曲线与曲面积分

1. 计算下列曲线积分：

1） 计算 $I=\oint_L[(x+\sqrt{y})\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2]dl$， L 是圆周 $x^2+(y-1)^2=1$

解：根据对称性及曲线积分的概念，得

$$\begin{aligned}I&=\oint_L[(x+\sqrt{y})\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2]dl\\&=\oint_L[\sqrt{y}\sqrt{2y}+2y]dl\\&=(2+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}(1+\sin\theta)d\theta\\&=2\pi(2+\sqrt{2})\end{aligned}$$

2） 计算 $I=\oint_C x^2dl$, $C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+y+z=0\end{cases}$

解一： 作坐标变换，将 z 轴变成平面 $x+y+z=0$ 的单位法向量，再在平面上取两个正交

向量: $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，单位化以后构成新坐标系：$\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$,

过渡矩阵 T 由新坐标系三个点在旧坐标系中的坐标形成如下：

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

因为是正交阵，$T^{-1}=T^T$，因此，

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$

$C:\begin{cases}u^2+v^2+w^2=1\\w=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}u^2+v^2=1\\w=0\end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Cos\,t \\ Sin\,t \end{pmatrix}$$

$$\oint_C x^2 dl = \oint_C \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{6}} \right)^2 dl = \frac{1}{6}\oint_C dl + \frac{1}{3}\oint_C u^2 dl + \frac{1}{\sqrt{3}}\oint_C uvdl = \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} Cos^2 tdt = \frac{2}{3}\pi$$

解二：由对称性可知：

$$\oint_C x^2 dl = \oint_C y^2 dl = \oint_C z^2 dl$$

$$\oint_C x^2 dl = \frac{1}{3}\oint_C \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dl = \oint_C 1 dl = \frac{2\pi}{3}$$

3） 计算 $I = \int_{L_+} 3x^2 ydx - x^3 dy$，$L_+$ 沿直线 $(0,0) \to (1,0) \to (1,1)$

解：$I = \int_0^1 0dx + \int_0^1 (-1)dy = -1$

4） 计算 $I = \int_{L_+} ydx - (x^2 + y^2 + z^2)dz$，$L_+$ 是曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2x + 4 \end{cases}$ 在第一卦限中的部分，从点 $(0,1,4)$ 到点 $(1,0,6)$

解：L_+ 的参数方程为 $\begin{cases} x = x \\ y = \sqrt{1 - x^2} \\ z = 2x + 4 \end{cases}$，参数 x 从 0 变到 1。所以

$$\begin{aligned} I &= \int_{L_+} ydx - (x^2 + y^2 + z^2)dz \\ &= \int_0^1 [\sqrt{1 - x^2} - (1 + (2x+4)^2)2]dx \\ &= \frac{\pi}{4} - 2 - \frac{8}{3} - 16 - 32 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{158}{3} \end{aligned}$$

5） 计算 $I = \int_L \dfrac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$，$L$ 是曲线 $y = x^2 - 2$ 从 $A(-2,2)$ 到 $B(2,2)$ 的一段。

解：记 $X(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}, Y(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$，则当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时，有

$$\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}。$$

令 L_1 是折线段 $A(-2,2) \to C(-2,-2) \to D(2,-2) \to B(2,2)$，则根据格林公式易知

$$I=\int_{L}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$$
$$=\int_{L_1}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$$
$$=\int_{2}^{-2}\frac{-2+y}{4+y^2}dy+\int_{-2}^{2}\frac{x+2}{x^2+4}dx+\int_{-2}^{2}\frac{2+y}{4+y^2}dy$$
$$=6\int_{-2}^{2}\frac{1}{4+y^2}dy=\frac{3}{2}\pi\text{。}$$

另解：令 L_1 是直线段 $A(-2,2)\to B(2,2)$， L_2 是圆周 $x^2+y^2=r^2$， r 足够小，则根据格林公式得

$$I=\int_{L}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$$
$$=\int_{L_1}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}+\int_{L_2}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$$
$$=\int_{-2}^{2}\frac{x-2}{x^2+4}dx+\frac{1}{r^2}\int_{L_2}(x-y)dx+(x+y)dy$$
$$=-\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{3}{2}\pi$$

