第二章课外练习题解答

导数和微分的概念与运算

1．求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1-2f(x))^{\frac{1}{\sin x}}$，其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，$f(0)=0, f'(0)=2$，且当 $x\neq 0$ 时 $f(x)\neq 0$；

解 （重要极限，导数定义）

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1-2f(x))^{\frac{1}{\sin x}} &= \lim_{x\to 0}(1-2f(x))^{\frac{1}{-2f(x)}\bullet\frac{-2f(x)}{\sin x}} \\ &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{-2(f(x)-f(0))}{x}\bullet\frac{x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{-2f'(0)} = e^{-4}\text{。}\end{aligned}$$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan(5x^2)}$，其中 $f'(0)$ 存在，$f(0)=0$；

解 （导数定义，无穷小比较）

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{\tan(5x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\frac{1-\cos x}{\tan(5x^2)} = \frac{1}{10}f'(0).$$

（3）$\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{2}}\sqrt{f\left(\frac{2}{x}\right)}$，其中曲线 $y=f(x)$ 在原点处与曲线 $y=\sin x$ 相切.

解 （导数几何意义，相切概念）

因为 $$f(0)=0,\quad f'(0)=1,$$

所以

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{2}}\sqrt{f\left(\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to +\infty}\sqrt{2\frac{f\left(\frac{2}{x}\right)-f(0)}{\frac{2}{x}}} = \sqrt{2f'(0)} = \sqrt{2}\,.$$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\cos\dfrac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处右连续但右导数不存在，则 α 的取值范围是[ ]

A $\alpha>0$． B $0<\alpha\le 1$． C $\alpha>1$． D $\alpha<1$．

解 选(B)．（连续概念，可导概念）

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}\cos\dfrac{1}{x}=f(0)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}=0$，故 $\alpha>0$；又因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x}$$

不存在，所以 $\alpha\le 1$．

3．设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义，$F(x)=|x|f(x)$，则 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件是[ ]

（A） $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$． （B） $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在．

（C） $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续． （D） $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导．

解 选(A)．（可导概念，导数与左右导数的关系）

因为
$$F'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+} f(x),$$

$$F'_{-}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=-\lim_{x\to 0^-} f(x),$$

所以 $F'_{+}(0)=F'_{-}(0)$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$．

4. $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，对任意的 x,h 有 $f(x+h)=f(x)g(h)+f(h)g(x)$

成立，且 $f(0)=g'(0)=0,\ g(0)=f'(0)=1$，求 $f'(x)$．

解 （导数定义）

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(h)+f(h)g(x)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)(g(h)-g(0))+g(x)(f(h)-f(0))}{h}\\
&=f(x)g'(0)+g(x)f'(0)\\
&=g(x)。
\end{aligned}$$

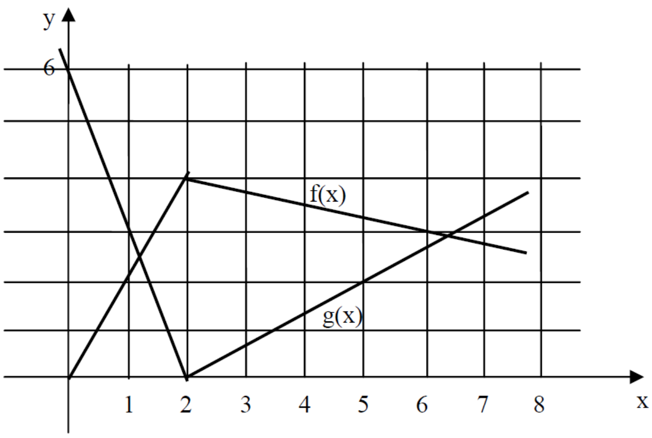
5. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求 $f''(0)$.

解 （高阶导数定义）

因为 $$f'(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ 4x^3\sin\dfrac{1}{x}-x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \end{cases}$$

所以 $$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}[4x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}]=0.$$

6．如图，$f(x), g(x)$ 是两个逐段线性的连续函数，设 $u(x)=f(g(x))$，求 $u'(1)$ 的



值.

解 （导数的几何意义，复合函数的求导法）

由于 $u'(1)=f'(g(1))g'(1)$，且 $g(1)=3, g'(1)=-3, f'(g(1))=f'(3)=-\dfrac{1}{4}$，所以 $u'(1)=\dfrac{3}{4}$.

7. 导数运算

（1）$f(x)=\left|\ln|x|\right|$, 求 $f'(x)$；

解 （分段函数求导，导数定义）

因为 $$f(x)=\left|\ln|x|\right|=\begin{cases} -\ln|x|, & 0<|x|<1, \\ 0, & x=\pm 1, \\ \ln|x|, & |x|>1, \end{cases}$$

所以
$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & 0<|x|<1,\\ \text{不存在}, & x=\pm 1,\\ \dfrac{1}{x}, & |x|>1。\end{cases}$$

（2）已知 $y=y(x)$ 由方程 $\sin y+e^x-xy^2=0$ 确定，求 y'；

解 （隐函数求导）

在 $\sin y+e^x-xy^2=0$ 两端关于 x 求导得

$$y'\cos y+e^x-y^2-2xyy'=0,$$

所以
$$y'=\frac{y^2-e^x}{\cos y-2xy}.$$

（3）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^{y^2}+y^2\ln x+4=0$ 确定，求 y'；

