第二章　牛顿力学基本定律

2.1 牛顿以前的力学

约翰尼斯·开普勒

（1571-1630）

“天体立法者”

开普勒的行星运动三定律

第一定律：(轨道定律) 所有行星分别在大小不同的椭圆轨道上围绕太阳运动,太阳位于椭圆的一个焦点上.

第二定律：(面积定律) 每一个行星的矢径(行星中心到太阳的连线)在相等的时间内扫过相等的面积.

第三定律：(周期定律) 行星绕太阳运动的周期T的二次方与该行星的椭圆轨道的半长轴r的三次方成正比.

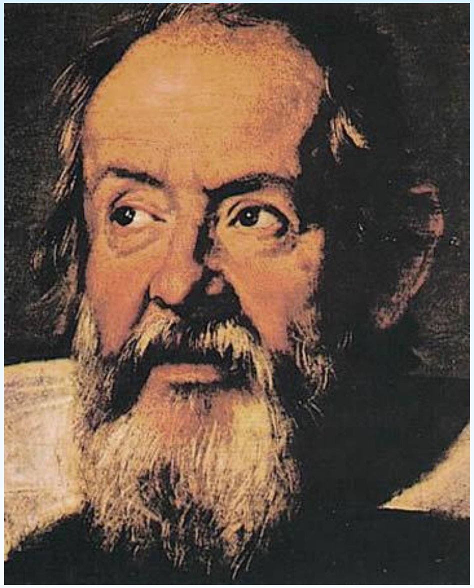
即 $T^2 \propto r^3$

2.1 牛顿以前的力学

“凡运动着的事物必然都有推动者在推着它运动”

亚里士多德《物理学》(百度)

现在的力学始于伽利略。



Galileo Galilei 1564～1642

意大利文艺复兴后期伟大的天文学家、力学家、哲学家、物理学家、数学家。也是近代实验物理学的开拓者，被誉为“近代科学之父”。

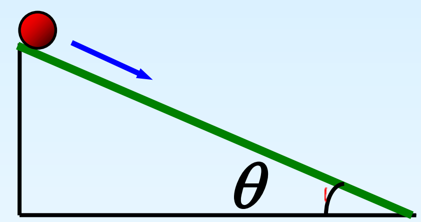
17岁进入比萨大学攻读医学，后来转攻数学，毕业后任大学教授。

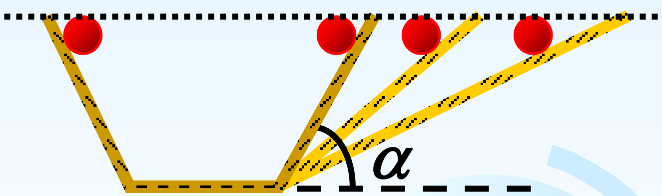
伽利略领悟到，将人们引入歧途的是摩擦力，或空气、水等介质的阻力，这是人们在日常观察物体运动时难以完全避免的。为了得到正确的线索，除了实验和观察外，还需要抽象的思维。

伽利略的斜面实验和落体实验

观察(如图), 只要斜面足够光滑,

- 即使θ很小,小球也能滚下来;
- 小球滚过距离(由静止开始), 总与$(\Delta t)^2$成正比.
- 小球总试图回到原有高度



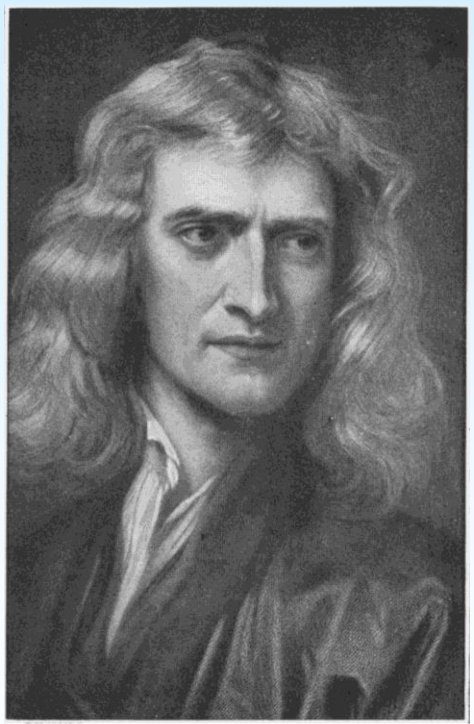


$\Rightarrow$ 伽利略最先设想了在理想条件下的理想实验, 得出推论:

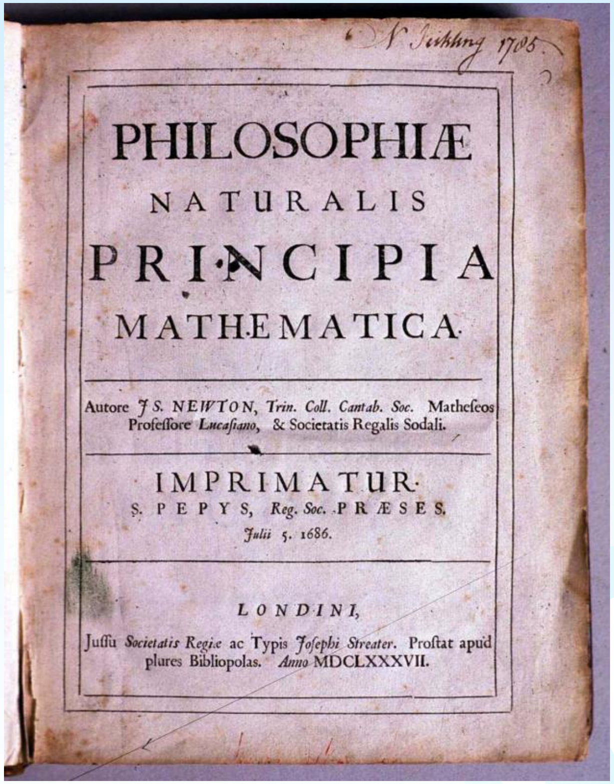
光滑水平面，物体一旦有了速度，将永远运动下去.

2.2 牛顿运动定律

地位：经典物理中，三个运动定律是整个动力学的基础。



Isaac Newton (1642–1727)



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheſeos Profeſſore Lucaſiano, & Societatis Regalis Sodali.

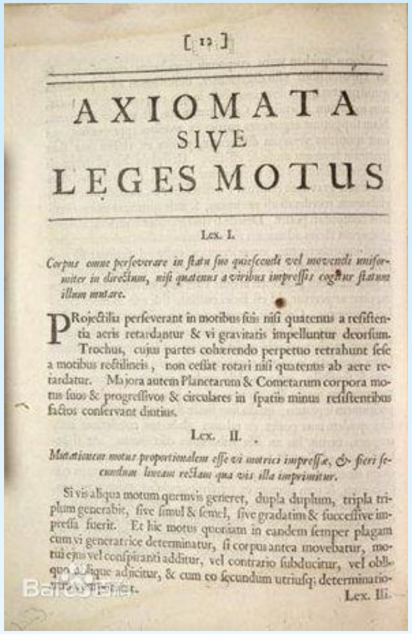
IMPRIMATUR
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Juſſu Societatis Regiæ ac Typis Joſephi Streater. Proſtat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

和中学区别：概念精准+矢量+微积分

牛顿运动定律的原始描述

——牛顿《自然哲学的数学原理》1686


[12]

AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Projectilia perseverant in motibus suis nisi quatenus a resistentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohaerendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur, si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo adjicitur, & cum eo secundum utriusq; determinatio-

Lex. III.

Law I

Every body continues in its state of rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed upon it.

Law II

The change of motion is proportional to the motive force impressed, and is made in the direction of the right line in which that force is impressed.

Law III

To every action there is always opposed an equal reaction; or, the mutual actions of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts.

