高等数学 A (上)复习资料

第一部分 概念题求解

一、 极限与连续

1. 极限的定义、性质以及极限的存准则：

（1）极限定义.

（2）数列或函数有极限时具有极限唯一性、（局部）有界性、保序保号性.

（3）单调有界数列必然收敛.

考点：（i）极限的保序、保号性；（ii）注意单调性、有界性与收敛性的关系。

【例】下列结论中，正确的是**【 】**。

（A）有界数列必收敛； （B）单调数列必收敛；

（C）收敛数列必有界； （D）收敛数列必单调。

解析：答案为（C）。本题考察单调性、有界性与数列收敛性的关系，主要结论是：**收敛数列必有界**，但收敛数列可以不单调，例如 $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}\to 0$，但它不单调；**单调有界数列必收敛**；数列仅仅单调未必收敛，例如 $x_n=n$，原因是可能无界，仅仅有界未必收敛，例如 $x_n=(-1)^{n+1}$。因此其余答案都是错误的。

2. 无穷小的阶：次数高阶就高。处理无穷小的一般方法

（1）等价替换（乘除法可直接替换，加减法在阶不变化的条件下也可替换）；

（2）Taylor 公式（应当熟练掌握各初等函数的 Taylor 公式）；

（3）无穷小的计算规律（例如无穷小与有界量的乘积是无穷小）。

【例】设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，有**【 】**。（06 秋考题）

（A） $f(x)$ 与 x 是等价无穷小；

（B） $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小；

（C） $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小；

（D） $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小。

解析：答案为（B），因为 $2^x-1\sim x\ln 2,\quad 3^x-1\sim x\ln 3$（$x\to 0$），于是

$$f(x)=2^x+3^x-2\sim x\ln 6, x\to 0。$$

【例】 当 $x\to 0$ 时，下列四个无穷小中，哪一个是比其它三个更高阶的无穷小量**【　】**。

（A） $\ln(1-x^2)$；　　　　（B） $x\tan x$；

（C） $2x^3$；　　　　（D） $e^{x^2}-1$。

解析： 答案为（C），其它三个的阶都是 2，理由如下

$$\ln(1-x^2)\sim -x^2, x\tan x\sim x^2, e^{x^2}-1\sim x^2 (x\to 0)。$$

【例】 设 $f(x)=\int_0^{x^2}\sin t dt$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的**【　】**。

（A）高阶无穷小；　　　　（B）同阶但非等价无穷小；

（C）等价无穷小；　　　　（D）低阶无穷小。

解析： 答案为（A），因为当 $x\to 0$ 时

$$f(x)=\int_0^{x^2}\sin t\,dt=1-\cos(x^2)\sim\frac{x^4}{2}，\quad g(x)=x^3+x^4\sim x^3。$$

【例】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}=$ ________________。**（15 秋考题）**

解析： 答案是 e^2，利用重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^2=e^2$。

3. 连续与间断

（1）利用左右极限与函数值相等得连续性；

（2）间断点的类型：第一类间断点（跳跃、可去间断点）；第二类间断点（无穷、振荡间断点）。

【例】 设函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x>0 \\ a+x^2, x\le 0\end{cases}$，要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $a=$ ____________。**（15 秋考题）**

解析： 答案是 0，因为

$$a=f(0)=f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\left(a+x^2\right)=f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0。$$

【例】 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，判别其类型。**（15 秋考题）**

解： 当$|x|<1$时，$x^{2n}\to 0(n\to\infty)$，此时

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\frac{1-0}{1+0}x=x\,;$$

当$|x|>1$时，$x^{-2n}\to 0(n\to\infty)$，此时

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{-2n}-1}{x^{-2n}+1}x=\frac{0-1}{0+1}x=-x\,;$$

当$|x|=1$时 $f(x)=0$。因此

$$f(x)=\begin{cases}x, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -x, & |x|>1.\end{cases}$$

由初等函数的连续性，$f(x)$在除$x=\pm 1$外都连续。又

$$f(1^+)=-1,\ f(1^-)=1,\ f(-1^+)=-1,\ f(-1^-)=1\,,$$

因此$x=\pm 1$都是$f(x)$的跳跃间断点。

4. 闭区间上连续函数的性质

（1）有界性和最大最小值定理；
（2）零点定理；
（3）介值定理。

【例】 证明方程$\sin x+x+1=0$在开区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内至少有一个根。（07 秋考题）

证明： 记$f(x)=\sin x+x+1$，则$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上连续，且

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+2>0\,,\text{（事实上 } f(0)=1>0\text{）}$$

因此，由零点定理，$f(x)=\sin x+x+1$在开区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内至少有一个零点，即方程$\sin x+x+1=0$在开区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内至少有一个根。

【例】 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(x)<1$，证明$2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=1$在$[0,1]$上只有一

个解。（10 秋考题）

证明：令 $g(x)=2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-1$，则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $g(0)=-1<0$，$g(1)=1-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t>1-\int_0^1 1\cdot\mathrm{d}t=0$，因此由零点定理，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上至少有一个零点；另外，$g'(x)=2-f(x)>2-1=1>0$，因而 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调增加，它至多有一个零点。因此 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上只有一个零点，即方程 $2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=1$ 只有一个解。

5. 极限的计算方法汇总（截止目前）

（1）无穷小的运算规律和等价替换；
（2）利用重要极限；
（3）利用（初等）函数连续性求极限；
（4）利用 L'Hospital 法则；
（5）利用 Taylor 公式；
（6）利用导数定义求极限；
（7）利用积分和求极限；
（8）利用恒等变形与其他方法结合求极限。

【例】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sin n-n\sin\frac{1}{n}\right)=$ **【　　】**。（07 秋考题）

（A）0；　　（B）**不存在**；　　（C）1；　　（D）-1。

解析：答案为（D）。本题考察无穷小的运算规律和等价替换。$\frac{1}{n}\sin n$ 是无穷小与有界量的乘积，极限为 0；$\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$，因而 $n\sin\frac{1}{n}\to 1$。

【例】 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是 **【　　】**。

（A）若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$；

（B）若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$；

（C）若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在；

（D）若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在。

解析：答案为（D），因各个选项极限式的分母极限都是 0，因而分子极限也必然是 0，结合 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，（A）表明 $f(0)=0$，（B）表明 $2f(0)=0$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0),$$

即（C）成立。（D）不成立是因为，分子极限为 $f(0)-f(-0)=0$ 永远成立，无论 $f(0)$ 取何值，当左右导数都存在时

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(0)-f(-x)}{x}$$

$$=f_+^{'}(0)+f_-^{'}(0),$$

而左右导数未必相等，但上面极限依然存在，因而 $f'(0)$ 不一定存在。

【例】 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$，则 k 的取值为**【 】。**

（A） 2；　　（B）-2 ；　　（C） $-\frac{1}{2}$；　　（D） $\frac{1}{2}$ 。

解析：答案为（C），本题考察重要极限和等价替换，

$$k=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{2}\text{。}$$

【例】计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$ 。

解析：本题考察 L’Hospital 法则和变限定积分求导法则，计算如下：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{2x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}}{(2x^2+1)e^{x^2}}=\frac{2}{1}=2\text{。}$$

