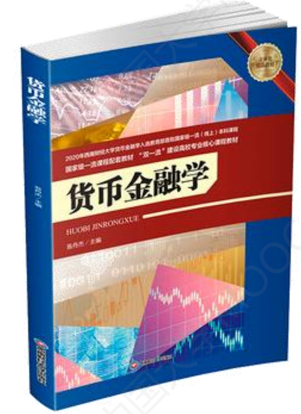


第4章 利率与利率计算

<u>本章教学内容</u>

- 利率与利率分类
- 单利和复利
- 现值和终值
- 到期收益率
- 回报率

1.利率与利率分类

- 利率：利率是一定时期内利息金额同本金的比率。
- 利率分类
  - 按借贷期限：短期利率（一年以内）和长期利率（一年以上）
  - 按计算利息的时间长短：

    ——年利率(百分之几，俗称“分”)

    ——月利率(千分之几，俗称“厘”)

    ——日利率(万分之几，俗称“毫”)

    年利率＝月利率×12＝日利率×360
  - 按利率是否在借贷期内调整：固定利率、浮动利率
  - 按利率是否随市场规律自由变动：市场利率、官定利率
  - 按利率是否考虑通货膨胀：名义利率、实际利率
- 其他常见利率：存款利率、贷款利率；基准利率 …

拓展思考：我国利率市场化改革进程和现状？

2.单利和复利

- □ 单利的特点是对利息不再付息，只以本金为基数计算利息。
- □ 复利俗称利滚利，其特点是除了本金以外，前期的利息也要计息。
- □ 单利和复利的计算

  假设金额A以年利率r投资了n年，则

  - ■ 单利计算公式

    本利和（终值）：$A(1+r*n)$

  - ■ 复利计算公式

    本利和（终值）：$A(1+r)^n$

  单利和复利计算举例

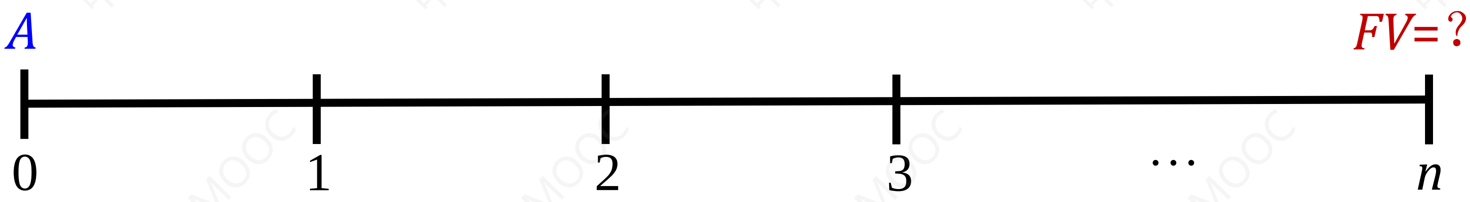
- □ 连续复利
- □ 复利的威力

★ 课堂拓展：名义年利率和有效年利率

3.现值和终值：货币的时间价值

- 货币具有时间价值，现在的1元钱和未来的1元钱价值不同。
- 终值（Final Value, FV）

  现在有一笔钱 → 一定的收益率下→求未来的价值？



- 现值（Present Value, PV）

  未来有一笔钱 → 一定的贴现率下→求现在的价值？

单个现金流的现值和终值

- **终值计算公式**：$FV = PV \cdot (1 + r)^n$
- **例1**：年利率为10%，现有资金为100元，求5年后的终值？
- ✓ **解答**：$FV = 100 \cdot (1 + 10\%)^5 = 161.05$（元）

- **现值计算公式**：$PV = FV \cdot \frac{1}{(1+r)^n}$

  其中：$\frac{1}{(1+r)^n}$相当于n年以后的1元钱的现值，通常被称为**现值系数**（贴现系数）。

- **例2**：贴现率为10%，5年后可得到100元，求其现值？
- ✓ **解答**：$PV = \frac{100}{(1+10\%)^5} = 62.09$（元）

系列现金流的现值和终值

- 系列现金流是指不同时间多次发生的现金流。如分期付款赊购、分期偿还贷款、发放养老金、每年相同的销售收入等。
- 年金：定期定额的系列收支，经济学上称为年金。
  - 年金终值计算：设每期支付C（年末支付），利率r，期数为n，则，$FV = C + C(1+r) + \cdots + C(1+r)^{n-1} = C \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$
  - 年金现值计算：设每期收到C（年末支付），利率r，期数为n，则，$PV = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^n} = C \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$

