第五章定积分练习题解答（25 分钟）

1．计算$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx$.**（2005 秋）**

解　由于 $\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}=\sqrt{\sin^3 x(1-\sin^2 x)}=\sin^{\frac{3}{2}}x\cdot|\cos x|$，**在**$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$**上，**

$|\cos x|=\cos x$；**在**$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$**上**，$|\cos x|=-\cos x$，**所以**

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}x\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x(-\cos x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}xd(\sin x)-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}xd(\sin x)$$

$$=\left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}.$$

2.　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}t\sin\frac{1}{t}dt}{x^2}$ **（2004 秋）**

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}t\sin\frac{1}{t}dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3\sin\frac{1}{x^2}}{2x}=0$$

3. 证明$\dfrac{1}{2}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}dx\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.**（2006 秋）**

证　令 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0$ $\therefore f(x)$单调递减.

$$\therefore \frac{2}{\pi}=f(\frac{\pi}{2})\le f(x)\le f(\frac{\pi}{4})=\frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}dx\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. 设函数 $f(x)$ **在[-*a*, *a*]上具有二阶连续导数(*a*>0)，且** $f(0)=0$，

（1）．写出 $f(x)$ **的带有拉格朗日型余项的一阶麦克劳林公式**;

（2）. 证明至少存在一点$\eta\in[-a,a]$ 使 $a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx$.**（2006 秋）**

证 （1） $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$，$\xi$ 在 0 与 x 之间

（2） $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}f'(0)xdx+\int_{-a}^{a}\frac{f''(\xi)}{2}x^2dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx$

$\because f''(x)$ 连续，$\therefore$ 在$[-a,a]$上存在 $m=\min f''(x),M=\max f''(x)$

$\therefore$ 有 $mx^2\le f''(\xi)x^2\le Mx^2$，**那么**

$\therefore$ 有 $m\int_{-a}^{a}x^2dx\le\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx\le M\int_{-a}^{a}x^2dx$

即 $\therefore$ 有 $m\le\frac{3}{2a^3}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx\le M$

所以 $\exists\eta\in[-a,a]$使得 $f''(\eta)=\frac{3}{2a^3}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)dx$

即 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx$.