【例】 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=3$，求 a,b 的值。

解：首先，必然有 $e^0-a=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-a\right)=0$（若不然，函数 $\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)$ 在 $x=0$ 连续，从而取值为 0)，由此知 $a=1$ 。于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}\cdot\lim_{x\to 0}(\cos x-b)=1\cdot(1-b)=3,$$

因此 $b=-2$ 。这里用到 $\sin x\sim x\sim e^x-1(x\to 0)$ 。

【例】设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x + x f(x)}{x^3}=0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$。

解：方法一，利用 Taylor 公式。

因为 $\sin 6x = 6x - \dfrac{1}{6}(6x)^3 + o(x^3) = 6x - 36x^3 + o(x^3)$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x + x f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{6x - 36x^3 + x f(x) + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{6x - 36x^3 + x f(x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2} - 36 = 0,$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=36$。

方法二，利用条件转化，再用 L’Hospital 法则。

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}$$

$$= 0 + \lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{36\sin 6x}{6x} = 36。$$

【例】求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{2+x}\right)^{5x}$。（06 秋考题）

解：当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{2+x}\to 0$，从而 $\ln\dfrac{3+x}{2+x} = \ln\left(1+\dfrac{1}{2+x}\right) \sim \dfrac{1}{2+x}$，因此

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3+x}{2+x}\right)^{5x} = \lim_{x\to\infty}5x\ln\left(1+\frac{1}{2+x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{5x}{2+x} = 5,$$

最后得到 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{2+x}\right)^{5x} = e^5$。

【例】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{x\ln(1+x)}$。（06 秋考题）

解：方法一，等价量结合 L’Hospital 法则。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - \cos x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0\text{。}$$

方法二，利用等价替换。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\frac{x^2}{2})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}=0\text{。}$$

方法三，利用 Taylor 公式。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3))-(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3))}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}x+o(x)\right]=0\text{。}$$

【例】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$。（07 秋考题）

解：利用 L’Hospital 法则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\lim_{x\to+\infty}(\arctan x)^2=\frac{\pi^2}{4}\text{。}$$

二、 导数与微分

1. 导数的定义、可导的条件

（1）导数的定义，左右导数

（2）可导的条件

【例】设函数 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=3$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处

切线的斜率为【　　】。

（A）6； （B）－1； （C）－2； （D） 1。

解析：答案是（A）。因为按导数定义

$$k=2\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=2\times 3=6。$$

2. 连续性、可导性和可微性的关系：可导$=$可微$\Rightarrow$连续。

【例】函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导是 $f(x)$ 在 x_0 处可微的【　　】条件。（07 秋考题）

（A）充分； （B）必要；
（C）充分必要； （D）既不是充分也不是必要。

解析：答案是（C）。明显的结论，必须记住。

【例】函数 $f(x)$ 在 x_0 处有导数的充要条件是【　　】。

（A） $f(x)$ 在 x_0 处连续； （B） $f(x)$ 在 x_0 处可微分；

（C） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 存在； （D） $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在。

解析：答案是（B）。它是明显正确的选项。（C），（D）都不涉及 $f(x)$ 在 x_0 处的信息，自然得不出可导性。答案（A）明显错误。

【例】若函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则 $f(x)$ 在 x_0【　　】。

(A) 必定可导； （B） 必不可导；
(C) 不一定可导； （D） 必无定义。

解析：答案是（B）。因为可导函数必连续。

3. 导数与微分的计算（包括高阶导数）

（1）导数与微分公式（$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$）；

（2）隐函数、由参数方程确定的函数和反函数的导数与高阶导数（Leibniz 公式）。

【例】函数 $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 的微分 $\mathrm{d}y=$____________。（07 秋考题）

解析：$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$。

【例】设 $\begin{cases}x=2(1-\cos\theta)\\ y=4\sin\theta\end{cases}$， 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ， $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。（07 秋考题）

解： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}=\dfrac{4\cos\theta}{2\sin\theta}=2\cot\theta$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}=\frac{(2\cot\theta)'}{2\sin\theta}=-\csc^3\theta。$$

【例】 设 $f(x)=\ln\sin x$，则微分 $\mathrm{d}y=$____________________。

解析： $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=\cot x\mathrm{d}x$。

【例】 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x-y+\sin y=0$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解析： 把 y 视为 x 的函数，在方程 $x-y+\sin y=0$ 两边对 x 求导得到

$$1-y'+\cos y\cdot y'=0\Rightarrow y'=\frac{1}{1-\cos y},$$

进一步有

$$y''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{1}{1-\cos y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-(1-\cos y)'_y}{(1-\cos y)^2}\cdot\frac{1}{1-\cos y}=\frac{-\sin y}{(1-\cos y)^3}。$$

【例】 设 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t^2)\\ y=\arctan t\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。**（06 秋考题）**

解： 因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{(t-1)^2},$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{(t-1)^2}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\frac{2}{(t-1)^3}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{2(1+t^2)}{(t-1)^5}。$$

【例】 设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-2008)$，则 $f'(0)=$______________。**（07 秋考题）**

解析： $f'(0)=2008!$。一般地，设 $f(x)=(x-a)p(x)$，而 $p(x)$ 在 $x=a$ 连续，则 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}p(x)=p(a)$。

4. 微分中值定理

【例】 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0), f'(1), f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 几个数的大小顺序为【　　】.

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$；　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$；

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$；　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$。

解析： 答案是（B）。因为 $f''(x)>0$，因此 $f'(x)$ 单调增加，而由 Lagrange 中值定理，

$f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)=f'(\xi)$， $0<\xi<1$。

【例】 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$ 。（07 秋考题）

证明： 令 $g(x)=x^2 f(x)$，则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$$g(0)=0, g(1)=f(1)=0,$$

于是由 Rolle 定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $g'(\xi)=2\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)=-\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$。

5. Taylor 公式

【例】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,\ 1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$， $f(1)=1$，$f'(0)=0$. 证明：在 $(-1,\ 1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$。

证明：方法一，利用 Taylor 公式。

由于

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\xi)}{6}x^3$$

$$=f(0)+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\xi)}{6}x^3, \qquad x\in[-1,1],$$

其中 ξ 在 0 和 x 之间。分别取 $x=\pm1$ 得到

$$1=f(1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{f'''(\xi_1)}{6},$$
$$0=f(-1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}-\frac{f'''(\xi_2)}{6},$$

相减得

$$\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}=1。$$

由连续函数的介值性，存在 $\xi\in[\xi_2,\xi_1]\subset(-1,1)$，使得

$$f'''(\xi)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3。$$

方法二，利用微分中值定理。令 $F(x)=f(x)-f(-x)$，$g(x)=x^3$，则

$$F(1)=f(1)-f(-1)=1，\quad F(0)=0，$$

$$F'(x)=f'(x)+f'(-x)，\quad F''(x)=f''(x)-f''(-x)，$$

$$F'(0)=2f'(0)=0，\quad F''(0)=f''(0)-f''(0)=0，\quad g'(0)=g''(0)=0。$$

因此两次利用 Cauchy 中值定理得到

$$1=\frac{F(1)-F(0)}{g(1)-g(0)}=\frac{F'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}=\frac{F'(\xi_1)-F'(0)}{g'(\xi_1)-g'(0)}$$

$$=\frac{F''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}=\frac{f''(\xi_2)-f''(-\xi_2)}{6\xi_2},$$

