Ecuaciones diferenciales 2

Clase III

Ecuaciones de Cauchy-Euler

Introducción

Estas ecuaciones tienen una forma especifica y el grado de la derivada depende del valor del coeficiente.

- El orden de la derivada corresponde al valor del coeficiente
- Hay funciones que se derivan y se integran dentro de su familia
  - Polinomios : Al derivarlos obtengo un polinomio y al integrarlos obtengo otro polinomio.
  - Exponenciales: Al derivarlo se obtiene una exponencial y al integrarlos se obtiene otra exponencial.
  - Senos-Cosenos: Como una pareja de funciones, al derivarlo e integrarlo se mantienen en senos y cosenos.
- Por lo que estas funciones se mantienen dentro de la misma familia de modo que se pueden cancelar entre si y dar 0.

Planteamiento

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$$
$$y=e^{Dx}$$
$$y=e^{mx}$$
$$y=e^{\lambda x}$$

Escribiremos una ecuación de Cauchy-Euler:

1. Primero proponemos nuestra ecuación

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-4y=0$$

2. Ahora proponemos posibles soluciones para dicha ecuación

$$y=\sin x$$
$$y=e^{Dx}$$
$$y=x^{\lambda}$$

   - En estos casos la solución consistia en encontrar los coeficientes.
3. Ahora debemos ver cual de las soluciones nos conduce por el camino mas sencillo.

x a la lambda

- Haremos la demostración de la exponencial

$y = e^{Dx}$

Planteamos una ecuación de Cauchy-Euler.

La clave es que al final de hacer las derivadas, se tiene que cancelar todo y darnos 0.

- **Lo que se aconseja es probar con la evaluación** $y = x^{\lambda}$

Primero trataremos sustituyendo y por x a la lambda

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4x^{\lambda} = 0$$
$$primera \;\; derivada:$$
$$\frac{dy}{dx} = \lambda x^{\lambda-1}$$
$$segunda \;\; derivada:$$
$$\frac{d2y}{dx2} = (\lambda - 1)\lambda x^{\lambda-2}$$
$$planteamos \;\; la \;\; ecuacion:$$
$$\lambda(\lambda-1)x^2x^{\lambda-2} - 2\lambda x x^{\lambda-1} - 4x^{\lambda}$$
$$\lambda(\lambda-1)x^{\lambda} - 2\lambda x^{\lambda} - 4x^{\lambda}$$
$$factorizamos:$$
$$(\lambda(\lambda-1) - 2\lambda - 4)x^{\lambda}$$
$$(\lambda(\lambda-1) - 2\lambda - 4) = 0$$
$$desarrollamos:$$
$$\lambda^2 - \lambda - 2\lambda - 4 = 0$$
$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$
$$soluciones:$$
$$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$
$$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = -1$$

La característica de Cauchy-Euler es que al proponer la solución x a la lambda, la pueda factorizar.

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4x^{\lambda} = 0$$

Cuando se derivan los valores, existe una compensación entre los exponentes de la x ya que estos exponentes coinciden con el orden de la derivada.

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=0$$
$$Planteamos:$$
$$ax^2(\lambda-1)\lambda x^{\lambda-2}+bx\lambda x^{\lambda-1}+cx^{\lambda}$$
$$resolvemos:$$
$$a\lambda^2x^{\lambda}-a\lambda x^{\lambda}+b\lambda x^{\lambda}+cx^{\lambda}$$
$$factorizamos:$$
$$(a\lambda(\lambda-1)+b\lambda+c)x^{\lambda}=0$$
$$a\lambda^2-a\lambda+b\lambda+c=0$$
$$a\lambda^2+(b-a)\lambda+c=0$$
$$forma:$$
$$e^{iz}=\cos z+i\sin z$$

Esto nos da como resultado que lambda es compleja:

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z$$
$$\lambda=\alpha+\beta i$$
$$y=x^{\lambda}=x^{\alpha+\beta i}=x^{\alpha}x^{\beta i}$$
$$x=e^{\ln x}$$
$$x^{\beta}i=(e^{\ln x})^{\beta i}=e^{\beta\ln xi}$$

Una vez que tenemos la formula de Euler la podemos convertir en senos y cosenos

Solución general cuando lambda es un complejo

$$y=x^{\alpha}(C_1\cos\beta\ln x+C_2\sin\beta\ln x)$$

Si lambda son dos soluciones independientes

$$y=C_1x^{\lambda_1}+C_2x^{\lambda_2}$$

Si lambda es una solución única

$$y=C_1x^{\lambda}+C_2\ln xX^{\lambda}$$

Ejercicios Ecuaciones de Cauchy - Euler

1.

$$4x^2\frac{d^2y}{dx^2}+17y=0$$
$$4x^2(\lambda-1)\lambda x^{\lambda-2}+17x^\lambda$$
$$4\lambda^2x^\lambda-4\lambda x^\lambda+17x^\lambda$$
$$factorizamos:$$
$$(4\lambda^2-4\lambda+17)x^\lambda=0$$
$$(4\lambda^2-4\lambda+17)=0$$
$$formula\ \ general:$$
$$\lambda=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(4)(17)}}{2(4)}$$
$$\lambda=\frac{+4\pm\sqrt{16-272}}{8}$$
$$\lambda=\frac{+4\pm\sqrt{-256}}{8}$$
$$\lambda_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-256}}{8}$$
$$\lambda_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-256}}{8}$$
$$\lambda_1=\frac{1}{2}+\frac{16i}{8}$$
$$\lambda_2=\frac{1}{2}-\frac{16i}{8}$$
$$\lambda_1=\frac{1}{2}+2i$$
$$\lambda_2=\frac{1}{2}-2i$$
$$soluci\acute{o}n:$$
$$y=x^{\frac{1}{2}}(C_1\cos 2\ln x+C_2\sin 2\ln x)$$

2.

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+5x^2\frac{d^2y}{dx^2}+7x\frac{dy}{dx}+8y=0$$

3.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2y=0$$
$$x^2(\lambda-1)\lambda x^{\lambda-2}-2x^\lambda$$
$$\lambda^2x^\lambda-\lambda x^\lambda-2x^\lambda$$
$$factorizamos:$$
$$(\lambda^2-\lambda-2)x^\lambda=0$$
$$(\lambda^2-\lambda-2)=0$$
$$resolvemos:$$
$$(\lambda+1)(\lambda-2)=0$$
$$\lambda_1=-1$$
$$\lambda_2=2$$
$$soluci\acute{o}n:$$
$$y=C_1x^2+C_2x^{-1}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+4y=0$$
$$x^2(\lambda-1)\lambda x^{\lambda-2}+x\lambda x^{\lambda-1}+4x^{\lambda}$$
$$\lambda^2x^{\lambda}-\lambda x^{\lambda}+\lambda x^{\lambda}+4x^{\lambda}$$
$$factorizamos:$$
$$(\lambda^2-\lambda+\lambda+4)x^{\lambda}=0$$
$$(\lambda^2+4)=0$$
$$formula\ \ general:$$
$$\lambda=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(1)(4)}}{2(1)}$$

4.

$$\lambda=\frac{0\pm\sqrt{0-16}}{2}$$
$$\lambda=\frac{0\pm\sqrt{-16}}{2}$$
$$\lambda_1=\frac{\sqrt{-16}}{2}$$
$$\lambda_2=-\frac{\sqrt{-16}}{2}$$
$$\lambda_1=2i$$
$$\lambda_2=-2i$$
$$soluci\acute{o}n:$$
$$y=(C_1\cos 2\ln x+C_2\sin 2\ln x)$$

5.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}-2y=0$$

Solución

$y=C_1x^{2+\sqrt{6}}+C_2x^{2-\sqrt{6}}$