第 12 章课外练习题

一．选择题

1．若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ＿＿＿＿＿＿ ．

（A）．一定绝对收敛；　　　（B）．一定条件收敛；

（C）．一定发散；　　　　　（D）．可能收敛也可能发散．

2．函数$f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$在$x=0$处的幂级数展开式为＿＿＿＿＿＿ ．

（A）．$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!(2n+1)} x^{2n+1} \quad (-\infty < x < +\infty)$；

（B）．$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!(2n+1)} x^{2n+1} \quad (-\infty < x < 0，0 < x < +\infty)$；

（C）．$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1} \quad (-\infty < x < +\infty)$；

（D）．$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1} \quad (-\infty < x < 0，0 < x < +\infty)$ ．

3．下列级数中，属于条件收敛的是＿＿＿＿＿＿ ．

（A）．$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n}$ ；　　　（B）．$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\frac{\pi}{n}}{n^n}$ ；

（C）．$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$；　　　（D）．$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ ．

4．设函数$f(x)$是以2π为周期的周期函数，它在$[-\pi，\pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x & -\pi \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < \pi \end{cases} ,$$

再设$f(x)$的 Fourier（傅立叶）级数的和函数为$s(x)$，则$s(\pi)=$【　　　】.

（A）．$-\frac{\pi}{2}$ ；　　（B）．$-\pi$ ；　　（C）．0 ；　　（D）．π ．

5．设a_n与b_n符合下列＿＿＿＿＿条件，可由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散推出级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散.

（A）．$|a_n| \le b_n$；　（B）．$|a_n| \le |b_n|$ ；　（C）．$a_n \le |b_n|$；　（D）．$a_n \le b_n$ ．

6．设α为常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

（A）．绝对收敛.　（B）．发散.　（C）．条件收敛.　（D）．敛散性与α取值有关.

7．设$u_n=(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$，则

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛.　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散.　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

8．设函数 $f(x)=x^2,0\le x<1$，而 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,-\infty<x<+\infty$．其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx,(n=1,2,\cdots)$，则 $s(-\frac{1}{2})$ 等于

(A) $-\frac{1}{2}$，　(B) $-\frac{1}{4}$，　(C) $\frac{1}{4}$，　(D) $\frac{1}{2}$

9．设$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛，则

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛，

(D) $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n+1}$ 都收敛.

10．设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则必定收敛的级数为

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n-1})$

11．若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，则此级数在 $x=-1$ 处

(A) 条件收敛，　(B) 绝对收敛，　(C) 发散，　(D) 收敛性不确定.

12．设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为 3，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$的必定收敛的区间为

(A) (－2, 4)　　(B) [－2, 4]　　(C) (－3, 3)　　(D) (－4, 2)

二．填空题

1．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)$（$\alpha$为常数）的敛散性为_____ .

2．若$a>0$，$b>0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$在 _________ 时发散.

3．设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R_1$，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径为$R_2$，且$0<R_1<R_2<+\infty$，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$的收敛半径为____________.

4. 设$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\le x<0\\ 1+x^2 & 0\le x<\pi\end{cases}$，且以$2\pi$为周期，则$f(x)$的傅里叶级数在点$x=\pi$处收敛于_____________.

5. $p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$在$p$满足____________条件下收敛.

6. 数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$在$a$满足_________________________条件下收敛.

三．判断下列级数的敛散性:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}\sin\frac{1}{n}$；　　2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)}(a\ne 0)$；

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$；　　4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1/n)^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$；　　6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(\sqrt{1+n}-\sqrt{n-1})$

四. 试将函数 $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ 展成 x 的幂级数（要求写出该幂级数的一般项并指出其收敛域）.

五. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n!\frac{x^n}{n^n}$ 的收敛域（端点情形要讨论）.

六. 利用 $\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)$ 的幂级数展开式，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}$ 的和.

七. ⑴. 将 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展开为 x 的幂级数；

⑵. 指出该幂级数的收敛域；

⑶. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$ 的和.

八．把函数 $f(x)=\begin{cases} x & 0<x\le 1 \\ 2-x & 1<x<2 \end{cases}$ 分别展成正弦函数和余弦函数。

九． 把函数 $f(x)=\begin{cases} -\frac{\pi}{2} & -\pi\le x<\frac{-\pi}{2} \\ x & \frac{-\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2}\le x<\pi \end{cases}$ 展成付氏级数。

十． 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$ 的收敛域，并求其和函数.

十一．设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0)=0, f'(0)=0$，

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

十二．1. 将 $f(x)=2+x+\arctan x$ 展开成关于 x 的幂级数，指出收敛区间.

2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性.