Ecuaciones diferenciales

clase X

Demostración de las homogéneas de grado Alpha

Habíamos planteado este ejercicio:

$$xdx + (y - 2x)dy = 0$$

- Lo primero que habíamos planteado para resolver estas ecuaciones, es un método para solución de ecuaciones exactas lo cual se comprobaba con derivadas parciales.
- Al ver que no es una ecuación exacta, entonces tratamos de resolverla como una homogénea de grado Alpha con grado 1.
- Lo haremos con la siguiente formula.

$$\alpha = 1$$
$$M(x, y)$$
$$M(tx, ty) = t^{\alpha} M(x, y)$$

- Hacemos un cabio de variable

$$y = ux$$
$$dy = udx + xdu$$
$$Sustituimos\ \ con\ \ u:$$
$$xdx + (ux - 2x)(udx + xdu) = 0$$
$$Desarrollamos:$$
$$xdx + u^2xdx + ux^2du - 2xudx - 2x^2du = 0$$
$$Pasamos\ \ dx\ \ y\ \ du\ \ de\ \ cada\ \ lado:$$
$$(x + u^2x - 2xu)dx = (2x^2 - ux^2)du$$
$$x(u^2 - 2u + 1)dx = x^2(2 - u)du$$
$$Divorciamos\ \ variables:$$
$$\frac{x}{x^2}dx = \frac{(2-u)}{(u-1)^2}du$$
$$Simplificamos:$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{2-u}{(u-1)^2}du$$
$$integramos\ \ de\ \ los\ \ 2\ \ lados:$$
$$\ln x = \int \frac{2-u}{(u-1)^2}du = -\int \frac{u-2}{(u-1)^2}du = -\int \frac{(u-1-1)}{(u-1)^2}du$$
$$= -\int \left(\frac{u-1}{(u-1)^2} - \frac{1}{(u-1)^2}\right)du$$
$$-\int \frac{du}{u-1} + \int \frac{1}{(u-1)^2}du$$

- Como la integral es complicada hacemos otro cambio de variable:

$$Otro\ \ cambio\ \ de\ \ variable:$$
$$z = u - 1$$
$$dz = du$$
$$-\int \frac{dz}{z} + \int z^{-2}dz = -\ln z + \frac{z^{-1}}{-1}$$

- Revertimos los cambios de variable para volver a nuestra variable original

$$\ln x = -\ln z - \frac{1}{z}$$
$$Volvemos\ \ a\ \ u:$$
$$\ln x = -\ln(u-1) - \frac{1}{u-1}$$
$$u = \frac{y}{x}$$
$$\ln x = -\ln\left(\frac{y}{x} - 1\right) - \frac{1}{\frac{y}{x} - 1}$$

- Esta ya es una respuesta
- Pero podemos simplificar la ecuación para que se vea mas bonita.
- Nunca resolvimos homogéneas de grado 2.
- Vamos a demostrar el método y demostraremos porque funciona si es homogénea de grado Alpha.
- La demostración es fea, ya que terminas y no sientes sensación de alivio, sino que mas bien parece un final abierto jaja.

Demostración

La demostración la haremos a partir de la ecuación general:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

- La podemos resolver si y solo si: $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas de grado Alpha.
- Es decir que si yo multiplicara las variables por t: $M(tx,ty) = t^{\alpha}M(x,y)$ y $N(tx,ty) = t^{\alpha}N(x,y)$
- Para resolver esto se planteaba el cambio de variable $y = ux$, $dy = udx + xdu$
- Ahora cuando hacemos el cambio de variable nos queda $M(x,ux)$ y $N(x,ux)$
- Quedan expresiones de la forma $M(x \cdot 1, x \cdot u)$ y $N(x \cdot 1, x \cdot u)$
- Si en lugar de poner una t, hubiéramos puesto una x nos damos cuenta de que tienen la misma forma.
- Entonces podemos sacar x con un exponente Alpha al igual que t.
- Nos queda: $x^{\alpha}M(1,u)$
- Nos queda: $x^{\alpha}N(1,u)$
- Por eso es necesario que M y N sean homogéneas de grado Alpha.
- El resto es pura algebra ya que sustituiremos estos valores en la ecuación inicial.

