第一章课外练习题解答

第一部分：极限题目

一、求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$；

解（极限与左、右极限的关系，无穷大与无穷小的关系）

因为 $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{1}{x}}+e^{\frac{3}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1。$$

2. 已知数列 $F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$；

解（极限的四则运算）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{1+\sqrt{5}}-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}\approx 0.618$$

3。已知 $\left(2+\sqrt{2}\right)^n=A_n+B_n\sqrt{2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{B_n}$；

解：由已知可得 $\left(2-\sqrt{2}\right)^n=A_n-B_n\sqrt{2}$，于是 $A_n=\dfrac{1}{2}\left[(2+\sqrt{2})^n+(2-\sqrt{2})^n\right]$，

$B_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[(2+\sqrt{2})^n-(2-\sqrt{2})^n\right]$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\frac{(2+\sqrt{2})^n+(2-\sqrt{2})^n}{(2+\sqrt{2})^n-(2-\sqrt{2})^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\frac{1+\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^n}{1-\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^n}=\sqrt{2}。$$

4．讨论极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$ $,q\neq 0$；

解（书后习题只讨论了 $p>0,q>0$ 的情况）

当 $p>0,q>0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+q^2}+q}{\sqrt{x^2+p^2}+p}=\dfrac{q}{p}$；

当 $q<0,p\leq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}=\dfrac{|p|-p}{|q|-q}=\dfrac{p}{q}$；

当 $q>0,p<0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}=\infty$；

当 $q>0,p=0$ 时，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+q^2}-q}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}(\sqrt{x^2+q^2}+q)}{x^2}=\infty；$$

当 $q<0,p>0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+q^2}+q}{\sqrt{x^2+p^2}+p}=\dfrac{|q|+q}{2p}=0$。

5．$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$ $(a>0,b>0)$；

解 （重要极限，等价无穷小代换）

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a^{\frac{1}{x}}-1+b^{\frac{1}{x}}-1}{2}\right)^{\frac{2}{a^{\frac{1}{x}}-1+b^{\frac{1}{x}}-1}\cdot\frac{a^{\frac{1}{x}}-1+b^{\frac{1}{x}}-1}{2\frac{1}{x}}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\sqrt{ab}.$$

6．$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^x$ $(a_k>0)$；

结果为 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$。　7．$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$；

解法 1：$\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=\sin^2\left(\pi n\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)=\sin^2\left(\pi n\left(1+\dfrac{1}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\right)$

$$=\sin^2\left(\pi n+\frac{\pi n}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(=\sin(\pi n+\frac{\pi n}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))\right)^2\to 0。$$

解法 2：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)=0$。

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$;

解法 1：$\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\sin^2\left(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)=\sin^2\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$

$$=\sin^2\left(\pi n+\frac{\pi}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cos^2\left(\pi n+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\to 1。$$

解法 2：

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right)=1。$$

9. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{1-\cos x}-1}{\tan(x^k\pi)}=a\neq 0$，求$k$与$a$的值.

解（无穷小比较，等价无穷小代换）

因为 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\cos x}-1}{\tan(x^k\pi)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^k\pi}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^k\pi}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x^{k-2}\pi}=a\neq 0,$$

所以 $$k=2,\quad a=\frac{1}{2\pi}。$$

二、解答与证明题

1. 若$f(x)$和$g(x)$都是周期函数，且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$，$f(x)$和$g(x)$两函数有什么关系？ 证明你的结论。

解：$f(x)\equiv g(x)$。证明如下：

设$f(x)$和$g(x)$的周期分别是a与b，则

$\forall x$， $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x+na) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x+nb) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x) = g(x)$。

2．已知当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 0$。证明当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ 时，

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = AB$。

证 （极限性质、极限与无穷小的关系、极限运算）

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，所以 $a_n = A + \alpha_n, b_n = B + \beta_n$，其中 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$。

