有心力

September 16, 2015

Contents

1 有心力简介 **1**

2 有心力的特点 **1**

2.1 有心力作用下质点的角动量守恒 $\dot{\vec{J}} = 0$ . . . 1
2.2 有心力作用下质点在一个平面内运动 . . . 2
2.3 有心力是保守力 . . . 2
2.4 有心力作用下矢径 r 随时间的变化等价于质点在有效势场中的一维运动 . . . 3
2.5 有心力场中质点运动方程的一般求解方法 . . . 4
2.6 有心立场中质点运动轨道的有限性 . . . 4
2.7 有心力场中质点运动轨道的稳定性 . . . 5
2.8 有心力场中质点运动轨道的闭合性 . . . 6

3 开普勒问题：平方反比引力 **7**

4 α 粒子散射问题：平方反比斥力 **8**

1 有心力简介

有心力定义：质点在运动过程中，如果力的作用线任何时刻都通过某一固定点 O，则这种力叫有心力，对应的固定点为力心。取力心为坐标系原点，有心力可以表示为

$$\vec{F}(r) = F(r)\hat{e}_r, \tag{1}$$

对于一般的物理系统，有心力的大小仅与矢径 r 有关，与作用力的方向无关。

2 有心力的特点

2.1 有心力作用下质点的角动量守恒 $\dot{\vec{J}} = 0$

证明：根据角动量定理

$$\dot{\vec{J}} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \tag{2}$$

对于有心力，$\vec{F} = F(r)\hat{e}_r$，而位矢 $\vec{r} = r\hat{e}_r$

$$\dot{\vec{J}} = r\hat{e}_r \times F(r)\hat{e}_r = 0, \tag{3}$$

因此角动量不随时间变化，角动量守恒。

2.2 有心力作用下质点在一个平面内运动

证明：有心力作用下，角动量守恒，

$$\vec{J} = C_1\vec{i} + C_2\vec{k} + C_3\vec{k}, \tag{4}$$

上式中 C_i 是常数。质点的位矢为，

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}, \tag{5}$$

根据角动量的定义，$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$，我们有 $\vec{r} \cdot \vec{J} = 0$。代入 $\vec{r}$ 和 $\vec{J}$ 的表达式，我们得到

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0, \tag{6}$$

上式是平面的方程。这样我们证明了，有心力作用下的质点在一个固定平面内运动。

2.3 有心力是保守力

证明：极坐标系下，

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta, \tag{7}$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\hat{e}_r + r\mathrm{d}\theta\hat{e}_\theta, \tag{8}$$

因此有心力沿从 A 点到 B 点的路径做的功为，

$$\begin{aligned}
W &= \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} && (9)\\
&= \int_A^B F(r)\hat{e}_r \cdot (\mathrm{d}r\hat{e}_r + r\mathrm{d}\theta\hat{e}_\theta) && (10)\\
&= \int_A^B F(r)\mathrm{d}r && (11)\\
&= \tilde{F}(r_B) - \tilde{F}_{r_A}, && (12)
\end{aligned}$$

上述中 $\tilde{F}(r) = \int F(r)\mathrm{d}r$ 是一维函数 $F(r)$ 的不定积分。按照上式，有心力做功仅与 A 和 B 两点的矢径 r_A 和 r_B 有关，与具体路径无关，因此有心力 $\vec{F}$ 是保守力，必然存在标量函数(有心力对应的势能)$U(r)$，满足

$$\vec{F}(r) = -\nabla U(r), \tag{13}$$

根据极坐标系中梯度算子 ∇ 的形式，
（详见 https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates）

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{e}_\theta \tag{14}$$

上式可以写为，

$$\begin{aligned}
\vec{F}(r) &= -\nabla U(r) && (15)\\
&= -\frac{\partial U(r)}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial \theta}\hat{e}_\theta && (16)\\
&= -\frac{\partial U(r)}{\partial r}\hat{e}_r, && (17)\\
& && (18)
\end{aligned}$$

也即有

$$F(r) = -\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}. \tag{19}$$

2.4 有心力作用下矢径 r 随时间的变化等价于质点在有效势场中的一维运动

$$m\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}V(r). \tag{20}$$

证明：根据上一小节的结论，有心力作用下质点在一个固定平面内运动，因此我们可以取这个平面内的极坐标系，列出牛顿运动方程，

$$m\vec{a} = \vec{F}, \tag{21}$$

$$ma_r\hat{e}_r + a_\theta\hat{e}_\theta = F(r)\hat{e}_r \tag{22}$$

带入极坐标系中径向加速度和角向加速度的形式，我们得到

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r), \\ m\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

