





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Discrétisation, algorithmes et exemples</b>	<b>3</b>
1.1	Représentation discrète . . . . .	3
1.1.1	Maillage triangulaire . . . . .	4
1.1.2	Champ de croix . . . . .	4
1.1.3	Points singuliers, indice et ligne de champs . . . . .	5
1.1.4	Lien entre $\bar{u}$ et $\bar{u}_h$ . . . . .	7
1.2	Partitionnement de $\partial\Omega_h$ . . . . .	8
1.2.1	Recherche de points singuliers . . . . .	10
1.2.2	Construction des séparatrices . . . . .	11
1.2.3	Assemblage des partitions . . . . .	13
1.2.4	Génération du maillage quadrilatéral . . . . .	14
1.3	Opération d'alignement . . . . .	15
1.4	Analyse de convergence . . . . .	15
1.5	Génération de champs de croix . . . . .	16
	<b>Références</b>	<b>21</b>



# Chapitre 1

## Discrétisation, algorithmes et exemples

### Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Représentation discrète</b>	<b>3</b>
1.1.1	Maillage triangulaire	4
1.1.2	Champ de croix	4
1.1.3	Points singuliers, indice et ligne de champs	5
1.1.4	Lien entre $\bar{u}$ et $\bar{u}_h$	7
<b>1.2</b>	<b>Partitionnement de <math>\partial\Omega_h</math></b>	<b>8</b>
1.2.1	Recherche de points singuliers	10
1.2.2	Construction des séparatrices	11
1.2.3	Assemblage des partitions	13
1.2.4	Génération du maillage quadrilatéral	14
<b>1.3</b>	<b>Opération d'alignement</b>	<b>15</b>
<b>1.4</b>	<b>Analyse de convergence</b>	<b>15</b>
<b>1.5</b>	<b>Génération de champs de croix</b>	<b>16</b>

Dans le précédent chapitre, la méthode a été élaborée dans un cadre continu, supposant un accès direct au domaine de calcul et à son champ de croix correspondant. Toutefois, dans la réalité, cette accessibilité directe n'est pas toujours envisageable. Ainsi, pour rendre cette méthode plus praticable, nous abordons dans ce chapitre une approche discrète, adaptant les différents algorithmes pour opérer sur des maillages triangulaires.

Étant donné un tel maillage représentant un domaine donné, le but de ce chapitre est de démontrer qu'à partir d'un champ de croix donné, il est possible de construire sur le maillage triangulaire un maillage quadrilatéral, et d'expliquer dans quelle mesure ce maillage représente fidèlement le domaine initial.

### 1.1 Représentation discrète

Soit  $\Omega$  un domaine compact et connexe de  $\mathbb{R}^2$  dont le bord  $\partial\Omega$  est lisse par morceau. On désigne par  $\bar{u}$  un champ de croix presque- $\mathcal{C}^1$  défini sur  $\Omega$ .

### 1.1.1 Maillage triangulaire

Considérons maintenant un maillage triangulaire  $\Omega_h$  de  $\Omega$ . Par là, nous entendons que  $\Omega_h$  est une surface polygonale compacte de  $\mathbb{R}^2$  représentant une triangulation conforme de  $\Omega$ . Autrement dit,  $\Omega_h$  formé par l'union de  $N_t$  triangles fermés non vide :  $\Omega_h = \cup_{k=1}^{N_t} T_k$  tel que toute intersection entre deux triangles est soit vide, soit un sommet, soit une arête. De plus, tous les sommets de  $\Omega_h$  appartiennent à  $\Omega$ . Nous noterons  $\mathcal{T}_h$  l'ensemble des triangles formant  $\Omega_h$ , l'indice  $h$  faisant référence à la finesse du maillage, que l'on définit par le diamètre maximal des triangles constituant  $\Omega_h$ .

$$h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(T)$$

Le diamètre d'un triangle est la distance maximale entre deux points du triangle. Nous notons de plus  $\mathcal{A}_h$  et  $\mathcal{S}_h$  les ensembles respectivement des sommets et des arêtes de  $\Omega_h$ . Pour tout  $p \in \Omega_h$ , Nous désignons par  $T_p$  la partie du plan formé par l'ensemble des triangles de  $\Omega_h$  contenant  $p$  :  $T_p = \cup_{\substack{T \in \mathcal{T}_h \\ p \in T}} T$ .

### 1.1.2 Champ de croix

Nous cherchons maintenant à construire une représentation du champ de croix  $\bar{u}$  sur le maillage triangulaire  $\Omega_h$ . Pour se faire, nous commençons par définir la notion d'angle signé entre deux croix.

**Définition 1.1.** Soient deux croix  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$  non nulles. L'angle signé entre  $\mathbf{c}_1$  et  $\mathbf{c}_2$  noté  $\delta\theta(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$  est l'unique élément de l'ensemble :

$$\{\delta\theta(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)\} := \left\{ \theta_{\mathbf{c}_2} - \theta_{\mathbf{c}_1} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cap \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[.$$

Nous dirons que  $\delta\theta(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$  n'est pas défini lorsque  $|\theta_{\mathbf{c}_2} - \theta_{\mathbf{c}_1}| = \pi/4$ . Cette fonction mesure la variation angulaire entre  $\mathbf{c}_1$  et  $\mathbf{c}_2$  de  $\mathbf{c}_1$  vers  $\mathbf{c}_2$ . Autrement dit, on a :

$$\theta_{\mathbf{c}_2} = \theta_{\mathbf{c}_1} + \delta\theta(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2).$$

Dans toute la suite, nous imposons les contraintes suivantes sur le maillage  $\Omega_h$  :

- pour chaque arête  $a \in \mathcal{A}_h$  délimitée par les sommets  $s_1$  et  $s_2$ , il est requis que  $\bar{u}(s_1) \neq 0$  ou  $\bar{u}(s_2) \neq 0$ .
- De plus, dans le cas où  $\bar{u}(s_1) \neq 0$  et  $\bar{u}(s_2) \neq 0$ , la quantité  $\delta\theta(\bar{u}(s_1), \bar{u}(s_2))$  doit être définie.

Dans la pratique, il sera donc impératif d'affiner ou de modifier localement un maillage qui ne satisfait pas ces contraintes. La pertinence de ces contraintes prend tout son sens par la suite, avec l'approche de construction que nous proposons pour représenter  $\bar{u}$  sur  $\Omega_h$ . Nous introduisons à présent le concept de triangle singulier avec la définition suivante :

**Définition 1.2.** Un triangle  $T$  de  $\mathcal{T}_h$  et de sommets  $s_1, s_2$  et  $s_3$  est dit singulier si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- i.) il existe  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$  tel que  $\bar{u}(s_i) = 0$ ,
- ii.)  $\sum_{i=1}^3 \delta\theta(\bar{u}(s_i), \bar{u}(s_{i+1})) \neq 0$ .

Avec ces concepts en main, nous décrivons à présent la représentation du champ de croix  $\bar{u}$  sur  $\Omega_h$  par un champ de croix  $\bar{u}_h$ . Ce dernier est défini pour tout  $p \in \Omega_h$  par :

- si  $p \in \mathcal{S}_h$ , alors  $\bar{u}_h(p) = \bar{u}(p)$ ,
- si  $p \in a$ , où  $a \in \mathcal{A}_h$  est une arête de sommets  $s_1$  et  $s_2$ , alors on a :

$$\begin{cases} \bar{u}_h(p) = \left\{ \mathbf{R} \left( \theta_p + m \frac{\pi}{2} \right) (1, 0)^t, \ m \in \mathbb{Z} \right\}, \\ \theta_p = \theta_{\bar{u}_h}(s_1) + \frac{\|\overrightarrow{s_1 p}\|}{\|\overrightarrow{s_1 s_2}\|} \delta\theta(\bar{u}_h(s_1), \bar{u}_h(s_2)). \end{cases}$$

- si  $p \in T$  où  $T \in \mathcal{T}_h$  est un triangle non-singulier, alors on pose :

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_{\bar{u}_h}(s_1) \\ \theta_2 = \theta_1 + \delta\theta(\bar{u}_h(s_1), \bar{u}_h(s_2)) \\ \theta_3 = \theta_2 + \delta\theta(\bar{u}_h(s_2), \bar{u}_h(s_3)) \end{cases}$$

où  $s_1, s_2$  et  $s_3$  sont les sommets du triangle  $T$ . La croix  $\bar{u}_h(p)$  est alors donnée par :

$$\begin{cases} \bar{u}_h(p) = \left\{ \mathbf{R} \left( \theta_p + m \frac{\pi}{2} \right) (1, 0)^t, \ m \in \mathbb{Z} \right\}, \\ \theta_p = \sum_{i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket} \lambda_i \theta_i, \end{cases}$$

avec  $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket}$  les coordonnées barycentriques de  $p$  dans le triangle  $T$ . Autrement dit, ils vérifient  $p = \sum_{i=1}^3 \lambda_i s_i$  et  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$ .

