

思考题 3

孟妍廷 2015202009

2017 年 10 月 10 日

这次思考题感觉比较难理解，一开始看了特征序列结果发现不是很适用，尝试着做一下.....

1. 解:

设 x 为最大的盒子中的小球数，已知有 b 个小球 b 个盒子，所以 x 最大为 b ，最小为 1

$$\begin{aligned}Pr(x=b) &= \frac{b}{b^b} < \frac{1}{(b-1)!} \\Pr(x=b-1) &= \frac{b(b-1)}{b^b} < \frac{2}{(b-2)!} \\&\vdots \\&\vdots \\&\vdots \\Pr(x=b-i) &= \frac{b \cdots (b-i)}{b^b} < \frac{i+1}{(b-i-1)!}\end{aligned}$$

故最大的盒子中的小球数的期望为:

$$\begin{aligned}E(x) &= \sum_{i=1}^b (b-i) \times \frac{i+1}{(b-i-1)!} \\&< \sum_{i=1}^b \frac{(i+1)^2}{i!} \\&< \log b \text{ 的 Taylor 展开} \\&< \log b = O(\log b)\end{aligned}$$

2. 解:

设 x 为最大的盒子中的小球数，已知有 b 个小球 $b/\log b$ 个盒子，所以 x 最大为 b ，最小为 $\log b$
我认为第一种方法与 1. 同理。

第二种方法思路:

算出 x 的取值 $> c \log b$ 的概率小于某个值, 其中 c 为一个常数

由于

$$\begin{aligned}E(x) &= \sum_{i=\log b}^b i \times Pr(x=i) \\&= \sum_{\log b}^{c \log b} i \times Pr(x=i) + \sum_{c \log b+1}^b i \times Pr(x=i) \\&< c_1 \log b + \text{一个很小的数}(c_1 \text{ 为常数}) \\&= O(\log b)\end{aligned}$$

3. 第三题。。。不太会做。。。