因为 $\vec{J} = \vec{r}\times\vec{p} = r\hat{e}_r \times m(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\hat{e}_z = J\hat{e}_z$，因此上边第二式可以变为

$$\frac{1}{r}\dot{J} = 0, \tag{24}$$

它实际上反映了角动量守恒。同时，我们能够得到角速度

$$\dot{\theta} = \frac{J}{mr^2} \tag{25}$$

对于第一式，将角速度形式代入，我们得到

$$m\ddot{r} - \frac{J^2}{mr^3} = F(r) \tag{26}$$

上式左边第 2 项是离心力项，它也是有心力（只在 $\hat{e}_r$ 方向有分量），因此它也是保守力，有对应的势能。易见，

$$-\frac{J^2}{mr^3} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{J^2}{2mr^2}, \tag{27}$$

同时方程的右边可以写为 $F(r) = -\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}$。将左边第 2 项移到右边，合并，得到

$$m\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[U(r) + \frac{J^2}{2mr^2}\right], \tag{28}$$

$$m\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}V(r), \tag{29}$$

上式中 $V(r) \equiv U(r) + \frac{J^2}{2mr^2}$，是系统的有效势能，它包含有心力 $\vec{F}(r)$ 对应势能和离心力对应势能。因此，质点在有心力场中运动，矢径方向的变化等价于有效势能 $V(r)$ 作用下质点的一维运动。

现在，质点受到有效势 $V(r)$ 作用，也即仅受保守力作用，质点的机械能守恒，因此

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) = E, \tag{30}$$

不随时间改变。因此，质点径向速度为

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2(E - V(r))}{m}} \tag{31}$$

2.5 有心力场中质点运动方程的一般求解方法

根据上节矢径满足的微分方程，可以解出矢径变化的方程 $r(t)$。

根据角速度表达式，

$$\dot{\theta}=\frac{J}{mr^2}, \tag{32}$$

我们作如下变换，

$$\begin{aligned}\dot{\theta}&=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\dot{r} &(33)\\ &=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\sqrt{\frac{2(E-V(r))}{m}}, &(34)\end{aligned}$$

结合上边两式，我们得到，

$$\begin{aligned}\frac{J}{mr^2}&=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\sqrt{\frac{2(E-V(r))}{m}}, &(35)\\ \mathrm{d}\theta&=\frac{J\mathrm{d}r}{r^2}\frac{1}{\sqrt{2m(E-V(r))}} &(36)\end{aligned}$$

这样我们得到了极角变化与矢径变化的关系。两边积分，有

$$\begin{aligned}\int_{r_A}^{r_B}\mathrm{d}\theta&=\int_{r_A}^{r_B}\frac{J}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E-V(r)}}, &(37)\\ \Delta\theta&=\int_{r_A}^{r_B}\frac{J/r^2\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E-V(r)}}, &(38)\end{aligned}$$

假设初始时刻位矢 r_0，极角为 0；任意时刻位矢 r，极角为

$$\theta(r)=\int_{r_0}^{r}\frac{J/r^2\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E-V(r)}}. \tag{39}$$

总之，求解有心立场中质点的运动方程，首先通过矢径的运动方程求解 $r(t)$，然后根据上式求解任意时刻的极角 $\theta(t)$，从而得到质点完整的运动方程 $\{r(t),\theta(t)\}$。

2.6 有心立场中质点运动轨道的有限性

如果质点在运动过程中，矢径 r 总保持有限值，那么质点的运动轨道是有限的。

根据上式中矢径变化的方程，

$$m\ddot{r}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}V(r), \tag{40}$$

$$V(r)=U(r)+\frac{J^2}{2mr^2}, \tag{41}$$

同时考虑到系统的能量守恒，

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+V(r), \tag{42}$$

结合我们在 §1.8 节的讨论，如果势能 $V(r)$ 存在势阱，而质点的能量又小于势阱两边的势垒高度，则质点可以束缚在势阱内运动，对应的矢径 r 是有限的。运动轨道有限的关键条件是有效势能 $V(r)$ 是否存在势垒。我们讨论一种简单情况，假定有心力势能 $U(r)$ 是幂函数，