- si  $p \in T$  avec  $T \in \mathcal{T}_h$  un triangle singulier et  $p$  barycentre de  $T$  (c'est à dire  $p = 1/3(s_1 + s_2 + s_3)$  avec  $s_1, s_2$  et  $s_3$  les sommets de  $T$ ) alors on pose  $\bar{u}_h(p) = 0$ .
- sinon  $p$  appartient à un triangle singulier  $T$  tel qu'il existe  $q \in T$  avec  $\bar{u}_h(q) = 0$ . La croix  $\bar{u}_h(p)$  est alors donnée par :

$$\begin{cases} \bar{u}_h(p) = \bar{u}_h(\tilde{p}), \\ \{\tilde{p}\} = [qp) \cap \partial T_q. \end{cases}$$

Noter que l'ensemble  $[qp) \cap \partial T_q$  est bien réduit à un singleton puisque  $T_q$  est une réunion de simplexes donc convexe.

**Remarque 1.1.** *La variation angulaire du champ de croix le long des arêtes du maillage constitue le fondement de la représentation mentionnée précédemment. Il est donc essentiel de pouvoir définir les croix en chaque point le long de chaque arête, d'où la pertinence des contraintes imposées au maillage précédemment évoquées.*

### 1.1.3 Points singuliers, indice et ligne de champs

L'ensemble  $\mathcal{S}_{\bar{u}_h}$ , défini comme l'ensemble des points singuliers de  $\bar{u}_h$ , est constitué des points  $p \in \Omega_h$  tels que  $\bar{u}_h(p) = 0$ .

**Lemme 1.1.** *Les points singuliers de  $\bar{u}_h$  sont isolés.*

*Preuve.* Soit  $q$  un point singulier de  $\bar{u}_h$ . Le point  $q$  est isolé puisque par construction, on a  $T_q \cap \mathcal{S}_{\bar{u}_h} = \{q\}$ . En effet, pour tout  $p \in T_q \setminus \{q\}$  on a  $\bar{u}_h(p) = \bar{u}_h(\tilde{p})$  où  $\tilde{p}$  est le point d'intersection entre la demi-droite  $[qp]$  et le bord  $\partial T_q$  de  $F_q$ . Il existe donc une arête  $a \in \mathcal{A}_h$  vérifiant  $a \subset \partial T_q$  et contenant le point  $\tilde{p}$ . Par ailleurs pour tout  $r \in a$ , on a  $\bar{u}_h(r) \neq 0$  par construction puisque  $\bar{u}_h(s_1) \neq 0$  et  $\bar{u}_h(s_2) \neq 0$  (avec  $s_1$  et  $s_2$  les sommets de  $a$ ). Il vient alors que  $\bar{u}_h(\tilde{p}) \neq 0$  et par conséquent  $p \notin \mathcal{S}_{\bar{u}_h}$ . Autrement dit,  $T_q \cap \mathcal{S}_{\bar{u}_h} = \{q\}$ . ■

Examinons à présent l'indice des points singuliers de  $\bar{u}_h$ . Soit  $p$  un point singulier de  $\bar{u}_h$  avec  $p \in \Omega_h \setminus \partial\Omega_h$ . L'indice de  $p$  est donné par :

$$id_{\bar{u}_h}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 d\theta_{\bar{u}_h}^\gamma = \frac{1}{2\pi} \sum_{\gamma \in \{\gamma \cap T, T \in \mathcal{T}_h\}} \int_0^1 d\theta_{\bar{u}_h}^{\gamma_T}.$$

où  $\gamma$  est un chemin fermé paramétré sur  $[0, 1]$  englobant  $p$  et ne contenant aucun autre point singulier de  $\bar{u}_h$ . En pratique, nous calculerons l'indice d'un point  $p$  en utilisant une paramétrisation  $\gamma$  du bord  $\partial F_p$  de  $F_p$ . De ce fait, l'indice du point  $p$  s'écrit :

$$id_{\bar{u}_h}(p) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_s} (\theta_{\bar{u}_h}^\gamma(s_{i+1}) - \theta_{\bar{u}_h}^\gamma(s_i)) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_s} \delta\theta(\bar{u}_h(s_i), \bar{u}_h(s_{i+1})), \quad (1.1)$$

où  $(s_i)_{i \in \llbracket 1, n_s \rrbracket} = \mathcal{S}_h \cap \partial T_p$  désigne l'ensemble des sommets des triangles formant  $T_p$ , privés du point  $p$ , et numérotés dans le sens positif avec  $s_{n_s+1} := s_1$ . Si  $p \in \partial\Omega_h$  alors l'indice de  $p$  est donné par :

$$id_{\bar{u}_h}(p) = \frac{1}{2\pi} \left[ \pi - \hat{p} + \sum_{i=1}^{n_s} (\theta_{\bar{u}_h}^\gamma(s_{i+1}) - \theta_{\bar{u}_h}^\gamma(s_i)) \right] = \frac{1}{2\pi} \left[ \pi - \hat{p} + \sum_{i=1}^{n_s} (\theta_{\bar{u}_h}^\gamma(s_{i+1}) - \theta_{\bar{u}_h}^\gamma(s_i)) \right], \quad (1.2)$$

où  $\gamma$  dans ce cas est la paramétrisation de  $\partial T_p \setminus \partial\Omega_h$  (c'est à dire la partie de  $\partial T_p$  se trouvant à l'intérieur de  $\Omega_h$ ) et  $(s_i)_{i \in \llbracket 1, n_s \rrbracket}$  l'ensemble des sommets de  $\Omega_h$  appartenant à  $\partial T_p \setminus \partial\Omega_h$ .

**Proposition 1.1.** *Pour tout  $p \in \Omega_h \setminus \partial\Omega_h$ , on a  $4id_{\bar{u}_h}(p) \in \llbracket -n_a/4, n_a/4 \rrbracket$  où  $n_a$  est le nombre d'arête inclut dans  $\partial T_p$ .*

*Preuve.* Soit  $p \in \Omega_h$ . On sait que :

$$id_{\bar{u}_h}(p) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_s} \delta\theta(\bar{u}_h(s_i), \bar{u}_h(s_{i+1})).$$

Or pour tout  $i \in \llbracket 1, n_s \rrbracket$ , on a  $\delta\theta(\bar{u}_h(s_i), \bar{u}_h(s_{i+1})) \in ]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ . Autrement dit,

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_s} \delta\theta(\bar{u}_h(s_i), \bar{u}_h(s_{i+1})) \in \left] -\frac{n_s}{8}, \frac{n_s}{8} \right[.$$

Or on sait que  $4id_{\bar{u}_h} \in \mathbb{Z}$  et  $n_s = n_a$ . Par conséquent,

$$4id_{\bar{u}_h}(p) \in \left] -\frac{n_a}{4}, \frac{n_a}{4} \right[.$$

■



Un corollaire direct de la proposition précédente est que si un point singulier est localiser à l'intérieur d'un triangle alors les seuls indices possible pour ce point sont  $-1/4, 0$  et  $1/4$ .

