力迫偏序与脱殊扩张

力迫初步 (2)

张体云

“力迫学习小组”

2020 年 7 月 18 日

1 力迫偏序

- 模型扩张的困难
- 力迫偏序与脱殊理想
- 一个例子：$f\colon \mathbb{N} \to 2$
- 无原子理想
- 任意力迫条件都属于某个脱殊理想

2 脱殊扩张

- $\mathbb{P}$-名字
- 脱殊扩张的一些性质

模型扩张的困难

考虑 $A = P(\aleph_0)^{\mathbf{M}}$ 和 $B = \aleph_1^{\mathbf{M}}$。$\mathbf{M}$ 不认为它们可数，因为 $\mathbf{M}$ 中没有从 $\aleph_0$ 到两者的双射。从 $\mathbf{M}$ 外面看，由于两者都是可数的，因此两者之间有双射。一个尝试性的想法是，向 $\mathbf{M}$ 里面添加一个 A 和 B 之间的双射 f，从而见证连续统假设成立。

模型扩张的困难

考虑 $A = P(\aleph_0)^{\mathbf{M}}$ 和 $B = \aleph_1^{\mathbf{M}}$。$\mathbf{M}$ 不认为它们可数，因为 $\mathbf{M}$ 中没有从 $\aleph_0$ 到两者的双射。从 $\mathbf{M}$ 外面看，由于两者都是可数的，因此两者之间有双射。一个尝试性的想法是，向 $\mathbf{M}$ 里面添加一个 A 和 B 之间的双射 f，从而见证连续统假设成立。

这么做有两个困难:

1. 我们要保证扩张之后的模型依然满足 ZFC，因此还要添加 f 的幂集、和其它集合的交、并……总之，所有被 f 诱导出来的集合。

模型扩张的困难

考虑 $A = P(\aleph_0)^{\mathbf{M}}$ 和 $B = \aleph_1^{\mathbf{M}}$。$\mathbf{M}$ 不认为它们可数，因为 $\mathbf{M}$ 中没有从 $\aleph_0$ 到两者的双射。从 $\mathbf{M}$ 外面看，由于两者都是可数的，因此两者之间有双射。一个尝试性的想法是，向 $\mathbf{M}$ 里面添加一个 A 和 B 之间的双射 f，从而见证连续统假设成立。
这么做有两个困难:

1. 我们要保证扩张之后的模型依然满足 ZFC，因此还要添加 f 的幂集、和其它集合的交、并……总之，所有被 f 诱导出来的集合。
2. 被 f 诱导出来的集合或许有 $\aleph_0$ 新的子集，从而使新的模型中 A 不再是 $\aleph_0$ 所有的子集；被诱导出来的还或许有 B 和 $\aleph_0$ 的双射，从而新的模型中 B 不再是大于 $\aleph_0$ 的最小基数。

力迫偏序

我们想要的 f 不属于 $\mathbf{M}$，但它的片段却属于。我们转而考虑在 $\mathbf{M}$ 中的所有可能构造出 f 的片段。我们希望通过这些片段在 $\mathbf{M}$ 中的性质来预测扩张后的模型的性质。

力迫偏序

我们想要的 f 不属于 $\mathbf{M}$，但它的片段却属于。我们转而考虑在 $\mathbf{M}$ 中的所有可能构造出 f 的片段。我们希望通过这些片段在 $\mathbf{M}$ 中的性质来预测扩张后的模型的性质。

定义

令 $P \in M$，我们称 $(P, \subseteq)$ 为力迫偏序（*forcing notion*），其中元素为力迫条件 *(forcing condition)*。

1. $p, q \in P$，如果 $p \subseteq q$，我们称 q 是 p 的扩张。
2. $p, q \in P$，如果存在 r 同时是 p 和 q 的扩张，我们称 p 和 q 相容。

力迫偏序

我们想要的 f 不属于 $\mathbf{M}$，但它的片段却属于。我们转而考虑在 $\mathbf{M}$ 中的所有可能构造出 f 的片段。我们希望通过这些片段在 $\mathbf{M}$ 中的性质来预测扩张后的模型的性质。

定义

令 $P \in M$，我们称 $(P, \subseteq)$ 为力迫偏序（*forcing notion*），其中元素为力迫条件 *(forcing condition)*。

