第九章课外练习题及参考答案

多元微分五大概念

（一）填空题

1. 函数 $z=\arcsin\dfrac{1}{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域为（ $D=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$ ）

2. 设函数 $z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，又 $\begin{cases}x=t\\ y=t\end{cases}$，则 $d\,z|_{t=0}=$（ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}dt$ ）

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{xy}, & xy\neq0,\\ x\quad, & xy=0,\end{cases}$ 则 $f_x(0,1)=$（ 1 ）

4. 设 $F(x,y,z)=0$ 满足隐函数定理的条件，则 $\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=$（ -1 ）

（二）解答题

1. 求下列偏导数:

(1) $f(x,y)=3x^2y+5x\sin y+6y$,求 $f_x(0,\frac{1}{2}),f_y(0,\frac{1}{2})$

解:

$$f_x(0,\tfrac{1}{2})=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,\frac{1}{2})-f(0,\frac{1}{2})}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{3\Delta x^2\cdot\frac{1}{2}+5\Delta x\sin(\frac{1}{2})+6\cdot\frac{1}{2}-6\cdot\frac{1}{2}}{\Delta x}=5\sin(\tfrac{1}{2})$$

$$f_y(0,\tfrac{1}{2})=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\frac{1}{2}+\Delta y)-f(0,\frac{1}{2})}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{6\cdot(\frac{1}{2}+\Delta y)-6\cdot\frac{1}{2}}{\Delta y}=6.$$

(当然也可以根据导函数的连续性复求之).

(2) $f(x,y)=\begin{cases}0, xy=0\\ 1, xy\neq0\end{cases}$,求 $f_x(0,0),f_y(0,0)$

解: $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$,同理, $f_y(0,0)=0$.

(进一步还可以知道在任意单位方向上的方向导数为 0)

2. 设函数 $z=f(x,y)$ 是由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定的,在点 $(1,0,-1)$ 求 dz.

解: $dx-\sqrt{2}dy$

3. 设$u=f(x,y,z)$有连续的一阶偏导数，有函数$y=y(x)$及$z=z(x)$分别由下列两式确定：

$e^{xy}-xy=2$和$e^{x}=\int_0^z \frac{\sin t}{t}dt$，求$\frac{du}{dx}$.

解:考虑函数$y=y(x)$, $e^{xy}-xy=2$对x求导时得到$(e^{xy}-1)(y+x\frac{dy}{dx})=0$,

求出$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$. 函数$z=z(x)$,把$e^{x}=\int_0^z \frac{\sin t}{t}dt$两端对$x$求导得到$\frac{dz}{dx}=\frac{ze^x}{\sin z}$.

故$\frac{du}{dx}=f'_x+f'_y\frac{dy}{dx}+f'_z\frac{dz}{dx}=f'_x-f'_y\frac{y}{x}+f'_z\frac{ze^x}{\sin z}$.

4. 设$z=z(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\sin y+\frac{1}{1-xy}$, $z(1,y)=\sin y$, 求$z(x,y)$.

解: $z=\int\frac{\partial z}{\partial x}dx+g(y)=x\sin y-\frac{1}{y}\ln(1-xy)+g(y)$

当$x=1$时, $z(1,y)=\sin y-\frac{1}{y}\ln(1-y)+g(y)$. 利用题目条件$z(1,y)=\sin y$得到

$\sin y-\frac{1}{y}\ln(1-y)+g(y)=\sin y$. 于是$g(y)=\frac{1}{y}\ln(1-y)$, 最后求得

$z=x\sin y-\frac{1}{y}\ln(1-xy)+\frac{1}{y}\ln(1-y)$

5. 已知$\frac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$为某个二元函数的全微分,求$a$的值.

解: $a=2$.

6. 试研究函数(1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 和

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

在$(0,0)$点的连续性，可导性(偏导数存在性)，和可微性。

解: (1) 先证连续

$$f(x,y)=\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}$$

可知 $(x,y)\to(0,0)$ 时，有 $f(x,y)\to 0$，可知 f 在 $(0,0)$ 连续。

进一步可以得出 f 在 R^2 上连续。

再证各偏导数存在

由定义有 $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，同理 $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=0$

进一步的计算得出

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

由此可知 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 都在 R^2 上存在。

最后证明 f 在 $(0,0)$ 不可微,若 f 在 $(0,0)$ 可微,则应有

$$f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}x-\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}y=f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})\quad (x,y)\to(0,0)$$

也就是说 $\lim\limits_{x,y\to 0}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{x,y\to 0}\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

取 $x=y\to 0$ 知上式不成立，故 f 在 $(0,0)$ 不可微。

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

在点 $(0,0)$ 沿过此点的每一条射线 $x=t\cos\alpha,\ y=t\sin\alpha\ (0\le t<\infty)$ 连续,

$\lim\limits_{t\to 0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,0)$

$$\lim_{t\to 0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=0=f(0,0)$$

但此函数在 $(0,0)$ 不是连续的，因为当动点 $P(x,y)$ 沿抛物线 $y=x^2$ 趋于原点时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$$