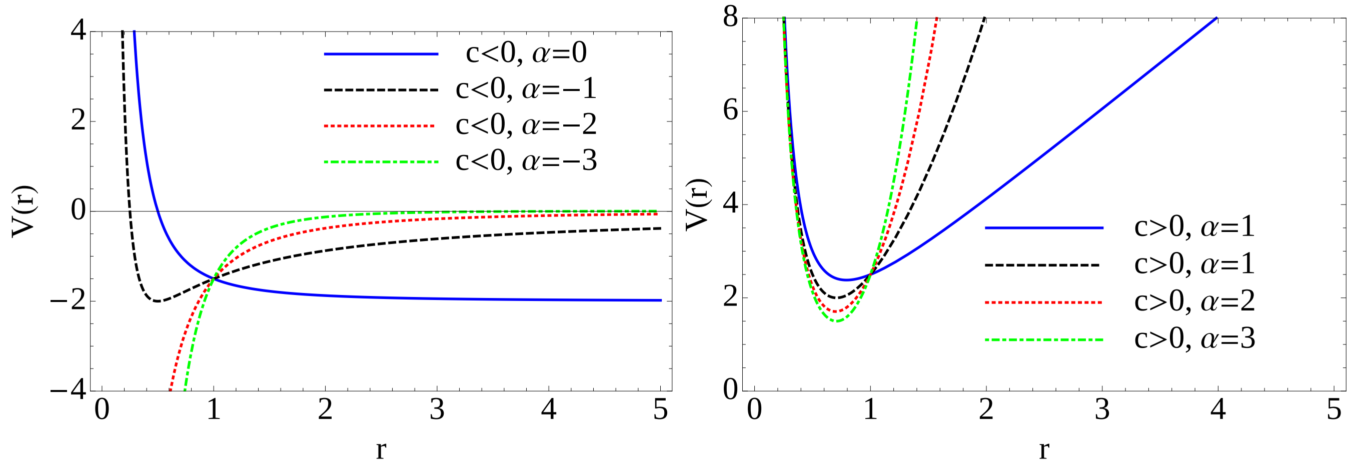
$$V(r)=cr^{\alpha}+\frac{J^2}{2mr^2} \tag{43}$$

因此有心力大小为，

$$\vec{F} = -\nabla U(r) = -c\alpha r^{\alpha-1}\hat{e}_r, \tag{44}$$

因此，当 $c\alpha > 0$ 时，$\hat{e}_r \cdot \vec{F} < 0$，对应吸引力；当 $c\alpha < 0$ 时，对应排斥力。并且，因为 $V(r)$ 中第二项随 r 的减小而增大，因此有心力势能 $U(r)$ 必须随着 r 的增大而增大，这样两项叠加之后才有可能在中间位置产生一个势阱。这就要求 $\mathrm{d}U(r)/\mathrm{d}r > 0$，即 $c\alpha > 0$。因此，有心力必须是吸引力，才能够使质点的矢径落在一个有限区域内。

假设角动量为 1，下图画出几种特殊情况下的有效势能形式，



如图所示，对于 $c < 0$、$\alpha < 0$ 的情况，只有当 $\alpha = -1$，势能曲线中存在势阱；而对于 $c > 0$ 的情况，所有 $\alpha > 0$ 的势能曲线均有势阱。

下面，我们定量分析势阱存在的条件。首先 $V(r)$ 必须有极小值，这就要求

$$V'(r) = c\alpha r^{\alpha-1} - \frac{J^2}{mr^3} = 0, \tag{45}$$

$$V''(r) = c\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + \frac{3J^2}{mr^4} > 0, \tag{46}$$

两式结合，得到 $\alpha > -2$。因此当 $c < 0$ 的时候质点轨道有限（也即有效势能 $V(r)$ 存在势阱）的必要条件是 $-2 < \alpha < 0$。

类似的方法分析 $c > 0$ 的情况，我们发现只要 $\alpha > 0$ 有效势能 $V(r)$ 就必然存在势阱。因此 $c > 0$ 时质点轨道有限的必要条件是 $\alpha > 0$。

