算法作业 14

孟妍廷 2015202009

2018 年 1 月 3 日

35.3

证明：在带权集合覆盖问题中，要考虑的问题同时有两个：集合的权重和该集合能覆盖的第一次被覆盖的元素数。我们利用贪心算法，每次选择权重最小且覆盖之前未被覆盖的元素数目最多的集合，即利用贪心算法，每次选择 $\frac{\text{覆盖的第一次被覆盖元素数}}{w_i}$ 最大的集合 S_i 即可对带权集合覆盖问题的任何实例提供近似解。接下来证明该启发式的近似比为 H(d)

设 S_i 为由该启发式选出的第 i 个子集，将 S_i 加入 C 的代价为 w_i，将这个代价摊还给首次被 S_i 覆盖的元素。对于 $x \in X,$设c_x表示分配给元素x的代价，则若 x 首次被 S_i 覆盖：

$$c_x = \frac{w_i}{S_i - (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_{i-1})}$$

由于在算法每一步中，要分配 1 个单位的代价，因此:

$$|C| = \sum_{x \in X} c_x \quad (1)$$

由于在最优覆盖 C^* 中，X 中的某些元素可能被重复覆盖，因此:

$$\sum_{S \in C^*} \sum_{x \in S} c_x \geq \sum_{x \in X} c_x \quad (2)$$

结合 (1),(2) 可得：

$$|C| \leq \sum_{S \in C^*} \sum_{x \in S} c_x \quad (3)$$

接下来按照书中对定理 35.4 的证明中对 u_i 的定义,并令 S 的权重为 w_0 可得：

$$\sum_{x \in S} c_x = \sum_{i=1}^{k} (u_{i-1} - u_i) \cdot \frac{w_i}{S_i - (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_{i-1})}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} (u_{i-1} - u_i) \cdot \frac{w_0}{u_{i-1}}$$

$$\leq w_0 H(|S|)$$

故 (3) 式可改写为：

$$|C| \leq \sum_{S \in C^*} w_0 H(|S|)$$

$$\leq |C^*| H(d)$$

故得证。

35.4-3

证明：首先明确定义：随机化的近似算法指的是近似比为一个期望值。因此证明如下：

由于在一个无权无向图中，每个点以 $\frac{1}{2}$ 的概率进入 S，以 $\frac{1}{2}$ 的概率进入 V-S，故引入指示器变量：

$$I_{uv} = I\{u\text{在}S\text{中}, v\text{在}V - S\text{中}\}$$

由于 $Pr(u在S中, v在V-S中) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$，于是根据指示器随机变量的性质可得，$E[I_{uv}] = \frac{1}{4}$。设 I 为该近似算法中经过最大割的边数，则 $I = \sum_{(u,v)\in E} I_{uv} + I_{vu}$，故：

$$E[I] = E[\sum_{(u,v)\in E} I_{uv} + I_{vu}]$$

$$= \sum_{(u,v)\in E} E(I_{uv}) + E(I_{vu})$$

$$= \frac{|E|}{2}$$

由于 |E| 是最大割的权的上界，因此近似比至多为 $\frac{|E|}{\frac{|E|}{2}} = 2$, 得证。