

第九章自测题

一、填空题

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{4+xy}-2}{xy} = \underline{\hspace{2cm}}.$
2. 设 $u = x^y$ ($x > 0, x \neq 1$), 则 $du = \underline{\hspace{2cm}}.$
3. 设 $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x=1, y=1} = \underline{\hspace{2cm}}.$
4. 函数 $u = x^3 z + 3z^2 y + 2y$ 在点 $(1, 0, 2)$ 的梯度为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
5. 函数 $u = x^2 y z$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处沿 $(2, 2, 1)$ 方向的方向导数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$
6. 二元函数 $z(x, y) = \ln x + \ln y$ 在点 $(1, 1)$ 处沿方向 $\vec{a} = \{2, -1\}$ 的方向导数是 $\underline{\hspace{2cm}}.$
7. 设 $\vec{l} = \{1, 1, 1\}$, 则函数 $u = xy + e^z$ 在点 $P(1, 2, 0)$ 处沿方向 \vec{l} 的方向导数是 $\underline{\hspace{2cm}}.$
8. 函数 $z = 2x^2 + y^2$ 在点 $P(1, 1)$ 处的最大方向导数等于 $\underline{\hspace{2cm}}.$
9. 曲线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \sin \frac{t}{2}$ 在对应 $t = \frac{\pi}{2}$ 的点处的法平面方程是 $\underline{\hspace{2cm}}.$
10. 曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程是 $\underline{\hspace{2cm}}.$
11. 函数 $z = xy$ 在条件 $x + y = 1$ 下的极大值 = $\underline{\hspace{2cm}}.$

二、设 $z = f(x^2 - y^2, xy)$, 其中函数 f 具有二阶连续的偏导数, 试求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

三、设 $z = x f(x, \frac{y}{x})$ 且 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

四、设函数 $z = f(u, x, y), u = xe^y$, 其中 f 具有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

五、设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x + z = yf(x^2 - z^2)$ 确定，其中 f 为可微函数，

证明： $z \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x$.

六、在曲面 $z - xy = 0$ 上求一点，使这点处的法线垂直于平面 $x + 3y + z + 9 = 0$ ，并求出该点的切平面方程和法线方程.

七、求函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9\}$ 上的最大值和最小值.

八、求函数 $f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$ 在由直线 $x + y = 6$, x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值和最小值.

九、求函数 $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5R^2$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) 上的最大值，并证明对任何正数 a, b, c 有

$$abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5 .$$

十、在曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 的第一卦限上求一点，过该点作曲面的切平面，求切平面与三个坐标平面所围成的四面体的最小体积.

十一、设 $f(t)$ 在 $[1, +\infty)$ 内有连续二阶导数， $f(1) = 0, f'(1) = 1$ ，且二元函数

$z = (x^2 + y^2)f(x^2 + y^2)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 求 $f(t)$.

十二、设函数 $f(u)$ 具有二阶连续的导函数，而且 $z = f(e^x \sin y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x} z ,$$

试求函数 $f(u)$.