Ecuaciones diferenciales IX

Podemos resolver la ecuación buscando de que función f, provienen esas parciales.

Si tenemos una función del estilo : $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

- Podemos resolver la diferencial haciendo una integral parcial.
- Debemos calcular la segunda derivada.
- Las parciales deben ser iguales.
- Si yo quiero resolver una ecuación diferencial de la forma M y N, debemos averiguar si proviene de una diferencial parcial.
- Podemos averiguarla descubriendo si provienen de la misma función al derivar de forma cruzada.

$$Df(x, y) = \frac{\delta f(x, y)}{\delta x}dx + \frac{\delta f(x, y)}{\delta y}dy = 0$$
$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$
$$Segunda \;\; derivada :$$
$$\frac{\delta M(x, y)}{\delta y} = \frac{\delta N(x, y)}{\delta x}$$

Debemos averiguar si esta función es una derivada total, es decir, si es una ecuación exacta.

$$\left(x^2 + y^2\right) dx + \left(x^2 - xy\right) dy = 0$$
$$Las \;\; derivamos :$$
$$\frac{\delta}{\delta y} = 2y \qquad \frac{\delta}{\delta x} = 2x - 1$$

Vemos que sus parciales no son iguales, por lo tanto no vienen de la misma ecuación y no es una ecuación exacta.

- Las ecuaciones no exactas se pueden resolver de una manera elegante y simple, siempre y cuando tengan una propiedad.
- Vamos a definir una propiedad de las ecuaciones que se llama Homogéneas de grado Alfa.
- Las homogéneas de grado alfa son ecuaciones que tienen la propiedad de que al cambiar las x, y por t_x, t_y se puede factorizar como t a la alfa de la función original.
- $f(x, y) \rightarrow f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$

Homogéneas de grado Alpha

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$
$$f(x, y) = x^2y + yx^2 + x^3 + y^3$$

Como se prueba que es homogénea de grado Alpha, cambiamos $x \rightarrow tx$ y $y \rightarrow ty$

$$f(tx, ty) = (tx)^2ty + (ty)^2tx + (tx)^3 + (ty)^3$$
$$t^3x^2y + t^3xy^2 + t^3x^3 + t^3y^3$$
$$t^3(x^2y + y^2x + x^3 + y^3)$$
$$\alpha = 3$$

- Como encontramos la función original multiplicada por t con un exponente alfa, entonces podemos asumir que es una homogénea de grado alfa.

- Alfa es el exponente de la t, si una función es homogénea de grado alfa significa que puedo sustituir x,y por tx,ty y al final factorizar la t.
- Se les llama homogéneas, porque homogéneamente puedo factorizar la t.

Ejercicio

Resolver si son homogéneas y determinar de que grado son homogéneas:

1.

$$f(x,y) = \sqrt{x}\sqrt{y} + x + y$$

Respuesta

$$(tx)^{\frac{1}{2}}(ty)^{\frac{1}{2}} + tx + ty$$

Para conocer el valor de Alpha es mas fácil sumar los exponentes

En este primer caso la suma de los exponentes es : $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + 1 + 1$

Entonces como todos los exponentes son uno, el valor de alfa para esta función será:

$\alpha = 1$

2.

$$f(x,y) = xy + x^2 + y^2$$

En este caso la suma de los exponentes es: $(1+1)+2+2$, en este segundo caso como todos los exponentes son 2, el valor resultante de alfa será:

$\alpha = 2$

3.

$$f(x,y) = \sqrt{x}y + \sqrt{y}x + x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}$$

Como la suma nos dice que todos valen $\frac{3}{2}$ entonces el calor de alfa será: $\alpha = \frac{3}{2}$

Todas tienen que tener el mismo exponente, ya que de no ser así no las podemos sacar como factor y no seria homogénea de grado alfa

Ejercicio

Esta ecuación no es exacta, ya que si sacamos las derivadas parciales no son iguales. Pero si es homogénea de grado 2.

