第十章自测题参考答案

一、 填空题

1. 设区域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le R^2\right\}$，则二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{\dfrac{2}{3}\pi R^3}$.

2. 设 $f(x,y)$为连续函数，则二次积分 $\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y$ 交换积分次序后为

$\underline{\int_0^a \mathrm{d}y\int_y^a f(x,y)\mathrm{d}x}$.

3. 设 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 为二元连续函数，交换积分次序 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x=\underline{\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x,y)\mathrm{d}y}$.

4. 交换二次积分的积分次序 $\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x=\underline{\int_0^4 \mathrm{d}x\int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y}$.

5. 交换积分次序 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x=\underline{\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f\left(x,y\right)\mathrm{d}y+\int_1^3 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f\left(x,y\right)\mathrm{d}y}$.

6. 设区域 $D=\left\{\left(x,y\right)\middle|0\le x\le 1,\ x\le y\le 1\right\}$**，则二重积分** $\iint\limits_D x^2e^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{\dfrac{1}{6}}$.

7. 积分 $\int_0^2 \mathbf{d}x\int_x^2 e^{-y^2}\mathbf{d}y$ 的值等于 $\underline{\dfrac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right)}$.

8. $I=\int_1^5 \mathrm{d}y\int_y^5 \dfrac{1}{y\ln x}\mathrm{d}x=\underline{\quad 4\quad}$.

9. 设 $\boldsymbol{a>0}$，$\boldsymbol{f(x)=g(x)}=\begin{cases}\boldsymbol{a},\text{若}\boldsymbol{0\le x\le 1},\\ \boldsymbol{0},\quad\text{其他}\end{cases}$，而 $\boldsymbol{D}=\left\{\boldsymbol{(x,y)}\middle|\boldsymbol{x^2+y^2\le 16}\right\}$，则

$\boldsymbol{I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\underline{a^2}$.

二、计算二重积分 $\iint\limits_D \boldsymbol{(y^2+3x+9)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$，其中 $\mathbf{D}=\left\{\boldsymbol{(x,y)}\middle|\boldsymbol{x^2+y^2\le 1}\right\}$.

解
$$\iint\limits_D (y^2+3x+9)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D 3x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D 9\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0+9\pi$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta \mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho+9\pi$$
$$=\frac{37}{4}\pi \quad .$$

三、计算积分：$\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$.

解：交换积分次序，化为先对 x 后对 y 的积分：

$$\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\frac{2y}{\pi}(-\cos\frac{\pi x}{2y})\Big|_y^{y^2}\mathrm{d}y$$
$$=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}y$$
$$=-\frac{4}{\pi^2}\int_1^2 y\,\mathrm{d}\sin\frac{\pi y}{2}=\frac{4}{\pi^3}(\pi+2)$$

四、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty\,,+\infty)$ 内具有连续导数，且满足

$$f(t)=2\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}(x^2+y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+t^4,\quad 求\ f(x).$$

解　因 $f(0)=0$，且 f 是偶函数，故只需讨论 $t>0$ 的情况.

当 $t>0$ 时，$f(t)=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t r^3 f(r)\mathrm{d}r+t^4=4\pi\int_0^t r^3 f(r)\mathrm{d}r+t^4$

等式两边求导　　$f'(t)=4\pi\,t^3 f(t)+4t^3$,

解此一阶线性微分方程，且 $f(0)=0$，得

$$f(t)=\frac{1}{\pi}(e^{\pi t^4}-1),\quad t\ge 0.$$

而 $f(t)$ 是偶函数，所以在 $(-\infty,+\infty)$ 内，有 $f(t)=\frac{1}{\pi}(e^{\pi t^4}-1)$.

五、Ω 是由 $x^2+y^2+z^2\le R^2$; $z\ge 0$ 所确定的上半球体，试将 $\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$ 分别化成直角坐标，柱面坐标及球面坐标下的三次积分式.

解 $\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}$

$$=\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{R}\mathrm{d}r\int_{0}^{\sqrt{R^2-r^2}} f(r^2+z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{R} f(r^2)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

六、证明 $\iiint\limits_{\Omega} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^{1} f(u)\left(1-u^2\right)\mathrm{d}u$，其中 $f(x)$ 为连续函数，Ω 为

$x^2+y^2+z^2\le 1.$

证 在 Ω 中有 $-1\le z\le 1$，用截面法

$$\iiint\limits_{\Omega} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1} f(z)\pi\left(1-z^2\right)\mathrm{d}z$$

$$=\pi\int_{-1}^{1} f(u)\left(1-u^2\right)\mathrm{d}u$$