第四章课外练习题解答

不定积分习题解答

1．求不定积分

（1）$\int e^{-|x|}dx$；　　　　（2）$\int \max\{x^3,x^2,1\}dx$；

解　（原函数的概念，分段函数的原函数）

（1）$\int e^{-|x|}dx=\begin{cases}-e^{-x}+C_1, & x\ge 0;\\ e^{x}+C_2, & x<0,\end{cases}$ 其中 $-1+C_1=1+C_2$，即 $C_1=2+C_2$.

（2）$\int \max\{x^3,x^2,1\}dx=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C_1, & x<-1;\\ x+C_2, & -1\le x\le 1;\\ \frac{1}{4}x^4+C_3, & x>1,\end{cases}$ 其中 $C_1=C_2-\frac{2}{3}, C_3=C_2+\frac{3}{4}$.

2． 设 $\int xf(x)dx=\arctan x+C$，求 $\int\frac{1}{f(x)}dx$.

解　（不定积分概念）

因为　　$\int xf(x)dx=\arctan x+C$，所以 $xf(x)=[\arctan x+C]'=\frac{1}{1+x^2}$，因此

$$\int\frac{1}{f(x)}dx=\int x(1+x^2)dx=\frac{1}{2}x^2(1+\frac{1}{2}x^2)+C.$$

3． 已知 $f'(2+\cos x)=\tan^2 x+\sin^2 x$，求 $f(x)$ 的表达式.

解　（原函数的概念，复合函数的导数，凑微分法）

因为　$f'(2+\cos x)=\tan^2 x+\sin^2 x$，所以

$$\begin{aligned}(f(2+\cos x))' &= f'(2+\cos x)(-\sin x)\\ &=(\tan^2 x+\sin^2 x)(-\sin x)=(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos^2 x)(-\sin x),\end{aligned}$$

因此　$f(2+\cos x)=\int(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos^2 x)(-\sin x)dx=-\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$，

故　$f(x)=\frac{1}{2-x}+\frac{1}{3}(2-x)^3+C$.

另解　令 $t=2+\cos x$，根据 $f'(2+\cos x)=\tan^2 x+\sin^2 x$ 得

$$f'(t)=\frac{1}{(t-2)^2}-(t-2)^2,$$

积分得 $f(t)=\frac{1}{2-t}+\frac{1}{3}(2-t)^3+C$，故 $f(x)=\frac{1}{2-x}+\frac{1}{3}(2-x)^3+C$.

4．函数 $f(x)=\begin{cases}-\sin x & x\le 0\\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & x>0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上有没有原函数？

解 （原函数的概念，导函数的介值性质）

$f(x)=\begin{cases}-\sin x & x\le 0\\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & x>0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上没有原函数，因为 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上不满足介值性质，所以它不可能是某个函数的导函数.

另解 若设 $F'(x)=f(x), x\in(-\infty,+\infty)$，则必有 $F(x)=\begin{cases}\cos x+C, & x\le 0,\\ \sqrt{x}+1+C, & x>0,\end{cases}$ 但易知 $F'_-(0)=0$，$F'_+(0)$ 不存在，这与 $F'(0)=f(0)=0$ 矛盾.

5．求下列不定积分

解 （1）（凑微分法）

$$\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C;$$

注 本题也可用分部积分法求解.

（2）（凑微分法）

$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\sin^2x}{\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2x+b^2}}=\begin{cases}\frac{\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2x+b^2}}{a^2-b^2}+C, & a^2\ne b^2;\\ \frac{1}{2|b|}\sin^2x+C, & a^2=b^2\end{cases};$$

（3）（凑微分法）

$$\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3}\right]dx=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\frac{f'(x)^2-f(x)f''(x)}{f'(x)^2}dx$$

$$=\int\frac{f(x)}{f'(x)}d\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2+C;$$

另解 （分部积分法）

因为

$$\int[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3}]dx=\int\frac{f(x)}{f'(x)}dx+\int\frac{f^2(x)}{f'(x)}d\left(\frac{1}{f'(x)}\right)$$

$$=\int\frac{f(x)}{f'(x)}dx+\frac{f^2(x)}{f'(x)}\frac{1}{f'(x)}-\int[\frac{2f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3}]dx$$

$$=\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2-\int[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3}]dx$$

所以 $\int[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3}]dx=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2+C$；

（4）（凑微分法）

$$\int\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}e^{-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}dx=e^{-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}+C\text{；}$$