Nous abordons à présent la représentation des lignes de champs de  $\bar{u}_h$  dans  $\Omega_h$ . Rappelons que étant donné un point  $p_0 \in \Omega_h$  et un vecteur  $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^2$ , la ligne de champ  $SL_{\bar{u}_h}(p_0, \vec{u}_0)$  d'origine  $p_0$  est la courbe  $S$  telle que :

1. il existe  $\pi_{\bar{u}_h}^S : \Omega_h \longrightarrow \mathbb{R}^2$  une application telle que  $\pi_{\bar{u}_h}^S(p_0) = \vec{u}_0$  et pour tout  $p \in ImS$  il existe un voisinage  $V_p$  de  $p$  tel que :

$$\pi_{\bar{u}_h}^S \in \mathcal{C}^1(V_p) \text{ et } \forall q \in V_p, \pi_{\bar{u}_h}^S(q) \in \bar{u}_h(q), \quad (1.3)$$

2.  $S$  est une solution maximale dans  $\Omega$  de l'équation différentielle

$$\frac{dS(t)}{dt} = \pi_{\bar{u}_h}^S(S(t)), t \in \mathbb{R} \text{ et } S(0) = p_0. \quad (1.4)$$

Pour représenter cette ligne de champ, nous procédons à la construction d'une approximation  $SL_{\bar{u}_h}^h(p_0, \vec{u}_0)$  de  $SL_{\bar{u}_h}(p_0, \vec{u}_0)$  sur  $\Omega_h$  sous la forme d'une succession de segments. Le premier segment est représenté par  $[p_0 p_1]$  où  $p_1$  est le point d'intersection entre  $\partial T_{p_0}$  et la demi-droite d'origine  $p_0$  et de vecteur directeur  $\vec{u}_0$ . Ensuite, pour tout  $i \geq 1$ , on construit le segment  $[p_i p_{i+1}]$  en cherchant le point  $p_{i+1}$  comme le point d'intersection entre  $\partial T_{p_i}$  et la demi-droite d'origine  $p_i$  et dirigée par le vecteur

$$\vec{u}_i = \mathbf{P}(\bar{u}_h(p_i), \overrightarrow{p_{i-1}p_i}) + \mathbf{P}(\bar{u}_h(p'_{i+1}), \overrightarrow{p_{i-1}p_i}).$$

Dans cette formule,  $p'_{i+1}$  est le point d'intersection entre  $\partial T_{p_i}$  et la demi-droite d'origine  $p_i$  et dirigé par le vecteur  $\mathbf{P}(\bar{u}_h(p_i), \overrightarrow{p_{i-1}p_i})$  et pour tout  $(\mathbf{c}, d) \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{P}(\mathbf{c}, d)$  désigne le vecteur  $\mathbf{c}$  qui s'aligne le mieux avec la direction  $d$ . Autrement dit, il s'agit de l'unique élément de l'ensemble

$$\{\mathbf{P}(\mathbf{c}, d)\} = \underset{c_k \in \mathbf{c}, k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}{\operatorname{argmin}} |c_k \cdot d| \|d\|^{-1} - 1|.$$

Une illustration de ce processus est donné sur la figure 1.2. Une alternative plus pratique et plus rapide pour la construction des segments  $[p_i p_{i+1}]$  pour  $i \geq 1$  consiste à exploiter la Soit  $S \cap T$

#### 1.1.4 Lien entre $\bar{u}$ et $\bar{u}_h$

**Lemme 1.2.**  $\mathcal{S}_{\bar{u}} = \mathcal{S}_{\bar{u}_h}$

Lorsque  $h$  tend vers 0,  $u_h$  tend vers  $u$   
z

Illustrer les singularité se démultipliant en coloriant juste les triangles et en disant qu'on a pas besoin de la localisation spécifique.

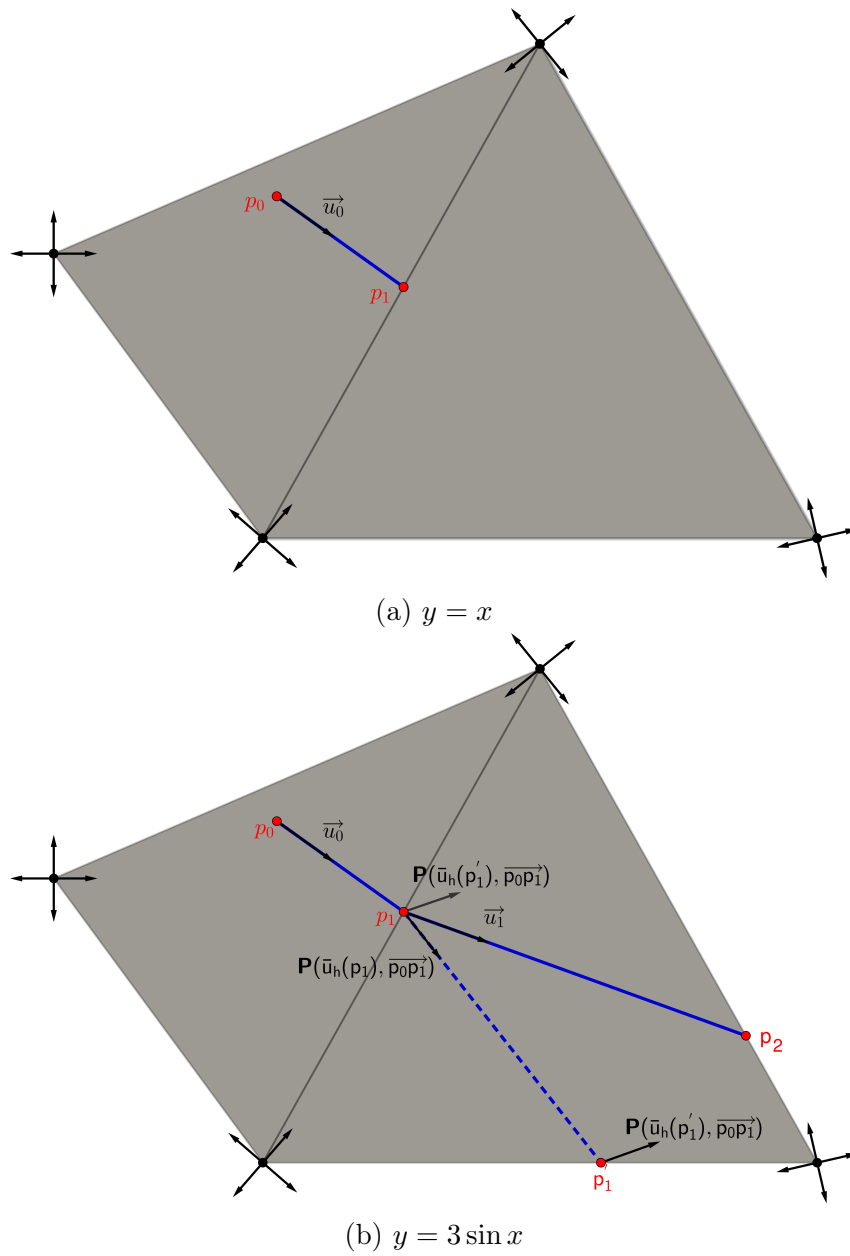


FIGURE 1.1 – Three simple graphs

## 1.2 Partitionnement de $\partial\Omega_h$

L'adaptation de l'algorithme de partitionnement ?? au maillage  $\Omega_h$  est donné par :