★ 课堂拓展：期末年金和期初年金

举例：年金现值和终值计算

- □ **例1**：某人打算从现在起每年末等额存入银行100元，若银行存款利率为10%，问5年后终值为多少？

✓ 解答：$FV = 100 + 100(1+10\%) + \cdots + 100(1+10\%)^{5-1}$

$= 100 \cdot \frac{(1+10\%)^5 - 1}{10\%} = 610.51$（元）

- □ **例2**：若某一项目，在将来5年内，能为你每年带来100元的收入，若贴现率为10%，问这一系列现金流的现值？

✓ 解答：$PV = \frac{100}{1+10\%} + \frac{100}{(1+10\%)^2} + \cdots + \frac{100}{(1+10\%)^5}$

$= 100 \cdot \frac{1-(1+10\%)^{-5}}{10\%} = 379.08$（元）

举例：投资项目的评判

- □ **例**：有一投资项目需要原始投资6万元，项目周期为3年，第一年项目带来的现金流为1万元，第二年为2万元，第三年为3万元并收回项目残值1万元。若对该项目的期望投资收益率为15%，问该项目是否值得投资？

- ✓ **解答：该项目能在未来产生7万元现金流，大于原始投资6万元，看上去值得投资。但考虑到货币的时间价值后，答案就不一定了。**
该项目的现值为？

$$PV=\frac{1}{1+15\%}+\frac{2}{(1+15\%)^2}+\frac{3+1}{(1+15\%)^3}$$
$$=0.87+1.51+2.63=5.01\text{（万元）}$$

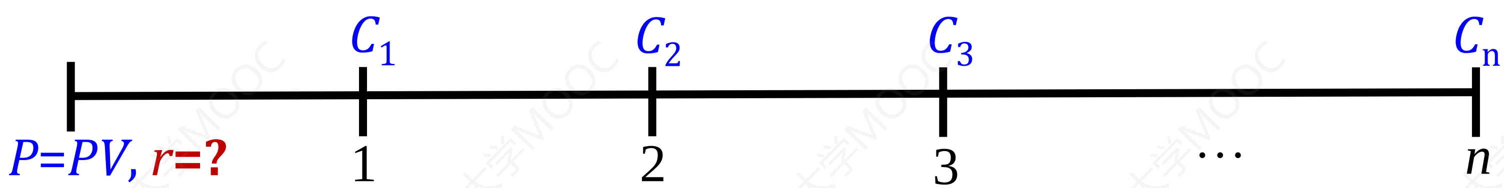
可见项目的现值小于原始投资，该项目不值得投资。

- □ 投资项目的评判：现金流比较方法的拓展

★ **课堂拓展**：职业的选择——医生VS歌女

4.到期收益率

- 在金融市场上，存在着各种各样的债务工具，这些债务工具的计息方式各不相同。为了便于比较，需要一个衡量利率高低的指标，这类指标很多，其中最常用和重要的指标是到期收益率。
- 到期收益率（Yield to Maturity）：持有到偿还期，从金融工具上获得的回报的现值与其当前的市场价值相等时的贴现率。



- 由于到期收益率的计算过程中包含重要的经济学意义，所以经济学家认为它是衡量利率最为精确的指标。

★ 课堂拓展：不考虑时间价值的年均回报率与到期收益率的比较

项目	初始投资	第1年	第2年	第3年	年均回报率	到期收益率
1	-100	10	10	110	10.00%	10.00%
2	-100	10	11	109	10.00%	10.03%
3	-100	18	10	101	9.67%	10.22%

（1）普通贷款到期收益率计算

- 普通贷款：贷款人向借款人提供一定金额的资金，借款人必须在到期日把这笔资金偿还给贷款人，并支付额外的利息。

- 例：某笔贷款本金10000元，一年后还本付息11000元，就这笔贷款而言，其到期收益率为多少？

- ✓ 解答：根据到期收益率定义，从金融工具上获得的回报的现值与其当前市场价值相等的利率。即, $P=\frac{FV}{1+r}$，求r?