（5）（凑微分法） $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

$$=\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(x-a)(x-a+a-b)}}$$

$$=-\int\frac{d\left(\frac{1}{x-a}\right)}{\sqrt{1+\frac{a-b}{x-a}}}=\begin{cases}\frac{2}{b-a}\sqrt{1+\frac{a-b}{x-a}}+C, & a\neq b;\\ \frac{1}{a-x}+C, & a=b\end{cases}\text{；}$$

（6）（第二换元积分法）

$$\int\frac{x^4}{(x+1)^{100}}dx\overset{x+1=t}{=}\int\frac{(t-1)^4}{t^{100}}dt$$

$$=\int(\frac{1}{t^{96}}-\frac{4}{t^{97}}+\frac{6}{t^{98}}-\frac{4}{t^{99}}+\frac{1}{t^{100}})dt$$

$$=-\frac{1}{95t^{95}}+\frac{1}{24t^{96}}-\frac{6}{97t^{97}}+\frac{2}{49t^{98}}-\frac{1}{99t^{99}}+C$$

（7）（拆项、凑微分法）

$$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=\tan\frac{x}{2}-\ln(1+\cos x)+C\,.$$

或 $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{(1+\sin x)(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}dx=\int\left(\csc^2 x+\csc x-\csc x\cot x-\cot x\right)dx$

（8）（拆项、凑微分法）

$$\int\frac{7\cos x-3\sin x}{5\cos x+2\sin x}dx$$
$$=\int\frac{5\cos x+2\sin x+(-5\sin x+2\cos x)}{5\cos x+2\sin x}dx$$
$$=x+\ln|5\cos x+2\sin x|+C$$

注 $\int\frac{a\cos x+b\sin x}{A\cos x+B\sin x}dx=\int\frac{C(-A\sin x+B\cos x)+D(A\cos x+B\sin x)}{A\cos x+B\sin x}dx$.

（9）（有理化、凑微分法）

$$\int\frac{\sqrt{x(1+x)}}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}dx=\int[\sqrt{1+x}-\sqrt{x}]\sqrt{x(1+x)}dx$$
$$=\int[(1+x)\sqrt{x}-x\sqrt{1+x}]dx$$
$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}-\frac{2}{5}(1+x)^2\sqrt{1+x}+C$$

（10）（第二换元积分法、凑微分法）

$$\int\frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}dx\overset{x=\sqrt{\frac{3}{2}}\tan t}{=}\int\sqrt{2}\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\sec t}{\sqrt{\frac{3}{2}}\tan t}\sqrt{\frac{3}{2}}\sec^2 tdt=\sqrt{3}\int\frac{1}{\sin t\cos^2 t}dt$$
$$=\sqrt{3}\int[\frac{\sin t}{\cos^2 t}+\frac{1}{\sin t}]dt=\sqrt{3}[\sec t-\ln(\csc t+\cot t)+C$$
$$=\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}x}+C\text{。}$$

（11）（第二换元积分法、凑微分法）

$$\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx\overset{\arctan x=t}{=}\int e^t\cos tdt$$
$$=\frac{e^t}{2}(\cos t+\sin t)+C=\frac{(1+x)e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}+C\text{。}$$

（12）（第二换元积分法）

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4}}}=\ln(x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+6})+C\ .$$

（13）（凑微分法）$\int\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cos x}dx$

$$\int\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cos x}dx=\int\frac{\cos x-\sin x}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\sin x\cos x}dx$$

$$=\int\frac{2(\cos x-\sin x)}{1+(\cos x+\sin x)^2}dx$$

$$=2\int\frac{d(\cos x+\sin x)}{1+(\cos x+\sin x)^2}$$

$$=2\arctan(\cos x+\sin x)+C$$

（14）（凑微分法） $\int\frac{\sin x+\cos x}{1+\sin x\cos x}dx$

$$\int\frac{\cos x+\sin x}{1+\sin x\cos x}dx=\int\frac{\cos x+\sin x}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+\sin x\cos x}dx$$

$$=\int\frac{2(\cos x+\sin x)}{3-(\sin x-\cos x)^2}dx$$

$$=2\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{3-(\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+\sin x-\cos x}{\sqrt{3}-\sin x+\cos x}+C。$$

（15）（综合题：凑微分法、第二换元积分法、解方程） $\int\frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx$

因为

$$\int\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx=\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}=\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})+C,$$

$$\int\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx=\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}=\arcsin(\frac{\sin x-\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}}{\sqrt{3}})+C,$$

