第六章定积分应用练习题解答（15 分钟）

1．求曲线 $y=x^2-2x$ **与** $y=0, x=1, x=3$ **所围成的平面图形的面积** S **，并求该图形绕** y **轴旋转一周所得旋转体的体积．（2011 秋）**

解： $S_1=\int_1^2(0-x^2+2x)dx=\int_1^2(2x-x^2)dx=\frac{2}{3}$.　　$S_2=\int_2^3(x^2-2x)dx=\frac{4}{3}$.

所以 $S=S_1+S_2=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$.

平面图形 S_1 **绕** y **轴旋转一周所得的体积为：**

$$V_1=\pi\int_{-1}^0(1+\sqrt{1+y})^2dy-\pi=\frac{11}{6}\pi.$$

平面图形 S_2 **绕** y **轴旋转一周所得的体积为：**

$$V_2=\pi\cdot 3^2\cdot 3-\pi\int_0^3(1+\sqrt{1+y})^2dy=\frac{43}{6}\pi.$$

旋转体的体积为 $V=V_1+V_2=\frac{11}{6}\pi+\frac{43}{6}\pi=9\pi$.

或 $V_1=\left|2\pi\int_1^2 xf(x)dx\right|=\left|2\pi\int_1^2 x(x^2-2x)dx\right|=\frac{11}{6}\pi$.

$$V_2=2\pi\int_2^3 xf(x)dx=2\pi\int_2^3 x(x^2-2x)dx=\frac{43}{6}\pi.$$

旋转体的体积为 $V=V_1+V_2=\frac{11}{6}\pi+\frac{43}{6}\pi=9\pi$

2.　设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ **通过点** $(0,0)$ **，且当** $x\in[0,1]$ **时，** $y\geq 0$ **.试确定** a**、**b**、**c **的值，使得抛物线** $y=ax^2+bx+c$ **与直线** $x=1, y=0$ **所围图形的面积为** $\frac{4}{9}$ **,且使该图形绕** x **轴旋转而成的旋转体的体积最小．（2009 秋）**

解　因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点 $(0,0)$，所以 $c=0$，

从而 $y=ax^2+bx$，抛物线与直线 $x=1, y=0$ 所围图形的面积为

$$S=\int_0^1 (ax^2+bx)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$$

令 $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{4}{9}$，得 $b=\frac{8-6a}{9}$.

该图形绕轴 x 旋转而成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^1 (ax^2+bx)^2 dx=\pi(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{3}+\frac{ab}{2})$$

$$=\pi\left[\frac{a^2}{5}+\frac{1}{3}\left(\frac{8-6a}{9}\right)^2+\frac{a}{2}\left(\frac{8-6a}{9}\right)\right]$$

$$\frac{dV}{da}=\pi\left[\frac{2a}{5}-4\left(\frac{8-6a}{81}\right)+\frac{1}{9}\left(4-6a\right)\right]$$

令 $\frac{dV}{da}=0$，得 $a=-\frac{5}{3}$，于是 $b=2$.