算法作业 3

孟妍廷 2015202009

2017 年 10 月 7 日

5.2-5

解:

首先，假设 X_{ij} 对应 (i,j) 对为 A 的逆序对该事件的指示器随机变量:

$$X_{ij} = I\{(i,j)\text{为逆序对}\} = \begin{cases} 1, & \text{i<j,A[i]>A[j]} \\ 0, & \text{i<j,A[i]<A[j]} \end{cases}$$

由于数列 A 中的 n 个数均不相同, 所以对于数对 (i,j)(i<j), 只有 $A[i] < A[j], A[i] > A[j]$ 两种可能, 且 A 的元素是 1-n 的均匀随机排列, 故 Pr(i,j)=$\frac{1}{2}$.

根据定理,E[X_{ij}]=Pr{(i,j) 为 A 的逆序对}=$\frac{1}{2}$

设 X 为一个随机变量，其值等于数列 A 中逆序对的个数，故 X 可表示为:

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}$$

则逆序对的数目期望为

$$E[X] = E[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{(n-1+1) \times (n-1)}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n(n-1)}{4}$$

5.3-5

证明:

从 1-n^3 中随机取 n 个数，允许重复的情况下总共有 n^{3^n} 种可能

不允许重复的情况下随机取 n 个数，总共有

$$P = (n^3) \times (n^3 - 1) \times \cdots \times (n^3 - n + 1)$$

种可能.

故所有元素都唯一的概率为:

$$Pr = \frac{P}{n^{3^n}}$$

$$= \frac{(n^3) \times (n^3 - 1) \times \cdots \times (n^3 - n + 1)}{n^{3^n}}$$

接下来对概率进行放缩:

$$Pr > \frac{(n^3 - n)^n}{n^{3^n}}$$

$$= \frac{(n^3 - n)}{n^3}^n$$

$$= (1 - \frac{1}{n^2})^n \qquad (*)$$

对多项式 (*) 进行展开:

$$(*) = 1 + n \times (-\frac{1}{n^2}) + \cdots > 1 - \frac{1}{n}$$

得证.

5.4-2
解:
假设 n_i 为投球次数, 则依题意可得

$$P(n_i = 1) = 0$$

$$P(n_i = 2) = 1 \times \frac{1}{b} = \frac{1}{b}$$

$$P(n_i = 3) = 1 \times \frac{b-1}{b} \times \frac{2}{b} = \frac{2(b-1)}{b^2}$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$P(n_i = k) = 1 \times \frac{b-1}{b} \cdots \times \frac{b-k+2}{b} \times \frac{k-1}{b} = \frac{(k-1)b(b-1)\cdots(b-k+2)}{b^k}$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

故投球次数期望为:

$$E \sum_{i=1}^{i=b+1} i \times \frac{(i-1)b(b-1)\cdots(b-i+2)}{b^i}$$