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$$

Si M(x,y) y N(x,y) son las dos homogéneas de grado Alpha, entonces se resuelven con la sustitución $y = ux$

$$y = ux$$
$$dy = udx + xdu$$
$$Sustituimos \;\; y, dy:$$
$$x^2dx + u^2x^2dx + x^2udx + x^3du - x^2u^2dx - x^3udu$$
$$Cancelamos \;\; iguales \;\; de \;\; signo \;\; opuesto:$$
$$x^2dx + x^2udx + x^3du - x^3udu$$
$$du \;\; de \;\; un \;\; lado \;\; y \;\; dx \;\; de \;\; otro:$$
$$(x^2 + x^2u)dx = (x^2u - x^3)du$$
$$(x^2 + x^2u)dx = (x^3u - x^3)du$$
$$Factorizamos:$$
$$x^2(1+u)dx = x^3(u-1)du$$
$$Separamos \;\; variables:$$
$$\frac{1}{x}dx = \frac{(u-1)}{(u+1)}du$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{u-1}{u+1}du \quad \int \frac{dx}{x} = \frac{u-1}{u+1}du$$

- Completamos arriba para simplificar abajo:

$$\frac{u-1}{u+1} = \frac{u-1+2-2}{u+1} = \frac{u+1-2}{u+1}$$
$$= \frac{u+1}{u+1} - \frac{2}{u+1} = 1 - \frac{2}{u+1}$$

Integramos:

$$\int du - 2\int \frac{du}{u+1} = u - 2\ln(u+1)$$
$$\int \frac{du}{u+1}$$
$$z = u + 1$$
$$dz = du$$
$$\int \frac{dz}{z} =$$
$$\ln z = \ln(u+1)$$

$y = ux$

$u = \frac{x}{y}$

Resultado:

- Lo elevamos a la exponencial para que se vea mas bonito.
- Se elevo para quitar logaritmos.
- e^C es una constante K

$$\ln x = u - 2\ln(u+1) + C$$
$$e^{\ln x} = e^u \cdot e^{\ln(u+1)} \cdot e^c$$
$$x = e^u \cdot e^{\ln x} = e^{\ln\left(\frac{1}{(u+1)^2}\right)} k = k\frac{e^u}{(u+1)^2}$$
$$x = k\frac{e^{\frac{x}{y}}}{(\frac{y}{x}+1)^2}$$

Ejercicios

1. $$(x-y)dx + xdy = 0$$

Respuesta

$$(x-ux)dx + x(u\ dx + x\ du)$$
$$x\ dx - ux\ dx + ux\ dx + x^2\ du$$
$$Simplificando:$$
$$x\ dx + x^2\ du = 0$$
$$x\ dx = -x^2\ du$$
$$pasamos\ x^2\ del\ otro\ lado:$$
$$-\int \frac{1}{x}dx = \int du$$
$$\ln x = -u + C$$
$$Resultado$$
$$\ln x = -\frac{y}{x} + C$$

3.

$$(y^2 + yx)\ dx - x^2 dy = 0$$

4.

Respuesta

$$((ux)^2 + (ux)x)dx - x^2(u\ dx + x\ du)$$
$$u^2x^2\ dx + ux^2\ dx - ux^2\ dx + x^3\ du$$
$$u^2x^2\ dx + x^3\ du$$
$$Entonces:$$
$$u^2x^2\ dx = -x^3du$$
$$\frac{x^2\ dx}{x^3} = \frac{du}{u^2}$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u^2}$$
$$\frac{dx}{x}u^{-2}du$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int u^{-2}du$$
$$\ln x = -\frac{1}{u} + C$$
$$Resultado:$$
$$\ln x = -\frac{x}{y} + C$$

4. $$xy^2\ dy = (y^3 - x^3)dx$$

Respuesta

$$x(ux)^2\ (u\ dx + x\ du) = ((ux^3 - x^3))dx$$
$$u^2x^3\ (u\ dx + x\ du) = ux^3\ dx - x^3dx$$
$$u^3x^3\ dx + u^2x^4\ du = ux^3\ dx - x^3dx$$

