第五章课外练习题解答

定积分（概念、性质、运算）习题

1．计算下列定积分

（1） $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}dx$

解

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,dx=\int_0^{\pi}|\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx$$
$$=\frac{4}{3}。$$

（2） $\int_0^{k\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}dx$

解 $\int_0^{k\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}dx=k\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}dx=k\int_0^{\pi}|\cos x|dx=2k$.

（3） $\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx$

解 因为 $I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx\overset{t=\pi-x}{=}\int_0^{\pi}\frac{(-1)^{n+1}\sin nt}{\sin t}dt=(-1)^{n+1}I_n$，

所以 $I_{2n}=0$ ，

$$I_{2n+1}=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx\cos x}{\sin x}dx+\int_0^{\pi}\frac{\cos 2nx\sin x}{\sin x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx\cos x}{\sin x}dx,$$

$$I_{2n-1}=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx\cos x}{\sin x}dx-\int_0^{\pi}\frac{\cos 2nx\sin x}{\sin x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx\cos x}{\sin x}dx,$$

故 $I_{2n+1}=I_{2n-1}=\cdots=I_1=\pi$.

另解

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx = \int_0^{\pi}\frac{\sin[(n-1)+1]x}{\sin x}dx \\
&= \int_0^{\pi}\frac{\sin(n-1)x\cos x}{\sin x}dx + \int_0^{\pi}\frac{\cos(n-1)x\sin x}{\sin x}dx \\
&= \int_0^{\pi}\frac{\sin(n-1)x\cos x}{\sin x}dx \\
&= \int_0^{\pi}\frac{\sin(n-2)x\cos^2 x}{\sin x}dx + \int_0^{\pi}\frac{\cos(n-2)x\sin x\cos x}{\sin x}dx \\
&= I_{n-2} + \int_0^{\pi}\cos(n-1)xdx \\
&= I_{n-2}，
\end{aligned}
$$

所以 $I_{2n} = I_0 = 0, I_{2n+1} = I_1 = \pi$.

又解

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx = \int_0^{\pi}\frac{\sin[(n-1)+1]x}{\sin x}dx \\
&= \int_0^{\pi}\frac{\sin(n-1)x\cos x}{\sin x}dx + \int_0^{\pi}\frac{\cos(n-1)x\sin x}{\sin x}dx \\
&= \int_0^{\pi}\frac{\sin(n-1)x\cos x}{\sin x}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n-2)x}{\sin x}dx \\
&= \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}I_{n-2},
\end{aligned}
$$

所以 $I_n = I_{n-2}$，故 $I_{2n} = I_0 = 0, I_{2n+1} = I_1 = \pi$.

（4）$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$

解

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}x\sec x\, d\left(\frac{-1}{x\sin x+\cos x}\right) \\
&= \frac{-x\sec x}{x\sin x+\cos x}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^2 x(x\sin x+\cos x)dx}{x\sin x+\cos x} \\
&= \frac{4\pi}{\sqrt{3}\pi+18} - \frac{4\pi}{6\sqrt{3}\pi+3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}。
\end{aligned}
$$

（5）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$

解

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x})dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x+\sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(x-\frac{\pi}{4})dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2 \text{。}$$

注 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(x-\frac{\pi}{4})dx \overset{\frac{\pi}{4}-x=t}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln(\cos t)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)dx$.

（6） $\int_0^1 x|x-\alpha|dx$

解：当$\alpha<0$时： $\int_0^1 x|x-\alpha|dx = \int_0^1 x(x-\alpha)dx = \frac{1}{3}-\frac{1}{2}\alpha$

当$0\le\alpha\le 1$： $\int_0^1 x|x-\alpha|dx = \int_0^{\alpha} x(\alpha-x)dx + \int_{\alpha}^1 x(x-\alpha)dx = \frac{1}{3}\alpha^3-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{3}$

当$\alpha>1$： $\int_0^1 x|x-\alpha|dx = \int_0^1 x(\alpha-x)dx = \frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{3}$

