20167~2018 学年春季学期（2018.7）

高等数学 A（下）考试试题参考答案

一、1. $x+y+z=2$.　**2.** $\frac{x-a}{0}=\frac{y}{a}=\frac{z}{b}$.　**3.** $\mathrm{d}z=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$.　**4.** $\frac{2}{15}$.　**5.** 0 .

二、1. B.　**2.** C.　**3.** D.　**4.** C.　**5.** D.

三、计算下列各题（本题共有 **2** 道小题，每小题 **8** 分，满分 **16** 分）

1. 设 $z=\ln\frac{1}{r}$， $r=\sqrt{x^2+y^2}$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{x^2+y^2}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，

因此　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$。

2. 计算 $\iint\limits_D \frac{x}{(1+x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1\right\}$， $a>0$.

解 $\frac{x}{(1+x^2+y^2)^2}$ 是 x 的奇函数， 区域 D 关于 y 轴对称，

因此　$\iint\limits_D \frac{x}{(1+x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。

四、（本题满分 10 分）设平面闭区域 D 是半平面 $y\le x$ 和圆 $x^2+(y-a)^2\le a^2$ 的公共部分，求 D 的面积，其中 $a>0$.

解 设区域 D 的积为 A， D 可用极坐标表示为

$$0\le\rho\le 2a\sin\theta，\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}。$$

因此

$$A=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\sin\theta}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2a^2\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi-2}{4}a^2。$$

五、（本题满分 10 分）设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$，取外侧，其中$R>0$．计算第二类曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$．

解 $I=\frac{1}{R^3}\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{R^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ （Gauss）

$=\frac{3}{R^3}V=\frac{3}{R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=4\pi$。

六、（本题满分 12 **分）**设$p>0,a>0,b>0,c>0$，且$a+b+c=1$，则函数$f(x,y,z)=x^ay^bz^c$在约束条件$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{p}$，$x>0,y>0,z>0$下达到最小值，试求出这个最小值，并由此证明：当$x,y,z>0$时，成立不等式$\sqrt[3]{xyz}\ge\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$．

解 1）记 $L(x,y,z)=a\ln x+b\ln y+c\ln z+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{p}\right)$，

由$L_x=L_y=L_z=L_\lambda=0$得 $\begin{cases}\frac{a}{x}-\frac{\lambda}{x^2}=0,\\ \frac{b}{y}-\frac{\lambda}{y^2}=0,\\ \frac{c}{z}-\frac{\lambda}{z^2}=0,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{p}=0,\end{cases}$

解之得 $x=\frac{p}{a},y=\frac{p}{b},z=\frac{p}{c},\lambda=p$.

驻点唯一，因此

$$f_{\min}=f(\frac{p}{a},\frac{p}{b},\frac{p}{c})=\frac{p}{a^ab^bc^c}。$$

2）在 1）中取$a=b=c=\frac{1}{3}$，则有

$$f(x,y,z)=\sqrt[3]{xyz}\ge f_{\min}=3p=\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}.$$

七、（本题满分 10 分）设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是球面 $S:x^2+y^2+z^2=1$ 上的点，球面 S 在点 P_0 的切平面经过点 $(0,0,2)$，证明：满足上述条件的 P_0 的点全体是球面 S 上的一个圆.

证 球面 $S:x^2+y^2+z^2=1$ 上的点 P_0 处的法向量为 $\mathbf{n}=(x_0,y_0,z_0)$

因此球面在 P_0 的切平面方程为 $x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$，即

$$x_0x+y_0y+z_0z=1。$$

该切平面过点 $(0,0,2)$，因此 $\quad 2z_0=1.$

满足上述条件的 P_0 的点全体是球面 S 与平面 $z=1/2$ 的交线，它是一个圆。

八、计算下列各题(本题共有 2 道小题，每小题 6 分，满分 12 分).

(1) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right)$ 的敛散性，又已知 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(1+n)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(2)求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

解 (1) 应用 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林级数，有

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\quad (x\to 0)$$

所以当 n 充分大时，有 $\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$

$$\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{2n^2}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right)$ 收敛。

该级数的部分和为 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln(1+\frac{1}{k})\right)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(1+n)=x_n$

所以数列 $\{x_n\}$ 收敛。

（2）由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$，设 $x_n\to A(n\to\infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}-\frac{\ln(1+n)}{\ln n}\right)=0$$

应用洛必达法则，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{\ln n}=1$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{\ln n}=1$.