1. 第一定律: 任何物体都保持**静止或作匀速直线运动**状态，直到有**外力**作用迫使它改变这种状态为止。

- 牛顿运动定律中的物体指的是**质点**或作**平动的物体**。
- 牛顿第一定律提出了**两个**重要概念。

  - 惯性 —— 物体的固有属性（惯性定律）
  - 力 —— 使物体改变运动状态的原因

质点处于静止或匀速直线运动状态时：

$$\sum \vec{F}_i = 0$$ —— 静力学基本方程

惯性、惯性运动与惯性参考系

- 惯性: 物体保持自己原有运动状态不变的性质.
- 惯性运动: 物体在平衡状态保持的运动状态.

  前者是物体固有属性, 与受力无关.

  后者描述状态，在无外力 (或外力平衡)时才能实现.
- 惯性参考系(惯性系）:

  牛顿第一定律在其中成立的参考系，属于理想模型

实用的惯性参考系

选作参考系的物体与周围物体相距足够远

⇒ 受力足够小 ⇔ 近似视为惯性参考系

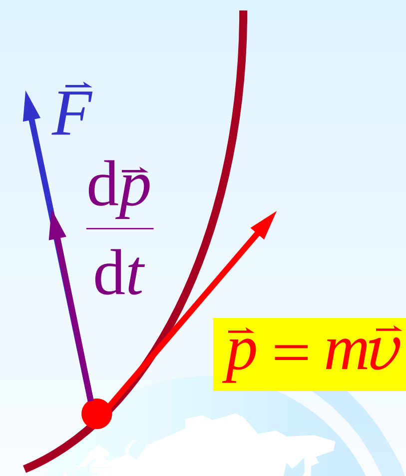
(1) 地球：地面参考系，地心参考系（航天），

(2) 太阳参考系(深空） (3) 基于恒星星表的参考系(天文)

2. 第二定律： 物体受合力作用时，它的动量将发生变化。某时刻物体动量对时间的变化率等于该时刻作用在质点上的合力。即

$$\boxed{\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}$$

其中 $\vec{p}=m\vec{v}$ 称为质点m的动量.



- ***m*为常量**时

$$\boxed{\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}}$$

- 瞬时性 —— 第二定律是一个瞬时关系式
- 矢量性 ——（矢量叠加定理）
- 对应性 —— $\vec{F}_i \Rightarrow \vec{a}_i$

- 质量是物体惯性大小的量度 —— 惯性质量
- 牛顿第二定律只在惯性系中成立。
- 牛顿第二定律既是动力学基本规律；同时又可作为质量和力的定义，据此可对质量和力进行测量。
- 质量是标量，加速度是矢量，力因而是矢量

