2017~2018 学年《高等数学 A》(上)试题解析

一、填空题（本题共有 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分），请将答案填在横线上．

1. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x}\right)^{x}=e^{2}$, 则 $a=$______________.

【答案】 2

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}\cdot a}=e^{a}$，推出 $a=2$.

2. 设 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=6$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0-\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=$______________.

【答案】 - 6

【解析】$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0-\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0-\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{-\Delta x}=-6$.

3. 设 $x+y=e^{x-y}$，则 $dy=$______________.

【答案】 $\dfrac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}dx$

【解析】$dy=f'(x)dx$，对 $x+y=e^{x-y}$ 两边对 x 求导得，$y'=\dfrac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}$，

所以 $dy=\dfrac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}dx$.

4. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)dt$，则当 $n\geq 2$ 时，

$f^{(n)}(0)=$______________.

【答案】 $5\times 2^{n-1}$

【解析】对 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)dt$ 两边对 x 求导，$f'(x)=2(x+1)+2f(x)$，

$f'(0)=2+2f(0)=4$

两边再对 x 求导，$f''(x)=2+2f'(x)$，则 $f''(0)=2[1+f'(0)]=2\times 5$，

同理，当 $n\geq 3$ 时，$f^{(n)}(x)=2f^{(n-1)}(x)=2^{n-2}f''(x)$，即可得，$f^{(n)}(0)=5\times 2^{n-1}$.

5. 曲线 $\rho=1+\cos\theta\ (0\leq\theta\leq 2\pi)$ 所围成的平面图形的面积为______________.

【答案】 $\dfrac{3\pi}{2}$

【解析】$S=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta=\dfrac{3\pi}{2}$

二、单项选择题（本题共 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分），请将答案填在括号内.

1. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$, 下列结论中，正确的是（　　）.

(A) $f(x)$没有间断点　　(B) $x=-1$为$f(x)$的间断点

(C) $x=1$为$f(x)$的间断点　　(D) $x=\pm1$都是$f(x)$的间断点

【答案】(C)

【解析】$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}1+x, & |x|<1\\ 0, & x=-1\\ 1, & x=1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)=0$，

但$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0\neq f(1)$，故选(C).

2. 设 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微，$\Delta x=x-x_0$，则当$\Delta x\to0$时，$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\Delta x$ 是 Δx 的（　　）.

(A) 高阶无穷小　　(B)同阶无穷小　　(C)等价无穷小　　(D) 低阶无穷小

【答案】(A)

【解析】$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)=0$，

故选(A).

3. 设 $f(0)=0$，$f'(x)=sec^2x$，则 $f(x)$ 的原函数为（　　）.

(A) $\ln|\sin x|+C$　　(B) $-\ln|\sin x|+C$

(C) $\ln|\cos x|+C$　　(D) $-\ln|\cos x|+C$

【答案】(D)

【解析】由 $f'(x)=sec^2x$，有 $f(x)=\tan x$，所以

$F(x)=\int\tan xdx=-\int\dfrac{1}{\cos x}d\cos x=-\ln|\cos x|+C$，故选(D).

4. 定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x\cos^4 x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x=(\qquad)$.

(A) π^2+1　　(B) $\dfrac{\pi^3}{2}$　　(C) $\dfrac{\pi^2}{2}$　　(D) 0

【答案】(B)

【解析】$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x\cos^4 x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3 x\cos^4 x\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\ \mathrm{d}x$

$$=0+\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi R^2\Big|_{R=\pi^2}=\frac{1}{2}\pi^3$$，故选(B).

5. 设 $f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^3}dt$，则 $(f^{-1})'(0)=(\qquad)$.

(A) 0　　(B) 1　　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) $\sqrt{2}$

【答案】(C)

【解析】因为 $f(1)=0$，所以 $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{dy/dx\big|_{x=1}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}\big|_{x=1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，故选(C).

三、求解下列各题（本题共有 3 道小题，每小题 5 分，满分 15 分）.

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}-e}{\ln\cos x}$

【详解】 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}-e}{\ln\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{\cos x}\sin x\cos x}{-\sin x}=e$$

或 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}-e}{\ln\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e(e^{\cos x-1}-1)}{\ln(1+\cos x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e(\cos x-1)}{(\cos x-1)}=e$$

2. 求 $y=x^x+3$ 的导数.

【详解】 $y'=(x^x)'$，

设 $y_1=x^x$，两边取对数：$\ln y_1=x\ln x$，

两边对 x 求导，得 $\dfrac{y_1'}{y_1}=\ln x+1$， $y_1'=x^x(\ln x+1)$，

所以，$y'=y_1'=x^x(\ln x+1)$.

