第十一章自测题参考答案

一、 填空题

1. 设 C 是从 A(1，1)到 B(2，3)的一个直线段，则 $\int_C (x+3y)\mathrm{d}x+(y+3x)\mathrm{d}x$ = $\underline{\frac{41}{2}}$.

2. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=9$，取逆时针方向，则曲线积分

$$\oint_L (2xy-3y)\mathrm{d}x+(x^2-2x)\mathrm{d}y = \underline{\quad 9\pi \quad}.$$

3．设 L 为圆周 $x^2+y^2=4$ 沿逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=\underline{\quad 0 \quad}$.

4. 设 L 是圆周 $x^2+y^2=R^2$，曲线积分 $\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=\underline{2\pi R^3}$.

5. 设 $\boldsymbol{L}$ 为圆周 $(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^2+(\boldsymbol{y}-\mathbf{1})^2=\mathbf{4}$ 且为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\underline{-8\boldsymbol{\pi}}$.

6．设曲线 Γ 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，则曲线积分 $\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\underline{\frac{2}{3}\pi}$.

7．曲线积分 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\underline{\quad 2\pi a^2 \quad}$，其中 $L: x^2+y^2=a^2$.

8. $\boldsymbol{L}$ 为圆周 $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=\mathbf{1}$，则 $\oint_{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{x}^2\mathbf{d}\boldsymbol{s}=\underline{\boldsymbol{\pi}}$.

9．设 Σ 的方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $0\le z\le 1$ 部分的上侧，则 $\iint_\Sigma z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{\quad \frac{\pi}{2} \quad}$.

二、计算 $\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y$，其中 L 是从点 $O(0,0)$ 沿曲线 $y=x^2$ 到点 $B(1,1)$.

解 $\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y=\int_0^1 (x^2-x^{2\cdot 2}+xx^2 2x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (x^2+x^4)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{8}{15}.$$

三、计算 $I=\oint_L e^y\mathrm{d}x+(x+xe^y-2y)\mathrm{d}y$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=2x$ 的正向.

解 由题意知 $P=e^y, Q=x+xe^y-2y$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^y,\frac{\partial Q}{\partial x}=1+e^y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1,$$

因此$\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$.

四、计算曲线积分$\oint_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$的正向.

解

$$P=-x^2y,\ Q=xy^2,\ \frac{\partial P}{\partial y}=-x^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=y^2,$$ 由格林公式，得

$$\oint_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi a^4}{2}.$$

五、计算曲线积分$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x+\left(x^2+xy^2\right)\mathrm{d}y$，其中$L$为由直线 $x+y=1$及两个坐标轴围成的区域的整个边界，其方向为顺时针方向.

解　　设D为由直线 $x+y=1$及两个坐标轴围成的区域.

$$P=2xy,\ Q=x^2+xy^2,\ \frac{\partial P}{\partial y}=2x,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2x+y^2,$$

由格林公式，得

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x+\left(x^2+xy^2\right)\mathrm{d}y=-\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}y^2\mathrm{d}y=-\int_0^1\frac{1}{3}(1-x)^3\mathrm{d}x=-\frac{1}{12}.$$

六、 计算曲线积分$\int_L\left(1+xe^{2y}\right)\mathrm{d}x+\left(x^2e^{2y}-1\right)\mathrm{d}y$，其中$L$为$(x-2)^2+y^2=4$在第一象限沿逆时针方向的半圆弧.

解

$P(x,\quad y)=1+xe^{2y}$，$Q(x,\quad y)=x^2e^{2y}-1$

由 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2xe^{2y}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 可知该曲线积分与路径无关.

因此我们可取直线 $y=0$ 上从 $x=4$ 到 $x=0$ 这一段直线段，得

$$\int_L \left(1+xe^{2y}\right)\mathbf{d}x+\left(x^2e^{2y}-1\right)\mathbf{d}y=\int_4^0(1+x)\,dx=-12\ .$$

七、计算 $\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}\,x+(y^2-x)\,\mathrm{d}\,y$，其中 L 为上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$

从 $O(0,0)$ 到 $A(4,0)$.

