第三章课外练习题解答

导数应用习题解答

1．设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x|<1 \\ ax^4-bx^2+c, & |x|\geq 1 \end{cases}$，试讨论 a,b,c 满足什么条件时，函数 $f(x)$ 可导.

解 （导数概念、可导与连续的关系） 由 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续，得

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x),$$

即

$$a-b+c=0;$$

由 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导，得

$$f'_+(1)=f'_-(1),$$

即

$$4a-2b=0;$$

故 $\begin{cases} a=c \\ b=2c \end{cases}$.

类似地，由 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处可导，同样得到 $\begin{cases} a=c \\ b=2c \end{cases}$，所以当 a,b,c 满足 $\begin{cases} a=c \\ b=2c \end{cases}$ 时，函数 $f(x)$ 可导，其中 c 可取任意实数.

注：事实上，由于 $f(x)$ 是偶函数，所以可以只考虑 $f(x)$ 在 $x=1$ 的可导性.

2．求极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x-\frac{1}{2}x\sin 2x}{x^2(e^{x^2}-1)}$； （2）$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$；（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$.

解 （1）（罗必达法则、等价无穷小代换）

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x-\frac{1}{2}x\sin 2x}{x^2(e^{x^2}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sin x-x\cos x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{1}{3}\text{。}$$

（2）解法 1：（重要极限，微分中值定理，等价无穷小代换）

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}\bullet\frac{\sin x-x}{x}\bullet\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}\bullet(\cos\xi-1)\bullet\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}\bullet(-\frac{1}{2}\xi)\bullet\frac{\xi}{x}}=e^0=1\text{。}$$

由于 $0<\xi<x$，所以 $\xi\to 0^+, 0<\frac{\xi}{x}<1$，从而 $(-\frac{1}{2}\xi)\bullet\frac{\xi}{x}\to 0^+$.

解法 2：（重要极限，洛必达法则，等价无穷小代换）

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}\bullet\frac{\sin x-x}{x}\bullet\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\cos x-1}{2x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{-\frac{x}{4}}=1\text{。}$$

或

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln\sin x-\ln x}{x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}.$$

$$=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{-x\sin x}{2x}}=1\text{。}$$

（3）（洛必达法则）

$$\lim_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{1-e^{x\ln x}(\ln x+1)}{-1+\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-e^{x\ln x}(\ln x+1)^2-\frac{1}{x}e^{x\ln x}}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{-1-1}{-1}=2\text{。}$$

（4）（洛必达法则）

当 $n=m$ 时， $\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=0$；

当 $n\neq m$ 时，不妨设 $n>m$， 则

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\lim_{x\to1}\frac{m(1-x^n)-n(1-x^m)}{(1-x^m)(1-x^n)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-mnx^{n-1}+nmx^{m-1}}{-mx^{m-1}(1-x^n)-nx^{n-1}(1-x^m)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{mnx^{n-m}-nm}{m(1-x^n)+nx^{n-m}(1-x^m)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{mn(n-m)x^{n-m-1}}{-mnx^{n-1}+n(n-m)x^{n-m-1}(1-x^m)-nmx^{n-1}}$$

$$=-\frac{1}{2}(n-m)=\frac{1}{2}(m-n).$$

3．证明方程$2^x+2x^2+x-1=0$至多有两个不同实根.

证明 （罗尔定理）

设$2^x+2x^2+x-1=0$有三个不同实根，则

$$2^x\ln 2+4x+1=0$$

至少有两个不同实根，方程

$$2^x(\ln 2)^2+4=0$$

至少有一个实根．但$2^x(\ln 2)^2+4>4$，所以矛盾，故方程$2^x+2x^2+x-1=0$至多有两个不同实根.

4．已知$a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，证明$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$至少有一个实根.

证（Rolle 定理）

令$f(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$，则$f(x)$可导且$f(0)=0, f(1)=0$，所以存在$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)=0$，即

$a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+\cdots+a_n\xi^n=0$.

5. 设$f(x)$在$[a,b]$上一阶可导，在(a,b)内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$，证明：

（1）存在$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$；

（2）存在$\eta\in(a,b)$，使$f''(\eta)=f'(\eta)$；

（3）存在$\zeta\in(a,b)$，使得$f''(\zeta)=f(\zeta)$.