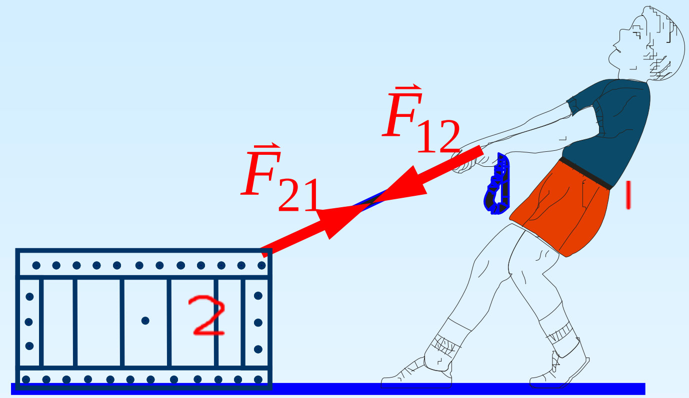
例：实验验证

同时作用在物体上的两个力产生的加速度等于两个力的矢量和产生的加速度。

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m}$$

3. 第三定律： 两个物体间的相互作用力总是等值反向且沿着同一直线，即

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

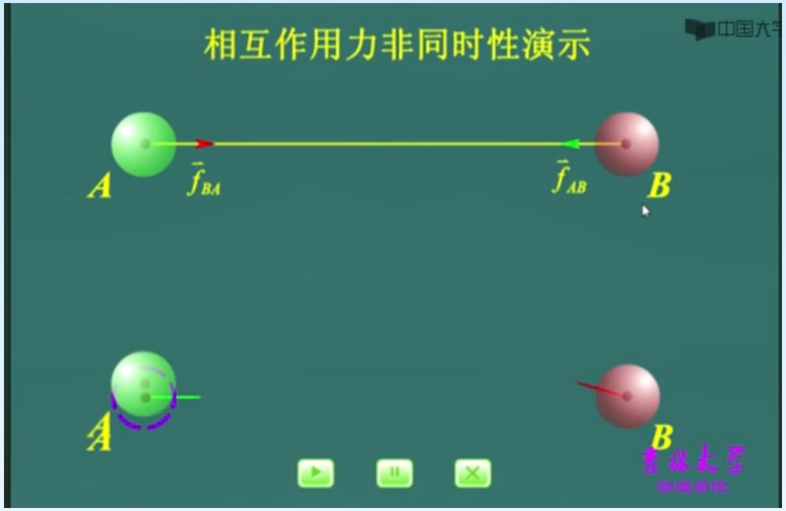


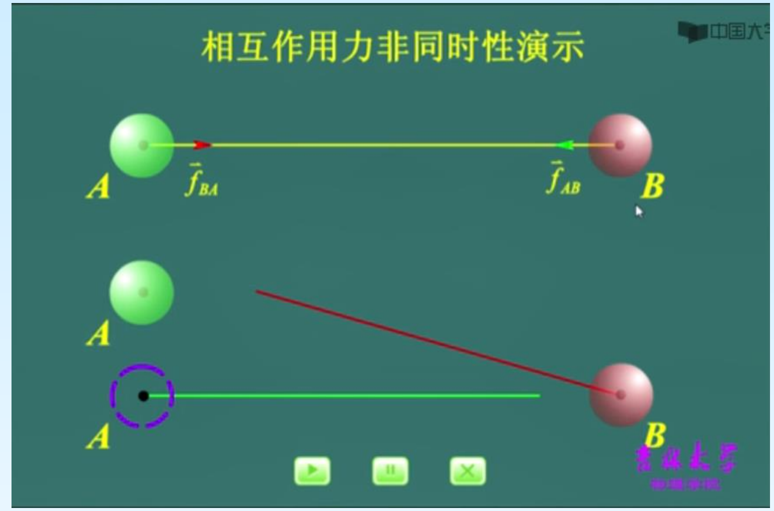
$\vec{F}_{12}$ — 物体2作用于物体1的力

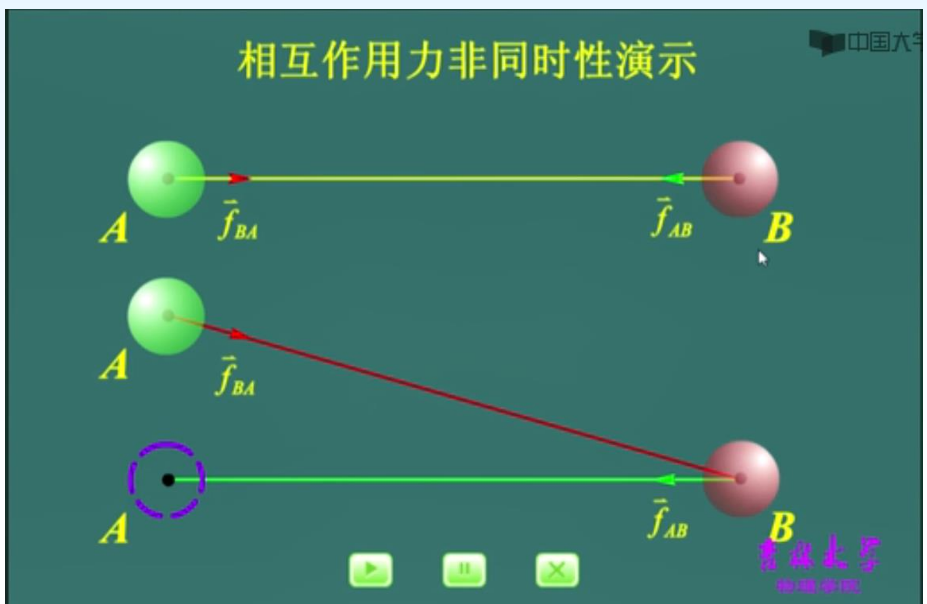
第三定律揭示了力的特性：

- 成对性 —— 物体之间的作用是相互的；
- 一致性 —— 作用力与反作用力性质一致；
- 同时性 —— 相互作用之间是相互依存，同生同灭。

- 第三定律是关于力的最一般性质的定律，而不是动力学本身的定律
- 物体间的相互作用力是真实力，它的度量是在惯性系中通过第二定律来实现，第三定律只在惯性系中成立。
- 若物体之间通过接触才有相互作用力，这种力称为接触力。第三定律对于接触力总是成立的。
- 对于两个物体有一定距离时的相互作用力，第三定律有时成立，有时不成立。
- 上述只对经典物理成立！现代物理中，由于光速有限，“同时”具有相对性，作用与反作用不能总是同时出现！


相互作用力非同时性演示
A
$\vec{f}_{BA}$
$\vec{f}_{AB}$
B
A
B

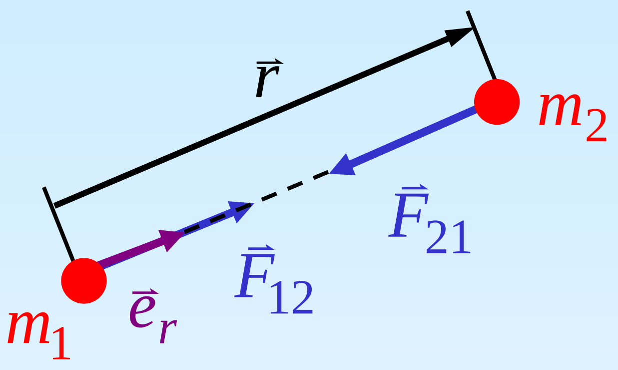

相互作用力非同时性演示
A
$\vec{f}_{BA}$
$\vec{f}_{AB}$
B
A
A
B


相互作用力非同时性演示
A
$\vec{f}_{BA}$
$\vec{f}_{AB}$
B
A
$\vec{f}_{BA}$
A
$\vec{f}_{AB}$
B

2. 3-4 几种常见的力、万有引力

1. 引力、重力

(1) 万有引力 **(Universal gravitation)**



任何物体都相互吸引

⇒ 两质点之间存在万有引力是引力相互作用的结果.

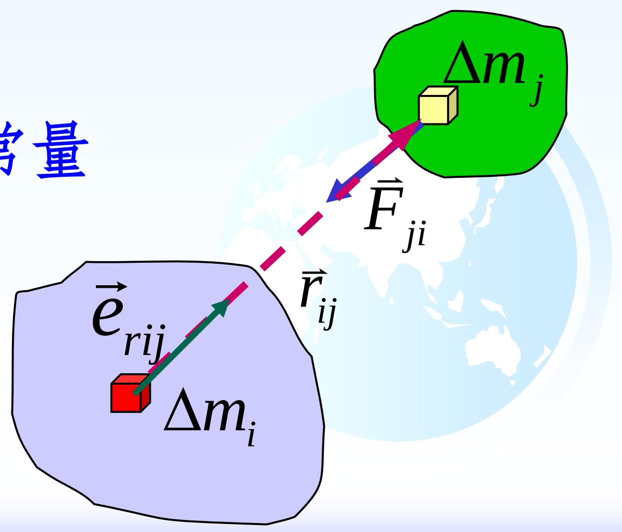
$$\boxed{\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r}$$

m_1, m_2— 质点的质量

$G = 6.67428(67)\times10^{-11}\mathrm{N\cdot m^2\cdot Kg^{-2}}$—引力常量

任意形状物体:

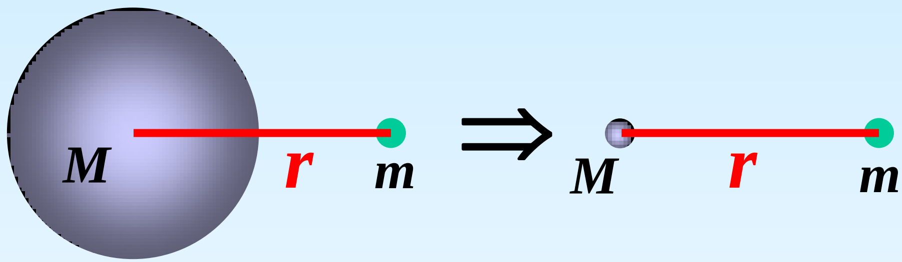
$$\vec{F}_{ji} = -G\frac{\Delta m_i \Delta m_j}{r_{ij}^2}\vec{e}_{rij} \qquad \vec{F} = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ji}$$



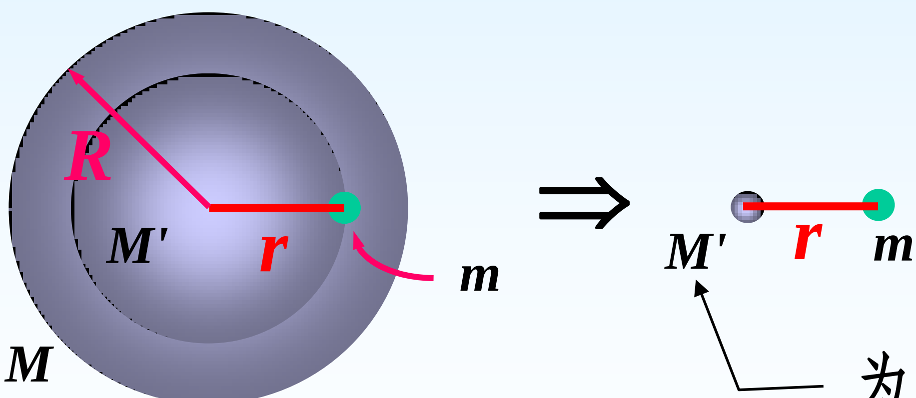
2.3-4 几种常见的力、万有引力

- 质量分布有**球对称性**的球体可等效为质点：

把球心到质点m之间的所有质量集中于球心. 例如：



$$F=-G\frac{Mm}{r^2}$$



$$F=-G\frac{M'm}{r^2}=-G\frac{Mm}{R^3}r$$

为什么不是M？

均匀质量球面对内部任意点的万有引力为零。

（电磁学时通过高斯定理有类似结果）

(2)重力(gravity)

地面附近，地球对于高度为**h**的物体的万有引力

$$mg_h=\frac{GMm}{(R+h)^2}\approx\frac{GMm}{R^2}\left(1-\frac{2h}{R}\right)$$

M—地球质量；
R—地球半径；

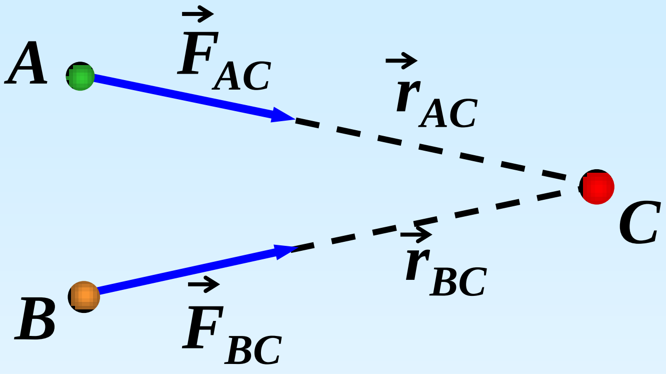
若$h\ll R$, $\Rightarrow$ 重力 $$\boxed{W=G\frac{M}{R^2}m=mg,\quad g\approx 9.8\mathrm{m/s}^2}$$

- 地球椭球状＋自转$\Rightarrow g$ 随纬度不同略有差异

地球有多重?

