SEMINAR . 12

05.01.2020

Temă

3.3.10 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f[x_1, x_2, x_3] = [x_2, -x_1]$

$v = [[1,1,0], [0,1,1], [1,0,1]]^t$

$w = [[1,1], [1,-2]]^t$

a) $f \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

b) v, w sunt baze în $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ și să se det matricile $[f]_{v,e}$ și $[f]_{v,w}$, e bază canonică în $\mathbb{R}^2$

c) Det dim și câte o bază în $Ker(f)$ și $Im(f)$

a) $f \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2) \Leftrightarrow$ i) $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^3$

ii) $f(\alpha x) = \alpha f(x), \forall x \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}$

i) $x = [x_1, x_2, x_3]$

$y = [y_1, y_2, y_3]$

$x + y = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3]$

$f(x+y) = [x_2 + y_2, -x_1 - y_1]$

$f(x) + f(y) = [x_2, -x_1] + [y_2, -y_1] =$

$= [x_2 + y_2, -x_1 - y_1] = f(x+y)$ "A"

ii) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

$[\alpha x_2, -\alpha x_1] = \alpha [x_2, -x_1]$

$[\alpha x_2, -\alpha x_1] = [\alpha x_2, -\alpha x_1]$ "A"

b) matricea asociată lui v este:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=1+1+0-0-0-0=2\neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ v e bază dacă $\det \neq 0 \Rightarrow$ v bază în $\mathbb{R}^3$

matricea asociată lui w este:

$$B=\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(B)=\begin{vmatrix}1&1\\1&-2\end{vmatrix}=-2-1=-3\neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ w e bază în $\mathbb{R}^2$

$$[f]_{v,e}=[f(v)]_e$$

$$f(v)=[[1,-1],[1,0],[0,-1]] \Rightarrow \begin{pmatrix}1&-1\\1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

bază canonică

$$[f]_{v,w}=[f(v)]_w=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$[v]_b=[v]_e[b]_e^{-1} \quad (\text{formula})$$

$w=[[1,1],[1,-2]]^t$, matricea: $\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}$

$$(w_1+2w_2):3=\frac{1}{3}w_1+\frac{2}{3}w_2$$

$$[1,-1]_b=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$$

$$(2w_1-w_2):3=\frac{2}{3}w_1-\frac{1}{3}w_2$$

$$[1,-2]_b=\left[\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right]$$

c) $\mathrm{Ker}(f)=?$ $\mathrm{Im}(f)=?$

$\mathrm{Ker}(f)=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid f(x)=0\}$

$f[x_1,x_2,x_3]=[x_2,-x_1] \Rightarrow x_2=x_1=0$

$\mathrm{Ker}(f)=\{[0,0,x] \mid x\in\mathbb{R}\}=\langle[0,0,1]\rangle$, deci $[0,0,1]$ este bază $\Rightarrow$ rank $\mathrm{Ker}(f)=1$

$\operatorname{rank} V = \operatorname{rank} \ker(f) + \operatorname{rank} \operatorname{Im}(f)$

$3 = 1 + \operatorname{rank} \operatorname{Im}(f) \Rightarrow \operatorname{rank} \operatorname{Im}(f) = 2$

$\operatorname{Im}(f) = f(\mathbb{R}^3)$

$[e_1, e_2, e_3]$ o listă

$\langle [e_1, e_2, e_3] \rangle = \mathbb{R}^3$

$f(\langle [e_1, e_2, e_3] \rangle) = \langle f[e_1, e_2, e_3] \rangle =$

$= \langle [0,-1], [1,0], [0,0] \rangle : \langle [0,-1], [1,0] \rangle = \operatorname{Im}(f)$