3．求$\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3+3t, \end{cases}$的拐点.

【详解】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t^2+3}{2t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{3t^2+3}{2t}\right)}{2t}=\frac{3}{4}\frac{t^2-1}{t^3}$$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4}\dfrac{t^2-1}{t^3}=0\Rightarrow t=\pm1$，且$\dfrac{d^2y}{dx^2}$在$t=\pm1$的邻域内变号，

所以$(1,4)$、$(1,-4)$为拐点.

四、（本题满分 10 分）已知函数$y(x)$由方程$x^3+y^3-3x+3y-2=0$确定，求$y(x)$的极值.

【详解】 对$x^3+y^3-3x+3y-2=0$关于x求导得：$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0\cdots\cdots(1)$

令$y'=0$得$3x^2=3$，因此$x=\pm1$，当$x=1$时，$y=1$，当$x=-1$时，$y=0$.

(1)式两端对x求导得：$6x+6y(y')^2+3y^2y''+3y''=0$，

将$y'=0$代入可得$6x+(3y^2+3)y''=0$,

当$x=1$时，$y=1$时，代入可得$y''=-1$，

当$x=-1$时，$y=0$时，代入可得$y''=2$，

因此函数的极大值为$y(1)=1$，极小值为$y(-1)=0$.

五、（本题满分 10 分）设函数$f(x)$可导，$f(0)=0$，且有$F(x)=x\int_1^2 f(tx)\,dt$，求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^2}$.

【详解】 作变量替换：$u=tx$，则

$$F(x)=x\int_1^2 f(tx)\,dt=\int_x^{2x} f(u)\,du,$$

由洛必达法则，有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2f(2x)-f(x)}{2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2[f(2x)-f(0)]-[f(x)-f(0)]}{2x}=\frac{3}{2}f'(0)$$

六、（本题满分 10 分）设$e<a<b<e^2$,证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

【证明】 设$f(x)=\ln^2 x$，

应用 Lagrange 中值定理有： $\ln^2 b-\ln^2 a=\dfrac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),\quad a<\xi<b.$

又设$\phi(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，则$\phi'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$，当$t>e$时，$\phi'(t)<0$ ，此时 $\varphi(t)$ 单减，从而

$\phi(\xi)>\phi(e^2)$，即 $\dfrac{\ln\xi}{\xi}>\dfrac{\ln e^2}{e^2}=\dfrac{2}{e^2}$ ，

所以 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a).$

七、（本题满分 12 分）设曲线L的方程为$y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},\quad 0\le x\le 1.$

（1）求L上从点$(0,0)$到点$(1,\dfrac{2}{3})$的弧长l；

（2）求L与直线$y=\dfrac{2}{3}$及y轴围成的平面图形绕直线$y=\dfrac{2}{3}$旋转所形成的旋转体的体积V.

【详解】 （1）$l=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+x}dx=\dfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

（2）$V=\pi\int_0^1[\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]^2dx=\dfrac{4\pi}{9}\int_0^1(1-2x^{\frac{3}{2}}+x^3)dx=\dfrac{4\pi}{9}(x-\dfrac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\dfrac{1}{4}x^4)\Big|_0^1$

$=\dfrac{4\pi}{9}(1-\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{4})=\dfrac{\pi}{5}.$

八、（本题满分 13 分）设函数$y(x)$满足微分方程$y''+3y'+2y=0$，

（1）求$y''+3y'+2y=0$的通解；

（2）若（1）中的解$y(x)$满足$y(0)=1$， $y'(0)=1$，求$\int_0^{+\infty}y(x)dx$的值.

【详解】（1）特征方程为$r^2+3r+2=0$，

特征方程有两个不同的实根，即$r_1=-1,\ r_2=-2$，

因此二阶常系数齐次线性微分方程的解为： $y(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$；

（2）$\int_0^{+\infty}y(x)dx=\int_0^{+\infty}(C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x})dx=\dfrac{C_1}{r_1}e^{r_1x}\Big|_0^{+\infty}+\dfrac{C_2}{r_2}e^{r_2x}\Big|_0^{+\infty}=C_1+\dfrac{C_2}{2}.$

又 $y(0)=0,y'(0)=1$，可得：$\begin{cases}C_1+C_2=1\\-C_1-2C_2=1\end{cases}$，解得$C_1=3,C_2=-2$，

代入可得 $\int_0^{+\infty}y(x)dx=2$.