$\therefore f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续。

注：此题说明，在某一点沿各线性方向连续不能导出在此点的连续性，实际上这是高维空间和一维空间连续性的最大的不同，因为此时 (x,y) 可能并不是以线性方式趋于原点的。

补充：求下列偏导数

（1）设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，且函数 f 的一阶偏导数连续，利用一阶全微分的形式不变性求 $dz,\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

$$dz=\left(f_1'+f_2'+yf_3'\right)dx+\left(f_1'-f_2'+xf_3'\right)dy$$

（2）设 $z=f(x,\varphi(x^2,y^2))$，且 f 与 φ 的二阶偏导数连续，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$$2y\varphi_2' f_{x\varphi}''+4xy\varphi_1'\varphi_2' f_{\varphi\varphi}''+4xy\varphi_{12}'' f_{\varphi}'$$

（3）$w=f(x,u,v),u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$,求 $\dfrac{\partial w}{\partial u},\dfrac{\partial w}{\partial v}$,其中 f 可微, φ,ψ 可微且 $\varphi_x'\psi_y'\neq\varphi_y'\psi_x'$.（提示：$u,v$ 看成自变量，x,y 看成中间变量）

$$\frac{\partial w}{\partial u}=f_u'+\frac{f_x'\psi_y'}{\varphi_x'\psi_y'-\varphi_y'\psi_x'},\ \frac{\partial w}{\partial v}=f_v'-\frac{f_x'\varphi_y'}{\varphi_x'\psi_y'-\varphi_y'\psi_x'}$$

（4）设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $F(cx-az,cy-bz)=0$ 确定,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

其中 F 的二阶偏导数连续, $aF_1'+bF_2'\neq 0$, $F_i'(i=1,2)$ 表示 F 对第 i 个变量的偏导数.

$$\frac{abc^2\left(2F_1'F_2'F_{12}''-(F_1')^2F_{22}''-(F_2')^2F_{11}''\right)}{\left(aF_1'+bF_2'\right)^3}$$

（5）设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$ 所确定的二元函数，求 dz .

$$\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}dx+dy$$

（6）设 $x^2+z^2=y\varphi(\dfrac{z}{y})$, 其中 φ 可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
$$\frac{\varphi(\frac{z}{y})-\frac{z}{y}\varphi'(\frac{z}{y})}{2z-\varphi'(\frac{z}{y})}$$

多元微分的应用

1. 过曲面 $S: F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2=6$ 上点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量为 $\vec{n}$，

求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数。

解：曲面 S 上点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量为

$$\operatorname{grad} f(1,1,1)=(4x,6y,2z)\Big|_{(1,1,1)}=(4,6,2)$$

单位法向量为 $\vec{n}=\dfrac{(2,3,1)}{\sqrt{14}}$.

另一方面，$u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处的三个偏导数为

$$\frac{\partial u(P)}{\partial x}=\frac{6}{\sqrt{14}},\ \frac{\partial u(P)}{\partial y}=\frac{8}{\sqrt{14}},\ \frac{\partial u(P)}{\partial z}=-\sqrt{14}.$$

于是函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处的梯度向量为 $\dfrac{(6,8,-14)}{\sqrt{14}}$，该函数在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数为 $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}=\operatorname{grad} f(P)\bullet\vec{n}=\dfrac{11}{7}$.

（建议用方向导数定义复求之）

2. 设 $f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 可微，$\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$，$\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}$.

$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{u}}=-2,\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{v}}=1$，求 $f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 的微分。

解：由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{u}}=gradf(x_0,y_0)\bullet(\dfrac{-1}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}})=-2,\\[2mm] \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{v}}=gradf(x_0,y_0)\bullet(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{-1}{\sqrt{2}})=1\end{cases}$$

，得

$$\begin{cases}\dfrac{-1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=-2\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=1\end{cases}$$

，解得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=2\sqrt{2}-2\sqrt{5}\\[2mm] \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=\sqrt{2}-2\sqrt{5}\end{cases}$$

故 $f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 的微分是 $(2\sqrt{2}-2\sqrt{5})dx+(\sqrt{2}-2\sqrt{5})dy$.

3. 设变换 $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + ay \end{cases}$ 可把方程

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$，求常数 a 的值。（a=3）

4. 设函数 $u(x, y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 以及以下条件：$u(x,2x) = x, u_x(x,2x) = x^2$，

求 $u_{xx}(x,2x), u_{xy}(x,2x), u_{yy}(x,,2x)$。

解：注意到 $u_x(x,2x) = x^2$，在 $u(x,2x) = x$ 两边求导，有：

$u_x(x,2x) + 2u_y(x,.2x) = 1$，代入得 $u_y(x,2x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)$

对上两式分别再对 x 求导，得

$$u_{xx}(x,2x) + 4u_{xy}(x,2x) + 4u_{yy}(x,2x) = 0$$

$$u_{xy}(x,2x) + 2u_{yy}(x,2x) = -x$$

根据假定，有 $u_{xx}(x,2x) = u_{yy}(x,2x)$，故联立此三方程得到

$u_{xx}(x,2x) = u_{yy}(x,2x) = -\frac{4}{3}x$, $u_{xy}(x,2x) = \frac{5}{3}x$。

5. 求曲线 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$ 在 $M(1,1,1)$ 处的切线方程和法平面方程。

