# Tarea 1: Introducción

Nolasco Flores Micael
No. De cuenta: 322132281

Núñez Hernández Leonardo Daniel
No. De cuenta: 322305122

UNAM, Facultad de Ciencias
Autómatas y Lenguajes Formales

13 de Febrero de 2026

# Problema 1

Considera $\Sigma$ como el abecedario del español (incluyendo 'ñ'), responde las siguientes preguntas:

## Respuestas

a) **¿El idioma español es un subconjunto de $\Sigma^*$?**

Antes de contestar completamente esta pregunta, nos surgió una duda: ¿cómo definimos el abecedario español para este problema? Para esto, llegamos a dos posibles respuestas.

La primera es tomar el abecedario como lo conocemos comúnmente, desde la letra 'a' hasta la letra 'z', incluyendo la 'ñ', ya que el problema lo pide. Si tomamos este abecedario, en estricto sentido, el idioma español ortográficamente correcto no es un subconjunto de $\Sigma^*$. Recordemos que en $\Sigma^*$ (el Asterato de Kleene) viven todas las cadenas finitas que se pueden formar con los símbolos de $\Sigma$. Un ejemplo de por qué no sería lo ortográficamente correcto sería es la palabra "canción", ya que esta tiene el símbolo 'ó' y, por cómo definimos anteriormente $\Sigma$, nunca tendremos el símbolo 'ó' dentro de él.

Ahora bien, si decimos que $\Sigma$ contiene todas las acentuaciones del idioma español para las vocales, entonces el idioma español sí sería un subconjunto de $\Sigma^*$. Básicamente, la respuesta depende de qué es lo que tomamos por "abecedario del español" y también qué es lo que definimos como "idioma español", ya que si no nos importa que sea ortográficamente correcto, podríamos decir que con el primer abecedario que propusimos, el idioma sí sería un subconjunto de $\Sigma^*$.

b) **¿$\Sigma$ pertenece al mundo de los símbolos (P) o al mundo de las estructuras (U)?**

Podemos afirmar que $\Sigma$ pertenece al mundo de los símbolos (P) ya que las cadenas no son estructuras, las cadenas son nuestra forma de darle sentido y representar al mundo de las estructuras (U). En este caso, $\Sigma$ representa el abecedario español lo que es literalmente un alfabeto. Ahora bien, la razón por la que $\Sigma$ no pertenece a (U) es porque, se trata de una colección de símbolos sin un significado por si mismos.

c) **Considera una secuencia de cadenas del español. ¿Podemos asignar un significado a dicha secuencia si solo tomamos en consideración $\Sigma$ y $\Sigma^*$?**

No, como el idioma español es un conjunto de cadenas en $\Sigma^*$ (si tomamos el caso que expusimos en el inciso a), esta secuencia de cadenas no puede estar en $\Sigma$ ya que aquí solo vamos a encontrar símbolos puros. Por otro lado, si la buscamos en $\Sigma^*$, las cadenas que conforman la secuencia si estaran. Pero que las cadenas se encuentren en $\Sigma^*$ no implica que tengan un significado, seguirá siendo una simple secuencia de cadenas compuesta por símbolos sin significado alguno, es hasta que un agente externo (un ser humano) le da un significado a los símbolos y a las cadenas creadas con ellos, esta interpretación no está ni en $\Sigma$ ni en $\Sigma^*$.

# Problema 2

Sea $\Sigma = \{0, 1\}$ y sea $L = \{uv \mid u = 00, v \in \Sigma^*\}$. ¿Cómo es $\overline{L}$? Descríbelo en palabras y también en notación de conjuntos.

### Respuesta

Primero vamos a describir a $L$, podemos ver que en $L$ están todas las las posibles combinaciones que están en $\Sigma^*$ que empiezan con la cadena $u = 00$, por lo que $\overline{L}$ debe de ser lo contrario a esto, todas las cadenas que están en $\Sigma^*$ menos las que empiezan con la cadena 00. En notación de conjuntos $\overline{L}$ es así:

$$\overline{L} = \{w \in \Sigma^* \mid w \textit{ no comienza con } 00\}$$

o

$$\overline{L} = \Sigma^* \setminus \{00w \mid w \in \Sigma^*\}$$

## Problema 3

Considera $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ y considera $A$ y $B$ dos lenguajes formales sobre $\Sigma$, con $A = \{\alpha w \mid w \in \Sigma^*\}$ y $B = \{\beta s \mid s \in \Sigma\}$. ¿Cuántos elementos tiene cada conjunto?

