





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Discrétisation, algorithmes et exemples</b>	<b>3</b>
1.1	Représentation discrète . . . . .	3
1.1.1	Maillage triangulaire . . . . .	4
1.1.2	Champ de croix . . . . .	4
1.2	Partitionnement de $\partial\Omega_h$ . . . . .	5
1.2.1	Recherche de points singuliers . . . . .	6
1.2.2	Construction des séparatrices . . . . .	6
1.2.3	Assemblage des partitions . . . . .	9
1.3	Opération d'alignement . . . . .	9
1.4	Etude de la méthode . . . . .	11
1.4.1	Analyse de convergence . . . . .	11
1.4.2	Lien entre $\bar{u}$ et $\bar{u}_h$ . . . . .	11
1.5	Génération de champs de croix . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Annexes</b>	<b>17</b>
	<b>Références</b>	<b>19</b>



# Chapitre 1

## Discrétisation, algorithmes et exemples

### Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Représentation discrète</b>	<b>3</b>
1.1.1	Maillage triangulaire	4
1.1.2	Champ de croix	4
<b>1.2</b>	<b>Partitionnement de <math>\partial\Omega_h</math></b>	<b>5</b>
1.2.1	Recherche de points singuliers	6
1.2.2	Construction des séparatrices	6
1.2.3	Assemblage des partitions	9
<b>1.3</b>	<b>Opération d'alignement</b>	<b>9</b>
<b>1.4</b>	<b>Etude de la méthode</b>	<b>11</b>
1.4.1	Analyse de convergence	11
1.4.2	Lien entre $\bar{u}$ et $\bar{u}_h$	11
<b>1.5</b>	<b>Génération de champs de croix</b>	<b>12</b>

Dans le précédent chapitre, la méthode a été élaborée dans un cadre continu, supposant un accès direct au domaine de calcul et à son champ de croix correspondant. Toutefois, dans la réalité, cette accessibilité directe n'est pas toujours envisageable. Ainsi, pour rendre cette méthode plus praticable, nous abordons dans ce chapitre une approche discrète, adaptant les différents algorithmes pour opérer sur des maillages triangulaires.

Étant donné un tel maillage représentant un domaine donné, le but de ce chapitre est de démontrer qu'à partir d'un champ de croix donné, il est possible de construire sur le maillage triangulaire un maillage quadrilatéral, et d'expliquer dans quelle mesure ce maillage représente fidèlement le domaine initial.

### 1.1 Représentation discrète

Soit  $\Omega$  un

### 1.1.1 Maillage triangulaire

### 1.1.2 Champ de croix

## Maillage triangulaire et représentation des champs de croix

Considérons maintenant une triangulation  $h$  de la surface  $\Omega$ . Par là, nous entendons que  $\Omega_h$  est une surface polyédrique orientable compacte de dimension deux, de classe  $C^0$ , et en notant  $Th$  l'ensemble des triangles fermés non vides tels que  $T \in Th$ , nous supposons que tous les sommets appartiennent à  $\Omega$ , et que toute intersection entre deux triangles est soit vide, soit un sommet, soit un côté. Soit  $h_T = \text{diam}(T)$  et  $h = \max_{T \in Th} h_T$ .

Considérons  $\Omega$  comme un domaine borné et fermé dans  $\mathbb{R}^2$ . Pour le représenter, nous utilisons un maillage triangulaire noté  $\Omega_h = (V, E, F)$ , où  $h$  est la taille des éléments du maillage. Ici,  $V$  désigne l'ensemble des sommets de  $\Omega_h$ ,  $E$  représente l'ensemble des arêtes, et  $F$  correspond à l'ensemble des triangles qui composent  $\Omega_h$ . Si  $\bar{u}$  est un champ de croix défini sur  $\Omega$ , on se donne un ensemble de valeurs de  $\bar{u}$  défini sur les sommets de  $\Omega_h$ . Une représentation  $\bar{u}_h$  de  $\bar{u}$  est alors construite pour tout  $p \in \Omega_h$  de la manière suivante :

$$\bar{u}_h(p) = \begin{cases} \left\{ \mathbf{R}\left(\frac{m\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos(\arg g(p)/4) \\ \sin(\arg g(p)/4) \end{pmatrix}, m \in \mathbb{Z} \right\} & \text{si } g(p) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $g$  est définie pour tout  $p \in \Omega_h$  par :

$$g(p) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \begin{pmatrix} \cos(4\theta_{\bar{u}_h}(s_i)) \\ \sin(4\theta_{\bar{u}_h}(s_i)) \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

avec  $(s_i)_{i \in \llbracket 1,3 \rrbracket}$  les sommets d'un triangle de  $\Omega_h$  contenant  $p$  et  $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1,3 \rrbracket}$  les coordonnées barycentriques de  $p$  dans ce triangle. Remarquons que le champ de croix  $\bar{u}_h$  ainsi défini est presque- $\mathcal{C}^1$  sur chaque triangle puisque  $g$  est linéaire sur chaque triangle.

## Points singuliers, indice et ligne de champs

L'ensemble  $\mathcal{S}_{\bar{u}_h}$ , défini comme l'ensemble des points singuliers de  $\bar{u}_h$ , est constitué des points  $p \in \Omega_h$  tels que  $\bar{u}_h(p) = 0$ . **Dans la suite, nous supposons que les points singuliers de  $\bar{u}_h$  sont isolés.** Pour tout  $p \in \Omega_h$ , nous définissons  $F_p$  comme l'ensemble des triangles de  $\Omega_h$  contenant le point  $p$ .

**Lemme 1.1.** *Soit  $p$  un point singulier de  $\bar{u}_h$ . Alors on a  $F_p \cap \mathcal{S}_{\bar{u}_h} = \{p\}$ .*

*Preuve.* Par définition,  $p \in F_p$ . Supposons maintenant qu'il existe un point singulier  $q$  tel que  $q \in F_p$  et  $q \neq p$ . Soit  $\mathcal{T}$  un triangle de  $\Omega_h$  contenant  $q$  et inclus dans  $F_p$ . Puisque  $p \in \mathcal{T}$  par définition de  $F_p$ , et que  $g$  est linéaire sur  $\mathcal{T}$ , cela implique que pour tout  $r \in [pq]$ ,  $g(r) = (0, 0)$ , car  $g(p) = g(q) = (0, 0)$ . Autrement dit, pour tout  $r \in [pq]$ ,  $r \in \mathcal{S}_{\bar{u}_h}$  car  $\bar{u}_h(r) = 0$ . Par conséquent, les points singuliers de  $\bar{u}_h$  ne peuvent pas être isolés, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle les points singuliers de  $\bar{u}_h$  sont isolés. On peut donc en conclure que  $F_p \cap \mathcal{S}_{\bar{u}_h} = \{p\}$ . ■

Examinons à présent l'indice des points singuliers de  $\bar{u}_h$ . Soit  $p$  un point singulier de  $\bar{u}_h$  avec  $p \in \Omega_h \setminus \partial\Omega_h$ . L'indice de  $p$  est donné par :

$$id_{\bar{u}_h}(p) = \int_0^1 d\theta_{\bar{u}_h}^\gamma = \sum_{\mathcal{C} \in F \cap \gamma} \int_0^1 d\theta_{\bar{u}_h}^{\mathcal{C}}.$$

où  $\gamma$  est un chemin fermé englobant  $p$  et ne contenant aucun autre point singulier de  $\bar{u}_h$ . En pratique, nous calculerons l'indice d'un point  $p$  en utilisant une paramétrisation  $\gamma$  du bord  $\partial F_p$  de  $F_p$ . Soit  $S_p = (s_i)_{i \in \llbracket 1, n_{S_p} \rrbracket}$  l'ensemble des sommets des triangles de  $F_p$ , privés du point  $p$ , et numérotés dans le sens anti-horaire. Il vient alors que :

$$id_{\bar{u}_h}(p) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_{S_p}} (\theta_{\bar{u}_h}^\gamma(s_{i+1}) - \theta_{\bar{u}_h}^\gamma(s_i)) = \frac{1}{2\pi} \sum \Delta, \quad (1.3)$$

où nous avons défini  $s_{n_{S_p}+1} := s_1$ . Si  $p \in \partial\Omega_h$  alors l'indice de  $p$  est donné par :

$$id_{\bar{u}_h}(p) = \pi - \hat{p} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_{S_p}} (\theta_{\bar{u}_h}^\gamma(s_{i+1}) - \theta_{\bar{u}_h}^\gamma(s_i)), \quad (1.4)$$

où  $\gamma$  dans ce cas est la paramétrisation de  $\partial F_p \setminus \partial\Omega_h$ . C'est à dire la partie de  $\partial F_p$  se trouvant à l'intérieur de  $\Omega_h$ .