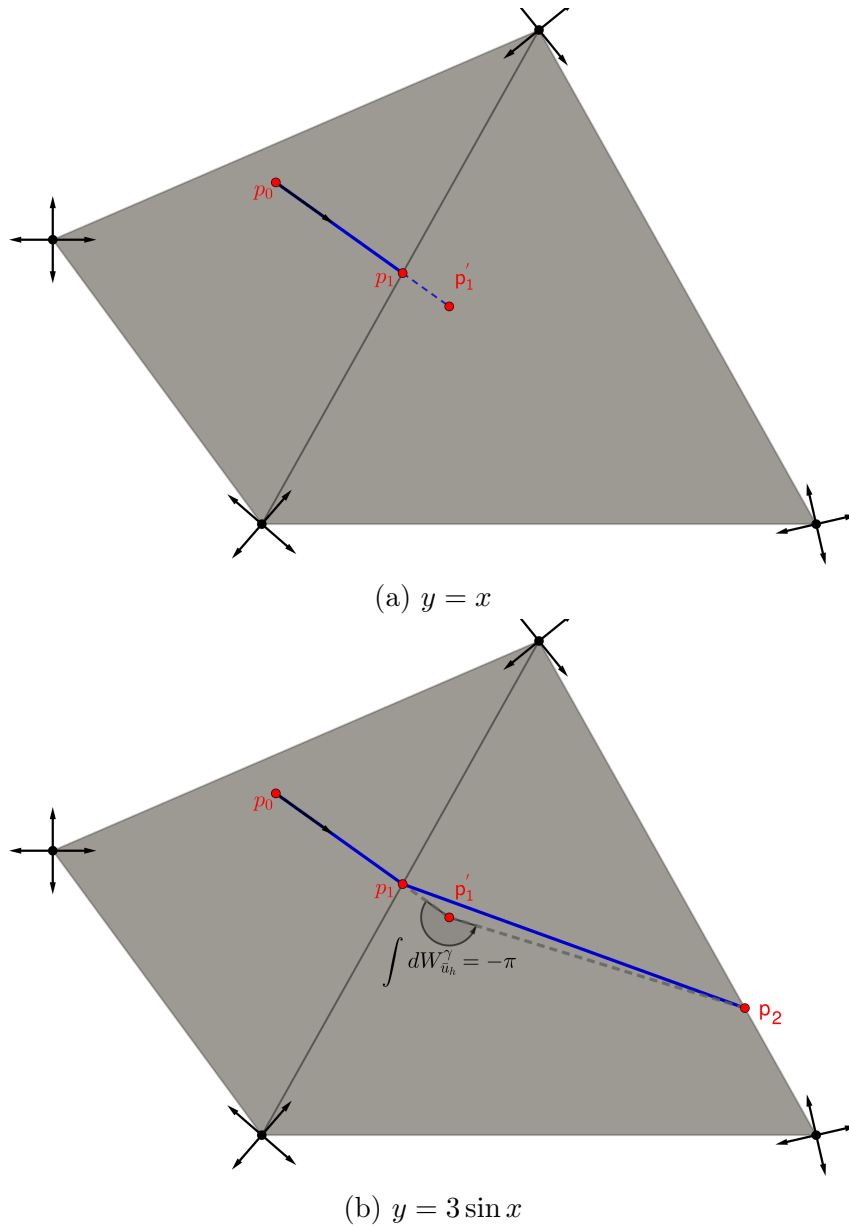


FIGURE 1.2 – Three simple graphs

**Entrée:**  $\Omega_h$  un maillage triangulaire, champ de croix  $\bar{u}_h$  linéaire par morceau sur chaque triangle de  $\Omega_h$ .

**Sortie :** Partition de  $\Omega_h$  en ensembles de régions.

- 1.) Identification des points singuliers du champ de croix,
- 2.) Détermination du nombre de séparatrices pour chaque point singulier,
- 3.) Intégration des séparatrices,
- 4.) Identification des régions.

**Algorithm 1:** Algorithme de partitionnement  $\Omega_h$

On considère que l'algorithme a convergé si les séparatrices ne convergent pas vers un cycle limite. Examinons maintenant en détail certaines étapes de cet algorithme :

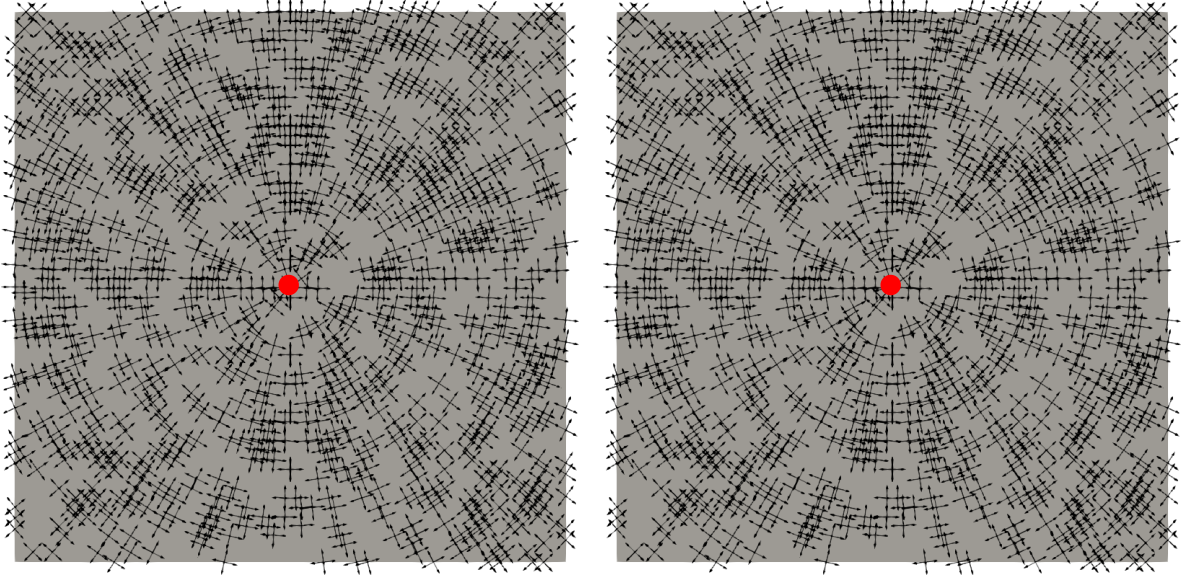


FIGURE 1.3 – Gauche : Illustration des séparatrices émanant de points singuliers d'indice  $-1/4$  (à gauche) et d'indice  $1/4$  (à droite).

### 1.2.1 Recherche de points singuliers

Par construction, les points singuliers du champ de croix  $\bar{u}_h$  se situent soit aux sommets du maillage  $\Omega_h$ , soit à l'intérieur des triangles qui le constituent. En pratique, la recherche de ces points peut être effectuée localement sur chaque triangle. Cela implique de tester le caractère singulier ou non de chaque triangle (voir la définition 1.2). Considérons  $T \in \mathcal{T}_h$  comme un triangle singulier de  $\Omega_h$ . Par conception, il contient nécessairement un point singulier. Nous distinguons alors deux cas :

- le point singulier correspond à l'un des sommets du triangle  $T$ .
- sinon, le point singulier se trouve à l'intérieur du triangle. Conformément à notre représentation de  $\bar{u}_h$ , dans ce cas précis, il s'agit du barycentre du triangle. Cependant rien empêche de choisir un autre point à l'intérieur du triangle tout en modifiant le calcul des valeurs du champ dans le triangle. Remarquons que tous les points singuliers de bord sont sur des sommets.

Une fois la localisation des points singulier identifié, on peut facilement calculé leur index grâce aux formules 1.1 ou 1.2 en fonction de leur localisation.

**Remarque 1.2.** *Grace à la proposition on peut choisir l'emplacement du point singulier dans  $T_p$ . en l'occurrence, pour ne pas avoir à en faire la recherche on peut choisir le barycentre du triangle.*

On peut rassembler plusieurs singularité voisine en une.. permet d'éviter les problématiques de point trop proche par exemple. Illustrer tout ça

## 1.2.2 Construction des séparatrices

Une fois les points singuliers de  $\bar{u}_h$  identifiés, nous procédons à la création des séparatrices sur  $\Omega_h$ . Cette étape comprend le calcul du nombre de séparatrices à assigner à chaque point singulier, la détermination des directions initiales pour chaque séparatrice, ainsi que l'intégration de ces séparatrices.

