第 12 章课外练习题参考答案

一．选择题

1．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ＿＿＿＿＿＿ ．

（A）．一定绝对收敛；　　（B）．一定条件收敛；

（C）．一定发散；　　（D）．可能收敛也可能发散．

2．函数 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式为＿＿＿＿＿＿ ．

（A）．$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!(2n+1)}x^{2n+1}\quad(-\infty<x<+\infty)$；

（B）．$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!(2n+1)}x^{2n+1}\quad(-\infty<x<0，0<x<+\infty)$；

（C）．$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}x^{2n+1}\quad(-\infty<x<+\infty)$；

（D）．$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}x^{2n+1}\quad(-\infty<x<0，0<x<+\infty)$ ．

3．下列级数中，属于条件收敛的是＿＿＿＿＿＿ ．

（A）．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n}$ ；　　（B）．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}}{n^n}$ ；

（C）．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$；　　（D）．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ ．

4．设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi,\ \pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x & -\pi\le x<0 \\ 0 & 0\le x<\pi \end{cases},$$

再设 $f(x)$ 的 Fourier（傅立叶）级数的和函数为 $s(x)$，则 $s(\pi)=$【　　　】.

（A）．$-\frac{\pi}{2}$ ；　　（B）．$-\pi$ ；　　（C）．0 ；　　（D）．π ．

5．设 a_n 与 b_n 符合下列＿＿＿＿＿条件，可由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散推出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散．

（A）．$|a_n|\le b_n$；　（B）．$|a_n|\le|b_n|$ ；　（C）．$a_n\le|b_n|$；　（D）．$a_n\le b_n$ ．

6．设α为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

（A）．绝对收敛．　（B）．发散．　（C）．条件收敛．　（D）．敛散性与α取值有关．

7．设 $u_n=(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$，则（ $\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$ ）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛．　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散．

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散．　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛．

8．设函数 $f(x)=x^2,0\le x<1$，而 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,-\infty<x<+\infty$．其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx,(n=1,2,\cdots)$，则 $s(-\frac{1}{2})$ 等于

(A) $-\frac{1}{2}$，　(B) $-\frac{1}{4}$，　(C) $\frac{1}{4}$，　(D) $\frac{1}{2}$

注： $f(x)=x^2,0\le x<1$ *做了奇周期延拓，所以在* $-1\le x<2$ *上，* $f(x)=-x^2$ *，所以*

$s(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1-a_{n+1})$

$=\lim_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})$

$=a.$

9．设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛，则

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛，

(D) $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n+1}$ 都收敛．

10．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则必定收敛的级数为

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n-1})$

$=\sum_{n=1}^{\infty}u_n+\sum_{n=1}^{\infty}u_{n-1}$

$=2s-u_1$

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n-1})$

11．若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，则此级数在 $x=-1$ 处 （据阿贝尔引理知）

(A) 条件收敛，　(B) 绝对收敛，　(C) 发散，　(D) 收敛性不确定.

12．设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的必定收敛的区间为

(A) (－2, 4)　(B) [－2, 4]　(C) (－3, 3)　(D) (－4, 2)

二．填空题

1．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)$（$\alpha$ 为常数）的敛散性为_绝对收敛___．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\alpha}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha^2}{2n^2}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\alpha^2}{2}\geq 0$$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，固原级数绝对收敛

2．若 $a>0$，$b>0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$ 在 ____$a\geq b$____ 时发散.

3．设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_2，且 $0<R_1<R_2<+\infty$，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径为______R_1______.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\leq x<0\\ 1+x^2 & 0\leq x<\pi\end{cases}$，且以 2π 为周期，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于_____$\frac{\pi^2}{2}$________.

5. $p-$级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 在 p 满足_____$p>1$_______条件下收敛.

6. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ 在 a 满足____________$|a|>1$___________条件下收敛.

三．判断下列级数的敛散性:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}\sin\frac{1}{n}$；

解. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\ln(n+2)}\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n\ln n}}=1$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n+2)}\sin\dfrac{1}{n}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$有相同的敛散性. 又因为$\int_{2}^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}dx$发散，由积分判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$发散. 所以原级数发散 。

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)}(a\neq 0)$；

解：因为

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)}}{\dfrac{1}{n^3}}=1$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)}(a\neq 0)$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$有相同的敛散性. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$收敛，所以原级数收敛。

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n n!}{n^n}$；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{3^n n!}{n^n}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|3(\dfrac{n}{n+1})^n\right|=3e^{-1}>1$，故原级数发散。

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(n+1/n)^n}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^2}{(n+1/n)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1/n}=0<1$，故原级数发散。

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{2(2n+1)}\right|=\dfrac{1}{4}<1$，故原级数发散。

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(\sqrt{1+n}-\sqrt{n-1})$

解：对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\sqrt{1+n}$ ，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{\sqrt{2+n}}{(n+1)!}}{\dfrac{\sqrt{1+n}}{n!}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sqrt{\dfrac{2+n}{1+n}}\dfrac{1}{n+1}\right|=0<1$ 收敛，同理，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\sqrt{n-1}$ 也收敛，故原级数收敛。

四. 试将函数 $f(x)=\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ 展成 x 的幂级数（要求写出该幂级数的一般项并指出其收敛域）.

