第十章课外练习及答案

一．选择题

1．设空间区域

Ω：$x^2+y^2+z^2\le R^2$，$z\ge 0$，Ω_1：$x^2+y^2+z^2\le R^2$，$x\ge 0$，$y\ge 0$，$z\ge 0$，则______________ .

（A）．$\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_1} xdxdydz$；（B）．$\iiint\limits_{\Omega} ydxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_1} ydxdydz$；

（C）．$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_1} zdxdydz$；（D）．$\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_1} xyzdxdydz$.

2．设 D 是 xOy 平面上以 $(1,\ 1)$、$(-1,\ 1)$、$(-1,\ -1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则积分 $\iint\limits_{D}(xy+\cos x\sin y)dxdy$ 等于______________ .

（A）．$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$；（B）．$2\iint\limits_{D_1}xydxdy$；

（C）．$4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$；（D）．0 .

3. 若区域 D 为 $0\le y\le x^2$，$|x|\le 2$，则 $\iint\limits_{D} xy^2dxdy=$______________ .

A. 0 ；B. $32/3$ ；C. $64/3$ ；D. 256 .

4. 设区域 Ω 是 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1$ 所围区域在第一卦限的部分，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 不等于______________ .

A. $\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{z}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{z-x^2}} f(x,y,z)\mathrm{d}y$；**B.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\,\mathrm{d}z$；

C. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z$；**D.** $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

二．填空题

1．交换积分次序$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,\ y)dx =$ ______________________________.

2．交换累次积分的顺序$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,\ y)dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,\ y)dy =$ ____________.

3．交换累次积分的顺序$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,\ y)dy =$ ____________________.

4．积分$\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$的值等于 ____________________.

三． 计算二重积分$\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dxdy$，其中$D = \{(x,\ y):\ x^2+y^2 \le 1,\ x+y \ge 1\}$.

四．计算$\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dxdy$，其中$D$是由圆周$x^2+y^2=1$及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

五． 计算三重积分 $I = \iiint\limits_\Omega (3x^2+5y^2+7z)\, dxdy$，其中

$$\Omega:\ 0 \le z \le \sqrt{R^2-x^2-y^2}\ .$$

六．求三重积分

$$I = \iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z)\, dxdydz$$

其中Ω是由曲线$\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周所成的曲面与平面$z=4$所围成的立体.

七． 计算积分$I = \int_0^1 x^2 f(x) dx$，其中$f(x) = \int_{x^3}^{x} e^{-y^2} dy$.

八．设$F(t) = \iiint\limits_\Omega [z^2 + f(x^2+y^2)]\, dxdydz$，其中函数$f(u)$连续，$\Omega$是由$0 \le z \le h$，$x^2+y^2 \le t^2$所围成，求$\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2} F(t)$.

参考答案

一. 1. （C）；　2. （A）；　3. （A）；　4. （C）.

二. 1. $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x, y)dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)dy$；　2. $\int_{-1}^{2} dy\int_{y^2}^{y+2} f(x, y)dx$；

3. $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)dx$；　4. $\frac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right)$.

三. $2-\frac{\pi}{2}$；　四. $\frac{\pi}{8}(\pi-2)$　五. $2\pi R^5$；　六. $\frac{256}{3}\pi$

七. $\frac{1}{6e}$

八. $\frac{1}{3}\pi h^3+\pi hf(0)$.