引力质量:

物体感受外物引力大小的度量。



实验表明: 只要$AC = BC$, F_{AC}与F_{BC}的比值不变, 且与A、B间距离和C的质量无关。

$\Rightarrow$ 定义质点A, B 的引力质量m_A, m_B 之比为:

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{F_{AC}}{F_{BC}}$$

迄今为止的实验精度内, 任一物体的$m_{引}$与$m_{惯}$之比都等于一普适常数, 适当选择单位

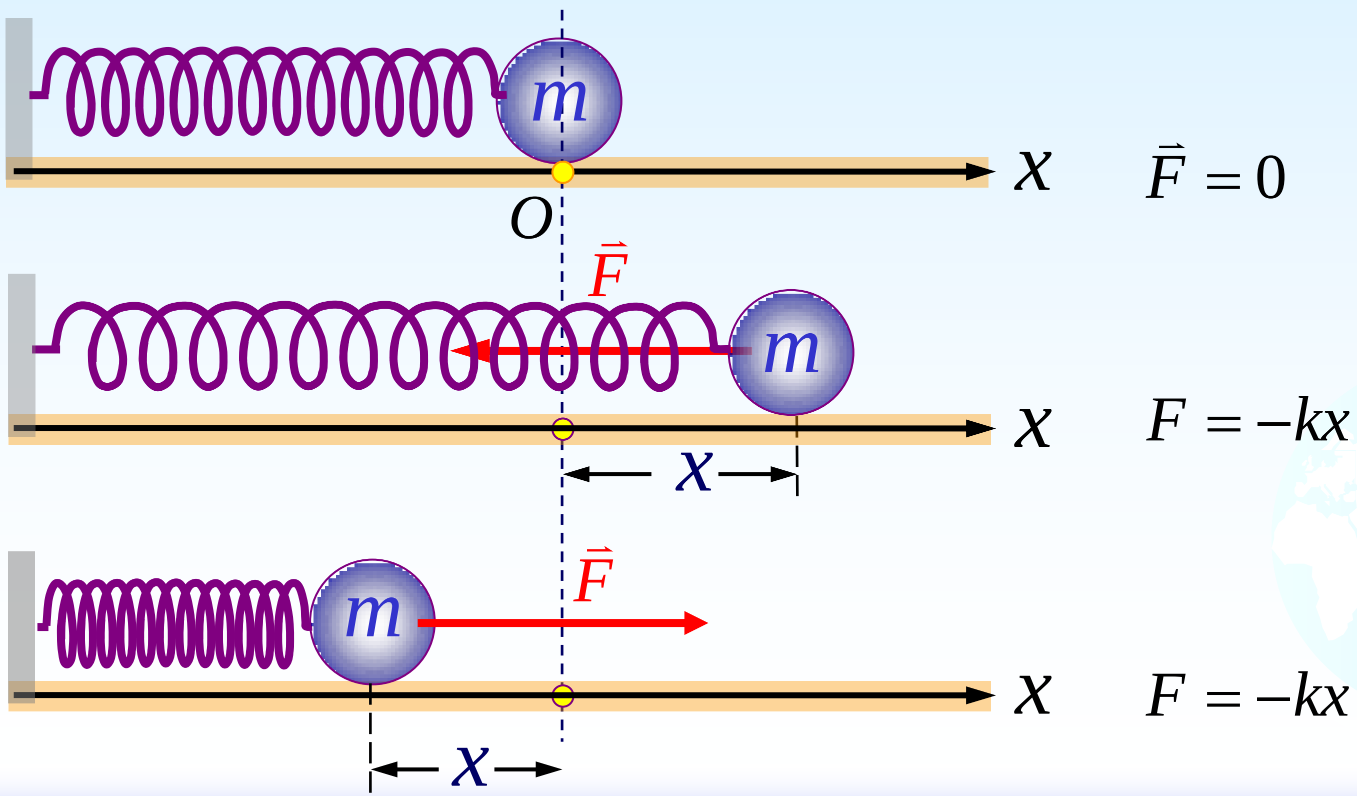
$\Rightarrow$ $m_{引} = m_{惯} = m$ (广义相对论基本假设之一)

2. 弹性力 (elastic force)

物体变形 ⇒ 企图恢复原状 ⇒相互作用力.

分子/原子内电子间电磁力的宏观结果.