6） 计算 $I=\oint_{L}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$，$L$ 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去， L 为逆时针方向。

解：记 L_1、L_2、L_3、L_4 分别为 L 在第一、第二、第三和第四卦限中的部分，则

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}&=\oint_{L}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz\\
&=\int_{L_1}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz\\
&\quad+\int_{L_2}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz\\
&\quad+\int_{L_3}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz\\
&\quad+\int_{L_4}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz
\end{aligned}$$

$$=\int_{1}^{0}\left[(1-x)^2+x^2-3\right]dx$$
$$+\int_{0}^{-1}\left[3(1+x)^2+(1-2x)^2-7x^2\right]dx$$
$$+\int_{-1}^{0}\left[(1+x)^2+x^2-27\right]dx$$
$$+\int_{0}^{1}\left[3(x-1)^2+(3-2x)^2-7x^2\right]dx$$
$$=\frac{7}{3}-3-\frac{79}{3}+3=-24\text{。}$$

另解：记 $\overline{L}$ 为 L 在 $x-y$ 平面上的投影，则

$$I=\oint_{\overline{L}}[y^2-(2-x-y)^2]dx+[2(2-x-y)^2-x^2]dy+[3x^2-y^2](-dx-dy)$$ (化空间曲线积分为平面曲线积分）

$$=\oint_{\overline{L}}[2y^2-(2-x-y)^2-3x^2]dx+[2(2-x-y)^2-4x^2+y^2]dy$$
$$=-2\iint_{|x|+|y|\le 1}(6+x-y)dxdy$$（Green公式）
$$=-24$$

7） 计算 $I=\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$，沿任一条不与轴相交的曲线。

解：由于 $\frac{\partial X}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}=\frac{\partial Y}{\partial x}$，

$$\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$$
$$=dx+y\cos\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right)+\sin\frac{y}{x}dy$$
$$=dx+y\cos\frac{y}{x}d\left(\frac{y}{x}\right)+\sin\frac{y}{x}dy$$
$$=dx+yd\left(\sin\frac{y}{x}\right)+\sin\frac{y}{x}dy=d\left(x+y\sin\frac{y}{x}\right),$$

$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$$

$$= \int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} d\left(x + y\sin\frac{y}{x}\right) = \left(x + y\sin\frac{y}{x}\right)\Bigg|_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} = \pi + 1$$

8） 计算 $I = \oint_C ydx + zdy + xdz$，$C:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$，从正 z 轴方向看，C 的正向为反时钟方向。

解一：直接计算：做参数方程：

$$C:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = a^2/2 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (u - v)/\sqrt{2} \\ y = (u + v)/\sqrt{2} \\ z = -u\sqrt{2} \\ 3u^2 + v^2 = a^2 \end{cases}$$

$$C:\begin{cases} x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\cos t}{\sqrt{3}} - \sin t\right) \\ y = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\cos t}{\sqrt{3}} + \sin t\right), 0 \le t \le 2\pi \\ z = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos t\right) \end{cases}$$

$$\oint_C ydx + zdy + xdz = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)dt = -\sqrt{3}\pi a^2$$

解二：利用 Stokes 公式计算：

$$\oint_C ydx + zdy + xdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS$$

$$= -\iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) dS$$

$$= -(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\iint_S dS = -\sqrt{3}\pi a^2$$

9） 计算 $I = \dfrac{1}{2\pi}\oint_C \dfrac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$，其中 $\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$，$ad - bc \ne 0$，$C$ 为包围原点的闭曲线。

解：由 $ad - bc \ne 0$ 可知，仅有原点使 $X^2 + Y^2 = 0$.

$$XdY - YdX = (ad - bc)(xdy - ydx)$$

记 $I=\dfrac{1}{2\pi}\oint_C\dfrac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}=\dfrac{(ad-bc)}{2\pi}\oint_C\dfrac{xdy-ydx}{X^2+Y^2}=\dfrac{(ad-bc)}{2\pi}\oint_C Pdx+Qdy$,