除了对 α 的限制，为确保质点在势阱中运动，还要求质点能量不超过势阱两边势垒的高度。对于 $c < 0$ 的情况，我们可以看到，当 $r \to \infty$ 时 $V(r) \to 0$，因此势阱右边有效势能最高点为 0。因此，确保质点在势阱中运动，要求 $E < 0$；对于 $c > 0$ 的情况，势阱两边的最高势能均趋近于无穷大，因此只要能量大于势阱最低点的势能，也即 $V(r_0)$，质点就必然在有限区域内运动。上式中 r_0 可以由前边的 $V'(r) = 0$ 求得，

$$r_0 = \left(\frac{J^2}{c\alpha m}\right)^{\frac{1}{\alpha+2}}. \tag{47}$$

2.7 有心力场中质点运动轨道的稳定性

轨道稳定性的含义是：当质点受到一个微扰力作用后，质点的运动轨道仍然位于力作用之前的轨道附近。

地球围绕太阳的运动是稳定的，因为地球每时每刻都受到来自太阳之外的星体的微小引力作用，而地球轨道没有明显的变动。

一维情况下，处于势能最低点的质点的运动是稳定的，施加一个微小冲量之后质点仍在势能最低点附近振动；处于势能最高点的质点运动是不稳定的，施加一个微小冲量后质点会连续运动偏离势能最高点，直到运动到一个势能最低点位置，在最低点附近作大幅度振动。

如果运动轨道是稳定的，微小的力带来质点运动状态微小的改变；如果运动不稳定，不管多小的力都能够带来质点运动状态巨大的改变。

根据上一小节我们对有效势能的讨论，我们可以得到结论，假如质点在势阱中运动，那么施加微扰之后质点仍然束缚在势阱内部，轨道是稳定的。我们直接得到了轨道稳定性的条件，

$$\begin{cases} c<0,-2<\alpha<0, & F=\frac{c\alpha}{r^{|\alpha|+1}} \\ c>0,\alpha>0, & F=c\alpha r^{\alpha-1}. \end{cases} \tag{48}$$

这样我们得到与周衍柏书上同样的结论：平方反比力和线性力作用下质点运动稳定，立方反比力作用下不稳定

2.8 有心力场中质点运动轨道的闭合性

如果质点经过有限时间运动之后，能够回到起始点，那么质点运动轨道是闭合的。

闭合轨道必然是有限的，但有限轨道未必是闭合的。

根据轨道有限，结合上边小节的讨论，我们知道质点必然在 $V(r)$ 的一个势阱内运动。根据机械能守恒

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+V(r)=E, \tag{49}$$

当质点运动到最大势能处时，$E=V(r)$，质点速度 $\dot{r}=0$，质点到达 r 的最大值或最小值。解 $E=V(r)$，得到矢径最大值 $r_{\max}$ 和最小值 $r_{\min}$。

根据前边极角对矢径变化的依赖关系，

$$\Delta\theta=\int_{r_A}^{r_B}\frac{J/r^2\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E-V(r)}}, \tag{50}$$

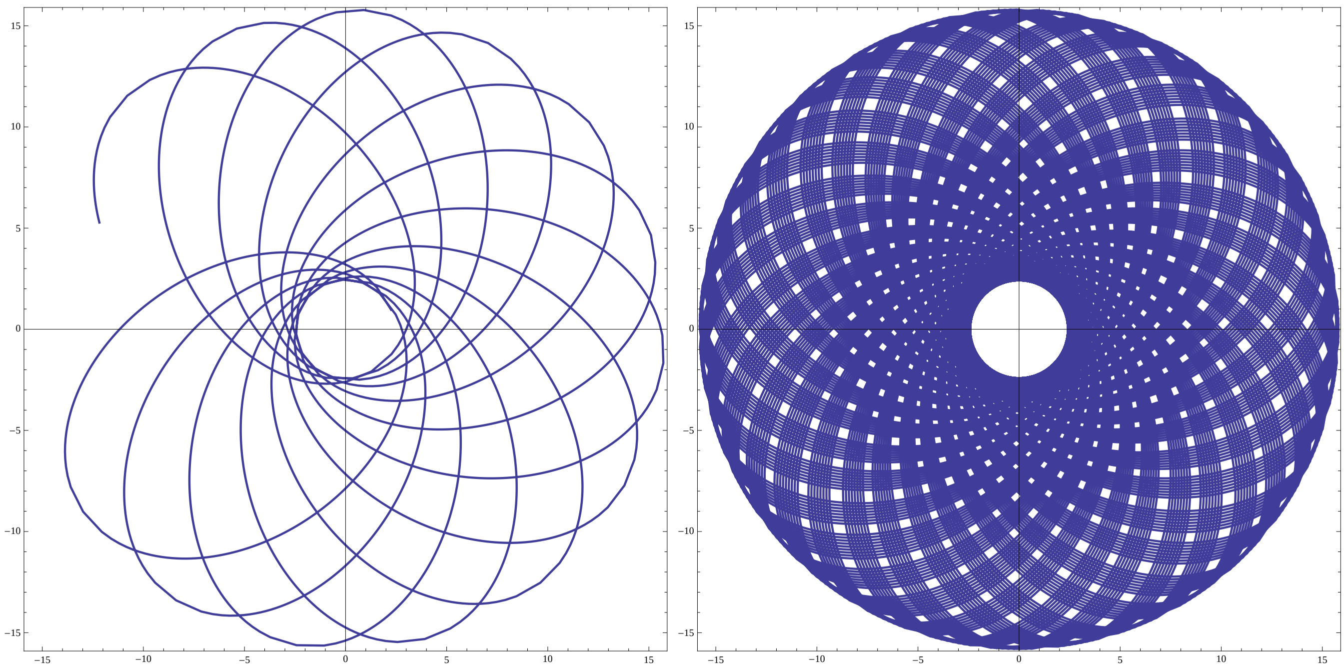
我们考虑质点从矢径最小的位置开始，运动到矢径最大值，然后再运动回矢径最小值，这记为一个径向运动周期。经历一个径向运动周期，极角的改变为，