### Respuesta

Lo primero que podemos notar es que la cardinalidad de $A$ tiene una cantidad infinita de elementos, debido a que $A$ es el lenguaje que tiene a todas las cadenas de $\Sigma^*$ tales que empiezan con $\alpha$, como la cardinalidad de $\Sigma^*$ es infinito, la cardinalidad de $A$ tambien es infinito, aunque podríamos decir que la cardinalidad de $A$ representa solo una parte de la cardinalidad de $\Sigma^*$ ya que en $A$ se excluyen las cadenas que empiezan con $\beta$ y con $\gamma$.

Ahora para el lenguaje $B$, basta con ver que el único elemento que varía es $s \in \Sigma$, por lo tanto, la cantidad de elementos de este lenguaje es la misma que la cantidad de elementos de $\Sigma$, así que $B$ tiene tres elementos, $|B| = 3$, el conjunto es:

$$B = \{\beta\alpha, \beta\beta, \beta\gamma\}$$

## Problema 4

La teoría de categorías estudia (de manera muy simplificada) las relaciones entre objetos, más que los objetos en sí mismos. Investiga qué es la teoría de categorías, menciona 3 de sus propiedades y responde: ¿es la teoría de categorías un sistema formal en U o en P? Elabora tu respuesta y cita tus fuentes en APA7.

### Respuesta

Al ver este problema, inicialmente buscamos en Google, pero (Micael) recordó que en secundaria le enseñaron una mejor alternativa de buscador, que era Google Scholar, entonces así fue como encontramos el pdf de Díaz Cabrera y García Calcines (2023). En este pdf estaba básicamente todo lo que pedía este problema, así que primero vamos a resolver la pregunta de, ¿Qué es la teoría de categorías?

Bueno lo primero que hay que ver es que surgió a mediados del siglo XX, esta surgió principalmente como una herramienta para la topología algebraica. Según lo que encontramos en el pdf, su enfoque no es estudiar los elementos individuales que viven dentro de un "espacio" y con espacio el pdf se refiere a ya sea a un grupo, un conjunto o un espacio vectorial, sino más bien estudiar las relaciones entre estos espacios mediante el uso de flechas o morfismos. Básicamente, funciona como un lenguaje matemático muy abstracto en el que se buscan propiedades comunes entre distintas estructuras. Ahora, que ya hemos resuelto esta pregunta, podemos pasar a las siguientes propiedades, las cuales consideramos que eran las más importantes:

1. **Composición de Morfismos:** Si existe una relación entre un objeto $A$ y un objeto $B$, y otra entre $B$ y un objeto $C$, forzosamente debe existir una relación compuesta que vaya directo de $A$ a $C$.

2. **Existencia de Identidad:** Para cada objeto dentro de la categoría, siempre existe un morfismo identidad que actúa como el elemento "neutro" de la composición.

3. **Asociatividad:** En una secuencia de relaciones, no importa cómo agrupemos las composiciones, el resultado final se mantiene inalterado.

Ahora, con esto en mente, vamos a resolver la última pregunta, ¿es la teoría de categorías un sistema formal en U o en P? Según lo que llevamos de este curso, podemos decir que esta cae completamente en el mundo de las estructuras (U). Esto debido a que, como hemos visto en esta tarea, el mundo P se limita a los símbolos y las cadenas como unidades básicas, mientras que el mundo U se ocupa de la organización y las interrelaciones. Como podemos ver, la teoría de categorías encaja perfecto con la descripción de U, ya que literalmente deja de lado la estructura de los objetos, estos podríamos verlos como los símbolos, para enfocarse completamente en la estructura de sus relaciones.

