2016~2017 学年《高等数学 A》(上)试题解析

一、填空题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分），请将答案填在横线上．

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$______________.

【答案】 2

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2/2}=2$.

2. 设函数 $f(x)=e^{2x}+5$，则函数 $y=f(x)$ 的微分 $dy=$______________.

【答案】 $2e^{2x}dx$

【解析】 $dy=f'(x)dx=2e^{2x}dx$

3. 函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内 $f'(x)>0$ 是函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加的______________条件.

【答案】充分

【解析】由 $f'(x)>0$ 当 $x\in(a,b)$，则函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加，推出结论.

4. 不定积分 $\int \sin x\, e^{\cos x}dx=$ ______________.

【答案】 $-e^{\cos x}+C$

【解析】 $\int \sin x\, e^{\cos x}dx=-\int e^{\cos x}d\cos x=-\int de^{\cos x}=-e^{\cos x}+C$.

5. 广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{xdx}{(1+x^2)^2}=$______________.

【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【解析】 $\int_0^{+\infty}\dfrac{xdx}{(1+x^2)^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\dfrac{xdx}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\dfrac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}\Big|_0^b=\dfrac{1}{2}$.

二、单项选择题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分），请将答案填在括号内.

1. 当 $x\to 0$ 时，变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是 (　　　).

(A) 无穷小　　　(B) 有界但不是无穷小量

(C) 无穷大　　　(D) 无界但不是无穷大

【答案】(D)

【解析】(1) 要证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界，常去寻找 $x_n\in(a,b)$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.

(2) 要证明 $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)\neq A$（或 ∞）的一个常用方法是：寻找 $y_n\to x_0$（当 $n\to\infty$ 时），使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=B$ 且 $B\neq A$（或 ∞）.

取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，$n\in N$，则 $x_n\to 0(n\to\infty)$.

且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(2n\pi+\dfrac{\pi}{2})^2\sin(2n\pi+\dfrac{\pi}{2})=\lim\limits_{n\to\infty}(2n\pi+\dfrac{\pi}{2})^2\cdot 1=+\infty$，

因此，当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 无界.

再证 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq\infty$，取 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，则 $y_n\to 0(n\to\infty)$，

且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n\pi\right)^2\sin\left(2n\pi\right)=0\neq\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq\infty$. 故选(D).

2. 若在 (a,b) 内函数 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x)>0$，二阶导数 $f''(x)<0$，则函数 $f(x)$ 在此区间内(　　).

(A) 单调减少，曲线是凹的　　(B) 单调减少，曲线是凸的

(C) 单调增加，曲线是凹的　　(D) 单调增加，曲线是凸的

【答案】(D)

【解析】由 $f'(x)>0$，当 $x\in(a,b)$，则函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加，及 $f''(x)<0$，当 $x\in(a,b)$，则曲线 $y=f(x)$ 的图像在区间 (a,b) 内是凸的. 故选(D).

3. 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，则必有(　　).

(A) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是偶函数

(B) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是奇函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是周期函数

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是单调函数

【答案】(B)

【解析】（1）设 $F(x)$ 是偶函数，即 $F(-x)=F(x)$，

因为函数 $f(x)$ 连续，所以 $F(x)$ 可导.

因此，有 $-F'(-x)=F'(x)$，即有 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数；

（2）反之，若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数，

因此，$\varphi(x)+C$ 也是偶函数，其中 C 为任意常数. 推出 $F(x)$ 是偶函数. 故选(B).

（3）设 $x\in(-\infty,+\infty)$

取 $f(x)=1$，则 $f(x)$ 是偶函数，但其原函数 $F(x)=x+1$ 非奇函数，故(A)不成立；

取 $f(x)=\cos x+1$，则 $f(x)$ 是周期函数，但其原函数 $F(x)=\sin x+x$ 非周期函数，故(C)不成立；

取 $f(x)=2x$，则 $f(x)$ 是单调函数，但其原函数 $F(x)=x^2+1$ 不是单调函数，故(D)不成立；

4. 设 $f(x)$ 是 $[-1\ ,\ 1]$ 上连续的偶函数，则 $\int_{-\pi}^{\pi}[1+xf(\sin x)]dx=($ C $)$.

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　　(B) π　　(C) 2π　　(D) 0

【答案】(C)

【解析】因为 $f(x)$ 是 $[-1\ ,\ 1]$ 上连续的偶函数，所以 $xf(\sin x)$ 是 $[-\pi\ ,\ \pi]$ 上连续的奇函数，由定积分的运算法则和偶倍奇零性质有

$$\int_{-\pi}^{\pi}[1+xf(\sin x)]dx=2\int_0^{\pi}dx+\int_{-\pi}^{\pi}xf(\sin x)dx=2\pi+0=2\pi.$$

5. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(x)\le g(x)$，则对任意 $C\in(0,1)$ 有（　　）.

(A) $\int_{\frac{1}{2}}^{C} f(t)dt\ge\int_{\frac{1}{2}}^{C} g(t)dt$　　(B) $\int_{\frac{1}{2}}^{C} f(t)dt\le\int_{\frac{1}{2}}^{C} g(t)dt$

(C) $\int_C^1 f(t)dt\ge\int_C^1 g(t)dt$　　(D) $\int_C^1 f(t)dt\le\int_C^1 g(t)dt$

【答案】(D)

【解析】因为 $\int_C^1 f(t)dt-\int_C^1 g(t)dt=\int_C^1[f(t)-g(t)]dt=[f(\xi)-g(\xi)](1-C)\le 0$，

所以，选项(D)成立.

