CH 的独立性

力迫初步 (4)

张体云

“力迫学习小组”

2020 年 7 月 20 日

1 CH 的一致性
- 为什么有穷部分双射不能作为力迫偏序
- 可数封闭性与可数部分双射

2 ¬CH 的一致性
- 可数链性质
- Δ-系统引理
- $2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$ 的模型
- $\mathbb{P}$-美名与指数上界
- $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ 的模型

CH 的一致性

之前我们说过，想要添加一个 $\aleph_1^{\mathbf{M}}$ 和 $(2^{\aleph_0})^{\mathbf{M}}$ 之间的双射来见证连续统假设。模型扩张面临两个困难，第一个困难是保证 ZFC 依然成立。这已经在昨天利用力迫基本定理证明了。现在另一个困难是保证 $\aleph_1^{\mathbf{M}} = \aleph_1^{\mathbf{M}[G]}$ 和 $(2^{\aleph_0})^{\mathbf{M}} = (2^{\aleph_0})^{\mathbf{M}[G]}$。
力迫基本定理的好处之一是，我们可以用力迫关系来定义稠密集，并且由于力迫关系在 $\mathbf{M}$ 中可定义，这个稠密集属于 $\mathbf{M}$，然后就能和脱殊理想相交。由于稠密集对应着从一个力迫偏序中所能构造出的任意脱殊扩张的必然性质，其中起作用的就是力迫偏序本身的性质。应用力迫法的关键是选择合适的力迫偏序。

有穷部分双射作为力迫偏序

首先，我们尝试用 $(2^{\aleph_0})^{\mathbf{M}}$ 和 $\aleph_1^{\mathbf{M}}$ 之间所有的有穷部分双射作为力迫偏序。令

$$\mathbb{P}_0 = \{f \in P(2^{\aleph_0} \times \aleph_1) : f\text{是双射} \wedge |f| < \aleph_0\}^{\mathbf{M}}$$

首先观察到，对任意脱殊理想 G，$\bigcup G$ 确实是从 $(2^{\aleph_0})^{\mathbf{M}}$ 到 $\aleph_1^{\mathbf{M}}$ 的双射。
遗憾的是，$\bigcup G$ 诱导出了新的 $\mathbb{N}$ 子集，从而使得 $(2^{\aleph_0})^{\mathbf{M}} \neq (2^{\aleph_0})^{\mathbf{M}[G]}$。论证如下。

按照集合论中自然数的定义，每个自然数同时也是自然数的子集，定义

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \bigcup G(n) < \omega\}$$

我们断言 $A \notin \mathbf{M}$。假设 $B \in \mathbf{M} \cap P(\mathbb{N})$。令

$$D_B = \{f \in \mathbb{P}_0 : (\exists n \in \mathrm{dom}(f))[(n \in B \wedge f(n) \geq \omega) \vee (n \notin B \wedge f(n) < \omega)]\}$$

对任意 $f \in \mathbb{P}_0$，显然 f 有扩张在 D_B 中，因此 D_B 是稠密的。故 $G \cap D_B \neq \emptyset$。这意味着对于某个 n，有

$$n \in A \leftrightarrow \bigcup(f)(n) < \omega \leftrightarrow n \notin B$$

这表明 $A \neq B$。综上，$A \notin \mathbf{M}$。

可数封闭性

我们希望力迫偏序能有某种良好的性质保证脱殊扩张中没有新的 $\mathbb{N}$ 子集。

定义

我们称 $\mathbb{P}$ 是可数封闭的，如果对 $\mathbb{P}$ 中任意可数链 $p_0 \subseteq p_1 \subseteq \dots$，有 $\bigcup_{n<\omega} p_n \in \mathbb{P}$。（*Weaver* 将这个性质称为 ω-*closed*，但是文献中也有称为 ω_1-*closed* 的。）

定理

令 $\mathbb{P} \in \mathbf{M}$ 是力迫偏序，$\mathbf{M} \models$ "$\mathbb{P}$ 是可数封闭的"，则对任意脱殊理想 G 和 $X \in \mathbf{M}$，如果 $f : \mathbb{N} \to X$ 属于 $\mathbf{M}[G]$，那么 $f \in \mathbf{M}$。

