算法作业 2

孟妍廷 2015202009

2017 年 9 月 24 日

1. 给出递归式主方法的推导过程

解：假设已知 $a \geq 1, b > 1$ 为常数,$f(n)$ 是一个函数,$T(n)$ 由以下递归式定义:

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n).$$

则利用迭代法可得:

$$\begin{aligned} T(n) &= aT(\frac{n}{b}) + f(n) \\ &= a^2T(\frac{n}{b^2}) + af(\frac{n}{b}) + f(n) \\ &= a^3T(\frac{n}{b^3}) + a^2f(\frac{n}{b^2}) + af(\frac{n}{b}) + f(n) \\ &= \cdots \end{aligned}$$

迭代 l 次时:

$$\begin{aligned} &= f(n) + af(\frac{n}{b}) + \cdots + a^{l-1}f(\frac{n}{b^{l-1}}) + a^lT(\frac{n}{b^l}) \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} a^if(\frac{n}{b^i}) + a^lT(\frac{n}{b^l}) \qquad * \end{aligned}$$

其中,$\frac{n}{b^l} \leq 1$, 即 $l \geq log_bn$, 故:

$$\begin{aligned} (*) &\leq \sum_{i=0}^{l-1} a^if(\frac{n}{b^i}) + a^{log_bn}T(1) \\ &\leq \sum_{i=0}^{l-1} a^if(\frac{n}{b^i}) + c \cdot a^{log_bn} \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} a^if(\frac{n}{b^i}) + c \cdot n^{log_ba} \qquad ** \end{aligned}$$

故对于任意 $\varepsilon > 0$:

⑴ 若有 $f(n) = O(n^{log_ba-\varepsilon})$, 则

$$\begin{aligned} (**) &= O(\sum_{i=0}^{log_bn-1} a^i(\frac{n}{b^i})^{log_ba-\varepsilon}) + c \cdot n^{log_ba} \\ &= O(\sum_{i=0}^{log_bn-1} \frac{a^i}{b^{i(log_ba-\varepsilon)}}n^{log_ba-\varepsilon}) + c \cdot n^{log_ba} \\ &= O(\sum_{i=0}^{log_bn-1} b^{i\varepsilon}n^{log_ba-\varepsilon}) + c \cdot n^{log_ba} \\ &= O(\frac{n^\varepsilon - 1}{b^\varepsilon - 1}n^{log_ba-\varepsilon}) + c \cdot n^{log_ba} \\ &= O(n^{log_ba}) + c \cdot n^{log_ba} \end{aligned}$$

故 $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$.

⑵ 若有 $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$, 则

$$(**) = \Theta(\sum_{i=0}^{log_b n-1} a^i (\frac{n}{b^i})^{log_b a}) + c \cdot n^{log_b a}$$

$$= \Theta(\sum_{i=0}^{log_b n-1} \frac{a^i}{b^{ilog_b a}} n^{log_b a}) + c \cdot n^{log_b a}$$

$$= \Theta(\sum_{i=0}^{log_b n-1} \frac{a^i}{a^i} n^{log_b a}) + c \cdot n^{log_b a}$$

$$= \Theta(log_b n \cdot n^{log_b a}) + c \cdot n^{log_b a}$$

$$= \Theta(\frac{1}{logb} \cdot n^{log_b a} logn) + c \cdot n^{log_b a}$$

由于 $\frac{1}{logb}$ 为常数, 且 $n^{log_b a} logn$ 的渐进增长率大于 $n^{log_b a}$
故 $T(n) = \Theta(n^{log_b a} logn)$.

⑶ 若有 $f(n) = \Omega(n^{log_b a+\varepsilon})$, 且对某常数 $c_1 > 1$ 和足够大的 n, 有 $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$, 则

$$(**) \leq \sum_{i=0}^{log_b n-1} c_1^i f(n) + c \cdot n^{log_b a}$$

$$= f(n) \cdot \frac{1 - c_1^{log_b n}}{1 - c_1} + c \cdot n^{log_b a}$$

由于 $\frac{1-c_1^{log_b n}}{1-c_1}$ 为常数, 且 $f(n)$ 的渐进增长率大于 $n^{log_b a}$
故 $T(n) = \Theta(f(n))$.

主定理推理完毕.