Raport 1

Rekurencyjne mnożenie macierzy

Michał Kobiera, Maciej Pięta

1. Opis pseudokodu

Algorytm Binet`a:

- Jeśli rozmiar macierzy wynosi 2x2:
  - Pomnóż macierz standardowym mnożeniem macierzy
  - Zwróć wynik
- W przeciwnym przypadku:
  - Podziel macierze na 4 mniejsze części (A11, A12, A21, A22)
  - Rekurencyjnie oblicz cztery iloczyny macierzy
    C11 = wynik mnożenia A11 i B11, a także wynik mnożenia A12 i B21, dodane do siebie.
    C12 = wynik mnożenia A11 i B12, a także wynik mnożenia A12 i B22, dodane do siebie.
    C21 = wynik mnożenia A21 i B11, a także wynik mnożenia A22 i B21, dodane do siebie.
    C22 = wynik mnożenia A21 i B12, a także wynik mnożenia A22 i B22, dodane do siebie.
  - Zwróć obliczoną macierz C jako wynik

Algorytm Strassena:

- Jeśli rozmiar macierzy wynosi 2x2:
  - Pomnóż macierz standardowym mnożeniem macierzy
  - Zwróć wynik
- W przeciwnym przypadku:
  - Podziel macierze na 4 mniejsze części (A11, A12, A21, A22)
  - Wykonaj siedem rekurencyjnych wywołań, obliczając siedem częściowych wyników:
    P1 = StrassenMlt(A11 + A22, B11 + B22)
    P2 = StrassenMlt(A21 + A22, B11)
    P3 = StrassenMlt(A11, B12 - B22)
    P4 = StrassenMlt(A22, B21 - B11)
    P5 = StrassenMlt(A11 + A12, B22)
    P6 = StrassenMlt(A21 - A11, B11 + B12)
    P7 = StrassenMlt(A12 - A22, B21 + B22)
  - Oblicz cztery podmacierze wynikowe C11, C12, C21 i C22 za pomocą wyrażeń:
    C11 = P1 + P4 - P5 + P7

C12 = P3 + P5

C21 = P2 + P4

C22 = P1 - P2 + P3 + P6

- Zwróć obliczoną macierz C jako wynik

2. Kluczowe fragmenty kodu

Generowanie macierzy

```python
def random_matrix(matrix_size, min_val, max_val):
    """Return matrix with random floats from [min_val, max_val)"""
    return (max_val - min_val) * np.random.random(matrix_size) + min_val
```

0.0s Python

```python
exp = 4
matrix_size = (exp, exp)

min_val = 0.00000001
max_val = 1

A = random_matrix(matrix_size, min_val, max_val)
B = random_matrix(matrix_size, min_val, max_val)
```

0.0s Python

Rysunek 1

Do generowania macierzy została wykorzystana funkcja random.random() z modułu numpy

Funkcja random_matrix() zwraca macierz wypełnioną wartościami z przedziału [min_val, max_val)

```
else:
    matrix_size = len(A)

    A11 = A[:matrix_size//2, :matrix_size//2]
    A12 = A[:matrix_size//2, matrix_size//2:]
    A21 = A[matrix_size//2:, :matrix_size//2]
    A22 = A[matrix_size//2:, matrix_size//2:]

    B11 = B[:matrix_size//2, :matrix_size//2]
    B12 = B[:matrix_size//2, matrix_size//2:]
    B21 = B[matrix_size//2:, :matrix_size//2]
    B22 = B[matrix_size//2:, matrix_size//2:]

    C11 = binet_mlt(A11, B11) + binet_mlt(A12, B21)
    C12 = binet_mlt(A11, B12) + binet_mlt(A12, B22)
    C21 = binet_mlt(A21, B11) + binet_mlt(A22, B21)
    C22 = binet_mlt(A21, B12) + binet_mlt(A22, B22)
    operation_count += matrix_size ** 2

    return np.vstack((np.hstack((C11, C12)), np.hstack((C21, C22))))
```

