# 中国农业大学

# 2015 ~2016 学年秋季学期（2016.01 ）

# 高等数学 A（上） 课程试题(A 卷)

**一、填空题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分），请将合适的答案填在横线上.**

1. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\dfrac{9}{2^n} =$ ______________.

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第 __________ 类间断点.

3. 已知向量$\vec{a}, \vec{b}$，且$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=26$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$，则点积$\vec{a}\bullet\vec{b}=$__________.

4. 设函数 $f(x)=(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)$,（$n$为正整数），则 $f^{(n)}(x)=$ __________.

5. 反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}=$__________.

**二、单项选择题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分，请将所选答案填在括号内）.**

1. 设函数 $f(x)$ 可微，则 $d f(e^x)=$【　　　】.

（A） $f'(x)e^x\,dx$；　　（B） $f'(e^x)\,dx$；

（C） $f'(e^x)e^x\,dx$；　　（D） $f'(e^x)e^x$.

2. 若 $x\to 0$时，$\sqrt{1-ax^2}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$【　　】.

(A) $-1$ ；　(B) 1；　(C) 2 ；　(D) $-2$.

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=$【　　　】

（A） $\dfrac{1}{2}\arcsin\sqrt{x}+C$ （C为任意常数）；　（B） $\arcsin\sqrt{x}+C$ （C为任意常数）；

（C） $2\arcsin(2x-1)+C$ (C 为任意常数)；　（D） $\arcsin(2x-1)+C$ (C 为任意常数).

4. 若 $f(x)=f(-x)$，$(-\infty<x<+\infty)$. 在$(-\infty, 0)$内 $f'(x)>0$， $f''(x)<0$，

则在$(0,+\infty)$内有【　　】.

(A) $f'(x)>0$，$f''(x)<0$；　(B) $f'(x)>0$，$f''(x)>0$；

(C) $f'(x)<0$，$f''(x)<0$；　(D) $f'(x)<0$，$f''(x)>0$.

5. 设$a=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x$，$b=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$，则【　　】.

(A) $a<b$；　(B) $a>b$；

(C) $a=b$；　(D) 以上结论都不对.

**三、求解下列各题（本题共有4道小题，每小题6分，满分24分）.**

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$ .

2. 计算曲线$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$上相应于$3\le x\le 8$的一段弧的长度.

3. 设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\int_0^t e^{-u^2}\sin u\,\mathrm{d}u.\end{cases}$所确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

4. 计算定积分$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

**四、（本题满分10分）**求经过点$A(-1,2,3)$，垂直于直线$L$: $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$且与平面$\Pi: 7x+8y+9z+10=0$平行的直线方程.

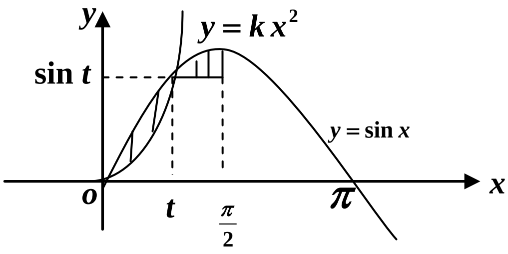
**五、（本题满分10分）**证明函数$f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$在$[1,+\infty)$上单调增加.

**六、（本题满分10分）**设常数$k>0$，曲线$y=kx^2$与$y=\sin x$ $(0\le x\le\frac{\pi}{2})$在$x=t$ $(0<t<\frac{\pi}{2})$处相交(如图所示).

（1）记$S_1(t)$为$y=kx^2$与$y=\sin x$围成的图形的面积，求$S_1(t)$；

（2）记$S_2(t)$为曲线$y=\sin x$与两直线$y=\sin t$和$x=\frac{\pi}{2}$围成的图形的面积，求$S_2(t)$；

（3）试证：$S(t)=S_1(t)+S_2(t)$在$(0,\ \frac{\pi}{2})$内必有惟一极小值.




七、（本题满分 10 分）设连续函数 $f(x)$ 满足等式$\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t=x^2-e^{-x}$，求 $f(x)$.

八、（本题满分 6 分）假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间$[a,b]$上存在二阶导数，

$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，在开区间$(a,b)$内 $g(x)\neq 0$，$g''(x)\neq 0$.

试证：在开区间$(a,b)$内至少存在一点$\xi$，使得$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$成立.