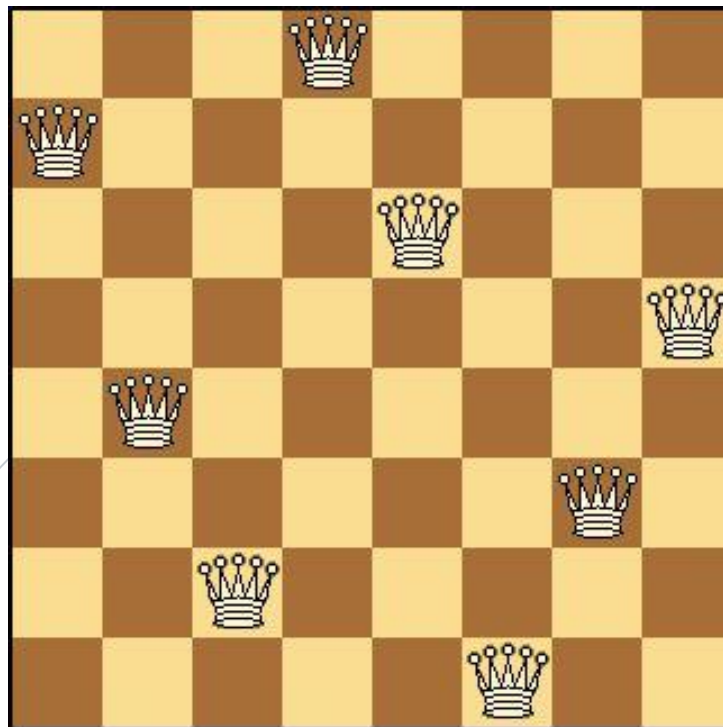


PROJET OC M2

Année 2016/2017

Optimisation et Complexité

« Problème des reines en SAT »



Enseignant : Alain Giorgetti

Avec la Participation de :

Mehdi Azizi, Anthony Casagrande, Pierre Wagnier, Cédric Petetin, Simon Pallais,
Yassin Ousleveh Bileh, Vianney Lotoy Bendenge, Wentian Huang

Sommaire

Introduction	2
Formalisation	3
1. Mise en forme CNF	3
2. Lecture par le solveur MiniSAT	4
Expérimentation.....	6
Conclusion	7
Annexe	8

Introduction

Le but de ce projet est d'expérimenter les techniques SAT sur le problème des n reines en utilisant un solveur SAT.

Le problème des n -reines est un problème inspiré des échecs, proposé initialement en 1848 par un joueur d'échec du nom de Max Bassel. Ce problème consiste à disposer n reines sur un échiquier $n \times n$ de manière à ce qu'aucune d'entre elles ne soit en prise avec les autres.

Il nous faut donc effectuer des tests pour voir la faisabilité ou non des possibilités en fonction de ce nombre « n ».

Il nous faut tout d'abord définir les contraintes du problème et ensuite affecter des valeurs aux variables de tel sorte que ces contraintes soient satisfaites.

Dans un premier temps, nous formaliserons les contraintes par des formules propositionnelles et nous verrons comment les rendre interprétable par notre solveur. Puis nous expérimenterons plusieurs solutions via la création de test pour déterminer les solutions adéquates au problème.

Formalisation

1. Mise en forme CNF

Dans un premier temps, Il nous a fallu formaliser le problème, c'est-à-dire représenter le modèle sous une forme qui sera interprétable par el solveur. Pour ce faire, notre professeur nous avait mis à disposition un document comprenant les principales contraintes du problème, qui sont :

1. Il y a deux reines sur la même ligne
2. Il y a deux reines sur la même colonne
3. Il y a deux reines sur la même diagonale montante
4. Il y a deux reines sur la même diagonale descendante
5. il y a au moins une reine par ligne

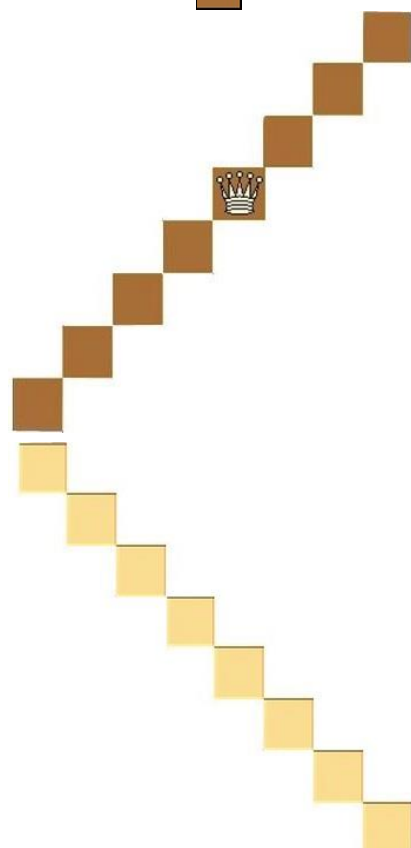
Ce qui donne, une fois les contraintes exprimer en logique propositionnelle :



