第三章中值定理不等式练习题解答（15 分钟）

1. **设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0，1]$ 上可微，对于 $[0，1]$ 上的每一个 x，函数 $f(x)$ 的值都在开区间（0，1）内，且 $f'(x)\neq 1$，证明在（0，1）区间内有且仅有一个 x 使得 $f(x)=x$ 成立.（2004 秋）**

证：①令 $F(x)=f(x)-x$，由原题设可知 $F(x)$ 在 $[0，1]$ 上连续，

又 $F(0)=f(0)>0$，$F(1)=f(1)-1<0$，由连续函数的介值定理可知在（0，1）内

至少存在一个 x，使 $F(x)=0$，即 $f(x)=x$.

②唯一性：用反证法，假设在（0，1）内使得 $f(x)=x$ 的 x 不唯一，则至少应有两个，不妨设为 x_1 和 x_2 且 $x_1<x_2$，则 $F(x)$ 在 $\left[x_1,x_2\right]$ 上连续，在 $\left(x_1,x_2\right)$ 内可导，且

$F\left(x_1\right)=F\left(x_2\right)=0$，由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=1$，

与原题设 $f'(x)\neq 1$ 矛盾.

2.证明：当 $x>1$ 时，有 $\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ 成立.（2005 秋）

证　令 $f(x)=(x+1)\ln x-2(x-1)$

则 $f(1)=0,\ f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1,\quad f'(1)=0,\quad f''(x)=\dfrac{(x-1)}{x^2}$

从而，当 $x>1$ 时，$f''(x)>0$，即 $f'(x)$ 是单调增加的

于是 $f'(x)>f'(1)>0,$ 即 $f(x)$ 是单调增加的.

这样有, $f(x)>f(1)=0$, 即 $f(x)=(x+1)\ln x-2(x-1)>0$. 所以,不等式成立.

3. 设 $f(x)$**在**$[0,1]$**上连续，在**$(0,1)$**内可导，且** $f(0)=f(1)=0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=1$**，**

试证至少存在一点$\xi\in(0,1)$**，使得** $f'(\xi)=1$. **（2006 秋）**

证　令 $F(x)=f(x)-x$，**显然**，$F(x)$**在**$[0,1]$**上连续**，**在**$(0,1)$**内可导**，

又　$F(1)=f(1)-1=-1<0$，$F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$，**由零点定理可**

知，存在一个$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，**使**$F(\eta)=0$.

又 $F(0)=0=F(\eta)$，**对** $F(x)$ **在** $[0,\eta]$ **上用罗尔定理，存在一个** $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，**使**$F'(\xi)=0$，**即** $f'(\xi)=1$**，** $\xi\in(0,1)$.