Clase 2 - 16 de agosto

Sistemas de ecuaciones 3x3

Recapitulando la clase pasada

Si tenemos el siguiente sistema:

- $\frac{dx}{dt} = 3x + 2y$
- $\frac{dy}{dt} = 3x + 8y$

Esto lo podemos ver como un sistema de matrices:

$$D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$Entonces:$$
$$\lambda\overline{X} = M\overline{X}$$
$$Obtenemos \;\; EigenValores:$$
$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & 8-\lambda \end{pmatrix}$$
$$M\overline{X} - \lambda I\overline{X} = 0$$
$$(M - \lambda I)\overline{X} = 0$$
$$Formula \;\; determinante:$$
$$(3-\lambda)(8-\lambda) - 6 = 0$$
$$24 - 3\lambda - 8\lambda + \lambda^2 - 6 = 0$$
$$\lambda^2 - 11\lambda + 18 = 0$$
$$(\lambda - 9)(\lambda - 2) = 0$$
$$Eigenvalores:$$
$$\lambda = 9 \quad \lambda = 2$$

Obtenemos Eigenvectores

$$Si \;\; \lambda = 9:$$
$$\begin{pmatrix} 3-9 & 2 \\ 3 & 8-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & | & 0 \\ 3 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$-3x + y = 0$

$y = 3x$

Eigenvector

$ \begin{pmatrix} C_1 \\ 3C_1 \end{pmatrix}$

Lo hacemos para el otro eigen valor

$$Si \ \ \lambda = 2:$$
$$\begin{pmatrix} 3-2 & 2 \\ 3 & 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$x + 2y = 0$

$x = -2y$

Eigenvector

$\begin{pmatrix} -2C_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$

Solución

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & -2C_2 \\ 3C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{9t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

Tema de hoy

Podemos ver un caso como el problema de los depósitos de los tinacos en donde se pasa agua de un lado a otro de tal manera que lo podemos modelar con ecuaciones diferenciales.

- También se puede modelar con matrices 3x3

Ejemplo

$$\frac{dx}{dt} = -4x + y + z$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 5y - z$$
$$\frac{dz}{dt} = y - z$$

Transformamos todo a vectores y matrices:

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Obtención de eigen valores

Obtenemos el determinante multiplicando las diagonales:

$$det = \begin{pmatrix} (-4-\lambda) & 1 & 1 \\ 1 & (5-\lambda) & -1 \\ 0 & 1 & (-3-\lambda) \\ (-4-\lambda) & 1 & 1 \\ 1 & (5-\lambda) & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que:

$$\lambda\overline{X} = M\overline{X}$$
$$M\overline{X} - \lambda I\overline{X} = \overline{0}$$
$$(M - \lambda I)\overline{X} = \overline{0}$$

Para obtener el determinante multiplicamos y sumamos las diagonales en cada lado y las restamos entre si:

$$[(-4-\lambda)(5-\lambda)(-3-\lambda)+1+0]-$$
$$[1\cdot(-4-\lambda)(5-\lambda)+-1+(-3-\lambda)\cdot 1\cdot 1+1+0]=0$$

Tras el procedimiento para obtener el determinante nos queda la siguiente ecuación:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 23\lambda - 60 = 0$$

	1	**2**	**-23**	**-60**
-4	1	-2	-15	0
5	1	3	0	
-3	1	0		

Los eigen valores obtenidos fueron : -4,5,-3

Primer eigen vector

Entonces ahora debemos generar los eigen vectores:

$$\begin{pmatrix} (-4-(-4)) & 1 & 1 \\ 1 & (5-(-4)) & -1 \\ 0 & 1 & (-3-(-4)) \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 9 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos formar las ecuaciones:

$$y + z = 0$$
$$y = -z$$
$$Sustituimos\ \ y\ \ por\ \ z$$
$$x - 9z - z = 0$$
$$x - 9C_1 - C_1 = 0$$
$$x - 10z = 0$$
$$x = 10z$$
$$x = 10C_1$$

