习题课内容：

1.

3-1 （多项式的渐近行为） 假设 $p(n)=\sum_{i=0}^{d} a_i n^i$ 是一个关于 n 的 d 次多项式，其中 $a_d>0$，k 是一个常量。使用渐近记号的定义来证明下面的性质。

a. 若 $k \geqslant d$，则 $p(n)=O(n^k)$。

b. 若 $k \leqslant d$，则 $p(n)=\Omega(n^k)$。

c. 若 $k=d$，则 $p(n)=\Theta(n^k)$。

d. 若 $k>d$，则 $p(n)=o(n^k)$。

e. 若 $k<d$，则 $p(n)=\omega(n^k)$。

解：

$$\begin{aligned}
p(n) &= \sum_{i=0}^{d} a_i n^i \\
&= n^d \sum_{i=0}^{d} a_i \frac{1}{n^{d-i}} \\
&= n^d \left(a_d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i \frac{1}{n^{d-i}} \right) \\
&= n^d \left(a_d + q(n) \right) \qquad \text{where } q(d) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i \frac{1}{n^{d-i}}
\end{aligned}$$

Consider $\lim_{n\to\infty} q(n)$, we have

$\lim_{n\to\infty} q(n)=0$, so there must be an integer n_0 such that $|q(n)| < \frac{a_d}{2}$ for all $n \ge n_0$.

We have

$$n^d\left(a_d - \frac{a_d}{2}\right) \le n^d\left(a_d + q(n)\right) \le n^d\left(a_d + \frac{a_d}{2}\right), \qquad \text{when } n > n_0.$$

Let $c_1 = \frac{a_d}{2}$ and $c_2 = \frac{3a_d}{2}$, $0 \le c_1 n^d \le p(n) \le c_2 n^d$ for all $n \ge n_0$ ......(1)

O 定义：存在正常量 c 和 n0，使所有 n>=n0，有 0 <= f(n) <= c*g(n)

o 定义：对任意正常量 c，存在 n0，使所有 n>=n0，有 0 <= f(n) <= c*g(n)

a. 因为 k >= d, c2 * n^k >= c2 * n ^d.
b. K <= d, c1 * n ^k <= c1 * n ^ k
c. 根据 a,b 可得
d. 将 n^k 移入 p（n）即可
e. 同理