由于 $a_k b_{n-k+1} = (A+\alpha_k)(B+\beta_{n-k+1}) = AB + A\beta_{n-k+1} + B\alpha_k + \alpha_k \beta_{n-k+1}$，

所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[AB + A\frac{\beta_n + \beta_{n-1} + \cdots + \beta_1}{n} + B\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} + \frac{\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n} \right]$$

而 $\left| \frac{\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n} \right| \le M \frac{|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|}{n}$，其中 $|\beta_n| \le M$，

从而根据 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\beta_n + \beta_{n-1} + \cdots + \beta_1}{n} = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_3}{n} = 0$，及

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|}{n} = 0$ 便得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = AB$。

3．若 $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$, $|f(x)| \le |\sin x|$, 则 $|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \le 1$.

证明 （重要极限，极限保序性）

当 $\sin x \ne 0$ 时，有 $\frac{|f(x)|}{|\sin x|} \le 1$，即

$$\left| \frac{a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx}{\sin x} \right| \le 1,$$

在不等式两端令 $x \to 0$ 得

$$|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \le 1。$$

4. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{3}{1^2\times 2^2}+\dfrac{5}{2^2\times 3^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2\times(n+1)^2}\right]$ 的值是

(*a*) 0; (*b*) 1; (*c*) 2; (*d*) 不存在.

解. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{3}{1^2\times 2^2}+\dfrac{5}{2^2\times 3^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2\times(n+1)^2}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]=1$，所以(b)为答案.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$________.

解. $\dfrac{1}{n^2+n+n}+\dfrac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$

$<\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}<\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+1}$

所以 $\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}<\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$

$\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\dfrac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n+n}\to\dfrac{1}{2}$, (n→∞)

$\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\dfrac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n+1}\to\dfrac{1}{2}$, (n→∞)

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=\dfrac{1}{2}$.

6. 设 $f_1(x)=\begin{cases}x, & 1\le x\le 2,\\ \dfrac{1}{x}, & x>2,\end{cases}$ $f_n(x)=\begin{cases}1, & 1\le x\le n,\\ x^n, & n<x\le n+1,\\ \dfrac{1}{x}, & x>n+1,\end{cases}$

（1）对任意固定的 n，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$；

（2）求 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的表达式；

（3）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$。

解 （1）对任意固定的 n，$\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$；

（2）（求 $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的表达式，也就是求 $F(x)$ 在任意点的值）

对任意的 $x\in[1,+\infty)$，

当 $x \in [1,2]$ 时， $f_1(x)=x, f_2(x)=1, f_3(x)=1,\cdots$， 这时

$$F(x)=\lim_{n\to\infty} f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)=x\text{；}$$

当 $x \in (2,+\infty)$ 时，总存在正整数 n_0 使得 $n_0+1<x\le n_0+2$，这时

$$f_1(x)=\frac{1}{x}, f_2(x)=\frac{1}{x},\cdots, f_{n_0}(x)=\frac{1}{x},\quad f_{n_0+1}(x)=x^{n_0+1}, f_{n_0+2}(x)=f_{n_0+3}(x)=\cdots=1,$$

所以 $F(x)=\lim_{n\to\infty} f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)=x$。

综上便知 $F(x)=\lim_{n\to\infty} f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的表达式为 $F(x)=x$。

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$。

第二部分：连续题目

连续函数的概念与性质

1．间断点：（1）函数 $f(x)=(1+x)^{x/\tan(x-\frac{\pi}{4})}$ 在 $(0,2\pi)$ 内的间断点个数是[ ]

（A）1. （B）2. （C）3. （D）4.

（2）指出函数 $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点及其类型.

解 （1）选(D).（对初等函数，找间断点就是找没定义的点和定义域的孤立点.）

在 $(0,2\pi)$ 内，因为 $\tan(x-\frac{\pi}{4})$ 没定义的点为 $\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$， $\tan(x-\frac{\pi}{4})$ 等于零的点为 $\frac{1}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi$，所以函数 $f(x)=(1+x)^{x/\tan(x-\frac{\pi}{4})}$ 在 $(0,2\pi)$ 内的间断点个数是 4.