易于验证：$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$$I=\frac{(ad-bc)}{2\pi}\oint_C\frac{xdy-ydx}{X^2+Y^2}=\frac{(ad-bc)}{2\pi}\oint_{X^2+Y^2=r^2}\frac{xdy-ydx}{X^2+Y^2}$$

$$=\frac{(ad-bc)}{2\pi\ r^2}\oint_{X^2+Y^2=r^2}xdy-ydx=\frac{(ad-bc)}{2\pi\ r^2}\iint_{X^2+Y^2\le r^2}2dxdy$$

$$=\frac{(ad-bc)}{\pi\ r^2}\iint_{X^2+Y^2\le r^2}\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}\right|dXdY,$$

$$\frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Rightarrow\frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\Rightarrow\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}=\frac{1}{ad-bc},$$

$$I=\frac{(ad-bc)}{\pi r^2}\iint_{X^2+Y^2\le r^2}\frac{1}{|ad-bc|}dXdY=\frac{ad-bc}{\pi r^2}\cdot\frac{\pi r^2}{|ad-bc|}=Sgn(ad-bc)$$

2. 计算下列曲面积分：

1） 计算 $I=\oiint_S(x+y)dS$，其中 S 为 $x^2+y^2+z^2+4x+2y+6z-2=0$

解：做平移 $X=x+2,Y=y+1,Z=z+3$，$I=\oiint_{S'}(X-2+Y-1)dS=\oiint_{S'}(-3)dS=-192\pi$

2） 计算 $I=\oiint_S(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{4})dS$，其中 S 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$

解：由变量的循环对称性，$I=\dfrac{13}{36}\oiint_S(x^2+y^2+z^2)dS=\dfrac{13}{36}a^2\oiint_S dS=\dfrac{13}{9}\pi a^4$

3） 计算 $I=\iint_S xyz(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)dS$，其中 S 为 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (x,y,z\ge 0)$

解：由循环对称性，$I=3\iint_S x^3y^3zdS=3a\iint_D x^3y^3dxdy=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi\int_0^a\rho^7\sin^3\phi\cos^3\phi d\rho=\dfrac{1}{32}a^9$

4） 计算 $I=\oiint_S(x+y+z)dS$，其中 S 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

解：$\oiint_S(x+y+z)dS=\oiint_S(x-a)+(y-b)+(z-c)dS+\oiint_S(a+b+c)dS$，根据对称性第一个积分值为零，所以 $I=\oiint_S(a+b+c)dS=4\pi R^2(a+b+c)$

5） 计算 $I=\iint\limits_S\left[(z^n-y^n)\cos\alpha+(x^n-z^n)\cos\beta+(y^n-x^n)\cos\gamma\right]dS$, 其中

$S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ z\geq 0\end{cases}$, $\mathbf{n}=(\cos a,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 S 的外法向量。

解：由于 $\vec{n}=\dfrac{1}{R}(x,y,z)$，所以 $I=\iint\limits_S[(z^n-y^n)\dfrac{x}{R}+(x^n-z^n)\dfrac{y}{R}+(y^n-x^n)\dfrac{z}{R}]dS$

根据曲面 S 关于坐标面的对称性，得 $I=\iint\limits_S[(z^n-y^n)\dfrac{x}{R}+(x^n-z^n)\dfrac{y}{R}]dS=0$

根据循环对称性，得 $\iint\limits_S y^n zdS=\iint\limits_S x^n zdS$

因此 $I=0$

6） 计算 $I=\iint\limits_S|z|dS$， $J=\iint\limits_S|z|dx\wedge dy$, 其中 $S:x^2+y^2+z^2=a^2$， 外法线为曲面正向。

解：由对称性可知， $I=\iint\limits_S|z|dS=\iint\limits_{S_1}|z|dS+\iint\limits_{S_2}|z|dS$, 且 $\iint\limits_{S_1}|z|dS=\iint\limits_{S_2}|z|dS$

$$dS=\frac{dxdy}{\cos\gamma}=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=\frac{a\,dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$I=\iint\limits_S|z|dS=\iint\limits_{S_1}|z|dS+\iint\limits_{S_2}|z|dS=2\iint\limits_{S_1}|z|dS$$

$$=2\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=8a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=2\pi a^3$$

$$J=\iint\limits_S|z|dx\wedge dy=\iint\limits_{S_1}|z|dx\wedge dy+\iint\limits_{S_2}|z|dx\wedge dy$$

$$\iint\limits_{S_1}|z|dx\wedge dy=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$$

$$\iint\limits_{S_2}|z|dx\wedge dy=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\left(-dxdy\right)$$

$$J=\iint\limits_S|z|dx\wedge dy=\iint\limits_{S_1}|z|dx\wedge dy+\iint\limits_{S_2}|z|dx\wedge dy=0$$

