高等数学 A（下）试题（2015.6）

一、填空题(本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分)，请将答案填在横线上.

1. 函数 $z=e^{-x}\sin\left(x+2y\right)$ 在点 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 处的全微分为______________.

2. 设 y_1,y_2,y_3 为 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解，且 $y_1+y_2=2x^2e^{-x^2}$，$y_3=x^2e^{-x^2}+\dfrac{1}{2}e^{-x^2}$，则它的通解为______________.

3. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在区间 $(-1,\ 1]$ 上的定义为 $f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 1\end{cases}$，

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于______________.

4. 函数 $z=2x^2+y^2$ 在点 $P(1,1)$ 处的最大方向导数等于______________.

5. 设区域 $D=\left\{(x,\ y)\middle|x^2+y^2\le R^2\right\}$，则二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=$________.

二、单项选择题(本题共有 **5** 道小题，每小题 **3** 分，满分 **15** 分)，请将合适选项填在括号内.

1. 已知函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点某邻域内有定义，且 $f(0,0)=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，则 $f(x,y)$

在 $(0,0)$ 点处【　　　】.

（A）极限存在但不连续；　　（B）连续但偏导数不存在；

（C）偏导数存在但不可微；　　（D）可微.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 等于【　　　】.

（A）$\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$；　　（B）$\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$；

（C）$\int_0^1dx\int_0^1f(x,y)dy$；　　（D）$\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$.

3. 设 D 是 xoy 平面上以 $(1,1)$、$(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象

限的部分，则 $\iint\limits_{D}(xy+\cos x\sin y)dxdy$ 等于【　　　】.

（A） $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$；　　（B） $2\iint\limits_{D_1}xydxdy$；

（C） $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$；　　（D） 0.

4. 已知 $\sin^2 x,\cos^2 x$ 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解，C_1,C_2 为任意常数，则不能构成该方程通解的是【　　】.

（A） $C_1\sin^2 x+C_2\cos^2 x$；　　（B） $C_1+C_2\cos 2x$；

（C） $C_1\sin^2 2x+C_2\tan^2 x$；　　（D） $C_1+C_2\cos^2 x$.

5. 设 $u_n=(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$，则级数【　　】.

（A） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛；　　（B） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散；

（C） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散；　　（D） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

三、(本题满分 10 分) 设 $z=x^3 f(xy,\frac{x}{y})$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、（本题满分 12 分）计算 $I=\oint_L e^y\mathrm{d}x+(x+xe^y-2y)\mathrm{d}y$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=2x$ 的正向.

五、（本题满分 **12** 分）计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=h(h>0)$ 之间部分的下侧. $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 Σ 在 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

六、（本题满分 12 分）求函数 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$, x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值和最小值.

七、（本题满分 **12** 分）求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)2^n}$ 的和.

八、（本题满分 **12** 分）设函数 $f(x)$ 二阶可导，且满足 $f(x)=e^x+\int_0^x tf(t)dt-x\int_0^x f(t)dt$，求 $f(x)$.