第五章课外练习题

定积分（概念、性质、运算）习题

1．计算下列定积分

（1）$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}dx$

（2）$\int_0^{k\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}dx$

（3）$\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx$

（4）$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$

（5）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$

（6）$\int_0^1 x|x-\alpha|dx$

（7）$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}dx$

（8）$\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$

2．设 $f(x)=\begin{cases}2x+\frac{3}{2}x^2, & -1\le x<0\\ \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}, & 0\le x\le 1\end{cases}$，求函数 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$ 的表达式.

3．求函数 $F(x)=\int_0^x f(xt)dt$ 的导数，其中 f 连续.

4．已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$ 在 $(0,0)$ 处的切线相同，写出此切线方程，并求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(\frac{2}{x})$.

5．求极限（1[*]）$\lim\limits_{h\to0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx$，其中 $f(x)\in C[-1,1]$；（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}$.

6．已知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sin x-ax}\int_b^x\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt=-2$，求 a,b 的值.

7．已知 $A=\int_0^1\frac{e^t}{1+t}dt$，求 $\int_0^1\frac{e^t}{(1+t)^2}dt$.

8．已知 $f(x)+\sin^4 x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(2x)dx$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

9．设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续可导、单增，$f(0)=0$，证明

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^{f(a)}f^{-1}(y)dy=af(a).$$

10．设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导，且满足 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot f(x)\,dx=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(\xi)=2f(\xi)\tan\xi$.

11．若 $f(x)\in C^2[a,b]$，$f(\frac{a+b}{2})=0$，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f''(\xi)=\frac{24}{(b-a)^3}\int_a^b f(x)dx$.

12． 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0$，试证：$\int_a^b f(x)dx\le(b-a)f(\frac{a+b}{2})$.

13. 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(x)>0$，又 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{1}{f(t)}dt$，则 $F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上有惟一实根.