# Ecuaciones diferenciales clase 14

## Como funcionan los cambios de variable con las transformadas

$$L\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{st} f(t)dt = F(0) = F$$
$$L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{st} x(t)dt = X(0) = X$$
$$L\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{st} y(t)dt = Y(0) = Y$$

- Al ser transformadas se convierten en su forma mayúscula.

# Ejemplo sistemas de ecuaciones diferenciales

Vamos a resolver el ejercicio que vimos la clase pasada. Es decir ejercicios con sistemas de dos ecuaciones diferenciales.

Vamos a resolver un sistema no homogéneo.

- Estos sistemas no los resolvemos con frecuencia

$$\begin{cases} 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x = 1 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x - 3y = 2 \end{cases}$$

**Condiciones iniciales**

$$x(0) = 0$$
$$y(0) = 0$$

- Tenemos este sistema de dos ecuaciones con dos incognitas y queremos resolverlo
- Para resolverlo tenemos que transformarlo todo con las tablas que tenemos.
- Es decir haremos un sistema que tenga s.

$$\begin{cases} 2sX - sY - 2X = \frac{1}{s} \\ sX + sY - 3x - 3y = \frac{2}{s} \end{cases}$$

- De este modo ya tenemos las ecuaciones transformadas.
- Agrupamos las X y las Y factorizando.

$$\begin{cases} (2s-2)X + sY = \frac{1}{s} \\ (s-3)X + (s-3)Y = \frac{2}{s} \end{cases}$$

- Este es el sistema que vamos a resolver y despues vamos a anti-transformar.
- Obtener cualquier variable esta complicado.
- Vamos a desaparecer la variable Y.

$$\begin{cases} (s-3)(2s-2)X + s(s-3)Y = \frac{s-3}{s} \\ -(s-3)X - s(s-3)Y = -2 \end{cases}$$

- Al sumarlas nos queda:

$$\left((s-3)(2s-2) - s(s-3)\right) X = \frac{s-3}{s} - 2$$
$$\left((s-3)(2s-2-s)\right) X = \frac{s}{s} - \frac{3}{s} - 2$$
$$(s-3)(s-2)X = -1 - \frac{3}{s}$$

- Ahora ya tenemos la X

$$X = \frac{1}{(s-3)(s-2)} - \frac{3}{s(s-3)(s-2)}$$

- Podemos buscar en la tabla y nos damos cuenta de que el primero tiene la forma de la formula 28 , pero el segundo es mas complicado. Por eso debemos cambiarle la forma a ese termino.

$$\frac{3}{s(s-3)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-2}$$
$$Entonces:$$
$$\frac{A(s-3)(s-2) + Bs(s-2) + Cs(s-3)}{s(s-3)(s-2)}$$

- Con esto tenemos una igualdad con denominadores idénticos, ahora obtenemos los valores de A,B,C evaluando los valores de s.

$$s = 0 \quad 6A = -3 \quad A = -\frac{1}{2}$$
$$s = 3 \quad 3B = -3 \quad B = -1$$
$$s = 2 \quad -2C = -3 \quad C = \frac{3}{2}$$

- Ahora el termino que no sabiamos anti-transformar se convierte en lo siguiente

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{s-3} + \frac{3}{2}\frac{1}{s-2}$$

- Ahora si podemos anti-transformar:
- Formula 28

| | | |
|---|---|---|
| **28.** | $\dfrac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$ | $\dfrac{1}{(s - a)(s - b)}$ |

$$x(t) = e^{3t} - e^{2t}$$

**Resultado final**

$$x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t}$$

- Ahora resolvemos para la y, de tarea.

# Ejercicio

1.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - x + 2y = 0 \\ \frac{dy}{dt} - 5x + y = 0 \end{cases}$$

**Condiciones iniciales**

$$x(0) = -1$$
$$y(0) = 2$$

**Solución**

- Para resolver el valor de y hay que desaparecer la x. Por eso primero la transformamos.

$$\begin{cases} 2(s-1)x + sy = \frac{1}{s} \\ (s-3)x + (s-3)y = \frac{2}{s} \end{cases}$$

- Multiplicamos por los valores correspondientes para eliminar la X

$$\begin{cases} 2(s-3)(s-1)x + s(s-3)y = \frac{s-3}{s} \\ -2(s-1)(s-3)x + 2(s-1)(s-3)y = \frac{4(s-1)}{s} \end{cases}$$

- Realizamos la suma del sistema para eliminar la X.

$$(s(s-3) - 2(s-1)(s-3))y = \frac{s-3}{s} - \frac{4(s-1)}{s}$$
$$(s-3)(s-2s+2)y = \frac{s-3-4s+4}{s} = \frac{-3s}{s} + \frac{1}{s} = -3 + \frac{1}{s}$$
$$(s-3)(-s+2)y = -3 + \frac{1}{s}$$

- Despejamos y

$$y = \frac{3}{(s-3)(s-2)} + \frac{1}{s(s-3)(s-2)}$$

- El primero se hace con la formula 28 y el segundo se hace con fracciones parciales como el que resolvimos hace rato.

**Fracciones parciales**

$$\frac{1}{s(s-3)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-2}$$

Entonces:

$$\frac{a(s-3)(s-2) + Bs(s-2) + Cs(s-3)}{s(s-3)(s-2)}$$

- Evaluamos los posibles valores de s:

$$s = 0 \quad 6A = 1 \quad A = \frac{1}{6}$$
$$s = 3 \quad 3B = 1 \quad B = \frac{1}{3}$$
$$s = 2 \quad 2C = 1 \quad C = -\frac{1}{2}$$

- Con esto ya podemos colocar el valor de y, en una forma que lo podamos anti-transformar.

$$y = \frac{3}{(s-3)(s-2)} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-2}$$

**Resultado anti-transformando**

$$y(t) = 3^{3t} - 3e^{2t} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{2t} = \frac{8}{3}e^{3t} - \frac{5}{2}e^{3t} - \frac{1}{6}$$

2.

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = t^2 \\ \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2} = 4t \end{cases}$$

$x(0) = 8 \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0$

$y(0) = 0 \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0$