第九章自测题参考答案

一、 填空题

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{4+xy}-2}{xy}=\underline{\quad\dfrac{1}{4}\quad}$.

2. 设$u=x^y$（$x>0$， $x\neq 1$），则$\mathrm{d}u=\underline{yx^{y-1}\mathrm{d}x+x^y\ln x\mathrm{d}y}$.

3. 设$z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=1,y=1}=\underline{\qquad\dfrac{1}{2}\qquad}$.

4．函数 $u=x^3z+3z^2y+2y$在点(1, 0, 2)的梯度为$\underline{6\vec{i}+14\vec{j}+\vec{k}}$.

5．函数$u=x^2yz$在点$P(1,1,1)$处沿(2,2,1)方向的方向导数为$\underline{\qquad\dfrac{7}{3}\qquad}$.

6. 二元函数$z(x,y)=\ln x+\ln y$在点（1，1）处沿方向$\vec{a}=\{2,-1\}$的方向导数是$\underline{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$.

7. 设$\vec{l}=\{1,1,1\}$，则函数$u=xy+e^z$在点$P(1,2,0)$处沿方向$\vec{l}$的方向导数是$\underline{\dfrac{4}{\sqrt{3}}\quad}$.

8. 函数$z=2x^2+y^2$在点$P(1,1)$处的最大方向导数等于$\underline{\quad 2\sqrt{5}\qquad\qquad}$.

9．曲线$x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ z=4\sin\dfrac{t}{2}$在对应$t=\dfrac{\pi}{2}$的点处的法平面方程是$\underline{x+y+\sqrt{2}z-\dfrac{\pi}{2}-4=0}$.

10. 曲面$\boldsymbol{e^z-z+xy=3}$在点$\boldsymbol{(2,1,0)}$处的切平面方程是$\underline{\boldsymbol{x+2y=4}}$.

11. 函数$z=xy$在条件$x+y=1$下的极大值=$\underline{\qquad\dfrac{1}{4}\qquad}$.

二、设$z=f\left(x^2-y^2,\ xy\right)$，其中函数$f$具有二阶连续的偏导数，试求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+yf_2'$ ，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xyf_{11}''+\left(2x^2-2y^2\right)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'\ .$$

三、 设 $z = x\,f(x, \frac{y}{x})$ 且 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$．

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = f + x\,f_1' - \frac{y}{x}\,f_2'$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_2'，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(f_2') = f_{12}'' - \frac{y}{x^2} f_{22}'' = f_{21}'' - \frac{y}{x^2} f_{22}''.$$

四、 设函数 $z = f(u, x, y)$，$u = xe^y$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$．

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{x}{x}\,0 = e^y f_u' + f_x'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^y f_u' + f_x') = e^y f_u' + e^y \frac{\partial f_u'}{\partial y} + \frac{\partial f_x'}{\partial y}$$

$$= e^y f_u' + e^y \left(f_{uu}'' \frac{\partial u}{\partial y} + f_{uy}'' \right) + \left(f_{xu}'' x e^y + f_{xy}'' \right)$$

$$= e^y f_u' + x e^{2y} f_{uu}'' + e^y f_{uy}'' + x e^y f_{xu}'' + f_{xy}''.$$

或 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^y f_1' + f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^y f_1' + f_2') = e^y f_1' + x e^{2y} f_{11}'' + e^y f_{13}'' + x e^y f_{21}'' + f_{23}''.$$

五、设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x + z = yf(x^2 - z^2)$ 确定，其中 f 为可微函数，

证明：$z\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x$.

证明 对方程两边对 x 求偏导得 $1 + \frac{\partial z}{\partial x} = yf' \cdot (2x - 2z\frac{\partial z}{\partial x})$，即 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xyf' - 1}{2yzf' + 1}$

对方程两边对 y 求偏导得 $\frac{\partial z}{\partial y} = f + yf' \cdot (-2z\frac{\partial z}{\partial y})$，即 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f}{2yzf' + 1}$

故 $z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2xyzf'-z}{2yzf'+1}+\frac{fy}{2yzf'+1}=\frac{2xyzf'-z+(x+z)}{2yzf'+1}=x$ 得证.

六、在曲面 $z-xy=0$ 上求一点，使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，并求出该点的切平面方程和法线方程.