**Nombre de séparatrices :** Si  $p$  est un point singulier de  $\bar{u}_h$ , alors le nombre de séparatrices  $N_s(p)$  associées à  $p$  est donné par :

$$N_s(p) = \begin{cases} 4 - 4id_{\bar{u}_h}(p) & \text{si } p \in \Omega_h \setminus \partial\Omega_h \\ 2 - 4id_{\bar{u}_h}(p) & \text{si } p \in \partial\Omega_h \end{cases} \quad (1.5)$$

**Directions initiales et intégration :** Soit  $p_0 \in \mathcal{S}_{\bar{u}_h} \setminus \partial\Omega_h$ . Étant donné que  $\bar{u}_h$  s'annule en  $p_0$ , notre première étape consiste à déterminer les orientations initiales des séparatrices. Les directions initiales des séparatrices émanant de  $p_0$  sont données par les vecteurs  $\overrightarrow{p_0 q_i}$ ,  $i \in \llbracket 1, N_s(p_0) \rrbracket$  où la suite de points  $(q_i)_{i \in \llbracket 1, N_s(p_0) \rrbracket} \subset \partial T_{p_0}$  est construite de la manière suivante (voir figure 1.4) :

- le premier point  $q_1$  est tout point de  $\partial T_{p_0}$  tel que  $\overrightarrow{p_0 q_1} \cdot \|\overrightarrow{p_0 q_1}\|^{-1} \in \bar{u}_h(q_1)$
- soit  $t_1 \in [0, 1]$  tel que  $\gamma(t_1) = q_1$ . Pour tout  $i \in \llbracket 2, N_s(p_0) \rrbracket$ , on a :

$$q_i = \gamma(t_i) \text{ avec } \int_{t_{i-1}}^{t_i} dW_{p_0}^\gamma = -\frac{\pi}{2},$$

où  $\gamma$  est une paramétrisation de  $\partial T_{p_0}$  sur  $[0, 1]$  dans le sens positif et la fonction  $W_{p_0}^\gamma$  est donné pour tout  $t \in [0, 1]$  par :

$$W_{p_0}^\gamma(t) = \theta_{\bar{u}_h}^\gamma(t) - \arg \overrightarrow{p_0 \gamma(t)}.$$

Si  $p_0 \in \mathcal{S}_{\bar{u}_h} \cap \partial\Omega_h$  alors

15 min

On veut etre mesh tri aussi grossier quer possible donc mailler le vrai domaine et non le mesh tri

**Intégration des séparatrices :** direction de sortie mieux chez moi que chez les autres

**Traversé d'un triangle singulier :** lors de l'intégration d'une séparatrice, il peut arrivé que. lorsque le segment  $[p_i p_{i+1}]$  traverse un triangle singulier, l'angle du champ varie beaucoup. On remplace alors le segment en question par une succecion d'autre segment calculé en raffinant localement le maillage dans le triangle singulier.

**Fusion de séparatrices :** De manière similaire à ce qui est réalisé dans [Marcon et al., 2019], les séparatrices du champ de croix sont construites simultanément en incrémentant chacune d'elles progressivement, et la rencontre entre deux séparatrices est anticipée en comparant à chaque incrément, d'une part, la distance entre les derniers points calculés et, d'autre part, les directions des derniers segments construits. En

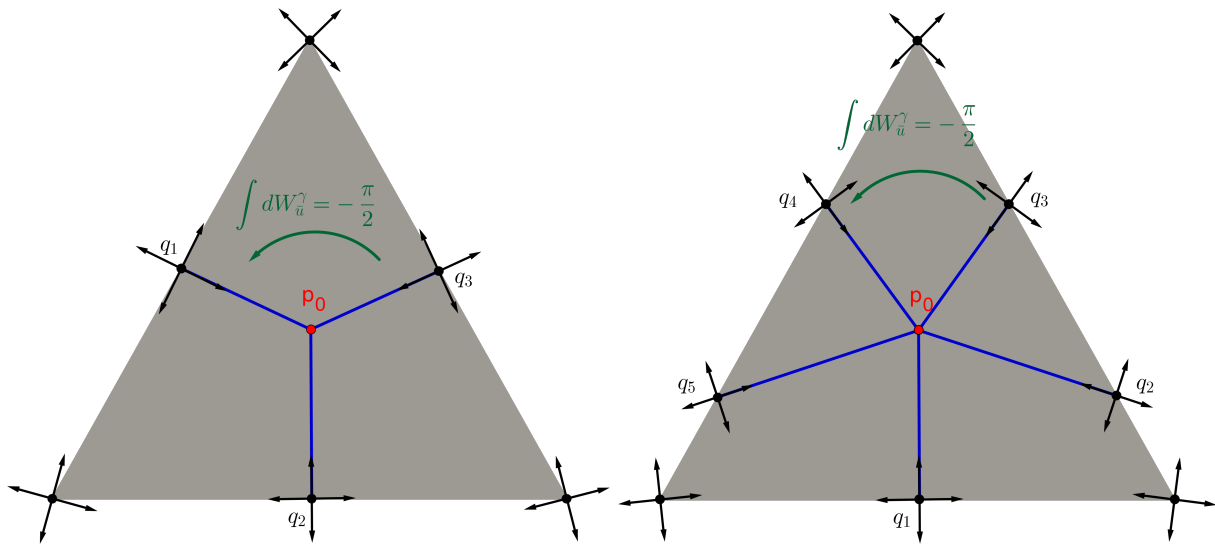


FIGURE 1.4 – Illustration du maillage quadrilatéral d'un anneau à partir d'un champ de croix radial.

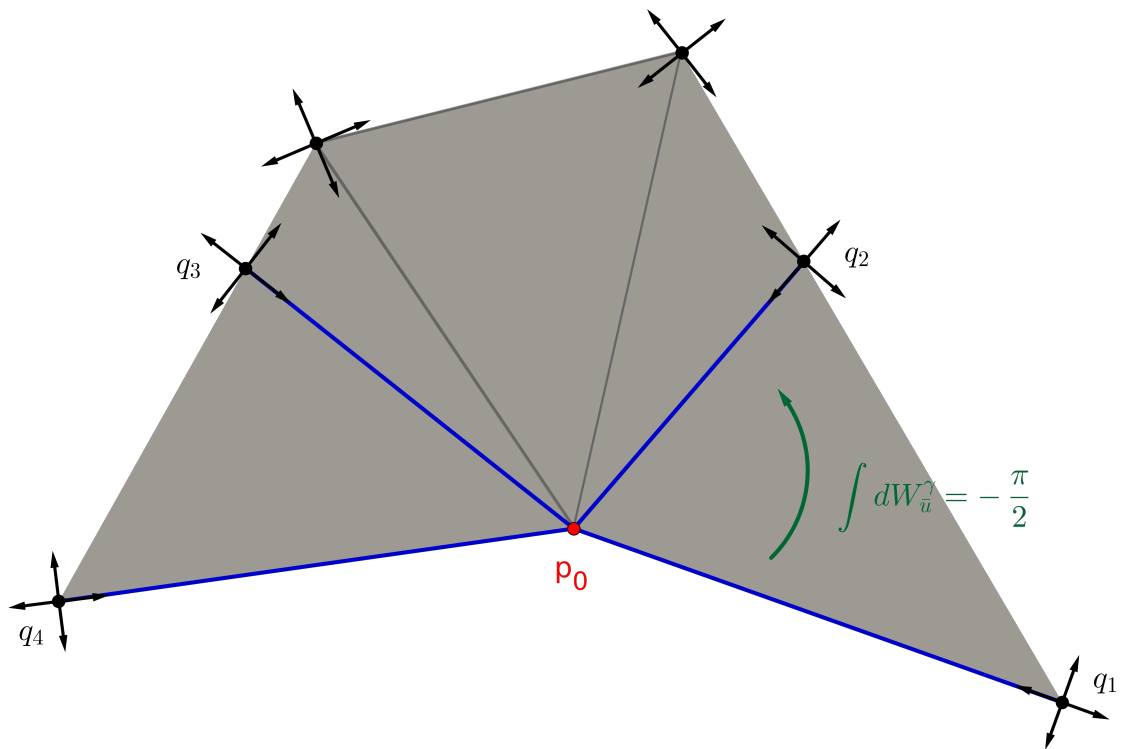
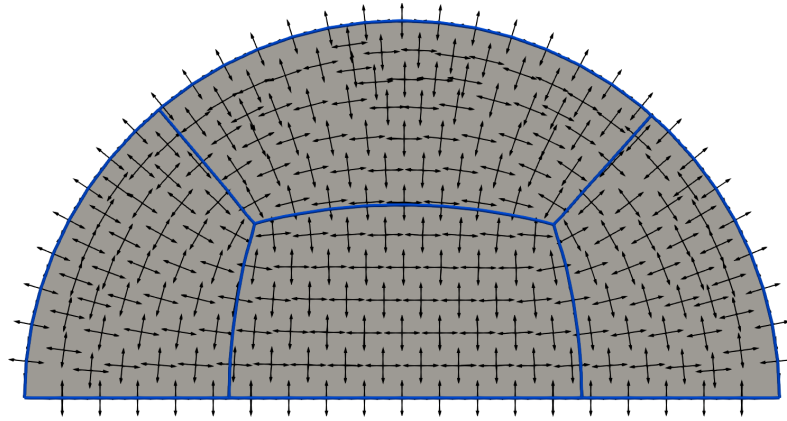