对最后一个式子使用 Lagrange 中值定理得到

$$1=\frac{f''(\xi_2)-f''(-\xi_2)}{6\xi_2}=\frac{f'''(\xi)}{3},$$

即 $f'''(\xi)=3$，其中 $0<\xi_2<\xi_1<1$，且 $-\xi_2<\xi<\xi_2$，因而 $\xi\in(-1,1)$。得证。

【例】设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上具有二阶连续导数（$a>0$），且 $f(0)=0$，

（1）写出 $f(x)$ 的带有拉格朗日型余项的一阶麦克劳林公式；

（2）证明至少存在一点 $\eta\in[-a,a]$ 使得 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$。

解：（1）$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$。

（2）方法一，利用 Cauchy 中值定理结合 Tayloy 公式。

记 $F(x)=3\int_{-x}^{x}f(t)\mathrm{d}t,G(t)=t^3$，则由上式有

$$f(x)=f'(0)x+\frac{f''(\alpha)}{2}x^2\text{，}\quad f(-x)=-f'(0)x+\frac{f''(\beta)}{2}x^2\text{，}$$

其中$-x<\beta<0<\alpha<x$。从而

$$f(x)+f(-x)=\frac{f''(\xi)+f''(\eta)}{2}x^2\text{。}$$

最后利用 Cauchy 中值定理有

$$\frac{F(a)}{G(a)}=\frac{F(a)-F(0)}{G(a)-G(0)}=\frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}=\frac{3\left[f(\xi_1)+f(-\xi_1)\right]}{3\xi_1^2}$$

$$=\frac{3\left[f(\xi_1)+f(-\xi_1)\right]}{3\xi_1^2}=\frac{\left[f''(\alpha)+f''(\beta)\right]}{2}=f''(\eta)\text{，}$$

最后一式用连续函数的介值性。于是

$$G(a)f''(\eta)=a^3f''(\eta)=F(a)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\text{。}$$

方法二，利用第一积分中值定理和积分的变换。

令

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x^2}, & 0<x\le a,\\ f''(0), & x=0,\end{cases}$$

则由题设，$g(x)$在$(0,a]$上连续，且

$$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to0+}\frac{f'(x)-f'(-x)}{2x}=f''(0)=g(0)\text{，}$$

因此$g(x)$也在$x=0$处右连续，从而在$[0,a]$上连续。

令$x=-t$，则

$$\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{0}f(-t)(-\mathrm{d}t)=\int_{0}^{a}f(-t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{a}f(-x)\mathrm{d}t\text{，}$$

因此

$$3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=3\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+3\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}t=3\int_{0}^{a}\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}t$$

$$=3\int_{0}^{a}g(x)x^2\mathrm{d}t=3g(\alpha)\int_{0}^{a}x^2\mathrm{d}t\quad\text{（第一积分中值定理）}$$

$$=g(\alpha)a^3\text{。}$$

于是只需证明$g(\alpha)=f''(\eta)$即可。这可用方法一的前半部分推导得到（略）。

【例】设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，令$F(x)=\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t$。

（1）求 $F'(x)$；

（2）试证：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x+\xi f(\xi)=0$。（08 秋考题）

解：（1） $F(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$， $F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)$。

（2）由条件知 $F(0)=F(1)=0$，因此由 Rolle 定理，在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $F'(\xi)=0$，即 $\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x+\xi f(\xi)=0$。

6. 函数几何特性：单调性、凹凸性及拐点

【例】当 $x>0$ 时，若 $f'(x)>g'(x)$，则当 $x>0$ 时**【　　】**。（06 秋考题）

（A） $f(x)>g(x)$；　　（B） $f(x)\ge g(x)$；

（C） $f(x)<g(x)$；　　**（D）不能判定两个函数的大小。**

解析：答案是（D）。由条件知 $f(x)-g(x)$ 严格单调增加，但缺乏函数在 $x=0$ 附近的信息，因而无从判别两个函数的大小关系。

【例】设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内**【　　】**。

（A）单调增加；　　（B）单调减少；

（C）是常数；　　（D）依条件不能确定单调性。

解析：答案是（B）。结论明显。

7. 函数的极值、最值

【例】 $f'(x_0)=0$ 是可导函数 $f(x)$ 在 x_0 处有极值的**【　　】**。（06 秋考题）

（A）必要条件；　　（B）充分条件；

（C）充分必要条件；　　（D）既非充分又非必要条件。

解析：答案是（A）。结论明显（注意前提是 $f(x)$ 可导）。

【例】设函数 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=-1$，则**【　　】**。（07 秋考题）

（A） $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点；

（B） $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点；

（C）$(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点；

（D）$x = a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a, f(a))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点。

解析： 答案为(B)，因为当 $x \to a$ 时分母 $x-a \to 0$，因此分子极限为 0，即 $f'(x) \to 0$，而 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续表明 $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x) = 0$；可导性表明函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 附近连续；最后，由极限的局部保号性，存在 $\delta > 0$ 使得

$$f'(x) < 0，\quad a < x < a+\delta；$$

$$f'(x) > 0，\quad a-\delta < x < a。$$

结合这些结论得到正确答案（B）。由此也可见（A），（D）不正确，而题设条件只能得出 $f''(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x) - f'(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{x-a} = -1$，它从另一方面保证答案（B），而得不到二阶导数的其它性质，因此得不到凹凸性的任何结论，因而（C）未必成立。

8. 利用微分方法证明不等式

【例】 证明：当 $\boldsymbol{x > 0}$ 时，$\boldsymbol{(x-4)e^{\frac{x}{2}} < (x-2)e^{x} - 2}$ 成立。

证明： **方法一，利用单调性。**

设 $f(x) = (x-4)e^{\frac{x}{2}} - (x-2)e^{x} - 2, x \ge 0$，则

$$f'(x) = (\frac{x}{2} - 1)e^{\frac{x}{2}} - (x-1)e^{x},$$

$$f''(x) = \frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}} - xe^{x} = x\left(\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}} - e^{x}\right) < 0, x > 0,$$

因此 $f'(x)$ 严格单调减少，从而当 $x > 0$ 时 $f'(x) < f'(0) = 0$，进而 $f(x)$ 严格单调减少，且 $f(x) < f(0) = 0$。不等式得证。

方法二，利用凹凸性。

令 $g(x) = (x-2)e^{x}$，则 $(x-4)e^{\frac{x}{2}} = 2(\frac{x}{2} - 2)e^{\frac{x}{2}} = 2g(\frac{x}{2})$。由于

$$g''(x) = xe^{x} > 0, x > 0,$$

因此 $g(x)$ 是严格下凸函数，从而

$$g(\frac{x}{2})=g(\frac{x+0}{2})<\frac{g(x)+g(0)}{2}，\quad \boldsymbol{x>0}，$$

即 $2g(\frac{x}{2})<g(x)+g(0)$，也即 $\boldsymbol{(x-4)e^{\frac{x}{2}}<(x-2)e^{x}-2}$。

【例】 证明当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$。（06 秋考题）

证明：方法一，利用单调性。

令 $f(x)=\frac{\tan x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}>0$，$0<x<\frac{\pi}{2}$，即 $f(x)$ 单调增加，因此当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x_2)>f(x_1)$，即 $\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$。