（7） $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}dx$

解： $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(1+e^x-1)\sin^4 x}{1+e^x}dx$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x dx - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{1+e^x}dx$$

对于 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{1+e^x}dx$ ， 令 $x=-t$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{1+e^x}dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^4 t}{1+e^{-t}}dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}dx = I$$

所以 $I = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$

（8） $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$

解： $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\Big|_0^3 - \int_0^3 x[\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}]'dx$

$$=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\Big|_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx \quad =3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$$

对于 $\int_0^3\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$，令 $\sqrt{x}=t$，则 $dx=2tdt$，当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=3$ 时，$t=\sqrt{3}$，

则 $$\int_0^3\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2t^2}{t^2+1}dt=2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt$$

$$=2[t-\arctan t]\Big|_0^{\sqrt{3}}=2(\sqrt{3}-\arctan\sqrt{3})=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$$

于是，$\int_0^3 arc\sin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx=3\cdot\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$.

2．设 $f(x)=\begin{cases}2x+\frac{3}{2}x^2, & -1\le x<0\\ \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}, & 0\le x\le 1\end{cases}$，求函数 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$ 的表达式.

解：当 $-1\le x<0$ 时：

$$F(x)=\int_{-1}^x(2t+\frac{3}{2}t^2)dt=(t^2+\frac{1}{2}t^3)\Big|_{-1}^x=\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}$$

当 $0\le x\le 1$ 时：

$$F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt=\int_{-1}^0 f(t)dt+\int_0^x f(t)dt=(t^2+\frac{1}{2}t^3)\Big|_{-1}^0+\int_0^x\frac{te^t}{(e^t+1)^2}dt$$

$$=-\frac{1}{2}-\int_0^x td(\frac{1}{e^t+1})=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\int_0^x\frac{de^t}{e^t(e^t+1)}$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln 2$$

因此 ， $$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2} & -1\le x<0\\ \ln\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{x}{e^x+1}+\ln 2-\frac{1}{2} & 0\le x\le 1\end{cases}.$$

3．求函数 $F(x)=\int_0^x f(xt)dt$ 的导数，其中 f 连续.

解 （定积分的换元积分公式，变限定积分函数求导）

因为 $F(x)=\int_0^x f(xt)dt=\int_0^{x^2} f(u)\frac{1}{x}du$，

所以 $F'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2} f(u)du+2f(x^2)$.

4．已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$ 在 $(0,0)$ 处的切线相同，写出此切线方程，并求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(\frac{2}{x})$．

解　根据条件，得 $f(0)=0$, $f'(0)=\left.\dfrac{e^{-\arctan^2 x}}{1+x^2}\right|_{x=0}=1$ ，

所以 ，切线方程为 $y=x$，

$$\lim_{x\to+\infty} xf(\frac{2}{x}) = \lim_{x\to+\infty} 2\cdot\frac{f(\frac{2}{x})-f(0)}{\frac{2}{x}} = 2f'(0)=2.$$

5．求极限 （1*） $\lim\limits_{h\to0^+}\int_{-1}^{1}\dfrac{h}{h^2+x^2}f(x)dx$，其中 $f(x)\in C[-1,1]$；（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}$.

解

（1*）

$$\lim_{h\to0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx = \lim_{h\to0^+}\int_{-1}^{-\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx$$
$$+\lim_{h\to0^+}\int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx+\lim_{h\to0^+}\int_{\sqrt{h}}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx$$

$$=\lim_{h\to0^+} f(\xi_1)\int_{-1}^{-\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}dx+\lim_{h\to0^+} f(\xi_2)\int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}dx+\lim_{h\to0^+} f(\xi_3)\int_{\sqrt{h}}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}dx$$
$$=\lim_{h\to0^+} f(\xi_1)\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-1}^{-\sqrt{h}}+\lim_{h\to0^+} f(\xi_2)\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}+\lim_{h\to0^+} f(\xi_3)\arctan\frac{x}{h}\Big|_{\sqrt{h}}^{1}$$
$$=0+\pi f(0)+0=\pi f(0)。$$

