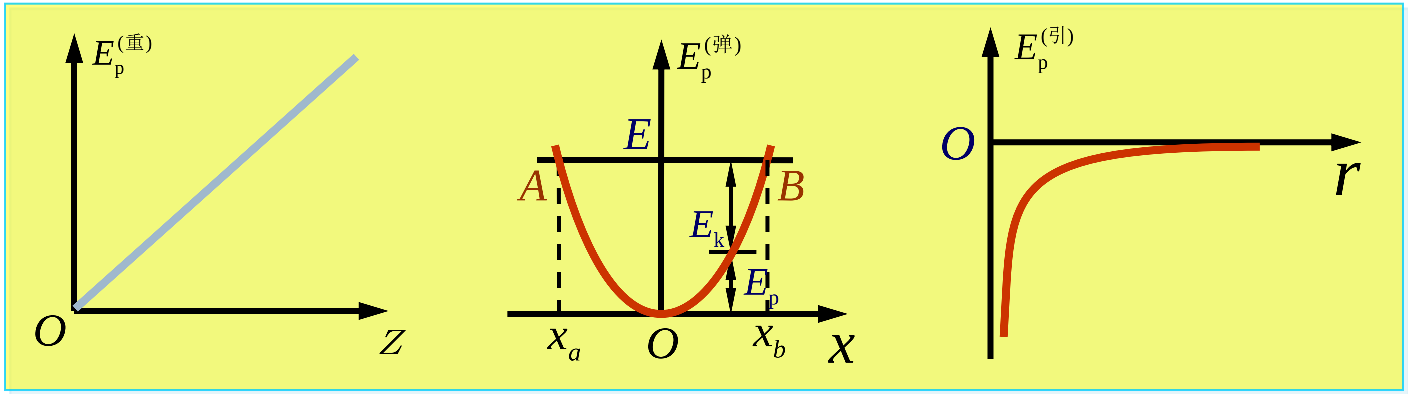
比较(1)和(2)式

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla E_{\mathrm{p}}$$

分量式: $F_x = -\dfrac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial x}$ $\qquad F_y = -\dfrac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial y}$ $\qquad F_z = -\dfrac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial z}$

