第十二章自测题参考答案

一、 填空题

1．数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$在$a$满足 $\underline{|a|>1}$条件下收敛.

2．设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为 3，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$的收敛区间为$\underline{(-2,\ 4)}$.

3．幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$的收敛区间是$\underline{(-1,\ 1)}$.

4. 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为 3，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$的收敛区间为 $\underline{\mathbf{(-2,4)}}$.

5．设$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\le x<0\\ 1+x^2 & 0\le x<\pi\end{cases}$，且以$2\pi$为周期，则$f(x)$的傅里叶级数在点$x=\pi$处收敛于______$\frac{\pi^2}{2}$_______.

6． 设周期函数$f(x)$在一个周期内的表达式为$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$，则它的傅里叶级数在$x=0$处收敛于_____0____________.

7．设函数$f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\le x<0\\ -1+x, & 0\le x<1\end{cases}$，则其以2为周期的傅里叶级数在$x=-1$处收敛于_____1/2_____ .

8. 设$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$可以展开为正弦级数，此正弦级数在$x=\frac{\pi}{4}$处收敛于__1________.

解　由于$x=\frac{\pi}{4}$是$f(x)$的连续点，则$f(x)$的正弦级数在$x=\frac{\pi}{4}$收敛于$f(\frac{\pi}{4})=1$.

9. 设$f(x)$是周期为2π的周期函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=x$，则

$f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=2$ 处收敛于 $\underline{2}$.

10. 设 $f(x)$ 是周期为2的周期函数，它在区间 $(-1,\ 1]$ 上的定义为

$$f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 1\end{cases}$$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于 $\underline{\quad \frac{3}{2} \quad}$.

二、证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 条件收敛.

证 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 为交错级数.

由于 $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 且 $\{u_n\}$ 为单调递减数列，

由莱布尼茨条件知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 收敛.

$u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，

则由比较知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 非绝对收敛.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 条件收敛.

三、 解答下列问题

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}$ 的收敛域； 2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}$ 和函数；

3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{2^{2n-1}}$ 的和.

解 1. 由比值法得收敛半径 $R=1$，当 $x=1$，$x=-1$ 时级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}2n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}2n$ 都发散，则收敛域为 $(-1,1)$.

2．令 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}$

逐项积分得，$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x 2nx^{2n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2}$， $x\in(-1,1)$

求导得， $s(x)=(\frac{x^2}{1-x^2})'=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$， $x\in(-1,1)$

3．当 $x=\frac{1}{2}$ 时，幂级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2^{2n-1}}$， 故，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2^{2n-1}}=s(\frac{1}{2})=\frac{16}{9}$.

四、解答下列问题

1．判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+\sin n2^n}{n^2 2^n}$ 的敛散性;

2．已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 2，判别级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 和级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n 3^n$ 的敛散性.

解 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+\sin n2^n}{n^2 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2^n}+\frac{\sin n}{n^2})$

由比值法得，$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\frac{1}{2}$ ，知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛；

由比较法得，$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$， 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin}{n^2}$ 收敛；

由级数性质得，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+\sin n2^n}{n^2 2^n}$ 收敛.

2． $x=1$ 在幂级数的收敛区间 $(-2,2)$ 内，

此时幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ ； 故 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛.

$x=3$ 在幂级数的收敛区间 $(-2,2)$ 外，

此时幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n 3^n$；故 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n 3^n$ 发散.

五、 将函数 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解 因为 $f'(x)=-\frac{2}{1+4x^2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{2n}, x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

又 $f(0)=\frac{\pi}{4}$，积分得

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}, x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，级数 $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，且该级数收敛，

故 $f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}, x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，有 $f(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，又 $f(\frac{1}{2})=0$，

于是有 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}-f(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}$.

六、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$ 的收敛域，并求其和函数.

解 先求收敛域.

因为 $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{1}{2}$，所以收敛半径 $R=2$，收敛区间为 $-2<x<2$.

在端点 $x=-2$ 处幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$，此级数为交错级数，收敛；

在端点 $x=2$ 处级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$，由调和级数发散知此级数发散；

因此原级数的收敛域为 $[-2,2)$。

设和函数为 $s(x)$，即 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$, $x\in[-2,2)$

$xs(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^n}{n}$，由幂级数的分析性质，逐项求导得，

$$[xs(x)]'=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(\frac{x}{2})^n}{n}]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(\frac{x}{2})^{n-1}=\frac{1}{2-x},\qquad (|x|<2)$$

上式两边从 0 到 x 积分，得 $xs(x)=\int_0^x\frac{1}{2-x}dx=-\ln(2-x)+\ln 2=\ln\frac{2}{2-x}$

所以当 $x\neq 0$ 时，$s(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{2}{2-x}$.　　而 $s(0)=\frac{1}{2}$

故 $s(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{2}{2-x}, & x\in[-2,0)\cup(0,2),\\ \dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$

七、设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0)=0, f'(0)=0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

证明：由题设及 $f(0)=0, f'(0)=0$ 知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的一阶泰勒公式为

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2=\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$， 其中 ξ 在 0 到 x 之间.

于是有 $f(\frac{1}{n})=\dfrac{f''(\eta)}{2!}\cdot\dfrac{1}{n^2}$，其中 η 在 0 到 $\dfrac{1}{n}$ 之间.

又有 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，得存在常数 $M>0,$ 使 $\left|f''(\eta)\right|\le M$，

则 $\left|f(\frac{1}{n})\right|\le\dfrac{M}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$，由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛。

八、1. 将 $f(x)=2+x+\arctan x$ 展开成关于 x 的幂级数，指出收敛区间.

2. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{1}{n}$ 的敛散性.