1. $p, q \in P$，如果 $p \subseteq q$，我们称 q 是 p 的扩张。
2. $p, q \in P$，如果存在 r 同时是 p 和 q 的扩张，我们称 p 和 q 相容。

几个平凡的事实：如果 $p \subseteq q$，那么 p 和 q 相容。相容性是自反的、传递的、对称的，因而是等价关系。这两个关系都对 M 绝对。

稠密集

定义

令 $D \subset P$。我们称 D 是稠密的，如果每个力迫条件都在 D 中有扩张，*i.e.*，$(\forall p \in P)(\exists q \in D) p \subseteq q$。
我们称 D 在 p 以上稠密，如果 p 的任意扩张都在 D 中有扩张，*i.e.*，$(\forall q \in P)[p \subseteq q \to (\exists r \in D) q \subseteq r]$。

以图像看，稠密集在每条链上都有任意高的节点；p 以上的稠密集在含有 p 的每条链上有任意高的节点。

脱殊理想

定义

令 $G \subset P$。我们称 G 为理想，如果 G 满足：

1. （向下封闭）如果 $p \subseteq q \in G$，那么 $p \in G$。
2. （同向性）如果 $p, q \in G$，那么存在 $r \in G$ 同时是 p, q 的扩张。

此外，我们称理想 G 是脱殊理想（*generic ideal*），如果对每个稠密集 $D \in \mathbf{M}$，$G \cap D \neq \emptyset$。

每条链都通向一个世界，每一个力迫条件都包含了它所通向的世界的一小部分信息，越高的力迫条件信息越多。一个稠密集对应的也就是所有可能的世界都共有的、因而是必然的某种性质。脱殊理想与所有稠密集都有交表明它保证了所有必然的性质。

一个例子：$f\colon \mathbb{N} \to 2$

假设我们想添加一个从 $\mathbb{N}$ 到 $\{0,1\}$ 的函数。令 P 为所有从 $\mathbb{N}$ 到 $\{0,1\}$ 的有穷部分函数的集合。P 确实属于 $\mathbf{M}$，并且“从 $\mathbb{N}$ 到 $\{0,1\}$ 的有穷部分函数”是绝对的，因为

一个例子：$f : \mathbb{N} \to 2$

假设我们想添加一个从 $\mathbb{N}$ 到 $\{0,1\}$ 的函数。令 P 为所有从 $\mathbb{N}$ 到 $\{0,1\}$ 的有穷部分函数的集合。P 确实属于 $\mathbf{M}$，并且“从 $\mathbb{N}$ 到 $\{0,1\}$ 的有穷部分函数”是绝对的，因为

$$P \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \in \mathbf{M}$$

$$f \in P \iff f\text{是函数} \wedge \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{N} \wedge \mathrm{dom}(f)\text{有最大元} \wedge \mathrm{ran}(f) = 2$$

一个例子：$f : \mathbb{N} \to 2$

假设我们想添加一个从 $\mathbb{N}$ 到 $\{0,1\}$ 的函数。令 P 为所有从 $\mathbb{N}$ 到 $\{0,1\}$ 的有穷部分函数的集合。P 确实属于 $\mathbf{M}$，并且“从 $\mathbb{N}$ 到 $\{0,1\}$ 的有穷部分函数”是绝对的，因为

$$P \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \in \mathbf{M}$$

$$f \in P \iff f\text{是函数} \wedge \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{N} \wedge \mathrm{dom}(f)\text{有最大元} \wedge \mathrm{ran}(f) = 2$$

令 G 为 P 上的一个脱殊理想。同向性保证了 $\bigcup G$ 是一个函数。并且 $\bigcup G$ 的定义域是 $\mathbb{N}$，这是因为对任意 k，$D_k = \{p \in P : k \in \mathrm{dom}(p)\}$ 是一个稠密集。

一个例子：$f : \mathbb{N} \to 2$

假设我们想添加一个从 $\mathbb{N}$ 到 $\{0,1\}$ 的函数。令 P 为所有从 $\mathbb{N}$ 到 $\{0,1\}$ 的有穷部分函数的集合。P 确实属于 $\mathbf{M}$，并且“从 $\mathbb{N}$ 到 $\{0,1\}$ 的有穷部分函数”是绝对的，因为

$$P \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \in \mathbf{M}$$

$$f \in P \iff f\text{是函数} \land \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{N} \land \mathrm{dom}(f)\text{有最大元} \land \mathrm{ran}(f) = 2$$