方法二，转化法。

令 $t=x_2/x_1>1$，则需证 $\tan(tx_1)>t\tan x_1$，其中 $0<tx_1<\frac{\pi}{2}$。令 $g(x)=\tan(tx)-t\tan x$，则 $g'(x)=t\sec^2(tx)-t\sec^2 x=t(\sec^2(tx)-\sec^2 x)>0$，即 $g(x)$ 单调增加，因而 $g(x_1)>g(0)=0$，得证。

方法三，利用 Cauchy 中值定理。

$$\frac{\tan x_2-\tan x_1}{x_2-x_1}=\sec^2\xi_2,\ \frac{\tan x_1-\tan 0}{x_1-0}=\sec^2\xi_1，\quad 0<\xi_1<\xi_2<\frac{\pi}{2}，$$

因此 $\frac{\tan x_2-\tan x_1}{x_2-x_1}>\frac{\tan x_1}{x_1}$，变形可得 $\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$。

9. 极限理论、连续理论与微分理论方法综述

【例】设 $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上可导，且** $f'_+(a)>0,\ f'_-(b)<0$，**则下列结论不正确的是【　　】**

（**A**）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)>f(a)$；

（**B**）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)>f(b)$；

（**C**）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$；

（**D**）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使 $f'(x_0)=0$。

解析：答案是（**C**）。由导数定义

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,$$

再由极限保号性，当$0<x-a$充分小时$f(x)>f(a)$，因而结论（A）成立。同理结论（B）成立。结论（A）与（B）一起表明$f(x)$在$[a,b]$内的最大值一定在区间内部达到，即存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)$是最大值，由 Fermat 引理，$f'(x_0)=0$，即（D）成立。结论（C）是错误的，举例如下：

$$[a,b]=[0,2],\quad f(x)=x(2-x),\quad f'(x)=2(1-x),$$

满足$f'(0)=2>0, f'(2)=-2<0$。但$\dfrac{f(0)+f(2)}{2}=0$，而函数$f(x)=x(2-x)$在$(0,2)$内没有零点。

【例】设$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点$x=a$处，【　　　】

（A）$f(x)$的导数存在，且$f'(a)\neq 0$；　（B）$f(x)$取得极大值；

（C）$f(x)$取得极小值；　（D）$f(x)$的导数不存在。

解析：答案是（B)。本题考察极限的保号性等。首先，分母极限为 0 表明

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)^2=-1\cdot 0=0,$$

即$f(x)$在点$x=a$处连续，其次由极限的保号性$\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$，即$f(x)<f(a)$，(B）成立。进一步，$f'(a)=0$：

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}\cdot(x-a)=-1\cdot 0=0。$$

因此其余答案都错误。

【例】讨论曲线$y=4\ln x+k$与$y=4x+\ln^4 x$的交点个数，其中$k\le 4$。（08 秋考题）

解：问题等价于讨论函数$f(x)=4\ln x+k-4x-\ln^4 x$在$(0,+\infty)$内零点个数。令$x=e^t$，且记$g(t)=f(e^t)=4t+k-4e^t-t^4$。由于

$$g'(t)=4-4e^t-4t^3=4(1-e^t-t^3),$$

$$g''(t)=4-4e^t-4t^3=-4(e^t+3t^2)<0,$$

因此 $g'(t)$ 严格单调增加。由于 $g'(0)=0$，$g''(0)=4-4e^t-4t^3=-4<0$，因此 $t=0$ 是 $g(t)$ 的最大值点。注意，$g(-\infty)=-\infty$，$g(0)=k-4\le 0$，$g(+\infty)=-\infty$，因此当 $k=4$ 时 $g(t)$ 有唯一零点 $t=0$；当 $k<4$ 时，$\max g(x)=k-4<0$ 表明 $g(t)$ 没有零点。

于是仅当 $k=4$ 时曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 相交，且有唯一交点 $(1,4)$。当 $k<4$ 时曲线 $y=4\ln x+k$ 在 $y=4x+\ln^4 x$ 的下方且没有交点。

【例】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且满足 $f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=0$，证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$。（10 秋考题）

证明：由积分中值定理，存在 $c\in[0,\frac{1}{2}]$，使得 $\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}cf(c)$，于是由题设得 $f(1)=cf(c)$。令 $g(x)=xf(x)$，则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且 $g(1)=f(1)=g(c)$。由 Rolle 定理，存在 $\xi\in(c,1)\subset(0,1)$，使得 $g'(\xi)=\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$。（本题同时考察积分和微分中值定理）

第二部分 积分理论部分

1. 函数与原函数、导函数的关系以及积分方法。

【例】函数 $f(x)$ 在有限区间 I 上连续，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数，则**【　　】。**（06 秋考题）

（A）$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)$；　　（B）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F'(x)$；

（C）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；　　（D）$\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t=F(x)$。

解析：答案是（B）。（A）与（D）应当用 Newton-Leibniz 公式得 $F(x)-F(a)$，因而错误；（C）的右端是 0（常数的导数），因而也不成立。

【例】设函数 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x t\,f(x^2-t^2)dt=$【　　】。

（A）0 ；　　（B）$x\,f(x^2)$ ；　　（C）$-x\,f(x^2)$ ；　　（D）$-2x\,f(x^2)$。

解析：答案是（B）。用第一换元法得

$$\int_0^x t\,f(x^2-t^2)dt=-\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)d(x^2-t^2)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)du=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)du,$$

因而

$$\frac{d}{dx}\int_0^x t\,f(x^2-t^2)dt=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(u)du$$

$$=\frac{1}{2}f(x^2)\cdot(x^2)'=x\,f(x^2)\text{。}$$

【例】若 $\int f(x)dx=2^x+x^2+C$，则 $f(x)=$【　　】。（07 秋考题）

（A）$2^x\ln 2+2x+C$ ；　　（B）$\dfrac{2^x}{\ln 2}+2x+C$；

（C）$2^x\ln 2+2x$；　　（D）$\dfrac{2^x}{\ln 2}+2x$。

解析：答案是（C）。$f(x)=(2^x+x^2+C)'=2^x\ln 2+2x$。

【例】求 $\int\dfrac{1+\cos x}{x+\sin x}dx$。（07 秋考题）

解：$\int\dfrac{1+\cos x}{x+\sin x}dx=\int\dfrac{(x+\sin x)'}{x+\sin x}dx=\int\dfrac{d(x+\sin x)}{x+\sin x}=\ln|x+\sin x|+C$。

【例】设 $\int f(x)dx=e^{-x^2}+C$，则 $f'(x)=$______________。

解析：答案是 $(4x^2-2)e^{-x^2}$，因为

$$f(x)=(e^{-x^2}+C)'=-2xe^{-x^2},$$

$$f'(x)=(-2xe^{-x^2})'=(4x^2-2)e^{-x^2}\text{。}$$

【例】已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\dfrac{\cos x}{x}$，求 $\int x\,f'(x)dx$。

解：$\int x f'(x)\mathrm{d}x = x f(x) - \int f(x)\mathrm{d}x$

$$= x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cos x}{x}\right) - \frac{\cos x}{x} + C$$

$$= \frac{-x\sin x - \cos x}{x} - \frac{\cos x}{x} + C$$

$$= -\frac{x\sin x + 2\cos x}{x} + C\text{。}$$

另一个方法为：由 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\cos x}{x}$ 知

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cos x}{x}\right) = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2},$$

