2016 ~2017 学年春季学期（2017.6）

高等数学 A（下）考试试题参考答案

一、填空题(本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分)，请将答案填在横线上.

1. 曲面 $x^2+y^2+z=9$ 在点 $P(1,2,4)$ 处的切平面方程为______________.（$2x+4y+z=14$）

2. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2\ \ (a>0)$，则曲线积分 $I=\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=$______________.（$2\pi ae^a$）

3. 若曲线积分 $\int_L \frac{xdx-aydy}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2<1\right\}$ 内与路径无关，则 $a=$________________.（-1）

4. 函数 $u=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿方向 $\vec{l}=(2,-2,1)$ 的方向导数为_______.（$\frac{1}{2}$）

5. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $(-\pi,\ \pi]$ 上的定义为 $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x\le 0\\ x^3, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=3\pi$ 处收敛于________________.（$\frac{\pi^3-\pi}{2}$）

二、单项选择题(本题共 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分)，请将合适选项填在括号内.

1. 对于二元函数 $z=f(x,y)$, 下列有关偏导数与全微分关系中正确的命题是【 B 】.

（A）偏导数不连续，则全微分必不存在；（B）偏导数连续，则全微分必存在；

（C）全微分存在，则偏导数必连续；（D）全微分存在，而偏导数不一定存在.

2. 已知函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点某邻域内有定义，且 $f(0,0)=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则下述四个选项中正确的是【 A 】.

（A）点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点；

（B）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点；

（C）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点；

（D）根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

3. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1-x^2}f(x,y)dy$ 等于【　C　】.

（A）$\int_{-1}^{0}dy\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$；　　（B）$\int_{-1}^{1}dy\int_{0}^{1-y^2}f(x,y)dx$；

（C）$\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)dx$；　　（D）$\int_{0}^{1}dy\int_{0}^{1}f(x,y)dx$

4. 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的模分别为 $|\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=2,$ 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\sqrt{2},$ 则 $|\vec{a}\times\vec{b}|$ 等于【　C　】.

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　（B）$2\sqrt{2}$；　（C）$4\sqrt{2}$；　（D）2.

5. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则此级数在 $x=2$ 处【 B　】.

（A）条件收敛；　（B）绝对收敛；　（C）发散；　（D）无法判断.

三、计算下列各题(本题共有 2 道小题，每小题 7 分，本题满分 14 分)

1. 设 $z=f\left(e^{x+y},\ xy\right)$，$f$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{x+y}f_1'+yf_2'$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{x+y}f_1'+e^{x+y}\left(e^{x+y}f_{11}''+xf_{12}''\right)+f_2'+y\left(e^{x+y}f_{21}''+xf_{22}''\right)$$

$$=e^{x+y}f_1'+f_2'+e^{2(x+y)}f_{11}''+(x+y)e^{x+y}f_{12}''+xyf_{22}''.$$

2. 计算 $\iint\limits_D(y^2+3x+9)dxdy,$ 其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4\right\}.$

解　$\iint\limits_D(y^2+3x+9)dxdy$

$$=\iint\limits_D y^2dxdy+\iint\limits_D 3xdxdy+\iint\limits_D 9dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy+0+9\iint\limits_D dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3d\rho+9\pi\cdot 2^2$$

$$=\pi\int_0^2\rho^3d\rho+36\pi$$

$$=40\pi$$

四、（本题满分 10 分）计算 $I=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=2x$ 上由点 $A(2,0)$ 沿逆时针方向到点 $O(0,0)$ 的半圆弧.

解　添加直线段 $\overline{OA}$，由 L 和 $\overline{OA}$ 所围的域为 D，利用格林公式计算可得：

$$I=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{L+\overline{OA}} 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y-\int_{\overline{OA}} 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D (3x^2+1-3x^2)dxdy-0=\iint_D dxdy=\frac{\pi}{2}.$$

五、（本题满分 **12** 分）计算曲面积分 $\iint_\Sigma \frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数.