- 弹簧的弹性力　胡克定律　$\vec{F} = -kx\vec{i}$

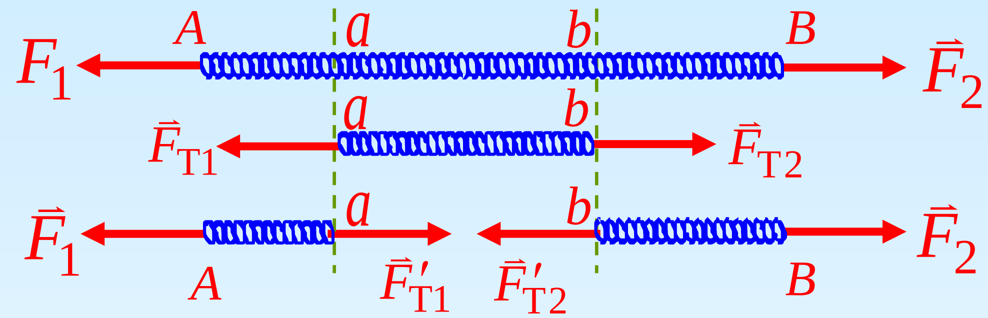


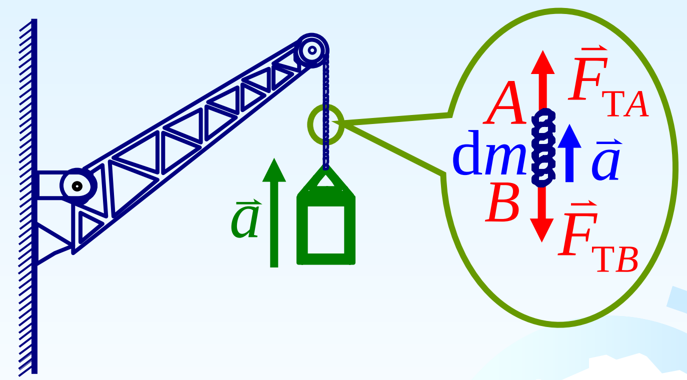
2.3-4 几种常见的力、万有引力

- **绳索内的张力**

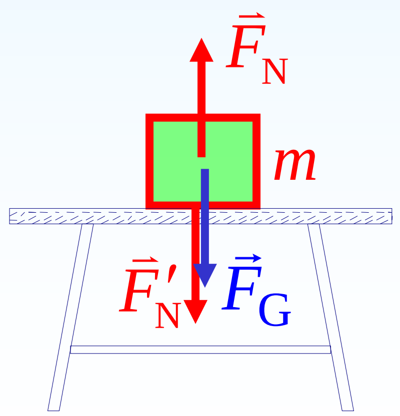
(1) 质量忽略不计的轻绳，绳中各点处的张力相等；

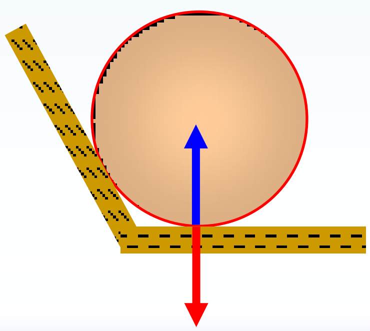
(2) 质量不能忽略的绳索，且处于加速运动状态时，绳中各点处的张力不同。

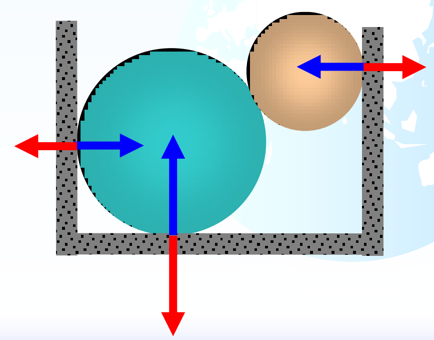




- **正压力与支撑力**





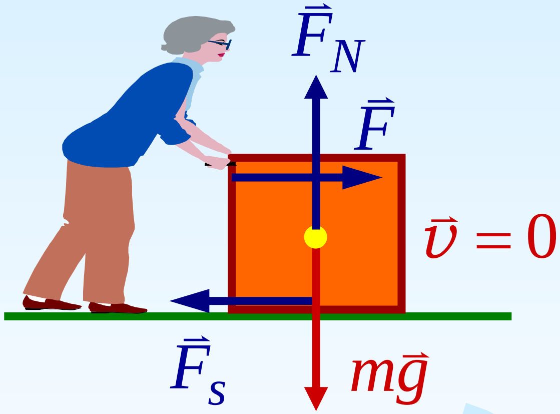


3. 摩擦力 (frictional force)

分布于有相对运动(趋势)的接触面，源于电磁力.

➢ 静摩擦力：彼此接触、相对静止的物体有相对运动趋势时，接触面间出现的摩擦力

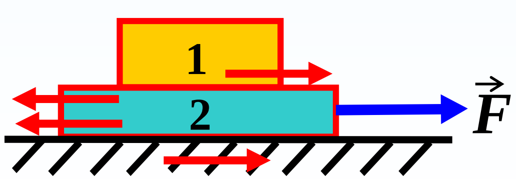
$$\vec{F}_S = -\vec{F}$$

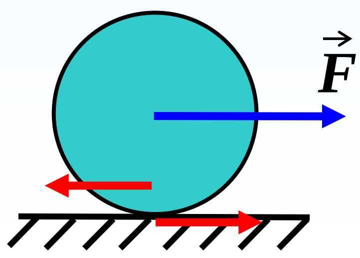


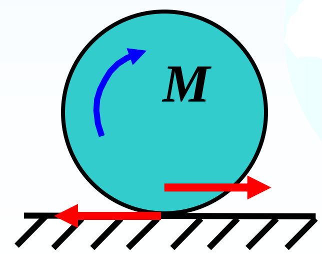
(1) 大小随外力的变化而变化；

(2) 方向与接触面相对滑动趋势的指向相反；

(3) 最大静摩擦力 $\boxed{F_{S\max} = \mu_S F_N}$ μ_S—静摩擦系数

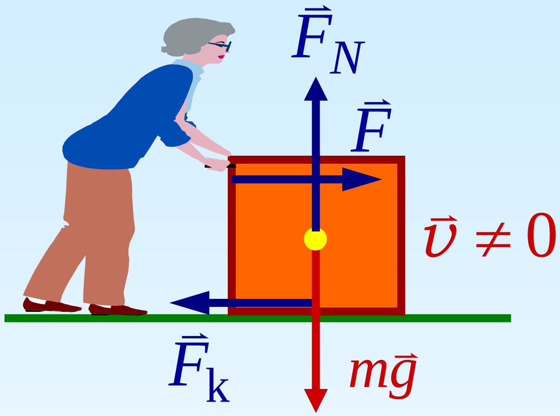






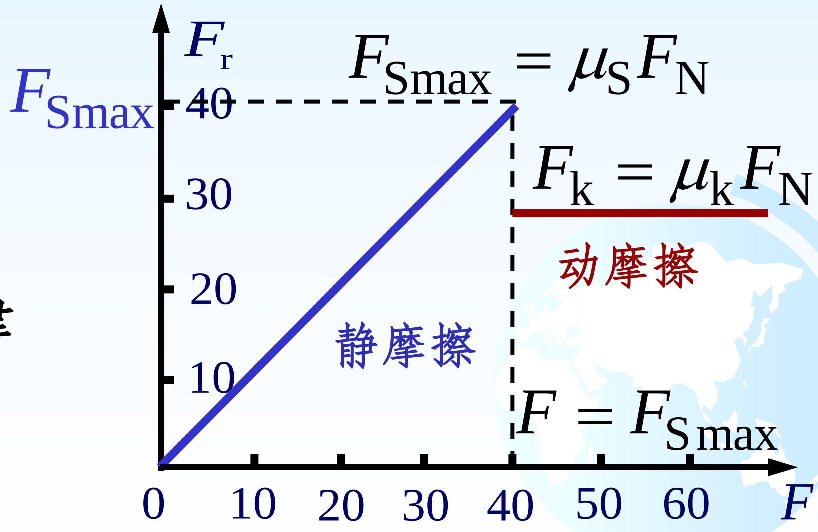
➢ **滑动摩擦力**：相互接触的物体有相对滑动时，接触处出现的摩擦力

$\boxed{F_k = \mu_k F_N}$ μ_k——滑动摩擦系数



(1) $\mu_k < \mu_S$

(2) 滑动摩擦力的方向总是相对运动的方向相反。



干摩擦力随作用力的变化规律

例：汽车**ABS**系统

- **湿摩擦力**：固体在流体中运动时沿接触面出现的摩擦力

（1）在固体与流体相对运动速率不大时

$$\vec{F}_{\mathrm{d}} = -k\vec{v}$$

（2）在固体与流体相对运动速率较大时

$$\vec{F}_{\mathrm{d}} = -k'v\vec{v}$$

（3）湿摩擦力远小于干摩擦力

补充：牛顿定律的应用

应用牛顿运动定律求解质点动力学问题的一般步骤

(1) 选取研究对象，隔离物体；

(2) 分析受力，画出受力图；

(3) 选取坐标系；

(4) 列牛顿运动微分方程求解（通常取分量式）；

(5) 讨论结果的物理意义，判断其是否合理和正确。

牛顿第二定律的微分形式

$$\boxed{\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}}$$

或：

$$\boxed{\vec{F}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})}{\mathrm{d}t}}$$

直角坐标系中的分量式

$$F_x=ma_x=m\frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$F_y=ma_y=m\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

$$F_z=ma_z=m\frac{\mathrm{d}\upsilon_z}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

自然坐标中的分量式

$$F_\tau=ma_\tau=m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$$

$$F_\mathrm{n}=ma_\mathrm{n}=m\frac{\upsilon^2}{\rho}$$

牛顿定律应用举例

一.动力学方程及在各坐标系中的表达式

动力学方程

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}$$

或

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}$$

直角坐标系

$$\begin{cases} m\ddot{x}=F_x \\ m\ddot{y}=F_y \\ m\ddot{z}=F_z \end{cases}$$

平面极坐标系

$$\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F_r \\ m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=F_\theta \end{cases}$$

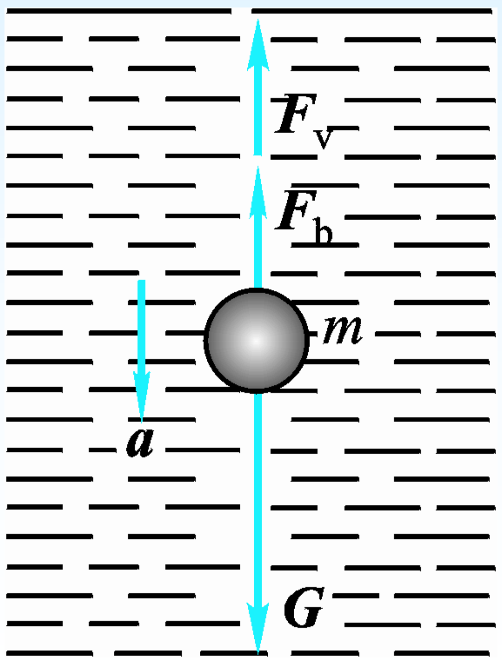
自然坐标系

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt}=F_\tau \\ m\dfrac{v^2}{\rho}=F_n \end{cases}$$

