Ecuaciones diferenciales II

Clase I

Primer repaso

Eigen valores y eigen vectores

Repasaremos 2 temas:

1. Eigen valores y Eigen vectores
2. Solución de sistemas de ecuaciones

Estos dos temas seran utilizados para resolver ecuaciones diferenciales.

Los eigen vectores, también se llaman vectores característicos.

¿Qué son los eigen vectores y eigen valores?

Suponiendo que tenemos una matriz "M", entonces esa matriz actúa como una transformación. Es decir, si esa matriz la multiplico por un vector, voy a obtener otro vector. Por lo que lo transforma

Ejemplo

- El numero de columnas de la matriz debe coincidir con el numero de renglones del vector.
- El efecto de la matriz sobre el vector es que lo transforma en un vector nuevo.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x - 6y \end{pmatrix}$$

- También puede haber escalares que actúan sobre un vector, estos escalares están denotados por la letra lambda.

$$\lambda \overline{X} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$$

- Los vectores se pueden transformar al ser multiplicados por una matriz o por una constante.
- Los eigen vectores son vectores especiales a los cuales transforma una matriz y se obtiene el mismo resultado que si se multiplicara por una constante.

- Si yo tengo una matriz M, entonces se cumple la siguiente propiedad.

$$M\overline{X} = \lambda \overline{X} = \lambda I \overline{X}$$

- Debemos resolver esta ecuación ya que queremos encontrar los eigen vectores $\overline{X}$ y los eigen valores λ que hagan posible que la accion de la matriz de el mismo resultado que multiplicar por una constante.

Resolvemos:

$M\overline{X} - \lambda I \overline{X} = 0$

Queremos encontrar la lambda y la x que hacen posible esta expresión

$(M - \lambda I)\overline{X} = 0$

Una solución trivial es que la x valga 0, por lo que esta solución no aporta ninguna información.

- Para encontrar soluciones no triviales debemos calcular el determinante, ya que si este es igual a 0 entonce podemos buscar los eigen vectores y eigen valores.

Se tiene que cumplir que:

$\det(M - \lambda I) = 0$

Ya que si el determinante es diferente de 0, significa que no es una solución única.

Ejemplo

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$
$$\det(M - \lambda I) = \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - \lambda(I) \right) = 0$$
$$\det \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Resolvemos el determinante

$$(2-\lambda)(-6-\lambda) - 9 = 0$$
$$-12 - 2\lambda + 6\lambda + \lambda^2 - 9 = 0$$
$$\lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$$
$$(\lambda + 7)(\lambda - 3) = 0$$

Eigen valores

$\lambda = -7$
$\lambda = 3$

Ahora tenemos que encontrar los eigen vectores:

$$Si \ \ \lambda = -7:$$
$$\begin{pmatrix} 2-(-7) & 3 \\ 3 & -6-(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & | & 0 \\ 3 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & | & 0 \\ 3 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & | & 0 \\ 3 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que:

$3x + y = 0$

$-3x = y$

Entonces nuestro eigen vector es:

$\begin{pmatrix} c_1 \\ -3c_1 \end{pmatrix}$

Ahora debemos obtener nuestro otro eigen vector con $\lambda = 3$

$$Si \;\; \lambda = 3:$$

$$\begin{pmatrix} 2-(3) & 3 \\ 3 & -6-(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & | & 0 \\ 3 & -9 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & | & 0 \\ 3 & -9 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & | & 0 \\ 3 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos que:

$-x + 3y = 0$

$3y = x$

Eigen vector:

$\begin{pmatrix} 3c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Segundo paso

Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} - 2x - 3y = 0$$
$$\frac{dy}{dt} - 3x + 6y = 0$$

Esto se resolvia con un operador diferencial, es decir en lugar de poner la diferencial se ponia una D.

$D = \frac{d}{dt}$

Por lo que podemos reescribirlo de la siguiente manera:

$$Dx - 2x - 3y = 0$$
$$Dy - 3x + 6y = 0$$

Por lo que factorizando:

$$(D-2)x - 3y = 0$$
$$-3x + (D+6)y = 0$$

Resolvemos multiplicando por 3 la expresión de arriba para desaparecer las x y el de abajo por D - 2.

$$3(D-2)x - 9y = 0$$
$$-3(D-2)x + (D+6)(D-2)y = 0$$

Eliminamos y tenemos la expresión final:

$((D+6)(D-2) - 9)y = 0$

$\left(D^2 + 4D - 21\right)y = 0$

$D^2 + 4D - 21 = 0$

$(D+7)(D-3) = 0$

$D = -7 \quad D = 3$

$y = C_1 e^{-7t} + C_2 e^{3t}$

Ya tenemos el valor de la y, ahora debemos obtener el valor de la x.

$\frac{dy}{dt} = -7C_1 e^{-7t} + 3C_2 e^{3t}$

Derivamos debido a que haremos un despeje de la ecuación inicial para obtener la x.

$3x = -7C_1 e^{-7t} + 3C_2 e^{3t} + 6 \cdot (C_1 e^{-7t} + C_2 e^{3t})$

$3x = -7C_1 e^{-7t} + 3C_2 e^{3t} + 6C_1 e^{-7t} + 6C_2 e^{3t}$

$3x = -C_1 e^{-7t} + 9C_2 e^{3t}$

Resultado de x:

$x = \frac{-1}{3} C_1 e^{-7t} + 3C_2 e^{3t}$

Con esto ya tenemos una solución:

- $x = \frac{-1}{3} C_1 e^{-7t} + 3C_2 e^{3t}$
- $y = C_1 e^{-7t} + C_2 e^{3t}$

Invertimos los signos de las ecuaciones originales y las igualamos al operador diferencial. Esto lo logramos con un despeje:

$$\begin{aligned} Dx = 2x + 3y \\ Dy = 3x - 6y \end{aligned}$$

De este modo lo podemos ver como el producto de la multiplicación de un vector por una matriz:

$$D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que las ecuaciones diferenciales siempre las puedo escribir como el producto de una matriz

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}C_1 & 3C_2 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-7t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

1.

- $\frac{dx}{dt} = 2x + 3y$
- $\frac{dy}{dt} = 2x + y$

Respuesta

$$D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = 2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 = 6$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = 4 \quad \lambda = 1$$

Obtenemos los eigen vectores

$$si \quad \lambda = 4$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & | & 0 \\ 3 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$-2x + 3y = 0$

$2x = 3y$

$x = \frac{3}{2}y$

$$\lambda = -1 \begin{pmatrix} 3 & 3 & | & 0 \\ 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$x + y = 0$

$x = -y$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}C_1 & -C_2 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

Solución por multiplicación de matrices

$x = \frac{3}{2}C_1e^{4t} - C_2e^{-t}$

$y = C_1e^{4t} + C_2e^{-t}$

Ejercicio Final

- $\frac{dx}{dt} = 3x - 2y$
- $\frac{dy}{dt} = x$