解　补曲面 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\le a^2\\ z=0\end{cases}$，取下侧，$\Sigma$ 和 Σ_1 所围的立体为 Ω，

$$\iint_\Sigma \frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{a}\iint_\Sigma axdydz+(z+a)^2dxdy$$

由高斯公式可得

$$\iint_\Sigma axdydz+(z+a)^2dxdy$$

$$=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} axdydz+(z+a)^2dxdy-\iint_{\Sigma_1} axdydz+(z+a)^2dxdy$$

$$=-\iiint_\Omega(3a+2z)dxdydz-\iint_{\Sigma_1}a^2dxdy=-3a\iiint_\Omega dxdydz-2\iiint_\Omega zdxdydz+\iint_{x^2+y^2\le a^2}a^2dxdy$$

$$=-2\pi a^4-2\int_{-a}^0 zdz\iint_{D_z}dxdy+\pi a^4=-2\pi a^4-2\pi\int_{-a}^0 z(a^2-z^2)dz+\pi a^4=-\frac{1}{2}\pi a^4$$

所以

$$\iint_\Sigma \frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{a}(-\frac{1}{2}\pi a^4)=-\frac{1}{2}\pi a^3.$$

六、（本题满分 12 分）抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.

解　设椭圆上任意一点的坐标为 (x,y,z), 则该点到原点的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 因为该点在抛物面和平面上，所以 (x,y,z) 要同时满足 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=1$. 作拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(z-x^2-y^2)+\lambda_2(x+y+z-1),$$

令 $\begin{cases} L_x=2x-2\lambda_1 x+\lambda_2=0 \\ L_y=2y-2\lambda_1 y+\lambda_2=0 \\ L_z=2z+\lambda_1+\lambda_2=0 \\ z=x^2+y^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, \\ z=2-\sqrt{3}. \end{cases}$　$\begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, \\ y=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, \\ z=2+\sqrt{3}. \end{cases}$

它们是可能的两个极值点，由题意可知这种距离的最大值和最小值一定存在，所以距离的最大值和最小值可在这两点处取得. 比较 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在这两点的值，可得椭圆上的点到原点的距离的最大值为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$，最小值为 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

七、（本题满分 **10** 分）已知点 $M(-1,0,4)$, 直线 $L:\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+2y+2z+4=0 \end{cases}$, 平面 $\Pi: 3x-4y+z-10=0$, 求过点 M 且与直线 L 垂直，又与平面 Π 平行的直线方程.

解　由题意可得直线 L 的方向向量为

$$\vec{\tau}=(1,2,-1)\times(1,2,2)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=(6,-3,0),$$

平面 Π 的法向量为 $\vec{n}=(3,-4,1)$,

所求直线的方向向量为

$$\vec{s}=\vec{\tau}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}=(-3,-6,-15),$$

又直线 L 过点 $M(-1,0,4)$, 故所求直线方程为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{5}.$$

八、 **计算下列各题**（本题共有 **2** 道小题，每小题 **6** 分，满分 **12** 分）

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{x^{2n+2}}{x^{2n}}\cdot\frac{2^n}{n}\right) = \frac{x^2}{2}.$

则当 $\frac{x^2}{2}<1$, 即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时，幂级数收敛，故收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，原级数均为 $\sum_{n=1}^{\infty}n$，发散，所以收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

令 $s(x)$ 为其和函数，则

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=\frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}=\frac{x}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)'=\frac{x}{2}\left(\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}\right)'=\frac{2x^2}{(2-x^2)^2},\quad x\in(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}).$$

2. 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上证明等式 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}$ 成立，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

证明 令 $f(x)=x^2$，$x\in[-\pi,\pi]$，将其延拓成以 2π 为周期的函数 $F(x)$. 则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x^2d\sin nx=\frac{2}{n\pi}\left(\left[x^2\sin nx\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2x\sin nxdx\right)$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}xd\cos nx=\frac{4}{n^2\pi}\left(\left[x\cos nx\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)$$

$$=\frac{4}{n^2}\cos n\pi=(-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nxdx=0.$$

因而有 $f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n4}{n^2}\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi].$

即等式 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}$ 成立.

上式中令 $x=0$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$