Основания алгебраического подхода к синтезу корректных алгоритмов

Лектор — Рудаков К.В.
Наборщик — Старожилец В.М.

Оглавление

Лекция 1

Введение

Данные лекции рассматривают общую задачу машинного обучения без привязки к конкретным методам и основы алгебраического подхода к синтезу корректных алгоритмов для её решения. В некотором роде они являются взглядом сверху на задачи машинного обучения и методы их решения.

В первую очередь следует сформулировать задачу машинного обучения в общем виде. По сути это задача построения алгоритма, который реализует отображение из множества начальных информаций в множество конечных информаций. Сразу отметим, что в курсе рассматриваются только такие отображения, для которых существует реализующий их алгоритм.

Определение. *Символом $\mathfrak{I}_\mathfrak{i}$ (читается «И инишл») будем обозначать множество начальных информаций, например, симптомы болезни.*

Определение. *Символом $\mathfrak{I}_\mathfrak{f}$ (читается «И файнэл») будем обозначать множество конечных информаций, например, диагноз.*

Таким образом, на формальном языке нам требуется найти такой алгоритм A, что он осуществляет отображение из множества начальных информаций $\mathfrak{I}_\mathfrak{i}$ в множество конечных информаций $\mathfrak{I}_\mathfrak{f}$:

$$A : \mathfrak{I}_\mathfrak{i} \to \mathfrak{I}_\mathfrak{f}.$$

Пока что задача стоит так, что нам нужно найти некоторое произвольное отображение из одного множества в другое, реализуемое некоторым алгоритмом. При этом свойства этого отображения и алгоритма неважны. В такой постановке у нас нет каких-либо ограничений на искомый алгоритм: даже датчик случайных чисел является решением этой задачу. Поэтому вводятся дополнительные ограничения на допустимые алгоритмы. Итак,

Определение. *Обозначим $\mathfrak{M}^* = \{A|\ A:\ \mathfrak{I}_\mathfrak{i} \to \mathfrak{I}_\mathfrak{f}\}$ множество всех алгоритмов, реализующих отображение из $\mathfrak{I}_\mathfrak{i}$ в $\mathfrak{I}_\mathfrak{f}$.*

Определение. *Обозначим I_{str} структурную информацию, содержащую условия и требования, накладываемые на A.*

Определение. *Обозначим $\mathfrak{M}(I_{str}) \subset \mathfrak{M}^*$ некоторое подмножество $\mathfrak{M}^*$, удовлетворяющее I_{str}.*

Теперь у нас есть дополнительная информация I_{str}, позволяющий накладывать дополнительные ограничения на нашу задачу. Введём определения допустимого отображения и корректного алгоритма.

Определение. *Любое отображение из множества $\mathfrak{M}(I_{str})$ называется допустимым.*

Определение. *Задача Z заключается в построении алгоритма, реализующего допустимое отображение.*

Определение. *Любой алгоритм реализующий любое допустимое отображение называется корректным.*

В такой формулировке необходимым и достаточным условием разрешимости задачи Z является выполнение выражения:

$$\mathfrak{M}(I_{str}) \neq \emptyset,$$

а условием единственности решения — выполнение равенства:

$$|\mathfrak{M}(I_{str})| = 1.$$

Заметим также, что в данной формулировке корректный алгоритм — это алгоритм, не допускающий ни одной ошибки, а множество $\mathfrak{M}(I_{str})$ — множество алгоритмов не допускающих ошибок. Однако можно поставить условия несколько мягче, и дать алгоритмам возможность ошибаться.

