# Ecuaciones diferenciales clase XII

## Transformada de Laplace

- Las transformadas de Laplace se definen como un cambio de una función de variable $t$ en una función de variable $s$ que denotamos con una letra mayuscula $F$
- Es decir:

$$L\left\{f(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s) = F$$

- La ves pasada lo que hicimos fue hacer unas cuantas transformaciones de unas funciones elementales.
- No es necesario usar esta formula debido a que siempre dara este mismo resultado.
- Por este motivo un matemático se encargo de de realizar unas tablas que indican como será el resultado de la ecuación.
- La transformada es una integral, la cual a su vez es un operador lineal.
- Esto quiere decir dos cosas:
    - La integral de una suma es la suma de integrales
      $\int ax^2 + bx = \int ax^2 + \int bx$
    - Una constante multiplicada por el integrando es igual a la constante multiplicada por la integral
      $\int ax^2 = a \cdot \int x^2$

## Ejemplos

1.

$$f(t) = 2t^4$$

**Solución**

$$L\left\{2t^4\right\} = 2 \cdot L\left\{t^4\right\}$$
$$Resultado:$$
$$2\frac{4!}{s^5} = \frac{48}{s^5}$$

- Si queremos transformar una suma como esta:

$$L\left\{t^2 + 6t - 3\right\} = \frac{2!}{s^3} + 6\frac{1}{s^2} - 3\frac{1}{s}$$

- Algunas transformaciones son mas latosas por ejemplo:

$$L\{(t+1)^3\}$$

En este caso no existe una regla general para binomios potenciados, por este motivo primero deberiamos desarrollar el binomio al cubo:

$$\frac{3!}{s^4} + 3\frac{2!}{s^3} + 3\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$

# Ejercicios transformadas

Estos ejercicios se haran con las formulas 3, 7 y 11 de las tablas de Laplace.

1. $$L\{(1+e^{2t})^2\}$$

**Solución**

**Respuesta**

$\frac{1}{s}+\frac{2}{s-2}+\frac{1}{s-4}$

2. $$L\{1+e^{4t}\}$$

**Solución**

**Respuesta**

$\frac{1}{s}+\frac{1}{s-4}$

3. $$L\{4t^2-5\sin 3t\}$$

**Solución**

**Respuesta**

$\frac{8}{s^3}-\frac{15}{s^2+4}$

4. $$L\{\sin 2t\cos 2t\}$$

- Para esto necesitaremos la identidad trigonometrica:
  $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

**Solución**

**Respuesta**

$\frac{2}{s^2+16}$

# Anti-transformaciones

La anti transformación requiere una transformación en si.

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^5}\}$$
$$L\{t^4\} = \frac{4!}{s^5}$$

- Pasamos el cuatro factorial que esta multiplicando del otro lado para dejar únicamente lo que tiene s como resultado:

$$\frac{1}{24}L\{t^4\} = \frac{1}{s^5}$$
$$L\{\frac{t^4}{24}\} = \frac{1}{s^5}$$

- Esto lo haremos siempre porque no necesariamente tendremos las constantes que aparecen en la formula.

**Ejemplo**

Buscamos la anti-transformada de:

$$L^{-1}\{\frac{5}{s^2+4}\}$$

- Para esto podemos utilizar la transformada de:

$$L\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$$

Resultado:

$$L\left\{\frac{5\sin 2t}{2}\right\} = \frac{5}{s^2+4}$$

# Ejercicios Anti transformadas

1. 

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\}$$

**Solución**

2. 

$$L^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\}$$

**Solución**

3. 

$$L^{-1}\left\{\frac{2+s}{s^2-3s+2}\right\}$$

**Solución**

Esta anti-transformada no esta en ninguna formula de las tablas.

- Tenemos que factorizar el denominador.
- Separamos todo.

$$L^{-1}\left\{\frac{2+s}{(s-2)(s-1)}-\frac{2}{(s-2)(s-1)}+\frac{s}{(s-2)(s-1)}\right\}$$

**Respuesta**

$$=2\left(e^{2t}-e^{t}\right)+2e^{2t}-e^{t}$$
$$4e^{2t}-3e^{t}$$

4.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{48}{s^5}\right\}$$

**Solución**

5.

$$L^{-1}\left\{\frac{(s+1)^3}{s^4}\right\}$$

**Solución**

- No tenemos formula que nos permita anti-transformar esto.
- Pero tenemos un binomio al cubo, entonces debemos desarrollarlo.

$$L^{-1}\left\{\frac{s^3+3s^2+3s+1}{s^4}\right\}$$
$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}+\frac{3}{s^2}+\frac{3}{s^3}+\frac{1}{s^4}\right\}$$

- Podemos ver que faltan y sobran cosas
- Seguramente es una tranformada que incluya a:
- Antitransformamos por partes iniciando con $\frac{3}{s^3}$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{t^2}\right\}=\frac{2!}{s^3}$$
$$\frac{3}{2}L\left\{\frac{1}{t^2}\right\}=\frac{3}{s^3}$$

- Ahora pasamos a transformar $\frac{1}{s^4}$

$$L\left\{\frac{1}{t^3}\right\}=\frac{3!}{s^4}$$

Tras construir la ecuación nos queda:

$1+3t+\frac{3}{2}\frac{1}{t^2}+\frac{1}{6}t^3$

6.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{4s+1}\right\}$$

**Solución**

7.

$$L^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+49}\right\}$$

**Solución**

8.

$$L^{-1}\left\{\frac{4s}{4s^2+1}\right\}$$

**Solución**

9.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+3s}\right\}$$

**Solución**

10.