即有，$10000=\frac{11000}{1+r}$，求得到期收益率r=10%。

（2）分期偿还贷款到期收益率计算

- □ 分期偿还贷款（固定支付贷款）：贷款人向借款人提供一定金额的资金，借款人必须在约定的若干时期内，每期向贷款人等额偿还包括部分本金和利息在内的款项。

- □ 例：张先生向工商银行贷款10000元的定期定额偿还贷款，分25年还清，每年还1275元，若在这25年中实行固定利率，问这笔贷款的到期收益率为多少？

✓ 解答：根据到期收益率定义，$P=\frac{C}{1+r}+\frac{C}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{C}{(1+r)^n}$，求$r$？即有如下方程式

$$10000=\frac{1275}{1+r}+\frac{1275}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{1275}{(1+r)^{25}}$$

$$r=12\%$$

★ 课堂拓展（快速回答）：若有一项金融资产，该金融资产投资期限为25年，每年可获得1275元的投资收益，该金融资产的到期收益率为12%，请问该金融资产的当前定价应该为多少？

（3）息票债券到期收益率计算

- 息票债券：在到期日之前每年向债券持有人支付固定金额的息票利息（C），在到期日再偿还票面额（F）和当期息票利息的债券。
- 例：息票债券的面值为1000元，息票利率为10%，期限为10年，计算不同现期价格下的到期收益率？

现期价格（元）	到期收益率（%）
1200	7.13
1100	8.48
1000	10.00
900	11.75
800	13.81

✓ 解答：根据到期收益率定义，有

$$P=\frac{C}{1+r}+\frac{C}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{C+F}{(1+r)^n}$$

$$=\frac{100}{1+r}+\frac{100}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{100+1000}{(1+r)^n}$$

- 规律
  - 债券价格和到期收益率呈负相关。也就是说，当到期收益率上升时，债券价格下跌；当到期收益率下降时，债券价格上涨。
  - 如果债券价格等于其面值，到期收益率就等于息票利率。
  - 当债券价格低于（高于）其面值时，到期收益率高于（低于）其息票利率。

（4）贴现债券到期收益率计算

- 贴现债券：贴现债券发行价格低于其面值（贴现发行），债券不支付利息，而是到期支付票面额给持有者。
- 贴现债券如果按年复利计算，到期收益率计算公式为：

$$P=\frac{FV}{(1+r)^n}\text{，求}r\text{？}$$

- 例：某种贴现债券面值1000元，期限为2年，如果当期买入价格为900元，求其到期收益率？

✓ 解答：根据公式

$$P=\frac{FV}{(1+r)^n} \rightarrow 900=\frac{1000}{(1+r)^2} \rightarrow r=5.4\%$$

（5）永久债券到期收益率计算

- 永久债券（永续债券）：期限无限长，是一种没有到期日、不偿还本金、永远支付固定金额息票利息的债券，又称为统一公债。
- 假设每年支付利息为C，永续债券到期收益率的计算公式为：

$$P=\frac{C}{1+r}+\frac{C}{(1+r)^2}+\cdots=\frac{C}{r}，\text{即 } r=\frac{C}{P}$$

即，永续债券的到期收益率等于它的当期收益率。（当期收益率是指债券某一期间所获得的利息收入相较于债券购入价格的比率）

- 例：假如某人用100元购买了某种永续债券，每年得到的利息为10元，求其到期收益率？

✓ 解答：根据公式：

$$r=\frac{C}{P}=\frac{10}{100}\ \rightarrow\ r=10\%$$

以上通过对多种信用工具到期收益率计算，可以发现一个规律：当期债券价格与利率呈负相关，利率上升，债券价格下跌，反之反是。

5.回报率

- 回报率（Rate of Return）是精确衡量人们在特定时期持有某种债券或证券获得回报的指标。回报率的定义就是证券持有人的利息收入加上证券价值变化的总和，除以购买价格的比率。
- 回报率VS到期收益率
- 例：面值1000元的息票债券，其息票利率为10%，期限3年，而购入价格为1000元，在持有一年后，以1200元的价格出售，其回报率是多少？债券的到期收益率是多少？

✓ 解答：

1）债券持有人每年的息票利息收入是100元，债券价值的变化是1200-1000=200元。把这两者相加，并把它按购买价格1000元的比率来表示，我们得到：

持有该债券1年的回报率=（100+200）/1000=30%

2）债券的到期收益率=10%

- 结论：债券的回报率与到期收益率不一定相等。

回报率计算公式

- 从t到t+1时刻之间，持有债券获得回报率的一般形式为：

$$R=\frac{C+P_{t+1}-P_t}{P_t}=\frac{C}{P_t}+\frac{P_{t+1}-P_t}{P_t}$$

  - 第一部分是当期收益率（Current Yield）：$i_c=\frac{C}{P_t}$

    注：当期收益率是指债券某一期间所获得的利息收入相较于债券购入价格的比率。
  - 第二部分是资本利得率（Rate of Capital Gain）：$g=\frac{P_{t+1}-P_t}{P_t}$
  - 回报率公式可以简化为：$R=i_c+g$
- 总结：回报率和利率之间会存在很大的差别，特别是在债券价格出现大幅波动，导致资本利得出现剧烈变化的时候，两者之间的差别更为显著。

