9.2.19.5 Demonstrați utilizând rezoluția liniară

$$\vdash (\exists x) P(x) \vee (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\exists x) P(x)$$

$$\neg((\exists x) P(x) \vee (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\exists x) P(x))$$

Pasul 1

<u>Se înlocuiesc conectivele → și ↔ folosind ¬, ∧, ∨</u>

$$U \leftrightarrow V \quad (\neg U \vee V) \wedge (\neg V \vee U)$$

$$\neg(\neg((\exists x) P(x) \vee (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))) \vee (\exists x) P(x)) \wedge$$

$$(\neg((\exists x) P(x)) \vee (\exists x) P(x) \vee (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))))$$

Pasul 2 <u>Se aplică legile lui DeMorgan</u>

$$(\neg(\neg((\exists x) P(x) \vee (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))) \vee (\exists x) P(x)) \vee$$

$$(\neg(\neg((\exists x) P(x)) \vee (\exists x) P(x) \vee (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)))$$

$$((\exists x) P(x) \wedge \neg((\exists x)(P(x) \wedge Q(x))) \wedge \neg((\exists x) P(x))) \vee$$

$$((\exists x) P(x) \wedge \neg((\exists x) P(x)) \wedge \neg((\exists x)(P(x) \wedge Q(x)))$$

$$((\exists x) P(x) \wedge (\forall x)(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge (\forall x) \neg P(x)) \vee$$

$$((\exists x) P(x) \wedge (\forall x) \neg P(x) \wedge (\forall x)(\neg P(x) \vee \neg Q(x)))$$

Pasul 3

<u>Se redenumesc variabilele legate astfel încât ele să fie distincte</u>

$$((\exists x) P(x) \wedge (\forall y)(\neg P(y) \vee \neg Q(y)) \wedge (\forall z) \neg P(z)) \vee$$

$$((\exists t) P(t) \wedge (\forall s) \neg P(s) \wedge (\forall u)(\neg P(u) \vee \neg Q(u)))$$

Pasul 4

Se utilizează echivalențele logice care reprezintă legile de retragere a cuantificatorilor în fața formulei (Forma Normală Prenexă)

$$U^P = (\exists x)(\exists t)(\forall y)(\forall z)(\forall s)(\forall u)\,(P(x) \wedge (\neg P(y) \vee \neg Q(y)) \wedge \neg P(z)) \vee (P(t) \wedge \neg P(s) \wedge (\neg P(u) \vee \neg Q(u)))$$

Pasul 5

Eliminarea cuantificatorilor $\exists$ (Forma normală Skolem)

$x \leftarrow a$

$t \leftarrow b$

$$U^S = (\forall y)(\forall z)(\forall s)(\forall u)\,(P(a) \wedge (\neg P(y) \vee \neg Q(y)) \wedge \neg P(z)) \vee (P(b) \wedge \neg P(s) \wedge (\neg P(u) \vee \neg Q(u)))$$

Pasul 6

Eliminarea cuantificatorilor $\forall$ (Forma normală Skolem fără cuantificatori)

$$U^{S_2} = (P(a) \wedge (\neg P(y) \vee \neg Q(y)) \wedge \neg P(z)) \vee (P(b) \wedge \neg P(s) \wedge (\neg P(u) \vee \neg Q(u)))$$

Pasul 7

Aducerea la Forma Normală Clauzală (distributivitatea lui $\vee$ față de $\wedge$)

$$U^C = (P(a) \vee (P(b) \wedge \neg P(s) \wedge (\neg P(u) \vee \neg Q(u)))) \wedge ((\neg P(y) \vee \neg Q(y)) \vee (P(b) \wedge \neg P(s) \wedge (\neg P(u) \vee \neg Q(u)))) \wedge (\neg P(z) \vee (P(b) \wedge \neg P(s) \wedge (\neg P(u) \vee \neg Q(u))))$$

$V^c = (P(a) \vee P(b)) \wedge (P(a) \vee \neg P(s)) \wedge (P(a) \vee \neg P(m) \vee \neg Q(m))$
$\wedge (\neg P(y) \vee \neg Q(y) \vee P(b)) \wedge (\neg P(y) \vee \neg Q(y) \vee P(s)) \wedge (\neg P(y) \vee$
$\neg Q(y) \vee \neg P(m) \vee \neg Q(m)) \wedge (\neg P(z) \vee P(b)) \wedge (\neg P(z) \vee \neg P(s))$
$\wedge (\neg P(z) \vee \neg P(m) \vee \neg Q(m))$

$C_1 = P(a) \vee P(b)$
$C_2 = P(a) \vee \neg P(s)$
$C_3 = P(a) \vee \neg P(m) \vee \neg Q(m)$
$C_4 = \neg P(y) \vee \neg Q(y) \vee P(b)$
$C_5 = \neg P(y) \vee \neg Q(y) \vee P(s)$
$C_6 = \neg P(y) \vee \neg Q(y) \vee \neg P(m) \vee \neg Q(m)$
$C_7 = \neg P(z) \vee P(b)$
$C_8 = \neg P(z) \vee \neg P(s)$
$C_9 = \neg P(z) \vee \neg P(m) \vee \neg Q(m)$

$Res_{\theta_1}^{Pr}(C_1, C_7) = P(b) = C_{10}$

$\theta_1 = [z \leftarrow a]$

$Res_{\theta_2}^{Pr}(C_{10}, C_2) = P(a) = C_{11}$

$\theta_2 = [s \leftarrow b]$

$Res_{\theta_1}^{Pr}(C_{11}, C_8) = P(s) = C_{12}$

$\theta_1 = [z \leftarrow a]$

$Res_{\theta_3}^{Pr}(C_{12}, C_{11}) = \square$

$\theta_3 = [s \leftarrow a]$

$\Rightarrow$ Mulțimea de clauze este inconsistentă