$$\Delta\theta=2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{J/r^2\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E-V(r)}}, \tag{51}$$

如果质点在一个径向运动周期内对应的 $\Delta\theta=2\pi$，那么质点刚好回到原来的位置；如果 $\Delta\theta=\pi$，那么质点经过两个径向运动周期之后回到起始位置；如果 $\Delta\theta=\pi n/m$(m、n 是整数)，那么质点经过 $2m$ 个径向周期后必然回到原点。

综上，当一个径向运动周期内对应的极角改变是 π 的有理数倍时，轨道闭合。

一般情况下，轨道不闭合。例如，我们取 $U(r)=\frac{c}{r^{1.1}}$，得到的轨道如图所示



可以证明，对于形如 $U(r)=cr^\alpha$ 的势能，只有两种特殊情况下轨道是闭合的，

$$-\frac{c}{r},\qquad kr.\qquad (c>0,k>0) \tag{52}$$

分别对应万有引力场(静电引力场)和简谐振动的线性恢复力。具体证明稍显复杂，我们这里不做展开，有兴趣的同学可以在阿诺德的《经典力学的数学方法》§8.D 小节找到完整的证明。

3 开普勒问题：平方反比引力

万有引力为平方反比引力，质点在万有引力场中的运动问题被称作开普勒问题。

万有引力形式为，

$$\vec{F}(r) = -\frac{k^2 m}{r^2}\hat{e}_r, \tag{53}$$

上式中 $k^2 = Gm_s$，其中 G 是万有引力常数，m_s 是太阳质量。因为太阳质量远远大于地球（视作质点）质量，因此可以暂时假定太阳不动，质点在不随时间变化的稳恒引力场中运动。

对应的引力势能为

$$U(r) = -\frac{k^2 m}{r}, \tag{54}$$

将其代入下式，得到

$$\begin{aligned}
\theta(r) &= \int_{r_0}^{r} \frac{J/r^2 \mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E-V(r))}} && (55)\\
&= \int_{r_0}^{r} \frac{J/r^2 \mathrm{d}r}{\sqrt{2m\left(E+\frac{k^2 m}{r}-\frac{J^2}{2mr^2}\right)}} && (56)\\
&= -\int_{J/r_0}^{J/r} \frac{\mathrm{d}(J/r)}{\sqrt{2mE+\frac{2m^2k^2}{r}-\frac{J^2}{r^2}}}, && (57)
\end{aligned}$$

易见等号右边仅与 $1/r$ 有关，因此我们定义 $\tilde{u} = J/r$，上式变为

$$\begin{aligned}
\theta(r) &= -\int_{\tilde{u}_0}^{\tilde{u}} \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\sqrt{2mE+\frac{2m^2k^2}{J}\tilde{u}-\tilde{u}^2}} && (58)\\
&= \arccos\frac{\tilde{u}-mk^2/J}{\sqrt{2mE+\frac{m^2k^4}{J^2}}} && (59)
\end{aligned}$$