★ 课堂拓展：1. 如果持有息票债券多期后再出售，如何计算回报率？2. 息票债券价格越接近面值，或者期限越长，则其当期收益率就越接近到期收益率。

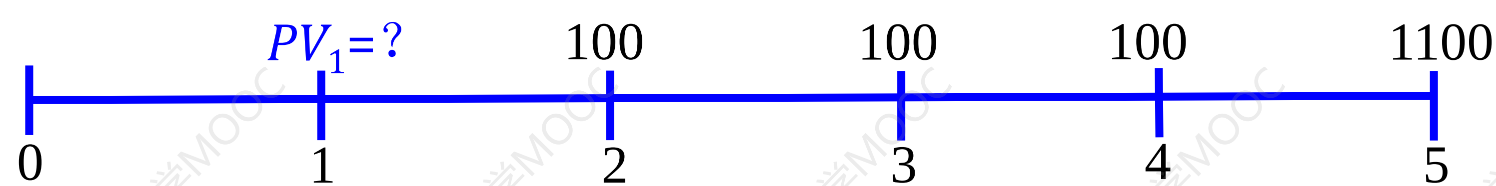
回报率计算实例

- 例：有若干种不同期限的息票债券，面值均为1000元，息票利率均为10%，若你按面值购入，一年后卖出。计算当一年后利率从10%上升至20%时，你持有一年的回报率？

利率由10%上涨到20%，息票利率为10%的不同期限债券的1年期回报率

债券购买时距离到期日的年数	最初的当期收益率(%) (A)	最初的价格(元)	下一年的价格(元)	资本利得率(%) (B)	回报率(%) (A)+(B)
30	10	1000	503	-49.7	-39.7
20	10	1000	516	-48.4	-38.4
10	10	1000	597	-40.3	-30.3
5	10	1000	741	-25.9	-15.9
2	10	1000	917	-8.3	+1.7
1	10	1000	1000	0.0	+10.0

✓ 解答：请列出“距离到期日5年”的债券的“下一年价格”计算式？



关于回报率的结论

- 重要结论
  - 回报率等于最初到期收益率的唯一一种债券是持有期与距离到期日的期限一致的债券。
  - 对于距离到期日的期限超过持有期的债券而言，利率的上升必定伴随着债券价格的下跌，从而导致债券出现资本损失。
  - 距离债券到期日的时间越长，利率变化引起的债券价格变化的比率也越大。当利率上升时，回报率也就越低。
  - 即使债券的初始利率很高，当利率上升时，其回报率也可能为负。
- 推论
  - 期限越长的债券，其价格波动受利率的影响也越大，这个结论有助于帮助我们解释债券市场上一个重要事实：长期债券的价格和回报率的波动性都大于短期债券。这就是利率风险。
  - 持有短期债券比持有长期债券更为安全。

本章重点回顾

- 利率的分类

  特别要掌握名义利率、实际利率、基准利率等概念。

- 理解货币的时间价值

  理解单利、复利，现值、终值等概念，并能对单个现金流或系列现金流进行相关计算。

- 到期收益率

  要能熟练计算各种不同金融工具的到期收益率

- 回报率

  要能熟练计算回报率

END

货币金融学
中国大学MOOC

货币金融学
学堂在线

固定利率和浮动利率；市场利率和官定利率

- 固定利率和浮动利率（划分依据：利率是否在借贷期内调整）
  - 固定利率是指在整个借贷期内，利率不随借贷资金供求变化而调整的利率。
    ——常用于短期借贷
  - 浮动利率是指在借贷期内随市场利率变化而定期调整的利率。
    ——常用于长期借贷，以及市场利率变动较为频繁的时期。
    ——浮动利率一般由双方协商，在规定的时间间隔依据某种市场利率进行调整。

- 市场利率和官定利率（划分依据：利率是否按市场规律自由变动）
  - 市场利率是指由借贷资金市场供求关系决定的利率。
  - 官定利率是由政府金融管理部门或者中央银行确定的利率。

