第八章自测题参考答案

一、 填空题

1．设$\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k},\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$___________$(-3)$

2．设向量$\vec{a}=x\vec{i}+\vec{j},\ \vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$，向量$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，则$x=$_____ $\dfrac{2}{3}$

3. 设向量$\vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{i}}-\vec{\boldsymbol{k}},\ \vec{\boldsymbol{b}}=2\vec{\boldsymbol{i}}+\vec{\boldsymbol{j}}+\vec{\boldsymbol{k}}$，则$\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}}=$__________。$\{1,-3,1\}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$。

4. 已知$\vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{i}}+4\vec{\boldsymbol{j}}+5\vec{\boldsymbol{k}},\ \vec{\boldsymbol{b}}=\vec{\boldsymbol{i}}+\vec{\boldsymbol{j}}+2\vec{\boldsymbol{k}}$，则使$\left(\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)\perp\left(\vec{a}-\lambda\vec{b}\right)$的正数$\underline{\lambda=\sqrt{7}.}$.

5. 设未知向量$\vec{\boldsymbol{x}}$与向量$\vec{\boldsymbol{a}}=2\vec{\boldsymbol{i}}-\vec{\boldsymbol{j}}+2\vec{\boldsymbol{k}}$共线，且满足$\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}=-18$，则向量 $\vec{\boldsymbol{x}}=$

$\underline{-4\vec{\boldsymbol{i}}+2\vec{\boldsymbol{j}}-\vec{\boldsymbol{4}}}$.

6. 已知向量$\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}}$，且$\left|\vec{\boldsymbol{a}}\right|=3,\ \left|\vec{\boldsymbol{b}}\right|=26,\ \left|\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}}\right|=72$，则点积 $\vec{\boldsymbol{a}}\bullet\vec{\boldsymbol{b}}=\underline{\pm 30}$.

二、求通过两平面$2x+y-4=0$与$y+2z=0$的交线及点$M_0\ (2,-1,-1)$的平面方程.

解 过两平面交线的平面束方程为

$$(2x+y-4)+\lambda(y+2z)=0$$

由M_0在此平面上可得$\lambda=-\dfrac{1}{3}$，代入上式的所求平面的方程为

$$3x+y-z-6=0.$$

三、已知平面π： $x+y+z+1=0$和直线 l：$\begin{cases}y+z+1=0\\x+2z=0\end{cases}$，在平面$\pi$内求一条直线，使得它通过$\pi$与$l$的交点，且与$l$垂直.

解 直线与平面的交点满足$\begin{cases}x+y+z+1=0\\y+z+1=0\\x+2z=0\end{cases}$， 解得交点为 $\begin{cases}x=0\\y=-1\\z=0\end{cases}$

将已知直线转化为: $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=z$.

所以该直线的方向矢量为: (－2,－1, 1).

所求直线垂直于平面的法矢量(1, 1, 1), 垂直于已知直线的方向矢量(－2,－1, 1).

所以所求直线的方向矢量为: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

于是所求直线为: $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{-1}$.

四、求经过三点 $P_1(1,1,1), P_2(2,0,1), P_3(-1,-1,0)$ 的平面方程.

解：法一： $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, -1, 0)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2, -2, -1)$

$$\text{取}\ \vec{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} == \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, -4),$$

$$\text{平面方程为}\ (x-1)+(y-1)-4(z-1)=0,$$

$$\text{整理得}\ x+y-4z+2=0.$$

法二：所求平面的方程为 $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$$\text{整理得}\ x+y-4z+2=0.$$

五、求过点 $M_0(0,2,4)$，且与两个平面 π_1： $x+y-2z-1=0$， π_2： $x+2y-z+1=0$ 都平行的直线方程.

解 设所求直线的方向向量为 $\vec{s}$，根据题设条件知，$\vec{s}$ 与平面 π_1 和 π_2 的法向量 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 都垂直，可取 $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$，

由点向式知，所求直线的方程为: $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-4}{1}$.

六、求经过点 $A(-1,2,3)$，垂直于直线 L: $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$ 且与平面 $\Pi: 7x+8y+9z+10=0$ 平行的直线方程.

解法 1　设所求直线 L_1 的方向向量是 $\vec{s}_1$，由于 $L\perp L_1$，即 $\vec{s}\perp\vec{s}_1$，由于 $L_1 \parallel \Pi$

即　$\vec{n}\perp\vec{s}_1$　，

$\vec{s}=(4,5,6)$，$\vec{n}=(7,8,9)$

所以，$\vec{s}_1=\vec{s}\times\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=-3\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}$

故所求的直线方程为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}.$$

解法 2　因所求直线在过点 A 以 L 的方向向量 $\vec{s}$ 为法向量的平面 Π_1 上，也在过点 A 以 Π 的法向量 $\vec{n}$ 为法向量的平面 Π_2 上.

$\vec{s}=(4,5,6)$，$\vec{n}=(7,8,9)$

$\Pi_1: 4(x+1)+5(y-2)+6(z-3)=0$，

$\Pi_2: 7(x+1)+8(y-2)+9(z-3)=0$

所求直线的一般式方程为 $\begin{cases}4x+5y+6z-24=0,\\ 7x+8y+9z-36=0.\end{cases}$