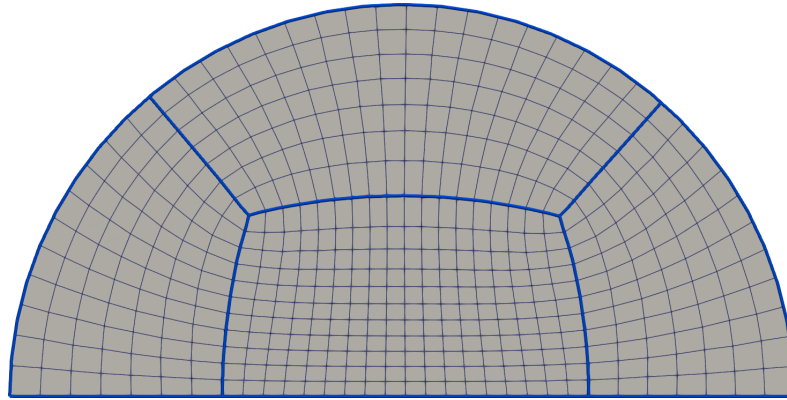
FIGURE 1.5 – Illustration du maillage quadrilatéral d'un anneau à partir d'un champ de croix radial.

d'autres termes, on cherche à déterminer si, à un moment donné, deux séparatrices données avancent dans des directions opposées et si elles sont suffisamment proches l'une de l'autre. On compare ces deux mesures à des seuils prédéfinis, et en fonction du résultat, on décide de fusionner ou non les deux séparatrices.

La fusion se réalise en créant une nouvelle séparatrice par une fusion linéaire des points des deux séparatrices impliquées. Pour se faire, chaque séparatrice est prolongée à travers  $\Omega_h$  jusqu'à atteindre la position de départ de l'autre, tout en maintenant le même



(a) Alignement du champ de croix présenté sur la figure ?? sur le bord du domaine et partitionnement du domaine.



(b) Maillage quadrilatéral du domaine.

FIGURE 1.6 – Direction de sortie différentes.

nombre de points pour chacune des séparatrices. L'intérêt de fusionner les séparatrices réside dans la réduction de leur nombre, ce qui se traduit directement par une diminution du nombre de régions générées lors du découpage du domaine. Nous illustrons la fusion de deux séparatrices sur la figure 1.7. On observe sur que la non fusion donne plus de region qui sont notemment tres etirer et non homogene par rapport aux autres ce qui induit des mesh quad non homogene.

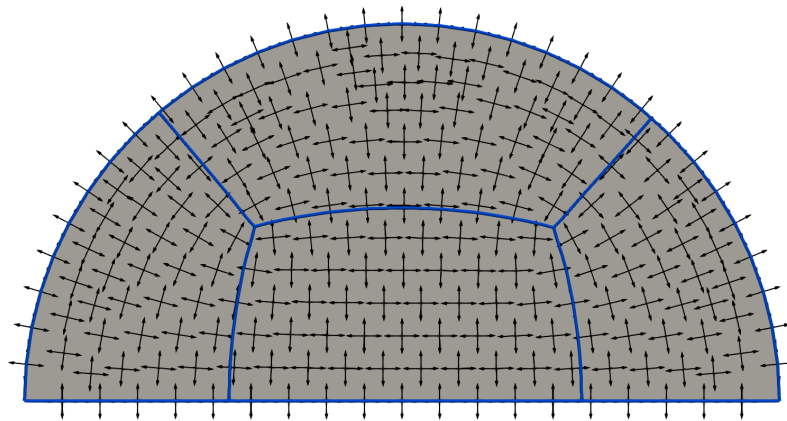
### 1.2.3 Assemblage des partitions

Une fois les séparatrices construites, le maillage triangulaire  $\Omega_h$  sous-jacent à la méthode est divisé en plusieurs régions. Pour identifier ces régions, nous commençons par modifier  $\Omega_h$  en un nouveau maillage. On récupère chaque région sous la forme d'un sous-maillage de  $\Omega_h$  en faisant : Localement dans chaque triangle,

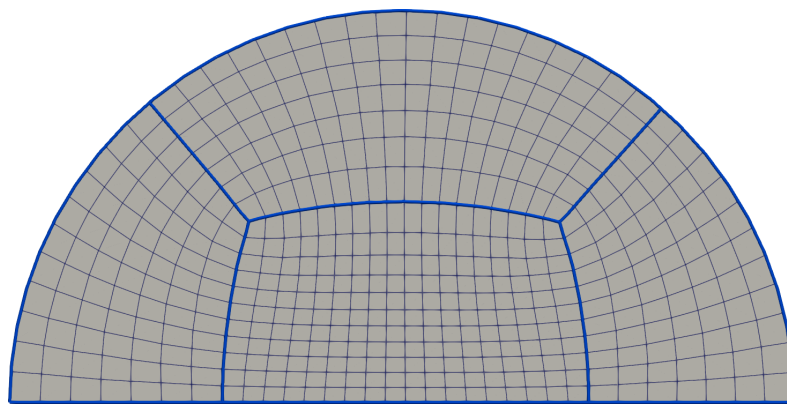
on ajoute les points constituant les separatrices a  $\Omega_h$  modifiant ainsi la topologie du maillage triangulaire initial,

Pour se faire, on exécute localement l'algorithme d'insertion de point localement dans chaque triangle.

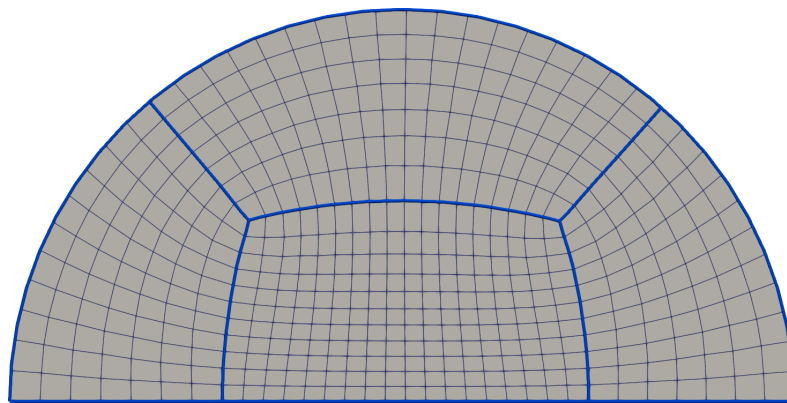
donné par



(a) Sans fusion



(b) detection fusion.



(c) fusion.

FIGURE 1.7 – Illustration de l'opération d'alignement à partir du champ d'angle donné par l'équation (??).

### 1.2.4 Génération du maillage quadrilatéral

equation

Tracé directement dans le champ de croix

Interpolation transfini.



### 1.3 Opération d'alignement

cos laplacien rtheta...

