# 中国农业大学

# 2017~2018 学年春季学期（2018.7）

# 高等数学A（下） 课程考试试题

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | |

(注意：本试卷共有八道大题，满分 100 分，考试时间 100 分钟)

**一、填空题**(本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分)，请将答案填在横线上.

**1.** 过点 $(1,0,1)$ 且与平面 $x+y+z=0$ 平行的平面方程为__________________.

**2.** 曲线 $\Gamma:\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=bt \end{cases}$ 在点 $(a,0,0)$ 处的切线方程为__________________.

**3.** 设 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$，则 $\mathrm{d}z=$__________________.

**4.** 函数 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $(3,4,0)$ 处沿方向 $\vec{l}=(2,1,2)$ 的方向导数为_____________.

**5.** 设 $f(x)$ 在 $[0,\ \pi]$ 上的表达式为 $f(x)=x^2$，则它展开为正弦级数时，在 $x=2018\pi$ 处该级数收敛于______________.

**二、单项选择题**(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)，请将合适选项填在括号内.

**1.** 对于二元函数 $z=f(x,y)$, 下列有关连续、偏导数与全微分关系中正确的命题是【　　】.

（A）偏导数存在，则函数必连续；　　（B）偏导数连续，则全微分必存在；

（C）全微分存在，则偏导数必连续；　　（D）全微分存在，而偏导数不一定存在.

**2.** 已知函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点某邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，则下述四个选项中正确的是【　　】.

（A）点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点；

（B）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点；

（C）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点；

（D） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

**3.** 设 $f(x,y)$ 为连续函数，区域 $D$ 由 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$ 给出，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 在极坐标系下可表示为【　　】.

（A） $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$；　　（B） $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$；

（C） $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\mathrm{d}\rho$；　　（D） $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$.

**4.** 已知向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的模分别为 $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4,|\vec{c}|=5$ 且 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，则 $|\vec{a}\times\vec{b}|$ 与 $|\vec{c}\times\vec{a}|$ 的关系是【　　】.

（A） $|\vec{a}\times\vec{b}|<|\vec{c}\times\vec{a}|$；　　（B） $|\vec{a}\times\vec{b}|>|\vec{c}\times\vec{a}|$；

（C） $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{c}\times\vec{a}|$；　　（D）它们的大小没有联系.

**5.** 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $x=R$ 处收敛，则下列结论中正确的是【　　】.

（A）该级数在 $x=-R$ 也收敛；　　（B）该级数的和函数在 $x=R$ 处可导；

（C）该级数在 $x=R$ 处绝对收敛；　　（D）该级数的收敛半径大于等于 $R$.

**三、计算下列各题**（本题共有 **2** 道小题，每小题 **8** 分，满分 **16** 分）

**1.** 设 $z=\ln\dfrac{1}{r}$， $r=\sqrt{x^2+y^2}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

**2.** 计算 $\iint\limits_D \dfrac{x}{(1+x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$.

**四、**（本题满分 10 分）设平面闭区域 $D$ 是半平面 $y \le x$ 和圆 $x^2+(y-a)^2 \le a^2$ 的公共部分，求 $D$ 的面积，其中 $a>0$.

**五、**（本题满分 **10** 分）设 $\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，取外侧，其中 $R>0$. 计算第二类曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$.

**六、**（本题满分 12 分）设 $p>0,a>0,b>0,c>0$，且 $a+b+c=1$，则函数 $f(x,y,z)=x^a y^b z^c$ 在约束条件 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{p}$， $x>0,y>0,z>0$ 下达到最小值，试求出这个最小值，并由此证明：当 $x,y,z>0$ 时，成立不等式 $\sqrt[3]{xyz} \ge \dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$.

**七、**（本题满分 **10** 分）设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ 上的点，球面 $S$ 在点 $P_0$ 的切平面经过点 $(0,0,2)$，证明：满足上述条件的 $P_0$ 的点全体是球面 $S$ 上的一个圆.

**八、（本题共有 2 道小题，每小题 6 分，满分 12 分）**.

**1.** 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\ln(1+\dfrac{1}{n})\right)$ 的敛散性，又已知 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln(1+n)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

**2.** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$.