Поиск решения задачи

Пусть $\mathfrak{M}(\pi)$ — некоторое параметрическое семейство отображений. После того как мы выбрали некоторое семейство отображений $\mathfrak{M}(\pi)$, попытаемся попасть в $\mathfrak{M}(I_{str})$, взяв в $\mathfrak{M}(\pi)$ какое-нибудь отображение за начальное. Это возможно, если данные семейства пересекаются:

$$\mathfrak{M}(\pi) \cap \mathfrak{M}(I_{str}) \neq \emptyset.$$

Но, с одной стороны, чем *сложнее* наше семейство, тем выше вероятность, что оно пересекается с семейством $\mathfrak{M}(I_{str})$, однако, с другой стороны, достижение этого пересечения может быть *затратно*, если $\mathfrak{M}(\pi)$ сложное. Также всегда остаётся вероятность, что множество $\mathfrak{M}(\pi)$ с $\mathfrak{M}(I_{str})$ не пересекается. Для поиска компромиссного решения используют идею *расширения множества.*

Определение. *Пусть f — некоторая операция над множеством $\mathfrak{M}^*$. Тогда $f(\mathfrak{M}(\pi))$ будем называть расширением множества $\mathfrak{M}(\pi)$.*

Таким образом, мы хотим расширить некоторое «простое» множество до пересечения с $\mathfrak{M}(I_{str})$. Однако, не любая функция f нам подходит, так как «простое» множество может расшириться до слишком «сложного» множества. Важно, что f мы выбираем сами, поэтому можем выбрать его так, чтобы искать нужный алгоритм было не слишком сложно.

Лекция 2

Алгебра, реляционная система и алгебраическая система

Данная лекция посвящена вопросам терминологии, используемой в данном курсе. Поэтому тут будет очень много определений (ещё больше, чем в предыдущей). Для начала определим понятия алгебры, реляционной системы и алгебраической системы.

Определение. *Сигнатура —набор характеристик, однозначно идентифицирующий объект.*

Определение. *Отношение — математическая структура, которая формально определяет свойства различных объектов и их взаимосвязи. В нашем курсе будет обозначаться буквой R.*

Определение. *Алгеброй называется структура*

$$\begin{pmatrix} A & Op_1 & Op_2 & ... & Op_k \\ & n_1 & n_2 & ... & n_k \end{pmatrix}$$

где A — множество, Op_i — операции на этом множестве, n_i — сигнатуры.

Определение. *Реляционной системой называется структура*

$$\begin{pmatrix} A & R_1 & R_2 & ... & R_k \\ & n_1 & n_2 & ... & n_k \end{pmatrix}$$

где A — множество, R_i — отношения на этом множестве, n_i — сигнатуры.

Определение. *Алгебраической системой называется структура*

$$\begin{pmatrix} A & R_1 & R_2 & ... & R_k & Op_1 & Op_2 & ... & Op_l \\ & n_{1,1} & n_{1,2} & ... & n_{1,k} & n_{2,1} & n_{2,2} & ... & n_{2,l} \end{pmatrix}$$

где A — множество, R_i — отношения на этом множестве, Op_i — операции на этом множестве, n_i — сигнатуры.

Первичные свойства фанкции

Теперь поговорим о функциях. Первичные свойства функций — это иньективность, сурьективность и биективность. Все остальные свойства требуют задать некоторую структуру на тех множествах, на которых они действуют (например, метрику). Пусть функция f действует из A в B. То есть:

$$\begin{cases} f : A \to B \\ f(A) \subseteq B \end{cases}$$

Определим также понятие отношения эквивалентности на множестве A:

Определение. *Отношением эквивалентности π_f на множестве A называется бинарное отношение, которое обладает свойствами транзитивности, симметричности и рефлексивности.*

Данное определение приводит нас к определению фактор-множества A_{π_f} и ядерной эквивалентности отображения f.

Определение. *Фактор-множество A_{π_f} — это множество всех классов эквивалентности заданного множества A, по заданному отношению π_f.*

Определение. *Ядерная эквивалентность отображения f:*

$$(a_1 \equiv a_2) \equiv (f(a_1) = f(a_2)),$$

где эквивалентность понимается в смысле π_f. Следует понимать, что мы выбираем π_f так, чтобы это свойство было выполнено. Это выполнено не для любого отношения эквивалентности.

Саня, тут надо как нибудь переписать... непонятно что откуда идет. Я так понимаю что мы π_f выбираем по f, но чёрт его знает.