名义利率和实际利率

- 名义利率是指借贷契约或有价证券载明的利率。
- 实际利率是指名义利率扣除通货膨胀率后的利率。
- 实际利率计算方法：
  - 事前的实际利率，等于名义利率减去预期的通货膨胀率。这种事前实际利率对经济决策非常重要。
  - 事后的实际利率，等于名义利率减去实际的通货膨胀率。它表示的是贷款者事后的实际收益情况。
- 费雪等式（Fisher Equation）最早揭示了预期通货膨胀率与利率之间的关系，它们之间的关系被称作费雪效应（Fisher Effect）。
  - 假定：名义利率R、实际利率R_r、预期通胀率π^e，则有：

$$1 + R = (1 + R_r)(1 + \pi^e)$$

$$R_r = R - \pi^e - R_r \cdot \pi^e$$

$$R_r \approx R - \pi^e$$

- 实际利率能够反映借款的实际成本，直接影响借款和贷款的意愿，能更好地反映信用市场的变动对人们产生的影响。

基准利率

- 基准利率的定义和作用

  基准利率是指在整个金融市场上和整个利率体系中处于关键地位、起决定性作用的利率。基准利率一般多由中央银行直接调控，并能够对市场其他利率产生稳定且可预测的影响。中央银行通常依靠对基准利率的调控来实现对其他市场利率的影响。

- 典型基准利率
  - 同业拆借利率（如：LIBOR、HIBOR、SHIBOR、美国联邦基金利率）
  - 国债回购利率（如：央行通过国债回购形式的公开市场操作形成的利率）
  - 国债利率

单利和复利计算举例

- 例如：存款账户上有100元，现在的年利率为3%，假定计息周期为一年。

✓ 按单利计算

存一年：终值为$A(1+r\times n)=100(1+3\%)=103$元

利息为3元

存二年：终值为$A(1+r\times n)=100(1+3\%\times 2)=106$元

利息为6元

✓ 按复利计算

存一年：终值为$A(1+R)^n=100(1+3\%)^1=103$元

利息为3元

存二年：终值为$A(1+R)^n=100(1+3\%)^2=106.09$元

利息为6. 09元

连续复利

- 假设：投资金额为A，以年利率r，投资n年。
- 如果按每年记1次复利计算，则终值为：

$$A(1+r)^n$$

- 如果按每年记2次复利计算，则终值为：

$$A\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}$$

- 如果按每年记m次复利计算，则终值为：

$$A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}$$

- 如果m趋于无穷，即连续复利，则终值为：

$$\lim_{m\to\infty} A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}=Ae^{rn}$$

复利的威力

- 1776年，《国富论》初版时的价格为￡1.80，按复利计算当前所值。

初始金额	£1.80
起始年份	1776
终值年份	2021

	计息周期1年		计息周期半年	
年息率	当前所值	上升倍数	当前所值	上升倍数
4%	£26,818.88	14,899	£29,468.41	16,371
6%	£2,852,393.87	1,584,663	£3,511,661.21	1,950,923
8%	£278,030,601.59	154,461,445	£399,584,617.80	221,991,454

名义年利率和有效年利率

- 名义年利率（Annual Percentage Rate, APR）
- 有效年利率（Effective Annual Rate, EAR）
- **应用场景：** 银行报价的利率经常是名义年利率，但计息周期不同，有效年利率是不同的。假定名义年率*APR=r*，计息周期为每年*m*次，则名义年率*APR*和有效年利率*EAR*有如下关系。

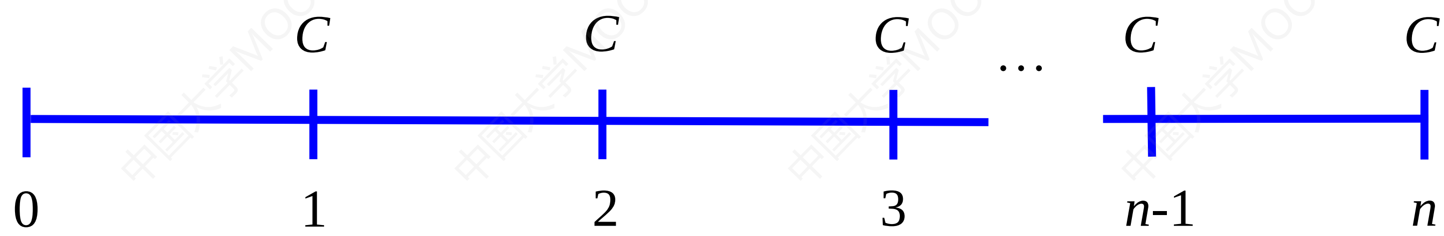
$$APR = r\text{；计息周期每年}m\text{次；}EAR = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1$$