于是

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}\right) = \frac{-x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x)}{x^3}$$

$$= \frac{-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x}{x^3},$$

因此

$$\int x f'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= -\int \cos x\mathrm{d}x + \int \frac{2\sin x}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{2\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= -\sin x + \int \frac{2\sin x}{x}\mathrm{d}x - \frac{2\cos x}{x} - \int \frac{2\sin x}{x}\mathrm{d}x \text{（分部积分）}$$

$$= -\sin x - \frac{2\cos x}{x} + C\text{。}$$

【例】已知 $\frac{\cos x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x)\cdot\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x =$ ________。（10 秋考题）

解析：答案是 $\frac{\cos^2 x}{2x^2} + C$，解答如下

$$\int f(x)\cdot\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}\left(\frac{\cos x}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{x}\right)^2 + C\text{。}$$

2. 积分估值

【例】证明 $\frac{1}{2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$。（06 秋考题）

证明：记 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，则

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{x-\tan x}{x^2}\cos x<0,\quad 0<x<\frac{\pi}{2},$$

因此 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 内单调减少，从而 $f(\dfrac{\pi}{2})\le f(x)\le f(\dfrac{\pi}{4})$，即

$$\frac{1}{\pi/2}=\frac{2}{\pi}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi},$$

因而

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

3. Newton-Leibniz 公式与变上、下限函数的导数

【例】 设 $f(x)$ 连续，$x>0$ 时，$\int_0^{x^2}f(t)dt=x^2(1+x)$，则 $f(2)=$【　　】

(A) 4;　　　　**(B)** $2\sqrt{2}+12$;

(C) $1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$;　　　　**(D)** $12-2\sqrt{2}$。

解析：答案是（C），在 $\int_0^{x^2}f(t)dt=x^2(1+x)$ 两边求导得

$$2xf(x^2)=2x+3x^2\Rightarrow f(x)=1+\frac{3x}{2},$$

取 $x=\sqrt{2}$ 得答案。

【例】 设 $\phi(x)=\int_0^x\sin(x-t)^2\mathrm{d}t$，求 $\phi'(x)$。（06 考题）

解：$\phi(x)=\int_0^x\sin(x-t)^2\mathrm{d}t\overset{x-t=u}{=}\int_x^0\sin u^2(-\mathrm{d}u)=\int_0^x\sin u^2\mathrm{d}u$，

因此 $\phi'(x)=\sin x^2$。

【例】 已知 $F(x)=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，求 $F(x)$ 的二阶导数 $F''(x)$。（10 秋考题）

解：$F(x)=x\int_0^xf(t)\mathrm{d}t-\int_0^xtf(t)\mathrm{d}t$，于是

$$F'(x)=\int_0^xf(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)=\int_0^xf(t)\mathrm{d}t,$$

$F''(x) = f(x)$。

4. 不定积分、定积分、反常积分的计算

【例】 设 $f(x)=\int_{\pi}^{x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ ， 求 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$。**（07 秋考题）**

解： 利用分部积分法得

$$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x f'(x)\mathrm{d}x$$

$$= \pi f(\pi) - \int_0^{\pi} x\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x = [\cos x]_0^{\pi} = -2\text{。}$$

【例】 $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x =$__________。**（07 秋考题）**

解析： 答案是 $\frac{\pi}{4}$。因为 $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1\sqrt{1-(1-x)^2}\mathrm{d}x$，它表示单位圆面积的四分之一。本题考察定积分的几何意义---面积。

【例】 $\int\frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x =$______________。**（06 秋考题）**

解析： 答案是 $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C$。方法如下：

$$\int\frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x = \int\left[\frac{1}{x}-\frac{x}{(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x = \ln x - \frac{1}{2}\int\frac{1}{(x^2+1)}\mathrm{d}(x^2)$$

$$= \ln x - \frac{1}{2}\int\frac{1}{(x^2+1)}\mathrm{d}(x^2+1)$$

$$= \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C\text{，}$$

或者

$$\int\frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x = \int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2)}{x^2(x^2+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2)}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right]\mathrm{d}(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\ln x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C\text{。}$$

【例】计算$\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$。

解：$\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx=-\frac{1}{2}\int\arctan e^x d(e^{-2x}+1)$

$$=-\frac{(e^{-2x}+1)}{2}\arctan e^x+\int\frac{(e^{-2x}+1)}{2}\frac{e^x}{1+(e^x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{(e^{-2x}+1)}{2}\arctan e^x+\int\frac{e^{-x}}{2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{(e^{-2x}+1)}{2}\arctan e^x-\frac{1}{2}e^{-x}+C\text{。}$$

【例】反常积分$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x=$【　　】。（07 秋考题）

（A）-1 ；　　（B）0 ；　　（C）1 ；　　（D）发散。

解析：答案是（C）。因为（用第一换元法）

$$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x=\int_e^{+\infty}\frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}(\ln x)=\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_e^{+\infty}=1\text{。}$$

【例】设$f(x)$是$[-a,a]$上的连续函数，则$\int_{-a}^{a}[f(x)-f(-x)]\cos x\mathrm{d}x=$【　　】。

（A）1 ；　　（B）0 ；　　（C）-1 ；　　（D）无法计算。

解析：答案是（B）。因为$f(x)-f(-x)$是奇函数，$\cos x$是偶函数。

【例】下列选项正确的是【　　】。

（A）$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=2$；　　（B）$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-2$；

（C）$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$不存在；　　（D）$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=0$。

解析：答案是（C）。$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$中两个反常积分都发散。

【例】$\int_{-1}^{1}(\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1-x^2})dx=$__________。

解析：答案是$\frac{\pi}{2}$。因为$\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$是奇函数，其积分为0，$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$表示上半单位

圆的面积，其值为$\dfrac{\pi}{2}$。

【例】设 $f(x)$ 连续， $x>0$ 时， $\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2(1+x)$，则 $f(2)=$【　　　】

（A）4 ；　　　　　　　　（B）$2\sqrt{2}+12$ ；

（C）$1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$；　　　　　　（D）$12-2\sqrt{2}$ 。

解析：答案是（C），在 $\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2(1+x)$ 两边求导得 $2xf(x^2)=2x+3x^2$，从而 $f(x^2)=1+\dfrac{3}{2}x$，取 $x=\sqrt{2}$ 得答案（C）。

【例】已知 $f(0)=m, f(\pi)=n,$ 且 $f''(x)$ 连续，求 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x$。

解：利用分部积分法有

$$\int_0^{\pi} f''(x)\sin x\mathrm{d}x = f'(x)\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\cos x\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi} f'(x)\cos x\mathrm{d}x$$

$$= -f(x)\cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x$$

$$= f(0)+f(\pi) - \int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x,$$

因此

$$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x = f(0)+f(\pi) = m+n。$$

【例】计算反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}}\mathbf{d}\boldsymbol{x}$。