解 为了使用格林公式，添加辅助线段 $\overline{AO}$, 它与 L 所围区域为 D，则

$$\text{原式}=\oint_{L+\overline{AO}}(x^2+3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y+\int_{\overline{OA}}(x^2+3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y$$

$$=4\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^4 x^2\mathrm{d}x$$

$$=8\pi+\frac{64}{3}.$$

八、设 L 为曲线 $y=\sin x$ 自 $x=\pi$ 到 $x=0$ 的一段，求

$$\int_L\left[\cos(x+y^2)+2y\right]\mathrm{d}x+\left[2y\cos(x+y^2)+3x\right]\mathrm{d}y.$$

解 添加 x 轴上的从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的有向线段 L_1，L_1 和 L 构成闭曲线的的正向，D 是由 L_1 和 L 所围成的闭区域．由 Green 公式得：

$$\int_{L+L_1}\left[\cos(x+y^2)+2y\right]\mathrm{d}x+\left[2y\cos(x+y^2)+3x\right]\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

而 $\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=2$，

$$\int_{L_1}\left[\cos(x+y^2)+2y\right]\mathrm{d}x+\left[2y\cos(x+y^2)+3x\right]\mathrm{d}y=\int_0^\pi\cos x\mathrm{d}x=0,$$

则 $\int_L\left[\cos(x+y^2)+2y\right]\mathrm{d}x+\left[2y\cos(x+y^2)+3x\right]\mathrm{d}y=2$.

九、计算曲线积分$\int_L \frac{(e^x\cos y+x^2)\mathrm{d}y+(e^x\sin y+1)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$其中 L 为闭曲线 $x^2+y^2=4$ 的上半部分，方向为逆时针.

解　加辅助线 $A\vec{B}$ 其中 $A(-2,0)$, $B(2,0)$

$$\int_L \frac{(e^x\cos y+x^2)\mathrm{d}y+(e^x\sin y+1)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{1}{4}\int_L (e^x\cos y+x^2)\mathrm{d}y+(e^x\sin y+1)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\oint_{L+AB}(e^x\cos y+x^2)\mathrm{d}y+(e^x\sin y+1)\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_{AB}(e^x\cos y+x^2)\mathrm{d}y+(e^x\sin y+1)\mathrm{d}x$$

由 Green 公式得，

$$\oint_{L+AB}(e^x\cos y+x^2)\mathrm{d}y+(e^x\sin y+1)\mathrm{d}x=\iint_D (e^x\cos y+2x-e^x\cos y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D 2x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^2 2\rho^2\mathrm{d}\rho=0$$

又　$\int_{AB}(e^x\cos y+x^2)\mathrm{d}y+(e^x\sin y+1)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x=4$

故　$\int_L \frac{(e^x\cos y+x^2)\mathrm{d}y+(e^x\sin y+1)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{1}{4}(0-4)=-1$.

十、设 $f(x)$ 具有二阶连续导数， $f(0)=0, f'(0)=1$，曲线积分

$\int_L [x^2y+xy^2-f(x)y]\mathrm{d}x+[f'(x)+x^2y]\mathrm{d}y$ 与路径无关，求 $f(x)$.

解　由 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，整理得 $f(x)$ 满足微分方程 $f''(x)+f(x)=x^2$

先求齐次微分方程的通解：

特征方程 $r^2+1=0$，特征根 $r_{1,2}=\pm i$，故通解 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$；

再求非齐次方程的特解：设特解 $y^*=ax^2+bx+c$，

代入原方程比较系数得 $a=1,b=0,c=-2$，即特解 $y^*=x^2-2$；

故 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$，

又有 $f(0)=0, f'(0)=1$，得 $f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$.

十一、设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$， $f'(0)=-1$，已知曲线积分

$$\int_L [xe^{2x}-6f(x)]\sin y\mathrm{d}x-[5f(x)-f'(x)]\cos y\,\mathrm{d}y$$

与路径无关，试求函数 $f(x)$.

