(1) (a) Să se defineasca urmatoarele noţiuni: funcţie bijectivă, element minimal intr-o mulţiem ordonată, partiţie, dimensiunea a unui spaţiu vectorial, coordonate (ale unui vector intr-o anumită bază a unui spaţiu vectorial).

(b) Să se dea câte un exemplu de relaţie de echivalenţă pe mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi, funcţie injectivă de la $\mathbb{Z}$ la $\mathbb{Z}$, subgrup netrivial al grupului $\mathbb{Z}$, vectori liniar independenţi în $\mathbb{R}^2$, nucleu al unui endomorfism al $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^2$.

(c) Fie $m \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $\sigma^m = e$ unde $\sigma = (2, 5, 4) \in S_{10}$ iar e este permutarea identică. Să se arate că $3|m$.

(2) Se consideră funcţiile: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ şi $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & x \in 2\mathbb{N} \\ -(x+1)/2, & x \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases} \quad \text{şi } g(x) = x^2 - 3x + 2.$$

(a) Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea acestor funcţii.

(b) Dacă există să se determine inversele acestor funcţii.

(c) Dacă sunt definite să se calculeze compunerile $f \circ g$ şi $g \circ f$.

(d) Să se determine numărul funcţiilor $h : \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 9\} \to \{a, b, c\}$ cu proprietatea că $h(0) \in \{a, b\}$.

(3) Fie p un număr prim şi $\mathbb{Z} + \sqrt{p}\mathbb{Z} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Să se arate că $\mathbb{Z} + \sqrt{p}\mathbb{Z}$ este un subinel cu unitate al inelului $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

(b) Să se arate că $f : \mathbb{Z} + \sqrt{p}\mathbb{Z} \to \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$, $f(a + \sqrt{p}b) = \begin{bmatrix} a & b \\ pb & a \end{bmatrix}$ este un morfism unital injectiv de inele.

(c) Să se arată că inelele $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$ nu sunt izomorfe.

(4) Se consideră $S = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ şi $T = \langle v_1, v_2 \rangle$, unde $u_1 = (1, 2, -1, -2)$, $u_2 = (3, 1, 1, 1)$, $u_3 = (-1, 0, 1, -1)$, $v_1 = (-1, 2, -7, -3)$, $v_2 = (2, 5, -6, -5)$.

(a) Să se arate că S este subspaţiu în $\mathbb{R}^3$.

(b) Să se determine câte o bază şi dimensiunea pentru S, T, $S+T$ şi $S \cap T$.

(c) Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$ şi $V_1, V_2 \leq_K V$ astfel încât $\dim_K V_1 = n-1$ şi $V_2 \nsubseteq V_1$. Să se arate că $\dim_K(V_1 \cap V_2) = \dim V_2 - 1$ şi că $V_1 + V_2 = V$.

(5) Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1+x_2, 2x_1-x_2, 3x_1+2x_2)$, $\mathbf{v} = [(1, 2), (-2, 1)]^t$ şi $\mathbf{w} = [(1, -1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)]^t$.

(a) Să se arate că $f \in \mathrm{Hom}_R(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ şi că $\mathbf{v}$ respectiv $\mathbf{w}$ sunt baze în $\mathbb{R}^2$, respectiv $\mathbb{R}^3$.

(b) Să se determine matricea $[f]_{v,w}$.

(c) Să se determine câte o bază şi dimensiunea pentru $\mathrm{Im}(f)$ şi $\mathrm{Ker}(f)$.

NOTĂ: Fiecare subiect este notat de la 1 la 10. Toate afirmaţiile făcute trebuie sa fie justificate.