解 曲面 $z-xy=0$ 在点 (x,y,z) 处的法向量为 $\vec{n}=\{-y,-x,1\}$

平面 $x+3y+z+9=0$ 的法向量为 $\{1,3,1\}$

在曲面 $z-xy=0$ 上法线与已知平面 $x+3y+z+9=0$ 垂直的点满足

$\frac{-y}{1}=\frac{-x}{3}=\frac{1}{1}, z=xy$ 得 $x=-3, y=-1, z=3$

切平面方程为 $x+3y+z+3=0$

法线方程为 $\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$.

七、求函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\big|(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\le 9\}$ 上的最大值和最小值.

解 （1）先求 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在 $D=\{(x,y)\big|(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\le 9\}$ 内的可能极值点：

$$\text{由}\begin{cases} f_x=2x=0 \\ f_y=2y=0 \end{cases}，\text{得得驻点}(0,0).$$

(2) 求 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在圆 $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9$ 上的最大值与最小值：

构造拉格朗日乘函数:

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\left[(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2-9\right]$$

$$\text{由}\begin{cases} L_x=2x+2\lambda(x-\sqrt{2})=0 \\ L_y=2x+2\lambda(y-\sqrt{2})=0 \\ L_\lambda=(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2-9=0 \end{cases}$$

解得： $x=y=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 和 $x=y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

比较 $f(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}), f(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}), f(0,0)$ 得函数 $f(x,y)=x^2+y^2$

在 $\boldsymbol{D=\{(x,y)\mid (x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\le 9\}}$ 上的最大值为 25，最小值为 0.

八、 求函数 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$, x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值和最小值.

解 (1)先求区域 D 内 $f(x,y)$ 的驻点

令 $\begin{cases} f_x'=xy(8-3x-2y)=0, \\ f_y'=x^2(4-x-2y)=0, \end{cases}$ 得惟一驻点 $\begin{cases} x=2, \\ y=1, \end{cases}$.

(2)求函数 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在 D 上的最大值和最小值：

在 D 的边界 $x=0(0\le y\le 6)$ 和 $y=0\,(0\le x\le 6)$ 上时， $f(x,y)=0$；

在 D 的边界 $x+y=6\,(0<x<6)$ 上时，构造拉格朗日函数

$L(x,y,\lambda)=x^2y(4-x-y)+\lambda(x+y-6)$，由

$$\begin{cases} L_x=2xy(4-x-y)-x^2y+\lambda=0, \\ L_y=x^2(4-x-y)-x^2y+\lambda=0, \\ x+y=6, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x=4, \\ y=2. \end{cases}$$

比较 $f(2,1), f(0,y), f(x,0), f(4,2)$ 得函数 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在 D 上的最大值为 4，最小值为−64.

九、 求函数 $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=5R^2$ $(x>0,y>0,z>0)$ 上的最大值，并证明对任何正数 a,b,c 有

$$abc^3\le 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

解 设 $F(x,y,z,\lambda)=\ln x+\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-5R^2)$，

$$\text{令} \begin{cases} F_x=\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0 \\ F_y=\dfrac{1}{y}+2\lambda y=0 \\ F_z=\dfrac{3}{z}+2\lambda z=0 \\ x^2+y^2+z^2-5R^2=0 \end{cases}$$

解得 $\lambda=-\dfrac{1}{2R^2}$， 及可能的极值点 $x=R,\quad y=R,\quad z=\sqrt{3}R$，

在第一卦限内球面的三条边界线上，函数 f 均趋于负无穷，故函数的最大值必在曲面内部取得，又可能极值点惟一，因此在 $x=R,\quad y=R,\quad z=\sqrt{3}R$ 处函数取得最大值：

$$f(R,R,\sqrt{3}R)=\ln R+\ln R+\ln(\sqrt{3}R)=\ln(3\sqrt{3}R^5)$$

于是对于任何球面 $x^2+y^2+z^2=5R^2$ 上的点 $(x,y,z)\ (x>0,y>0,z>0)$ 有

$$\ln x+\ln y+3\ln z\le\ln(3\sqrt{3}R^5)$$

即 $xyz^3\le 3\sqrt{3}R^5=3\sqrt{3}\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{5}\right)^{\frac{5}{2}}$，或 $x^2y^2z^6\le 27(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{5})^5$，

记 $x^2=a,\ y^2=b,\ z^2=c$，代入上式，便得 $abc^3\le 27(\dfrac{a+b+c}{5})^5$.