**Referencia Bibliográfica**

Díaz Cabrera, J., & García Calcines, J. M. (2023). *Una introducción a la Teoría de Categorías y a sus aplicaciones* [Trabajo de Fin de Grado, Universidad de La Laguna].

# Problema 5

Sea $\Sigma = \{0, 1\}$. Considera el lenguaje formal: $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ representa un número par en binario}\}$.

## Respuestas

a) **Describe el lenguaje $L$ con notación de conjuntos.**
Lo primero que hay que recordar es que un número binario es par solo si su último bit es 0. Por lo tanto, el lenguaje $L$ podemos decir que son todas las de binario que terminan en cero, así que nos quedaría algo así:

$$L = \{w0 \mid w \in \Sigma^*\}$$

b) **Describe el lenguaje $L^*$ con notación de conjuntos.**
A ver, para este siguiente inciso creemos que es algo redundante, porque $L^*$ se supone que representa todas las posibles concatenaciones $L$ y como cada elemento de $L$ termina en 0,

cualquier concatenación de estas también va a terminar en 0, obviamente con excepción de $\epsilon$, entonces con esto en mente ahora si nos queda lo siguiente:

$$L^* = L \cup \{\epsilon\}$$

c) **¿Qué propiedad sintáctica se pierde al pasar de $L$ a $L^*$?**
En sentido no se pierde ninguna propiedad, ya que técnicamente ambos son iguales, si bien en $L^*$ usas los elementos de $L$, en $L$ misma podrías encontrar esa concatenación, ya que también tiene infinitas combinaciones. Por lo tanto no se pierde ninguna propiedad.

# Problema 6

Demuestra que todo alfabeto de $n > 2$ símbolos puede ser representado con un alfabeto binario.

## Respuesta

Definamos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ como un alfabeto con $n > 2$ símbolos, ahora para poder demostrar que este puede ser representado mediante el alfabeto binario, vaya $\Sigma = \{0, 1\}$, debemos encontrar una función $f : A \to \Sigma^n$ que sea inyectiva.

Ahora para poder asegurar que dicha función existe, basta con observar que si utilizamos cadenas de longitud $k$, el número de combinaciones binarias posibles es $2^k$. Como para cualquier $n > 2$ se cumple que $2^n > n$, entonces si decimos que $k = n$, obviamente tendremos suficientes combinaciones para cubrir todos los símbolos de $A$.

Ahora con todo esto definimos la función $f : A \to \Sigma^n$ de la siguiente forma, a cada símbolo $a_i \in A$ le asignamos una cadena de longitud $n$ que contiene un 1 en la posición $i$ y ceros en todas las demás, un ejemplo sería así:

- $f(a_1) = 100\ldots0$
- $f(a_2) = 010\ldots0$

$\vdots$

- $f(a_n) = 000\ldots1$

Con esta construcción podemos garantizar la inyectividad de la función, ya que cada cadena $f(a_i)$ posee un 1 en una ubicación única. Por lo tanto:

$$\text{Si } i \neq j \implies f(a_i) \neq f(a_j)$$

Ahora al haber construido una función inyectiva que mapea cada símbolo de un alfabeto arbitrario $A$ a una cadena binaria única, podemos deicr que queda demostrado que cualquier alfabeto de $n$ símbolos con $n > 2$ puede ser representado con el alfabeto binario.

# Problema 7

Sean $x, y \in \Sigma^+$. Demuestra que si la concatenación $x \cdot y$ conmuta, es decir: $x \cdot y = y \cdot x$, entonces existe $w \in \Sigma^*$ y existen $i, j \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x = w^i$ y $y = w^j$. *Hint: Usa inducción sobre la longitud de $x \cdot y$.*

## Respuesta

Para demostrar esto usaremos inducción (como lo sugiere el problema), sera sobre sobre la longitud de la concatenación de $x$ y $y$, esto nos crea la nueva cadena $x \cdot y$ por lo que la longitud será $n = |x \cdot y| = |x| + |y|$

### Caso Base

Como $x$ y $y$ están $\Sigma^+$, no pueden ser la cadena vacía $\epsilon$, entonces la longitud mínima de cada una es 1, como nuestra n es la longitud de $x$ más la longitud de $y$, entonces nuestra $n$ minima es 2. Probemos el caso base.