Rysunek 2

Implementacja algorytmu Binet`a

Macierze z modułu numpy dzielone są na mniejsze bloki

Następnie rekurencyjnie obliczana jest macierz C

Funkcja zwraca wynik „składając” macierz C wykorzystując np.hstack() orac np.vstack()

```
A11 = A[:n//2, :n//2]
B11 = B[:n//2, :n//2]

A12 = A[:n//2, (n//2):]
B12 = B[:n//2, (n//2):]

A21 = A[(n//2): , :n//2]
B21 = B[(n//2): , :n//2]

A22 = A[(n//2): , (n//2):]
B22 = B[(n//2): , (n//2):]

P1 = strassen_mlt((A11 + A22), (B11 + B22))
P2 = strassen_mlt((A21 + A22), B11)
P3 = strassen_mlt(A11, (B12 - B22))
P4 = strassen_mlt(A22, (B21 - B11))
P5 = strassen_mlt((A11 + A12), B22)
P6 = strassen_mlt((A21 - A11), (B11 + B12))
P7 = strassen_mlt((A12 - A22), (B21 + B22))

C11 = (P1 + P4 - P5 + P7)
C12 = (P3 + P5)
C21 = (P2 + P4)
C22 = (P1 - P2 + P3 + P6)

result = np.empty((n, n))
result[:n // 2, :n // 2] = C11
result[:n // 2, n // 2:] = C12
result[n // 2:, :n // 2] = C21
result[n // 2:, n // 2:] = C22

return result
```

Rysunek 3

Implementacja algorytmu Strassena

Analogicznie jak w poprzednim punkcie, macierz dzielona jest na mniejsze bloki

Następnie rekurencyjnie liczone są bloki pomocnicze P według podanych wzorów

Z obliczonych mniejszych bloków składana i zwracana jest macierz wynikowa C.

```
elif len(A) == 2:
    a00 = A[0,0]*B[0,0] + A[0,1]*B[1,0]
    a01 = A[0,0]*B[0,1] + A[0,1]*B[1,1]

    a10 = A[1,0]*B[0,0] + A[1,1]*B[1,0]
    a11 = A[1,0]*B[0,1] + A[1,1]*B[1,1]

    operation_count += 12
    return np.array([[a00,a01],
                     [a10,a11]])
```

Rysunek 4

Obie implementacje w warunku końcowym rekurencji korzystają ze standardowego mnożenia macierzy 2x2

```
for exp in exponents:
    A = random_matrix((exp, exp), min_val, max_val)
    B = random_matrix((exp, exp), min_val, max_val)

    t_start = time()
    std_op = standard_mlt(A, B)[1]
    std_time = time() - t_start

    operation_count = 0
    t_start = time()
    binet_mlt(A, B)
    bin_time = time() - t_start
    bin_op = operation_count

    operation_count = 0
    t_start = time()
    strassen_mlt(A, B)
    str_time = time() - t_start
    str_op = operation_count

    res_times.append((std_time, bin_time, str_time))
    res_operations.append((std_op, bin_op, str_op))
```

Rysunek 5

W celu przetestowania szybkości działania implementacji zostały obliczone szybkość wykonania oraz ilość operacji dla poszczególnych wykładników

AI

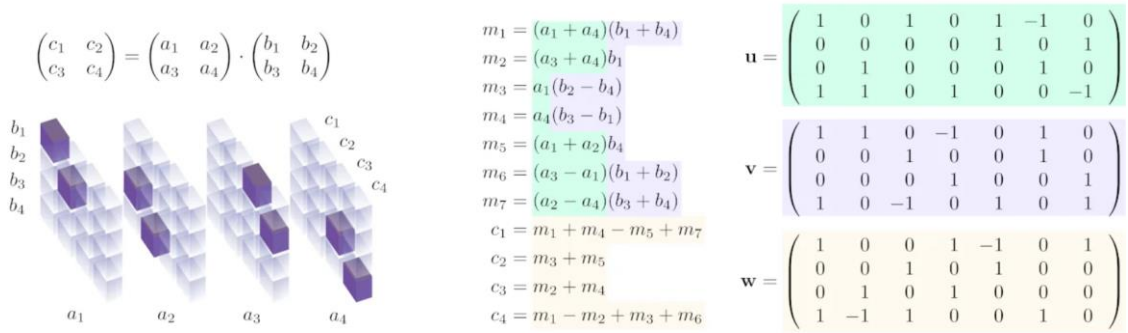
```python
filename = "factorizations_r.npz"
with open(filename, 'rb') as f:
    factorizations = dict(np.load(f, allow_pickle=True))
```