所以

$$\int\frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\arcsin(\frac{\sin x-\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}}{\sqrt{3}})-\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})\right]+C.$$

（16）（凑微分法．注意分情况讨论）

当 $a\neq 0$ 时，

$$\int \frac{\tan x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx$$
$$= \int \frac{\tan x}{b^2 + a^2 \tan^2 x} d\tan x = \frac{1}{2a^2} \ln(b^2 + a^2 \tan^2 x) + C \text{。}$$

当 $a = 0$ 时，

$$\int \frac{\tan x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx = \frac{1}{b^2} \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \frac{1}{2b^2} \sec^2 x + C .$$

（17）（凑微分法）$\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)} dx$

$$\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)} dx = \int \frac{(1+x)\ e^x}{xe^x(1+xe^x)} dx = \int \frac{d(xe^x)}{xe^x(1+xe^x)} dx \quad \text{（令 } xe^x = t \text{）}$$

$$= \int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \frac{(1+t-t)dt}{t(1+t)} = \int (\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}) dt = \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right| + C$$

（18）（有理化、凑微分法）$\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx$

$$\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx = \int \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx$$

$$= \int \frac{de^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} + \int \frac{de^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}} = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin e^{-x} + C$$

（19）（凑微分法）$\int \frac{\ln \tan x}{\sin 2x} dx$

$$\int \frac{\ln \tan x}{\sin 2x} dx = \int \frac{\ln \tan x}{2\frac{\sin x}{\cos x} \cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\ln \tan x}{\tan x} d(\tan x)$$

$$= \frac{1}{2} \int \ln \tan x d(\ln \tan x) = \frac{1}{4} (\ln \tan x)^2 + C$$

（20）（第二换元积分法：三角换元、倒数换元）$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$

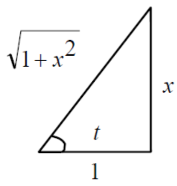
法 1　令 $x = \tan t, dx = \sec^2 t dt$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt$$

$$= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^4 t}d(\sin t)$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{1}{\sin^3 t} + \frac{1}{\sin t} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$$



法 2　令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{t^3 dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{t^2 d(t^2)}{\sqrt{1+t^2}} \qquad (令 u=t^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{u\ du}{\sqrt{1+u}} = -\frac{1}{2}\int \frac{u+1-1}{\sqrt{1+u}}du$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\int \sqrt{1+u}du - \int \frac{1}{\sqrt{1+u}}du\right]$$

$$= -\frac{1}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}} + (1+t^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$$

6．求 $\int xf'(x)dx$，其中 $f(x)$ 的一个原函数是 $(1+\sin x)\ln x$.

解（原函数的概念，分部积分公式）

因为 $f(x)=[(1+\sin x)\ln x]' = \cos x\ln x + \frac{1+\sin x}{x}$，所以

$$\int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx = x\cos x\ln x + 1 + \sin x - (1+\sin x)\ln x + C .$$

7．设 $f'(e^x) = a\sin x + b\cos x$ (a,b是不同时为零的常数),，求 $f(x)$.

解（原函数的概念，复合函数的导数，分部积分公式）

因为　$f'(e^x) = a\sin x + b\cos x$，　所以

$$\left[f(e^x)\right]' = f'(e^x)e^x = ae^x\sin x + be^x\cos x .$$

由于　$\int e^x\sin xdx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C, \int e^x\cos xdx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$，

从而　$f(e^x) = \frac{1}{2}e^x[(a+b)\sin x + (b-a)\cos x] + C$，故

$$f(x)=\frac{1}{2}x[(a+b)\sin(\ln x)+(b-a)\cos(\ln x)]+C.$$

注 也可令$t=e^x$得到$f'(t)=a\sin(\ln t)+b\cos(\ln t)$，再积分得

$f(x)=\frac{1}{2}x[(a+b)\sin(\ln x)+(b-a)\cos(\ln x)]+C$.

8．当a,b,p满足什么条件时，$\int\frac{ax^2+bx+p}{x^3(x-1)^2}dx$是有理函数?

解 （有理函数的积分）

因为$\frac{ax^2+bx+p}{x^3(x-1)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}$，所以当$A_1=B_1=0$时，

$\int\frac{ax^2+bx+p}{x^3(x-1)^2}dx$是有理函数．这时

$$\frac{ax^2+bx+p}{x^3(x-1)^2}=\frac{A_2x(x-1)^2+A_3(x-1)^2+B_2x^3}{x^3(x-1)^2},$$

因此$\begin{cases}A_2+B_2=0,\\A_3-2A_2=a,\\A_2-2A_3=b,\\A_3=p,\end{cases}$ 由此整理得 $a+2b+3p=0$.