证明 （导数概念，极限性质，连续函数的零点存在定理，罗尔定理）

（1） 不妨设$f'(a)>0, f'(b)>0$，由

$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,$$

存在$x_1\in(a,b)$，使得$f(x_1)>f(a)=0$；由

$$f'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$$

存在$x_2 \in (a,b)$，使得$f(x_2) < f(b) = 0$. 因为$f(x)$在$[a,b]$上连续，所以存在$\xi \in (a,b)$使$f(\xi) = 0$.

（2） 令$F(x) = f(x)e^{-x}$，则$F(x)$在$[a,b]$上一阶可导，且

$$F(a) = F(\xi) = F(b) = 0,$$

所以存在$\xi_1 < \xi_2 \in (a,b)$，使$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$，故

$$f'(\xi_1) - f(\xi_1) = 0, f'(\xi_2) - f(\xi_2) = 0.$$

因此存在$\eta \in (a,b)$，使

$$f''(\eta) - f'(\eta) = 0.$$

（3）令 $G(x) = [f'(x) - f(x)]e^x$，则 $G(\xi_1) = G(\xi_2) = 0$，所以 $\exists \varsigma \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a,b)$ 使得 $G'(\varsigma) = 0$，即 $[f''(\varsigma) - f(\varsigma)]e^{\varsigma} = 0$，故$f''(\zeta) = f(\zeta)$.

6．设函数$f(x), g(x), h(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，试证存在$\xi \in (a,b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

证明 （Rolle 定理）

令 $F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}$，则函数$F(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，且

$F(a) = 0, F(b) = 0$. 根据 Rolle 定理可知，存在$\xi \in (a,b)$，使得 $F'(\xi) = 0$，即

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

7．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b), f'_+(a)>0$，求证存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$．（试用几种不同的方法进行证明）

解 （单调性，或微分中值定理，或罗尔定理，或泰勒公式（暂不做要求））

法一 反证法．若 $f''(x)\ge 0$ 对任意的 $x\in(a,b)$ 都成立，则 $f'(x)$ 单增，故

$$f'(x)\ge f'_+(a)>0,$$

所以 $f(x)$ 严格单增，这与 $f(a)=f(b)$ 矛盾．从而存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f''(\xi)<0.$$

法二 因为 $f'_+(a)>0$，所以存在 $c\in(a,b)$，使得

$$f(c)>f(a)=f(b).$$

根据微分中值定理，存在 $x_1\in(a,c)$，$x_2\in(c,b)$，使得

$$f'(x_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0,\ f'(x_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0,$$

从而存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1}<0.$$

法三 因为 $f'_+(a)>0$，所以存在 $c\in(a,b)$，使得

$$f(c)>f(a)=f(b).$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=\max\limits_{a\le x\le b}\{f(x)\}$，从而 $f'(x_0)=0$．根据 Taylor 公式可知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$0>f(a)-f(x_0)=f'(x_0)(a-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(a-x_0)^2=\frac{1}{2}f''(\xi)(a-x_0)^2,$$

故 $f''(\xi)<0$．

法四 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)$，所以根据罗尔定

理，存在$\eta\in(a,b)$使得$f'(\eta)=0$，从而存在$\xi\in(a,\eta)\subset(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(\eta)-f'_+(a)}{\eta-a}=-\frac{f'_+(a)}{\eta-a}<0.$$

法五 根据泰勒公式得

$$f(b)=f(a)+f'_+(a)(b-a)+\frac{1}{2}f''(\xi)(b-a)^2,$$

由于且$f(a)=f(b)$，所以$0=f'_+(a)(b-a)+\frac{1}{2}f''(\xi)(b-a)^2$，考虑到$a<b,\ f'_+(a)>0$便知$f''(\xi)<0$.

法六 因为$f'_+(a)>0$，所以存在$c\in(a,b)$，使得

$$f(c)>f(a)=f(b).$$

由于$f(x)$在$[a,b]$上连续，所以存在$x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=\max\limits_{a\le x\le b}\{f(x)\}$，从而 $f'(x_0)=0$. 根据 Taylor 公式可知，存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$0>f(a)-f(x_0)=f'(x_0)(a-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(a-x_0)^2=\frac{1}{2}f''(\xi)(a-x_0)^2,$$

故 $f''(\xi)<0$.

8．已知函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$．证明：

(I) 存在$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=1-\xi$；

(II) 存在两个不同的点$\eta,\zeta\in(0,1)$，使得$f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

证明（连续函数的性质：零点存在定理，Lagrange 中值定理）

（I）令$g(x)=f(x)+x-1$，则$g(x)$在$[0,1]$上连续，且$g(0)=-1<0,g(1)=1>0$，由连续函数零点定理，存在$\xi\in(0,1)$使得$g(\xi)=f(\xi)+\xi-1=0$，即$f(\xi)=1-\xi$.

