2018~2019 学年《高等数学 A》(上)试题解析

一、单项选择题（本题共有 10 道小题，每小题 3 分，满分 30 分），请将答案填在括号内.

1. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上不恒为零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 【　　　】.

（A）有跳跃间断点 $x=0$；　　（B）有可去间断点 $x=0$；

（C）在 $x=0$ 处左极限不存在；　　（D）在 $x=0$ 处右极限不存在.

【答案】(B)

【解析】 显然 $x=0$ 为 $g(x)$ 的间断点,且由 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数知, $f(0)=0$.于是有

$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ 存在,所以 $x=0$ 是可去间断点.故选(**B**).

2. 设函数 $\varphi(x)$ 可微，则复合函数 $y=\varphi(\tan x)$ 的微分 $\mathrm{d}y=$ 【　　　】.

（A）$\varphi'(x)\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　（B）$\varphi'(\tan x)\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

（C）$\varphi'(\tan x)\sec^2 x\,\mathrm{d}x$；　　（D）$\varphi'(\tan x)\sec^2 x$.

【答案】(C)

【解析】由复合函数的微分法得： $\mathrm{d}y=\varphi'(\tan x)\mathrm{d}\tan x=\varphi'(\tan x)\sec^2 x\,\mathrm{d}x$.故选(**C**).

3. 设函数 $f(x)=\left|x^3-1\right|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的【　　　】.

（A）充分必要条件；　　（B）必要但非充分条件；

（C）充分但非必要条件；　　（D）既非充分也非必要条件.

【答案】(A)

【解析】 因为

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{x-1}\cdot\varphi(x)=3\varphi(1),$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-1}{x-1}\cdot\varphi(x)=-3\varphi(1)$$

所以，$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的充分必要条件是 $3\varphi(1)=-3\varphi(1)$，即 $\varphi(1)=0$. 故选(A).

4. 设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则【　　　】.

（A） $f(0)$ 不是函数 $f(x)$ 的极值，$(0, f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

（B） $f(0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值；

（C） $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

（D） $f(0)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值.

【答案】**(B)**

【解析】利用泰勒公式有 $f(x)-f(0)=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$，其中 ξ 介于 x 与零之间。由于

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1>0$，由极限的保号性知，在 x=0 的某去心邻域内有 $f''(x)>0$，因此在这个去心邻域内，$f(x)-f(0)>0$，故 $f(0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值，选**(B)**.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\sin\dfrac{1}{n}=$【　】.

（A） 1；　　**（B）** 0；　　**(C)** e；　　**（D）** e^{-1}**.**

【答案】**(D)**

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\sin\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}.\frac{2}{n}\ldots\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}}=e^{\int_0^1\ln x\,dx}=\frac{1}{e}$$

故选**(D)**.

6. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x\sin(x-t)^2\,dt=$【　　　】.

（A） $\sin x$；　（B） 0；　(C) $\sin x^2$；　（D） $\cos x$.

【答案】(**C**)

【解析】令 $x-t=u$，则 $\int_0^x \sin\left(x-t\right)^2 \mathrm{d}t=-\int_x^0 \sin u^2 \ \mathrm{d}u$， 因此 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin(x-t)^2 \mathrm{d}t=\sin x^2$，

故选(**C**).

7．反常积分 $\int_{-\infty}^{0} x e^{-3x^2} \mathrm{d}x=$ 【　　　】.

（**A**）$\frac{1}{6}$ ；　（**B**）$-\frac{1}{6}$；　(**C**) 0；　（**D**）6 .

【答案】(**B**)

【解析】由凑微分法得 $\int_{-\infty}^{0} x e^{-3x^2} \mathrm{d}x=\frac{-1}{6}\int_{-\infty}^{0} e^{-3x^2} \mathrm{d}\left(-3x^2\right)=\frac{-1}{6} e^{-3x^2}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{-1}{6}$，

故选(**B**).

8. 设 $M=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)\mathrm{d}x$， $N=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x)\mathrm{d}x$，则下列选项中正确的是【　　】.

(A) $M<1<N$；　**(B)** $M<N<1$；　**(C)** $N<M<1$；　**(D)** $1<M<N$.

【答案】(A)

【解析】$\sin(\sin x),\cos(\cos x)$ 均在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，由 $\sin x\le x$ 可以得到 $\sin(\sin x)\le \sin x$，进一步得到 $M=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\mathrm{d}x=1$，令 $x=\frac{\pi}{2}-t$ 可以得到

$N=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin t)\mathrm{d}t>\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\mathrm{d}t=1$． 所以选(A).

9. 微分方程 $\left(1+x^2\right)y'+2x\,y=1$ 的通解是【　　】，其中 C 为任意常数.

(A) $y=\frac{x+C}{1+x^2}$；　**(B)** $y=-\frac{x+C}{1+x^2}$；

(C) $y=\frac{2x+C}{1+x^2}$；　**(D)** $y=-\frac{2x+C}{1+x^2}$.

【答案】(**A**)

【解析】原方程可化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{1}{1+x^2}$，这是一阶线性非齐次微分方程，由求解公式可得通解为

$$y=e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}\left(\int \frac{1}{1+x^2} e^{\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right),$$

整理得　　$y=\dfrac{x+C}{1+x^2}$，其中C为任意常数．故选(**A**).

10. 已知 $y=1, y=x, y=x^2$ 为二阶非齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的三个解，则其通解为【　　】（其中C_1,C_2为任意常数）.

