2018 ~2019 学年春季学期（2019.6）

高等数学 A（下）考试试题参考答案

一、**单项选择题**(本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分)

1．函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续是函数在该点有偏导数的（ D ）.

（A） 充分而不必要条件；（B） 必要而不充分条件；
（C） 必要而且充分条件；（D） 既不必要也不充分条件.

2. 函数 $z=2x+y$ 在点 $(1,2)$ 沿各方向的方向导数的最大值为（ C ）

(A) 3.　(B) 0.　(C) $\sqrt{5}$.　(D) 2.

3. 设 $I=\int_1^3 dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$，改变积分次序，则 I=（ C ）.

（A） $\int_0^{\ln 3} dy\int_0^{e^y} f(x,y)dx$；（B） $\int_0^{\ln 3} dy\int_0^{3} f(x,y)dx$；

（C） $\int_0^{\ln 3} dy\int_{e^y}^{3} f(x,y)dx$；（D） $\int_1^{3} dy\int_0^{\ln x} f(x,y)dx$.

4．设 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=10 \\ z=1 \end{cases}$，则曲线积分 $\oint_L \dfrac{ds}{x^2+y^2+z^2}=$（ B ）.

（A） $\dfrac{4\pi}{5}$；（B） $\dfrac{3\pi}{5}$；（C） $\dfrac{2\pi}{5}$；（D） $\dfrac{\pi}{5}$.

5．设 $u_n=(-1)^n\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则级数（ C ）.

（A） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛；（B） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散 ；

（C） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散 ；（D） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

二、**填空题**(本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分).

1．若向量 α,β,γ 中任两个的夹角都为 $\dfrac{\pi}{3}$，且 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\|\boldsymbol{\beta}\|=\|\boldsymbol{\gamma}\|=\mathbf{1},$，则 $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}\|=$ $\sqrt{6}$.

2． 曲线 $\Gamma:\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程为 $\underline{\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}}$

3．若 $f(x,y)=x^2+(y^2-1)\arctan\sqrt{xy}$ ，则 $f_x'(1,1)=$ ___2___.

4．曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积为 $\underline{\dfrac{\pi}{6}}$

5．设周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi\end{cases}$ 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上的和函数为 $\boldsymbol{S(x)}$，则 $S(\pi)=\underline{\dfrac{\pi}{2}}$.

三、（本题满分 10 分）求过三点 $A(1,1,1)$、$B(0,1,-1)$ 和 $C(2,3,1)$ 的平面的方程.

解　平面的法线向量

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\times\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}\quad .$$

根据平面的点法式，所求平面的方程为：$4(x-1)-2(y-1)-2(z-1)=0$，或 $2x-y-z=0$.

四、（本题满分 10 分）设函数 $z=f\left(x^2+y^2,x^2-y^2\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x(f_1'+f_2')$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2x(2yf_{11}''-2yf_{12}''+2yf_{21}''-2yf_{22}'')=4xy(f_{11}''-f_{22}'')$$

五、（本题满分 10 分）计算曲线积分 $\int_L\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$，其中 L 是从点 $A\left(1,0\right)$ 沿抛物线 $y=1-x^2$ 到点 $B\left(-1,0\right)$ 的有向曲线.

解 1　把 $y=1-x^2$ 代入，得

$$\int_L\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\int_1^{-1}\frac{-(1+x^2)dx}{x^2+(1-x^2)^2}=2\int_0^1\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$$

$$=2\int_0^1\frac{x^2+1}{(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right)dx$$

$$=\int_0^1[\frac{1}{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}]dx=2[\arctan(2x+\sqrt{3})+\arctan(2x-\sqrt{3})]\Big|_0^1$$

$$=2[\arctan(2+\sqrt{3})+\arctan(2-\sqrt{3})]=\pi$$

解 2　因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$，

所以在不包含原点的单连通域内，积分与路径无关.

取 L_1 为曲线 $x^2+y^2=1\left(y\geq 0\right)$ 上从点 $A\left(1,0\right)$ 到点 $B\left(-1,0\right)$ 的有向弧段，

（或沿其它合适的路径）

则

$$\int_L\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\int_{L_1}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\int_{L_1}-ydx+xdy$$

$$=\int_0^{\pi}\Big[\left(-\sin\theta\right)\left(-\sin\theta\right)+\cos\theta\cos\theta\Big]d\theta=\pi.$$

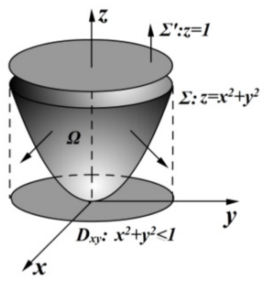
六、（本题满分 10 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(y-z)\,dzdx+(x+2z)\,dxdy$，其中 Σ 是抛物面 $z=x^2+y^2\quad(0\leq z\leq 1)$，取下侧.