Gracias a esto podemos obtener el primer eigen vector:

$$\begin{pmatrix} 10C_1 \\ -C_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$$

Segundo eigen vector

$$\begin{pmatrix} (-4-(5)) & 1 & 1 \\ 1 & (5-(5)) & -1 \\ 0 & 1 & (-3-(5)) \end{pmatrix}$$

La matriz queda:

$$\begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -8 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Teniendo nuestras ecuaciones sabemos que:

$$\begin{gathered} x - z = 0 \\ por\ lo\ tanto: \\ x = z \\ entonces: \\ y - 8z = 0 \\ y = 8z \\ ademas \\ -9x + y + z = 0 \\ -9x + 8z + z = 0 \\ -9x + 9z = 0 \\ -9z = -9x \\ x = z \end{gathered}$$

Por lo que nuestro eigen vector queda:

$$\begin{pmatrix} C_2 \\ 8C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Tercer eigen vector

$$\begin{pmatrix} (-4-(-3)) & 1 & 1 \\ 1 & (5-(-3)) & -1 \\ 0 & 1 & (-3-(-3)) \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 8 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos las ecuaciones

$$\begin{gathered} y = 0 \\ -x + 0 + z = 0 \\ x = z \end{gathered}$$

Ya que obtuvimos los tres valores formamos nuestro terecer eigen vector

$$\begin{pmatrix} C_3 \\ 0 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Resolución

$$-4 \begin{pmatrix} 10C_1 \\ -C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} \; 5 \begin{pmatrix} C_2 \\ 8C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \; -3 \begin{pmatrix} C_3 \\ 0 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Acomodamos nuestros eigen vectores en una matriz:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10C_1 & C_2 & C_3 \\ -C_1 & 8C_2 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-4t} \\ e^{5t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Ahora finalmente podemos obtener las ecuaciones que describen cada una de nuestras variables:

$$x = 10C_1e^{-4t} + C_2e^{5t} + C_3e^{-3t}$$
$$y = -C_1e^{-4t} + 8C_2e^{5t}$$
$$z = C_1e^{-4t} + C_2e^{5t} + C_3e^{-3t}$$

Cosas como $x - y + z = 0$ suelen ocurrir cuando una de los eigen valores esta repetido.

Ejercicio

$$d \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Respuesta

Obtenemos el determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \end{pmatrix} = 0$$

$(1 - \lambda)^3 + 8 + 8 - (4 -(1 -\lambda) + 4(1 - \lambda) + 4(1 - \lambda)) = $

Simplificado queda como:

$(1-\lambda)^3 + 16 - 12(1-\lambda) = 0$

Factorizamos el cubo:

$(1-\lambda)^2(1-\lambda) + 16 - 12(1-\lambda) = 0$

$1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 12 + 12\lambda + 16 = 0$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = 0$

Obtenemos las raíces de la expresión cubica:

	1	-3	-9	-5
5	1	2	1	0
-1	1	1	0	
-1	1	0		

Eigenvalores

$\lambda = 5 \quad \lambda = -1$

Hay una lambda repetida, por lo que nosotros habíamos visto que cuando tenemos raíces de multiplicidad 2 será te^{-t} en lugar de e^{-t}

Por este motivo las tres soluciones serán:

- e^{5t}
- e^{-t}
- te^{-t}

Ahora a partir de la matriz inicial debemos encontrar los eigenvectores:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & | & 0 \\ -2 & 2 & -2 & | & 0 \\ 2 & -2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$x - y + z = 0$

Nos quedan dos eigenvectores diferentes para las multiplicidades:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_3 \\ C_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resultado

$$5 \begin{pmatrix} C_1 \\ -C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_3 \\ C_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & C_3 \\ -C_1 & C_2 & C_3 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}$$

Solución

$x = C_1 e^{5t} + C_3 te^{-t}$

$y = -C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} + C_3 te^{-t}$

$z = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}$