取 $p = \frac{J^2}{mk^2}$，$e = \sqrt{1+\frac{2EJ^2}{mk^4}}$，则上式变为

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{J/r - mk^2/J}{\frac{mk^2}{J}\sqrt{\frac{2EJ^2}{mk^4}+1}} && (60)\\
&= \frac{1}{e}\left(\frac{J^2}{mk^2 r}-1\right) && (61)\\
&= \frac{1}{e}\left(\frac{p}{r}-1\right) && (62)
\end{aligned}$$

上述方程可以化为简单的形式

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}, \tag{63}$$

正是周衍柏书中的参数方程形式，即圆锥曲线的方程。e 取不同值的时候，对应曲线分别为椭圆、抛物线以及双曲线。而根据上边 e 的定义，我们马上知道

$$e = \sqrt{1+\frac{2EJ^2}{mk^4}}, \qquad \begin{cases} e>1, \text{双曲线} & (E>0)\\ e=1, \text{抛物线} & (E=0)\\ e<1, \text{椭圆} & (E<0)\end{cases} \tag{64}$$

因此，只要知道 E 的正负，就可以知道轨道的形状。

现在，我们讨论一个一般的问题：距离力心 r_0 处的质点，速度大小为 v_0，速度与位矢夹角为 θ_0，求参数方程的形式。

这个问题最直接的做法就是直接应用参数方程公式。首先可以得到角动量和能量大小，

$$J = |\vec{r} \times \vec{p}| = mr_0^2 v_0 \sin\theta_0, \tag{65}$$

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - U(r_0) = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k^2}{r_0}. \tag{66}$$

首先利用取 p 和 e 的定义式，

$$p = \frac{J^2}{mk^2}, \tag{67}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{mk^4}} \tag{68}$$

求出参数 e 和 p。剩下的工作就是确定近日点对应的极角 $\tilde{\theta}_0$。取质点初始位矢方向沿 x 轴，将初始坐标带入公式，

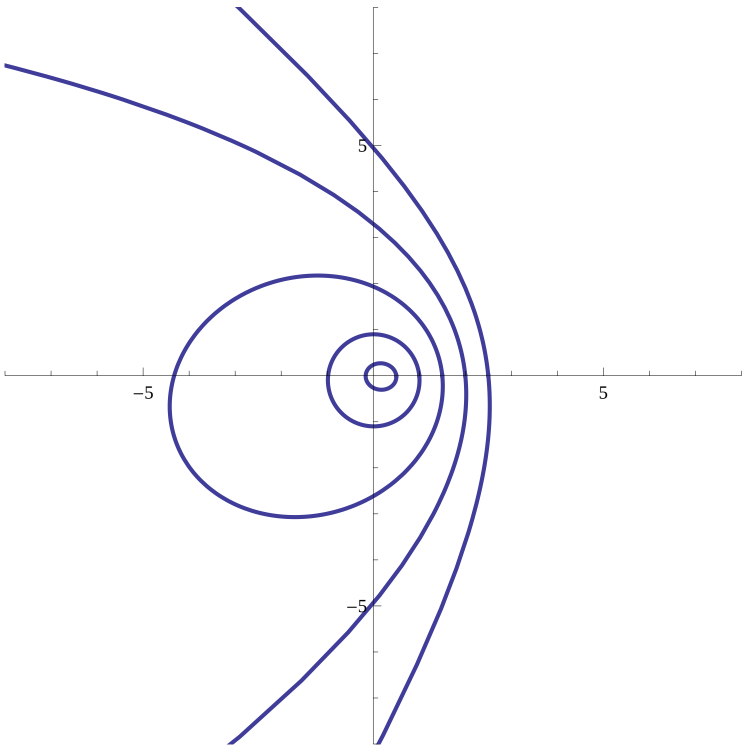
$$r_0 = \frac{p}{1 + e\cos(0 - \tilde{\theta}_0)}, \tag{69}$$

$$\tilde{\theta}_0 = \arccos\left(\frac{p}{er_0} - \frac{1}{e}\right), \tag{70}$$

利用上边最后一式求出 θ_0，我们就能得到曲线的参数方程，

$$r = \frac{p}{1 - e\cos(\theta - \tilde{\theta}_0)}, \tag{71}$$

下面是一个简单的例子， 圆锥曲线的更多讨论见周衍柏教材。



4 α 粒子散射问题：平方反比斥力

见教材。