# 第二章课外练习题

## 导数和微分的概念与运算

1．求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1-2f(x))^{\frac{1}{\sin x}}$，其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，$f(0)=0, f'(0)=2$，且当 $x\neq 0$ 时 $f(x)\neq 0$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan(5x^2)}$，其中 $f'(0)$ 存在，$f(0)=0$；

（3）$\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{2}}\sqrt{f\left(\dfrac{2}{x}\right)}$，其中曲线 $y=f(x)$ 在原点处与曲线 $y=\sin x$ 相切.

2．设 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\cos\dfrac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处右连续但右导数不存在，则 $\alpha$ 的取值范围是[　　]

A　$\alpha>0$．　B　$0<\alpha\leq 1$．　C　$\alpha>1$．　D　$\alpha<1$．

3．设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义，$F(x)=|x|f(x)$，则 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件是[　　]

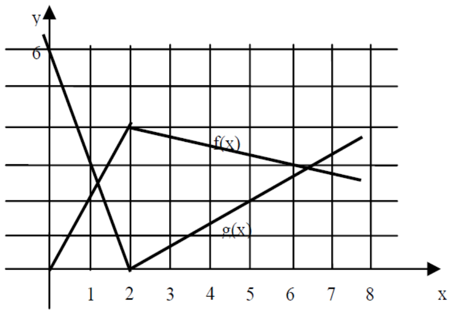
（A）$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.　　（B）$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在.

（C）$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.　　（D）$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

4. $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，对任意的 $x,h$ 有 $f(x+h)=f(x)g(h)+f(h)g(x)$ 成立，且 $f(0)=g'(0)=0,\ g(0)=f'(0)=1$，求 $f'(x)$．

5. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求 $f''(0)$．

6．如图，$f(x), g(x)$ 是两个逐段线性的连续函数，设 $u(x)=f(g(x))$，求 $u'(1)$ 的值.




7. 导数运算

（1）$f(x)=|\ln|x||$, 求 $f'(x)$；

（2）已知 $y=y(x)$ 由方程 $\sin y+e^x-xy^2=0$ 确定，求 $y'$；

（3）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^{y^2}+y^2\ln x+4=0$ 确定，求 $y'$；

（4）已知函数 $y=f(\frac{x+1}{x-1})$ 满足 $f'(x)=\arctan\sqrt{x}$，求 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=2}$；

（5）设函数 $g(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数，若 $f'(x), f''(x)$ 存在且 $f'(x)\neq 0$，求 $g''(y)$.

8．证明 $(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$.

9. 设 $f(0)=0$. 证明：函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是：存在在 $x=0$ 处连续的函数 $g(x)$，使得 $f(x)=xg(x)$.

10．设 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内有定义，且在 $x_0\in(a,b)$ 处可导. 数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足条件：

$$a<x_n<x_0<y_n<b, \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=x_0.$$

试求 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$.