算法作业 13

孟妍廷 2015202009

2017 年 12 月 25 日

34.4-3

证明：题目的意思是不对布尔表达式 ϕ 做任何操作直接求真值表。我有两种证明思路（不太会做，希望助教师兄可以讲解一下下）：

(1) 方法一：假设一个布尔表达式 ϕ 中有 n 个不同的文字，则在列真值表的时候要判断 2^n 种情况，其中有 $\frac{2^n}{2}$ 种情况等价于 $\neg\phi$，所以这一策略不产生多项式时间的归约。

(2) 方法二：按照书上定理 34.10 的证明方法，引入变量 y_i，每个 y_i 至少代表了 2 个文字的 4 种情况，最多代表了 n 个文字的 2^n 种情况，因此变量 y_i 节约了指数时间才打到多项式时间，所以不引入直接考真值表的策略不产生多项式时间的归约。

34.5-1

证明：首先证明子图同构问题是 NP 的：证书如下：

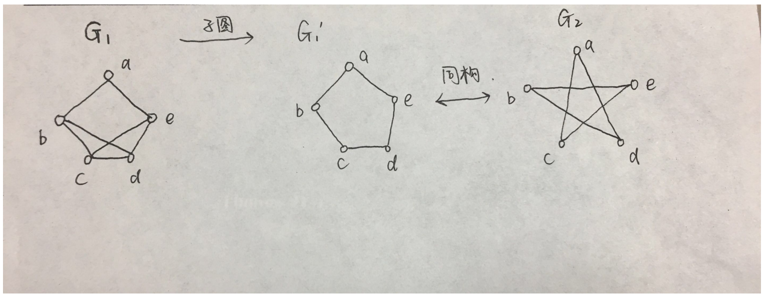

图 G_2 的子图与 G_1 同构，所以可得子图同构是 NP 的

接下来证明子图同构问题是 NP 完全的：

对于图 G_1 和图 G_2，假设图 G_1 是顶点数为 k 的连通图，若图 G_2 中存在一个规模大于等于 k 的团 S，则 S 组成的图一定是图 G_2 的子图。接下来枚举 S 中顶点数为 k 的连通子图 G，判断 G 与图 G_1 是否同构。

由于团问题是 NP 完全的，所以子图同构问题是 NP 完全的

34-1

a. 解：判定问题如下：

问题：图 G=<V,E> 是否存在一个大小为 k 的独立集 P($k \le |V|$)

实例：一个图 $G=<V,E>, |V| \ge k$

输出：算法 A 解决了该问题，如果在图 G 中找到了独立集 P

证明：由于图 G 的补图 G_1 的最大团就是图 G 的最大独立集，所以最大独立集问题和最大团问题可以互相归约，因此它是 NP 完全的。

b. 解：依题意可得算法如下：

$solution(G)$
  $len = 0//$记录最大独立集的规模
  $for\ i = 0\ to\ |G.V|$
    用黑盒判定G中是否有大小为i的独立集
    $len = i$
  $for\ v \in G.V$
    在G中移除v和与v连接的边得到图G_1
    用黑盒判定G_1中是否有大小为i的独立集
    $if\ TRUE//$说明v不在最大独立集中

$G = G_1$

$else//$说明v在最大独立集中

在G中移除所有与v相连的点

$return\ G$

时间复杂度为 O(|V|+|E|)

c. 解：依题意可得，若图 G 中的顶点的度数为 2，则图 G 只可能是一个简单的环路。所以要求最大独立集，只用找不相邻的点即可。

$solution(G)$

任选G中一个结点v

$for\ u \in G.V$

$if\ (u,v) \notin G.E$

u,v加入独立集

$return$ 独立集

时间复杂度为 O(|V|)，由于简单环路中的不相邻的点一定不直接有边，所以正确性可以证明

d. 解: 在二分图中，已知 L 和 G 单边的结点间是没有边连接的，所以只观察 L 和 G 之间的边，因此只需要对二分图做最大二分匹配，在图 G 中的某边减去最大匹配数个结点就可以得到最大独立集。

时间复杂度为 O(|V|)