

$S(n, 3)$ - это количество неупорядоченных разбиений множества на 3 непустых подмножества. 3^n - это количество различных отображений из множества с n элементами, на множество из 3 элементов. В этом случае $\{(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \{\emptyset\}, \{\emptyset\}), (\{x_1, x_2, \dots\}, \{x_m, \dots, x_k\}, \{\emptyset\}), (\{x_1, \dots\}, \{x_l, \dots\}, \{x_k\}), \dots\}$ некоторым элементам 3 элементного множества может не соответствовать ни один элемент множества с n элементами, кроме того важен порядок группировки, т.е. $(\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\})$ и $(\{x_1\}, \{x_3\}, \{x_2\})$ - это разные группы. Чтобы перейти к разбиению мы должны исключить из нашего отображения эти лишние множества. Случай, когда какая-то из групп оказывается пустой, разобьем на два случая: первый - это когда исходное множество разбивается лишь на две группы, второй - это когда все элементы множества попадают в одну группу. Последних случаев всего 3 (все элементы попали в 1ую, 2ую или 3ю группу), поэтому мы должны вычесть 3 из количества всех отображений. Первый же случай представляет собой число Стирлинга $S(n, 2)$, формулу для которого мы получили в задании на 3ем шаге: $2^{n-1} - 1$. Разбиение на две группы возможно тремя способами: все элементы попадают в 1 и 2 группы, или в 1 и 3, или в 2 и 3. Потому перед вычитанием мы должны домножить $S(n, 2)$ на 3. Кроме того, в исходном отображении важен порядок групп, поэтому каждый вариант дает ещё две вариации: элементы попали в 1 и 2 группу или во 2ую и первую $(\{\emptyset\}, \{x_2\}, \{x_3\})$ и $(\{\emptyset\}, \{x_3\}, \{x_2\})$, поэтому мы должны домножить $S(n, 2)$ ещё на 2. Таким образом мы получаем $3^n - 3 \cdot 2 \cdot (2^{n-1} - 1) - 3 = 3^n - 3 \cdot (2^n - 2) - 3$. Осталось учесть, что в этом разбиении не важен порядок группировки, потому мы должны поделить полученное число на $3! = 6$. Таким образом мы приходим к искомой формуле $\frac{3^n - 3 \cdot (2^n - 2) - 3}{6}$.