$$\bigvee_{1 \leq i, j, k \leq n, j \neq k} (r_{i,j} \wedge r_{i,k})$$



$$\bigvee_{1 \leq i, j, k \leq n, i \neq k} (r_{k,j} \wedge r_{i,j})$$



$$\bigvee_{1 \leq i, j \leq n-1, 1 \leq k \leq n-i, 1 \leq k \leq n-j} (r_{i,j} \wedge r_{i+k,j+k})$$

$$\bigvee_{1 \leq i, j \leq n-1, 1 \leq k \leq n-i, 1 \leq k \leq j-2} (r_{i,j} \wedge r_{i+k,j-k})$$

On passe les formules précédentes en CNF, On Obtient :

$$\bigwedge_{1 \leq i,j,k \leq n, j \neq k} (\neg r_{i,j} \vee \neg r_{i,k}) \bigwedge_{1 \leq i,j,k \leq n, j \neq k} (\neg r_{i,j} \vee \neg r_{k,j}) \bigwedge_{1 \leq i,j \leq n-1, 1 \leq k \leq n-i, 1 \leq k \leq n-j} (\neg r_{i,j} \vee \neg r_{i+k,j+k}) \bigwedge_{1 \leq i,j \leq n-1, 1 \leq k \leq n-i, 1 \leq k \leq j-2} (\neg r_{i,j} \vee \neg r_{i+k,j-k})$$

2. Lecture par le solveur MiniSAT

Le solveur que nous utilisons, MiniSAT, a besoin que la formule soit en CNF et que le format du fichier soit sous le format DIMACS.

Exemple :

c A sample .cnf file.

p cnf 3 2

1 -3 0

2 3 -1 0

Nous avons développé un programme en Java qui prend en paramètre la taille de l'échiquier (8 pour 8*8, 16 pour 16*16) et retourne un fichier au format DIMACS, interprétable par le solveur.

Nous avons donc dû transformer les formules propositionnelles précédentes en code Java, nous avons donc :

Pour les ligne (le code pour les colonnes est très similaire) :

```
for (i=1; i<=n; i++){
    for (j=1; j<=n; j++){
        k=j+1;
        while (k<=n){
            writer.print("-");
            buf = (i-1)*n + j;
            writer.print(buf + " -");
            buf = (i-1)*n + k;
            writer.print(buf + " ");
            writer.println("0");
            k++;
        }
    }
}
```

Pour les diagonales montantes (le code pour les diagonales descendantes est très similaire) :

```
// Part for the biggest diagonal
for (i=1; i<=n-1; i++){
    for(j=i+1; j<=n; j++){
        writer.print("-");
        buf = i + (i-1)*n;
        writer.print(buf + " -");
        buf = j + (j-1)*n;
        writer.println(buf+ " 0");
    }
}

// Part for the other diagonals
for(i=2; i<=n-1; i++){
    for(j=i; j<=n-1; j++){
        for(k=j+1; k<=n; k++){
            writer.print("-");
            buf = i + (j-i)*(n+1);
            writer.print(buf + " -");
            buf = i + (k-i)*(n+1);
            writer.println(buf+ " 0");
        }
    }
    for(j=i; j<=n-1; j++){
        for(k=j+1; k<=n; k++){
            writer.print("-");
            buf = i + (j-i)*(n+1) + (i-1)*(n-1);
            writer.print(buf + " -");
            buf = i + (k-i)*(n+1) + (i-1)*(n-1);
            writer.println(buf+ " 0");
        }
    }
}
```

Le programme complet sera rendu joint avec le rapport au format numérique.

Expérimentation

Suite à cela, nous avons établi une plage de taille de plateau, allant de 1*1 à 15*15, pour lesquelles nous allons déterminer la satisfaisabilité. Les détails de chaque test son disponible en annexe.