(II) 根据拉格朗日中值定理，存在$\eta\in(0,\xi),\zeta\in(\xi,1)$，使得

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=\frac{1-\xi}{\xi},$$

与 $$f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-(1-\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi},$$

所以 $f'(\eta)f'(\zeta)=\dfrac{1-\xi}{\xi}\cdot\dfrac{\xi}{1-\xi}=1$.

注：第二问能否如下证明？

令 $g(x)=f(f(x))-x$，则 $g(0)=f(f(0))-0=0, g(1)=f(f(1))-1=0$，根据罗尔

理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $g'(\xi)=f'(f(\xi))f'(\xi)-1=0$，记 $\eta=f(\xi)$，则 $f'(\eta)f'(\xi)=1$

9．设函数 $f(x)$ 二阶可导，若 $f''(\xi)>0$，试证存在 a,b 满足 $a<\xi<b$，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$.

解 （极值的充分条件，介值定理）

当 $f'(\xi)=0$ 时，由于 $f''(\xi)>0$，于是 ξ 为 $f(x)$ 的一个极小值点，所以存

$x_1<\xi<x_2$，使得

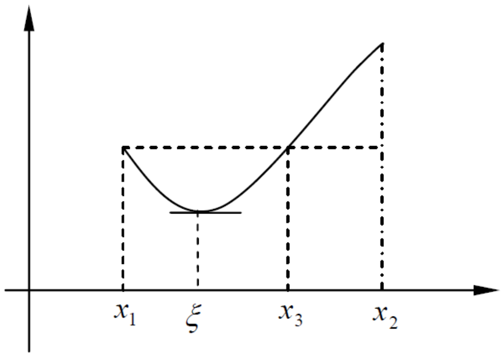
$$f(x_1)>f(\xi), f(x_2)>f(\xi),$$

不妨假设 $f(x_1)<f(x_2)$，根据连续函数的介值定理，存在 $x_3\in(\xi,x_2)$，使得

$$f(x_3)=f(x_1).$$

取 $a=x_1,b=x_3$，则 $a<\xi<b$，且

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0=f'(\xi).$$



当 $f'(\xi)\neq 0$ 时，令 $g(x)=f(x)-f'(\xi)x$，则

$$g'(\xi)=0，\ g''(\xi)=f''(\xi)>0,$$

所以存在 $a<\xi<b$，使得

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=0,$$

即
$$\frac{f(b)-f'(\xi)b-f(a)+f'(\xi)a}{b-a}=0\,.$$
故
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)\,.$$
10．若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取到最大值，$f(x)\in D^2[0,1]$，且 $|f''(x)|\le 1,\ \forall x\in[0,1]$，证

$|f'(0)|+|f'(1)|\le 1$.

解 （极值点的必要条件，微分中值定理）

设 $a\in(0,1)$ 是 $f(x)$ 的最大值点，则 a 是 $f(x)$ 的极大值点，故
$$f'(a)=0\,.$$
由于
$$f'(0)=f'(a)+f''(\xi)(0-a)=-af''(\xi)\,,$$
$$f'(1)=f'(a)+f''(\eta)(1-a)=(1-a)f''(\eta)\,,$$
所以
$$|f'(0)|+|f'(1)|=a|f''(\xi)|+(1-a)|f''(\eta)|\le 1\,.$$
11．若 $f(x)\in D^2(-\infty,+\infty)$, 证明对任意的 $a<c<b$,都存在 $\xi\in(a,b)$,使得
$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{2}f''(\xi)\,.$$
解 （泰勒公式，介值定理，或罗尔定理）

法一 （泰勒公式）因为
$$f(a)=f(c)+f'(c)(a-c)+\frac{1}{2}f''(x_1)(a-c)^2,$$
$$f(b)=f(c)+f'(c)(b-c)+\frac{1}{2}f''(x_2)(b-c)^2.$$
所以 $\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$
$$=f(c)\left(\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}\right)$$
$$+f'(c)\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c-a}{b-a}f''(x_1)+\frac{b-c}{b-a}f''(x_2)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{c-a}{b-a}f''(x_1)+\frac{b-c}{b-a}f''(x_2)\right)=\frac{1}{2}f''(\xi)\,.$$

注 用到了二阶导函数 $f''(x)$ 的介值性质.