Таким образом, мы можем, например, показать, что любое отображение из A в B раскладывается в суперпозицию сюръекции, инъекции и биекции. Данный факт легко понять с помощью рисунка 2.1:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_s"'] & B \\
A_{\pi_f} \arrow[r, "f_{1-1}"] & f(A) \arrow[u, "f_i"']
\end{tikzcd}$$

Рис. 2.1: Иллюстрация представления отображения f как суперпозиции сюръекции, инъекции и биекции. f_S - сюръективное отображение, f_{1-1} - биекция, f_i - инъекция

На данном рисунке изображены четыре множества: A, B, A_{π_f} —фактормножество, и $f(A)$. Множество A сюръективно отображается в свое фактормножество A_{π_f}, из-за ядерной эквивалентности отображения f, A_{π_f} биективно отображается в $f(A)$. В свою очередь $f(A)$ иньективно вкладывается в B как его подмножество.

О декартовом произведении множеств

Поговорим о декартовом произведении множеств и том, как его можно представить через другие операции с множествами. Итак, пусть есть множество индексов $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$ и соответствующий этому множеству индексов набор множеств $\{A_\alpha |\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$. Чему тогда равно произведение $\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_\alpha$? По крайней мере оно не нулевое так как любое декартово произведение произвольного семейства непустых множеств в непустом количестве непусто (об этом свидетельствует теорема выбора). Оказывается, что

$$\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_\alpha = \{f|\ f:\ \mathfrak{A} \to \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_\alpha, \forall\alpha\in\mathfrak{A} : f(\alpha)\in A_\alpha\}$$

Например, пусть

$$A_\alpha = A_{(x,y)} = \{(x',y')|\rho((x,y),(x',y'))\leq 1\}$$

Тогда,

$$\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_\alpha = \{f|f: R^2 \to R^2,\ \forall(x,y) : \rho((x,y), f((x,y)))\leq 1\}$$

Лекция 3

Свободное произведение

Саня, Я вообще не уверен, что тут все правильно. Проверь меня, если сам понял хоть что-то в этой теме:). Надо ещё как то обосновать представление прямой суммы как специфического объединения. Я не понял почему оно так представляется. Очень может быть что я пропустил тут в определениях какое нибудь "для любого альфа мне самому не совсем понятно

Прежде чем вводить свободное произведение, вспомним о понятии гомоморфизма, играющего важную роль в свободном произведении.

Определение. *Гомоморфизм - это отображение алгебраической системы A, сохраняющее основные операции и основные соотношения.*

Определение (Свободное произведение)**.** *Пусть имеется $\{A_\alpha |\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ - некоторое множество алгебраических систем. Тогда, алгебраическая система B, порождённая системами A_α, так, что гомоморфизм $\varphi_\alpha : C \to A_\alpha$, где C - произвольная алгебраическая система, продолжается до гомоморфизма $f : \ C \to B$ называется свободным произведением и обозначается $\prod^*_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_\alpha$.*

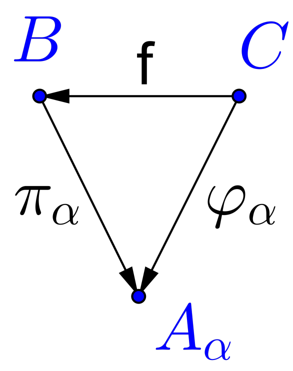


Рис. 3.1: Иллюстракция к понятию свободного произведения

На рисунке 3.1 видно, как работает это определение. Мы берем произвольное C и его морфизм в произвольный A_α. Тогда, имея морфизм $\pi_\alpha : B \to A_\alpha$ мы автоматически задаём единственный морфизм из C в B. Вот в чём суть. Важное замечание состоит в том, что, возможно, лектор ошибся, и перепутал свободное произведение с свободной суммой, которая будет определена в дальнейшем.

Свободная сумма

Данное понятие очень похоже по сути на понятие свободной суммы. Вы сами увидите, что конструкции практически идентичны.