3. 求柱面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 包围部分的面积 S

解：根据第一型曲线积分的几何意义及对称性，得 $S=8\int\limits_L\sqrt{1-x^2-y^2}dl$，其中 L 是平面

曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 在第一象限中的部分。

令 $L\begin{cases}x=\cos^3\theta\\ y=\sin^3\theta\end{cases}$，$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，则 $dl=\sqrt{(x')^2+(y')^2}d\theta=3\sin\theta\cos\theta d\theta$，所以

$$S=8\int_L\sqrt{1-x^2-y^2}dl$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^6\theta-\sin^6\theta}\ 3\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^4\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta)}\ \sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$=24\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta=6\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ \sin^2(2\theta)d\theta=\frac{3}{2}\sqrt{3}\pi\text{ 。}$$

4. 设函数满足：$x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=nf\left(x,y,z\right)$，$n$ 为正整数，曲面 $S_1:f\left(x,y,z\right)=0$ 与平面 $S_2:ax+by+cz=d$，所围区域为 Ω，$\partial\Omega$ 取外法线作正向，计算：

$$I=\frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy$$

解： 设 $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=\vec{r}$，$I=\dfrac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{n}_0dS=\dfrac{1}{3}\left(\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}_0dS+\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}_0dS\right)$

在曲面 S_1 上：$\vec{F}\cdot\vec{n}_0=\vec{r}\cdot\dfrac{f_x'\vec{i}+f_y'\vec{j}+f_z'\vec{k}}{\sqrt{\left(f_x'\right)^2+\left(f_y'\right)^2+\left(f_z'\right)^2}}=\dfrac{xf_x'+yf_y'+zf_z'}{\sqrt{\left(f_x'\right)^2+\left(f_y'\right)^2+\left(f_z'\right)^2}}=0$

在平面 S_2 上：$\vec{F}\cdot\vec{n}_0=\vec{r}\cdot\dfrac{a\vec{i}+b\vec{j}+c_z\vec{k}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$I=\frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{n}_0dS=\frac{1}{3}\left(\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}_0dS+\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}_0dS\right)=0+\frac{d}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\iint_{S_2}dS=\frac{1}{3}H\cdot S$$

这里，H 是原点到平面 S_2 的距离，是曲面 S_1 在平面 S_2 上切下图形的面积。

另一方面，由 Gauss 公式有：

$$I=\frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy=\frac{1}{3}\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint_{\Omega}dxdydz=\left|\Omega\right|$$

即所围体积：$\left|\Omega\right|=\dfrac{1}{3}H\cdot S$.

5. 已知曲线积分 $\int_L xy^2dx+yf(x)dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 连续可导，且 $f(0)=0$，求

$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx + yf(x)dy$ 的值。

解：因为曲线积分与路径无关，所以 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx + yf(x)dy = \int_0^1 yf(0)dy + \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$

或根据 $\frac{\partial(yf(x))}{\partial x} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial y}$，得 $yf'(x) = 2xy$，考虑到 $f(0) = 0$，得 $f(x) = x^2$。从而

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx + yf(x)dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx + yx^2dy = \frac{1}{2}x^2y^2 \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = \frac{1}{2}$$

6. 设函数 $f(x,y)$ 在 R^2 一阶连续可导，曲线积分 $\int_L 2xydx + f(x,y)dy$ 与路径无关，且对任意 t 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + f(x,y)dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + f(x,y)dy$，求 $f(x,y)$ 的表达式。

解：因为曲线积分 $\int_L 2xydx + f(x,y)dy$ 与路径无关，所以 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x$，因此

$f(x,y) = x^2 + g(y)$，

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + f(x,y)dy = \int_0^t 0dx + \int_0^1 (t^2 + g(y))dy = t^2 + \int_0^1 g(y)dy,$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + f(x,y)dy = \int_0^1 0dx + \int_0^t (1 + g(y))dy = t + \int_0^t g(y)dy,$$