法二 （待定系数法）

记 $\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{1}{2}K$,

则 $f(a)(b-c)+f(b)(c-a)+f(c)(a-b)-\dfrac{1}{2}K(a-b)(b-c)(a-c)=0$.

令 $F(x)=f(a)(x-c)+f(x)(c-a)+f(c)(a-x)-\dfrac{1}{2}K(a-x)(x-c)(a-c)$

则 $F(a)=F(b)=F(c)=0$,

所以,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F''(\xi)=0$,即 $f''(\xi)(c-a)+K(a-c)=0$.

故 $K=f''(\xi)$.

12. 若 $b>a>e$，证明 $a^b>b^a$.

解 （函数单调性）

当 $b>a>e$ 时,

$$a^b>b^a \Leftrightarrow b\ln a>a\ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}.$$

令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0 \quad (x>e),$$

所以 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $(e,+\infty)$ 上单减，故当 $b>a>e$ 时，有

$$\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b},$$

即

$$a^b>b^a.$$

注 本题构造辅助函数 $f(x)=x\ln a-a\ln x\ (x>a>e)$ 也可.

13. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{(1+x)^2}+3$，求:

（1）函数的增减区间及极值;

（2）函数的凹凸区间及拐点;

（3）函数图形的渐近线.

解 函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(1+x)^3},\quad f''(x)=\frac{6x}{(1+x)^4},$$

由 $f'(x)=0$ 得 $$x=0,\ x=-3,$$

由 $f''(x)=0$ 得 $$x=0.$$

所以：（1）函数的单增区间为 $(-\infty,-3),(-1,+\infty)$，单减区间为 $(-3,-1)$；极大值为 $f(-3)=-\frac{15}{4}$.

（2）函数的凹区间为 $(-\infty,-1),(-1,0)$，凸区间为 $(0,+\infty)$；拐点为 $x=0$.

（3）因为 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\infty$，所以 $x=-1$ 是 $y=\frac{x^3}{(1+x)^2}+3$ 的一条垂直渐近线；

又由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\quad \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=1$，故 $y=x+1$ 是 $y=\frac{x^3}{(1+x)^2}+3$ 的一条斜渐近线.

14．求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的点 P，使得过此点引切线与坐标轴构成的三角形的面积最小.

解 （导数的几何意义，函数的最值）

根据对称性，只考虑点 P 位于第一象限中的情形.

设点 P 的坐标为 (s,t)，则椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在点 P 的切线方程为

$$y=t-\frac{b^2s}{a^2t}(x-s),$$

此切线在两坐标轴上的截距分别为 $x_0=\frac{a^2}{s}$，$y_0=\frac{b^2}{t}$.

此切线与两坐标轴围成的三角形面积为

$$A=\frac{a^2b^2}{2st}=\frac{ab^3}{2t\sqrt{b^2-t^2}}\quad(0<t<b),$$

当 $t=\sqrt{b^2-t^2}$，即 $t=\frac{b}{\sqrt{2}}$ 时，A 最小. 故当点 P 为 $(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}),(-\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}),(-\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}})$ 或 $(\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}})$ 时，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 过此点的切线与坐标轴构成的三角形的面积最小.

15．在半径为 R 的球内作内接正圆锥，试求其最大体积．

解 内接正圆锥的底面半径为 $R\cos\alpha$，高为 $R(1+\sin\alpha)$，其中 $\alpha\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$．

内接正圆锥的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2\cos^2\alpha R(1+\sin\alpha)=\frac{1}{3}\pi R^3\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)\text{，}$$

由 $\frac{dV}{d\alpha}=0$ 得 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$．故当内接正圆锥的底面直径为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}R$，高为 $\frac{4}{3}R$ 时，其体积最大，最大体积为 $\frac{32}{81}\pi R^3$．

16．若 $f(x)=2nx(1-x)^n$，求：（1）$M_n=\max\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}$；（2*）$\lim\limits_{n\to\infty}M_n$．

解 （函数最值，重要极限）

由

$$f'(x)=2n(1-x)^n-2n^2x(1-x)^{n-1}=0$$

得 $x=\frac{1}{n+1}$，或 $x=1$，因此

（1）
$$M_n=\max_{x\in[0,1]}\{f(x)\}=f(\frac{1}{n+1})=2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\text{；}$$

（2）
$$\lim_{n\to\infty}M_n=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{2}{e}.$$

17．求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$；　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)}{\sin^4 3x}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$．

解

（1）（泰勒公式）

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{6}\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-x^3\left(1+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{6}+o(1)\right)-o(1)\right]=\frac{1}{6}$$