4. 势能曲线

保守力场中，质点的势能是位置(坐标)的单值函数. 相应的曲线称为势能曲线。



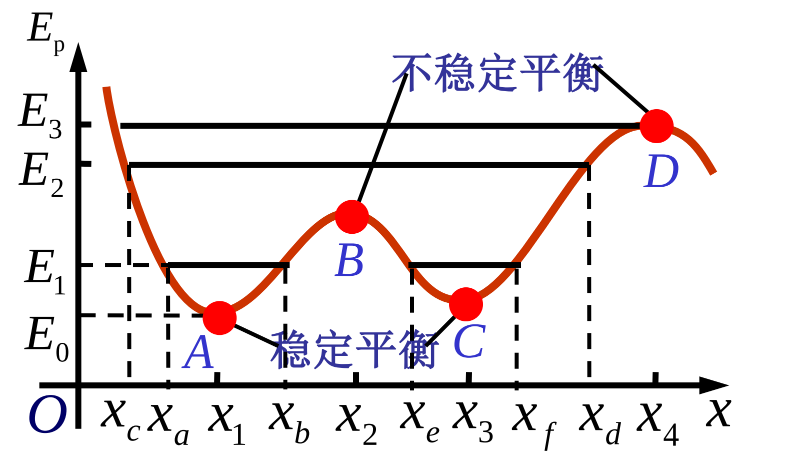
势能曲线的主要特性

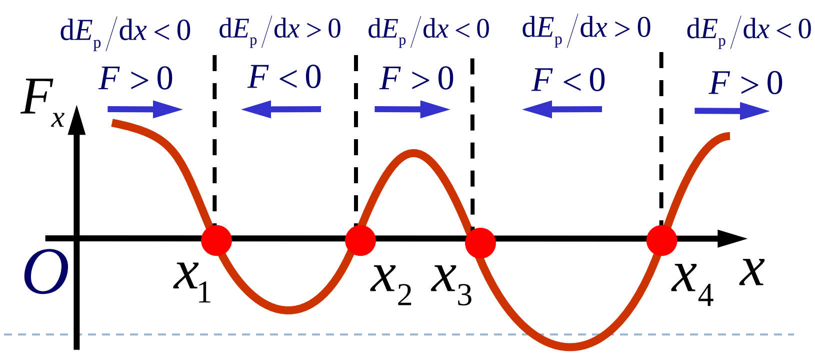
(1) 由势能曲线求保守力

$$F(x) = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

(2) 确定质点的运动范围

(3) 确定平衡位置，判断平衡的稳定性。





例: 质点m在地球引力场中的势能为 $E_p=-\dfrac{mgR^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

其中R为地球半径, x, y, z是质点在以地心为原点的直角坐标系中的坐标, 求其所受的万有引力.

解: 由

$$E_p=-\frac{mgR^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

可得

$$F_x=-\frac{\partial E_p}{\partial x}=-\frac{mgR^2x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\qquad F_y=-\frac{\partial E_p}{\partial y}=-\frac{mgR^2y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$F_z=-\frac{\partial E_p}{\partial z}=-\frac{mgR^2z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

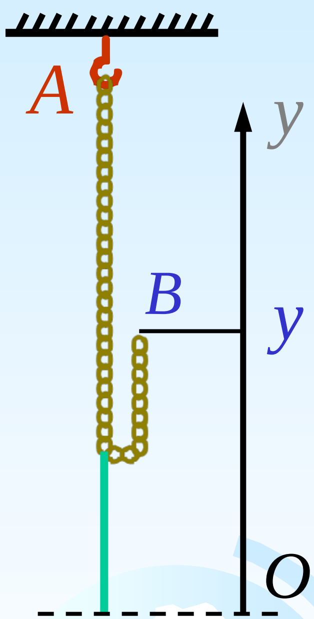
$$\therefore\quad F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}=\frac{mgR^2}{x^2+y^2+z^2}$$

作业： 4.1, 4.3, 4.4, 4.6, 4.9

例 一条长为l、质量为m的均质柔绳AB，A端挂在天花板的钩上，自然下垂。现将B端沿铅垂方向提高到与A端同一高度处。

求 该过程中重力所作的功。

解 取绳自然下垂时B端位置为坐标原点，铅垂向上为Oy轴正方向。



设B 端提升过程中的某一时刻坐标为y

绳提起部分所受重力为 $\frac{1}{2}y\frac{m}{l}g$

取重力元位移dy，则重力在元位移上的元功为

$$\mathrm{d}A = F_y \mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\frac{m}{l}gy\mathrm{d}y$$

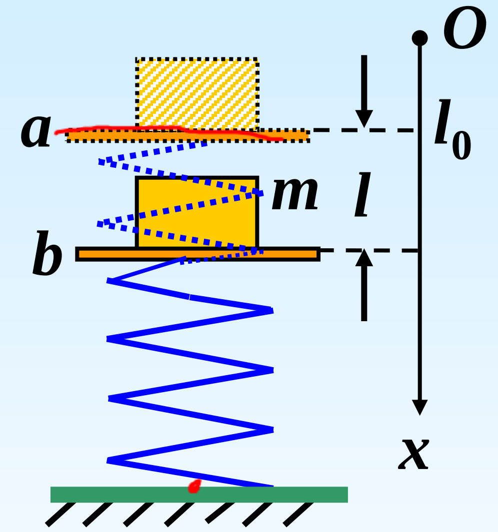
该过程中重力所作的总功为

$$A = \int \mathrm{d}A = \int_0^l \left(-\frac{1}{2}\frac{m}{l}gy\right)\mathrm{d}y = -\frac{1}{4}mgl$$

例： 如图，已知 $kl_0 = mg$，板和弹簧的质量不计，求 $a \to b$ 过程中势能的增量.