解　由于 $\int_L [xe^{2x}-6f(x)]\sin y\mathrm{d}x-[5f(x)-f'(x)]\cos y\,\mathrm{d}y$ 与路径无关，所以

$$\frac{\partial}{\partial y}[(xe^{2x}-6f(x))\sin y]=\frac{\partial}{\partial x}[-(5f(x)-f'(x))\cos y]$$

即 $f''-5f'+6f=xe^{2x}$

特征方程 $r^2-5r+6=(r-2)(r-3)=0$

对应齐次方程的通解 $f=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

设 $f^*=x(Ax+B)e^{2x}$，代入方程求出

$A=-\dfrac{1}{2},\quad B=-1$

所以方程 $f''-5f'+6f=xe^{2x}$ 的通解为

$$f(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-\frac{1}{2}x(x+2)e^{2x}$$

再由 $f(0)=0$， $f'(0)=-1$，定出 $C_1=C_2=0$

因而所求函数是 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x(x+2)e^{2x}$.

十二、计算曲线积分 $\int\limits_L \dfrac{(y+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+2x+y^2)\mathrm{d}y}{x^2+y^2-4x+1}$，其中 L 为 $x^2+y^2=4x$ 的上半圆周由 $A(4,0)$ 到 $O(0,0)$ 的一段.

解: 记点 $O(0,0)$ 沿着 x 轴到 $A(4,0)$ 的直线段为 L_1, 对于积分

$$\int\limits_L \frac{(y+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+2x+y^2)\mathrm{d}y}{x^2+y^2-4x+1}=\int\limits_L (y+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+2x+y^2)\mathrm{d}y$$

由格林公式,得

$$\int\limits_L (y+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+2x+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\oint\limits_{L+L_1}(y+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+2x+y^2)\mathrm{d}y-\oint_{L_1}(y+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+2x+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \oint_{L_1}(y+2xy)\mathrm{d}x + (x^2+2x+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=2\pi - 0$$

$$=2\pi .$$

十三、计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$ ，其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=h(h>0)$ 之间部分的下侧. $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 Σ 在 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

解　空间曲面 Σ 在 xoy 面上的投影域为 D_{xy}，由于曲面 Σ 不是封闭曲面，为利用高斯公式，

补 Σ_1： $\begin{cases} x^2+y^2 \le h^2, \\ z=h, \end{cases}$ 且 Σ_1 取上侧，这样 $\Sigma+\Sigma_1$ 构成封闭曲面.

设 $\Sigma+\Sigma_1$ 所围成的空间区域为 Ω.

$$\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S - \iint_{\Sigma_1}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=2\left(\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}v + \iiint_{\Omega} y\mathrm{d}v + \iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v\right) - \iint_{\Sigma_1} z^2\cos\gamma\mathrm{d}S$$

$$=2\iiint_{\Omega} \mathrm{z}\,\mathrm{d}v - \iint_{\Sigma_1}\mathrm{h}^2\mathrm{d}S$$

$$=\int_0^h z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \pi h^4$$

$$=2\pi\int_0^h \mathrm{z}^3\mathrm{d}\mathrm{z} - \pi h^4$$

$$=\frac{\pi}{2}h^4 - \pi h^4 = -\frac{1}{2}\pi h^4.$$

十四、 求曲面积分 $\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (1+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 Σ 为半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

解 构造有向曲面 $\Sigma_1:\begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ z=0 \end{cases}$ ，取下侧

则 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(1+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(1+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(1+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

由 Gauss 公式得 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(1+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega}(3+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$\iiint\limits_{\Omega}(3+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega}2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\pi+2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=2\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{2}$$

又 $\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(1+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0+\iint\limits_{\Sigma_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi$

故，$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(1+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{5\pi}{2}-(-\pi)=\frac{7\pi}{2}$.

十五、计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的内侧.

解 由高斯公式有 $I=\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}3\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}v \quad \text{（其中}\Omega\text{是由}\Sigma\text{围成的立体）}$$

$$=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=-\frac{12}{5}\pi a^5.$$

十六、 设函数 $f(u)$ 具有连续导数，计算曲面积分

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{y}f(\frac{x}{y})\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{x}f(\frac{x}{y})\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ,$$

其中 Σ 为 $y=x^2+z^2+6$ 和 $y=8-x^2-z^2$ 所围立体的外侧.