证明

证明

可数部分双射作为力迫偏序

定义

$$\mathbb{P}_1 = \{f \in P(2^{\aleph_0} \times \aleph_1) : f\text{是双射} \wedge |f| \leq \aleph_0\}^{\mathbf{M}}$$

显然地，$\mathbb{P}_0$ 不是可数封闭的，而 $\mathbb{P}_1$ 是可数封闭的。

定理

任给 $\mathbb{P}_1$ 上的脱殊理想，$\mathbf{M}[G]$ 满足连续统假设。

元定理

如果 ZFC 一致，那么 ZFC + CH 一致。

证明

¬CH 的一致性

现在我们想让某个脱殊扩张 $\mathbf{M}[G] \models \aleph_1 < 2^{\aleph_0}$。一个天真的想法是，用刚才的技术，向 $\mathbf{M}$ 添加 $\aleph_2^{\mathbf{M}}$ 和 $(2^{\aleph}_{0})^{\mathbf{M}}$ 的双射 f。但，是否有 $\aleph_2^{\mathbf{M}} = \aleph_2^{\mathbf{M}[G]}$?
糟糕的是，我们不知道 $\mathbf{M}$ 中是否有 $\aleph_1^{\mathbf{M}}$ 和 $(2^{\aleph}_{0})^{\mathbf{M}}$ 的双射。如果有的话，那么添加 f 无非是将 $\aleph_2^{\mathbf{M}}$ 开除出基数的行列。

使用的力迫偏序

要换个思路，这次我们准备向 $\mathbf{M}$ 中添加 $\aleph_2^{\mathbf{M}}$ 多个新的 $\mathbb{N}$ 子集。而因为

$$^{\aleph_2}P(\mathbb{N}) \quad \cong \quad ^{\aleph_2}(^{\aleph_0}2) \quad \cong \quad ^{\aleph_2\times\aleph_0}2$$

我们实际上添加的是一个从 $\aleph_2^{\mathbf{M}} \times \aleph_0$ 到 $\{0,1\}$ 的函数。显然，采用的力迫偏序不能是可数部分函数，因为可数部分函数有可数封闭性，正如上一节所论证的，这将导致没有新的 $\mathbb{N}$ 子集。因此我们的力迫偏序是有穷部分函数

$$\mathbb{P}_2 = \{f \in P((\aleph_2 \times \aleph_0) \times 2) : f\text{是函数} \wedge |f| < \aleph_0\}^{\mathbf{M}}$$

可数链性质

这一偏序具有的良好性质如下

定义

任给力迫偏序 $\mathbb{P}$。我们称 $A \subset \mathbb{P}$ 是一条反链（*Antichain*），如果 A 中元素两两不相容。我们称 $\mathbb{P}$ 有可数链性质（*Countable chain condition/c.c.c.*），如果 $\mathbb{P}$ 的任意反链至多可数。

定理

假定对力迫偏序 $\mathbb{P} \in \mathbf{M}$，$\mathbf{M} \models$ “$\mathbb{P}$ 有可数链性质”。对任意脱殊理想 G 和 $X, Y \in \mathbf{M}$，如果 $f : X \to Y$ 是属于 $\mathbf{M}[G]$ 的函数，那么存在函数 $g : X \to P(Y)$ 属于 $\mathbf{M}$ 使得对任意 $x \in X$ 有 $f(x) \in g(x)$ 且 $\mathbf{M} \models$ “$g(x)$ 是可数的”。

证明

保持基数

定理

任给力迫条件 $\mathbb{P} \in \mathbf{M}$，如果 $\mathbf{M} \models$ “$\mathbb{P}$ 有可数链性质”，则对任意脱殊理想 G 和任意 $\alpha \in \mathbf{M}$，$\mathbf{M} \models$ “α 是基数”当且仅当 $\mathbf{M}[G] \models$“α 是基数”。我们称 $\mathbb{P}$ 保持基数。

