高等数学 A（上）（2017.01）

一、填空题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分），请将答案填在横线上 .

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$________________.

2. 设函数 $f(x)=e^{2x}+5$，则函数 $f(x)$ 的微分 $dy=$____________________.

3. 函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内 $f'(x)>0$ 是函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加的______________条件.

4. 不定积分 $\int \sin x\, e^{\cos x}dx=$ ________________________.

5. 广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{xdx}{(1+x^2)^2}=$__________________________.

二、单项选择题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分），请将答案填在括号内.

1. 当 $x\to 0$ 时，变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是（　　）.

(A) 无穷小　　　　(B) 有界但不是无穷小量

(C) 无穷大　　　　(D) 无界但不是无穷大

2. 若在 (a,b) 内函数 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x)>0$，二阶导数 $f''(x)<0$，则函数 $f(x)$ 在此区间内(　　).

(A) 单调减少，曲线是凹的　　　　(B) 单调减少，曲线是凸的

(C) 单调增加，曲线是凹的　　　　(D) 单调增加，曲线是凸的

3. 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，则必有（　　）.

(A) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是偶函数

(B) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是奇函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是周期函数

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是单调函数

4. 设 $f(x)$ 是 $[-1\,,\,1]$ 上连续的偶函数，则 $\int_{-\pi}^{\pi}[1+xf(\sin x)]dx=($　　　$)$.

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　　　　(B) π　　　　(C) 2π　　　　(D) 0

5. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(x)\le g(x)$，则对任意 $C\in(0,1)$ 有 (　　　).

(A) $\int_{\frac{1}{2}}^{C} f(t)dt \ge \int_{\frac{1}{2}}^{C} g(t)dt$　　　　(B) $\int_{\frac{1}{2}}^{C} f(t)dt \le \int_{\frac{1}{2}}^{C} g(t)dt$

(C) $\int_{C}^{1} f(t)dt \ge \int_{C}^{1} g(t)dt$　　　　(D) $\int_{C}^{1} f(t)dt \le \int_{C}^{1} g(t)dt$

三、求解下列各题（本题共有 3 道小题，每小题 6 分，满分 18 分）.

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (1-e^t)dt}{x\sin x}$

2. 设 $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=-4\sin t \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

3. 求微分方程 $y''-4y'+4y=0$ 的通解.

四、（本题满分 10 分））求 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

五、（本题满分 10 分）已知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3 f'(x)dx$.

六、（本题满分 10 分）设连续函数 $y=f(x)$ 满足方程 $f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2$，求 $f(x)$.

七、（本题满分 12 分）求由 $y=x^2-2x$，$x=3$ 与 x 轴在 $0\le x\le 3$ 所围成的平面图形的面积，并求该图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

八、　（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，且 $|f'(x)|\le M$，$f(a)=0$，求证 $\int_a^b f(x)dx\le\dfrac{M}{2}(b-a)^2$.