Определение (Свободная сумма)**.** *Пусть имеется* $\{A_\alpha|\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *- некоторое множество алгебраических систем. Тогда, алгебраическая система* B*, порождённая системами* A_α*, так, что гомоморфизм* $g_\alpha : A_\alpha \to C$*, где* C *- произвольная алгебраическая система, продолжается до гомоморфизма* $g :\ B \to C$ *называется свободной суммой и обозначается* $\sum^*_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_\alpha$*.*

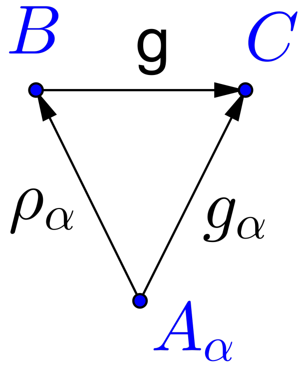


Рис. 3.2: Иллюстракция к понятию свободной суммы

На рисунке 3.2 видно, как работает это определение. Его принцип очень схож с принципом свободного произведения. И на самом деле - свободная сумма двойственна свободному произведению. На всякий случай напомним понятие двойственности из теории категорий:

Определение. *Двойственность в теории категорий — соотношение между свойствами категории* C *и так называемыми двойственными свойствами двойственной категории* C^**. Взяв утверждение, касающееся категории* C *и поменяв местами образ и прообраз каждого морфизма, так же как и порядок применения морфизмов, получим двойственное утверждение, касающееся категории* C^**. Принцип двойственности состоит в том, что истинные утверждения после такой операции переходят в истинные, а ложные в ложные.*

Чем же является прямая сумма в более привычных терминах теории групп? На самом деле если множества A_α не пересекаются то это просто объединение. Если же они пересекаются, то это объединение, которое ставит в соответствие $N = \sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} |A_\alpha|$ элементное множество. Например, пусть $A^*_\alpha = \{(a,\alpha)\|a \in A_\alpha\}$. Тогда $B = \bigcup A^*_\alpha$.

Лекция 4

Кажется, тут меня не было

Лекция 5

Введение в категории

Определение. *Класс - это объект который не может быть элементом множества или другого класса, в остальном свойства класса и множества совпадают.*

Определение. *Будем обозначать* $\mathfrak{C}_{ql}(\mathfrak{U})$ *- пространство всех матриц над произвольным неодноэлементным множеством* $\mathfrak{U}$*. Заметим, что если* $\mathfrak{U}$ *произвольные множества, то* $\mathfrak{C}_{ql}(\mathfrak{U})$ *это класс.*

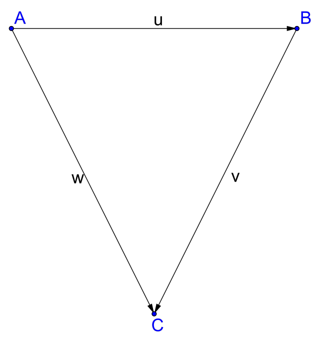
Определение (Категория)**.** *Это очень важное определение. Будем обозначать* Ψ *категорию. Тогда,*

- $Ob\Psi$ *- класс*
- $\forall(A, B) \in Ob\Psi \to Homm_{\Psi}(A, B)$ *- множество.*
  То есть любой паре элементов из $Ob\Psi$ *ставится в соответствие множество отображений из* A *в* B*.*

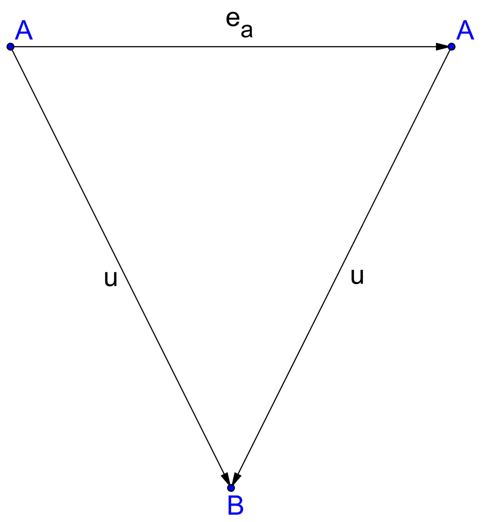
Таким образом категория это множество объектов и операций над ними.

