SEMINAR. 11 15.12.2020

Temă

3.2.42.

Să se det. $a \in \mathbb{R}$ a.î. lista $v = [v_1, v_2, v_3]^t$ este o bază a lui $\mathbb{R}^3$, unde:

$v_1 = (a, 1, 1)$

$v_2 = (1, a, 1)$

$v_3 = (1, 1, a)$

- Liniar independența

Arătăm că din $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}_1\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}+\mathcal{L}_2\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}+\mathcal{L}_3\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\mathcal{L}_1\cdot a+\mathcal{L}_2+\mathcal{L}_3=0\\ \mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2\cdot a+\mathcal{L}_3=0\\ \mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2+\mathcal{L}_3\cdot a=0\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$$ matricea sistemului

Ca sistemul să admită soluție unică, soluția banală $(\mathcal{L}_1=0,\mathcal{L}_2=0,\mathcal{L}_3=0)$ $\Rightarrow \det A\neq 0$

$$\det A=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}\overset{L_1=L_2+L_1}{=\!=}\begin{vmatrix}a+1&a+1&2\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}\overset{L_1=L_1+L_3}{=\!=}$$

$$=\begin{vmatrix}a+2&a+2&a+2\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=$$

$$=(a+2)(a^2+2-1-2a)=(a+2)(a-1)^2$$

$\det A\neq 0 \Rightarrow (a+2)(a-1)^2\neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}a\neq -2\\ a\neq 1\end{cases}\Rightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$$

- $\dim \mathbb{R}^3=3$, dimensiune finită pt $\forall\ a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$