Pasamos los dx de un lado:

$$u^2x^4\ du = ux^3\ dx - u^3x^3\ dx - x^3dx$$
$$Pasamos\ la\ x\ de\ un\ lado:$$
$$u^2\ du = \frac{ux^3\ dx - u^3x^3\ dx - x^3dx}{x^4}$$
$$simplificamos:$$
$$u^2\ du = \frac{u\ dx - u^3\ dx - dx}{x}$$
$$Integramos:$$
$$\int u^2\ du = \int \frac{u\ dx}{x} - \int \frac{u^3\ dx}{x} - \int \frac{dx}{x}$$
$$\frac{u^3}{3} = u\ln x - u^3\ln x - \ln x$$
$$\frac{u^3}{3} = (u - u^3 - 1)\ln x$$
$$despejamos:$$
$$\frac{u^3}{u - u^3 - 1} = 3\ln x$$

2. $$xdx + (y - 2x)dy = 0$$

Resultado

- Para realizar el ejercicio 2 debemos llegar a la expresión $\frac{(2-u)}{(u-1)^2}$
- Sera bastante complicado de integrar.
- Servirá de entrenamiento para las transformadas de *Laplace*

$$\frac{(2-u)}{(u-1)^2} = \frac{-(u-2)}{(u-1)^2}$$
$$Separación:$$
$$-\frac{(u-1-1)}{(u-1)^2} = -\frac{u-1}{(u-1)^2} + \frac{1}{(u-1)^2}$$
$$Simplificamos:$$
$$-\frac{1}{(u-1)} + \frac{1}{(u-1)^2}$$
$$Cambio\ \ de\ \ variable:$$
$$z = u-1$$

- El cambio de variable permitirá resolverlo muy rápidamente, la integral con respecto de u no se puede resolver fácilmente.

$$xdx + (ux-2x)(udx+xdu)$$
$$xdx + u^2xdx + ux^2du - 2uxdx - 2x^2du = 0$$
$$Separamos:$$
$$(x+u^2x-2ux)dx = (2x^2-ux^2)du$$
$$x(1+u^2-2u)dx = x^2(2-u)du$$
$$x(u-1)^2dx = x^2(2-u)du$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{(2-u)}{(u-1)^2}du = -\frac{(u-1-1)}{(u-1)^2}du = \left(-\frac{(u-1)}{(u-1)^2} + \frac{1}{(u-1)^2}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2}\right)du$$

- Ahora hay que integrar

$$\left(\frac{-1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2}\right)du$$
$$z = u-1$$
$$\int -\frac{dz}{z} + \int z^{-2}dz =$$
$$\ln z = z^{-1} + C$$
$$\ln\frac{1}{z} - \frac{1}{z} + C$$
$$\ln\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u-1} + C$$

Finalmente cambiamos la u por y entre x:

$$\ln\frac{1}{\frac{y}{x}-1} - \frac{1}{\frac{y}{x}-1} + C$$

$3x^3 \ln x = Cx^3 - y^3$

① $(x-y)\,dx + x\,dy = 0$

$\ln x = -\frac{y}{x} + C$

② $x\,dx + (y-2x)\,dy = 0$

$x - y \ln(x-y) = x + C(x-y)$

③ $(y^2 + yx)\,dx - x^2\,dy = 0$

$\ln x = -\frac{x}{y} + Cy$

④ $xy^2\,dy = (y^3 - x^3)\,dx$

$3x^3 \ln x = Cx^3 - y^3$

② $\frac{(2-u)}{(u-1)^2} = \frac{-(u-2)}{(u-1)^2}$

$= -\frac{(u-1-1)}{(u-1)^2} = -\frac{u-1}{(u-1)^2} + \frac{1}{(u-1)^2}$

$= -\frac{1}{(u-1)} + \frac{1}{(u-1)^2}$ $\quad z = u-1$