计算一小球在水中竖直沉降的速度。已知小球的质量为m，水对小球的浮力为F_b，水对小球的粘性力为$F_v = -Kv$，式中K是和水的黏性、小球的半径有关的一个常量。

解: 以小球为研究对象，分析受力如图。

小球的运动在竖直方向，以向下为正方向，列出小球运动方程:



$$G - F_b - F_v = ma$$

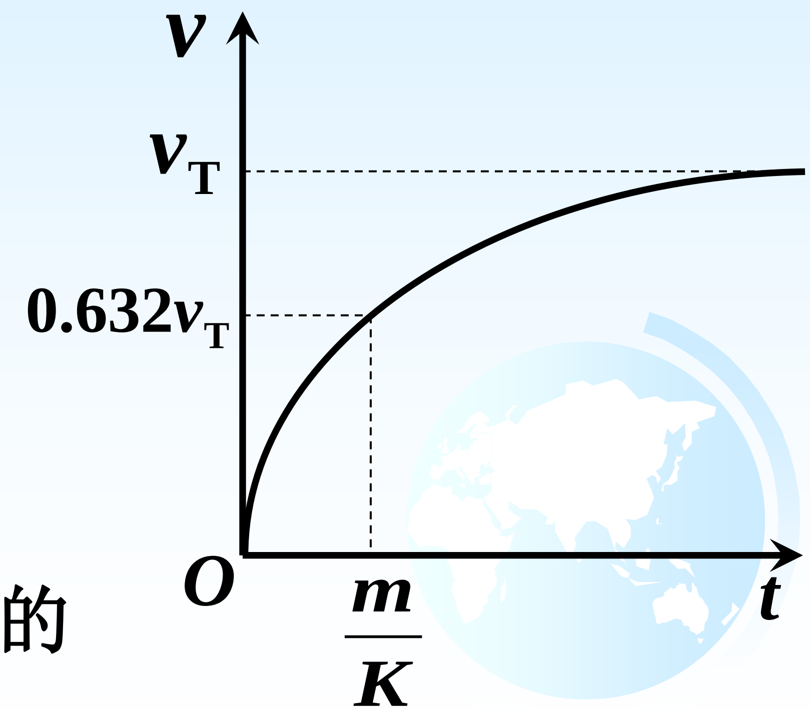
$$\Rightarrow \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{mg - F_b - Kv}{m}$$

令 $v_{\mathrm{T}} = \dfrac{mg - F_{\mathrm{b}}}{K}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{K(v_{\mathrm{T}} - v)}{m}$

分离变量后积分得 $\displaystyle\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v_{\mathrm{T}} - v} = \int_0^t \frac{K}{m}\mathrm{d}t$

$$\ln\frac{v_{\mathrm{T}} - v}{v_{\mathrm{T}}} = -\frac{K}{m}t$$

$$\Rightarrow\quad v = v_{\mathrm{T}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{K}{m}t}\right)$$



讨论 $t \to \infty,\ v = v_{\mathrm{T}}$

称为物体在气体或液体中沉降的**终极速度（terminal velocity）**

所有物体在气体或液体中降落，都存在类似情况。

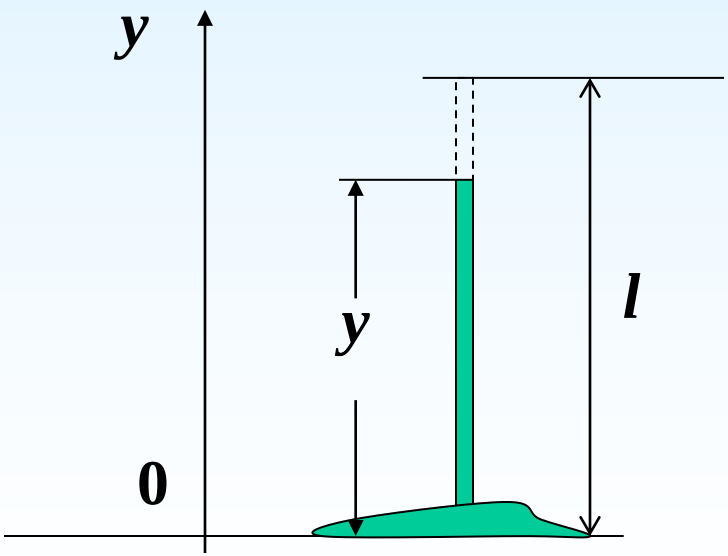
雨滴：0.76 m/s
烟粒：10^{-3} m/s
人：7.6 m/s

人：195公里/时（腹部朝地的跳伞姿势）——320公里/时（缩紧身体时）

2007年3月16日，31个国家的400名跳伞运动员在泰国湾上空摆出莲花造型。

一柔软绳长l,线密度ρ,一端着地开始自由下落,求:下落任意时刻,给地面的压力为多少?

解：如图建坐标,选绳为对象,且设t时绳给地面压力为N,此时绳长为y,速度为v。



$$N - \rho g l = \frac{dp}{dt}$$

$$p = \rho y v \quad \rightarrow \frac{dp}{dt} = \rho \frac{d(yv)}{dt}$$

$$N = \rho g l + \rho \frac{d(yv)}{dt}$$

$$\frac{d(yv)}{dt}=y\frac{dv}{dt}+\frac{dy}{dt}v$$

又 $v=\frac{dy}{dt}$ $-g=\frac{dv}{dt}$

$$v=-gt \qquad y=l-\frac{1}{2}gt^2 \qquad l-y=\frac{v^2}{2g}$$

所以 $$\frac{d(yv)}{dt}=-yg+v^2$$

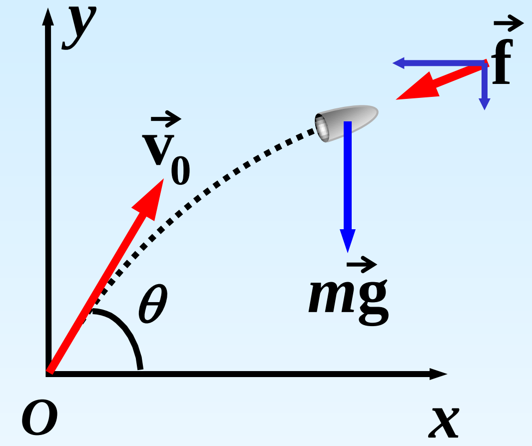
$$=-yg+2(l-y)g$$

$$N=3\rho g(l-y)$$

求抛射体在空气中的运动轨迹,

设 $t=0$ 时 $\vec{v}=\vec{v}_0$, 阻力 $\vec{f}=-k\vec{v}$

解:如图，取坐标系，有:



$$\begin{cases} -k\upsilon_x = m\dfrac{d\upsilon_x}{dt} & (1) \\ -mg-k\upsilon_y = m\dfrac{d\upsilon_y}{dt} & (2) \end{cases}$$

(1)+初始条件:

$$\int_0^t \left(-\frac{k}{m}\right)dt = \int_{\upsilon_0\cos\theta}^{\upsilon_x} \frac{d\upsilon_x}{\upsilon_x} \Rightarrow \upsilon_x = \upsilon_0\cos\theta e^{-kt/m}$$

同理有:

$$\upsilon_y = -\frac{mg}{k} + \left(\upsilon_0\sin\theta + \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}$$