Parte algebraica

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$
$$M(x,ux)dx + N(x,ux)dy = 0$$
$$x^{\alpha}M(1,u)dx + x^{\alpha}N(1,u)dy = 0$$
$$x^{\alpha}(M(1,u)dx + N(1,u)(udx + udu)) = 0$$
$$Dividir\ \ todo\ \ entre\ \ x^{\alpha}:$$
$$M(1,u)dx + N(1,u)udx + N(1,u)xdu = 0$$
$$(M(1,u) + N(1,u)u)dx = -N(1,u)xdu$$
$$Separar\ \ dx\ \ y\ \ du:$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{-N(1,u)}{M(1,u) + N(1,u)u}du$$

- Como la ecuación era homogénea de grado Alpha pudo ser posible convertirla en una función con du.

$$\ln x = -\int \frac{N(1-u)du}{N(1,u) + N(1,u)u}$$

- Cuando usamos el método no necesitamos hacer la demostración porque ya esta demostrada.
- Probamos que el método sirve cuando están presentes las dos condiciones.

Ecuaciones no lineales

- Hasta ahorita todas las ecuaciones que hemos resuelto eran de estas formas:

$$a_1\frac{d^2y}{dx^2} + a_2\frac{dy}{dx} + a_3y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

- Todas las ecuaciones que hemos abordado son ecuaciones donde las derivadas están elevadas a la primera potencia.
- No hemos visto por ejemplo que pasaría si la derivada estuviera al cuadrado.

Ejemplo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + P(x)y = Q(x)$$

- Por este motivo se dice que las ecuaciones que habíamos estudiado antes eran lineales.
- Este tema es consecuencia de un examen de admisión a la unión europea.

Resolución

- Si no hay y hacemos este cambio de variable:
  - $u = \frac{dy}{dx}$
  - Desaparecer la y
  - $\frac{du}{dx} = \frac{d^2}{dx^2}$
- Si hay y hacemos este cambio de variable:
  - $u = \frac{dy}{dx}$
  - Desaparecer la x
  - $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx}\frac{dy}{dy} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}u$

Ejercicio sin y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$\frac{du}{dx} = 2xu^2$$

Como en el ejercicio no hay una y suelta, sino que todas están dentro de las diferenciales, entonces usamos el caso de no hay y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$Cambio\ \ de\ \ variable:$$
$$u = \frac{dy}{dx}\frac{du}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$
$$\frac{du}{dx} = 2xu^2$$
$$separamos\ \ x\ \ ,\ \ u:$$
$$u^{-2}du = 2xdx$$
$$Integramos:$$
$$\int u^{-2}du = \int 2xdx$$
$$\frac{u^{-1}}{-1} = x^2 + C$$
$$-\frac{1}{u} = x^2 + C$$
$$-\frac{1}{x^2+C} = u = \frac{dy}{dx}$$
$$\int \frac{-dx}{x^2+C} = \int dy = y$$

- Tras resolver la integral nos queda:

$$y = -\frac{1}{c}ang\tan\frac{x}{c} + C$$

Ejercicio con y

- En este caso la segunda derivada será un caso diferente al anterior.
- Utilizamos la propiedad conmutativa.
- Se multiplica por u para llegar a la formula que vamos a usar.

Cambio de variable

$$u = \frac{dy}{du}$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx}\frac{dy}{dy} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}u$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}u$$

Ejercicio

$$y\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Segunda derivada

- El problema lo resolveremos haciendo la sustitución de la derivada por la u
- Si la u es la primera derivada, la segunda derivada es la derivada de la u.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}u$$

Solución problema

$$y\frac{du}{dy}u=u^2$$
$$\frac{du\,u}{u^2}=\frac{dy}{y}\rightarrow\frac{du}{u}=\frac{dy}{y}$$
$$\ln u=\ln y+C$$
$$Despejamos\ \ u\ \ con\ \ exponencial:$$
$$u=e^{\ln y+C}=e^{C}e^{\ln y}=ky$$
$$\frac{dy}{dx}=ky$$
$$\frac{dy}{y}=kdx$$

- Ahora volvemos a integrar por los dos lados y vamos a obtener la respuesta:

$$\int\frac{dy}{y}=\int kdx$$
$$\ln y=kx+C$$

Ejercicios

- Primero debemos cuestionarnos si hay y o no, de este modo sabremos que cambio de variable aplicar.

1. $\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0$

Respuesta

$y=\ln\left(ilegible\right)$

---

2. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$

Respuesta

$y=\frac{1}{C_1}\ln\left(C_1x+1\right)+\frac{1}{C_1}x+C_2$

---

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$

Respuesta

$\frac{y^3}{3} - C_1 y = x + C_2$