解：

$$f(x)'=e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!},(-\infty<x<\infty)$$

$$\therefore f(x)=\int_0^x f(x)'dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!},(-\infty<x<\infty)$$

五. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\dfrac{x^n}{n^n}$ 的收敛域（端点情形要讨论）.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{n!}{n^n}}{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|(\dfrac{n+1}{n})^n\right|=e$

$\therefore R=e$

当 $x=e$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\dfrac{e^n}{n^n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!\dfrac{e^n}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e}{n}=0<1$ 收敛

当 $x=-e$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n!\dfrac{e^n}{n^n}$ 也收敛，所以原级数收敛域为 $x\in[-e,e]$

六. 利用 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos x-1}{x}\right)$ 的幂级数展开式，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n-1}{(2n)!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{2n}$ 的和.

解：

$$\frac{\cos x-1}{x}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}-1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)x^{2n-2}}{(2n)!},(-\infty<x<\infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)(\frac{\pi}{2})^{2n-2}}{(2n)!}$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)_{x=\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+1=1-\frac{\pi}{2}$$

七．⑴．将 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展开为 x 的幂级数；

⑵．指出该幂级数的收敛域；

⑶．求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$ 的和．

解：

$$f(x)'=\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},(-1<x<1)$$

$$f(x)=\int_0^x f(x)'dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2},(-1<x<1)$$

当 $x=\pm1$ 时，对于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ 有，$\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}<\frac{1}{(2n+1)^2}$ 而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ 绝对收敛，所以收敛域为 $(-1\le x\le 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}=-2f(1)=-2(\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2})=\ln 2-\frac{\pi}{2}$$

八．把函数 $f(x)=\begin{cases}x & 0<x\le 1\\ 2-x & 1<x<2\end{cases}$ 分别展成正弦函数和余弦函数。

解：展成正弦函数，对 $f(x)$ 做周期为 4 的奇周期延拓，此时 $a_n=0$

$$b_n=\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$
$$=[-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{2}x+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}]_0^1+[-\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x+\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{2}x-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}]_1^2$$
$$=\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}(-1)^k,k=0,1,2\ldots$$

$$f(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}}{(2k+1)^2},0<x<2$$

展成余弦函数，将 $f(x)$ 做周期为 4 的偶周期延拓，此时 $b_n=0$

$$a_0=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2(2-x)dx=1$$
$$a_n=\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$
$$=[\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi}{2}x+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}]_0^1+[\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x-\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi}{2}x-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}]_1^2$$
$$=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=-\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2},k=0,1,2\ldots$$

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2k+1}{2}\pi x}{(2k+1)^2}，\quad 0<x<2$$

九． 把函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2} & -\pi\le x<\dfrac{-\pi}{2}\\ x & \dfrac{-\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\pi}{2} & \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}$ 展成付氏级数。

解： $f(x)$ 为奇函数，延拓成以 2π为周期的周期函数

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}x\sin nx\mathrm{d}x+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n}(-1)^n$$

于是 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n}(-1)^n\right]\sin nx$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-(-1)^n\frac{\pi}{2}\right]\sin nx\quad,\qquad(-\pi,\pi)$$

十． 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$的收敛域，并求其和函数.

解： $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{2(n+1)}\right|=\frac{1}{2},R=2$

当$x=2$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散；当$x=-2$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n}$收敛。

固原级数的收敛域为$-2\le x<2$

当$x=0$时，$S(x)=\frac{1}{2}$；

当$x\neq 0$时，

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{x^n}{n}\\&=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_0^x x^{n-1}dx=\frac{1}{2x}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{2})^{n-1}dx\\&=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{2-x}dx=\frac{1}{x}\ln\frac{2}{2-x}\end{aligned}$$

综上：$s(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\ln\frac{2}{2-x}, & x\in[-2,0)\cup(0,2),\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$

十一． 设函数$f(x)$在$x=0$的某邻域内具有二阶连续导数，且$f(0)=0,f'(0)=0$，

证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$绝对收敛.

证明：由题设及$f(0)=0,f'(0)=0$知函数$f(x)$在$x=0$处的一阶泰勒公式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=\frac{f''(\xi)}{2!}x^2,\qquad \text{其中}\xi\text{在 0 到}x\text{之间.}$$

于是有$f(\frac{1}{n})=\frac{f''(\eta)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}$，其中$\eta$在 0 到$\frac{1}{n}$之间.

又有$f''(x)$在$x=0$的某邻域内连续，得存在常数$M>0,$使$\left|f''(\eta)\right|\le M$，

则 $\left|f(\frac{1}{n})\right|\le\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$，由级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$绝对收敛。

十二．1. 将 $f(x)=2+x+\arctan x$ 展开成关于 x 的幂级数，指出收敛区间.

解： $f'(x)=1+\dfrac{1}{1+x^2}=1+1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$

逐项积分 $f(x)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x+f(0)=2+2x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$

在端点处级数为交错级数，收敛，故收敛区间为 $x\in[-1,1]$.

2. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{1}{n}$ 的敛散性.

解： 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{1}{n}\Big/\dfrac{1}{n\sqrt{n}}=1$，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{1}{n}$ 收敛.