**Proposition 1.1.** *Pour tout  $p \in \Omega_h$ , on a  $4id_{\bar{u}_h}(p) \in \llbracket -d, d \rrbracket$  où  $d = \#(\partial F_p \cap E)$  si  $p \in \Omega_h \setminus \partial\Omega_h$  et  $d = \#((\partial F_p \setminus \partial\Omega_h) \cap E)$  si  $p \in \partial\Omega_h$ .*

*Preuve.* Si  $F_p$  est réduit à un unique triangle, alors on a  $n$  ■

Illustrer les singularité se démultipliant en coloriant juste les triangles et en disant qu'on a pas besoin de la localisation spécifique.

Nous abordons à présent la représentation des lignes de champs de  $\bar{u}_h$  dans  $\Omega_h$ . Étant donné un point  $p_0 \in \Omega_h$  et un vecteur  $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^2$ , la ligne de champ  $SL(p_0, \vec{u}_0)$  d'origine  $p_0$  sera représenté par

## 1.2 Partitionnement de $\partial\Omega_h$

L'adaptation de l'algorithme ?? au maillage  $\Omega_h$  est donné par :

**Entrée:**  $\Omega_h$  un maillage triangulaire, champ de croix  $\bar{u}_h$  linéaire par morceau sur chaque triangle de  $\Omega_h$ .

**Sortie :** Partition de  $\Omega_h$  en ensembles de régions.

- 1.) Identification des points singuliers du champ de croix,
- 2.) Détermination du nombre de séparatrices pour chaque point singulier,
- 3.) Intégration des séparatrices,
- 4.) Identification des régions.

**Algorithm 1:** Algorithme de partitionnement  $\Omega_h$

On considère que l'algorithme a convergé si les séparatrices ne convergent pas vers un cycle limite. Examinons maintenant en détail certaines étapes de cet algorithme :

### 1.2.1 Recherche de points singuliers

Étant donné que pour tout  $p \in \Omega_h$ ,  $\bar{u}_h(p) = 0$  si et seulement si  $g(p) = 0$ , rechercher les points singuliers de  $\bar{u}_h$  revient à trouver les zéros de la fonction  $g$ . Puisque cette dernière est linéaire sur chaque triangle de  $\Omega_h$ , la recherche de ces points peut être effectuée localement sur chaque triangle comme suit : Soit  $\mathcal{T}$  un triangle de  $\Omega_h$  avec des sommets  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$ . S'il existe  $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1,3 \rrbracket} \subset [0, 1]$  vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 \lambda_i g(s_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1, \end{cases} \quad (1.5)$$

alors le point  $p = \sum_{i=1}^3 \lambda_i s_i$  est un point singulier de  $\bar{u}_h$  situé dans le triangle  $\mathcal{T}$ .

**Remarque 1.1.** *Grace à la proposition on peut choisir l'emplacement du point singulier dans  $F_p$ . en l'occurrence, pour ne pas avoir à en faire la recherche on peut choisir le barycentre du triangle.*

On peut rassembler plusieurs singularité voisine en une.. permet d'éviter les problématiques de point trop proche par exemple. Illustrer tout ça

### 1.2.2 Construction des séparatrices

Une fois les points singuliers de  $\bar{u}_h$  identifiés, nous procédons à la création des séparatrices sur  $\Omega_h$ . Cette étape comprend le calcul du nombre de séparatrices à assigner à chaque point singulier, la détermination des directions initiales pour chaque séparatrice, ainsi que l'intégration de ces séparatrices.

**Nombre de séparatrices :** Si  $p$  est un point singulier de  $\bar{u}_h$ , alors le nombre de séparatrices  $N_s(p)$  associées à  $p$  est donné par :

$$N_s(p) = \begin{cases} 4 - 4id_{\bar{u}_h}(p) & \text{si } p \in \Omega_h \setminus \partial\Omega_h \\ 2 - 4id_{\bar{u}_h}(p) & \text{si } p \in \partial\Omega_h \end{cases} \quad (1.6)$$

**Directions initiales :** Soit  $p_0 \in \mathcal{S}_{\bar{u}_h} \setminus \partial\Omega_h$ . Étant donné que  $\bar{u}_h$  s'annule en  $p_0$ , notre première étape consiste à déterminer les orientations initiales des séparatrices. Les directions initiales des séparatrices émanant de  $p_0$  sont données par les vecteurs  $\overrightarrow{p_0 a_i}$ ,  $i \in \llbracket 1, N_s(p_0) \rrbracket$  où la suite de points  $(a_i)_{i \in \llbracket 1, N_s(p_0) \rrbracket} \subset \partial F_{p_0}$  est construite de la manière suivante :

- le premier point  $a_1$  est tout point de  $\partial F_{p_0}$  tel que  $\overrightarrow{p_0 a_1} \cdot \|\overrightarrow{p_0 a_1}\|^{-1} \in \bar{u}_h(a_1)$
- soit  $t_1 \in [0, 1]$  tel que  $\gamma(t_1) = a_1$ . Pour tout  $i \in \llbracket 2, N_s(p_0) \rrbracket$ , on a :

$$a_i = \gamma(t_i) \text{ avec } \int_{t_{i-1}}^{t_i} dW_{p_0}^\gamma = -\frac{\pi}{2},$$