Ainsi, nous avons les résultats suivant :

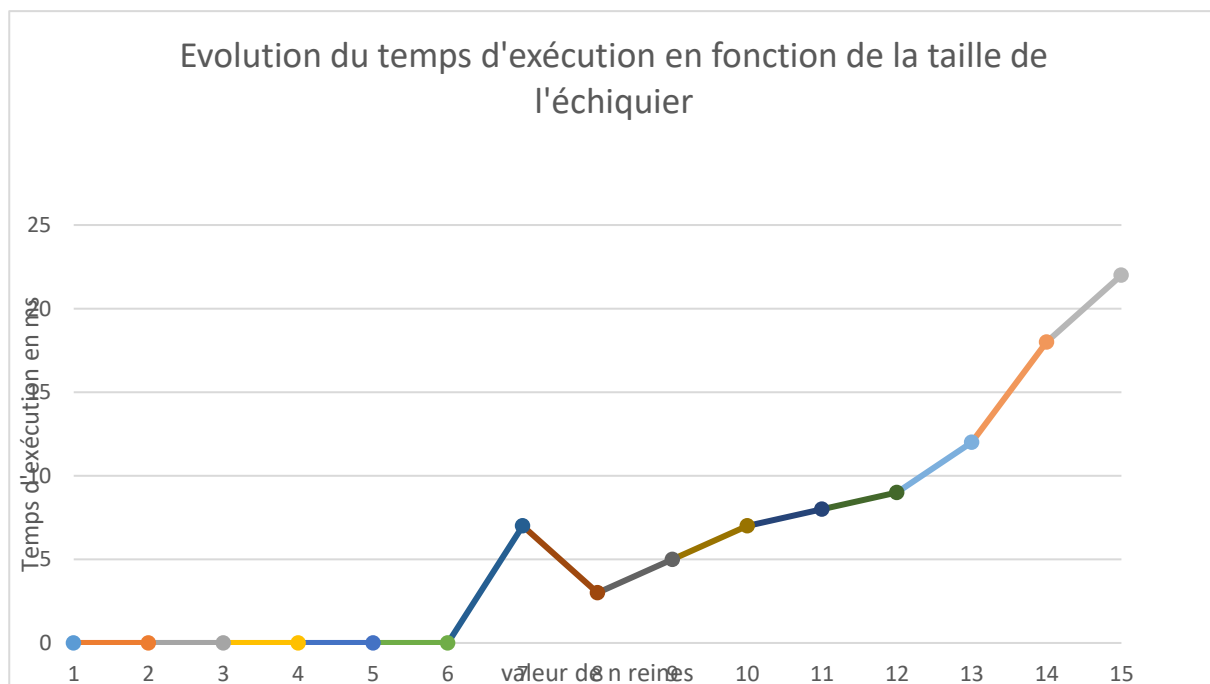
Les valeurs pour lesquelles "n" n'est pas satisfaisable sont 2 et 3.

Les valeurs pour lesquelles "n" est satisfaisable sont 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 et 15.

En classifiant de la plus petite à la plus grande valeur en temps d'exécution, on aura :

n = 1: 0 ms	n = 12: 4.922 ms
n = 2: 0 ms	n = 8: 6.922 ms
n = 3: 0 ms	n = 9: 8.492 ms
n = 4: 0 ms	n = 11: 8.895 ms
n = 5: 0 ms	n = 13: 11.684 ms
n = 7: 0 ms	n = 14: 18.361 ms
n = 10: 7.18 ms	n = 14: 18.361 ms
n = 6: 3.478 ms	

En fin d'expérimentation, le constat fait est que plus la valeur de n augmente, elle est satisfaisable car il n'y a qu'une seule reine par ligne sans qu'elles puissent se menacer mutuellement.



Conclusion

Cette expérimentation nous a permis de voir un exemple de procédure de décision. En effet, sans pouvoir déterminer exactement qu'elles étaient toutes les solutions, nous avons pu déterminer les cas qui n'en possédaient aucune. Ainsi, nous avons pu répondre à la question : « Dans ce cas, le problème a-t-il une solution ? », tout en nous familiarisant avec un solveur SAT et ses contraintes (format, limite, etc...). De plus, étant huit étudiants sur ce travail, cela nous a permis d'ajouter une expérience de groupe supplémentaire.

