第九章课外练习题

多元微分五大概念

（一）填空题

1. 函数 $z=\arcsin\dfrac{1}{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域为

2. 设函数 $z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，又 $\begin{cases}x=t\\ y=t\end{cases}$，则 $d\,z\big|_{t=0}=($

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{xy}, & xy\neq0,\\ x\quad, & xy=0,\end{cases}$ 则 $f_x(0,1)=$

4. 设 $F(x,y,z)=0$ 满足隐函数定理的条件，则 $\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=$

（二）解答题

1. 求下列偏导数:

(1) $f(x,y)=3x^2y+5x\sin y+6y$,求 $f_x(0,\frac{1}{2}),f_y(0,\frac{1}{2})$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}0, xy=0\\ 1, xy\neq0\end{cases}$,求 $f_x(0,0),f_y(0,0)$

2. 设函数 $z=f(x,y)$ 是由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定的,在点 $(1,0,-1)$ 求 dz.

3. 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，有函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定：

$e^{xy}-xy=2$ 和 $e^x=\int_0^z\dfrac{\sin t}{t}dt$，求 $\dfrac{du}{dx}$.

4. 设 $z=z(x,y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\sin y+\dfrac{1}{1-xy}$, $z(1,y)=\sin y$, 求 $z(x,y)$.

5. 已知 $\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某个二元函数的全微分,求 a 的值.

6. 试研究函数(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 和

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

在 $(0,0)$ 点的连续性，可导性(偏导数存在性)，和可微性。

补充: 求下列偏导数

（1）设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，且函数 f 的一阶偏导数连续，利用一阶全微分的形式不变性求 $dz,\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

（2）设 $z=f(x,\varphi(x^2,y^2))$,且 f 与 φ 的二阶偏导数连续，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

（3） $w=f(x,u,v), u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$ ，求 $\dfrac{\partial w}{\partial u},\dfrac{\partial w}{\partial v}$,其中 f 可微, φ,ψ 可微且 $\varphi'_x\psi'_y\neq\varphi'_y\psi'_x$.（提示：$u,v$ 看成自变量，x,y 看成中间变量）

（4）设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $F(cx-az,cy-bz)=0$ 确定,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

其中 F 的二阶偏导数连续, $aF_1'+bF_2'\neq 0, F_i'(i=1,2)$ 表示 F 对第 i 个变量的偏导数.

（5）设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$ 所确定的二元函数，求 dz.

（6）设 $x^2+z^2=y\varphi(\dfrac{z}{y})$,其中 φ 可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

多元微分的应用

1. 过曲面 $S: F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2=6$ 上点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量为 $\vec{n}$，求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数。

2. 设 $f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 可微，$\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}$. $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{u}}=-2, \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{v}}=1$，求 $f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 的微分。

3. 设变换 $\begin{cases} u=x-2y \\ v=x+ay \end{cases}$ 可把方程

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}=0$，求常数 a 的值。

4. 设函数 $u(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 以及以下条件：$u(x,2x)=x, u_x(x,2x)=x^2$，求 $u_{xx}(x,2x), u_{xy}(x,2x), u_{yy}(x,,2x)$。

5. 求曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{2}=1 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ 在 $M(1,1,1)$ 处的切线方程和法平面方程。

根据方程

$$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$$

6. 确定函数 $z=z(x,y)$，求其极值。

7. 用极值方法证明不等式 $(e^x+e^y)/2 \ge e^{\frac{x+y}{2}}$。

8.

求二元函数$z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$在由直线$x=y=6$、x轴和y轴所围成的闭区域D上的极值、最大值和最小值。

9.

在椭圆$x^2+4y^2=4$上求点，使其到直线$2x+3y-6=0$的距离最短。