第一章课外练习题

第一部分：极限题目

一、求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$；

2. 已知数列 $F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$；

3. 已知 $\left(2+\sqrt{2}\right)^n=A_n+B_n\sqrt{2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{B_n}$；

4. 讨论极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$ $,q\neq 0$；

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$ $(a>0,b>0)$；

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^x$ $(a_k>0)$；

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$；

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$；

9. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{1-\cos x}-1}{\tan(x^k\pi)}=a\neq 0$，求 k 与 a 的值.

二、解答与证明题

1. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是周期函数，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$，那么 $f(x)$ 和 $g(x)$ 两函数有什么关系？ 证明你的结论.

2. 已知当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$．证明当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=AB.$$

3. 若 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$, $|f(x)|\leq|\sin x|$, 则 $|a_1+2a_2+\ldots+na_n|\leq 1$.

4. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{3}{1^2\times 2^2}+\dfrac{5}{2^2\times 3^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2\times(n+1)^2}\right]$ 的值是

(a) 0； (b) 1； (c) 2； (d) 不存在.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$________.

6．设 $f_1(x)=\begin{cases} x, & 1\le x\le 2, \\ \dfrac{1}{x}, & x>2, \end{cases}$ $f_n(x)=\begin{cases} 1, & 1\le x\le n, \\ x^n, & n<x\le n+1, \\ \dfrac{1}{x}, & x>n+1, \end{cases}$

（1）对任意固定的 n，求 $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$；

（2）求 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的表达式；

（3）求 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

第二部分：连续题目

连续函数的概念与性质

1．间断点：（1）函数 $f(x)=(1+x)^{x/\tan(x-\frac{\pi}{4})}$ 在 $(0,2\pi)$ 内的间断点个数是[ ]

（A）1. （B）2. （C）3. （D）4.

（2）指出函数 $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点及其类型.

2．讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}, & x\ne 1, \\ 0, & x=1 \end{cases}$ 的连续性.

3．若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，则在任何一个周期内存在 $\xi\in\mathrm{R}$，使得 $f(\xi+\pi)=f(\xi)$.

4．已知函数 f 在圆周上有定义，并且连续. 证明：可以找到一条直径，使得其两个端点 A，B 满足 $f(A)=f(B)$.

5．证明：若 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，$f(f(x))=x$，则存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

6．证明：平面上，沿任一方向作平行直线，总存在一条直线，将给定的三角形分成面积相等的两部分.