0.3s Python

```python
for key in factorizations:
    u, v, w = factorizations[key]
    rank = u.shape[-1]
    assert rank == v.shape[-1] and rank == w.shape[-1]
    print(f'{key}: rank={u.shape[-1]}')
```

0.0s Python

Rysunek 6



Rysunek 7

```python
for i in range(mul_len):
    A_elements = t1[:, i]
    B_elements = t2[:, i]

    A_factor = np.zeros((n,m), dtype = float)
    for j in range(len(A_elements)):
        if A_elements[j] != 0:
            x,y = np.unravel_index(j, (4,5))
            A_factor += A[x*n:(x+1)*n, y*m: (y+1)*m]*A_elements[j]

            # plus_count += len(A_factor[0])*len(A_factor)
            operation_count += len(A_factor)*len(A_factor[0])

    B_factor = np.zeros((k,k), dtype = float)
    for j in range(len(B_elements)):
        if B_elements[j] != 0:
            x,y = np.unravel_index(j, (5,5))
            B_factor += B[x*k:(x+1)*k, y*k: (y+1)*k]*B_elements[j]

            # plus_count += len(B_factor)**2
            operation_count += len(B_factor)**2

    m_res = ai_mlt(A_factor, B_factor, factor)
    #operation_count += 1
    mtab[i] = m_res
```

Rysunek 8

```
xind = 0
yind = 0
for i in range(t3.shape[0]):
    x,y = np.unravel_index(i, (4,5))
    res_fragment = np.zeros((n,m), dtype = float)
    C_elements = t3[i, :]
    for j in range(len(C_elements)):
        if C_elements[j] != 0:
            res_fragment += mtab[j]*C_elements[j]

            operation_count += len(mtab[i])*len(mtab[j][0])

    if xind >= 4:
        yind+=1
        xind=0

    res_matrix[xind*n:(xind+1)*n, yind*m: (yind+1)*m] = res_fragment

    xind+=1

return res_matrix
```

Rysunek 9

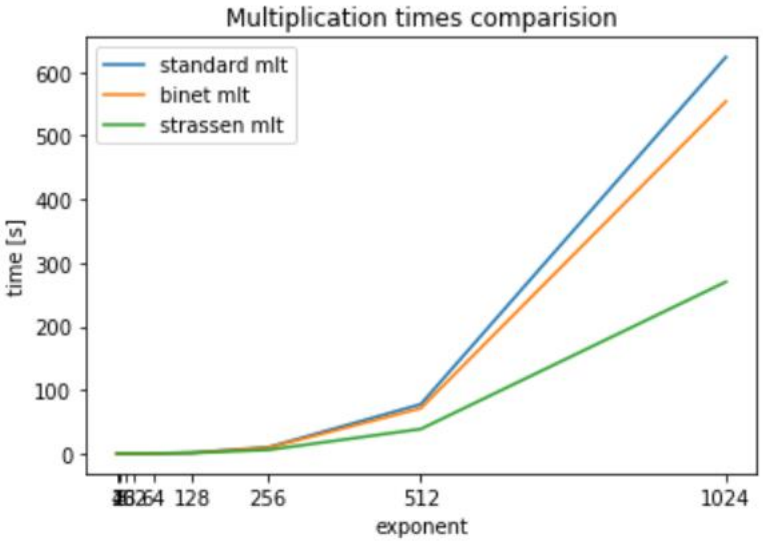
```
for x in range(4):
    for y in range(5):
        mb = r2[x*n:(x+1)*n, y*m: (y+1)*m]
        ma = r1[x*n:(x+1)*n, y*m: (y+1)*m]
        # print(ma)
        # print("------")
        # print(mb)
        print(np.allclose(ma, mb), x, y)
        if not np.allclose(ma, mb):
            print(exists(r1, r2, ma))
        # print("\n\n")
```