Sabemos que $|x| = 1$ y $|y| = 1$, esto nos dice que con cadenas con simbolo, para que se cumpla que $x \cdot y = y \cdot x$ con $|x| = 1$ y $|y| = 1$, $x$ debe ser idéntico a $y$, así que podemos definir una cadena $w = x$, como $x = y$, entonces $y = w$ y por definión de potencia de cadenas $x = w^1$ y $y = w^1$. Por lo tanto, se cumple el caso base.

### Hipótesis de Inducción

Usaremos la hipótesis de inducción fuerte. Suponemos que se cumple para cualesquiera dos cadenas $u, v$ tales que su longitud sea menor que la longitud $n$, o sea, si $|u \cdot v| < |x \cdot y|$ y $u \cdot v = v \cdot u$, entonces $u$ y $v$ comparten una raíz común.

### Paso Inductivo

P.D. el caso donde $|x \cdot y| = n$.

Debido a que $i$ y $j$ pueden ser diferentes tenemos dos casos a considerar:

Caso 1: Las cadenas tienen la misma longitud $|x| = |y|$ y,
Caso 2: Las cadenas tienen longitudes distintas.

Veamos primero el caso 1.
Si $x \cdot y = y \cdot x$ y ambas tienen el mismo tamaño, quiere decir que todos los elementos de $x$ ocupan el mismo espacio que los elementos de $y$, y si son de la misma longitud, entonces $x$ debe ser igual a $y$, por lo que podemos elegir una cadena $w = x$, que cumple que $x = w = w^i$ y $y = w = w^j$, con $i = j = 1$.

Se cumple el Caso 1.

Ahora el Caso 2.
Podemos suponer, sin perdida de generalidad, que $x$ es más corta que $y$, es decir $|x| < |y|$

Tenemos que $x \cdot y = y \cdot x$, del lado izquierdo podemos ver que la cadena $x \cdot y$ empieza con la cadena $x$, ahora, del lado derecho de la igualdad la cadena comienza con $y$, pero como $x \cdot y = y \cdot x$, entonces en $y$ debe de estar $x$, como $x$ es más pequeña y ambas inician la secuencia, entonces para que se cumpla la igualdad $x$ debe ser un prefijo de $y$. Gracias a esto podemos escribir a $y$ como la concatenación de $x$ con alguna cadena $z$, como $x$ es más pequeña que $y$, $z$ no puede ser $\epsilon$. Esto es:

$$y = x \cdot z$$

Entonces, sustituimos $y$ en la ecuación original $x \cdot y = y \cdot x$:

$$\begin{aligned} x \cdot (x \cdot z) &= (x \cdot z) \cdot x \\ x \cdot (x \cdot z) &= x \cdot (z \cdot x) \qquad (1) \end{aligned}$$

(1) Por asociatividad de la concatenación y por la ecuacion original.

Podemos observar que ambas cadenas empiezan con la cadena $x$, entonces, si quitamos los simbolos de la primera $x$ de ambas cadenas, llegariamos a la igualdad $x \cdot z = z \cdot x$. Esta igualdad nos indica que las cadenas $x$ y $z$ también conmutan.

Para poder utilizar nuestra hipótesis inductiva, vemos que la longitud de $x \cdot z$ es igual a la de $y$

$$|x \cdot z| = |y| < |x| + |y| = |x \cdot y| = n$$

Como la longitud de $x \cdot z$ es menor que la longitud original $n$, podemos usar la hipótesis inductiva con $x$ y $z$.

Por la hipótesis, existe una cadena $w$ tal que $x$ y $z$ son potencias de ella:

$$x = w^k \quad \text{y} \quad z = w^m$$

Recordamos que $y = xz$. Sustituimos tomando en cuenta esta igualdad

$$y = x \cdot z = w^k \cdot w^m = w^{k+m}$$

Por lo tanto,

$$x = w^k \text{y} y = w^{k+m}$$

Como ambas cadenas están hechas por una cadena en común $w$, repetida $k$ o $k + m$ veces, cumplen que las cadenas conmutan.