POP MIHAI-DANIEL

13.01.2021

EXAMEN - ALGEBRĂ

(1) a). Funcție bijectivă = O funcție $f : A \to B$ se numește bijectivă dacă f este atât injectivă cât și surjectivă.
(inj. $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, surj. $\forall y \in B$, $\exists x \in A$ a.î. $f(x) = y$)

- Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată. Dacă A are cel mai mic element, atunci acest element este unicul element minimal.

- Fie A o mulțime. O partiție a mulțimii A este o submulțime $\pi \subseteq P(A)$ a mulțimii putere a lui A (adică o mulțime a cărei elem. sunt submulțimi ale lui A), așa încât:
  (i) $\emptyset \notin \pi$
  (ii) pt $X, Y \in \pi$ dacă $X \cap Y = \emptyset$ atunci $X = Y$
  (iii) $\bigcup_{X \in \pi} X = A$

- Dimensiunea unui K-spațiu vectorial (finit generat) V este) numărul elem. unei baze a (prin urmare a tuturor bazelor) lui V. Se scrie $\dim_K V$ sau $\dim V$.

- Fie V un K-spațiu vectorial și $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^t \in V^{n \times 1}$. Numim coordonatele unui vector $x \in V$ în raport cu b scalarii unic determinați $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ cu prop. $x = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$.

b). Rel. de echivalență pe $\mathbb{Z}$: $(\mathbb{Z}, =)$

- funcție inj. de la $\mathbb{Z}$ la $\mathbb{Z}$: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x$
- subgrup netrivial al lui $\mathbb{Z}$: $2\mathbb{Z}$

• vectori liniar independenți în $\mathbb{R}^2$: $[[0,1],[1,0]]$

• nucleu / $Kerf(\mathbb{R}^2) = \{(0,0)\}$

(C) $m \in \mathbb{Z}$, $\sigma^m = e$, $\sigma = (2,5,4) \in S_{10}$. $3 | m$?

(2) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in 2\mathbb{N} \\ -(x+1)/2, & x \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases} \qquad g(x) = x^2 - 3x + 2$$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \nearrow \infty} g(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \searrow -\infty} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow f$ nu e surjectivă

$g'(x) = 2x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{2} \Rightarrow f$ nu e inj

b) f, g nu sunt bijective $\Rightarrow f, g$ nu sunt inversabile

c) $f \circ g$ - nu e definită

$g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $g \circ f(x) = g(f(x)) = \begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{x}{2} + 2, & x \in 2\mathbb{N} \\ \left(\frac{-(x+1)}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{(x+1)}{2}\right) + 2, & x \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + 2, & x \in 2\mathbb{N} \\ \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{3x+3}{2} + 2, & x \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases}$$

d) $h : \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \le x \le 9\} \to \{a, b, c\}$ prop. că $h(0) \in \{a, b\}$

nr. funcții $= 3^9 \cdot 2$

$=$

$h(0) = a$
$h(1) \in \{a,b,c\}$
$h(2) \in \{a,b,c\}$
$\vdots$
$h(9) \in \{a,b,c\}$

$h(0) = b$
$h(1) \in \{a,b,c\}$
$\vdots$
$h(9) \in \{a,b,c\}$

(3) p prim $\mathbb{Z}+\sqrt{p}\,\mathbb{Z}=\{a+\sqrt{p}\,b \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$

a) $\mathbb{Z}+\sqrt{p}\,\mathbb{Z}$ subinel cu unitate al $(\mathbb{R},+,\cdot)$

$$\left.\begin{array}{l} a+\sqrt{p}\,b \\ c+\sqrt{p}\,d \end{array}\right\} \in \mathbb{Z}+\sqrt{p}\,\mathbb{Z} \Rightarrow (a+\sqrt{p}\,b)+(c+\sqrt{p}\,d)=(a+c)+\sqrt{p}\,(b+d)$$

$a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ $\qquad \in\mathbb{Z}+\sqrt{p}\,\mathbb{Z}$

$$(a+\sqrt{p}\,b)(c+\sqrt{p}\,d)=ac+\sqrt{p}\,ad+\sqrt{p}\,bc+pbd=$$

$$=\underbrace{(ac+pbd)}_{\in\mathbb{Z}}+\sqrt{p}\,\underbrace{(ad+bc)}_{\in\mathbb{Z}} \Rightarrow \in\mathbb{Z}+\sqrt{p}\,\mathbb{Z} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathbb{Z}+\sqrt{p}\,\mathbb{Z}$ parte stabilă în raport cu „+" și „·"

(4) $S = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$; $T = \langle v_1, v_2 \rangle$

$u_1 = (1,2,-1,-2)$, $u_2 = (3,1,1,1)$, $u_3 = (-1,0,1,-1)$

$v_1 = (-1,2,-7,-3)$, $v_2 = (2,5,-6,-5)$

a) $S \leq \mathbb{R}^3$

① $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$

$0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 = (0,0,0) \Rightarrow 0 \in S$

② Fie $x, y \in S$ $\quad x = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$