十、 在曲面 $z=4-x^2-y^2$ 的第一卦限上求一点，过该点作曲面的切平面，求切平面与三个坐标平面所围成的四面体的最小体积.

解 设切点为 $M\left(x_0,y_0,z_0\right)$，其中 $x_0>0,\ y_0>0,\ z_0>0$，过 $M\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 点的切平面方程为

$$\begin{aligned}&-2x_0\left(x-x_0\right)-2y_0\left(y-y_0\right)-\left(z-z_0\right)=0\\ \Rightarrow\ \ &2x_0x+2y_0y+z=8-z_0\end{aligned}$$

切平面在三个坐标轴上的截距分别为 $\dfrac{8-z_0}{2x_0},\ \dfrac{8-z_0}{2y_0},\ 8-z_0$

要使切平面与三个坐标面所围体积最小，只需 $V=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{4x_0y_0}\cdot\left(8-z_0\right)^3$

最小，其中 $x_0,\ y_0,\ z_0$ 满足 $z_0=4-{x_0}^2-{y_0}^2$.

构造拉格朗日函数 $F\left(x,y,z,\lambda\right)=\dfrac{1}{xy}\left(8-z\right)^3+\lambda\left(x^2+y^2+z-4\right)$

求解方程组 $\begin{cases} F_x' = -\dfrac{1}{x^2 y}(8-z)^3 + 2\lambda x = 0 \\ F_y' = -\dfrac{1}{xy^2}(8-z)^3 + 2\lambda y = 0 \\ F_z' = -\dfrac{3}{xy}(8-z)^2 + \lambda = 0 \\ F_\lambda' = x^2 + y^2 + z - 4 = 0 \end{cases}$ 得 $x = y = 1,\ z = 2$

因驻点唯一，实际问题存在最小值，因此点$(1,1,2)$为所求的点。最小值为

$$V = \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{1\cdot 1}(8-2)^3 = 9.$$

十一、 设 $f(t)$在 $[1,+\infty)$ 内有连续二阶导数， $f(1)=0, f'(1)=1$，且二元函数 $z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 求 $f(t)$.

解 （1）设$r=\sqrt{x^2+y^2}$，由复合函数求导法则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}z'(r),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)z'(r)+\frac{x^2}{r^2}z''(r).$$

同理 $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)z'(r)+\frac{y^2}{r^2}z''(r$$

代入方程有 $z''(r)+\dfrac{1}{r}z'(r)=0.$ 又 $z(1)=f(1)=0,$

$$z'(r)=2rf(r^2)+r^2f'(r^2)\cdot 2r,$$

于是 $z'(1)=2, f'(1)=1.$

(2) 解初值问题 $\begin{cases} z''(r)+\dfrac{1}{r}z'(r)=0, \\ z(1)=0, z'(1)=2. \end{cases}$

这是可降阶的二阶线性变系数微分方程. 方程两边乘以r并积分，利用初始条件得

$$(rz'(r))'=0,\qquad rz'(r)=2.$$

所以， $z(r)=2\ln r.$

（3）由 $z(r)=r^2f(r^2)=2\ln r \Rightarrow f(r^2)=\dfrac{\ln r^2}{r^2}.$

所以， $f(t)=\dfrac{\ln t}{t}.$

十二、 设函数 $\boldsymbol{f(u)}$ 具有二阶连续的导函数，而且 $\boldsymbol{z = f\left(e^x \sin y\right)}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{y}^2} = \boldsymbol{e}^{2x} \boldsymbol{z} ,$$

试求函数 $\boldsymbol{f(u)}$.

解　设 $u = e^x \sin y$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) e^x \sin y \text{，} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) e^x \cos y$$

所以，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u) e^{2x} \sin^2 y + f'(u) e^x \sin y$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u) e^{2x} \cos^2 y - f'(u) e^x \sin y$$

代入方程　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x} z$,

得，$f''(u) e^{2x} \sin^2 y + f'(u) e^x \sin y + f''(u) e^{2x} \cos^2 y - f'(u) e^x \sin y = e^{2x} z$

即，$f''(u) e^{2x} = f(u) e^{2x}$

由此得微分方程　$f''(u) - f(u) = 0$

解此二阶线性微分方程，得其通解为

$f(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u}$　（C_1 与 C_2 为任意常数）

此即为所求函数.