解　添加平面片“$\Sigma':z=1,(x,y)\in D:x^2+y^2\leq 1,$ 上侧”与 Σ 围成区域 Ω，

由高斯公式可得：

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma'}=\iiint\limits_{\Omega}[\frac{\partial}{\partial x}(0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-z)+\frac{\partial}{\partial z}(x+2z)]dv=3\iiint\limits_{\Omega}dv$$

$$\overset{\text{直坐标}}{\underset{\text{截面法}}{=}}3\int_0^1\pi zdz=\frac{3}{2}\pi$$



（或 $\overset{\text{柱坐标}}{=}3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1rdr\int_{r^2}^1dz=6\pi\int_0^1r(1-r^2)dr=6\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=\frac{3}{2}\pi$），

而　$\iint\limits_{\Sigma'}=2\iint\limits_{\Sigma'}zdxdy=2\iint\limits_{D}1dxdy=2\pi$.

于是，$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma'}-\iint\limits_{\Sigma'}=\frac{3}{2}\pi-2\pi=-\frac{\pi}{2}$.

七、（本题满分 10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}x^n$ 的收敛域以及和函数 $S(x)$.

解　$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$，$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 5^n}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}=\frac{1}{5}$ ，

收敛半径 $R=5$，收敛域为 $(-5,5]$

设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}x^n$，

则 $s^{'}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n}x^{n-1}=\frac{\frac{1}{5}}{1+\frac{x}{5}}=\frac{1}{5+x}$

$s(x)=\ln(5+x)-\ln 5$

八、（本题满分 10 分）对正数列 $\{x_n\}$，在条件 $x_1+x_2+\cdots+x_n=q$ 下，求

$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x_1x_2\cdots x_n$ 的最大值．并由此证明不等式：$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

证　考虑函数 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x_1x_2\cdots x_n$ 在约束条件 $x_1+x_2+\cdots+x_n=q$ 的极值，利用拉格朗日乘数法，令 $F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x_1x_2\cdots x_n+\lambda\left(x_1+x_2+\cdots+x_n-q\right)$，

于是 $\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x_1}=x_2x_3\cdots x_n+\lambda=0\\ \frac{\partial F}{\partial x_2}=x_1x_3\cdots x_n+\lambda=0\\ \cdots\\ \frac{\partial F}{\partial x_n}=x_1x_2\cdots x_{n-1}+\lambda=0\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=x_1+x_2+\cdots+x_n-q=0\end{cases}$,

求得唯一驻点 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{q}{n}$，因此这也是最大值点．

最大值为：$\left(\frac{q}{n}\right)^n$，于是 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x_1x_2\cdots x_n\le\left(\frac{q}{n}\right)^n$，

即　$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le l=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

九、（本题满分 5 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在 $x=0$ 的某个邻域内有一阶连续导数且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a>0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$ 发散.

证　由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a>0 \Rightarrow f(0)=0, f'(0)=a$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有一阶连续导数及 $f'(0)=a>0$，知存在 $l>0$,使在 $[0,l]$ 上 $f'(x)>0$，于是存在 N>0，使当 n>N 时，$f(\dfrac{1}{n})>0$，而且 $f(\dfrac{1}{n+1})<f(\dfrac{1}{n})$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(\dfrac{1}{n})=0$，

可见交错级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$ 收敛.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=f'(0)=a>0$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$ 发散.

十、（本题满分 5 分）设 $f\left(x,y\right)$ 在闭区域 $D=\left\{\left(x,y\right)\middle| x^2+y^2\le y, x\ge 0\right\}$ 上连续，且 $f\left(x,y\right)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy$，求 $f\left(x,y\right)$.

解　设 $\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy=A$，

则 $f\left(x,y\right)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}A,$

在上式两端积分，得

$\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\iint\limits_D\dfrac{8}{\pi}Adxdy$，即

$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho-A$，得

$A=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho=\dfrac{1}{36}(3\pi-4)$，于是

$f\left(x,y\right)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}\cdot\dfrac{1}{36}(3\pi-4)$或$\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{9\pi}$.