$y = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3$

$x + y = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 =$

$= (a_1 + b_1)V_1 + (a_2 + b_2)V_2 + (a_3 + b_3)V_3 \Rightarrow x + y \in S$

③ $\left.\begin{array}{l} \lambda x = \lambda a_1u_1 + \lambda a_2u_2 + \lambda a_3u_3 \\ \lambda \in \mathbb{R} \\ \quad \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda x \in S$

Din ①, ②, ③ $\Rightarrow S$ subspatiu $\mathbb{R}^3$

b) $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 5 & -6 & -5 \end{pmatrix}$

$\det S = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 2 - 1 - 0 - 6 = -8$

$\Rightarrow$ liniar independent $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{rank } S = 3 \\ \text{rank } \mathbb{R}^3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow S$ generează $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow S$ bază $\Rightarrow [(1,2,-1,-2), (3,1,1,1), (-1,0,1,-1)]$ bază pt S

$\dim S = 3$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 & -3 \\ 2 & 5 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$\det T = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5-4 = -9 \neq 0 \Rightarrow$ liniar independent $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ rank $T = 2$
rank $\mathbb{R}^2 = 2$ $\}$ $\Rightarrow T$ bază a lui $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \{(-1,2,-7,-3),(2,5,-6,-5)\}$ bază pt T

$\dim T = 2$

$S+T = \{ s+t \mid s \in S, t \in T \}$

$S = (s_1, s_2, s_3)$, $t = (t_1, t_2)$, s, t baze

$s+t = (s_1+t_1, s_2+t_2)$ $s+t$ bază $\Rightarrow$

$\Rightarrow S+T$ generează $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim(S+T) = 2$

$\dim(S \cap T) + \dim(S+T) = \dim S + \dim T$

$\Rightarrow \dim(S \cap T) = \dim S + \dim T - \dim(S+T)$

$= 3 + \cancel{2} - \cancel{2}$

$\dim(S \cap T) = 3$

c)

(5) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2), 2x_1 - x_2, 3x_1 + 2x_2)$

$v = [(1,2), (-2,1)]^t$ $\qquad w = [(1,-1,0), (-1,0,1), (1,1,1)]^t$

a) $f \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\qquad x = [x_1, x_2]$

$f(\lambda x) = \lambda f(x)$ $\qquad y = [y_1, y_2]$

$f(x+y) = f([x_1+y_1, x_2+y_2])$

$= [x_1+y_1+x_2+y_2, 2x_1+2y_1-x_2-y_2, 3x_1+3y_1+2x_2+2y_2]$

$= [x_1+x_2, 2x_1-x_2, 3x_1+2x_2] + [y_1+y_2, 2y_1-y_2, 3y_1+2y_2]$

$= f(x) + f(y)$ $\quad (1)$

$f(\lambda x) = f(\lambda \cdot [x_1, x_2]) = f([\lambda x_1, \lambda x_2])$

$= [\lambda x_1 + \lambda x_2, 2\lambda x_1 - \lambda x_2, 3\lambda x_1 + 2\lambda x_2]$

$= \lambda [x_1+x_2, 2x_1-x_2, 3x_1+2x_2]$

$= \lambda \cdot f(x)$ $\quad (2)$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ $f \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$

$v = [(1,2), (-2,1)]^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1+4 = 5 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ liniar independent $\Rightarrow$ v e bază în $\mathbb{R}^2$

$w = [(1,-1,0), (-1,0,1), (1,1,1)]^t$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0-1+0-0-1-1 = -3 \neq 0 \Rightarrow$ liniar independent

$\Rightarrow$ w e bază în $\mathbb{R}^3$

b) matricea $[f]_{v w} = [f(v)]_w$

$$[f]_{ve} = \begin{bmatrix} f(v_1) \\ f(v_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f([1,2]) \\ f([-2,1]) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -1 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$[f(v)]_w = [f(v)]_e \cdot [W]_e^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -1 & -5 & -4 \end{bmatrix} \cdot W^{-1}$$

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$[f]_{v,w} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & \frac{11}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

c) $Ker(f) = \{x \mid f(x) = 0\}$

$f(x) = 0 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow \langle [0,0] \rangle$ bază pentru $Ker(f) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim Ker(f) = 0$

$\dim \mathbb{R}^2 = \dim Ker(f) + \dim Im(f) \Rightarrow \dim Im(f) = 2$

$f(\langle x \rangle) = \langle f(x) \rangle, \ x \subseteq \mathbb{R}^2$

$f(\mathbb{R}^2) = f(\langle [[1,0],[0,1]] \rangle) = \langle f([e_1, e_2]) \rangle = \langle [f(e_1), f(e_2)] \rangle$

$\Rightarrow$

(5) c) $\Rightarrow f(e_1) = f([1,0]) = [1,2,3]$

$f(e_2) = f([0,1]) = [1,-1,2]$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow$ liniar independent $\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

dim Im(f) = 2

$\Rightarrow \langle [[1,2,3], [1,-1,2]] \rangle$ e bază pt Im(f)