✓ 0.0s

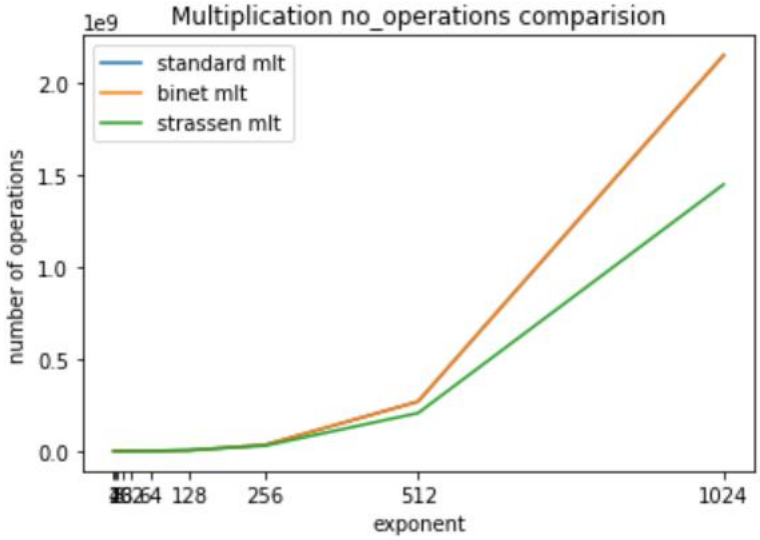
```
True 0 0
True 0 1
True 0 2
True 0 3
True 0 4
True 1 0
True 1 1
True 1 2
True 1 3
True 1 4
True 2 0
True 2 1
True 2 2
True 2 3
True 2 4
True 3 0
True 3 1
True 3 2
```

