

高等数学 A (上) (2018. 01)

一、填空题 (本题共有 5 道小题, 每小题 3 分, 满分 15 分), 请将答案填在横线上.

1. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x} \right)^x = e^2$, 则 $a =$ _____.

2. 设 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 6$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$ _____.

3. 设 $x + y = e^{x-y}$, 则 $dy =$ _____.

4. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t) dt$, 则当 $n \geq 2$ 时, $f^{(n)}(0) =$ _____.

5. 曲线 $\rho = 1 + \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) 所围成的平面图形的面积为 _____.

二、单项选择题 (本题共 5 道小题, 每小题 3 分, 满分 15 分), 请将答案填在括号内.

1. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 下列结论中, 正确的是 【 】.

- (A) $f(x)$ 没有间断点 (B) $x = -1$ 为 $f(x)$ 的间断点
(C) $x = 1$ 为 $f(x)$ 的间断点 (D) $x = \pm 1$ 都是 $f(x)$ 的间断点

2. 设 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微, $\Delta x = x - x_0$. 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x$ 是 Δx 的 【 】.

- (A) 高阶无穷小 (B) 同阶无穷小 (C) 等价无穷小 (D) 低阶无穷小

3. 设 $f(0) = 0$, $f'(x) = \sec^2 x$, 则 $f(x)$ 的原函数为 【 】.

- (A) $\ln |\sin x| + C$ (B) $-\ln |\sin x| + C$
(C) $\ln |\cos x| + C$ (D) $-\ln |\cos x| + C$

4. 定积分 $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x \cos^4 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx =$ 【 】.

- (A) $\pi^2 + 1$ (B) $\frac{\pi^3}{2}$ (C) $\frac{\pi^2}{2}$ (D) 0

5. 设 $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^3} dt$, 则 $(f^{-1})'(0) =$ 【 】.

- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

三、求解下列各题（本题共有 3 道小题，每小题 5 分，满分 15 分）.

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e}{\ln \cos x}$

2. 求 $y = x^x + 3$ 的导数.

3. 求 $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 + 3t, \end{cases}$ 的拐点.

四、（本题满分 10 分）已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值.

五、（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 可导， $f(0) = 0$ ，且有 $F(x) = x \int_1^2 f(tx) dt$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2}$.

六、（本题满分 10 分）设 $e < a < b < e^2$ ，证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$.

七、（本题满分 12 分）设曲线 L 的方程为 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ ， $0 \leq x \leq 1$.

1. 求 L 上从点 $(0,0)$ 到点 $(1, \frac{2}{3})$ 的弧长 l ；

2. 求 L 与直线 $y = \frac{2}{3}$ 及 y 轴围成的平面图形绕直线 $y = \frac{2}{3}$ 旋转所形成的旋转体的体积 V .

八、（本题满分 13 分）设函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 0$ ，

(1) 求 $y'' + 3y' + 2y = 0$ 的通解；

(2) 若 (1) 中的解 $y(x)$ 满足 $y(0) = 1$ ， $y'(0) = 1$ ，求 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 的值.