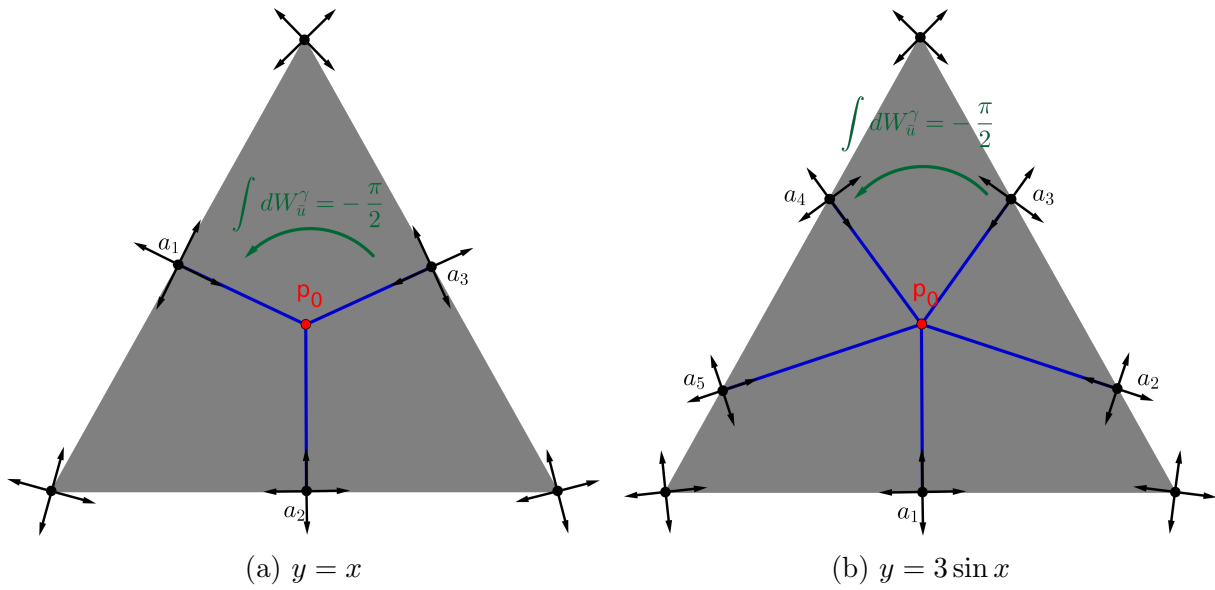


FIGURE 1.1 – Three simple graphs

où  $\gamma$  est une paramétrisation de  $\partial F_{p_0}$  sur  $[0, 1]$  dans le sens anti-horaire et la fonction  $W_{p_0}^\gamma$  est donné pour tout  $t \in [0, 1]$  par :

$$W_{p_0}^\gamma(t) = \theta_{\bar{u}_h}^\gamma(t) - \arg \overrightarrow{p_0\gamma(t)}.$$

Si  $p_0 \in \mathcal{S}_{\bar{u}_h} \cap \partial\Omega_h$  alors

On veut être mesh tri aussi grossier qu'il est possible donc mailler le vrai domaine et non le mesh tri

**Intégration des séparatrices :** Considérons  $SL_{\bar{u}_h}(p_0, \overrightarrow{p_0 p_1})$  la séparatrice émanant de  $p_0$  dans la direction du vecteur  $\overrightarrow{p_0 p_1}$ , où  $p_1 \in \partial F_{p_0}$ . Nous procédons à la construction d'une approximation  $SL_{\bar{u}_h}^h(p_0, \overrightarrow{p_0 p_1})$  de  $SL_{\bar{u}_h}(p_0, \overrightarrow{p_0 p_1})$  sur  $\Omega_h$  sous la forme d'une succession de segments. Le premier segment est représenté par  $[p_0 p_1]$ . Ensuite, pour tout  $i \geq 1$ , on construit le segment  $[p_i p_{i+1}]$  en cherchant le point  $p_{i+1}$  comme le point d'intersection entre  $\partial F_{p_i}$  et la demi-droite d'origine  $p_i$  et dirigée par le vecteur  $P(\bar{u}_h(p_i), \overrightarrow{p_{i-1} p_i}) + P(\bar{u}_h(p'_{i+1}), \overrightarrow{p_{i-1} p_i})$ . Dans cette formule,  $p'_{i+1}$  est le point d'intersection entre  $\partial F_{p_i}$  et la demi-droite d'origine  $p_i$  et dirigée par le vecteur  $P(\bar{u}_h(p_i), d_i)$  et pour tout  $(\mathbf{c}, d) \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^2$ ,  $P(\mathbf{c}, d)$  désigne le vecteur  $\mathbf{c}$  qui s'aligne le mieux avec la direction  $d$ . Autrement dit, il s'agit de l'unique élément de l'ensemble

$$\left\{ c_k \mid c_k = \min_{k \in [0, 3]} |c_k \cdot d - 1| \right\} = \underset{c_k \in \mathbf{c}, k \in [1, 4]}{\operatorname{argmin}} |c_k \cdot d - 1|.$$

La figure 1.2 illustre la construction du segment  $[p_i p_{i+1}]$ .

direction de sortie mieux chez moi que chez les autres

**Traversé d'un triangle singulier :** lorsque le segment  $[p_i p_{i+1}]$  traverse un triangle singulier, l'angle du champ varie beaucoup. On remplace alors le segment en question par une succession d'autres segments calculés en raffinant localement le maillage dans le triangle singulier.

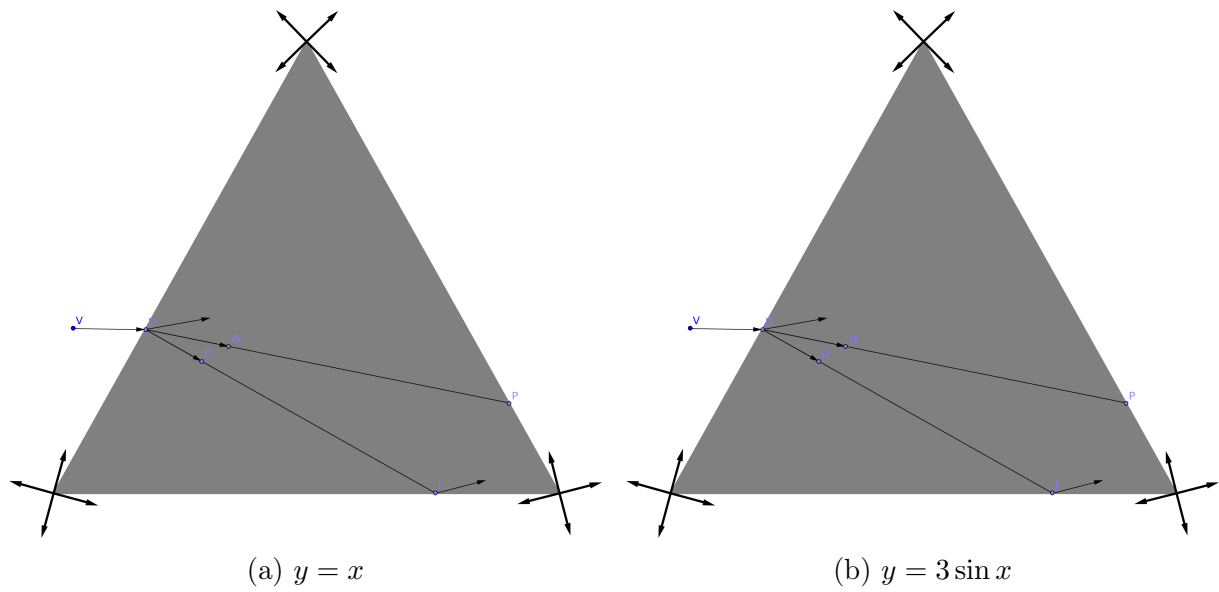
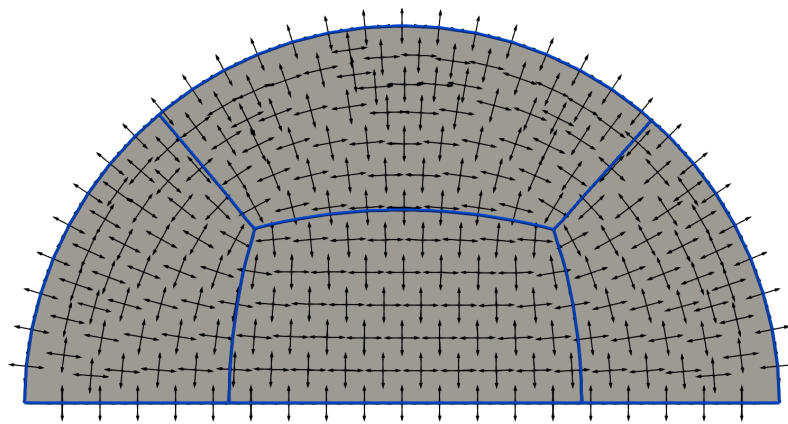
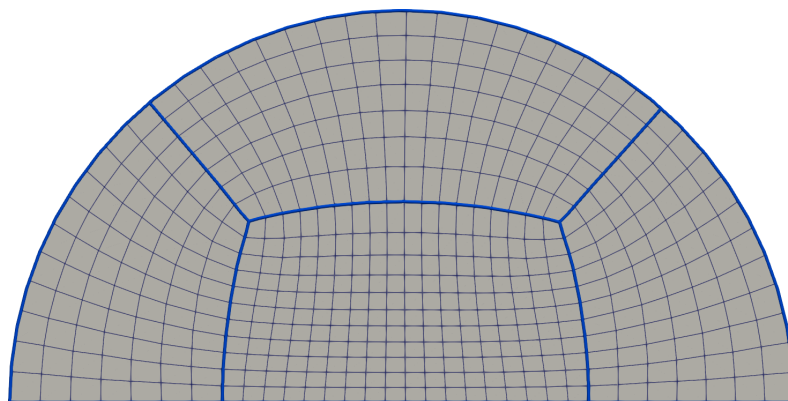


FIGURE 1.2 – Three simple graphs



(a) Alignement du champ de croix présenté sur la figure ?? sur le bord du domaine et partitionnement du domaine.