解 （隐函数求导，幂指型函数求导）

在 $x^{y^2}+y^2\ln x+4=0$ 两端关于 x 求导得

$$e^{y^2\ln x}(2yy'\ln x+\frac{y^2}{x})+(2yy'\ln x+\frac{y^2}{x})=0,$$

所以
$$2yy'\ln x+\frac{y^2}{x}=0,$$

故
$$y'=-\frac{y}{2x\ln x}.$$

（4）已知函数 $y=f(\frac{x+1}{x-1})$ 满足 $f'(x)=\arctan\sqrt{x}$，求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=2}$；

解 （复合函数求导）

$$\frac{dy}{dx}=f'(\frac{x+1}{x-1})\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\bullet\frac{-2}{(x-1)^2},$$

所以
$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=2}=-2\arctan\sqrt{3}=-\frac{2}{3}\pi.$$

（5）设函数 $g(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数，若 $f'(x), f''(x)$ 存在且 $f'(x)\neq 0$，求 $g''(y)$.

解 （反函数求导）

因为
$$f(g(y))=y,$$

所以
$$f'(g(y))g'(y)=1,$$

$$f''(g(y))(g'(y))^2+f'(g(y))g''(y)=0,$$

即
$$f'(x)g'(y)=1,$$

$$f''(x)(g'(y))^2+f'(x)g''(y)=0,$$

所以
$$g''(y)=-\frac{f''(x)(g'(x))^2}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}.$$

8．证明 $(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$.

证明 （数学归纳法、求导运算）

当 $n=1, n=2$ 时，容易验证所证等式成立.

设 $n=k$ 时也成立，即 $(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}=\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$，则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}
(x^k e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)} &= [(x^k e^{\frac{1}{x}})']^{(k)} = [kx^{k-1}e^{\frac{1}{x}} - x^{k-2}e^{\frac{1}{x}}]^{(k)}\\
&= k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} - [(x^{k-2}e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)}]'\\
&= k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} - [\frac{(-1)^{k-1}}{x^k}e^{\frac{1}{x}}]'\\
&= k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} - k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^{k-1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}\\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}},
\end{aligned}$$

即原式对 $n=k+1$ 也成立.

9. 设 $f(0)=0$. 证明：函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是：存在在 $x=0$ 处连续的函数 $g(x)$，使得 $f(x)=xg(x)$.

证明 （连续与可导概念）

充分性：由于 $f(x)=xg(x)$，且 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}g(x)=g(0),$$

即 $f'(0)$ 存在，且 $f'(0)=g(0)$；

必要性：由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，所以

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}.$$

令 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0,\end{cases}$ 则函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且使得 $f(x)=xg(x)$.

注 充分性还可以利用微分定义，极限与无穷小的关系证明如下：

因为 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $g(x)=g(0)+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$. 故

$$f(x)-f(0)=xg(x)=g(0)x+\alpha(x)x=g(0)x+o(x),$$

因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微，且 $f'(0)=g(0)$.

10. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，且在 $x_0\in(a,b)$ 处可导. 数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足条件：

$$a<x_n<x_0<y_n<b,\ \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=x_0.$$

试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$.

解 （导数定义，或导数概念，极限与无穷小的关系，无穷小的运算）

法 1 由于

$$\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=\frac{f(y_n)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_n)}{y_n-x_n}$$

$$=\frac{y_n-x_0}{y_n-x_n}\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}-\frac{x_n-x_0}{y_n-x_n}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0},$$

且 $\dfrac{y_n-x_0}{y_n-x_n}-\dfrac{x_n-x_0}{y_n-x_n}=1$，所以

$$\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}-f'(x_0)\right|$$

$$\le\frac{y_n-x_0}{y_n-x_n}\left|\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}-f'(x_0)\right|+\frac{x_0-x_n}{y_n-x_n}\left|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}-f'(x_0)\right|$$

$$\le\left|\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}-f'(x_0)\right|+\left|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}-f'(x_0)\right|,$$

因为 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$，所以

$$\left|\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}-f'(x_0)\right|\to 0,\ \left|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}-f'(x_0)\right|\to 0,(n\to\infty)$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=f'(x_0).$$

法 2　因为 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 所以可微，即

$$f(x_n)=f(x_0)+f'(x_0)(x_n-x_0)+o(x_n-x_0),$$

$$f(y_n)=f(x_0)+f'(x_0)(y_n-x_0)+o(y_n-x_0).$$

故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=\lim_{n\to\infty}\left[f'(x_0)+\frac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_n}-\frac{o(x_n-x_0)}{y_n-x_n}\right]=f'(x_0).$

或写为：

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=f'(x_0)$，

所以 $f(x_n)=f(x_0)+f'(x_0)(x_n-x_0)+\alpha(x_n)(x_n-x_0),\lim\limits_{n\to\infty}\alpha(x_n)=0$，

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}=f'(x_0)$，

所以 $f(y_n)=f(x_0)+f'(x_0)(y_n-x_0)+\beta(y_n)(y_n-x_0),\lim\limits_{n\to\infty}\beta(y_n)=0$.

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[f'(x_0)+\dfrac{y_n-x_0}{y_n-x_n}\beta(y_n)-\dfrac{x_n-x_0}{y_n-x_n}\alpha(x_n)\right]=f'(x_0)$.