- **例：** 名义年利率为8%，计息周期为每季度，则有效年利率为？

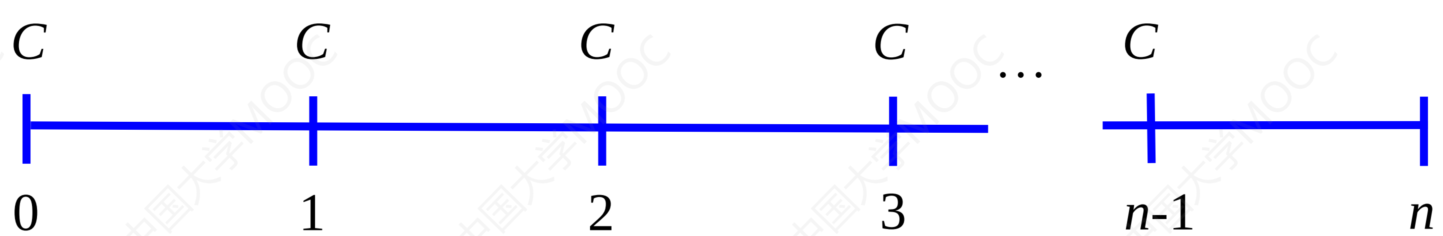
✓ **解答：** $EAR = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1 = \left(1+\frac{0.08}{4}\right)^4 - 1 = 8.24\%$

期末年金和期初年金

- 期末年金：利息收入、红利收入、房贷本息支付等。

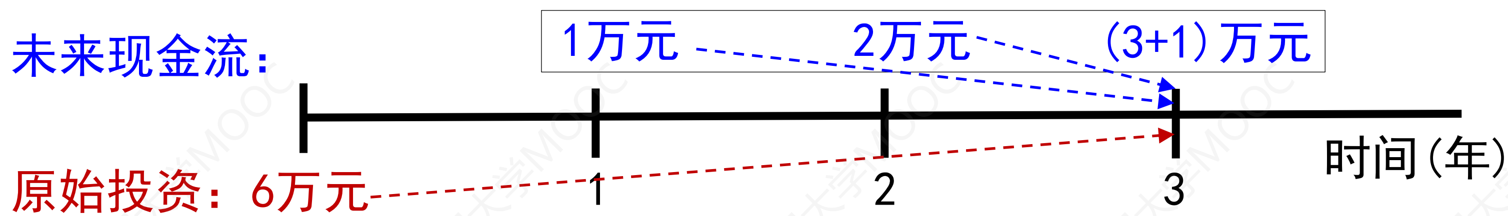


- 期初年金：房租、养老金支出、生活费、教育金支出、保险等。

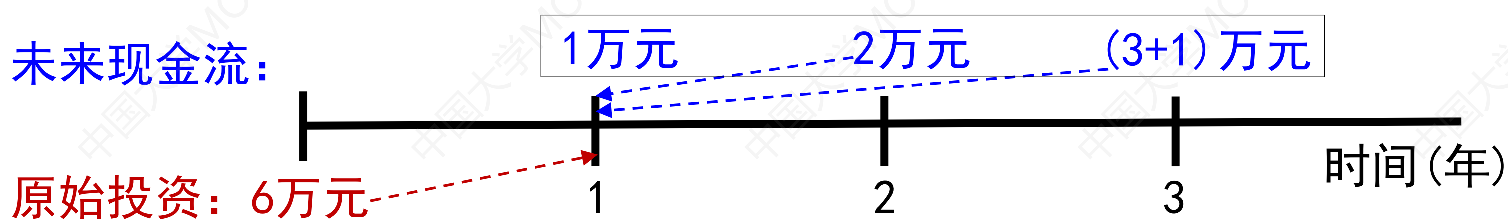


投资项目的评判：现金流比较方法的拓展

- 不同时间点上的现金流是不可比的，必须把现金流贴现或求终值到同一时间点才能进行比较。对于上例，可以有如下方法。
- 方法1：求现值——就是计算所有现金流的现值再比较。
- 方法2：求终值——就是计算所有现金流在3年后的终值再比较。



- 方法3：给定任意时间点，把现金流贴现或求终值到该时间点再进行比较。如选定时间点为第一年末，如图：



即：1）计算6万元原始投资在一年末的终值，2）计算未来各笔现金流在一年末的贴现值并加总，3）进行比较。