(b) Maillage quadrilatéral du domaine.

FIGURE 1.3 – Direction de sortie différentes.

**Fusion de séparatrices :** De manière similaire à ce qui est réalisé dans [Marcon et al., 2019], les séparatrices du champ de croix sont construites simultanément

en incrémentant chacune d'elles progressivement, et la rencontre entre deux séparatrices est anticipée en comparant à chaque incrément, d'une part, la distance entre les derniers points calculés et, d'autre part, les directions des derniers segments construits. En d'autres termes, on cherche à déterminer si, à un moment donné, deux séparatrices données avancent dans des directions opposées et si elles sont suffisamment proches l'une de l'autre. On compare ces deux mesures à des seuils prédéfinis, et en fonction du résultat, on décide de fusionner ou non les deux séparatrices.

La fusion se réalise en créant une nouvelle séparatrice par une fusion linéaire des points des deux séparatrices impliquées. Pour se faire, chaque séparatrice est prolongée à travers  $\Omega_h$  jusqu'à atteindre la position de départ de l'autre, tout en maintenant le même nombre de points pour chacune des séparatrices. L'intérêt de fusionner les séparatrices réside dans la réduction de leur nombre, ce qui se traduit directement par une diminution du nombre de régions générées lors du découpage du domaine. Nous illustrons la fusion de deux séparatrices sur la figure 1.4. On observe sur que la non fusion donne plus de region qui sont notemment tres etirer et non homogene par rapport aux autres ce qui induit des mesh quad non homogene.

### 1.2.3 Assemblage des partitions

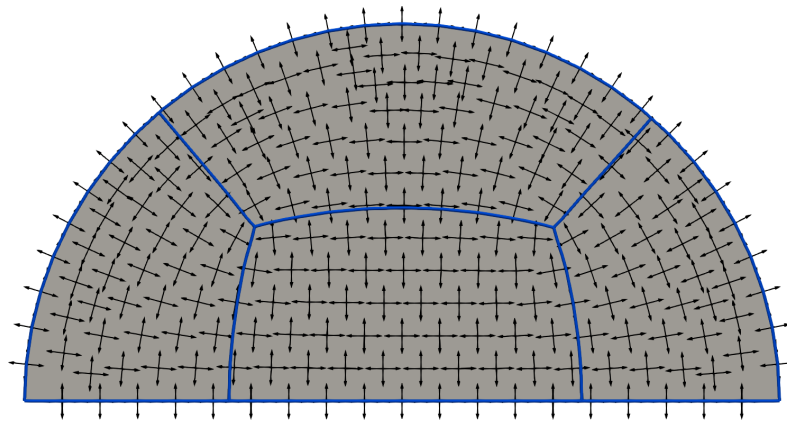
Une fois les séparatrices construites, le maillage triangulaire  $\Omega_h$  sous-jacent à la méthode est divisé en plusieurs régions. Pour identifier ces régions, nous commençons par modifier  $\Omega_h$  en un nouveau maillage. On récupère chaque région sous la forme d'un sous-maillage de  $\Omega_h$  en faisant : Localement dans chaque triangle, on ajoute les points constituant les separatrices a  $\Omega_h$  modifiant ainsi la topologie du maillage triangulaire initial, Pour se faire, on exécute localement l'algorithme d'insertion de point localement dans chaque triangle. donné par

## 1.3 Opération d'alignement

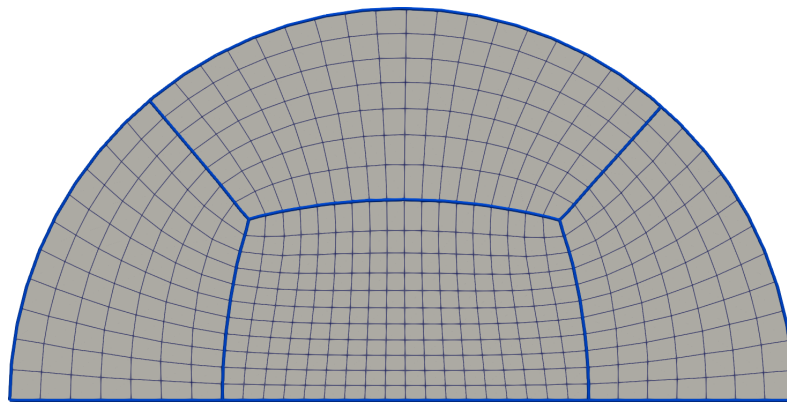
cos laplacien rtheta...

Nous abordons maintenant la discrétisation de l'opération d'alignement présenté dans le chapitre ???. Étant donné une représentation  $\bar{N}_h$  du champ de croix  $\bar{N}$  sur le bord  $\partial\Omega_h$  de  $\Omega_h$ , nous cherchons à modifier  $\bar{u}_h$  en construisant un nouveau champ de croix  $\bar{v}_h$  qui soit aligné avec  $\partial\Omega_h$ . Autrement dit, on veut que pour tout  $p \in \partial\Omega_h$ ,  $\bar{v}_h(p) \in \{\bar{N}_h(p), 0\}$ . Pour se faire, on commence par définir l'ensemble des points singuliers de bord du champ de croix  $\bar{v}$  que l'on note  $\mathcal{B}$ . On associe un paramètre  $I_p$  pour tout  $p \in \mathcal{B}$  représentant l'indice que nous souhaitons qu'il possède dans le champ de croix  $\bar{v}$  et vérifiant :

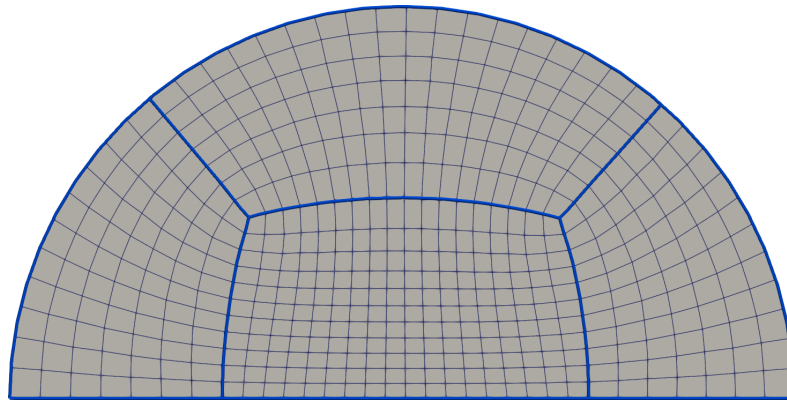
$$I_p = \begin{cases} \frac{k}{4} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } k \leq 1 & \text{si } p \in \mathcal{B}, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \quad (1.7)$$



(a) Sans fusion



(b) detection fusion.



