第十一章自测题

一、 填空题

1. 设 C 是从 $A(1，1)$到 $B(2，3)$的一个直线段，则$\int_C (x+3y)\mathrm{d}x+(y+3x)\mathrm{d}x$ =______.

2. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=9$，取逆时针方向，则曲线积分

$$\oint_L (2xy-3y)\mathrm{d}x+(x^2-2x)\mathrm{d}y = \_\_\_\_\_\_.$$

3．设 L 为圆周 $x^2+y^2=4$沿逆时针方向，则曲线积分$\oint_L y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=$_____.

4. 设 L 是圆周 $x^2+y^2=R^2$，曲线积分$\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$ =_______________.

5. 设 $\boldsymbol{L}$ 为圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 且为逆时针方向，则曲线积分$\oint_L y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y$=_____.

6．设曲线Γ为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，则曲线积分$\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=$ _______________.

7．曲线积分$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=$ __________________ ，其中$L: x^2+y^2=a^2$.

8. $\boldsymbol{L}$ 为圆周 $\boldsymbol{x^2+y^2=1}$，则$\oint_L \boldsymbol{x^2\mathrm{d}s}=$______________.

9．设Σ的方程为$z=\sqrt{x^2+y^2}$在$0\le z\le 1$部分的上侧，则$\iint_\Sigma z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

二、计算$\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y$，其中 L 是从点$O(0,0)$沿曲线 $y=x^2$ 到点$B(1,1)$.

三、计算$I=\oint_L e^y\mathrm{d}x+(x+xe^y-2y)\mathrm{d}y$,其中$L$为圆周$x^2+y^2=2x$的正向.

四、计算曲线积分$\oint_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$的正向.

五、计算曲线积分$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x+(x^2+xy^2)\mathrm{d}y$，其中$L$为由直线 $x+y=1$及两个坐标轴围成的区域的整个边界，其方向为顺时针方向.

六、 计算曲线积分$\int_L (1+xe^{2y})\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-1)\mathrm{d}y$，其中 $\boldsymbol{L}$ 为$(x-2)^2+y^2=4$在第一象限沿逆时针方向的半圆弧.

七、计算$\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$，其中 L 为上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(4,0)$.

八、设 L 为曲线 $\boldsymbol{y=\sin x}$ 自 $\boldsymbol{x=\pi}$ 到 $\boldsymbol{x=0}$ 的一段，求

$$\int_L\left[\cos(x+y^2)+2y\right]\mathrm{d}x+\left[2y\cos(x+y^2)+3x\right]\mathrm{d}y.$$

九、计算曲线积分 $\int\limits_L \dfrac{(e^x\cos y+x^2)\mathrm{d}y+(e^x\sin y+1)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 其中 L 为闭曲线 $x^2+y^2=4$ 的上半部分，方向为逆时针.

十、设 $f(x)$ 具有二阶连续导数， $f(0)=0, f'(0)=1$，曲线积分

$\int_L[x^2y+xy^2-f(x)y]\mathrm{d}x+[f'(x)+x^2y]\mathrm{d}y$ 与路径无关，求 $f(x)$.

十一、设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$， $f'(0)=-1$，已知曲线积分

$\int_L[xe^{2x}-6f(x)]\sin y\mathrm{d}x-[5f(x)-f'(x)]\cos y\,\mathrm{d}y$

与路径无关，试求函数 $f(x)$.

十二、计算曲线积分 $\int\limits_L\dfrac{(y+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+2x+y^2)\mathrm{d}y}{x^2+y^2-4x+1}$，其中 L 为 $x^2+y^2=4x$ 的上半圆周由 $A(4,0)$ 到 $O(0,0)$ 的一段.

十三、计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=h(h>0)$ 之间部分的下侧. $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 Σ 在 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

十四、 求曲面积分 $\iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(1+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

十五、计算曲面积分 $I=\oiint\limits_\Sigma x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的内侧.

十六、 设函数 $f(u)$ 具有连续导数，计算曲面积分

$$\oiint_{\Sigma} \frac{1}{y} f(\frac{x}{y})\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{1}{x} f(\frac{x}{y})\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ,$$

其中 Σ 为 $y = x^2 + z^2 + 6$ 和 $y = 8 - x^2 - z^2$ 所围立体的外侧.

十七、 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$，其中 Σ 为 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数.

十八、计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} (x^3 - x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3 - 2y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3 + 2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分曲面 Σ 为 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

十九、 计算曲面积分 $I = \oiint\limits_{\Sigma} \frac{x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$ ，其中曲面 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

二十、计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} \frac{(x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，

其中 Σ 是上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

二十一、计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$，其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为 $\boldsymbol{z = x^2 + y^2}$ 被 $\boldsymbol{z = 4}$ 所截得部分的下侧.

二十二、计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 介于平面 $z = 1$ 及 $z = 2$ 之间的部分的下侧.

二十三、设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续可微，且满足：

$$\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iiint\limits_{\Omega(t)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int\limits_{L(t)} f(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s + \iint\limits_{S(t)} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$$

其中$\Omega(t): x^2+y^2+z^2 \le t^2, z\ge 0$；$D(t): x^2+y^2 \le t^2, z=0$；$L(t): x^2+y^2 = t^2, z=0$；$S(t)$为上半球体$\Omega(t)$的整个边界，$t>0$. 求$f\left(u\right)$.

二十四、计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} 2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是由曲线$x=e^y\ (0\le y\le a)$绕$x$轴旋转而成的旋转曲面$x=e^{\sqrt{y^2+z^2}}$，其法向量与$x$轴正向的夹角恒大于$\dfrac{\pi}{2}$.

二十五、计算曲面积分 $\boldsymbol{I=\iint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$, 其中$\Sigma$为曲面$\boldsymbol{z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}(0\le z\le 1)}$的上侧.