算法作业 8

孟妍廷 2015202009

2017 年 11 月 17 日

16.2-4 证明：使用题目要求中的参数

1. 证明最优子结构:

假设 $X = x_1, ...x_n$ 是问题的最优解, 包含 a 个补水站，x_k 是 x_n 的前一个被选择的补水站。假设 $X_1 = x_1...x_k$ 不是是子问题 N-m 的最优解, 它共包含 a-1 个补水站，而 $Y_1 = y_i...y_j$ 是该子问题的最优解，共包含 b 个补水站则可知 $b < a-1$, 故 $y_i...y_j, x_n$包含的补水站个数为$b+1 < a-1+1 = a$, 则 $y_i...y_j, x_n$ 比 $X = x_1, ...x_n$ 更优，产生矛盾。

2. 证明贪心选择性质

设 $X = x_1, ..., x_n$ 是贪心算法求得的解, 设问题的最优解为 $Y = y_1....y_n$ 则存在 k 使得 $y_k \neq x_k$ 为最小下标, 否则 Y=X 得证。

首先, 由于 x_k 是距离 x_{k-1} 最远的在 m 范围内的补水站, 则可以证明 $y_k < x_k$, 则 $y_n - y_k > x_n - x_k$ 剩余的距离变长, 需要选择的补水站的个数只可能增加, 不符合最优解, 因此只能 $x_k = y_k$, 对于任意k。

因此得证 Y=X

16-2

a. 由于是非抢占的, 所以每次都选择剩余的任务中运行时间最短的任务, 算法如下:

$solution(p)$
  $let\ c[1...n]\ be\ a\ new\ array$
  $sort(p)$ //使得 $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \cdots$
  $c_1 = p_1$
  $for\ i = 2\ to\ n$
    $c_i = c_{i-1} + p_i$
  $avg = 0$
  $for\ i = 1\ to\ n$
    $avg = avg + c_i$
  $avg = \frac{avg}{n}$
  $return\ avg$

时间复杂度为 O(nlgn).

证明最优性:

1. 最优子结构

假设 $X = x_1....x_n$ 是最优解, 而 $X_1 = x_1....x_{n-1}$ 不是除第 x_n 任务的 n-1 个任务的最优解, 而 $Y_1 = y_i...y_{n-1}$ 是该子问题的最优解可知 $\sum_{i=x_1}^{x_{n-1}} c_i > \sum_{i=y_1}^{y_{n-1}} c_i$, 则 $\sum_{i=x_1}^{x_{n-1}} c_i + c_{x_n} > \sum_{i=y_1}^{y_{n-1}} c_i + c_{x_n}$ 与 $X = x_1....x_n$ 是最优解矛盾, 故最优子结构得证

2. 贪心选择性质

设 $X = x_1....x_n$ 是贪心算法选择任务的下标顺序, 设该问题的最优选择下标顺序为 $Y = y_1....y_n$ 则存在 k 使得 $y_k \neq x_k$ 为最小下标, 否则 Y=X 得证。

由于贪心算法选择的是运行时间最短的任务, 则可知 $p_{x_k} < p_{y_k}$。记任务 a_{x_k} 在最优解中出现的位置为 i(i>k), 若将最优解中任务 a_{y_k} 与任务 a_{x_k} 调换一下顺序, 则第 k+1 到 i-1 个任务的结束时间都缩短了 $p_{y_k} - p_{x_k}$, 而第 i 个到第 n 个任务的结束时间没有变化，总体的平均运行时间缩短，说明 Y 不是最优解，故贪心选择性质得证。

b. 由于任务是可以抢占的，所以策略是记录每个任务的剩余时间，在当前可以开始的任务中选择剩余时间最短的任务执行, 当下一组任务到来时，比较该组任务剩余时间最短的任务与当前任务，若小于当前任务的剩余时间就抢占。

算法如下:

$solution(p, r)$

$let\ c[1...n]\ be\ a\ new\ array$

$sort(r, p)$ //使得 $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \cdots$,同时在排序时同步交换$p_i$,使得$p_i$和$r_i$对应同一$a_i$

$cur = \infty$ //记录当前被执行的任务

$for\ i = 1\ to\ n$

$for\ j = 1\ to\ n$

$if\ r_j \geq r_i\ and\ p_j < cur$

$cur = j$ //找出剩余时间最短的任务作为新任务

$if\ p_j \geq r_i$

$p_j = p_j - r_i$

$c_j = c_j + r_i$

$else$

$p_j = 0$

$c_j = c_j + p_j$

$avg = 0$

$for\ i = 1\ to\ n$

$avg = avg + c_i$

$avg = \frac{avg}{n}$

$return\ avg$

时间复杂度为 $O(n^2)$.