解： (三种解法)

解法1： 令自由状态(O)时，$E_{重} = E_{弹} = 0$



$$E_{pa} = -mgl_0 + \frac{1}{2}kl_0^2$$

$$E_{pb} = -mg(l_0 + l) + \frac{1}{2}k(l_0 + l)^2$$

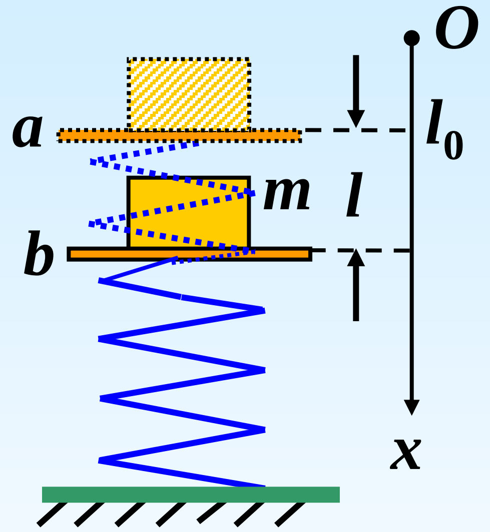
$$= -mgl_0 + \frac{1}{2}kl_0^2 + \frac{1}{2}kl^2$$

$$\Delta E_p = E_{pb} - E_{pa} = \frac{1}{2}kl^2$$

解法2： 令**平衡**状态 (l_0) 时， $E_{重}=E_{弹}=0$

$$E_{pb}=-mgl+\frac{1}{2}k(l_0+l)^2-\frac{1}{2}kl_0^2=\frac{1}{2}kl^2$$

$$\Delta E_p=E_{pb}-E_{pa}=E_{pb}=\frac{1}{2}kl^2$$



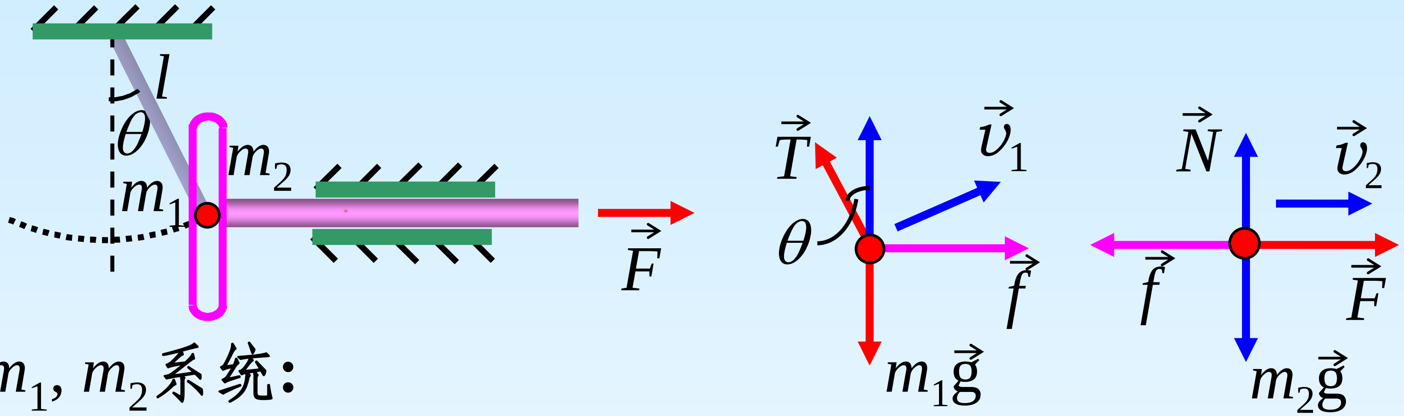
■这时$kl^2/2$已经包括了重力势能的贡献！

解法3： 用保守力作功：

$$A_{重}=mgl;\quad A_{弹}=\frac{1}{2}kl_0^2-\frac{1}{2}k(l_0+l)^2$$

$$\Delta E_p=-(A_{重}+A_{弹})=\frac{1}{2}kl^2$$

例：如图，$\theta=0$ 时静止. 求m_1的速度$\upsilon_1(\theta)$.



解： m_1, m_2系统：

$$\sum A_{内}=0$$

$$\sum A_{外}=Fl\sin\theta-m_1gl(1-\cos\theta)$$

动能定理(m_1, m_2系统)给出：

$$Fl\sin\theta-m_1gl(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2$$

$$\upsilon_1\cos\theta=\upsilon_2 \qquad \Rightarrow \cdots$$