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2s-3}\right\}$$

**Solución**

En clase resolvimos el 3 y el 5, por lo que el resto de los ejercicios queda de tarea.

# Ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=e^{-4t}$$
$$y(0)=1$$
$$\frac{dy}{dt}(0)=5$$

- Esta ecuación la vamos a transformar, luego la vamos a resolver y finalmente la vamos a anti-transformar.
- Utilizamos la formula de la tabla.

Transformamos la 2da derivada: $s^2Y-s-5$

Transformamos la 1ra derivada: $-3sY-1$

Los terminos de y se cambian por Y: $2Y$

Transformamos la exponencial: $\frac{1}{s+4}$

Entonces tenemos toda la expresión transformada:

$$s^2Y - s - 5 - 3sY - 1 + 2Y = \frac{1}{s+4}$$

Factorizamos la Y:

$$s^2Y - 3sY + 2Y = \frac{1}{s+4} + s + 2$$
$$Y(s^2 - 3s + 2) = \frac{1}{s+4} + s + 2$$
$$Entonces:$$
$$Y(s-2)(s-1) = \frac{1}{s+4} + s + 2$$
$$Despejamos:$$
$$Y = \frac{1}{(s+4)(s-2)(s-1)} + \frac{s}{s-1} + \frac{2}{(s-2)(s-1)}$$

Ahora estamos en un proceso en el que tenemos la Y despejada.

- Pero esta Y no es una solución por que esta en función de s y nosotros la queremos en función de t.
- Para resolver este problema debemos de anti transformar la expresión que tenemos.
- Lo vamos a anti transformar con las formulas 28 y 29. El que no tiene formula le cambiaremos la forma.

$$\frac{1}{(s+4)(s-2)(s-1)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1}$$

Entonces colocamos todo en una misma fracción:

$$\frac{A(s-2)(s-1) + B(s+4)(s-1) + C(s+4)(s-2)}{(s+4)(s-2)(s-1)}$$

Evaluamos con los valores de s y despejamos A,B,C:

$$s = 2 \qquad 6B = 1 \qquad B = \frac{1}{6}$$
$$s = 1 \qquad -5C = 1 \qquad C = -\frac{1}{5}$$
$$s = -4 \qquad 30A = 1 \qquad A = \frac{1}{30}$$

Ya que tenemos los valores de A,B,C. Podemos decir que:

$$\frac{1}{30}\left(\frac{1}{s+4}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{s-2}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

Ahora que tenemos de esta forma la expresión podemos aplicar las formulas 28 y 29 de nuestras tablas para anti-tranformarla:

Sabemos entonces que y es igual a:

$$y = L^{-1}\left\{\frac{1}{30}\left(\frac{1}{s+4}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{s-2}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s-1}\right)\right\}$$

Por lo tanto, al anti-transformar a partir de las formulas 28 y 29 nos queda:

$$y = \frac{1}{30}e^{-4t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{t} + 4e^{3t} + 3e^{t}$$

- Esta ya es una solución explicita que incluye los valores iniciales

## Aclaración fórmulas 28 y 29

- La A puede valer 0
- La A y la B no pueden ser iguales
- Si son iguales usamos la 16

# Ejercicios

1.

$$\frac{dy}{dt} - y = 1 \quad y(0) = 0$$

**Solución**

**Respuesta**

$y = -1 + e^{t}$

2.

$$\frac{dy}{dt} + 6y = e^{4t} \qquad y(0) = 2$$

**Solución**

**Respuesta**

$y = \frac{19}{10}e^{-6t} + \frac{1}{10}e^{4t} $

3.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 4y = 0$$

**Solución**

**Respuesta**

$y = -\frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{4}{3}e^{t}$

4.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = (2\sin\sqrt{2}t)$$
$$y(0) = 10$$
$$\frac{dy}{dx}(0) = 0$$

- En este ejercicio se hace directamente con las formulas 8 y 32 para anti-transformar, no hay que hacer cambios algebraicos.

**Solución**

**Respuesta**

$y = 10 \cos t + 2 \sin t - \sqrt{2} \sin \sqrt2 t $

5.

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = t^2e^{3t}$$
$$y(0) = 2$$
$$\frac{dy}{dt}(0) = 6$$

**Solución**

**Respuesta**

$y = 2e^{3t} + \frac{1}{12}t^4e^{3t^3}$