Rysunek 10

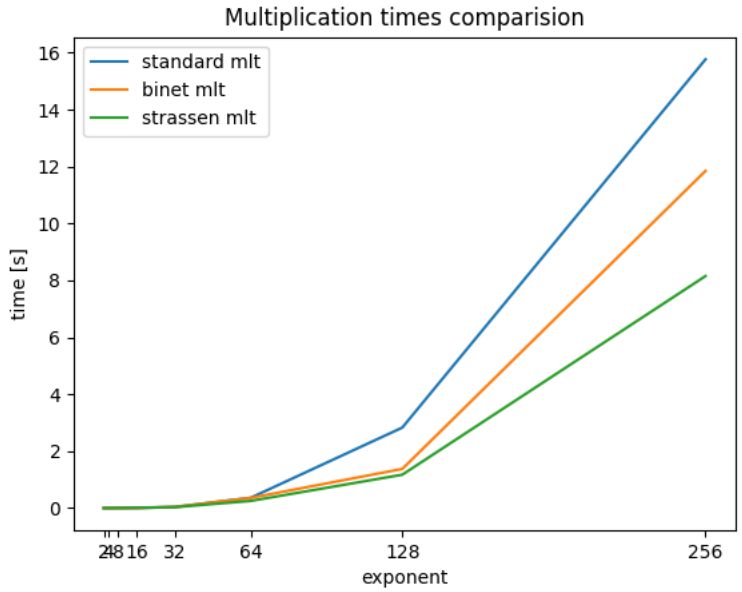
3. Wykresy



Wykres 1

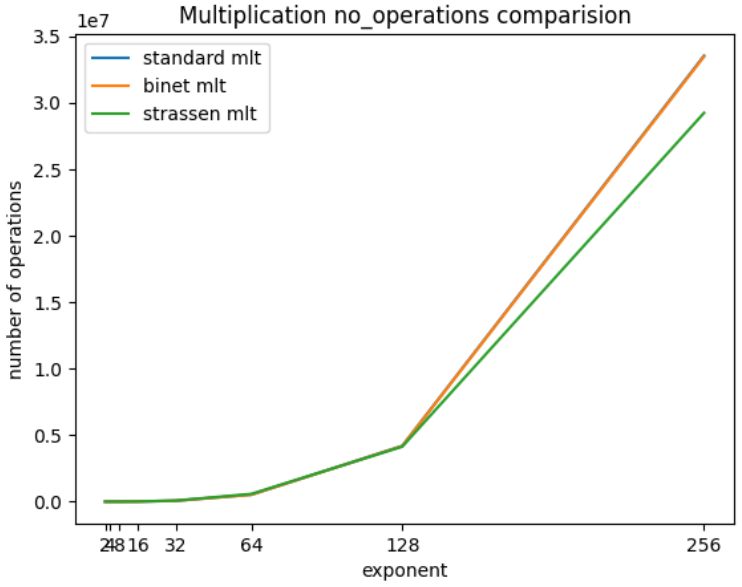


Wykres 2



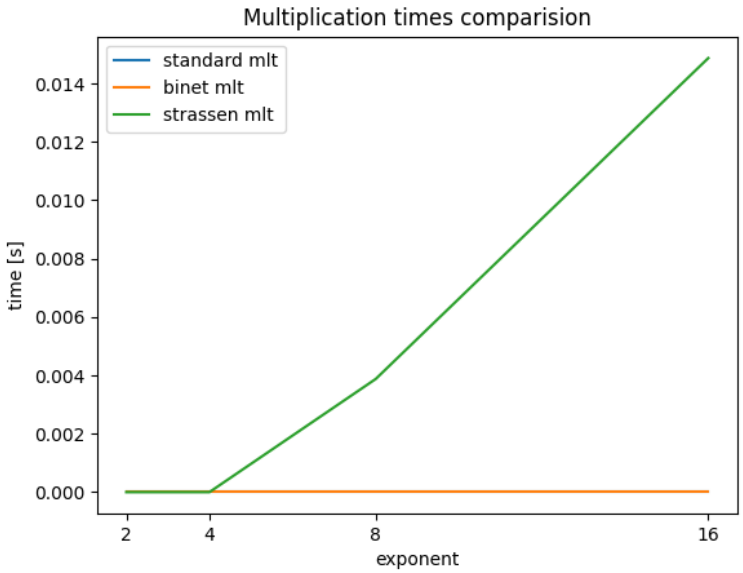
Wykres 3

Wykres ilustrujący porównanie szybkości wykonania poszczególnych algorytmów.
(Linie na wykresie zostały dodane w celu poprawy czytelności obrazu)

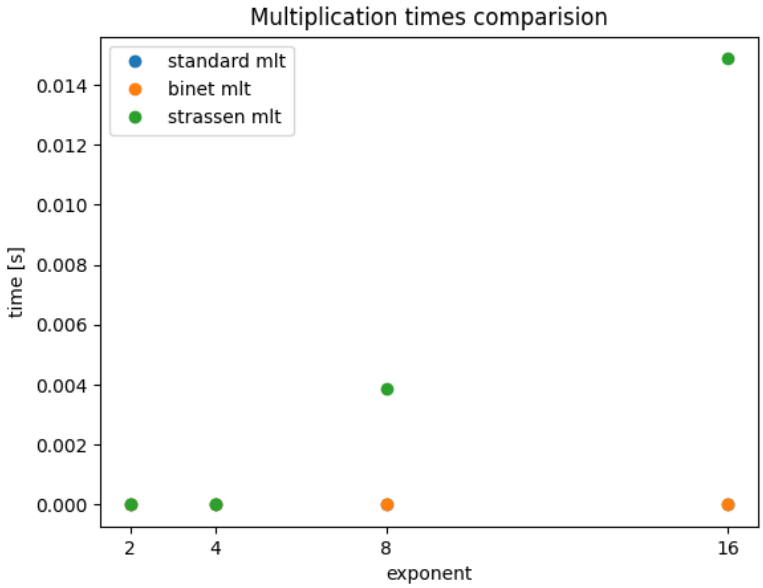


Wykres 4

Wykres ilustrujący ilość wykonanych operacji zmiennoprzecinkowych dla poszczególnych algorytmów. Wyniki dla standardowego mnożenia macierzy i mnożenia metodą Binte`a są bardzo podobne i nie widać różnicy liczbie wykonanych operacji dla takiej skali na wykresie.
(Linie na wykresie zostały dodane w celu poprawy czytelności obrazu)