证明最优性:

1. 最优子结构

假设 $X = x_1....x_m(m > n)$ 是最优解, 而 $X_1 = x_1....x_{m-1}$ 不是除最后一次选择之外的前 m-1 次选择的最优解, 而 $Y_1 = y_i...y_{m-1}$ 是该子问题的最优解。

在该子问题执行完毕之后，所有的任务应该都可以开始或者已经执行完毕, 所以问题相当于问题 a，故证明过程同上。

2. 贪心选择性质

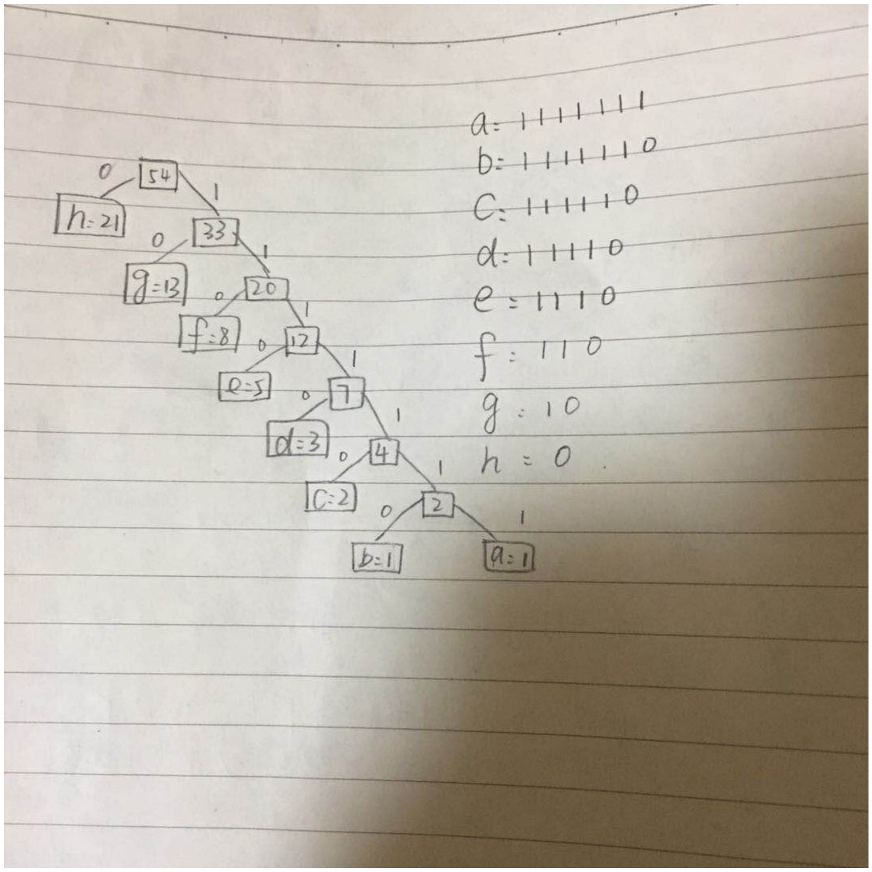
设 $X = x_1....x_m$ 是贪心算法选择任务的下标顺序, 设该问题的最优选择下标顺序为 $Y = y_1....y_m$ 则存在 k 使得 $y_k \neq x_k$ 为最小下标, 否则 Y=X 得证。

由于贪心算法选择的是当前可以执行的剩余时间时间最短的任务, 则可知 $p_{x_k} < p_{y_k}$。故若在该阶段将选择这行的任务替换为任务 a_{x_k}, 则之后的阶段被选择的任务的结束时间都将提前，总体的平均运行时间缩短，说明 Y 不是最优解，故贪心选择性质得证。

16.2-3

假设有 n 个字符，第 1 个字符有 n-1 个 1，其余字符有 n-i 个 1 加末尾一个 0.

如图所示


54
h=21
33
g=13
20
f=8
12
e=5
7
d=3
4
c=2
2
b=1
a=1
a=1111111
b=1111110
c=111110
d=11110
e=1110
f=110
g=10
h=0