(c) fusion.

FIGURE 1.4 – Illustration de l'opération d'alignement à partir du champ d'angle donné par l'équation (??).

Le champ de croix  $\bar{u}_h$  choisit comme champ initial doit alors vérifié  $0 < \#\mathcal{S}_{\bar{u}_h} < \infty$  et pour tout point  $p \in \mathcal{S}_{\bar{u}_h}$ ,  $id_{\bar{u}_h}(p) = k/4$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$  et  $k \leq 1$ . On suppose de plus que :

$$\theta_{\bar{u}_h} - \theta_{\bar{u}_h} = \chi(\Omega) - \sum_{p \in \mathcal{B}} I(p). \quad (1.8)$$

Le champ de croix  $\bar{v}_h$  est alors donné par :

$$\bar{v}_h(p) = \begin{cases} \mathbf{R}(\phi_h(p))\bar{u}_h(p) & \text{si } p \in \Omega_h \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{S}_{\bar{u}_h}), \\ \bar{N}_h(p) & \text{si } p \in (\mathcal{S}_{\bar{u}_h} \cap \partial\Omega_h) \setminus \mathcal{B}, \\ 0 & \text{si } p \in \mathcal{B}. \end{cases} \quad (1.9)$$

où  $\phi_h$  est une approximation de la fonction  $\phi$  définie par l'équation de Laplace suivant :

$$\begin{cases} \Delta\phi & = 0 & \text{dans } \Omega_h, \\ \phi_h(\gamma(t)) & = \theta_{\bar{N}_h}^\gamma(t) + \mathcal{I}(t) - \theta_{\bar{u}_h}(\gamma(t)) & \text{sur } \gamma^{-1}(\partial\Omega_h \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{S}_{\bar{u}_h})), \end{cases} \quad (1.10)$$

où  $\gamma$  est une paramétrisation sur  $[0, 1]$  de  $\partial\Omega_h$  et la fonction  $\mathcal{I}$  est donnée par :

$$\mathcal{I}(t) = \sum_{s \in \gamma^{-1}(\mathcal{B})} \left[ \left( \pi - \widehat{\gamma(s)} - 2\pi I_{\gamma(s)} \right) - \left( \lim_{r \rightarrow s^+} \theta_{\bar{N}_h}^\gamma(r) - \lim_{r \rightarrow s^-} \theta_{\bar{N}_h}^\gamma(r) \right) \right] \mathbb{1}_{[0,t]}(s),$$

avec  $\widehat{\gamma(s)}$  la mesure de l'ouverture angulaire de la frontière en  $\gamma(s)$ .

ne pas oublié thetah pour le non-simplement connexe

## 1.4 Etude de la méthode

### 1.4.1 Analyse de convergence

### 1.4.2 Lien entre $\bar{u}$ et $\bar{u}_h$

**Lemme 1.2.**  $\mathcal{S}_{\bar{u}} = \mathcal{S}_{\bar{u}_h}$

Lorsque  $h$  tend vers 0,  $u_h$  tend vers  $u$

champ de croix  $u$  isolé donc  $u_h$  isolé

vers quoi tend  $Q_h$  ?

On se rend compte que les normales ne match pas.

Je me suis aligné avec les normales d'une autre géométrie. Laquelle ?

On a eu  $Q_h$ .

Lorsque  $h$  tend vers 0

Le partitionnement  $Q_h$  obtenu suite au partitionnement est 'il une decomposition en région de quatres côtés de  $\Omega_h$  ?

En quel sens le partitionnement  $Q_h$  obtenu est

## 1.5 Génération de champs de croix

edp  
z-ai  
somme flux triangle

### Construction d'un maillage quadrilatéral

De manière similaire à ce qui a été exposé dans le chapitre précédent, nous entamons d'abord la mise en place du processus de partitionnement de  $\Omega_h$ , puis nous revenons sur la discrétisation des différentes méthodes permettant d'aligner un champ de croix donné sur le bord du domaine sur lequel il est défini. Pour finir, nous abordons le maillage en quadrangles des régions à quatre côtés résultant du partitionnement de  $\Omega_h$ .

#### Traitement des bords

#### Obtention du maillage quadrilatéral

Description de l'interpolation transfini.

### Interprétation du partitionnement

En vrai  $v_h$  pas aligné avec  $\omega_{\Omega_h}$  donc pas de raison que ça marche  
 $v_h$  tend vers  $v$   $S_h$  tend vers  $S$   $R_h$  tend vers  $R$  chap 2 marche par  $v$   $S$  et  $R$  donc partitionnement a 4 cotés Donc  $Q_h$  est un maillage de  $\omega_{\Omega_h}$

Notons que le maillage  $\Omega_h$  est construit de sorte que  $\mathbf{B}$  soit inclut dans l'ensemble des sommets de  $\partial\Omega_h$ .

Jusqu'à présent, nous n'avons pas supposé que nous travaillions avec une discrétisation particulière. Dans ce chapitre, nous discrétisons la méthode sur des maillages triangulaires.

Dans le chapitre précédent, les composantes de premier plan mise en jeu sont : le domaine bornée  $\Omega$ , l'ensemble  $\mathbf{B}$  des points de  $\partial\Omega$  caractérisant la géométrie de  $\Omega$  et le champ de croix initial  $\bar{u}$  vérifiant l'hypothèse  $\mathbf{H}_1$ . Avec ces données, nous construisons un champ de croix  $\bar{v}$  aligné avec le bord de  $\Omega$  issue des différentes opérations abordés dans le chapitre précédent.  $\bar{v}$  est ensuite utilisé pour partitionner le domaine  $\Omega$  en régions de quatre côtés.

Commençons par exécuter le processus d'alignement sur le champ de croix  $\bar{u}_h$  puisque le champ de croix  $u$  dont il est l'approximation n'a aucune raison d'être aligné par rapport à  $\Omega$ . Pour se faire, nous cherchons un champ d'angle noté  $\phi_h$  et vérifiant l'équation suivante :

$$\begin{cases} \Delta\phi_h &= 0 \text{ dans } \Omega_h, \\ \phi_h &= \theta_{\bar{N}_h} - \theta_{\bar{u}_h} \text{ sur } \partial\Omega_h. \end{cases} \quad (1.11)$$

où  $\bar{N}_h$  correspond au champ de croix de la normale extérieur de  $\partial\Omega_h$ . Remarquons que  $\bar{N}_h$  est défini sur les arêtes de  $\partial\Omega_h$  mais n'est pas défini sur les sommets de  $\partial\Omega_h$ . Autrement dit, le champ de croix  $\bar{N}_h$  n'est pas compatible avec l'ensemble  $\mathbf{B}$  puisque les points singuliers de  $\bar{N}_h$  ne coïncident pas avec les points de l'ensemble  $\mathbf{B}$ .

