

第十章自测题

一、 填空题

1. 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$, 则二重积分 $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy =$ _____.

2. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则二次积分 $\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy$ 交换积分次序后为 _____.

3. 设 $f(x, y)$ 为二元连续函数, 交换积分次序 $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx =$ _____.

4. 交换二次积分的积分次序 $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx =$ _____.

5. 交换积分次序 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx =$ _____.

6. 设区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$, 则二重积分 $\iint_D x^2 e^{y^2} dx dy =$ _____.

7. 积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$ 的值等于 _____.

8. $I = \int_1^5 dy \int_y^5 \frac{1}{y \ln x} dx =$ _____.

9. 设 $a > 0$, $f(x) = g(x) = \begin{cases} a, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 而 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 16\}$, 则

$I = \iint_D f(x)g(y-x) dx dy =$ _____.

二、计算二重积分 $\iint_D (y^2 + 3x + 9) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

三、计算积分: $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy$.

四、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有连续导数, 且满足

$$f(t) = 2 \iint_{x^2 + y^2 \leq t^2} (x^2 + y^2) f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy + t^4, \quad \text{求 } f(x).$$

五、 Ω 是由 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$; $z \geq 0$ 所确定的上半球体, 试将 $\iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dv$ 分别化成直角坐标, 柱面坐标及球面坐标下的三次积分式.

六、证明 $\iiint_{\Omega} f(z) dx dy dz = \pi \int_{-1}^1 f(u)(1-u^2) du$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, Ω 为

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$