解：从几何上看所求切线，可以看作是所论两曲面在 $M(1,1,1)$ 点处切平面的交线.于是所求的切线方程是：

$$\begin{cases} F_x'(1,1,1)(x-1)+F_y'(1,1,1)(y-1)+F_z'(1,1,1)(z-1)=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

其中 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{2}-1$。

即：$\begin{cases} x+y+2z-4=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$。

可见第一个平面，第二个平面的法矢量分别是 $\vec{n}_1=(1,1,2)$，$\vec{n}_2=(1,-2,1)$。

于是 $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(5,1,-3)$ 就是 $M(1,1,1)$ 点切矢。它的点向式方程为：

$\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$。

曲线在 $M(1,1,1)$ 点的法平面方程：$5(x-1)+(y-1)-3(z-1)=0$

6.

根据方程

$$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$$

确定函数 $z=z(x,y)$，求其极值。

解： 用无条件极值求：

求驻点：$$\begin{cases} 4x+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y-2-4\dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ 2y+2z\dfrac{\partial z}{\partial y}+2x-2-4\dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 2 = 0 \\ 2y + 2x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 + 2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \\ 2 + 2\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \\ 2\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} + 2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + 2 - 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0 \end{cases}$$

用$\begin{cases} (x, y, z) = (0,1,1) \\ \left(\dfrac{\partial z(0,1)}{\partial x}, \dfrac{\partial z(0,1)}{\partial y}\right) = (0,0) \end{cases}$代入上式：

$$\begin{cases} 4 + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \\ 2 + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \\ 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + 2 - 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z(0,1)}{\partial x^2} = 2 \\ \dfrac{\partial^2 z(0,1)}{\partial y^2} = 1 \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1 \end{cases}$$

故$(0,1)$处为极小点。

7. 用极值方法证明不等式$(e^x+e^y)/2\ge e^{\frac{x+y}{2}}$。

证：设$x+y=c$，则$F(x,y)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^y)+\lambda(x+y-c)$

$\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{e^x}{2}+\lambda=0$；$\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{e^y}{2}+\lambda=0$。驻点为$x=y=\dfrac{c}{2}$，唯一驻点又不可能为极大值点，

所以$(e^x+e^y)/2\ge e^{\frac{c}{2}}=e^{\frac{x+y}{2}}$。

8.

求二元函数$z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$在由直线$x=y=6$、x轴和y轴所围成的闭区域D上的极值、最大值和最小值。

解：驻点方程组：$\begin{cases}f'_x(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0\\ f'_y(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0\end{cases}$，得$x=0\ (0\le y\le 6)$及点

$(4,0)$，$(2,1)$。其中点$(4,0)$及线段$x=0$在D的边界上，只有点$(2,1)$是可能的极值点。

由$\begin{cases}A=(8y-6xy-2y^2)|_{(2,1)}=-6\\ B=(8x-3x^2-4xy)|_{(2,1)}=-4\\ C=-2x^2|_{(2,1)}=-8\end{cases}$，知$B^2-AC=-32<0$，又$A<0$，知点$(2,1)$是极大值点，$f(2,1)=4$。

在边界$x=0\ (0\le y\le 6)$和$y=0\ (0\le x\le 6)$上$f(x,y)=0$；在边界$x+y=6$上将$y=6-x$代入$f(x,y)$中得$z=2x^3-12x^2\ (0\le x\le 6)$；解$z'=6x^2-24x=0$，有$x=0,x=4$.又$z''|_{x=4}=(12x-24)|_{x=4}=24>0$,所以点$(4,2)$是边界上的极小值点，极小值$f(4,2)=-64$.

综上所述，函数$f(x,y)$在D上的最大值为$f(2,1)=4$，最小值为$f(4,2)=-64$.

9.

在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短。

解：由点到直线距离公式，xOy 平面上任意一点 $P(x,y)$ 到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离为

$d=\dfrac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}$，约束条件为 $x^2+4y^2=4$，令 $f(x,y)=\dfrac{1}{13}(2x+3y-6)^2$，构造

Lagrange 函数：$F(x,y)=\dfrac{1}{13}(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4)$，得到驻点满足方程：

$$\begin{cases} F'_x=\dfrac{4}{13}(2x+3y-6)+2\lambda x=0 \\ F'_y=\dfrac{6}{13}(2x+3y-6)+8\lambda y=0 \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases}，解得 \begin{cases} P_1=(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5}) \\ P_2=(-\dfrac{8}{5},-\dfrac{3}{5}) \end{cases}，\begin{cases} d\big|_{P_1}=\dfrac{1}{\sqrt{13}} \\ d\big|_{P_2}=\dfrac{11}{\sqrt{13}} \end{cases}。$$

根据问题实际意义，最短距离是存在的，故 $P_1=(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5})$ 即为所求。