解：
$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x = 2\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}\sqrt{x-1} = 2\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+(\sqrt{x-1})^2}\mathrm{d}\sqrt{x-1}$$

$$=\left[2\arctan\sqrt{x-1}\right]_1^{+\infty} = \pi。$$

注意，也可直接用换元公式 $x-1=t^2$，这样书写起来更简洁。

【例】计算 $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$。（06 秋考题）

解：利用轴对称性得

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2 x}\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\text{。}$$

【例】 设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上可积。

（1）证明： $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$；

（2）计算： $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$。（08 秋考题）

解：（1）令 $x=-t$，则

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(-t)(-\mathrm{d}t)=\int_0^a f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(-x)\mathrm{d}x,$$

因此

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x\text{。}$$

（2）由（1）可见

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\cos x}{1+e^{-x}}+\frac{\cos x}{1+e^{x}}\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{。}$$

5. 积分不等式

【例】 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调减少。证明：当 $0<\lambda<1$ 时，

$$\int_0^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x\ge\lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\text{。}$$（07 秋考题）

证明：方法一，变换法。

令 $x=\lambda t$，则

$$\int_0^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x=\lambda\int_0^1 f(\lambda t)\mathrm{d}t=\lambda\int_0^1 f(\lambda x)\mathrm{d}x\ge\lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

注意 $\lambda x\le x$，因而 $f(\lambda x)\ge f(x)$。

方法二，利用区间分割与积分中值定理。

因为

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\lambda}^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

因此

$$\int_0^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x-\lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=(1-\lambda)\int_0^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x-\lambda\int_{\lambda}^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$=(1-\lambda)f(\xi)\cdot\lambda-\lambda f(\eta)\cdot(1-\lambda)$$ （积分中值定理）

$$=\lambda(1-\lambda)[f(\xi)-f(\eta)]\ge 0,$$

其中$0\le\xi\le\lambda\le\eta\le 1$，于是$\int_0^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x\ge\lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$。证毕。

【例】设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续且单调增加，证明：$\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。（08 秋考题）

证明：方法一. 用变量变换. 因为

$$\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x.$$

对上式第一个积分采用替换$x-\frac{a+b}{2}=-t$，对第二个积分采用替换$x-\frac{a+b}{2}=t$，则

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{b-a}{2}}^0(-t)f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)(-\mathrm{d}t)$$

$$=-\int_0^{\frac{b-a}{2}}t f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\mathrm{d}t,$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{b-a}{2}}t f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\mathrm{d}t,$$

因此

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{b-a}{2}}t\left[f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)-f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right]\mathrm{d}t\ge 0,$$

其中最后一个不等式成立是因为当$0\le t\le\frac{b-a}{2}$时$f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)-f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\ge 0$（由 $f(x)$ 的单调性）.

方法二. 设$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，从而

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xF'(x)\mathrm{d}x=xF(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$$

$$=bF(b)-\int_a^b F(x)\mathrm{d}x,$$

但是

$$\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}F(b),$$

因此要证明的不等式成为

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x\le\frac{b-a}{2}F(b).$$

由于 $F'(x)=f(x)$ 单调增加，因此 $F(x)$ 是下凸函数, 从而

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\left[F(a)+F(b)\right](b-a)=\frac{b-a}{2}F(b).$$

不等式成立.

方法三. 记 $g(x)=\int_a^x t f(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\begin{aligned} g'(x)&=x f(x)-\frac{a+x}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\\ &=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{2}\left[f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]\\ &=\frac{1}{2}\int_a^x\left[f(x)-f(t)\right]\mathrm{d}t\ge 0,\end{aligned}$$

最后的不等式成立是因为当 $a\le t\le x$ 时 $f(t)\le f(x)$。

于是 $g(x)$ 是单调增加的，因而成立 $g(b)\ge g(a)=0$，即

$$\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x。$$

方法四. 因为 $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=0$，原不等式等价于证明

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x\ge 0。\qquad (*)$$

有 f 单调增加易得不等式

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\ge 0,\quad x\in[a,b],$$

因而（*）成立。得证。

【例】设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，又 $f(a)=f(b)=0$，证明：$\left|f(x)\right|\le\frac{1}{2}\int_a^b\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x$。

（09 秋考题）

证明：由 Newton-Leibniz 公式有

$$f(x)-f(a)=f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

$$f(x)-f(b)=f(x)=\int_b^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

因此

$$2|f(x)|=\left|\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right|+\left|\int_b^x f'(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\le\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t+\int_x^b|f'(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b|f'(t)|\mathrm{d}t,$$

从而

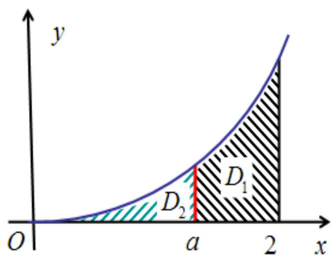
$$|f(x)|\le\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x。$$

6. 定积分的应用

【例】设 D_1 是抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a, x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区；D_2 是抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$，$y=0$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$.

（1）设 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为 V_1；D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积为 V_2，求 V_1 和 V_2；

（2）当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值，并求出最大值。



解：（1）$V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{5}x^5\Big|_a^2=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)$；

$V_2=2\pi\int_0^a x(2x^2)\mathrm{d}x=\pi x^4\Big|_0^a=\pi a^4$（**柱壳法**）。

（2）令 $V_1+V_2=V(a)=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4$，则

$$V'(a)=-4\pi a^4+4\pi a^3,\quad V''(a)=-16\pi a^3+12\pi a^2$$

令 $V'(a)=0$ 得唯一驻点 $a=1$，满足 $V''(1)=-4\pi<0$，因此 $a=1$ 时 V_1+V_2 取得最大值 $V(1)=\frac{4\pi}{5}(32-1)+\pi=\frac{129}{5}\pi$。

【例】求圆盘 $(x-2)^2+y^2\le1$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积。（06 秋考题）

解：题目中的旋转体可视为由 $x=2+\sqrt{1-y^2}$ 与直线 $x=0, y=\pm1$ 围成图形绕 y 轴旋转而成的旋转体割去由 $x=2-\sqrt{1-y^2}$ 与直线 $x=0, y=\pm1$ 围成图形绕 y 轴旋转而成的旋

转体，因此其体积为

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2\mathrm{d}y-\pi\int_{-1}^{1}\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)^2\mathrm{d}y=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y=4\pi^2。$$

注：本题可用柱壳法求解：（利用对称性）

$$V=4\pi\int_{1}^{3}x|y(x)|\mathrm{d}x=4\pi\int_{1}^{3}x\sqrt{1-(x-2)^2}\mathrm{d}x\text{（令 }x-2=t\text{）}$$

$$=4\pi\int_{-1}^{1}(t+2)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=4\pi^2$$

这里利用奇偶性和积分的几何意义。

【例】过抛物线 $y=x^2$ 上一点 $P(a,a^2)$ 作切线，问 a 为何值时，所作切线和抛物线 $y=-x^2+4x-1$ 所围图形的面积最小。（07 秋考题）

