

第十二章自测题

一、 填空题

1. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 在 a 满足_____条件下收敛.
2. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为_____.
3. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ 的收敛区间是_____.
4. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为_____.
5. 设 $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1+x^2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$, 且以 2π 为周期, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在点 $x = \pi$ 处收敛于_____.
6. 设周期函数 $f(x)$ 在一个周期内的表达式为 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$, 则它的傅里叶级数在 $x = 0$ 处收敛于_____.
7. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 0 \\ -1+x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$, 则其以 2 为周期的傅里叶级数在 $x = -1$ 处收敛于_____.
8. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$ 可以展开为正弦级数, 此正弦级数在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处收敛于_____.
9. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = x$, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x = 2$ 处收敛于_____.
10. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在区间 $(-1, 1]$ 上的定义为

$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于_____.

二、证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 条件收敛.

三、解答下列问题

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1}$ 的收敛域;

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1}$ 和函数;

3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^{2n-1}}$ 的和.

四、解答下列问题

1. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \sin n 2^n}{n^2 2^n}$ 的敛散性;

2. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 2, 判别级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^n$ 的敛散性.

五、将函数 $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

六、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} x^{n-1}$ 的收敛域, 并求其和函数.

七、设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $f(0)=0, f'(0)=0$,

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

八、1. 将 $f(x) = 2 + x + \arctan x$ 展开成关于 x 的幂级数, 指出收敛区间.

2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$ 的敛散性.

九、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 在 $x=0$ 的某个邻域内有一阶连续导数且

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a > 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 发散.

十、(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的收敛域及和函数;

(2) 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}$ 的和.

十一、(1) 把 $\frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$ 展开为 x 的幂级数;

(2) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.

十二、将 $f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数, 并求收敛域.

十三、试将函数 $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ 展成 x 的幂级数, (要求写出该幂级数的一般项并指出其收敛域).

十四、1. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{na^n} (a > 0)$ 的敛散性;

2. 试将函数 $f(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$ 展成 x 的幂级数 (要求写出该幂级数的一般项并指出其收敛域).

十五、1. 将 $f(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ 展开为 x 的幂级数;

2. 指出该幂级数的收敛域;

3. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ 的和.

十六、(1) 求 $\frac{\cos x - 1}{x}$ 的幂级数展开式;

(2) 求 $\frac{d}{dx} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right)$ 的幂级数展开式;

(3) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2n}$ 的和.

十七、求级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)2^n}$ 的和.