算法作业 1

孟妍廷 2015202009

3.1.7

证明：假设 $f_1(x) = o(g(n)), f_2(x) = \omega(g(n))$, 则由定义可得：

对任意正常量 $c > 0$, 存在常量 $n_1 > 0$, 使得对所有 $n \geq n_0$, 有 $0 \leq f_1(n) < cg(n)$；同理，对于同一常量 c, 存在常量 $n_1 > 0$, 使得对所有 $n \geq n_1$, 有 $f_2(n) > cg(n)$.

取 $N = max(n_0, n_1)$, 则对所有 $n \geq N$, 有 $f_1(n) < cg(n)$ 且 $f_2(n) > cg(n)$, 即 $o(n) < cg(n)$ 且 $\omega(n) > cg(n)$.

故 $o(n) \cap \omega(n) = \emptyset$ 得证。

3-3

a. 解：按照渐进增长率和界限函数可得自上而下排序为 (同一行的为等价类)：

$2^{2^{n+1}}$ $\quad 2^{2^n}$

$(n+1)!$

$n!$

e^n

$n \cdot 2^n$

2^n

$(\frac{3}{2})^n$

$n^{\lg \lg n}$ $\quad (\lg n)^{\lg n}$

$(\lg n)!$

n^3

n^2 $\quad 4^{\lg n}$

$n \lg n$ $\quad \lg(n!)$ 由夹逼定理 n^n 与 $n!$ 同阶

n $\quad 2^{\lg n}$

$(\sqrt{2}^{\lg n})$

$2^{\sqrt{2 \lg n}}$

$\lg^2 n$

$\ln n$

$\sqrt{\lg n}$

$\ln \ln n$

$2^{lg^* n}$

$lg^* n$

$\lg^*(\lg n)$

$\lg(\lg^* n)$

$n^{\frac{1}{\lg n}}$ $\quad 1$

b. 解：

依题意可得：当该非负函数 $f(n)$ 的极限不存在时，不存在 $g(n)$，使 $f(n)$ 是 $O(g(n))$ 或 $\Omega(g(n))$ 的.

故 f(n) 的一个例子是：

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{x=2k+1} \\ 1, & \text{x=2k} \end{cases}$$

其中, $k \in Z$.

3-4

a. 错误。反例: $n = O(n^2)$ 但是 $n^2 \neq O(n)$

b. 错误。反例: $n^2 + n = \Theta(n^2) \neq \Theta(n)$

c. 正确。证明: 由 $f(n) = O(g(n))$ 表明对任意正常数 c, 存在常量 n_0, 对所有 $n \geq n_0$ 都有 $f(n) \leq cg(n)$, 所以也有 $\lg f(n) \leq \lg(cg(n))$, 故 $\lg(f(n)) = O(\lg(g(n)))$ 成立.

d. 正确。证明: 由 $f(n) = O(g(n))$ 表明对任意正常数 c, 存在常量 n_0, 对所有 $n \geq n_0$ 都有 $f(n) \leq cg(n)$, 由于 f(n) 和 g(n) 是正函数, 所以也有 $2^{f(n)} \leq 2^{cg(n)}$, 故 $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$ 成立.

e. 错误。反例: $f(n) = \frac{1}{n}$, 则 $f(n)^2 = \frac{1}{n^2}$, 故 $\frac{1}{n} \neq O(\frac{1}{n^2})$

f. 正确。证明: 由 $f(n) = O(g(n))$ 可得

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_1$$

因此

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{g(n)}{f(n)} \geq c_2$$

其中 c_1,c_2 为常数, 故 $g(n) = \Omega(f(n))$。

g. 错误。反例: $n^n \neq \frac{n}{2}^{\frac{n}{2}}$

h. 错误。反例: $n + n^2 \neq \Theta(n)$