

第四章课外练习题

不定积分习题

1. 求不定积分

$$(1) \int e^{-|x|} dx; \quad (2) \int \max\{x^3, x^2, 1\} dx;$$

2. 设 $\int xf(x)dx = \arctan x + C$, 求 $\int \frac{1}{f(x)} dx$.

3. 已知 $f'(2 + \cos x) = \tan^2 x + \sin^2 x$, 求 $f(x)$ 的表达式.

4. 函数 $f(x) = \begin{cases} -\sin x & x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有没有原函数?

5. 求下列不定积分

$$(1) \int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx; \quad (2) \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx$$

$$(3) \int \left[\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3} \right] dx; \quad (4) \int \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} e^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} dx;$$

$$(5) \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(x-a)(x-b)}}; \quad (6) \int \frac{x^4}{(x+1)^{100}} dx;$$

$$(7) \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx; \quad (8) \int \frac{7\cos x - 3\sin x}{5\cos x + 2\sin x} dx;$$

$$(9) \int \frac{\sqrt{x(1+x)}}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}} dx; \quad (10) \int \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x} dx;$$

$$(11) \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx; \quad (12) \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-3)}};$$

$$(13) \int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x \cos x} dx; \quad (14) \int \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx;$$

$$(15) \int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}} dx; \quad (16) \int \frac{\tan x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx;$$

$$(17) \int \frac{1+x}{x(1+xe^x)} dx; \quad (18) \int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} dx;$$

$$(19) \int \frac{\ln \tan x}{\sin 2x} dx; \quad (20) \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}.$$

6. 求 $\int x f'(x) dx$, 其中 $f(x)$ 的一个原函数是 $(1 + \sin x) \ln x$.

7. 设 $f'(e^x) = a \sin x + b \cos x$ (a, b 是不同时为零的常数), 求 $f(x)$.

8. 当 a, b, p 满足什么条件时, $\int \frac{ax^2 + bx + p}{x^3(x-1)^2} dx$ 是有理函数?

9. 求不定积分 $\int \frac{x^3}{(x+1)^2(x^2+x+1)} dx$

10. 求下列不定积分

(1) $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx$; (2) $\int x e^x \sin x dx$; (3) 设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 求 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx$.

11. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 且当 $x \geq 0$ 时, 有 $f(x)F(x) = \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}$, 如果

$F(0) = 1$, $F(x) > 0$, 求 $F(x)$ 的表达式。