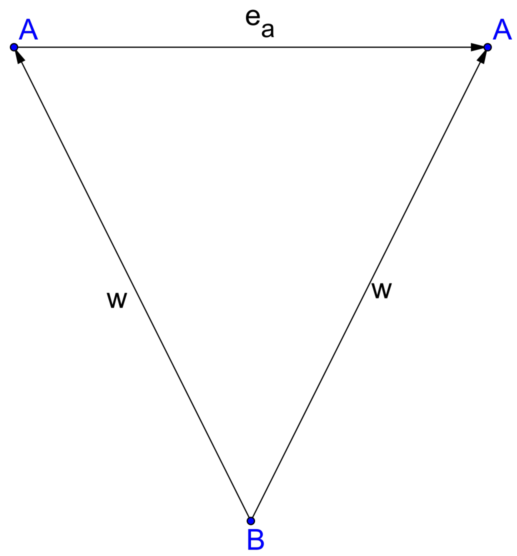
Рассмотрим свойства категории Ψ.

1. Пусть есть 3 элемента $A, B, C \in \Psi$, причём Тогда $w = v \circ u$. Таким образом определе-



ны суперпозиции для морфизмов. Более того, $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$ для любых u, v, w для которых такая суперпозиция имеет смысл. А также существует единственный элемент e_A, такой, что





2. Ψ' подкатегория Ψ если:

   - $Ob\Psi'$ - подкласс $Ob\Psi$
   - $\forall\ A, B \in Ob\Psi' :\ Homm_{\Psi'} \subseteq Homm_{\Psi}(A, B)$

   Причём, если во втором условии стоит равенство, то Ψ' - полная подкатегория категории Ψ.

Дальнейшая формализация общей задачи

Для начала введём несколько понятий, тут будут использоваться следующие сокращения: $ob = object,\ cl = class,\ i = initial,\ f = final$. Приступим:

- $\Upsilon = \{S\}$
- $\mathfrak{D}_{ob} :\ \Upsilon \to \mathfrak{J}_{ob}$
- $K_1, \ldots, K_l;\ K_j \subseteq \Upsilon,\ j = \overline{1, l}$. Мы рассматриваем задачу классификации и это - наши классы. Они являются элементами одного множества но сами могут быть различны.
- $\mathfrak{D}_{cl} :\ 2^{\Upsilon} \to \mathfrak{J}_{cl}$

Наша задача: $A :\ \mathfrak{J}_i \to \mathfrak{J}_f$. Её решение может быть формализовано в различных вариантах:

1. $\mathfrak{J}_i = \mathfrak{J}_{ob} \times \mathfrak{J}_{cl}$. В такой постановке мы игнорируем тот факт, что классов у нас l. Неявно предполагаем, что классы однородны.

2. $\mathfrak{J}_i = \mathfrak{J}_{ob} \times \mathfrak{J}_{cl}^l$. Этот вариант лишен проблемы первого пункта и классы наши различны.

3. $\mathfrak{J}_i = \mathfrak{J}_{ob}^q \times \mathfrak{J}_{cl}^l$. Ещё более сложный вариант в котором участвует количество объектов - q. Таким образом $S_1, \ldots, S_q$ - объекты, $(S_1, \ldots, S_q) \in \Upsilon^q$ и окончательно $\mathfrak{D}(S_1), \ldots, \mathfrak{D}(S_q) \in \mathfrak{J}_{ob}^q$.

4. $\mathfrak{J}_i = \mathfrak{C}_{ql}(\mathfrak{J})$, $\mathfrak{J}_f = \mathfrak{C}_{ql}(\tilde{\mathfrak{J}})$, где $\mathfrak{C}_{ql}$ - пространство $q \times l$ матриц над чем либо. Данный вариант наиболее общий и его мы и будем в дальнейшем рассматривать считая $\mathfrak{J}$, $\tilde{\mathfrak{J}}$ неодноэлементными множествами (иначе множество матриц тривиально). Может показаться, что пункт 4 и 3 дают одинаковую задачу, но это не так. Саня, Я не помню контрпример. Если у тебя есть - впиши