

Разобьем множество способов a_n наклеить на бандероль марки произвольного достоинства в сумме n рублей следующим образом: в первое подмножество поместим все способы, в которых первой наклеенной маркой k будет марка с достоинством 1, во второе множество - с маркой достоинством 2, и так далее до случая, где первой будет наклеена марка достоинством n рублей. Имея зафиксированный первый элемент множества, оставшуюся сумму можно наклеить a_{n-k} способами по определению (после наклейки первой марки сумма, которую нужно набрать, уменьшается на достоинство этой марки k). Воспользовавшись правилом суммы мы получим $a_n = \sum_{k=1}^n a_{n-k}$. Заметим, что $a_1 = 1$, то есть сумму в один рубль мы можем наклеить одним способом - однорублевой маркой. Давайте теперь преобразуем сумму для a_n . В ней индекс $n-k$ изменяется в пределах $[n-1 \dots 0]$. Заменив индекс мы получим $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. Для $n \geq 2$ мы можем переписать это в виде $a_n = \sum_{k=0}^{n-2} a_k + a_{n-1}$. Но $a_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \Rightarrow a_n = 2 \cdot a_{n-1}$. Отсюда с учетом $a_1 = 1$, мы получим $a_n = 2^{n-1}$, ч.т.д.