所以 $t^2 + \int_0^1 g(y)dy = t + \int_0^t g(y)dy$ 对任意 t 成立。由此得 $g(t) = 2t - 1$，

$f(x,y) = x^2 + g(y) = x^2 + 2y - 1$

7. 已知 $\oint_L \frac{1}{f(x)+y^2}(xdy - ydx) = A$，其中 $f \in C^1, f(1) = 1, L$ 是绕原点一周的任意正向闭曲线，试求 $f(x)$ 及 A

解：根据题中条件，可以证明 $\oint_C \frac{1}{f(x)+y^2}(xdy - ydx) = 0$，其中 C 是任意一条不包围原点的封闭曲线。因此 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{f(x)+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{f(x)+y^2}\right)$，从而 $2f(x) - xf'(x) = 0$，故

$\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)' = 0$。考虑到 $f(1) = 1$，得 $f(x) = x^2$

取 L 为 $x^2 + y^2 = 1$，得

$$\oint_L \frac{1}{f(x)+y^2}(xdy - ydx) = \oint_L \frac{1}{x^2+y^2}(xdy - ydx) = \oint_L xdy - ydx = \iint_{x^2+y^2\le 1} (1+1)dxdy = 2\pi$$

8. 设$u(x,y),v(x,y)$在全平面内有连续的一阶偏导数，且满足$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，记$C$为包围原点的正向简单闭曲线，计算 $I=\oint_C\frac{(xv-yu)dx+(xu+yv)dy}{x^2+y^2}$

解：记$I=\oint_C Pdx+Qdy$，其中$P=\frac{xv-yu}{x^2+y^2},Q=\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$。由于

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(xv_y-yu_y-u)(x^2+y^2)-2y(xv-yu)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(xv_y-yu_y)(x^2+y^2)+(y^2-x^2)u-2xyv}{(x^2+y^2)^2},$$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(xu_x+yv_x)(x^2+y^2)+(y^2-x^2)u-2xyv}{(x^2+y^2)^2}$，且$u_x=v_y,u_y=-v_x$，所以当$x^2+y^2\neq 0$时，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

任取$r>0$充分小，记C_r为圆周$x^2+y^2=r^2$，并取逆时针方向，根据Green公式可知，$\oint_{C-C_r}Pdx+Qdy=0$，故$I=\oint_{C_r}Pdx+Qdy$

取 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$, $\theta:0\to 2\pi$，则

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}[r\cos\theta\cdot v-r\sin\theta\cdot u)\cdot(-\sin\theta)r+(r\cos\theta\cdot u+r\sin\theta\cdot v)r\cos\theta]d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}u(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta=2\pi u(r\cos\xi,r\sin\xi),0\le\xi\le 2\pi$$

因I与r的值无关，令$r\to 0^+$，得$I=2\pi u(0,0)$

9. 已知$F(t)=\iint\limits_{\begin{cases}x+y+z=t\\ x^2+y^2+z^2\le 1\end{cases}}(1-x^2-y^2-z^2)dS$，$t\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$，试求$\frac{dF(t)}{dt}$

解：作正交变换 $\begin{cases}u=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)\\ v=v(x,y,z)\\ w=w(x,y,z)\end{cases}$，由于正交变换具有保角度、保长度的性质，所以

$$F(t)=\iint\limits_{\begin{cases}x+y+z=t\\x^2+y^2+z^2\le 1\end{cases}}(1-x^2-y^2-z^2)dS$$

$$=\iint\limits_{\begin{cases}u=\frac{t}{\sqrt{3}}\\u^2+v^2+w^2\le 1\end{cases}}(1-u^2-v^2-w^2)dS$$

$$=\iint\limits_{v^2+w^2\le 1-\frac{t^2}{3}}(1-\frac{t^2}{3}-v^2-w^2)dvdw$$

$$=\pi(1-\frac{t^2}{3})^2-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}}r^2rdr$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-\frac{t^2}{3})^2\text{,}$$

因此 $\dfrac{dF(t)}{dt}=\dfrac{2\pi t}{3}(\dfrac{t^2}{3}-1)$