9． 求不定积分$\int\frac{x^3}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$

解（有理函数的积分）

令 $\frac{x^3}{(x+1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$，则

$$A(x+1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x+1)^2=x^3$$

令$x=-1$，得$B=-1$．令$x=0$，得到

$$A+D=1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

比较x^3的系数，得到

$$A+C=1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

比较一次项系数，注意到$B=-1$，得到

$$2A+C+2D=1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(c)$$

由$(a),(b),(c)$得到$A=2,C=D=-1$．进而得到

$$\int \frac{x^3}{(x+1)(x^2+x+1)^2}dx = 2\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$$

注意到

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}(x^2+x+1) = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{d\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

最终有

$$\int \frac{x^3}{(x+1)(x^2+x+1)^2}dx = 2\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c\ .$$

１０．求下列不定积分

（1）（第二换元积分法，分部积分法）

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx \overset{x=a\sin t}{=} \frac{1}{a^2}\int(\csc^4 t - \csc^2 t)dt = \frac{1}{a^2}\int \csc^4 t dt + \frac{\cot t}{a^2}\ ,$$

而由

$$\begin{aligned}
&\int \csc^4 t dt \\
&= -\cot t\csc^2 t - 2\int \csc^2 t\cot^2 t dt \\
&= -\cot t\csc^2 t - 2\int \csc^4 t dt + 2\int \csc^2 t dt \\
&= -\cot t(2+\csc^2 t) - 2\int \csc^4 t dt
\end{aligned}$$

得

$$\int \csc^4 t dt = -\frac{1}{3}\cot t\,(2+\csc^2 t) + C\ ,$$

所以

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx = \frac{1}{a^2}\int \csc^4 t dt + \frac{\cot t}{a^2} \\
&= \frac{\cot t}{a^2} - \frac{\cot t}{3a^2}(2+\csc^2 t) + C \\
&= \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{3a^2 x}(1-\frac{a^2}{x^2}) + C\ ;
\end{aligned}$$

注 $\int \csc^4 t dt = -\int (1+\cot^2 x) d(\cot x) = -(\cot x + \frac{1}{3}\cot^3 x) + C$.

另解

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx \overset{x=a\sin t}{=} \frac{1}{a^2}\int \cot^2 t \csc^2 t dt = -\frac{1}{a^2}\int \cot^2 t d(\cot t)$$

$$= -\frac{1}{3a^2}\cot^3 t + C = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{3a^2 x}(1-\frac{a^2}{x^2}) + C。$$

再解

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx \overset{x=\frac{1}{t}}{=} -\int t\sqrt{a^2t^2-1}dt = -\frac{1}{3a^2}(a^2t^2-1)\sqrt{a^2t^2-1} + C = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{3a^2 x}(1-\frac{a^2}{x^2}) + C。$$

（2）（分部积分法）

$$\int xe^x \sin x dx = x\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} - \frac{1}{2}\int e^x(\sin x - \cos x)dx$$

$$= x\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + \frac{1}{2}e^x \cos x + C \text{。}$$

（3）（分部积分法） 设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$，求 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)dx$.

令 $u = \sin^2 x$，则 $x = \arcsin\sqrt{u}$, $f(x) = \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,

于是，$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)dx = \int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx = -2\int \arcsin\sqrt{x} d(\sqrt{1-x})$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$$

11. 设 $F(x)$是$f(x)$的一个原函数，且当$x \geq 0$时，有

$$f(x)F(x) = \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}.$$

如果$F(0)=1, F(x)>0$,求$F(x)$.

解（原函数概念、凑微分、分部积分）

$$f(x)F(x) = F'(x)F(x) = \frac{1}{2}\left((F(x))^2\right)' = \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}.$$

$$\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx = -\int x^2e^x d\frac{1}{x+2} = -\frac{x^2e^x}{x+2} + \int \frac{1}{x+2}dx^2e^x = -\frac{x^2e^x}{x+2} + \int xe^x dx$$

$$= -\frac{x^2e^x}{x+2} + xe^x - e^x + c = \frac{x-2}{x+2}e^x + c$$

所以

$$F^2(x) = 2\times\frac{x-2}{x+2}e^x + c$$

由题目条件，$c = 3$.

$$F(x) = \sqrt{\frac{2(x-2)}{x+2}e^x + 3}\,.$$