（2）（间断点分类）

函数 $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点为 $0,\pm1$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=1,\quad \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-1$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点（跳跃型）.

因为 $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\dfrac{1}{2},\quad \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\dfrac{1}{2}$， 所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去型间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to -1^{+}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^{-}} f(x)=+\infty$，所以 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

2．讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{t\to x}(\dfrac{x-1}{t-1})^{\frac{t}{x-t}}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1\end{cases}$ 的连续性.

解 （重要极限，连续概念）

当 $x\neq 1$ 时，$\lim\limits_{t\to x}(\dfrac{x-1}{t-1})^{\frac{t}{x-t}}=\lim\limits_{t\to x}\left[(1+\dfrac{x-t}{t-1})^{\frac{t-1}{x-t}}\right]^{\frac{x-t}{t-1}\frac{t}{x-1}}=e^{\frac{x}{x-1}}$,

所以 $$f(x)=\begin{cases}0, & x=1,\\ e^{\frac{x}{x-1}}, & x\neq 1.\end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 1^{+}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^{-}} f(x)=0$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处间断，且 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

3．若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，则在任何一个周期内存在 $\xi\in\mathrm{R}$，使得 $f(\xi+\pi)=f(\xi)$.

证明 （连续函数的零点存在定理，周期函数的概念）

令 $F(x)=f(x+\pi)-f(x)$，则 $F(x)$ 连续，且

$$F(a)=f(a+\pi)-f(a),$$

$$F(a+\pi)=f(a+2\pi)-f(a+\pi)=f(a)-f(a+\pi),$$

所以 $F(a)F(a+\pi)\leq 0$. 当等号成立时，取 $\xi=a$；当等号不成立时，由连续函数的零点存在定理，存在 $\xi\in(a,a+\pi)\subset\mathrm{R}$，使得

$$F(\xi)=0，即\ f(\xi+\pi)=f(\xi).$$

4．已知函数 f 在圆周上有定义，并且连续. 证明：可以找到一条直径，使得其两个端点 A，B 满足 $f(A)=f(B)$.

证明 （连续函数的零点存在定理，周期函数的概念）

以圆心为极点，某个半径作极轴，于是圆周上的点可以由极角 θ 决定. f 便是 θ 的连续函数，且以 2π 为周期. 至此问题变成求一 θ_0，使得 $f(\theta_0)=f(\theta_0+\pi)$. 以下做法同第 3 题.

5．证明：若 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, $f(f(x))=x$, 则存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$, 使得 $f(\xi)=\xi$.

证明 （连续函数的零点存在定理）

法一：令 $F(x)=f(x)-x$ ，则 $F(x)$ 连续，且

$$F(f(x))=f(f(x))-f(x)=x-f(x),$$

所以 $F(x)F(f(x))\le 0$. 当等号成立时，取 $\xi=x$；当等号不成立时，由连续函数的零点存在定理，存在介于 x 与 $f(x)$ 之间的点 ξ，使得

$$F(\xi)=0，即 \ f(\xi)=\xi.$$

法二：反证法. 若 $f(x)\ne x$ ，不妨设 $f(x)>x$ ，则

$$f(f(x))>f(x)>x,$$

这与条件矛盾，故存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$, 使得 $f(\xi)=\xi$.

6．证明：平面上，沿任一方向作平行直线，总存在一条直线，将给定的三角形分成面积相等的两部分.

简证 建立如图所示的坐标系. $S(x)$ 表示阴影部分的面积，由于对于任意的 $x_1,x_2\in[a,b]$，都有 $|S(x_1)-S(x_2)|<L|x_1-x_2|$，所以 $S(x)\in C[a,b]$，又因为 $S(a)=0, S(b)=s$ ，根据连续函数的介值定理可知存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $S(\xi)=\dfrac{1}{2}s$.