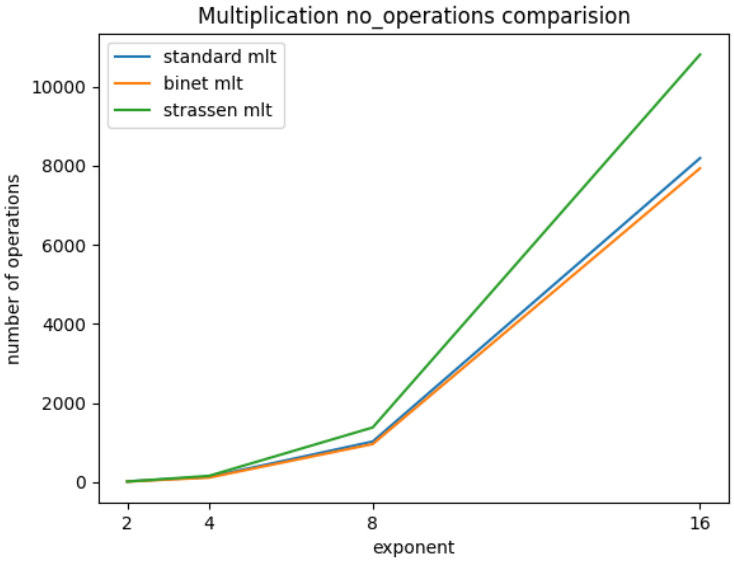


Wykres 5

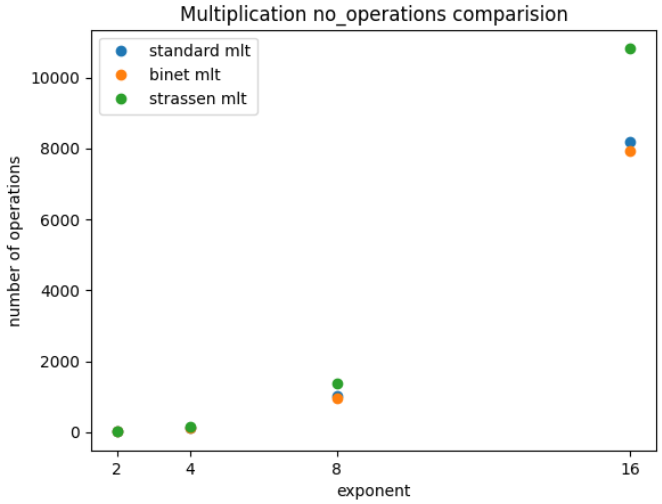


Wykres 6

Wykresy ilustrujące szybkość działania poszczególnych algorytmów przy niskich wartościach wykładnika *(Na drugim wykresie poglądowo zostały dodane linie łączące punkty)*