（2） 因为任给 $x>0$，存在 $n\ge0$，使得 $n\pi\le x\le(n+1)\pi$，所以

$$\frac{\int_0^{n\pi}|\sin t|dt}{(n+1)\pi}\le\frac{\int_0^{x}|\sin t|dt}{x}\le\frac{\int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|dt}{n\pi},$$

由于 $\int_0^{n\pi}|\sin t|dt=n\int_0^{\pi}|\sin t|dt=2n,\ \int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|dt=(n+1)\int_0^{\pi}|\sin t|dt=2(n+1)$，

从而
$$\frac{2n}{(n+1)\pi}\le\frac{\int_0^{x}|\sin t|dt}{x}\le\frac{2(n+1)}{n\pi},$$

因此
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x}|\sin t|dt}{x}=\frac{2}{\pi}.$$

6．已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x-ax}\displaystyle\int_b^x\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt=-2$，求 a,b 的值．

解（变限定积分函数的性质，无穷小量的比较，洛必达法则）

因为 $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x-ax)=0$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x-ax}\displaystyle\int_b^x\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt=-2$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_b^x\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt=\int_b^0\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt=0$，因此 $b=0$．

又 $-2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x-ax}\displaystyle\int_b^x\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x-a}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{0}{1-a}$，

所以 $a=1$．

7．已知 $A=\displaystyle\int_0^1\frac{e^t}{1+t}dt$，求 $\displaystyle\int_0^1\frac{e^t}{(1+t)^2}dt$．

解 （定积分的分部积分公式）

因为

$$A=\int_0^1\frac{e^t}{1+t}dt，$$

所以

$$\int_0^1\frac{e^t}{(1+t)^2}dt=-\frac{e^t}{1+t}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{e^t}{1+t}dt=1-\frac{e}{2}+A．$$

8．已知 $f(x)+\sin^4 x=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(2x)dx$，求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$．

解 （定积分的概念，定积分的换元积分公式）

因为 $f(x)+\sin^4 x=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(2x)dx$，所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(2x)dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(u)du，$$

由于
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx=\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}，$$

故
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\frac{3\pi}{4(\pi-4)}．$$

9．设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续可导、单增， $f(0)=0$，证明

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^{f(a)} f^{-1}(y)dy=af(a).$$

证明 （函数等式的证明，变限定积分函数的导数，定积分的换元积分公式，定积分的几何意义）

法一 令 $F(u)=\int_0^u f(x)dx+\int_0^{f(u)} f^{-1}(y)dy-uf(u)$，$u\in[0,a]$，

则 $F'(u)=f(u)+f'(u)f^{-1}(f(u))-f(u)-uf'(u)=0,\quad u\in[0,a]$，

又 $F(0)=0$，

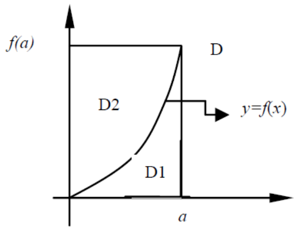
所以 $F(u)=0,\quad u\in[0,a]$，

故 $\int_0^a f(x)dx+\int_0^{f(a)} f^{-1}(y)dy=af(a)$.

法二 因为

$$\int_0^{f(a)} f^{-1}(y)dy \overset{y=f(x)}{=} \int_0^a xf'(x)dx$$
$$=xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)dx=af(a)-\int_0^a f(x)dx,$$

所以 $\int_0^a f(x)dx+\int_0^{f(a)} f^{-1}(y)dy=af(a)$.



法三

如图，根据定积分的几何意义，$D1$ 的面积为 $\int_0^a f(x)dx$，$D2$ 的面积为 $\int_0^{f(a)} f^{-1}(y)dy$，矩形 D 的面积为 $af(a)$，所以

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^{f(a)} f^{-1}(y)dy=af(a).$$

10．设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导，且满足 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot f(x)\,dx=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(\xi)=2f(\xi)\tan\xi$.

