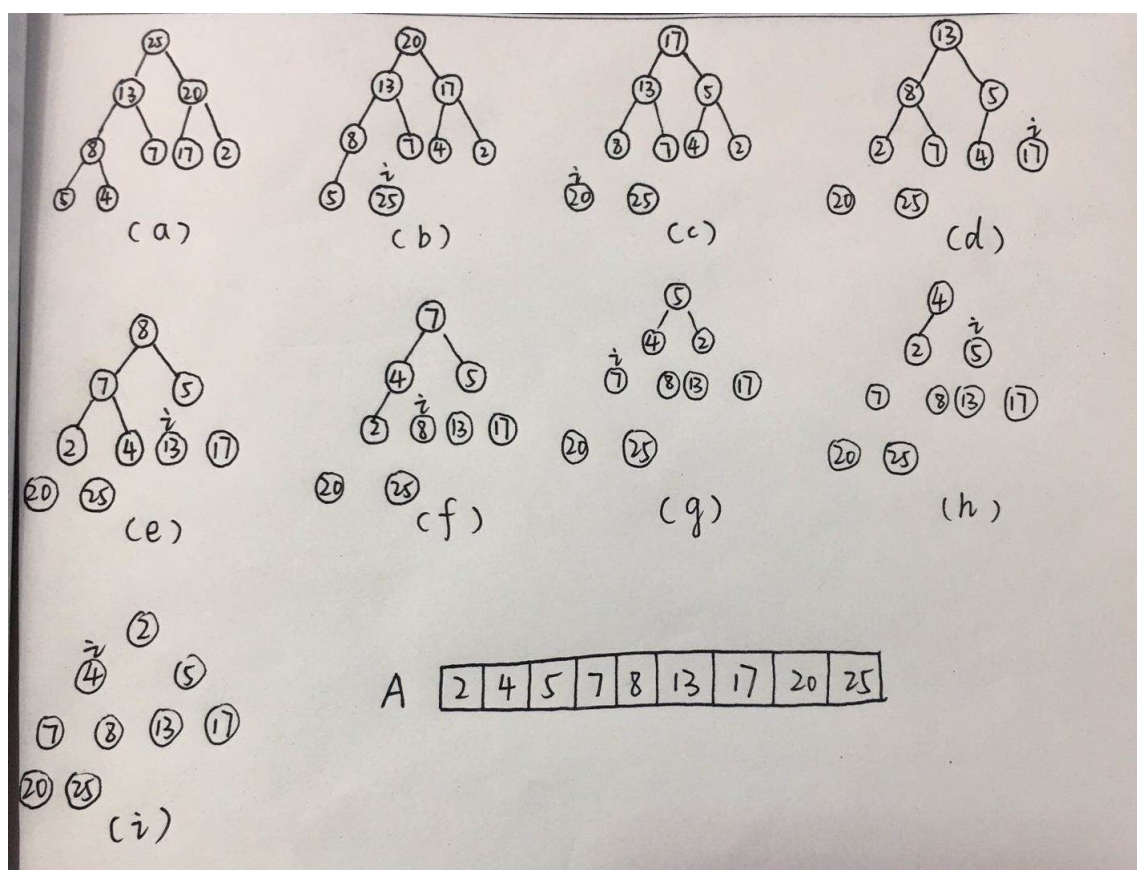


# 算法作业 4

孟妍廷 2015202009

2017 年 10 月 15 日

6.4-1  
如图:



7-5

a. 若中位数取到  $i$ , 则等同于取两个数, 一个小于  $i$ , 一个大于  $i$ , 表达式为:

$$p_i = \frac{(i-1)(n-i)}{c_n^3}$$

$$= \frac{6(i-1)(n-i)}{n(n-1)(n-2)}$$

b. 依题意可得:

$$p_{\frac{n+1}{2}} = P(x = A'[\frac{n+1}{2}])$$

$$= \frac{6(\frac{n+1}{2}-1)(n-\frac{n+1}{2})}{n(n-1)(n-2)}$$

$$= \frac{3(n-1)}{2n(n-2)}$$

平凡实现的  $p_{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{n}$ , 故增加了  $\frac{n+1}{2n(n-2)}$   
 当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n-1)}{2n(n-2)} = 0$$

因此几乎没有增加。

c. 依题意可得:

$$\begin{aligned} P &= \int_{\frac{n}{3}}^{\frac{2n}{3}} \frac{6(i-1)(n-i)}{n(n-1)(n-2)} di. \\ &= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left( \int_{\frac{n}{3}}^{\frac{2n}{3}} (n+1)idi - \int_{\frac{n}{3}}^{\frac{2n}{3}} ndi - \int_{\frac{n}{3}}^{\frac{2n}{3}} i^2 di \right) \\ &= \frac{13n^2 - 27n}{27(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

与 b 同理, 概率增加了  $\frac{13n^2 - 27n}{27(n-1)(n-2)} - \frac{1}{n}$   
 进一步量化, 当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{13n^2 - 27n}{27(n-1)(n-2)} - \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{13n^2}{27(n-1)(n-2)} + 0 + 0 \\ &\approx \frac{13}{27} \end{aligned}$$

d. 证明:

最佳情况是每一次主元都取到了  $A[\frac{n+1}{2}]$  处 ( $n$  为当前数组长度)

此时 partition() 函数的代价是  $\lg n$ , 因此快排的代价是  $n \lg n$

故三数取中法的时间复杂度为  $\Omega(n \lg n)$ , 只影响了常数项