三、求解下列各题（本题共有 3 道小题，每小题 6 分，满分 18 分）.

1. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (1-e^t)dt}{x\sin x}$

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (1-e^t)dt}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (1-e^t)dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^x}{2}=-\dfrac{1}{2}$

2. 设 $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=-4\sin t \end{cases}$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【详解】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-4\cos t}{-2\sin t}=2\cot t$，

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-2\csc^2 t}{-2\sin t}=\dfrac{1}{\sin^3 t}$.

3. 求微分方程 $y''-4y'+4y=0$ 的通解.

【详解】特征方程为$r^2-4r+4=0$，

解得$r_{1,2}=2$， 所以微分方程的通解$Y=(C_1+C_2x)e^{2x}$.

四、（本题满分 10 分）求 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

【详解】 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$，

$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$，令 $f'(x)=0,$得 $x=-1,\ \ x=0,\ \ x=1$

故在$(-\infty,\ -1]\cup[0\ ,\ 1]$上 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在$(-\infty,\ -1]\cup[0\ ,\ 1]$上单调减少，

在$[-1\ ,\ 0]\cup[1,\ +\infty)$ 上 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在$[-1\ ,\ 0]\cup[1,\ +\infty)$ 上单调增加.

所以，$x=-1,\ \ x=1$为 $f(x)$ 的极小值点，极小值为 $f(\pm 1)=0$；

$x=0$为 $f(x)$ 的极大值点，极大值为 $f(0)=\dfrac{1}{2}(1-e^{-1})$.

五、（本题满分 10 分）已知$\dfrac{\sin x}{x}$是 $f(x)$ 的一个原函数，求$\int x^3 f'(x)dx$.

【详解】根据条件，有 $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，

所以，$\int x^3 f'(x)dx=\int x^3 d f(x)=x^3 f(x)-\int f(x)dx^3$

$=x^3 f(x)-\int 3x^2 f(x)dx=x^3 f(x)-3\int x^2 d(\frac{\sin x}{x})$

$=x^2\cos x-x\sin x-3(x^2\frac{\sin x}{x}-\int\frac{2x\sin x}{x}dx)\quad =x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C$

六、（本题满分 10 分）设连续函数 $y=f(x)$ 满足方程 $f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2$，求 $f(x)$.

【详解】 方程两边同时求导得：

$f'(x)+2f(x)=2x$，或 $y'+2y=2x$

$f(x)=e^{-\int 2dx}(\int 2xe^{\int 2dx}dx+C)=e^{-2x}(\int 2xe^{2x}dx+C)$

$=e^{-2x}(\int xd(e^{2x})+C)=e^{-2x}(xe^{2x}-\int e^{2x}dx+C)$

$=e^{-2x}(xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x)+C)$

$=e^{-2x}(xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+C)=x-\frac{1}{2}+Ce^{-2x}$

由题意知， $f(0)=0$，$C=\frac{1}{2}$， 所求函数为 $y=f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2x}$

七、（本题满分 12 分）求由 $y=x^2-2x$, $x=3$ 与 x 轴在 $0\le x\le 3$ 所围成的平面图形的面积，并求该图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

【详解】$S_1=\int_0^2(0-x^2+2x)dx=\int_0^2(2x-x^2)dx=\frac{4}{3}$.

$$S_2=\int_2^3(x^2-2x)dx=\frac{4}{3}.$$

所以 $S=S_1+S_2=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

平面图形 S_1 绕 y 轴旋转一周所得的体积为：

$$V_1=\pi\int_{-1}^0(1+\sqrt{1+y})^2dy-\pi\int_{-1}^0(1-\sqrt{1+y})^2dy=\frac{8}{3}\pi.$$

平面图形 S_2 绕 y 轴旋转一周所得的体积为：$V_2=\pi\cdot 3^2\cdot 3-\pi\int_0^3(1+\sqrt{1+y})^2dy=\frac{43}{6}\pi$.

旋转体的体积为 $V=V_1+V_2=\frac{8}{3}\pi+\frac{43}{6}\pi=\frac{59}{6}\pi$.

或$V_1=\left|2\pi\int_0^2 xf(x)dx\right|=\left|2\pi\int_0^2 x(x^2-2x)dx\right|=\frac{8}{3}\pi$，

$V_2=2\pi\int_2^3 xf(x)dx=2\pi\int_2^3 x(x^2-2x)dx=\frac{43}{6}\pi$，

旋转体的体积为$V=V_1+V_2=\frac{8}{3}\pi+\frac{43}{6}\pi=\frac{59}{6}\pi$.

八、（本题满分 10 分）设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导，且$|f'(x)|\le M$，$f(a)=0$，求证 $\int_a^b f(x)\,dx\le\frac{M}{2}(b-a)^2$.

【详解】 设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt-\frac{M}{2}(x-a)^2$，

则 $F'(x)=f(x)-M(x-a)$， $F''(x)=f'(x)-M\le 0$，

又 $F'(a)=0$，所以， $F'(x)\le 0$，且 $F(a)=0$，推出， $F(x)\le 0$ ，所以 $F(b)\le 0$ ，即 $\int_a^b f(x)dx\le\frac{M}{2}(b-a)^2$.