Nous abordons maintenant la discrétisation de l'opération d'alignement présenté dans le chapitre ?? . Étant donné une représentation  $\bar{N}_h$  du champ de croix  $\bar{N}$  sur le bord  $\partial\Omega_h$  de  $\Omega_h$ , nous cherchons à modifier  $\bar{u}_h$  en construisant un nouveau champ de croix  $\bar{v}_h$  qui soit aligné avec  $\partial\Omega_h$ . Autrement dit, on veut que pour tout  $p \in \partial\Omega_h$ ,  $\bar{v}_h(p) \in \{\bar{N}_h(p), 0\}$ . Pour se faire, on commence par définir l'ensemble des points singuliers de bord du champ de croix  $\bar{v}$  que l'on note  $\mathcal{B}$ . On associe un paramètre  $I_p$  pour tout  $p \in \mathcal{B}$  représentant l'indice que nous souhaitons qu'il possède dans le champ de croix  $\bar{v}$  et vérifiant :

$$I_p = \begin{cases} \frac{k}{4} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } k \leq 1 & \text{si } p \in \mathcal{B}, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \quad (1.6)$$

Le champ de croix  $\bar{u}_h$  choisit comme champ initial doit alors vérifié  $0 < \#\mathcal{S}_{\bar{u}_h} < \infty$  et pour tout point  $p \in \mathcal{S}_{\bar{u}_h}$ ,  $id_{\bar{u}_h}(p) = k/4$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$  et  $k \leq 1$ . On suppose de plus que :

$$\theta_{\bar{u}_h} - \theta_{\bar{u}_h} = \chi(\Omega) - \sum_{p \in \mathcal{B}} I(p). \quad (1.7)$$

Le champ de croix  $\bar{v}_h$  est alors donné par :

$$\bar{v}_h(p) = \begin{cases} \mathbf{R}(\phi_h(p))\bar{u}_h(p) & \text{si } p \in \Omega_h \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{S}_{\bar{u}_h}), \\ \bar{N}_h(p) & \text{si } p \in (\mathcal{S}_{\bar{u}_h} \cap \partial\Omega_h) \setminus \mathcal{B}, \\ 0 & \text{si } p \in \mathcal{B}. \end{cases} \quad (1.8)$$

où  $\phi_h$  est une approximation de la fonction  $\phi$  définie par l'équation de Laplace suivant :

$$\begin{cases} \Delta\phi & = 0 & \text{dans } \Omega_h, \\ \phi_h(\gamma(t)) & = \theta_{\bar{N}_h}^\gamma(t) + \mathcal{I}(t) - \theta_{\bar{u}_h}(\gamma(t)) & \text{sur } \gamma^{-1}(\partial\Omega_h \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{S}_{\bar{u}_h})), \end{cases} \quad (1.9)$$

où  $\gamma$  est une paramétrisation sur  $[0, 1]$  de  $\partial\Omega_h$  et la fonction  $\mathcal{I}$  est donnée par :

$$\mathcal{I}(t) = \sum_{s \in \gamma^{-1}(\mathcal{B})} \left[ \left( \pi - \widehat{\gamma(s)} - 2\pi I_{\gamma(s)} \right) - \left( \lim_{r \rightarrow s^+} \theta_{\bar{N}_h}^\gamma(r) - \lim_{r \rightarrow s^-} \theta_{\bar{N}_h}^\gamma(r) \right) \right] \mathbb{1}_{[0,t]}(s),$$

avec  $\widehat{\gamma(s)}$  la mesure de l'ouverture angulaire de la frontière en  $\gamma(s)$ .

ne pas oublié thetah pour le non-simplement connexe

### 1.4 Analyse de convergence

champ de croix u isolé donc uh isolé

vers quoi tend  $Q_h$  ?

On se rend compte que les normales ne match pas.

Je me suis aligné avec les normales d'une autre géométrie. Laquelle ?

On a eu  $Q_h$ .

Lorsque  $h$  tend vers 0

Le partitionnement  $Q_h$  obtenu suite au partitionnement est-il une décomposition en région de quatre côtés de  $\Omega_h$  ?

En quel sens le partitionnement  $Q_h$  obtenu est

## 1.5 Génération de champs de croix

edp  
z-ai  
somme flux triangle

## Construction d'un maillage quadrilatéral

De manière similaire à ce qui a été exposé dans le chapitre précédent, nous entamons d'abord la mise en place du processus de partitionnement de  $\Omega_h$ , puis nous revenons sur la discrétisation des différentes méthodes permettant d'aligner un champ de croix donné sur le bord du domaine sur lequel il est défini. Pour finir, nous abordons le maillage en quadrangles des régions à quatre côtés résultant du partitionnement de  $\Omega_h$ .

### Traitement des bords

### Obtention du maillage quadrilatéral

Description de l'interpolation transfini.

## Interprétation du partitionnement

En vrai  $v_h$  pas aligné avec  $\omega_h$  donc pas de raison que ça marche  
 $v_h$  tend vers  $v$   $S_h$  tend vers  $S$   $R_h$  tend vers  $R$  chap 2 marche par  $v$   $S$  et  $R$  donc partitionnement a 4 cotés Donc  $Q_h$  est un maillage de  $\omega_h$

Notons que le maillage  $\Omega_h$  est construit de sorte que  $\mathbf{B}$  soit inclut dans l'ensemble des sommets de  $\partial\Omega_h$ .

Jusqu'à présent, nous n'avons pas supposé que nous travaillions avec une discrétisation particulière. Dans ce chapitre, nous discrétisons la méthode sur des maillages triangulaires.

Dans le chapitre précédent, les composantes de premier plan mise en jeu sont : le domaine bornée  $\Omega$ , l'ensemble  $\mathbf{B}$  des points de  $\partial\Omega$  caractérisant la géométrie de  $\Omega$  et le

champ de croix initial  $\bar{u}$  vérifiant l'hypothèse  $\mathbf{H}_1$ . Avec ces données, nous construisons un champ de croix  $\bar{v}$  aligné avec le bord de  $\Omega$  issue des différentes opérations abordés dans le chapitre précédent.  $\bar{v}$  est ensuite utilisé pour partitionner le domaine  $\Omega$  en régions de quatre côtés.

Commençons par exécuter le processus d'alignement sur le champ de croix  $\bar{u}_h$  puisque le champ de croix  $u$  dont il est l'approximation n'a aucune raison d'être aligné par rapport à  $\Omega$ . Pour se faire, nous cherchons un champ d'angle noté  $\phi_h$  et vérifiant l'équation suivante :

$$\begin{cases} \Delta\phi_h &= 0 \text{ dans } \Omega_h, \\ \phi_h &= \theta_{\bar{N}_h} - \theta_{\bar{u}_h} \text{ sur } \partial\Omega_h. \end{cases} \quad (1.10)$$

où  $\bar{N}_h$  correspond au champ de croix de la normale extérieur de  $\partial\Omega_h$ . Remarquons que  $\bar{N}_h$  est défini sur les arêtes de  $\partial\Omega_h$  mais n'est pas défini sur les sommets de  $\partial\Omega_h$ . Autrement dit, le champ de croix  $\bar{N}_h$  n'est pas compatible avec l'ensemble  $\mathbf{B}$  puisque les points singuliers de  $\bar{N}_h$  ne coïncident pas avec les points de l'ensemble  $\mathbf{B}$ .

Pour palier à ce problème, nous modifions la définition du champ de croix normal. Supposons que l'on puisse définir un champ de croix  $\tilde{N}_h$  sur  $\partial\Omega_h$  tel que les points singuliers de  $\tilde{N}_h$  correspondent exactement aux points de l'ensemble  $\mathbf{B}$ . L'équation (1.10) devient alors :

$$\begin{cases} \Delta\phi_h &= 0 \text{ dans } \Omega_h, \\ \phi_h &= \theta_{\tilde{N}_h} - \theta_{\bar{u}_h} \text{ sur } \partial\Omega_h. \end{cases} \quad (1.11)$$

La résolution de l'équation (1.11) permet de construire le champ de croix  $\bar{v}_h$  sur  $\Omega_h$  définit par :

$$\bar{v}_h : p \in \Omega_h \longrightarrow \bar{v}_h(p) = \mathbf{R}(\phi_h(p))\bar{u}_h(p).$$

On ne peut interpoler directement le champ de croix, on passe par un champ de vecteur intermédiaire appelé champ de représentation ??,

Cependant, il est clair que  $\bar{v}_h$  n'est pas aligné avec  $\partial\Omega_h$  puisque  $\bar{v}_h = \tilde{N}_h$  sur  $\partial\Omega_h$ . Autrement dit, le champ de croix  $\bar{v}_h$  est aligné avec un domaine que nous notons  $\tilde{\Omega}_h$  et dont la normale extérieure est associée au champ de croix  $\tilde{N}_h$ .  $\bar{v}_h$  n'étant pas défini sur  $\tilde{\Omega}_h$  nous définissons une opération appelée *lift* et noté  $\mathbf{L}$  permettant de transporter une fonction définie sur un domaine vers un autre domaine. Nous désignons alors par  $\tilde{v}_h = \mathbf{L}_{\tilde{\Omega}_h}^{\Omega_h} \bar{v}_h$  le lift de  $\bar{v}_h$  de  $\Omega_h$  vers  $\tilde{\Omega}_h$ . Le champ de croix  $\tilde{v}_h$  ainsi défini est aligné avec  $\partial\tilde{\Omega}_h$  (bord de  $\tilde{\Omega}_h$ ) ce qui nous permet d'appliquer l'algorithme de partitionnement défini dans le chapitre ?? à  $\tilde{v}_h$  sur  $\tilde{\Omega}_h$ .