解：首先，切线斜率为 $k=y'|_{x=a}=2a$，切线方程为

$$y=2ax-a^2,$$

它与抛物线 $y=-x^2+4x-1$ 的交点满足 $-x^2+4x-1=2ax-a^2$，即

$$x^2+(2a-4)x-a^2+1=0,$$

设此方程的两个根为 x_1,x_2，满足 $x_1<x_2$，则切线和抛物线 $y=-x^2+4x-1$ 所围图形的面积为

$$S(a)=\int_{x_1}^{x_2}\left[(-x^2+4x-1)-(2ax-a^2)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left[x^2+(2a-4)x-a^2+1\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}[-(x-x_1)(x-x_2)]\mathrm{d}x\quad\text{（令 }x-\frac{x_1+x_2}{2}=t,\sigma=\frac{x_2-x_1}{2}\text{）}$$

$$=\int_{-\sigma}^{\sigma}\left[\sigma^2-t^2\right]\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\sigma^3。$$

利用韦达定理，

$$x_1+x_2=4-2a,x_1x_2=1-a^2,$$

$$\sigma=\frac{x_2-x_1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2a^2-4a+3},$$

从而

$$S(a)=\frac{4}{3}\sigma^3=\frac{4}{3}(2a^2-4a+3)^{\frac{3}{2}}。$$

令 $S'(a)=8(a-1)\sqrt{2a^2-4a+3}=0$ 得 $S(a)$ 的极小点 $a=1$（从而得最小值 $\frac{4}{3}$）。因此当

$a=1$，面积最小。（可直接利用 $S(a)=\frac{4}{3}\left[2(a-1)^2+1\right]^{\frac{3}{2}}$ 知 $a=1$ 面积最小）

【例】 求曲线 $y=\ln x$ 在 $(2,6)$ 内的一条切线，使得该切线与直线 $x=2, x=6$ 和 $y=\ln x$ 所围图形的面积最小。（08 秋考题）

解：设切点为 $(t,\ln t)$，$2<t<6$，切线斜率为

$$k=(\ln x)'\big|_{x=t}=\frac{1}{t},$$

切线方程为 $y=\frac{1}{t}(x-t)+\ln t=\frac{x}{t}+\ln t-1$。平面图形面积为

$$S(t)=\int_2^6\left(\frac{x}{t}+\ln t-1-\ln x\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2t}+x\ln t-x-x\ln x+x\right]_2^6$$

$$=\frac{16}{t}+4(\ln t-1)-6\ln 6+2\ln 2+4,$$

$S'(t)=-\frac{16}{t^2}+\frac{4}{t}=0\Rightarrow t=4$，$S''(4)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}>0$，因此当 $t=4$ 时面积最小，此时切线方程为 $y=\frac{x}{4}+\ln 4-1$。

【例】 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点 $(0,0)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$y\geq 0$。试确定 a、b、c 的值，使得抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1$，$y=0$ 所围图形的面积为 $\frac{4}{9}$，且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小。（09 秋考题）

解：抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点 $(0,0)$ 表明 $c=0$，而面积为

$$A=\int_0^1(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{4}{9}\Rightarrow b=\frac{8}{9}-\frac{2}{3}a。$$

于是抛物线方程为 $y=ax^2+\left(\frac{8}{9}-\frac{2}{3}a\right)x$。该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V(a)=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3}\right)$$

$$=\pi\left[\frac{a^2}{5}+\frac{a}{2}\left(\frac{8}{9}-\frac{2}{3}a\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{8}{9}-\frac{2}{3}a\right)^2\right]$$

$$=\frac{2}{1215}\pi\left[(3a+5)^2+135\right],$$

因此 $a=-\frac{5}{3},b=2,c=0$ 时体积最小，其值为 $\frac{2\pi}{9}$。

【例】 求曲线 $y=x^2-2x$ 与 $y=0$， $x=1$， $x=3$ 所围成的平面图形的面积 S，并求该图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。（10 秋考题）

解： $S=\int_1^2(2x-x^2)\mathrm{d}x+\int_2^3(x^2-2x)\mathrm{d}x$

第三部分 微分方程

一、基本概念

要求：了解微分方程的阶、解、特解和通解等概念。

二、方程求解

1．一阶微分方程的解法：以下 3 类方程的解法必须熟练掌握。

（1）变量分离的微分方程

（2）齐次方程

（3）一阶线性微分方程（包括 Bernoulli 方程）

2．可降阶的高阶微分方程

（1） $y^{(n)}=f(x)$，直接积分 n 次即可；

（2） $y''=f(x,y')$，作变换 $y'=p$ 转化为一阶微分方程 $p'=f(x,p)$；

（3） $y''=f(y,y')$，作变换 $y'=p$，此时

$$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

原方程转化为一阶微分方程 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$。

注意，通常把形如 $y''=f(y')$ 这样的方程归结到（2）类中。

3．高阶线性微分方程解的结构

（1）对应齐次方程解的结构：解的常系数组合仍然是解；通解由 n 个相互无关的解组合得到；

（2）非齐次方程的解的结构：两个特解之间相差齐次方程的一个解；通解由一个特解加对应齐次方程的通解。

例 设 y_1,y_2,y_3 为 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解，且 $y_1+y_2=2x^2e^{-x^2}$， $y_3=x^2\mathrm{e}^{-x^2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$，则它的通解为 $\underline{y=x^2\mathrm{e}^{-x^2}+C\mathrm{e}^{-x^2}}$。 （14-15 春考题）

分析：y_1-y_3, y_2-y_3 都是对应齐次方程的解，因此

$$(y_1-y_3)+(y_2-y_3)=y_1+y_2-2y_3=-\mathrm{e}^{-x^2}$$

是齐次方程的解，从而齐次方程的通解为 $Y(x)=C_1\mathrm{e}^{-x^2}$。非齐次方程的通解可表示为

$$y=Y(x)+y_3=x^2\mathrm{e}^{-x^2}+\left(C_1+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}$$

$$=x^2\mathrm{e}^{-x^2}+C\mathrm{e}^{-x^2},$$

其中 $C=C_1+\dfrac{1}{2}$。

例 设 $\cos^2 x$ 和 $\sin^2 x$ 都是某二阶齐次线性微分方程的解，则下列选项中，不能表示该微分方程的通解的是【 C 】。（14-15 春考题）

（A） $C_1\cos^2 x+C_2\sin^2 x$；　　（B） $C_1+C_2\cos 2x$；

（C） $C_1\sin^2 2x+C_2\tan^2 x$；　　（D） $C_1+C_2\cos^2 x$。

分析：由齐次线性方程解的结构定理，$\cos^2 x+\sin^2 x=1$ 和 $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$ 都是解，从而（A），（C），（D）都是原方程的通解。排除法表明正确答案是（C）。

4．常系数高阶线性微分方程的解法

（1）对齐次方程

$$L(D)y=\left(\sum_{k=0}^{n}a_kD^{n-k}\right)y=\sum_{k=0}^{n}a_ky^{(n-k)}=0,$$

其特征方程为 $L(\lambda)=0$，它的 n 个根（计重数）每个根对应方程的一个解，这些解的线性无关组合构成通解。单实根 λ 对应一个解 $\mathrm{e}^{\lambda x}$； k 重实根对应 k 个解 $\mathrm{e}^{\lambda x}, x\mathrm{e}^{\lambda x},\cdots,x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$；一对复单根 $\alpha\pm\beta i$ 对应两个解 $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$；一对 k 重复单根 $\alpha\pm\beta i$ 对应 $2k$ 个解 $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, x\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\cdots,x^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$， $\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x, x\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,\cdots,x^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$。

