第十一章课外练习题

1. 计算下列曲线积分:

1） 计算 $I=\oint_L [(x+\sqrt{y})\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2]dl$，$L$ 是圆周 $x^2+(y-1)^2=1$

2） 计算 $I=\oint_C x^2dl$，$C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+y+z=0\end{cases}$

3） 计算 $I=\int_{L_+} 3x^2ydx-x^3dy$，$L_+$ 沿直线 $(0,0)\to(1,0)\to(1,1)$

4） 计算 $I=\int_{L_+} ydx-(x^2+y^2+z^2)dz$，$L_+$ 是曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\z=2x+4\end{cases}$ 在第一卦限中的部分，从点 $(0,1,4)$ 到点 $(1,0,6)$

5） 计算 $I=\int_L \dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$，$L$ 是曲线 $y=x^2-2$ 从 $A(-2,2)$ 到 $B(2,2)$ 的一段。

6） 计算 $I=\oint_L (y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$，$L$ 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向。

7） 计算 $I=\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)ydx$，沿任一条不与轴相交的曲线。

8） 计算 $I=\oint_C ydx+zdy+xdz$，$C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\x+y+z=0\end{cases}$，从正 z 轴方向看，C 的正向为反时针方向。

9） 计算 $I=\dfrac{1}{2\pi}\oint_C \dfrac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}$，其中 $\begin{cases}X=ax+by\\Y=cx+dy\end{cases}$，$ad-bc\neq 0$，$C$ 为包围原点的闭曲线。

2. 计算下列曲面积分:

1） 计算 $I=\oiint_S (x+y)dS$，其中 S 为 $x^2+y^2+z^2+4x+2y+6z-2=0$

2） 计算 $I=\oiint_S \left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{4}\right)dS$，其中 S 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$

3） 计算 $I=\iint_S xyz(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)dS$，其中 S 为 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (x,y,z\geq 0)$

4） 计算 $I=\oiint_S (x+y+z)dS$，其中 S 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

5） 计算 $I=\iint_S \left[(z^n-y^n)\cos\alpha+(x^n-z^n)\cos\beta+(y^n-x^n)\cos\gamma\right]dS$，其中

$S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ z\geq 0\end{cases}$ ， $\mathbf{n}=(\cos a,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 S 的外法向量。

6） 计算 $I=\iint\limits_{S}|z|dS$， $J=\iint\limits_{S}|z|dx\wedge dy$，其中 $S:x^2+y^2+z^2=a^2$， 外法线为曲面正向。

3. 求柱面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 包围部分的面积 S

4. 设函数满足：$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf(x,y,z)$，$n$ 为正整数，曲面 $S_1:f(x,y,z)=0$ 与平面 $S_2:ax+by+cz=d$，所围区域为 Ω， $\partial\Omega$ 取外法线作正向，计算：

$$I=\frac{1}{3}\iint\limits_{\partial\Omega}xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy$$

5. 已知曲线积分 $\int_L xy^2dx+yf(x)dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 连续可导，且 $f(0)=0$，求 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+yf(x)dy$ 的值。

6. 设函数 $f(x,y)$ 在 R^2 一阶连续可导，曲线积分 $\int_L 2xydx+f(x,y)dy$ 与路径无关，且对任意 t 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+f(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+f(x,y)dy$，求 $f(x,y)$ 的表达式。

7. 已知 $\oint_L\frac{1}{f(x)+y^2}(xdy-ydx)=A$，其中 $f\in C^1, f(1)=1, L$ 是绕原点一周的任意正向闭曲线，试求 $f(x)$ 及 A

8. 设 $u(x,y),v(x,y)$ 在全平面内有连续的一阶偏导数，且满足 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，记 C 为包围原点的正向简单闭曲线，计算 $I=\oint_C\frac{(xv-yu)dx+(xu+yv)dy}{x^2+y^2}$

9. 已知 $F(t)=\iint\limits_{\begin{cases}x+y+z=t\\ x^2+y^2+z^2\leq 1\end{cases}}(1-x^2-y^2-z^2)dS$， $t\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$，试求 $\frac{dF(t)}{dt}$