

中国农业大学

2015 ~2016 学年春季学期 (2016. 6)

高等数学 A (下) 课程考试试题

(注意: 本试卷共有八道大题, 满分 100 分, 考试时间 100 分钟)

一、填空题(共 5 道小题, 每小题 3 分, 满分 15 分), 请将答案填在横线上.

1. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\sin x + 2y - z = e^z$ 所确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.
2. 旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在点 $(2, 1, 4)$ 处的切平面方程是 _____.
3. 设 L 为圆 $x^2 + y^2 = 1$, 取逆时针方向, 则 $\oint_L -ydx + xdy =$ _____.
4. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x)dx$, 则 $F'(2) =$ _____.
5. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数, 满足狄利克雷 (Dichilet) 充分条件, 且 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = C$, 则 $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx =$ _____.

二、单项选择题(共 5 道小题, 每小题 3 分, 满分 15 分), 请将合适选项填在括号内.

1. 函数 $z = 2x^3 + y^2$ 在点 $(1, 2)$ 的梯度为 ()
(A) $6i + 2j$. (B) $4i + 6j$. (C) $6i + 4j$. (D) 10 .
2. 二次积分 $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy$ 在极坐标系下先对 r 积分的二次积分为 ()
(A) $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$. (B) $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$.
(C) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$. (D) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$.

3. 二元函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微的一个充分条件是 ()

(A) $\lim_{(x, y) \rightarrow 0} f(x, y) - f(0, 0) = 0$.

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$.

(C) $\lim_{(x, y) \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0, \lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(0, y) - f'_y(0, 0)] = 0$.

4. 下列级数中, 条件收敛的是 ()

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{\sqrt{2n^3 + 4}}$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n2^n}$.

5. 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, c_1, c_2 是任意常数, 则该非齐次线性方程的通解是 ()

(A) $c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_3$.

(B) $c_1 y_1 + c_2 y_2 - (c_1 + c_2) y_3$.

(C) $c_1 y_1 + c_2 y_2 - (1 - c_1 - c_2) y_3$.

(D) $c_1 y_1 + c_2 y_2 + (1 - c_1 - c_2) y_3$.

三、(本题满分 10 分) 设函数 $z = xy + f(xy, \frac{x}{y})$, 函数 f 具有二阶连续的偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

四、(本题满分 12 分) 求常数 a , 使 $\frac{(ax + y)dx - (x + y)dy}{x^2 + y^2}$ 是右半平面 $(x > 0)$ 内某个函数 $u(x, y)$ 的全微分, 并求 $u(x, y)$.

五、(本题满分 12 分) 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (8y + 1)xdydz + 2(1 - y^2)dzdx - 4yzdxdy$

其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{y-1} \\ x = 0 \end{cases} (1 \leq y \leq 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面, 它的法向量与 y

轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.

六、(本题满分 12 分)

(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的和函数; (2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$ 的和.

七、(本题满分 12 分) 将给定的正数 m 分成三个非负数 x, y, z 之和, 使 $x^a y^b z^c$ 最大, 其中 a, b, c 为给定的正数, 并证明 $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3}(x + y + z)$.

八、(本题满分 12 分) 设 $f(0)=0, f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)dt$, 其中 f 为连续函数, 求 $f(x)$.