解 设 Ω 是由曲面 Σ 所围成的区域，它在 xoz 面上的投影为 $x^2+z^2\le 1$，由高斯公式，有

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x}[\frac{1}{y}f(\frac{x}{y})]+\frac{\partial}{\partial y}[\frac{1}{x}f(\frac{x}{y})]+\frac{\partial}{\partial z}(z)\right\}dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{y^2}f'(\frac{x}{y})\ -\ \frac{1}{y^2}f'(\frac{x}{y})\ +1\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2+6}^{8-r^2}r\ \ \mathrm{d}y=\pi\ .$$

十七、 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$，其中 Σ 为 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数.

解 原式 $=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

补充平面 $\Sigma_1: z=0, x^2+y^2\le a^2$,取下侧，则 Σ 与 Σ_1 构成封闭曲面的内侧，由高斯公式，

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=[\iint\limits_{\Sigma}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_1}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y]-\iint\limits_{\Sigma_1}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=-\oiiint\limits_{\Omega}[a+2(z+a)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{Dxy}a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=-3a\oiiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\oiiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{Dxy}a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=-3a\cdot\frac{2}{3}\pi a^3-2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+a^2\cdot\pi a^2\\
&=-2\pi a^4+\frac{\pi}{2}a^4+\pi a^4\\
&=-\frac{1}{2}\pi a^4
\end{aligned}
$$

故原曲面积分 $=-\frac{1}{2}\pi a^3$.

十八、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3-2y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分曲面 Σ 为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

解 取 Σ_1 为 $z=0$（$x^2+y^2\le 1$）下侧，则 $\Sigma+\Sigma_1$ 为封闭曲面（外侧），因此

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\frac{4}{5}\pi$$

$$I=\iint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=-\frac{4}{5}\pi+\iint\limits_{D_{xy}}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{6}{5}\pi.$$

十九、 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$ ，其中曲面 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的外侧.

解 $I=\frac{1}{8}\oiint\limits_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，由高斯公式有

$I=\frac{1}{8}\iiint\limits_{\Omega}3\,dv$ （其中 Ω 是由 Σ 围成的立体） $=4\pi$.

二十、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$,

其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

解 添加辅助曲面 Σ^* ：$z=0$ 取下侧，使 Σ, Σ^* 构成封闭曲面，记所围成的空间闭区域为 Ω ，由高斯公式，得，

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma^*}\left(x^3+z^2\right)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+x^2\right)\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z^3+y^2\right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{6}{5}\pi,$$

$$\iint\limits_{\Sigma^*}\left(x^3+z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+x^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z^3+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma^*}y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\sin^2\theta\,\mathrm{d}\rho=-\frac{1}{4}\pi$$

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma^*}-\iint\limits_{\Sigma^*}=\frac{6}{5}\pi-\left(-\frac{1}{4}\pi\right)=\frac{29}{20}\pi.$$

二十一、计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{x^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$，其中 Σ 为 $\boldsymbol{z = x^2 + y^2}$ 被 $\boldsymbol{z=4}$ 所截得部分的下侧.

解 令 Σ_1 为 $z=4$ 被 $z = x^2+y^2$ 所截得部分的上侧， 则原式= $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_1}$ ，

由高斯公式

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} = \iiint\limits_{\Omega} [(x^3)'_x + (y^3)'_y + (z(x^2+y^2))'_z] \mathrm{d}v = \iint\limits_{D=(\Omega)_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z=x^2+y^2}^{z=4} [4(x^2+y^2)] \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 r\mathrm{d}r \int_{z=r^2}^{z=4} [4r^2] \mathrm{d}z = 2\pi \int_0^2 r[4r^2](4-r^2)\mathrm{d}r = \frac{128\pi}{3} .$$

由曲面积分计算公式得

$$\iint\limits_{\Sigma_1} = \iint\limits_{D} 0 + 0 + 4(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 4(r^2) r\mathrm{d}r = 32\pi ,$$

故 原式= $\dfrac{128\pi}{3} - 32\pi = \dfrac{32\pi}{3}$.

二十二、计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 介于平面 $z=1$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧.