（2）（Taylor 公式）因为

$$\sin(e^x-1)=(e^x-1)-\frac{1}{6}(e^x-1)^3+o(x^4)$$
$$=[x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)]-\frac{1}{6}[x^3+\frac{3}{2}x^4+o(x^4)]+o(x^4)$$
$$=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{24}x^4+o(x^4),$$

$$e^{\sin x}-1=\sin x+\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{6}\sin^3 x+\frac{1}{24}\sin^4 x+o(x^4)$$
$$=[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)]+\frac{1}{2}[x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)]$$
$$+\frac{1}{6}[x^3+o(x^4)]+\frac{1}{24}[x^4+o(x^4)]+o(x^4)$$
$$=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{24}x^4+o(x^4),$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)}{\sin^4 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{81x^4}=-\dfrac{1}{972}$.

（3）（Taylor 公式）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}}{e}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{n(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))}}{e}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left(e^{-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}\right)^n=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

18. 若 $f(x)\in C^2(a,b), x_0\in(a,b), f''(x_0)\neq 0$，$\theta\in(0,1)$ 满足

$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\theta h)h$， 证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

证明 （微分中值定理，泰勒公式，导数定义）

法 1 因为

$$f'(x_0+\theta h)h=f(x_0+h)-f(x_0)$$
$$=f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2),$$

所以

$$f'(x_0+\theta h)h-f'(x_0)h=\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2),$$

故

$$\frac{f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)}{\theta h}\theta=\frac{1}{2}f''(x_0)+o(1).$$

令 $h \to 0$，得 $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \dfrac{1}{2}$.

法 2 由于

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2),$$

$$f'(x_0+\theta h)=f'(x_0)+f''(x_0)\theta h+o(h),$$

根据 $f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\theta h)h$，得

$$f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2)=f'(x_0)h+f''(x_0)\theta h^2+o(h^2),$$

故 $\theta=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{f''(x_0)}o(1)$，所以 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

19*. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数， $x_0\in(a,b), f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$，$\theta\in(0,1)$ 满足

$f(x_0+h)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)h^k+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h)h^n$，证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

证明（泰勒公式、导数定义）

根据带有 Peano 型余项的泰勒公式，得

$$f(x_0+h)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)h^k+o(h^{n+1}),$$

又

$$f(x_0+h)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)h^k+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h)h^n,$$

两式相减，得

$$\frac{1}{n!}[f^{(n)}(x_0+\theta h)-f^{(n)}(x_0)]h^n=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)h^{n+1}+o(h^{n+1}),$$

整理，得

$$\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)-f^{(n)}(x_0)}{\theta h}\theta=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x_0)+o(1).$$

令 $h\to 0$，得 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

20. 若 $f(x)\in D(-1,1)$, 且 $f'(0)=0$, $f''(0)$ 存在，证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\frac{1}{2}f''(0).$$

解 （微分中值定理，泰勒公式，导数定义，夹逼定理）

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)(x-\ln(1+x))}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)}{\xi}\cdot\frac{\xi}{x}\cdot\frac{x-(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))}{x^2}=\frac{1}{2}f''(0).$$

注 1 因为ξ在x与$\ln(1+x)$之间，所以$\frac{\xi}{x}$介于$\frac{x}{x}$与$\frac{\ln(1+x)}{x}$之间，故 $\lim_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=1$.

注 2 若将$f(x)$与$f(\ln(1+x))$在$x=0$直接展开, 由于只用到了$f'(0), f''(0)$的存在性, 故得不到结论.

21. 若$f(x)\in D^3[0,+\infty)$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)$存在, $\lim_{x\to+\infty}f'''(x)=0$，证明

$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0,\ \lim_{x\to+\infty}f''(x)=0$.

解 （泰勒公式）

当$x>1$时，

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi),\quad \xi\in(x,x+1),$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(\eta),\quad \eta\in(x-1,x),$$

两式相减，并令$x\to+\infty$得

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0,$$

两式相加，并令$x\to+\infty$得

$$\lim_{x\to+\infty}f''(x)=0.$$

注 事实上，任意两点$x+a, x+b$的值在点x展开都能得到结论.

22.设函数 $f(x)$在闭区间[0，1] 上可微，对于[0，1] 上的每一个 x，函数 $f(x)$的值都在开区间（0，1）内，且 $f'(x)\neq 1$，证明在（0，1）区间内有且仅有一个 x 使 得 $f(x)=x$ 成立.