Pour palier à ce problème, nous modifions la définition du champ de croix normal. Supposons que l'on puisse définir un champ de croix  $\widetilde{N}_h$  sur  $\partial\Omega_h$  tel que les points singuliers de  $N_h$  correspondent exactement aux points de l'ensemble  $\mathbf{B}$ . L'équation (1.11) devient alors :

$$\begin{cases} \Delta\phi_h &= 0 \text{ dans } \Omega_h, \\ \phi_h &= \theta_{\widetilde{N}_h} - \theta_{\bar{u}_h} \text{ sur } \partial\Omega_h. \end{cases} \quad (1.12)$$

La résolution de l'équation (1.12) permet de construire le champ de croix  $\bar{v}_h$  sur  $\Omega_h$  définit par :

$$\bar{v}_h : p \in \Omega_h \longrightarrow \bar{v}_h(p) = \mathbf{R}(\phi_h(p))\bar{u}_h(p).$$

On ne peut interpoler directement le champ de croix, on passe par un champ de vecteur intermédiaire appelé champ de représentation ??,

Cependant, il est clair que  $\bar{v}_h$  n'est pas aligné avec  $\partial\Omega_h$  puisque  $\bar{v}_h = \tilde{N}_h$  sur  $\partial\Omega_h$ . Autrement dit, le champ de croix  $\bar{v}_h$  est aligné avec un domaine que nous notons  $\tilde{\Omega}_h$  et dont la normale extérieure est associée au champ de croix  $\tilde{N}_h$ .  $\bar{v}_h$  n'étant pas défini sur  $\tilde{\Omega}_h$  nous définissons une opération appelée *lift* et noté  $\mathbf{L}$  permettant de transporter une fonction définie sur un domaine vers un autre domaine. Nous désignons alors par  $\tilde{v}_h = \mathbf{L}_{\tilde{\Omega}_h}^{\Omega_h} \bar{v}_h$  le lift de  $\bar{v}_h$  de  $\Omega_h$  vers  $\tilde{\Omega}_h$ . Le champ de croix  $\tilde{v}_h$  ainsi défini est aligné avec  $\partial\tilde{\Omega}_h$  (bord de  $\tilde{\Omega}_h$ ) ce qui nous permet d'appliquer l'algorithme de partitionnement défini dans le chapitre ?? à  $\tilde{v}_h$  sur  $\tilde{\Omega}_h$ .

### Définition de $\tilde{N}_h$ et $\tilde{\Omega}_h$

#### Définition du Lift

#### Discussion sur $Q_h$

utiliser dans l'équation (1.11) en définissant le champ de croix  $\tilde{N}$  de la manière suivante :

$$\forall p \in \partial\Omega_h, \quad \tilde{N}(p) = \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$$

L'équation (1.11) devient alors :

Suite à la résolution de l'équation (1.12) sur  $\Omega_h$ , on peut construire le champ de croix  $\bar{v}_h = \mathbf{R}(\phi_h)\bar{u}_h$  sur  $\Omega_h$ . On remarque alors que le champ de croix  $\bar{v}_h$  ainsi construit n'est pas aligné avec  $\Omega_h$ .

#### Définition de $\tilde{\Omega}$

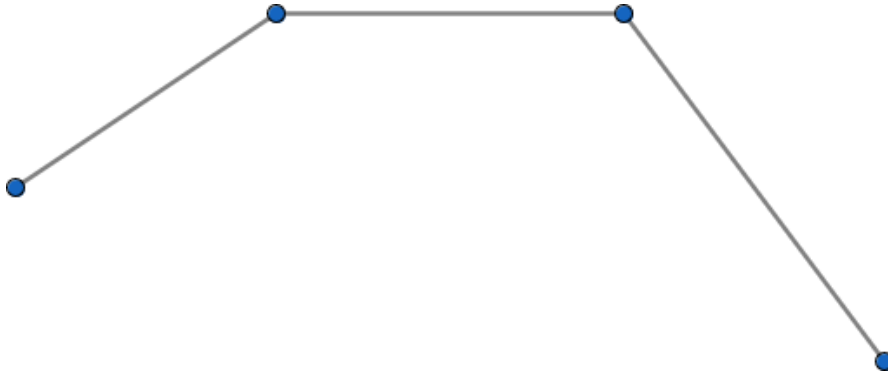


FIGURE 1.5



Définition du lift  $\mathbf{L}$

Définition de  $\tilde{v} = \mathbf{L}_{\Omega_h}^{\tilde{\Omega}} v_h$

Comparaison de  $v$  et  $\tilde{v}$

$$\begin{aligned}
 \|v - \mathbf{L}_{\Omega}^{\tilde{\Omega}} \tilde{v}\| &\leq \| \mathbf{R}(\phi)u - \mathbf{R}(\phi)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h \| + \| \mathbf{R}(\phi)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h - \mathbf{L}_{\Omega}^{\tilde{\Omega}} \tilde{v} \| \\
 &\leq \| \mathbf{R}(\phi)u - \mathbf{R}(\phi)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h \| + \| \mathbf{R}(\phi)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h - \mathbf{R}(\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} \phi_h)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h \| + \\
 &\quad \| \mathbf{R}(\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} \phi_h)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h - \mathbf{L}_{\Omega}^{\tilde{\Omega}} \tilde{v} \| \\
 &\leq \| \mathbf{R}(\phi)u - \mathbf{R}(\phi)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h \| + \| \mathbf{R}(\phi)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h - \mathbf{R}(\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} \phi_h)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h \| + \\
 &\quad \| \mathbf{R}(\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} \phi_h)\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} u_h - \mathbf{L}_{\Omega}^{\tilde{\Omega}} \mathbf{R}(\phi_h)u_h \|
 \end{aligned}$$

## Algorithmes

remarque sur le tracé des "streamlines" dans un triangle singulier en comparaison avec ce que fait viertel sachant que le champ n'est pas linéaire dans un tel triangle

## Exemples

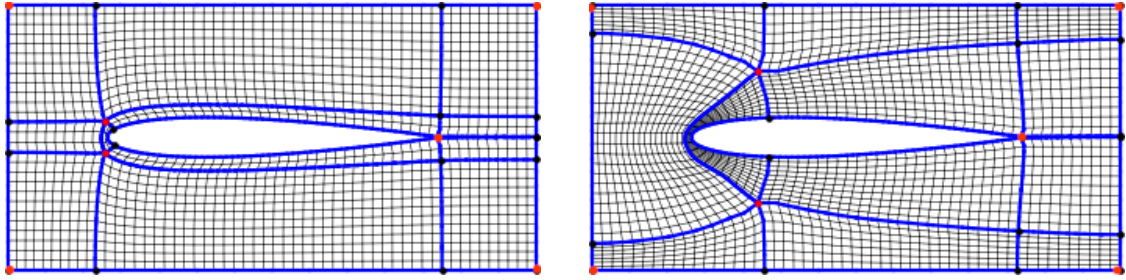


FIGURE 1.6 – Mesh of Naca0012 with two different configurations of singular points. The initial cross-fields were obtained using formula (??) .

Structure de donnée  
représentation des multimatériau

structure de donnée mesh

generation champ de croix  
discretisation par vertex  
alignement champ de croix

index  
seul type 1 0 -1

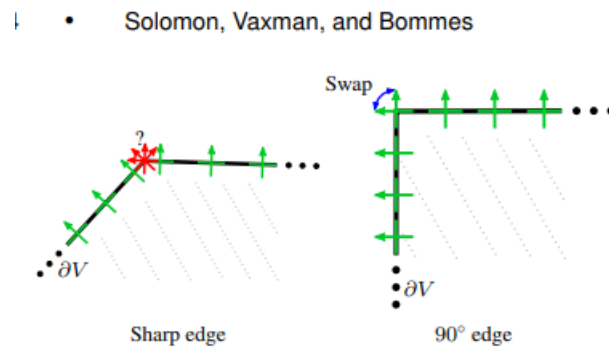


FIGURE 1.7 – Caption

N'importe quel champ  $\rightarrow$  mesh quad  
 préserver les points singuliers  
 Montrer simplement  $\phi = N \cdot U$  et sa trace  
 déplacer ensuite les singularité vers où ion veut