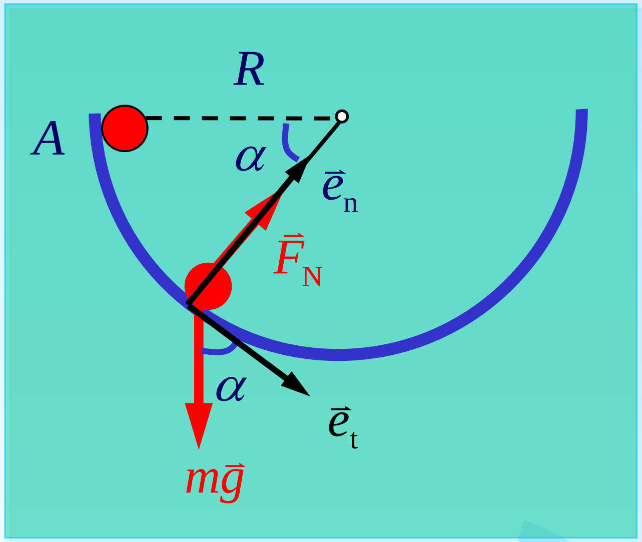
轨迹:

$$y = \left(\tan\theta + \frac{mg}{k\upsilon_0\cos\theta}\right)x + \frac{m^2g}{k^2}\ln\left(1 - \frac{kx}{m\upsilon_0\cos\theta}\right)$$

例 质量为m的小球最初位于半径为R的光滑圆弧面的顶端A点，然后小球沿光滑圆弧面从静止开始下滑。

求 小球在任一位置时的速度和对圆弧面的作用力。

解 受力如图所示　建立自然坐标



列方程

$$mg\cos\alpha = m\frac{dv}{dt} \qquad (1)$$

$$F_N - mg\sin\alpha = m\frac{v^2}{R} \qquad (2)$$

变量代换

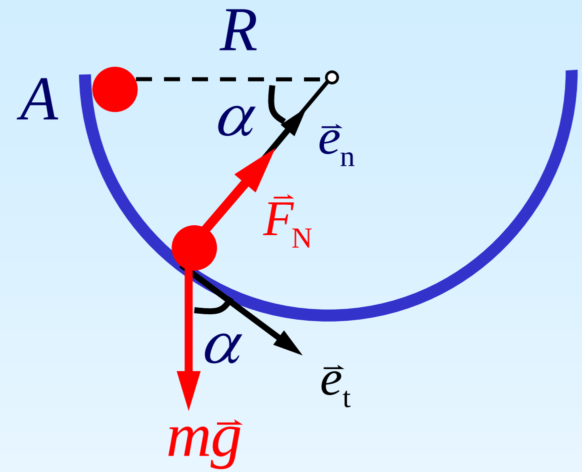
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt} = \omega\frac{dv}{d\alpha} = \frac{v}{R}\frac{dv}{d\alpha}$$

分离变量

$$v\,dv = Rg\cos\alpha\, d\alpha$$

利用初始条件，积分

$$\int_0^v v\mathrm{d}v = \int_0^\alpha Rg\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$



即
$$\frac{1}{2}v^2 = Rg\sin\alpha$$

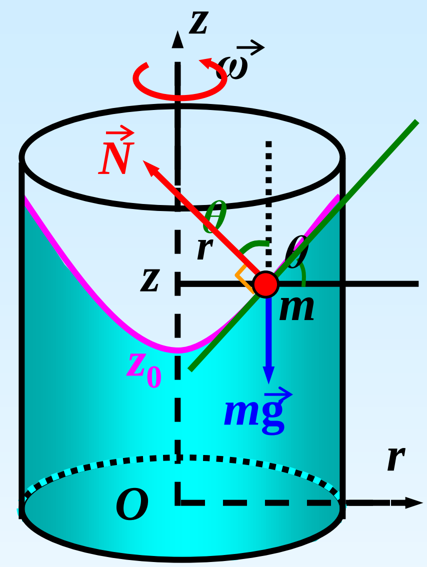
由此可得
$$v = \sqrt{2Rg\sin\alpha}$$

由 (2) 式有
$$F_{\mathrm{N}} = mg\sin\alpha + m\frac{2Rg\sin\alpha}{R}$$

$$= 3mg\sin\alpha$$

已知: 如图，桶绕z轴匀速转动，水对桶静止，略表面张力

求: 水面形状（$z-r$关系）



选对象: 表面某体积微元的水m

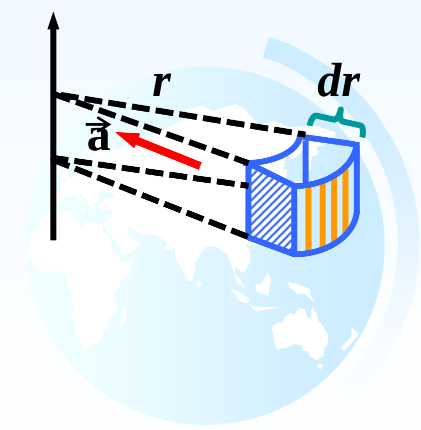
看运动: m作匀速圆周运动 $\vec{\mathbf{a}} = -\omega^2\vec{\mathbf{r}}$

查受力: 受力 $m\vec{\mathbf{g}}$ 及 $\vec{\mathbf{N}}$，$\vec{\mathbf{N}} \perp$ 水面

（稳定时m受到的切向合力为零）

列方程:

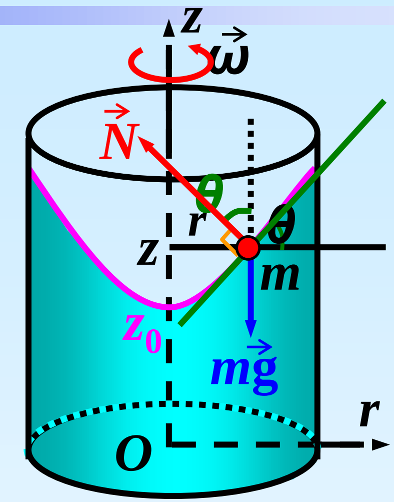
$$\begin{cases} z\text{向：} N\cos\theta - mg = 0 & (1) \\ r\text{向：} -N\sin\theta = -m\omega^2 r & (2) \end{cases}$$



(2)/(1): $$\frac{\omega^2 r}{g} = \tan\theta = \frac{dz}{dr} \qquad dz = \frac{\omega^2}{g} r\,dr$$

取$r=0$时$z=z_0$，有 $$\int_{z_0}^{z} dz=\int_0^r \frac{\omega^2}{g} r\,dr$$

$$\Rightarrow \boxed{z(r)=\frac{\omega^2}{2g}r^2+z_0}$$ （旋转抛物面）



若不转时水深h, 桶半径R, 则z_0可求（V不变）：

$$\int_0^R z(r)\cdot 2\pi r\,dr=\pi R^2 h \quad\Rightarrow\quad \boxed{z_0=h-\frac{\omega^2 R^2}{4g}}$$

补充：物理量的分类和量纲*

物理学中各物理量通过一定的物理规律相互联系

⇒ 不需要对每个物理量规定其单位。

- 基本量：一组不可相互关联的物理量（人为选定）
- 导出量：所有其他通过和基本量的关系式得到的物理量。
- 量纲：**物理量*A*用各基本量的幂次表示的式子**，国际单位制(SI)中的通式为

dimension

$$\dim A = \mathrm{L}^{\alpha}\mathrm{M}^{\beta}\mathrm{T}^{\gamma}I^{\delta}\Theta^{\varepsilon}\mathrm{N}^{\zeta}\mathrm{J}^{\eta}$$

- 基本量是具有独立量纲的物理量，导出量是指其量纲可以表示为基本量量纲组合的物理量.
- 如果所有幂指数均为零，相应的量称为无量纲，如角度、个数、匝数…

国际单位制（SI）规定的7个基本量：

名称	量纲	单位名称	单位符号
长度	L	米	m
时间	T	秒	s
质量	M	公斤	kg
电流	I	安培	A
热力学温度	Θ	开尔文	K
物质的量	N_A	摩尔	mol
发光强度	J	坎德拉	cd