Annexe

1. Experimentation1 sur SAT_Reine_1.cnf pour n = 1:

WARNING: for repeatability, setting FPU to use double precision

=====[Problem Statistics

]=====

```
|
|
| Number of variables:          1
|
| Number of clauses:           0
|
| Parse time:                  0.00 s
|
| Simplification time:         0.00 s
|
|
|
```

=====[Search Statistics

]=====

Conflicts	ORIGINAL	LEARNT
Progress		
Vars	Clauses	Literals
Limit	Clauses	Lit/Cl

```
=====
=====
=====
```

```
restarts          : 1
conflicts         : 0          (-nan /sec)
decisions         : 1          (0.00 % random) (inf /sec)
propagations      : 1          (inf /sec)
conflict literals : 0          (-nan % deleted)
Memory used       : 20.83 MB
CPU time          : 0 s
```

SATISFIABLE

```
-----
-----
```

2. Experimentation2 sur SAT_Reine_2 pour n = 2:

WARNING: for repeatability, setting FPU to use double precision

=====[Problem Statistics

]=====

```
|
|
| Number of variables:          4
|
```

```
| Number of clauses:          8
|
| Parse time:                  0.00 s
|
| Eliminated clauses:         0.00 Mb
|
| Simplification time:        0.00 s
|
|
|
```

=====

Solved by simplification

```
restarts          : 0
conflicts         : 0          (-nan /sec)
decisions         : 0          (-nan % random) (-nan /sec)
propagations      : 2          (inf /sec)
conflict literals : 0          (-nan % deleted)
Memory used       : 20.83 MB
CPU time          : 0 s
```

UNSATISFIABLE

3. Experimentation3 sur SAT_Reine_3 pour n = 3:

WARNING: for repeatability, setting FPU to use double precision

===== [Problem Statistics

]=====

```
|
|
| Number of variables:          9
|
| Number of clauses:           31
|
| Parse time:                   0.00 s
|
| Eliminated clauses:          0.00 Mb
|
| Simplification time:          0.00 s
|
|
|
```

=====

Solved by simplification

```
restarts          : 0
conflicts         : 0          (-nan /sec)
decisions         : 0          (-nan % random) (-nan /sec)
propagations      : 4          (inf /sec)
conflict literals : 0          (-nan % deleted)
Memory used       : 20.83 MB
CPU time          : 0 s
```

UNSATISFIABLE

4. Experimentation4 sur SAT_Reine_4 pour n = 4:

WARNING: for repeatability, setting FPU to use double precision

===== [Problem Statistics

]=====

```

|
|
|   Number of variables:           16
|
|   Number of clauses:            80
|
|   Parse time:                   0.00 s
|
|   Eliminated clauses:           0.00 Mb
|
|   Simplification time:          0.00 s
|
|
|

```

===== [Search Statistics

]=====

Conflicts	ORIGINAL	LEARNT
Progress		
Vars	Clauses	Literals
Limit	Clauses	Lit/Cl

```

=====
=====
=====
=====

```

```

restarts           : 1
conflicts          : 0          (-nan /sec)
decisions          : 5          (0.00 % random) (inf /sec)
propagations       : 12         (inf /sec)
conflict literals  : 0          (-nan % deleted)
Memory used        : 20.83 MB
CPU time           : 0 s

```

SATISFIABLE

5. Experimentation5 sur SAT_Reine_5 pour n = 5:

WARNING: for repeatability, setting FPU to use double precision

===== [Problem Statistics

]=====

```

|
|

```

```

|   Number of variables:           25
|
|   Number of clauses:             165
|
|   Parse time:                    0.00 s
|
|   Eliminated clauses:            0.00 Mb
|
|   Simplification time:           0.00 s
|
|
|
=====[ Search Statistics
]=====
| Conflicts |          ORIGINAL          |          LEARNT          |
Progress |
|           |   Vars   Clauses Literals |   Limit  Clauses Lit/Cl |
|
=====
=====
=====
=====
restarts           : 1
conflicts          : 0              (-nan /sec)
decisions          : 7              (0.00 % random) (inf /sec)
propagations       : 20             (inf /sec)
conflict literals  : 0              (-nan % deleted)
Memory used        : 20.83 MB
CPU time           : 0 s

SATISFIABLE

-----
-----

```

6. Experimentation6 sur SAT_Reine_6 pour n = 6:

WARNING: for repeatability, setting FPU to use double precision

```

=====[ Problem Statistics
]=====
|
|
|   Number of variables:           36
|
|   Number of clauses:             296
|
|   Parse time:                    0.00 s
|
|   Eliminated clauses:            0.00 Mb
|
|   Simplification time:           0.00 s
|
|
|

