# 第三章课外练习题

导数应用习题题目

1．设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x|<1 \\ ax^4-bx^2+c, & |x|\ge 1 \end{cases}$，试讨论 $a,b,c$ 满足什么条件时，函数 $f(x)$ 可导.

2．求极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x-\frac{1}{2}x\sin 2x}{x^2(e^{x^2}-1)}$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；　（4）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$.

3．证明方程 $2^x+2x^2+x-1=0$ 至多有两个不同实根.

4．已知 $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$，证明 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 至少有一个实根.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶可导，在 $(a,b)$ 内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$，证明：

（1）存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$；

（2）存在 $\eta\in(a,b)$，使 $f''(\eta)=f'(\eta)$；

（3）存在 $\zeta\in(a,b)$，使得 $f''(\zeta)=f(\zeta)$.

6．设函数 $f(x),g(x),h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，试证存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix}=0.$$

7．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内二阶可导，且 $f(a)=f(b), f'_+(a)>0$，求证存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.（试用几种不同的方法进行证明）

8．已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$．证明：

(I) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(II) 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

9．设函数 $f(x)$ 二阶可导，若 $f''(\xi)>0$，试证存在 $a,b$ 满足 $a<\xi<b$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$.

10．若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取到最大值，$f(x)\in D^2[0,1]$，且 $|f''(x)|\le 1, \forall x\in[0,1]$，证明 $|f'(0)|+|f'(1)|\le 1$.

11．若 $f(x)\in D^2(-\infty,+\infty)$, 证明对任意的 $a<c<b$,都存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

12．若 $b>a>e$，证明 $a^b>b^a$.

13．已知函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{(1+x)^2}+3$，求：

（1）函数的增减区间及极值；
（2）函数的凹凸区间及拐点；
（3）函数图形的渐近线.

14．求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的点 $P$，使得过此点引切线与坐标轴构成的三角形的面积最小.

15．在半径为 $R$ 的球内作内接正圆锥，试求其最大体积.

16．若 $f(x)=2nx(1-x)^n$，求：（1）$M_n=\max\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}$；（2*）$\lim\limits_{n\to\infty}M_n$.

17．求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)}{\sin^4 3x}$.

18．若 $f(x)\in C^2(a,b), x_0\in(a,b), f''(x_0)\ne 0$，$\theta\in(0,1)$ 满足

$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\theta h)h$，　证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

19*．若函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内具有 $n+1$ 阶导数，$x_0\in(a,b), f^{(n+1)}(x_0)\ne 0$，$\theta\in(0,1)$ 满足 $f(x_0+h)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)h^k+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h)h^n$，　证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

20. 若 $f(x)\in D(-1,1)$, 且 $f'(0)=0$, $f''(0)$ 存在，证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\dfrac{1}{2}f''(0)$.

21．若 $f(x)\in D^3[0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'''(x)=0$，证明

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0,\ \lim_{x\to+\infty} f''(x)=0\ .$$

**22.设函数 $f(x)$在闭区间[ 0，1] 上可微，对于[ 0，1] 上的每一个 $x$，函数 $f(x)$的值都在开区间（0，1）内，且 $f'(x)\neq 1$，证明在（0，1）区间内有且仅有一个 $x$ 使 得 $f(x)=x$ 成立.**

23．讨论当 $x\to 0$ 时， $y=\ln(1+\sin^2 x)+\alpha(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)$ 是几阶无穷小量.

24．若极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{200}}{x^{\alpha}-x^{\alpha}(1-\frac{1}{x})^{\alpha}}$ 存在，求 $\alpha$ 的取值范围与此极限的值.

25．求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的100阶导数 $f^{(100)}(0)$ .

26*．设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数， $f(\xi)=0, f'(\xi)\neq 0$，若 $\{x_n\}$ 以 $\xi$ 为极限且满足

$$\begin{cases} x_0 \\ x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, n=1,2,3,\cdots, \end{cases}$$ 求证 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{(x_{n-1}-x_{n-2})^2}=-\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}.$$