思考题 4——quicksort

孟妍廷　2015202009

2017 年 10 月 17 日

证明:
由于 partition 只要成功 $O(lgn)$ 次即可达到目的
通过阅读文献, 证明方法如下:
首先假设指示器变量 X_i

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{第 i 个元素参与了超过 32lnn 轮递归}, \\ 0 & \text{未超过}. \end{cases}$$

则对于快排中进行比较的次数 T, 有

$$Pr[T > 32lnn] < \sum_{i=1}^{n} Pr[X_i] \qquad (*)$$

接下来求解 $Pr[X_i]$:
由教材可知: 对于 partition, 只要是按常数比例对数组进行划分, 递归都在 $O(lgn)$ 处终止
故认为若 partition 中一轮递归按常数比例划分数组, 则这轮递归成功. 对于数组中任一元素, 假设

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{第 j 轮递归成功}, \\ 0 & \text{不成功}. \end{cases}$$

其中 $Pr[Y_j = 0] = Pr[Y_j = 1] = \frac{1}{2}$, 且 Y_j 相互独立
当递归成功时, 数组中每个元素参与的次数 $\rho = log_c n < 4lnn$
其中 c 为小于 2 的常数
由 Chernoff 不等式可知，递归成功的次数 $S \leq \frac{M}{4}$ 的概率 P 不超过 $e^{\frac{-M}{8}}$
取 $M = 32lnn > 8\rho$, 故 $P < e^{-\rho} \leq \frac{1}{n^2}$
即递归成功的次数 $S \leq 8\rho$ 的概率小于 $\frac{1}{n^2}$
由于当递归成功的次数 $S > 8\rho > lgn$ 时, 任一元素参与递归的次数 $\rho < 4lnn < 32lnn$
所以 $Pr[X_i] = Pr[S \leq 8\rho] \leq \frac{1}{n^2}$
故 $(*) < n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$
因此 $Pr[T < nlgn] = 1 - O(\frac{1}{n})$
故以 $1 - O(\frac{1}{n})$ 的概率, 快速排序的时间复杂度为 $O(nlgn)$