```

```

===== [ Search Statistics
]=====
| Conflicts | ORIGINAL | LEARNT |
Progress |
| Vars  Clauses Literals | Limit  Clauses Lit/Cl |
|
=====
=====
=====
restarts          : 1
conflicts         : 1 (288 /sec)
decisions        : 11 (0.00 % random) (3163 /sec)
propagations     : 43 (12363 /sec)
conflict literals : 8 (0.00 % deleted)
Memory used      : 20.83 MB
CPU time         : 0.003478 s

```

SATISFIABLE

7. Experimentation7 sur SAT_Reine_7 pour n = 7:

WARNING: for repeatability, setting FPU to use double precision

```

===== [ Problem Statistics
]=====
|
| Number of variables: 49
| Number of clauses: 483
| Parse time: 0.00 s
| Eliminated clauses: 0.00 Mb
| Simplification time: 0.00 s
|
|
|
===== [ Search Statistics
]=====
| Conflicts | ORIGINAL | LEARNT |
Progress |
| Vars  Clauses Literals | Limit  Clauses Lit/Cl |
|
=====
=====
=====
restarts          : 1
conflicts         : 0 (-nan /sec)

```

```

decisions           : 12                (0.00 % random) (inf /sec)
propagations        : 42                (inf /sec)
conflict literals   : 0                 (-nan % deleted)
Memory used         : 20.83 MB
CPU time            : 0 s

```

SATISFIABLE

8. Experimentation8 sur SAT_Reine_8 pour n = 8:

WARNING: for repeatability, setting FPU to use double precision

=====[Problem Statistics

]=====

```

|
|
|   Number of variables:           64
|
|   Number of clauses:            736
|
|   Parse time:                   0.00 s
|
|   Eliminated clauses:           0.00 Mb
|
|   Simplification time:          0.00 s
|
|
|

```

=====[Search Statistics

]=====

Conflicts	ORIGINAL	LEARNT
Progress		
	Vars	Clauses Lit/Cl

=====

=====

=====

=====

```

restarts           : 1
conflicts          : 2                (289 /sec)
decisions          : 18               (0.00 % random) (2600 /sec)
propagations       : 73               (10546 /sec)
conflict literals  : 19               (26.92 % deleted)
Memory used        : 20.96 MB
CPU time           : 0.006922 s

```

SATISFIABLE

9. Experimentation9 sur SAT_Reine_9 pour n = 9:

WARNING: for repeatability, setting FPU to use double precision

=====[Problem Statistics

]=====

```
|
|
|   Number of variables:           81
|
|   Number of clauses:            1065
|
|   Parse time:                   0.00 s
|
|   Eliminated clauses:           0.00 Mb
|
|   Simplification time:          0.00 s
|
|
|
```

=====[Search Statistics

]=====

Conflicts	ORIGINAL	LEARNT
Progress		
Vars	Clauses	Literals
Limit	Clauses	Lit/Cl

=====

=====

=====

```
restarts           : 1
conflicts          : 13           (1531 /sec)
decisions          : 46           (0.00 % random) (5417 /sec)
propagations       : 243          (28615 /sec)
conflict literals  : 192          (10.28 % deleted)
Memory used        : 20.96 MB
CPU time           : 0.008492 s
```

SATISFIABLE

10. Experimentation10 sur SAT_Reine_10 pour n = 10:

WARNING: for repeatability, setting FPU to use double precision

=====[Problem Statistics

]=====

```
|
|
|   Number of variables:           100
|
|   Number of clauses:            1480
|
```

```
| Parse time:                0.00 s
|
| Eliminated clauses:        0.00 Mb
|
| Simplification time:       0.00 s
|
|
|
===== [ Search Statistics ]=====
| Conflicts | ORIGINAL | LEARNT |
Progress |
|          | Vars  | Clauses | Literals | Limit  | Clauses | Lit/Cl |
|
=====
=====
=====
restarts          : 1
conflicts         : 25          (3482 /sec)
decisions         : 58          (0.00 % random) (8078 /sec)
propagations      : 444        (61838 /sec)
conflict literals : 533        (16.59 % deleted)
Memory used       : 20.96 MB
CPU time          : 0.00718 s

SATISFIABLE

-----
-----
```

11. Experimentation11 sur SAT_Reine_11 pour n = 11:

WARNING: for repeatability, setting FPU to use double precision

```
===== [ Problem Statistics ]=====
|
|
| Number of variables:        121
|
| Number of clauses:         1991
|
| Parse time:                0.00 s
|
| Eliminated clauses:        0.00 Mb
|
| Simplification time:       0.01 s
|
|
|
===== [ Search Statistics ]=====
```