解 添加 $\Sigma_1 : z = 1 \quad (x^2+y^2 \le 1)$ 取下侧，与 $\Sigma_2 : z = 2 \quad (x^2+y^2 \le 4)$ 取上侧，

则 $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ 构成封闭曲面 Σ_*，其所围成的区域记为 Ω，则

$$I = \oiint\limits_{\Sigma_*} y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\left(\iint\limits_{\Sigma_1} y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Sigma_2} y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right)$$

由高斯公式，得

$$\oiint\limits_{\Sigma_*} y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 2\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_1^2 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2 \le z^2} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{15}{2}\pi$$

或（ $= 2\left[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_1^2 z\,\mathrm{d}z + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^2 r\,\mathrm{d}r \int_r^2 z\,\mathrm{d}z \right] = \dfrac{15}{2}\pi$ ）.

$$\iint_{\Sigma_1} y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{x^2+y^2\le 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\pi\ ,$$

$$\iint_{\Sigma_2} y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} 2^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\iint_{x^2+y^2\le 4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 16\pi\ ,$$

所以 $I = \dfrac{15}{2}\pi - \left(-\pi + 16\pi\right) = -\dfrac{15}{2}\pi$.

二十三、设函数 $f\left(u\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上连续可微，且满足：

$$\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iiint_{\Omega(t)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_{L(t)} f(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s + \iint_{S(t)} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$$

其中 $\Omega(t): x^2+y^2+z^2 \le t^2, z\ge 0$；$D(t): x^2+y^2\le t^2, z=0$；$L(t): x^2+y^2=t^2, z=0$；

$S(t)$ 为上半球体 $\Omega(t)$ 的整个边界，$t>0$．求 $f\left(u\right)$.

解　因为 $\displaystyle\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r$,

$$\iiint_{\Omega(t)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^t r\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\pi t^4\ ,$$

$$\int_{L(t)} f(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s = t\,f(t^2)\int_{L(t)}\mathrm{d}s = 2\pi t^2 f(t^2)\ ,$$

$$\iint_{S(t)} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S = t^2\iint_{S上半球面}\mathrm{d}S + \iint_{D(t)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi t^4 + \frac{\pi}{2}t^4 = \frac{5\pi}{2}t^4\ ,$$

由已知条件，得

$$2\pi\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r + \frac{1}{2}\pi t^4 = 2\pi t^2 f(t^2) + \frac{5\pi}{2}t^4\ ,$$

即 $\displaystyle\int_0^t f(r^2)\,r\,\mathrm{d}r = t^2 f(t^2)$,

两边求导，得 $2t^3 f'(t^2)+2t\,f(t^2)+4t^3=t\,f(t^2),$

令 $u=t^2$，得 $f'(u)+\dfrac{1}{2u}f(u)=-2$，

解得 $f(u)=-\dfrac{4}{3}u+\dfrac{c}{\sqrt{u}}$，其中 c 为任意常数 .

二十四、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是由曲线 $x=e^y\ (0\le y\le a)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面 $x=e^{\sqrt{y^2+z^2}}$，其法向量与 x 轴正向的夹角恒大于 $\dfrac{\pi}{2}$.

解 记 $\Sigma_1: x=e^a,\ y^2+z^2\le a^2$，其法向量与 x 轴的正向夹角为零；Ω 为 Σ 和 Σ_1 所围成的有界闭区域，则有：

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{\Sigma}2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=I_1-I_2.\end{aligned}$$

而 $I_1=\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，（Gauss 公式）

$$I_2=\iint\limits_{\Sigma_1}2(1-e^{2a})\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad (\Sigma_1: x=e^a)$$

$=2(1-e^{2a})\iint\limits_{y^2+z^2\le a^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\pi a^2(1-e^{2a})$， 所以 $I=2\pi a^2(e^{2a}-1)$.

二十五、计算曲面积分 $\boldsymbol{I=\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,}$ 其中 Σ 为曲面 $\boldsymbol{z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}\,(0\le z\le 1)}$ 的上侧。

解 补充曲面：$\boldsymbol{\Sigma_1: x^2+\dfrac{y^2}{4}=1, z=0}$，取下侧. 则

$$\boldsymbol{I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(z+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{D}3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中Ω为Σ与Σ_1所为成的空间区域，D为平面区域$x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1$.

由于区域D关于x轴对称，因此$\iint\limits_{D}3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 又

$$\iiint\limits_{\Omega}(z+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\int_0^1 z\cdot 2\pi(1-z)\mathrm{d}z=\pi.$$

其中$D_z: x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1-z$.

则$I=\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$.