Ecuaciones diferenciales II clase VII

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x}\ Esta\ expresi\acute{o}n\ indica\ que\ se\ deriva\ dos\ veces$$
$$\frac{\delta^2 f}{\delta^2 x}\ las\ dos\ veces\ se\ derivarespecto\ a\ x$$

Derivadas e integrales parciales

Derivadas parciales

Supongamos que tenemos una función de 2 variables:

$$Derivadas\ \ Parciales:$$
$$f(x,y)=4x^2+9y^2+10xy+3x$$
$$\frac{\delta f}{\delta x}=8x+10y+3$$
$$\frac{\delta f}{\delta y}=18y+10x$$
$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}=8$$
$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}=10$$
$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}=10$$
$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}=18$$
$$Desarrollamos:$$
$$f(x,y)=(8x+10y+3)dx+(18y+10x)dy$$

Ejercicios de derivadas parciales

De cada problema hay que hacer siete derivadas:

---

1. $$f(x,y)=2e^x-8x^3y^2$$

Respuesta

$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta x} = 2e^x - 24y^2x^2$$
$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta y} = -16yx^3$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x^2} = 2e^x - 48y^2x$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x \delta y} = -48yx^2$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta y \delta x} = -48yx^2$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta y^2} = -16x^3$$
$$Diferencial\ \ total:$$
$$df(x,y) = (2e^x - 24y^2x^2)dx + (-16yx^3)dy$$

---

2. $$12x^2 - 8xy + 3y^2$$

Respuesta

$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta x} = 24x - 8y$$
$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta y} = 6y - 8x$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x^2} = 24$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x \delta y} = -8$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta y \delta x} = -8$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta y^2} = 6$$
$$Diferencial\ \ total:$$
$$df(x,y) = (24x - 8y)dx + (6y - 8x)dy$$

---

3. $$f(x,y) = -4x^3 - 3x^2y^3 + 2y^2$$

Respuesta:

$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta x} = -12x^2 - 6xy^3$$
$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta y} = -9x^2y^2 + 2y$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x^2} = -24x - 6y^3$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x \delta y} = -18xy^2$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta y \delta x} = -18xy^2$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta y^2} = -18y^2$$
$$Diferencial\ \ total:$$
$$df(x,y) = (-12x^2 - 6xy^3)dx + (-9x^2y^2 + 2y)dy$$

---

4. $$f(x,y) = e^{x+y}$$

Respuesta:

$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta x} = e^{x+y}$$
$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta y} = e^{x+y}$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x^2} = e^{x+y}$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x \delta y} = e^{x+y}$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta y \delta x} = e^{x+y}$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta y^2} = e^{x+y}$$
$$Diferencial\ \ total:$$
$$df(x,y) = e^{x+y}dx + e^{x+y}dy$$

---

5. $$f(x,y) = -5e^{3x-4y}$$

Respuesta:

$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta x} = -15e^{3x-4y}$$
$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta y} = 20e^{3x-4y}$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x^2} = -45e^{3x-4y}$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x \delta y} = 60e^{3x-4y}$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta y \delta x} = 60e^{3x-4y}$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta y^2} = -80e^{3x-4y}$$
$$Diferencial\ \ total:$$
$$df(x,y) = (-15e^{3x-4y})dx + (20e^{3x-4y})dy$$

---

6. $$f(x,y) = xe^{x^2y}$$

Respuesta:

En este caso empleamos la ley para las derivadas de un producto:

$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta x} = (2x^2y+1)e^{x^2y}$$
$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta y} = x^3e^{x^2y}$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x \delta y} = (2x^4y+3x^2)e^{x^2y}$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta y \delta x} = (2x^4y+3x^2)e^{x^2y}$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta y^2} = x^5e^{x^2y}$$
$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x^2} = (4x^3y^2+6xy)e^{x^2y}$$
$$Diferencial\ \ total:$$
$$df(x,y) = ((2x^2y+1)e^{x^2y})dx + (x^3e^{x^2y})dy$$

Integrales parciales

Las integrales parciales siguen exactamente la misma idea que las diferenciales parciales, es decir, que las otras variables serán tomadas como constantes si se deriva respecto a una:

- Se plantea el ejercicio de que la curvatura de una sabana es representado por esa ecuación, por lo que el volumen de esta puede obtenerse mediante una integral.

$$\int f(5x^3y^4 + 6x^3 + 3y^3 + 2xy + 7)dx$$

Resolución ejemplo con respecto de x:

$$5y^4\frac{x^4}{4}+6\frac{x^4}{4}+3y^3x+2y\frac{x^2}{2}+7x+h(y)$$
$$\frac{5}{4}x^4y^4+\frac{3}{2}x^4+3xy^3+x^2y+7x+h(y)$$
$$h(y)+j(z)+k(y,z)$$

Resolución ejemplo con respecto de y:

$$\int f(5x^3y^4+6x^3+3y^3+2xy+7)dy$$
$$5x^3\frac{y^5}{5}+6x^3y+3\frac{y^4}{4}+2x\frac{y^2}{2}+7y+g(x)$$

Ejercicios integrales parciales

1. $$\int(6xy^2+12x^2y+4y)dx$$

Respuesta:

$$6y^2\frac{x^2}{2}+12y\frac{x^3}{3}+4xy+h(y)$$
$$Simplificamos:$$
$$3x^2y^2+4x^3y+4xy+h(y)$$

---

2. $$\int(2xy^3+6x^2y^2+2y^2)dy$$

Respuesta:

$$\frac{2xy^4}{4}+\frac{6x^2y^3}{3}+\frac{2y^3}{3}$$
$$Simplificamos:$$
$$\frac{1}{2}xy^4+2x^2y^3+\frac{2}{3}y^3$$

---

3. $$\int xy\,dx$$

Respuesta

$$\frac{x^2y}{2}$$

---

4. $$\int xy\,dy$$

Respuesta

$$\frac{xy^2}{2}$$