

习题

7.2-5 假设快速排序的每一层所做的划分的比例都是 $1-\alpha : \alpha$, 其中 $0 < \alpha \leq 1/2$ 且是一个常数。试证明: 在相应的递归树中, 叶结点的最小深度大约是 $-\lg n / \lg \alpha$, 最大深度大约是 $-\lg n / \lg(1-\alpha)$ (无需考虑整数舍入问题)。

解:

递归树是 $T(n) = T((1-\alpha)n) + T(\alpha n) + cn$

因此最短和最长两个路径

是 $n \rightarrow (1-\alpha)n \rightarrow (1-\alpha)^2 n \rightarrow \cdots \rightarrow 1$ 和 $n \rightarrow \alpha n \rightarrow \alpha^2 n \rightarrow \cdots \rightarrow 1$

算得两个路径的长度是 $-\lg n / \lg \alpha$, $-\lg n / \lg(1-\alpha)$

因为 $0 < \alpha \leq 1/2$, 因此 $\alpha \leq 1-\alpha$, 所以 $-1/\lg \alpha < -1/\lg(1-\alpha)$, 故最大深度是

$-\lg n / \lg(1-\alpha)$, 最小深度是 $-\lg n / \lg \alpha$ 。