

第十二章练习题及参考答案

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 s , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ 收敛于 ().

- A. $2s$ B. $2s + u_1$ **C. $2s - u_1$** D. $u_1 - 2s$

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + 2)^2$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = ()$.

- A. 1 B. 2 C. -1 **D. -2**

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} + \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1}) = ()$.

- A. $-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$** B. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ C. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ D. $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$

4. 设 $a > 0, b > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$ 在 () 时收敛.

- A. $a > b$ **B. $a < b$** C. $a \geq b$ D. $a \leq b$

5. 当 () 时, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a \ln n}$ 收敛.

- A. $a > 1$** B. $a < 1$ C. $a > 2$ D. $a < 2$

6. 若两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 则 ().

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散 B. $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{|u_n|, |v_n|\}$ 可能收敛也可能发散
C. $\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| - |v_n|)$ 发散 **D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 可能收敛也可能发散**

7. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 4$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = ()$.

- A. 7** B. 4 C. 9 D. 6

8. 设 $u_n = (-1)^n \ln(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})$ ($n \geq 2$), 则 ().

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛 B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散
C. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散 D. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

9. 设 $0 \leq u_n < \frac{1}{n} (n=1, 2, \dots)$, 则下列级数中收敛的是 ().

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n^2$

10. 下列级数中条件收敛的是 ().

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+a}{n^2}$ (常数 $a > 0$) D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

11. 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛, 则幂级数的收敛半径为 ().

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

12. 函数 $f(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$ 展开成 $(x-1)$ 幂级数为 ().

A. $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{n-1}$

13. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的收敛区间为 ().

A. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ B. $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ C. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ D. $(-2, 2)$

14. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 在 $x=1$ 处收敛, 则该级数在 $x=-\frac{5}{2}$ 处 ().

A. 绝对收敛 B. 条件收敛 C. 发散 D. 敛散性不能确定

15. 当 $|x| < 5$ 时, 函数 $f(x) = \frac{1}{5-x}$ 的麦克劳林展开式是 ().

A. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} x^n$ B. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}} x^n$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} x^n$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}} x^n$

16. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 的收敛域是 ().

A. $(-1, 1)$ B. $(-1, 1]$ C. $[-1, 1)$ D. $[-1, 1]$

17. 设函数 $f(x) = xe^x$ 展开成 x 幂级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 则系数 $a_3 =$ ().

A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

18. $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 展开成幂级数是().

A. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ B. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ C. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n x^n}{n!}$ D. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n x^n}{n}$

19. 函数 $\int_0^x t \cos t dt$ 在 $x = 0$ 处的幂级数展开式为().

A. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!(2n)}$ B. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n)!(2n+2)}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)}$

20. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ 的和函数是().

A. e^{-x^2} B. e^{x^2} C. $-e^{-x^2}$ D. 不存在

21 若正项 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 级数收敛, 则().

A. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散 B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ 发散 D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ 发散

22 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必收敛的级数是().

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$

23 设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & -\pi < x \leq 0 \\ 4x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$, 则将 $f(x)$ 作周期延拓, 展开的傅里叶

级数在 $x = \pi$ 点收敛于().

A. 2π

B. 4π

C. π

D. 0

24 已知 $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi < x \leq 0 \\ \frac{\pi}{4}, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 的傅里叶级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

则 $1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \cdots = (\quad)$.

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{6}$

D. π

25 以为周期的函数 $f(x) = x^2 - 1, x \in [-\pi, \pi]$, 它的傅里叶级数为

$\frac{\pi}{3} - 1 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$, 则该级数的和函数为 (\quad) .

A. $s(x) \equiv f(x), x \in (-\infty, +\infty)$

B. $s(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq k\pi \\ 1, & x = k\pi \end{cases} (k = 0, \pm 1, \dots)$

C. $s(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq k\pi \\ \frac{1}{2}, & x = k\pi \end{cases} (k = 0, \pm 1, \dots)$

D. $s(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq k\pi \\ \frac{\pi^2 - 1}{2}, & x = k\pi \end{cases} (k = 0, \pm 1, \dots)$

26 $1.1 + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5} + \frac{8}{5\sqrt{5}} + \cdots = (\quad)$.

A. $5 + 2\sqrt{5}$

B. $5 - 2\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{5}$

D. 5

27 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ ($a > 0$) 收敛, 则 a 满足 ().

- A. $a=1$ **B. $a > 1$** C. $a=0$ D. $a \leq 1$

28 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-3, 3)$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为 ().

- A. $(2, 4)$ B. $(-1, 4)$ **C. $(-2, 4)$** D. $(-2, 2)$

29 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n =$ ().

- A. 1 B. -1 C. 2 **D. 0**

30 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式为 ().

- A. **$4 + 4(x-1) + (x-1)^2$** B. $4 - 4(x-1) + (x-1)^2$
C. $4 + 4(x-1) - (x-1)^2$ D. $4 - 4(x-1) - (x-1)^2$