第七章方程练习题（15 分钟）

1. 求微分方程 $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$ **的通解（2004 春）**

解： **对应齐次方程**为 $y' + y\cos x = 0$

齐次方程通解为 $y = ce^{-\sin x}$

令 $y = ue^{-\sin x}$ **为** $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$ **解，将其代入得，**

$u' = 1$ ，**得** $u(x) = x + c$

故， $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$ **的通解为** $y = (x+c)e^{-\sin x}$

或 $y = e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C]$

$= (x+c)e^{-\sin x}$

2. 设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$ **其中** f **为连续函数，求**

$f(x)$.**（2005 春）**

解　原方程可化为 $f(x) = \sin x - x\int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt$

两端对 x **求导得**

$f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)dt - xf(x) + xf(x) = \cos x - \int_0^x f(t)dt$ 　　　　(*)

两端再对 x **求导得** $f''(x) = -\sin x - f(x)$

即 $f''(x) + f(x) = -\sin x$

这是一个二阶线性常系数非齐次方程，由原方程知 $f(0)=0$，**由(＊)式知** $f'(0) = 1$.

特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$ ， **特征根为** $\lambda = \pm i$ ，

对应齐次方程通解为 $\overline{Y} = C_1\sin x + C_2\cos x$

设非齐次方程特解为 $y^* = x(a\sin x + b\cos x)$ ，

代入 $f''(x) + f(x) = -\sin x$ **得** $a = 0, b = \frac{1}{2}$

则非齐次方程通解为 $f(x) = C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{x}{2}\cos x$

由初始条件 $f(0) = 0$ **和** $f'(0) = 1$ **可知，** $C_1 = \frac{1}{2}$， $C_2 = 0$

所求函数为 $f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{x}{2}\cos x$