证 首先由 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot f(x)\,dx=0$，则 $\exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $\cos^2 x_0 f(x_0)=0$，

但 $\cos x_0\neq 0,\Rightarrow f(x_0)=0$.

取辅助函数 $\varphi(x)=\cos^2 xf(x)$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导，且 $\varphi(x_0)=0,\quad \varphi(\frac{\pi}{2})=0$，因此 $\exists\xi\in(x_0,\frac{\pi}{2})\subset(0,\frac{\pi}{2})$，使得

$$\varphi'(\xi)=-2\sin\xi\cos\xi f(\xi)+\cos^2\xi f(\xi)=0,$$

即有 $f'(\xi)=2f(\xi)\tan\xi$.

11. 若 $f(x)\in C^2[a,b]$，$f(\frac{a+b}{2})=0$，则$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f''(\xi)=\frac{24}{(b-a)^3}\int_a^b f(x)dx$.

解

因为 $f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2$，

所以

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})dx+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_a^b f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2dx。$$

记 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大最小值分别为 M,m，则

$$m(x-\frac{a+b}{2})^2\le f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2\le M(x-\frac{a+b}{2})^2,$$

所以 $$m\le\frac{\int_a^b f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2dx}{\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dx}=\frac{\int_a^b f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2dx}{\frac{1}{12}(b-a)^3}\le M,$$

故存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{\int_a^b f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2dx}{\frac{1}{12}(b-a)^3},$$

从而 $$f''(\xi)=\frac{24}{(b-a)^3}\int_a^b f(x)dx.$$

12. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0$，试证：$\int_a^b f(x)dx\le(b-a)f(\frac{a+b}{2})$.

法一（泰勒公式、定积分的比较定理） 利用泰勒公式：令 $\frac{a+b}{2}=x_0$，写出 $f(x)$ 在点 x_0 处的带拉格朗日余项的一阶

泰勒公式 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$

因为 $f''(x)<0$，所以有 $f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

再利用定积分的性质，得到

$$\int_a^b f(x)dx<\int_a^b f(x_0)dx+\int_a^b f'(x_0)(x-x_0)dx$$

因为 $\int_a^b f(x_0)dx=f(x_0)(b-a)=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$

$$\int_a^b f'(x_0)(x-x_0)dx=f'(x_0)\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})dx$$

$$=f'(x_0)\frac{1}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2\Big|_a^b=0$$,

故有 $\int_a^b f(x)dx<(b-a)f(\frac{a+b}{2})$.

法二（原函数的概念、泰勒公式、牛顿—莱布尼兹公式）设 $F'(x)=f(x)$，则 $F'''(x)=f''(x)<0$，利用泰勒公式得

$$F(b)=F(\frac{a+b}{2})+F'(\frac{a+b}{2})(b-\frac{a+b}{2})$$

$$+\frac{1}{2}F''(\frac{a+b}{2})(b-\frac{a+b}{2})^2+\frac{1}{6}F'''(\xi)(b-\frac{a+b}{2})^3$$

$$F(a)=F(\frac{a+b}{2})+F'(\frac{a+b}{2})(a-\frac{a+b}{2})$$

$$+\frac{1}{2}F''(\frac{a+b}{2})(a-\frac{a+b}{2})^2+\frac{1}{6}F'''(\eta)(a-\frac{a+b}{2})^3$$

所以

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{(b-a)^3}{48}[F'''(\xi)+F'''(\eta)]$$

$$<F'(\frac{a+b}{2})(b-a)=f(\frac{a+b}{2})(b-a).$$

13. 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(x)>0$，又 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{1}{f(t)}dt$，则 $F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上有惟一实根.

证（定积分性质、连续函数的零点存在定理、变限定积分的求导） 因为 $f(x)\in C[a,b]$，所以 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{1}{f(t)}dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且

$$F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0,$$

故$F(x)$在$[a,b]$上严格单增，又因为

$$F(a) = \int_b^a \frac{1}{f(t)} dt < 0, F(b) = \int_a^b f(t) dt > 0,$$

所以$F(x)=0$在$[a,b]$上有且只有一个实根.