力学

自然单位制**：是微观物理领域（粒子/理论/高能）中常用的单位制，通过取物理常数ε_0、c、k、h等为1，最终只有一个基本量，通常取能量为基本量。

2. 量纲分析*

对物理现象或问题所涉及的物理量的/属性进行分析，从而建立因果关系，是自然科学中一种重要的研究方法。

量纲分析的应用：

1. 确定未知单位的物理量的量纲。
2. 检验公式的正确性（公式两边量纲恒相等）
3. 估算或寻找半定量规律。

力学中基本物理量的量纲为L、T、M

例： $x = x_0 + \upsilon t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow [L]=[L]+[LT^{-1}][T]+[LT^{-2}][T^2]$

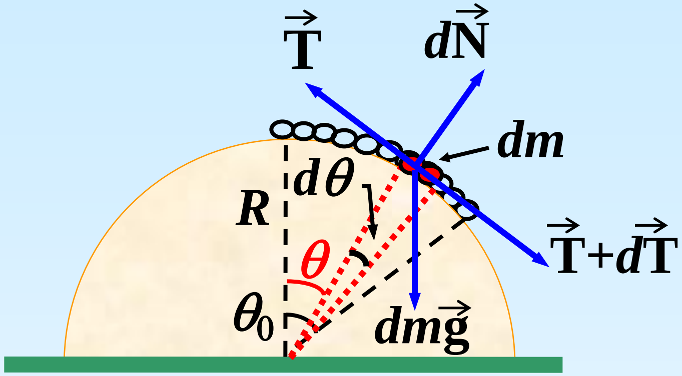
$F = ma \quad \Rightarrow \quad [\dim F]=[M]\cdot[LT^{-2}]=[MLT^{-2}]$

2. 强度量和广延量*

某个系统分为几个部分时，有些物理量也按比例分为不同取值，通常称这些物理量具有加和性，也有些物理量保持不变。据此可以把他们分为：

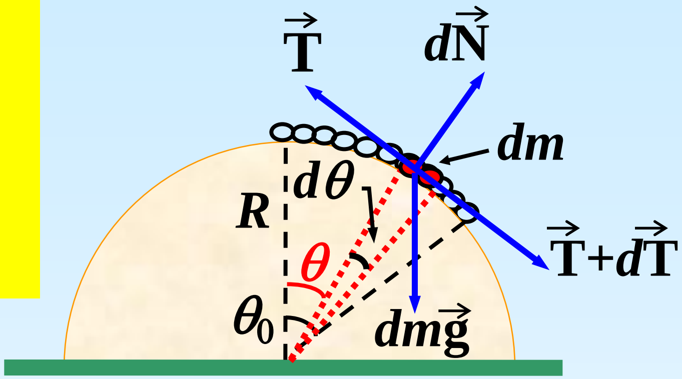
- 强度量：性质与物质的量无关（不具有加和性），如压力、密度、温度…
- 广延量：性质与物质的量成正比，如质量、体积…
- 广延量与强度量的乘积为广延量。单位质量的广延量为强度量。有些物理量既不是广延量也不是强度量，如电阻等。

作业：2.1, 2.3, 2.9, 2.11, 2.13



链条在固定的光滑柱面上由图示位置开“静止下滑”. 求此时链条上各点的加速度。

链条在固定的光滑柱面上由图示位置开始“静止下滑”．
求此时链条上各点的加速度。



解: 链条不可伸长, 各点$a_n = 0$, $a \equiv a_\tau$大小相同. 质量m

由静止下滑, 各点 $\upsilon_0 = 0, a_0 = 0$

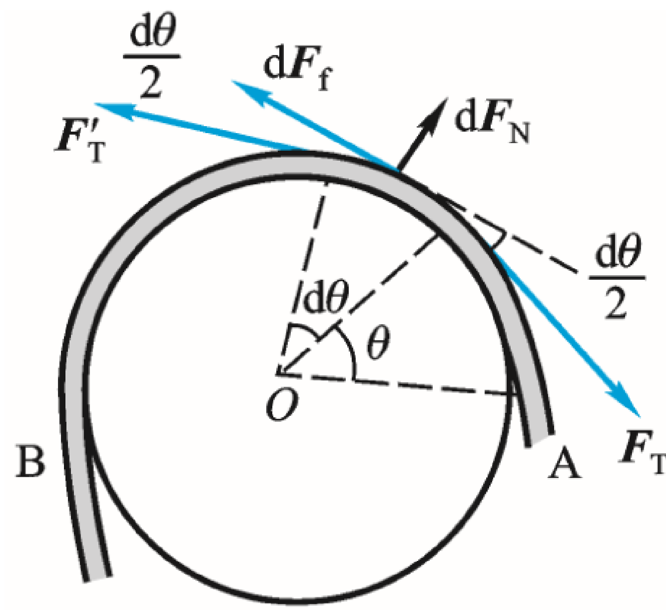
$$\left|\sum \vec{F}_\tau\right| = \int d\vec{T} = \int_m g\sin\theta \ dm$$

$$= \int_0^{\theta_0} mg\sin\theta \frac{d\theta}{\theta_0} = mg(1-\cos\theta_0)/\theta_0 = ma$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1-\cos\theta_0}{\theta_0} g$$

图为船上使用的绞盘，将绳索绕在绞盘固定圆柱上。如绳子与圆柱的静摩擦因数为μ，绳子绕圆柱的张角为θ_0. 当绳在柱面上将要滑动时，求绳子两端张力F_{TA}与F_{TB}大小比。

解：考虑张角dθ的一段绳元



$$F_T\cos\frac{d\theta}{2}-F'_T\cos\frac{d\theta}{2}-\mu_s dF_N=0$$

$$F_T\sin\frac{d\theta}{2}+F'_T\sin\frac{d\theta}{2}-dF_N=0$$

$d\theta$很小，$\sin\frac{d\theta}{2}=\frac{d\theta}{2}\quad\cos\frac{d\theta}{2}=1$

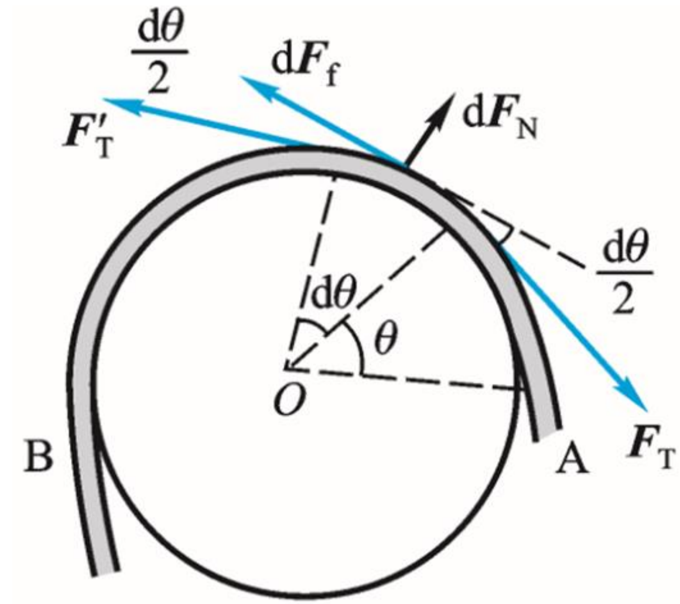
$$F_T+F'_T\approx 2F_T,F'_T-F_T\approx dF_T$$

◀ ▶ 返回 退出

整理得

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{T}} = -\mu_{\mathrm{s}}\mathrm{d}F_{\mathrm{N}}$$

$$F_{\mathrm{T}}\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}F_{\mathrm{N}}$$



消去$\mathrm{d}F_{\mathrm{N}}$，并积分

$$\int_{F_{\mathrm{TA}}}^{F_{\mathrm{TB}}} \frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{T}}}{F_{\mathrm{T}}} = \int_{0}^{\theta_0} -\mu_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow \quad F_{\mathrm{TB}} = F_{\mathrm{TA}}e^{-\mu_{\mathrm{s}}\theta_0}$$

张力随按指数θ_0减小