Complementary Operations Irregular Vertex Cancellation : We can move a  $v_3$  vertex to collide with a  $v_5$  vertex, or vice versa, by applying multiple pair-wise movement operations. When one  $v_3$  and one  $v_5$  vertex collide they cancel each other and both become regular. At least one other irregular vertex needs to be involved in this cancellation. In this fashion we develop a  $3 \ 5$  pair cancellation operation. It is possible that the last step of a  $3 \ 5$  pair cancellation is equivalent to one  $3 \ 3 \ 5 \ 5$  removal operation and two pairs of irregular vertices are canceled at once. Examples can be found in Figures 16 and 17. Irregular Vertex Merging : A  $3 \ 3$  pair can be merged to a  $v_2$  vertex and a  $5 \ 5$  pair can be merged to a  $v_6$  vertex when their graph distance is even. Theorems 7.2 and 7.3 provide the theoretical analysis that is related to such a merge. Irregular Vertex Alignment : Under the assumptions of Theorems 7.2 and 7.3, arbitrary  $3 \ 3$  and  $5 \ 5$  pairs can be aligned by applying multiple movement operations until  $d_1 = 0$  or  $d_2 = 0$ . Smoothing : We use iterative Laplacian mesh smoothing to improve the geometry if the connectivity edits degrade the shape of the mesh above a user-defined tolerance. The user can select uniform weights or cord-length weights, and elect to preserve sharp features by constraining the positions of vertices on sharp edges. The smoothing scheme can improve the aspect ratios of modified faces. After each iteration all vertices are projected back onto the original mesh. We have also experimented with a scheme in which newly generated vertices are pulled towards vertices in the original mesh if the distance between the new and original vertices is above a threshold. The projection and pulling scheme can narrow the difference to the original mesh.

9 Connectivity Editing for Quadrilateral Meshes  
 Chi-Han Peng Arizona State University Eugene Zhang† Oregon State University Yoshihiro Kobayashi‡ Arizona State University Peter Wonka§ Arizona State University / KAUST

# Chapitre 2

## Annexes

Annexes

Caractéristique d'Euler

Résolution numérique laplacien-Beltrami



# Références

- [Allaire, 2005] Allaire, G. (2005). Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. *Editions Ecole Polytechnique*, 22.
- [Alliez et al., 2003] Alliez, P., Cohen-Steiner, D., Devillers, O., Lévy, B., and Desbrun, M. (2003). Anisotropic polygonal remeshing. In *ACM SIGGRAPH 2003 Papers*, pages 485–493.
- [Arnold et al., 2000] Arnold, D. N., Brezzi, F., Cockburn, B., and Marini, D. (2000). Discontinuous galerkin methods for elliptic problems. In *Discontinuous Galerkin Methods : Theory, Computation and Applications*, pages 89–101. Springer.
- [Baker, 2005] Baker, T. J. (2005). Mesh generation : Art or science ? *Progress in Aerospace Sciences*, 41(1) :29–63.
- [Barth and Ohlberger, 2003] Barth, T. and Ohlberger, M. (2003). Finite volume methods : foundation and analysis.
- [Beaufort et al., 2017] Beaufort, P.-A., Lambrechts, J., Henrotte, F., Geuzaine, C., and Remacle, J.-F. (2017). Computing cross fields a pde approach based on the ginzburg-landau theory. *Procedia engineering*, 203 :219–231.
- [Blacker and Stephenson, 1991] Blacker, T. D. and Stephenson, M. B. (1991). Paving : A new approach to automated quadrilateral mesh generation. *International journal for numerical methods in engineering*, 32(4) :811–847.
- [Bommes et al., 2013] Bommes, D., Lévy, B., Pietroni, N., Puppo, E., Silva, C., Tarini, M., and Zorin, D. (2013). Quad-mesh generation and processing : A survey. In *Computer graphics forum*, volume 32, pages 51–76. Wiley Online Library.
- [Bommes et al., 2009] Bommes, D., Zimmer, H., and Kobbelt, L. (2009). Mixed-integer quadrangulation. *ACM Transactions On Graphics (TOG)*, 28(3) :1–10.
- [Botella, 2016] Botella, A. (2016). *Génération de maillages non structurés volumiques de modèles géologiques pour la simulation de phénomènes physiques*. PhD thesis, Université de Lorraine.
- [Bowyer, 1981] Bowyer, A. (1981). Computing dirichlet tessellations. *The computer journal*, 24(2) :162–166.
- [Bunin, 2008] Bunin, G. (2008). Towards unstructured mesh generation using the inverse poisson problem. *arXiv preprint arXiv :0802.2399*.
- [Campen et al., 2015] Campen, M., Bommes, D., and Kobbelt, L. (2015). Quantized global parametrization. *Acm Transactions On Graphics (tog)*, 34(6) :1–12.
- [Catmull and Clark, 1998] Catmull, E. and Clark, J. (1998). Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological meshes. In *Seminal graphics : pioneering efforts that shaped the field*, pages 183–188.

- [Cohen-Steiner et al., 2002] Cohen-Steiner, D., De Verdiere, E. C., and Yvinec, M. (2002). Conforming delaunay triangulations in 3d. In *Proceedings of the eighteenth annual symposium on Computational geometry*, pages 199–208.
- [D’azevedo, 2000] D’azevedo, E. F. (2000). Are bilinear quadrilaterals better than linear triangles? *SIAM Journal on Scientific Computing*, 22(1) :198–217.
- [de Moura Pinto and Freitas, 2009] de Moura Pinto, F. and Freitas, C. M. D. S. (2009). Fast medial axis transform for planar domains with general boundaries. In *2009 XXII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing*, pages 96–103. IEEE.
- [Ern and Guermond, 2004] Ern, A. and Guermond, J.-L. (2004). *Theory and practice of finite elements*, volume 159. Springer.
- [Fogg et al., 2015] Fogg, H. J., Armstrong, C. G., and Robinson, T. T. (2015). Automatic generation of multiblock decompositions of surfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 101(13) :965–991.
- [Forsythe et al., 1961] Forsythe, G. E., Wasow, W. R., and Nachbar, W. (1961). Finite-difference methods for partial differential equations.
- [George and Borouchaki, 1997] George, P. L. and Borouchaki, H. (1997). *Triangulation de Delaunay et maillage : applications aux éléments finis*. Hermes.
- [George and Frey, 2013] George, P. L. and Frey, P. (2013). *Mesh generation : application to finite elements*. John Wiley & Sons.
- [George and Seveno, 1994] George, P. L. and Seveno, É. (1994). The advancing-front mesh generation method revisited. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(21) :3605–3619.
- [Gourdain et al., 2010] Gourdain, N., Duchaine, F., Gicquel, L. Y., and Collado, E. (2010). Advanced numerical simulation dedicated to the prediction of heat transfer in a highly loaded turbine guide vane. In *Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air*, volume 44021, pages 807–820.
- [Gurung et al., 2011] Gurung, T., Laney, D., Lindstrom, P., and Rossignac, J. (2011). Squad : Compact representation for triangle meshes. In *Computer Graphics Forum*, volume 30, pages 355–364. Wiley Online Library.
- [Hecht, 2007] Hecht, F. (2007). Maillage 2d, 3d, adaptation.
- [Höhring et al., 1997] Höhring, R. H., Müller-Hannemann, M., and Wiehe, K. (1997). Mesh refinement via bidirected flows : Modeling, complexity, and computational results. *Journal of the ACM (JACM)*, 44(3) :395–426.
- [Hopf, 1935] Hopf, H. (1935). Über die drehung der tangente und sehnene ebener kurven. *Compositio mathematica*, 2 :50–62.
- [Ives, 1995] Ives, D. (1995). Geometric grid generation. surface modeling, grid generation, and related issues in computational fluid dynamic (cf) solutions. In *Proceedings NASA-conference, Cleveland, Ohio, NASA CP-3291*.
- [Jezdimirovic et al., 2021] Jezdimirovic, J., Chemin, A., Reberol, M., Henrotte, F., and Remacle, J.-F. (2021). Quad layouts with high valence singularities for flexible quad meshing. *Proceedings of the 29th Meshing Roundtable*.
- [Kälberer et al., 2007] Kälberer, F., Nieser, M., and Polthier, K. (2007). Quadcover-surface parameterization using branched coverings. In *Computer graphics forum*, volume 26, pages 375–384. Wiley Online Library.