Conflicts	ORIGINAL	LEARNT
Progress	Vars	Clauses
	Literals	Limit
		Clauses Lit/Cl

```
=====
=====
=====
```

```
restarts          : 1
conflicts         : 6          (675 /sec)
decisions        : 41          (0.00 % random) (4609 /sec)
propagations     : 172         (19337 /sec)
conflict literals : 150         (20.63 % deleted)
Memory used      : 20.96 MB
CPU time         : 0.008895 s
```

SATISFIABLE

12. Experimentation12 sur SAT_Reine_12 pour n = 12:

WARNING: for repeatability, setting FPU to use double precision

===== [Problem Statistics

]=====

```
|
|
| Number of variables:          144
|
| Number of clauses:           2608
|
| Parse time:                   0.00 s
|
| Eliminated clauses:           0.00 Mb
|
| Simplification time:          0.00 s
|
|
|
```

===== [Search Statistics

]=====

Conflicts	ORIGINAL	LEARNT
Progress	Vars	Clauses
	Literals	Limit
		Clauses Lit/Cl

```
=====
=====
=====
```

```
restarts          : 1
conflicts         : 1          (203 /sec)
decisions        : 41          (0.00 % random) (8330 /sec)
```

```

propagations      : 157                (31898 /sec)
conflict literals : 32                 (8.57 % deleted)
Memory used       : 20.96 MB
CPU time          : 0.004922 s

```

SATISFIABLE

 13. Experimentation13 sur SAT_Reine_13 pour n = 13:

WARNING: for repeatability, setting FPU to use double precision

===== [Problem Statistics

]=====

```

|
|
|   Number of variables:           169
|
|   Number of clauses:            3341
|
|   Parse time:                   0.00 s
|
|   Eliminated clauses:           0.00 Mb
|
|   Simplification time:          0.01 s
|
|
|

```

===== [Search Statistics

]=====

Conflicts	ORIGINAL	LEARNT
Progress		
	Vars	Clauses
	Literals	Limit
	Clauses	Lit/Cl

```

=====
=====
|   100 |   159   3211   9003 |   1177   100   46 |
0.004 % |
=====
=====

```

```

restarts      : 2
conflicts     : 103                (8815 /sec)
decisions     : 240                (1.67 % random) (20541 /sec)
propagations  : 1943              (166296 /sec)
conflict literals : 4729          (4.08 % deleted)
Memory used   : 21.10 MB
CPU time      : 0.011684 s

```

SATISFIABLE

14. Experimentation14 sur SAT_Reine_14 pour n = 14:

WARNING: for repeatability, setting FPU to use double precision

=====[Problem Statistics

]=====

```
|
|
| Number of variables:          196
|
| Number of clauses:           4200
|
| Parse time:                   0.01 s
|
| Eliminated clauses:          0.00 Mb
|
| Simplification time:         0.01 s
|
|
|
```

=====[Search Statistics

]=====

Conflicts	ORIGINAL	LEARNT
Progress		
Vars	Clauses	Literals
Limit	Clauses	Lit/Cl

=====

=====

=====

=====

```
restarts          : 1
conflicts         : 46          (2505 /sec)
decisions         : 123         (0.81 % random) (6699 /sec)
propagations      : 936         (50978 /sec)
conflict literals : 2444        (2.90 % deleted)
Memory used       : 21.09 MB
CPU time          : 0.018361 s
```

SATISFIABLE

15. Experimentation15 sur SAT_Reine_15 pour n = 15:

WARNING: for repeatability, setting FPU to use double precision

=====[Problem Statistics

]=====

```

|
|
|  Number of variables:           225
|
|  Number of clauses:            5195
|
|  Parse time:                   0.01 s
|
|  Eliminated clauses:           0.00 Mb
|
|  Simplification time:          0.01 s
|
|
|
=====[ Search Statistics
]=====
| Conflicts |          ORIGINAL          |          LEARNT          |
Progress |
|           |  Vars  Clauses Literals |   Limit  Clauses Lit/Cl |
|
=====
=====
=====
=====
restarts           : 1
conflicts          : 6                (267 /sec)
decisions          : 68                (0.00 % random) (3026 /sec)
propagations       : 307               (13660 /sec)
conflict literals  : 366               (4.19 % deleted)
Memory used        : 21.25 MB
CPU time           : 0.022474 s

SATISFIABLE

```