### Définition de $\tilde{N}_h$ et $\tilde{\Omega}_h$

#### Définition du Lift

#### Discussion sur $Q_h$

utiliser dans l'équation (1.10) en définissant le champ de croix  $\tilde{N}$  de la manière suivante :

$$\forall p \in \partial\Omega_h, \quad \tilde{N}(p) = \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$$

L'équation (1.10) devient alors :

Suite à la résolution de l'équation (1.11) sur  $\Omega_h$ , on peut construire le champ de croix  $\bar{v}_h = \mathbf{R}(\phi_h)\bar{u}_h$  sur  $\Omega_h$ . On remarque alors que le champ de croix  $\bar{v}_h$  ainsi construit n'est pas aligné avec  $\Omega_h$ .

#### Définition de $\tilde{\Omega}$

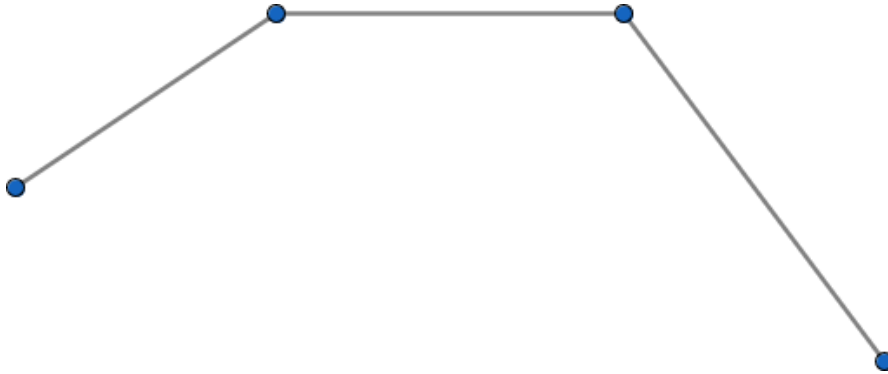


FIGURE 1.8

Définition du lift  $\mathbf{L}$

Définition de  $\tilde{v} = \mathbf{L}_{\Omega_h}^{\tilde{\Omega}} v_h$

Comparaison de  $v$  et  $\tilde{v}$

$$\begin{aligned}
 \|v - \mathbf{L}_{\Omega}^{\tilde{\Omega}} \tilde{v}\| &\leq \| \mathbf{R}(\phi)u - \mathbf{R}(\phi)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h \| + \| \mathbf{R}(\phi)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h - \mathbf{L}_{\Omega}^{\tilde{\Omega}} \tilde{v} \| \\
 &\leq \| \mathbf{R}(\phi)u - \mathbf{R}(\phi)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h \| + \| \mathbf{R}(\phi)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h - \mathbf{R}(\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} \phi_h)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h \| + \\
 &\quad \| \mathbf{R}(\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} \phi_h)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h - \mathbf{L}_{\Omega}^{\tilde{\Omega}} \tilde{v} \| \\
 &\leq \| \mathbf{R}(\phi)u - \mathbf{R}(\phi)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h \| + \| \mathbf{R}(\phi)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h - \mathbf{R}(\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} \phi_h)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h \| + \\
 &\quad \| \mathbf{R}(\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} \phi_h)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h - \mathbf{L}_{\Omega}^{\tilde{\Omega}} \mathbf{R}(\phi_h)u_h \|
 \end{aligned}$$

## Algorithmes

remarque sur le tracé des "streamlines" dans un triangle singulier en comparaison avec ce que fait viertel sachant que le champ n'est pas linéaire dans un tel triangle

## Exemples

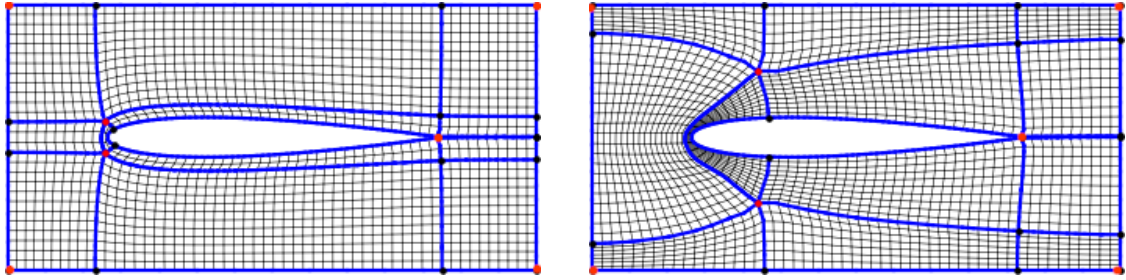


FIGURE 1.9 – Mesh of Naca0012 with two different configurations of singular points. The initial cross-fields were obtained using formula (??) .

Structure de donnée  
représentation des multimatériau

structure de donnée mesh

generation champ de croix  
discretisation par vertex  
alignement champ de croix

index  
seul type 1 0 -1

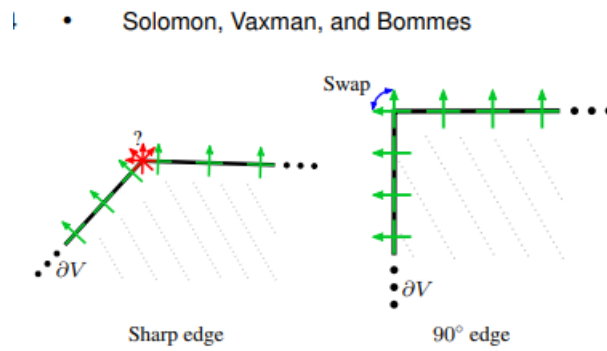


FIGURE 1.10 – Caption

N'importe quel champ  $\longrightarrow$  mesh quad  
 préserver les points singuliers  
 Montrer simplement  $\phi = N \cdot U$  et sa trace  
 déplacer ensuite les singularité vers où on veut  
 ;

# Références

- [Beaufort et al., 2017] Beaufort, P.-A., Lambrechts, J., Henrotte, F., Geuzaine, C., and Remacle, J.-F. (2017). Computing cross fields a pde approach based on the ginzburg-landau theory. *Procedia engineering*, 203 :219–231.
- [Gourdain et al., 2010] Gourdain, N., Duchaine, F., Gicquel, L. Y., and Collado, E. (2010). Advanced numerical simulation dedicated to the prediction of heat transfer in a highly loaded turbine guide vane. In *Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air*, volume 44021, pages 807–820.
- [Hopf, 1935] Hopf, H. (1935). Über die drehung der tangente und sehnene ebener kurven. *Compositio mathematica*, 2 :50–62.
- [Kowalski et al., 2013] Kowalski, N., Ledoux, F., and Frey, P. (2013). A pde based approach to multidomain partitioning and quadrilateral meshing. In *Proceedings of the 21st international meshing roundtable*, pages 137–154. Springer.
- [Macq et al., 2020] Macq, A., Reberol, M., Henrotte, F., Beaufort, P.-A., Chemin, A., Remacle, J.-F., and Van Schaftingen, J. (2020). Ginzburg-landau energy and placement of singularities in generated cross fields. *arXiv preprint arXiv :2010.16381*.
- [Marcon et al., 2019] Marcon, J., Kopriva, D. A., Sherwin, S. J., and Peiró, J. (2019). A high resolution pde approach to quadrilateral mesh generation. *Journal of Computational Physics*, 399 :108918.
- [Ray et al., 2008] Ray, N., Vallet, B., Li, W. C., and Lévy, B. (2008). N-symmetry direction field design. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 27(2) :1–13.
- [Rotskoff, 2010] Rotskoff, G. (2010). *The Gauss-Bonnet Theorem*. PhD thesis, Master thesis, University of Chicago.
- [Viertel and Osting, 2019] Viertel, R. and Osting, B. (2019). An approach to quad meshing based on harmonic cross-valued maps and the ginzburg-landau theory. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 41(1) :A452–A479.