令 G 为 P 上的一个脱殊理想。同向性保证了 $\bigcup G$ 是一个函数。并且 $\bigcup G$ 的定义域是 $\mathbb{N}$，这是因为对任意 k，$D_k = \{p \in P : k \in \mathrm{dom}(p)\}$ 是一个稠密集。
更有趣的是，$\bigcup G \notin \mathbf{M}$，这是因为对任意 $f \in ({}^{\mathbb{N}}2) \cap \mathbf{M}$，$D_f = \{p \in P : (\exists n) p(n) \neq f(n)\}$ 是稠密集。注意，需要验证这里的稠密集属于 $\mathbf{M}$。

上述例子中最后提到的那个性质可以加以推广。

定义

我们称 P 是无原子的（*atomless*），如果对任意 $p \in P$，存在不相容的扩张 q, r。

定理

令 $P \in \mathbf{M}$ 为无原子的力迫偏序，G 为脱殊理想，则 $G \notin \mathbf{M}$。

任意力迫条件都属于某个脱殊理想

上面的定理说的是特定情况下为了构造脱殊理想，我们不得不到 $\mathbf{M}$ 的外面去；下面的定理说的是，通过待在 $\mathbf{M}$ 的外面，我们总是能构造出脱殊理想。

定理

令 P 为力迫偏序，$p_0 \in P$。则存在脱殊理想 G 使得 $p_0 \in G$。

证明：

任意力迫条件都属于某个脱殊理想

上面的定理说的是特定情况下为了构造脱殊理想，我们不得不到 $\mathbf{M}$ 的外面去；下面的定理说的是，通过待在 $\mathbf{M}$ 的外面，我们总是能构造出脱殊理想。

定理

令 P 为力迫偏序，$p_0 \in P$。则存在脱殊理想 G 使得 $p_0 \in G$。

证明：令 $\langle D_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ 枚举 $\mathbf{M}$ 中所有的稠密集。递归定义 $\langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $p_n \in D_n$，并且 $p_n \subseteq p_{n+1}$。定义 $G = \{p \in P : (\exists n) p \subseteq p_n\}$。不难验证 G 是脱殊理想。 □

$\mathbb{P}$-名字

定义

递归定义 P-名字层谱 $\langle N_\alpha \rangle_{\alpha \in \mathbf{On} \cap \mathbf{M}}$：

$$N_\alpha = \{\tau \subset N_{<\alpha} \times P : \mathrm{ran}(\tau)\text{向上封闭}\}$$

令 $N = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On} \cap \mathbf{M}} N_\alpha$。我们称 $\tau \in N$ 为 P-名字。定义 τ 的 P-rank 为最小的 α 使得 $\tau \in N_\alpha$。
给定 $\tau_0 \subset N \times P$，定义由 τ_0 生成的 P-名字 $\tau = \{\langle \sigma, q \rangle : \langle \sigma, p \rangle \in \tau_0 \wedge p \subseteq q\}$。

P-名字的值与脱殊扩张

定义

给定 P-名字 τ，递归地定义 τ 的值为
$\tau_G := \{\sigma_G : \langle\sigma, p\rangle \in \tau \wedge p \in G\}$。通行的记号是 τ_G 也写成
$\mathrm{val}(\tau, G)$。（*Weaver* 写的是 τ^G）
定义脱殊扩张 $\mathbf{M}[G] := \{\tau_G : \tau$是 P-名字$\}$。

$\mathbf{M}[G]$ 的基本性质

定义

对 $x \in \mathbf{M}$ 递归定义 $\check{x} = \{\langle \check{y}, p\rangle : y \in x \wedge p \in P\}$。
$\Gamma = \{\langle \check{p}, q\rangle : p \subseteq q\}$。

定理

对所有 $x \in \mathbf{M}$，有 $\check{x}_G = x$。$\Gamma_G = \Gamma$。因而 $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{M}[G]$ 且 $G \in \mathbf{M}[G]$。$\mathbf{M}[G]$ 可数传递。$\mathbf{On} \cap \mathbf{M} = \mathbf{On} \cap \mathbf{M}[G]$。

一些简单的 ZFC 公理

定理

$\mathbf{M}[G]$ 满足外延，对集，并集，无穷和基础公理。