Δ-系统引理

证明 $\mathbb{P}_2$ 有可数链性质需要用到一些无穷组合学的事实。

定理

任给不可数的无向图 V，任意节点至多有可数个相邻节点，则存在不可数的 $V_0 \subset V$ 使得 V_0 中的节点两两不相邻。

定理 (Δ-系统引理)

假设 X 不可数，任意 $A \in X$ 有穷。则存在不可数的 $Y \subset X$ 和 R，使得对任意 $A, B \in Y$ 有 $A \cap B = R$。Y 被称为一个 Δ-系统，R 被称为根。

证明

定理

$\mathbb{P}_2$ 有可数链性质。

证明

$2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$ 的模型

定理

任给 $\mathbb{P}_2$ 上的脱殊理想 G，$\mathbf{M}[G] \models \neg\mathsf{CH}$。

元定理

如果 ZFC 一致，那么 $\mathsf{ZFC} + \neg\mathsf{CH}$ 一致。

证明

事实上，以上论证把 $\aleph_2$ 换成任意更大的基数也同样有效。

事实上，以上论证把 $\aleph_2$ 换成任意更大的基数也同样有效。
以上只是表明了 $\mathbf{M}[G] \models \aleph_2 \leq 2^{\aleph_0}$。我们还不知道 $(2^{\aleph_0})^{\mathbf{M}[G]}$ 究竟和哪一个 $\aleph_\alpha^{\mathbf{M}[G]}$ 相等。Weaver 没有继续构造满足 $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ 的模型，但似乎没有必要停下来。

$\mathbb{P}$-美名

定义

我们称 $\mathbb{P}$-名字 τ 是一个 $\mathbb{P}$-美名（*Nice name*），如果 τ 是由 $\bigcup\{\{\sigma\} \times A_\sigma : \sigma \in dom(\tau)\}$ 生成的，其中 A_σ 是一条反链。

对任意 τ_G 的子集，我们都能找到一个相应的美名 $\theta \subset \tau$。

定理

对任意 $\mathbb{P}$-名字 μ, τ，存在美名 $\theta \subseteq \tau$ 使得对任意脱殊理想 G，$\mathbf{M}[G] \models \mu_G \subseteq \tau_G \to \mu_G = \theta_G$。

证明

美名的数量

定理

给定 $\mathbb{P}$-名字 τ。令 $\kappa = |\mathbb{P}|$，$\lambda = |dom(\tau)|$，假设 $\mathbb{P}$ 有可数链性质，κ, λ 无穷。则至多有 κ^λ 多个美名 $\theta \subset \tau$。

指数上界

定理

令 $\mathbb{P} \in \mathbf{M}$，$\mathbf{M} \models$ “$\mathbb{P}$ 有可数链性质”。假设 $\kappa = |\mathbb{P}|^{\mathbf{M}}$ 无穷，λ 为 $\mathbf{M}$ 中任意无穷基数 $^{\mathbf{M}}$，$\delta = (\kappa^{\lambda})^{\mathbf{M}}$。则对任意脱殊理想 G，$\mathbf{M}[G] \models 2^{\lambda} \leq \delta$。

定理

假设 $\mathbf{M} \models \aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$，令 $\mathbb{P}$ 为所有 $\mathbf{M}$ 中从 $\aleph_\alpha^{\mathbf{M}} \times \aleph_0$ 到 2 的有穷部分函数。则对任意脱殊理想 G，$\mathbf{M}[G] \models 2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$。

$2^{\aleph_0} = \aleph_2$ 的模型

我们不加证明地给出一个有关基数运算的事实。

定理

对任意 $n \in \mathbb{N}$，$0 < \lambda$，有 $\aleph_n^\lambda = 2^\lambda \cdot \aleph_n$

$2^{\aleph_0} = \aleph_2$ 的模型

我们不加证明地给出一个有关基数运算的事实。

定理

对任意 $n \in \mathbb{N}$，$0 < \lambda$，有 $\aleph_n^\lambda = 2^\lambda \cdot \aleph_n$

元定理

如果 ZFC 一致，那么 $\mathrm{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ 一致。