（2）对非齐次方程

$$L(D)y=\left(\sum_{k=0}^{n}a_kD^{n-k}\right)y=\sum_{k=0}^{n}a_ky^{(n-k)}=f(x)\mathrm{e}^{\lambda_0 x},$$

方程通解由对应齐次方程的通解 $Y(x)$ 加上非齐次方程的一个特解 $y^*(x)$ 构成。记 $y^*(x)$

$=u(x)e^{\lambda_0 x}$，则 $u(x)$ 是方程

$$L(D+\lambda_0)u=f(x)$$

的解。分以下两种情形：

（i） $f(x)$ 是多项式。

若 λ_0 不是特征方程 $L(\lambda)=0$ 的根，则 $u(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的次数，可以通过待定系数法求解，或用算子解法

$$u(x)=\frac{1}{L(D+\lambda_0)}f(x)=\left(b_0+b_1D+\cdots+b_mD^m\right)f(x),$$

其中需要用 Taylor 公式，m 是 $f(x)$ 的次数；

若 λ_0 是特征方程 $L(\lambda)=0$ 的 k 重根，则 $u(x)=x^k v(x)$，其中 $v(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的次数，可以通过待定系数法求解。

（ii） $f(x)=P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x$。

若 $\lambda_0\pm\beta i$ 不是特征方程 $L(\lambda)=0$ 的复根，则 $u(x)=P_1(x)\cos\beta x+Q_1(x)\sin\beta x$，其中 P_1,Q_1 的次数与 P,Q 次数的最大值相同，可以通过待定系数法求解；

若 $\lambda_0\pm\beta i$ 是特征方程 $L(\lambda)=0$ 的 k 重复根，则

$$u(x)=x^k\left[P_1(x)\cos\beta x+Q_1(x)\sin\beta x\right],$$

其中 P_1,Q_1 的次数与 P,Q 次数的最大值相同，可以通过待定系数法求解。

例 **（13-14 春考题）**

（1）求二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+4y'+4y=e^{ax}$ 的通解；

（2）设曲线 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是可导函数，且 $f(x)>0$。已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0,x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍。求该曲线方程。

解 （1）对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+4\lambda+4=0,$$

其解为 $\lambda_{1,2}=-2$。因此齐次方程的通解为 $Y=e^{-2x}(C_1+C_2x)$。设 $y=y^*(x)$ 是非齐次方程

的一个特解。

若 $a=-2$，它是特征值，因而可设 $y^*(x)=bx^2\mathrm{e}^{-2x}$，代入原方程得到

$$\mathrm{e}^{2x}=(bx^2\mathrm{e}^{-2x})''+4(bx^2\mathrm{e}^{-2x})'+4bx^2\mathrm{e}^{-2x}=2b\mathrm{e}^{-2x},$$

因此 $b=\dfrac{1}{2}$，即 $y^*(x)=\dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x}$，于是原方程的通解为

$$y=Y+y^*=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{-2x}。$$

若 $a\neq-2$，此时可设 $y^*(x)=b\mathrm{e}^{ax}$，代入原方程得到

$$\mathrm{e}^{ax}=(b\mathrm{e}^{ax})''+4(b\mathrm{e}^{ax})'+4b\mathrm{e}^{ax}=b\left(a^2+4a+4\right)\mathrm{e}^{ax},$$

因此 $b=\dfrac{1}{(a+2)^2}$，即 $y^*(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{(a+2)^2}$。于是原方程的通解为

$$y=Y+y^*=\left(C_1+C_2x\right)\mathrm{e}^{-2x}+\frac{\mathrm{e}^{ax}}{(a+2)^2}。$$

注：用算子解法相对简单。记 $L(D)=(D+2)^2$。设特解为 $y^*(x)=u(x)\mathrm{e}^{ax}$，则有

$$L(D+a)u=\left[D^2+(2a+4)D+(a+2)^2\right]u=1,$$

当 $a\neq-2$ 时 u 可取为常数 $\dfrac{1}{(a+2)^2}$；当 $a=-2$ 时 u 可取为 kx^2 代入上述方程可求出 $k=\dfrac{1}{2}$。

（2）曲边梯形的面积为

$$S(t)=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x,$$

旋转体体积为

$$V(t)=\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x,$$

由题意得 $V(t)=\pi t\cdot S(t)$，即

$$\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=t\int_1^t f(x)\mathrm{d}x,\quad t>1。$$

由于 $f(x)$ 是可导函数，对上式两边关于 t 求导得

$$f^2(t)=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x+tf(t),$$

令 $t=1$ 得 $f^2(1)=f(1)\Rightarrow f(1)=1$（注意 $f(t)>0$）。再对上式两边关于 t 求导得

$$2f(t)f'(t)=2f(t)+tf'(t),\qquad f(1)=1。$$

微分方程$2f(t)f'(t)=2f(t)+tf'(t)$可变形为$[2f-t]\mathrm{d}f=2f\,\mathrm{d}t$，或（线性方程）

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}f}+\frac{t}{2f}=1\Rightarrow t=\frac{C}{\sqrt{f}}+\frac{2}{3}f,$$

由初值条件$f(1)=1$知$1=C+\frac{2}{3}\Rightarrow C=\frac{1}{3}$，于是

$$t=\frac{1}{3\sqrt{f(t)}}+\frac{2}{3}f(t)。$$

因此所求曲线具有参数化（由$x=t, y=f(t)$）

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{3u}+\dfrac{2}{3}u^2, \\ y=u^2, \end{cases} \quad u>1。$$

例 函数$f(x)$二阶可导，且满足

$$f(x)=e^x+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

求$f(x)$。（14-15 春考题）

解 在等式两边求导得

$$f'(x)=e^x+xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)=e^x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t。$$

再求导得

$$f''(x)=e^x-f(x)。$$

注意，由前面f, f'的表达式容易得出：

$$f(0)=1, f'(0)=1。$$

因此$y=f(x)$是二阶微分方程初值问题

$$y''+y=e^x, \qquad y(0)=1, y'(0)=1$$

的解。

该方程的特征方程为$\lambda^2+1=0\Rightarrow\lambda=\pm i$，因而对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x。$$

设特解为$y^*=ae^x$，带入方程得$a=\frac{1}{2}$。于是方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}e^x 。$$

由初始条件 $y(0)=1, y'(0)=1$ 得 $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$，即

$$f(x) = \frac{\cos x + \sin x + e^x}{2} 。$$

注：对积分方程，通常的解法是：对积分方程求导（可能需要多次）化为微分方程，在原积分方程中代入特殊点 x 的值得等初始条件，最终把积分方程求解问题转化为一个微分方程初值问题。

【例】 设可导函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\varphi(x)\cos x + 2\int_0^x \varphi(t)\sin t\mathrm{d}t = x+1，$$

求 $\varphi(x)$。（09-10 春考题）

解 在方程中令 $x=0$ 得 $\varphi(0)=1$。对方程求导得

$$\varphi'(x)\cos x + \varphi(x)\sin x = 1 。$$

这是线性方程，解这个初值问题得

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\int_0^x \tan x\mathrm{d}x}\left[1+\int_0^x \frac{1}{\cos x}\cdot \mathrm{e}^{\int_0^x \tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= \cos x\left[1+\int_0^x \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\right] = \cos x + \sin x 。$$