证：①令 $F(x)=f(x)-x$，由原题设可知 $F(x)$在[0，1]上连续，

又 $F(0)=f(0)>0$，$F(1)=f(1)-1<0$，由连续函数的介值定理可知在（0，1）内至少存在一个 x，使 $F(x)=0$，即 $f(x)=x$.

②唯一性：用反证法，假设在（0，1）内使得 $f(x)=x$ 的 x 不唯一，则至少应有两个，不妨设为 x_1 和 x_2 且 $x_1<x_2$，则 $F(x)$在$[x_1,x_2]$上连续，在(x_1,x_2)内可导，且

$F(x_1)=F(x_2)=0$，由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使 $F'(\xi)=0$，即

$f'(\xi)=1$，

与原题设 $f'(x)\neq 1$矛盾.

23．讨论当$x\to 0$时，$y=\ln(1+\sin^2 x)+\alpha(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)$是几阶无穷小量．

解 （泰勒公式，无穷小量阶的概念）

因为

$$\begin{aligned}&\ln(1+\sin^2 x)\\&=\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin^4 x+o(x^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3))^2-\frac{1}{2}(x+o(x))^4+o(x^4)\\&=x^2-\frac{5}{6}x^4+o(x^4);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sqrt[3]{2-\cos x}-1\\&=\frac{1}{3}(1-\cos x)-\frac{1}{9}(1-\cos x)^2+o(x^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^4))-\frac{1}{9}(\frac{1}{2}x^2+o(x^2))^2+o(x^4)\\&=\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^4),\end{aligned}$$

所以

$$y=\ln(1+\sin^2 x)+\alpha(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)$$

$$=x^2-\frac{5}{6}x^4+o(x^4)+\alpha[\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)].$$

故当$\alpha\neq -6$时，为2阶无穷小量；当$\alpha=-6$时，为4阶无穷小量．

24．若极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{200}}{x^\alpha-x^\alpha(1-\frac{1}{x})^\alpha}$存在，求$\alpha$的取值范围与此极限的值．

解 （无穷大量的比较，泰勒公式）

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{200}}{x^\alpha-x^\alpha(1-\frac{1}{x})^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{200-\alpha}}{1-[1-\alpha\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{201-\alpha}}{\alpha+o(1)},$$

要使极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{201-\alpha}}{\alpha+o(1)}$ 存在，必须 $\alpha\ge 201$.

当 $\alpha=201$ 时， $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{200}}{x^{\alpha}-x^{\alpha}(1-\frac{1}{x})^{\alpha}}=\dfrac{1}{201}$；

当 $\alpha>201$ 时， $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{200}}{x^{\alpha}-x^{\alpha}(1-\frac{1}{x})^{\alpha}}=0$.

25. 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 100 阶导数 $f^{(100)}(0)$.

解 （泰勒公式，泰勒多项式的惟一性）

因为

$$f(x)=x^2\ln(1+x)=x^2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+o(x^{n+2}),$$

所以

$$\frac{f^{(100)}(0)}{100!}=-\frac{1}{98},$$

即

$$f^{(100)}(0)=-\frac{100!}{98}.$$

注 本题也可利用莱布尼茨公式求解.

26*. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数， $f(\xi)=0, f'(\xi)\ne 0$，若 $\{x_n\}$ 以 ξ 为极限且满足

$$\begin{cases} x_0 \\ x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, n=1,2,3,\cdots, \end{cases}$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{(x_{n-1}-x_{n-2})^2}=-\dfrac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}$.

证明 （泰勒公式）

由于

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$= -\frac{f(x_{n-2}) + f'(x_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-2}) + \frac{1}{2} f''(\xi_n)(x_{n-1} - x_{n-2})^2}{f'(x_{n-1})},$$

且由 $x_{n-1} = x_{n-2} - \frac{f(x_{n-2})}{f'(x_{n-2})}$ 可知 $f(x_{n-2}) + f'(x_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-2}) = 0$，

所以 $x_n - x_{n-1} = -\frac{f''(\xi_n)(x_{n-1} - x_{n-2})^2}{2f'(x_{n-1})}$.

即 $-\frac{x_n - x_{n-1}}{(x_{n-1} - x_{n-2})^2} = -\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_{n-1})}$，其中 ξ_n 介于 x_{n-1} 与 x_{n-2} 之间.

由于 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $\{x_n\}$ 以 ξ 为极限，令 $n \to \infty$ 得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{(x_{n-1} - x_{n-2})^2} = -\lim_{n\to\infty} \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_{n-1})} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}.$$