解 1. $f'(x)=1+\dfrac{1}{1+x^2}=1+1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$

逐项积分 $f(x)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x+f(0)=2+2x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$

在端点处级数为交错级数，收敛，故收敛区间为 $x\in[-1,1]$.

2. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{1}{n}\Big/\dfrac{1}{n\sqrt{n}}=1$，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{1}{n}$ 收敛.

九、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在 $x=0$ 的某个邻域内有一阶连续导数且

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a>0$，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$发散.

证明　由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a>0\Rightarrow f(0)=0, f'(0)=a$

由$f(x)$在$x=0$的某个邻域内有一阶连续导数及$f'(0)=a>0$，知存在 *l*>0, 使在[0,*l*]上$f'(x)>0$，于是存在N>0，使当n>N时，$f(\dfrac{1}{n})>0$，而且$f(\dfrac{1}{n+1})<f(\dfrac{1}{n})$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(\dfrac{1}{n})=0$，

可见交错级数$\sum\limits_{n=N}^{\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$收敛.

又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=f'(0)=a>0$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$发散.

十、（1）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$的收敛域及和函数；

（2）求数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$的和.

解　（1）收敛域为$(-1,1)$

设和函数为S(*x*), -1<*x*<1

$$S'(x)=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2}+\cdots,\quad x\in(-1,1)$$

$$=\frac{1}{1-x^2}$$

所以 $S(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^x\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x},\quad x\in(-1,1)$

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\ln 3$

十一、　（1）把 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ 展开为 x 的幂级数；

（2）证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$.

解　（1）设 $s(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$，由于 $\frac{e^x-1}{x}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}$

$(-\infty<x<+\infty)$

因此，

$$s(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}\right]$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}x^{n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}$$

（2）　又　$s(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$

所以，$\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}\qquad(-\infty<x<+\infty)$

当 $x=1$ 时，$s(1)=1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$，

所以，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$.

十二、 将 $\boldsymbol{f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}}$ 展开成 x 的幂级数，并求收敛域.

解　由 $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\quad(-1<x<1)$ 得

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots\quad(-1<x<1),$$

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,(-1<x\le 1)$$

$$\ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}+\cdots,\quad(-1\le x\le 1)$$

$$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad(-1\le x\le 1)$$

于是 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$$=x(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots)-\frac{1}{2}(x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}+\cdots)$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^6}{5\cdot 6}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}+\cdots(-1\le x\le 1).$$

十三、试将函数 $f\left(x\right)=\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$ 展成 x 的幂级数，(要求写出该幂级数的一般项并指出其收敛域）.

解

因为 $e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\qquad(-\infty<t<+\infty)$

则 $e^{t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n!}\qquad(-\infty<t<+\infty)$,

将上式两端逐项积分，得

$$f\left(x\right)=\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n!}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{t^{2n}}{n!}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

十四、1.　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na^n}(a>0)$ 的敛散性；

2.　试将函数 $f\left(x\right)=\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t$ 展成 x 的幂级数（要求写出该幂级数的一般项并指出其收敛域).

解　1　当 $a>1$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)a}=\frac{1}{a}<1$，故原级数绝对收敛；

当$0<a<1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n+1)a}=\dfrac{1}{a}>1$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，故原级数发散；

当$a=1$，原级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，条件收敛.

2　因为 $\sin t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}t^{2n-1}}{(2n-1)\,!}\quad t\in(-\infty,+\infty)$ ，

$$\text{则}\sin t^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^{4n-2}}{(2n-1)\,!}\quad t\in(-\infty,+\infty)\ .$$

将上式两端逐项积分，得

$$f(x)=\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^{4n-2}}{(2n-1)\,!}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^{n-1}t^{4n-2}}{(2n-1)\,!}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{4n-1}}{(2n-1)!(4n-1)}\qquad(-\infty<x<+\infty)\ .$$

十五、1．将$f(x)=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$展开为$x$的幂级数；

2. 指出该幂级数的收敛域；

3. 求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ 的和.

解 1. 因为$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\quad\left(|x|<1\right)$，且$\arctan 0=0$，所以，

$$\arctan x=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$\left(-1\le x\le 1\right)$$

而

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n}\qquad\left(-1\le x\le 1\right)$$

所以，

$$f(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2(n+1)}x^{2(n+1)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right]x^{2n+2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}\qquad(-1\le x\le 1)$$

2. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}$ 的收敛域为 $[-1,\ 1]$.

3. 令 $x=1$，则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}=f(1)=1\cdot\arctan 1-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2 .$$

十六、（1）求 $\frac{\cos x-1}{x}$ 的幂级数展开式；（2）求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)$ 的幂级数展开式；

（3）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}$ 的和.

解 （1） $$\frac{\cos x-1}{x}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}-1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

（2） $$s(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{(2n)!}x^{2n-2}\ (-\infty<x<+\infty)$$

（3） $$s(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)=\frac{-x\sin x-\cos x+1}{x^2}$$

所以，$$\frac{-x\sin x-\cos x+1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{(2n)!}x^{2n-2}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$\boldsymbol{s\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2}}$，

所以，$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 s\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

$$\boldsymbol{=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{-x\sin x-\cos x+1}{x^2}\bigg|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}+1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}=1-\frac{\pi}{2}}\quad.$$

十七、求级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)2^n}$ 的和.

解 设 $s(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}$，当 $x=\frac{1}{2}$ 时即为所求的级数.

而 $\mathrm{s}(x)=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=-x\ln(1-x)\qquad(|x|<1)$

或设 $\mathrm{g}(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}$，则 $\mathrm{g}'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1\text{-}x}$，

$$\mathrm{g}(x)-g(0)=\int_0^x\frac{1}{1\text{-}x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x),$$

即 $\mathrm{g}(x)=-\ln(1-x)$，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)2^n}=S(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\ln 2$.