- [Kirkup, 2019] Kirkup, S. (2019). The boundary element method in acoustics : A survey. *Applied Sciences*, 9(8) :1642.
- [Kowalski et al., 2013] Kowalski, N., Ledoux, F., and Frey, P. (2013). A pde based approach to multidomain partitioning and quadrilateral meshing. In *Proceedings of the 21st international meshing roundtable*, pages 137–154. Springer.
- [LeVeque, 2002] LeVeque, R. J. (2002). *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31. Cambridge university press.
- [Liu et al., 2006] Liu, Y., Vinokur, M., and Wang, Z. J. (2006). Spectral difference method for unstructured grids i : Basic formulation. *Journal of Computational Physics*, 216(2) :780–801.
- [Lo, 1989] Lo, S. (1989). Generating quadrilateral elements on plane and over curved surfaces. *Computers & structures*, 31(3) :421–426.
- [Löhner, 1996] Löhner, R. (1996). Progress in grid generation via the advancing front technique. *Engineering with computers*, 12 :186–210.
- [Löhner, 2014] Löhner, R. (2014). Recent advances in parallel advancing front grid generation. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 21 :127–140.
- [Macq et al., 2020] Macq, A., Reberol, M., Henrotte, F., Beaufort, P.-A., Chemin, A., Remacle, J.-F., and Van Schaftingen, J. (2020). Ginzburg-landau energy and placement of singularities in generated cross fields. *arXiv preprint arXiv :2010.16381*.
- [Marcon et al., 2019] Marcon, J., Kopriva, D. A., Sherwin, S. J., and Peiró, J. (2019). A high resolution pde approach to quadrilateral mesh generation. *Journal of Computational Physics*, 399 :108918.
- [Marinov and Kobbelt, 2004] Marinov, M. and Kobbelt, L. (2004). Direct anisotropic quad-dominant remeshing. In *12th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications, 2004. PG 2004. Proceedings.*, pages 207–216. IEEE.
- [Mitchell, 2000] Mitchell, S. A. (2000). High fidelity interval assignment. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 10(04) :399–415.
- [Mitchell, 2014] Mitchell, S. A. (2014). Simple and fast interval assignment using nonlinear and piecewise linear objectives. In *Proceedings of the 22nd International Meshing Roundtable*, pages 203–221. Springer.
- [Myles et al., 2014] Myles, A., Pietroni, N., and Zorin, D. (2014). Robust field-aligned global parametrization. *ACM Trans. Graph.*, 33(4) :135–1.
- [Nackman and Srinivasan, 1989] Nackman, L. R. and Srinivasan, V. (1989). Method of generating finite elements using the symmetric axis transform. US Patent 4,797,842.
- [Nédélec, 2001] Nédélec, J.-C. (2001). *Acoustic and electromagnetic equations : integral representations for harmonic problems*, volume 144. Springer.
- [Nieser et al., 2011] Nieser, M., Reitebuch, U., and Polthier, K. (2011). Cubecover—parameterization of 3d volumes. In *Computer graphics forum*, volume 30, pages 1397–1406. Wiley Online Library.
- [Norrie and De Vries, 2014] Norrie, D. H. and De Vries, G. (2014). *The finite element method : fundamentals and applications*. Academic Press.
- [Owen, 1998] Owen, S. J. (1998). A survey of unstructured mesh generation technology. *IMR*, 239(267) :15.

- [Owen et al., 1998] Owen, S. J., Staten, M. L., Canann, S. A., and Saigal, S. (1998). Quad-morphing : advancing front quad meshing using triangle transformations. *Proceedings 7th International Meshing Roundtable, Dearborn, MI*.
- [Owen et al., 1999] Owen, S. J., Staten, M. L., Canann, S. A., and Saigal, S. (1999). Q-morph : an indirect approach to advancing front quad meshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 44(9) :1317–1340.
- [Palacios and Zhang, 2007] Palacios, J. and Zhang, E. (2007). Rotational symmetry field design on surfaces. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 26(3) :55–es.
- [Ray et al., 2006] Ray, N., Li, W. C., Lévy, B., Sheffer, A., and Alliez, P. (2006). Periodic global parameterization. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 25(4) :1460–1485.
- [Ray et al., 2008] Ray, N., Vallet, B., Li, W. C., and Lévy, B. (2008). N-symmetry direction field design. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 27(2) :1–13.
- [Reberol, 2018] Reberol, M. (2018). *Maillages hex-dominants : génération, simulation et évaluation*. PhD thesis, Phd Thesis). Université de Lorraine.
- [Remacle et al., 2012] Remacle, J.-F., Lambrechts, J., Seny, B., Marchandise, E., Johnen, A., and Geuzainet, C. (2012). Blossom-quad : A non-uniform quadrilateral mesh generator using a minimum-cost perfect-matching algorithm. *International journal for numerical methods in engineering*, 89(9) :1102–1119.
- [Rivière, 2008] Rivière, B. (2008). *Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations : theory and implementation*. SIAM.
- [Rotskoff, 2010] Rotskoff, G. (2010). *The Gauss-Bonnet Theorem*. PhD thesis, Master thesis, University of Chicago.
- [Schneiders, 1996] Schneiders, R. (1996). A grid-based algorithm for the generation of hexahedral element meshes. *Engineering with computers*, 12 :168–177.
- [Shepherd and Johnson, 2008] Shepherd, J. F. and Johnson, C. R. (2008). Hexahedral mesh generation constraints. *Engineering with Computers*, 24(3) :195–213.
- [Smith, 1985] Smith, G. D. (1985). *Numerical solution of partial differential equations : finite difference methods*. Oxford university press.
- [Stummel, 2006] Stummel, F. (2006). Difference methods for linear initial value problems. In *Numerische Behandlung nichtlinearer Integrodifferential-und Differentialgleichungen : Vorträge einer Tagung im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, 2. 12.–7. 12. 1973*, pages 123–135. Springer.
- [Taghavi, 1994] Taghavi, R. (1994). Automatic parallel and fault tolerant mesh generation from cad on cray research super computers. In *Proc. CUG Conference, Tours, France*.
- [Tam, 1991] Tam, T. (1991). 2d finite element mesh generation by medial axis subdivision. *Advances in engineering software and workstations*, 13(5-6) :313–324.
- [Van den Abeele et al., 2008] Van den Abeele, K., Lacor, C., and Wang, Z. J. (2008). On the stability and accuracy of the spectral difference method. *Journal of Scientific Computing*, 37 :162–188.
- [Viertel and Oosting, 2019] Viertel, R. and Oosting, B. (2019). An approach to quad meshing based on harmonic cross-valued maps and the ginzburg–landau theory. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 41(1) :A452–A479.
- [Watson, 1981] Watson, D. F. (1981). Computing the n-dimensional delaunay tessellation with application to voronoi polytopes. *The computer journal*, 24(2) :167–172.



- 
- [White and Kinney, 1997] White, D. R. and Kinney, P. (1997). Redesign of the paving algorithm : Robustness enhancements through element by element meshing. In *6th international meshing roundtable*, volume 10, page 830.
- [Wu, 2002] Wu, T. (2002). Boundary element acoustics fundamentals and computer codes.
- [Yerry and Shephard, 1983] Yerry, M. and Shephard, M. (1983). Finite element mesh generation based on a modified-quadtrees approach. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 3(1) :36–46.
- [Zienkiewicz and Taylor, 2005] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (2005). *The finite element method for solid and structural mechanics*. Elsevier.