(A) $y=C_1+C_2x+x^2$；　　(B) $y=C_1x+C_2x^2+1$；

(C) $y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1$；　　(D) $y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+x^2-x$.

【答案】(C)

【解析】因为$\dfrac{x^2-1}{x-1}\neq$常数，所以，$x-1$，x^2-1线性无关。因而，齐次线性微分方程的通解为

$Y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)$，于是，二阶非齐次线性微分方程的通解为$y=Y+y^*$

即 $y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1$，故选(C).

二、（本题满分 10 分） 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} t\,e^t\sin t\,\mathrm{d}t}{x^6e^x}$.

【详解】　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\left(x^2e^{x^2}\sin x^2\right)}{\left(x^6+6x^5\right)e^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x^2}}{(x+6)e^x}=\dfrac{1}{3}$.

三、（本题满分 10 分） 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程$\begin{cases}x=\ln\left(1+t^2\right),\\ y=t+\arctan t\end{cases}$所确定，求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

【详解】
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1+\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{2+t^2}{2t}=\frac{1}{t}+\frac{t}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{1}{t}+\frac{t}{2}\right)'\cdot\frac{t^2+1}{2t}=\frac{(t^2+1)(t^2-2)}{4t^3}=\frac{t^4-t^2-2}{4t^3}$$

四、（本题满分 10 分） 证明当 $x>0$ 时，$\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$.

【详解】　令 $f(x)=\arctan x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\pi}{2}$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导且

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{-1}{x^2(1+x^2)}<0$$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2})=0$$，从而 $f(x)>0$，即 $\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}$.

五、（本题满分 10 分） 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且满足方程

$\int x f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{1-x^2}+\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x+C$，其中 C 为任意常数，求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

【详解】 对方程两边求导得 $x f(x)=-\dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}+x^2\sin x$

$$f(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+x\sin x,$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int x\sin x\,\mathrm{d}x,$$

$$=-\arcsin x+\int x\,\mathrm{d}(-\cos x)=-\arcsin x-x\cos x+\sin x+C,$$

$=\arccos x-x\cos x+\sin x+C$，其中 C 为任意常数.

六、（本题满分 10 分）过抛物线 $y=x^2$ 上的一点 $P(a,a^2)$ 作切线，问 a 为何值时所作切线与抛物线 $y=-x^2+4x-1$ 所围成的图形面积最小，并求出最小面积.

【详解】 过抛物线 $y=x^2$ 上一点 $P(a,a^2)$ 的切线方程为 $y-a^2=2a(x-a)$，即 $y=2ax-a^2$

该切线与抛物线 $y=-x^2+4x-1$ 的交点 $\begin{cases} y=2ax-a^2 \\ y=-x^2+4x-1 \end{cases}$

$x^2+(2a-4)x+1-a^2=0$，交点的横坐标为 x_1，x_2， $x_1<x_2$，

则由韦达定理知， $x_1+x_2=4-2a$， $x_1x_2=1-a^2$

$x_2-x_1=2\sqrt{2a^2-4a+3}$，于是所求图形面积为

$$S=\int_{x_1}^{x_2}(-x^2+4x-1-2ax+a^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(x_1^3-x_2^3)-(a-2)(x_2^2-x_1^2)+(a^2-1)(x_2-x_1)$$

$$=\frac{4}{3}(2a^2-4a+3)^{\frac{3}{2}},$$

$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a}=8(2a^2-4a+3)^{\frac{1}{2}}(a-1)$，令$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a}=0$得$a$=1唯一的驻点.

故当a=1时所围图形有最小值$S=\dfrac{4}{3}$.

七、（本题满分 10 分）设连续函数$y=f(x)$满足微分方程$y''-3y'+2y=2e^x$，其图形在(0,1)处的切线与曲线$y=x^2-x+1$在该点处的切线重合，求函数$y=f(x)$的表达式.

【详解】 特征方程为$r^2-3r+2=0$，解得特征根为$r=1,\quad r=2$，所以其对应的齐次方程的通解为$Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

令$y''-3y'+2y=2e^x$的特解为$y^*=Axe^x$，代入方程组得到$A=-2$，故特解为$y^*=-2xe^x$，则

通解为$y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$

由题意知$f(0)=1, f'(0)=-1$，得到$C_1=1,\quad C_2=0$，

故所求函数为$y=e^x-2xe^x=(1-2x)e^x$.

八、（本题满分 10 分）设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内可导，且满足$f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{1-x^2}f(x)\,\mathrm{d}x$，试证：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

【证明】 由积分中值定理，得$f(1)=e^{1-\xi_1^2}f(\xi_1), \xi_1\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$,

即$f(1)e^{-1}=e^{-\xi_1^2}f(\xi_1)$，令$\varphi(x)=e^{-x^2}f(x)$ ，

则$\varphi(x)$在$[\xi_1,1]$上连续，在$(\xi_1,1)$内可导，且

$\varphi(1)=f(1)e^{-1}=e^{-\xi_1^2}f(\xi_1)=\varphi(\xi_1)$,

由罗尔中值定理知，在$(\xi_1,1)$内至少存在一点ξ，使得$\varphi'(\xi)=0$，

即$\varphi'(\xi)=e^{-\xi^2}\left[f'(\xi)-2\xi f(\xi)\right]=0$，

于是$f'(\xi)=2\xi f(\xi)$，$\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$.