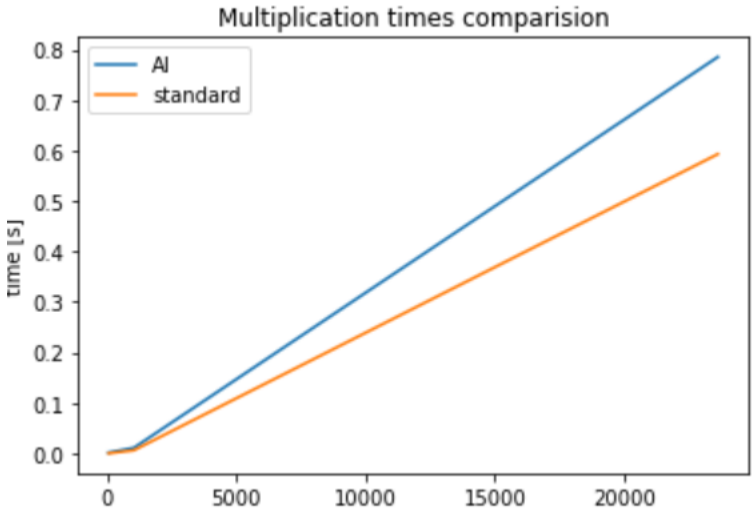
Wykres 7



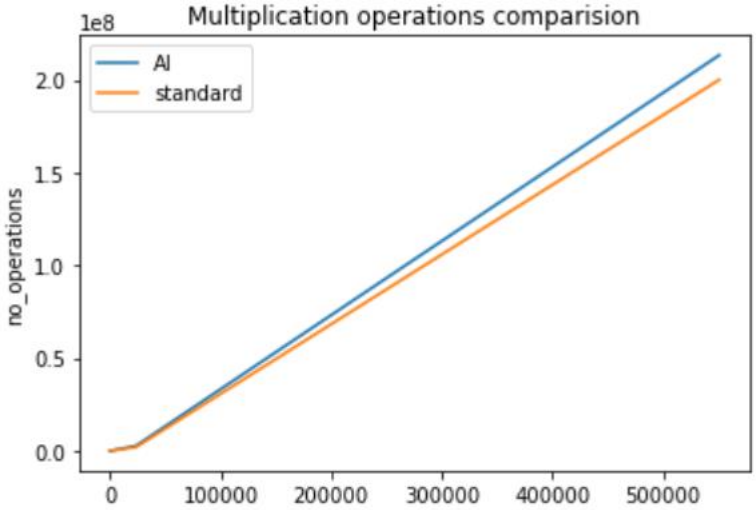
Wykres 8

Wykresy ilustrujące ilość wykonanych operacji zmiennoprzecinkowych poszczególnych algorytmów przy niskich wartościach wykładnika

(Na drugim wykresie poglądowo zostały dodane linie łączące punkty)



Wykres 9



Wykres 10

Wykresy ilustrujące porównanie czasów działania oraz ilości wykonanych operacji algorytmu AI ze standardowym mnożeniem macierzy.

4. Ocena złożoności obliczeniowej

Złożoność

In [119…
```
from scipy.optimize import curve_fit
```

In [120…
```
def func(x, a, b):
    return a * np.power(x,b)
```

In [121…
```
print(res_operations)
y_data = np.array(res_operations)
print(y_data)
```

```
[(16, 12, 12), (128, 112, 156), (1024, 960, 1380), (8192, 7936, 10812), (65536, 64512, 80292), (524288, 520192, 580476), (4
194304, 4177920, 4137060), (33554432, 33488896, 29254332), (268435456, 268173312, 205959972), (2147483648, 2146435072, 1446
438396)]
[[        16         12         12]
 [       128        112        156]
 [      1024        960       1380]
 [      8192       7936      10812]
 [     65536      64512      80292]
 [    524288     520192     580476]
 [   4194304    4177920    4137060]
 [  33554432   33488896   29254332]
 [ 268435456  268173312  205959972]
 [2147483648 2146435072 1446438396]]
```

In [124…
```
print(params_std)
```

```
[2. 3.]
```

In [125…
```
params_binet, cov_binet = curve_fit(func, x_da
```

In [126…
```
print(params_binet)
```

```
[1.98896337 3.00072789]
```

In [127…
```
params_strassen, cov_strassen = curve_fit(func
```

In [128…
```
print(params_strassen)
```

```
[4.95078383 2.81222024]
```

5. Sprawdzenie poprawności

Do sprawdzenia poprawności wykorzystaliśmy moduł numpy.

```
operation_count = 0
res = binet_mlt(A, B)

print(f"Matrix size: 2**{exp}")
print("Is correct?:", np.allclose(res, A@B))
print("Number of operations:", operation_count)
print("Number of operations (Standard mlt):", standard_mlt(A, B)[1])
# print("Result:", res, sep='\n')
```

```
Matrix size: 2**6
Is correct?: True
Number of operations: 520192
Number of operations (Standard mlt): 524288
```