力迫关系

力迫初步 (3)

张体云

“力迫学习小组”

2020 年 7 月 19 日

关于力迫条件相容性的勘误

力迫条件的相容性不是传递的。例子：考虑有穷部分函数 $f_1 = \{\langle 0, 0\rangle\}, f_2 = \{\langle 1, 1\rangle\}, f_3 = \{\langle 0, 1\rangle\}$。

$\mathbb{P}$-名字定义勘误

首先，力迫偏序的记号改为 $\mathbb{P}$，以便和幂集符号区分。

定义 (错误的)

递归定义 $\mathbb{P}$-名字层谱 $\langle N_\alpha \rangle_{\alpha \in \mathbf{On} \cap \mathbf{M}}$：

$$N_\alpha = \{\tau \subset N_{<\alpha} \times \mathbb{P} : \mathrm{ran}(\tau)\text{向上封闭}\}$$

令 $N = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On} \cap \mathbf{M}} N_\alpha$。我们称 $\tau \in N$ 为 $\mathbb{P}$-名字。

定义 (正确的)

递归定义 $\mathbb{P}$-名字层谱 $\langle N_\alpha \rangle_{\alpha \in \mathbf{On} \cap \mathbf{M}}$：

$$N_\alpha = \{\tau \in \mathbf{M} \cap P(N_{<\alpha} \times \mathbb{P}) : (\langle \sigma, p \rangle \in \tau \wedge p \subseteq q) \to \langle \sigma, q \rangle\}$$

我们称 τ 为 $\mathbb{P}$-名字，如果存在 $\alpha \in \mathbf{On} \cap \mathbf{M}$ 使得 $\tau \in N_\alpha$。

力迫关系

前面说过力迫条件是完整构造的片段，这些片段记录了有关完整构造的部分信息——$p \in G$ 能决定 $\mathbf{M}[G]$ 中某些公式是否成立。

定义

给定公式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$，$p \in \mathbb{P}$ 和 $\mathbb{P}$-名字 $\tau_1, \ldots, \tau_n$，我们称 p 力迫 $\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$，写作

$$p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

如果对任意脱殊理想 G，$p \in G$ 蕴含 $\mathbf{M}[G] \models \phi(\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG})$。

注意，给定 ϕ，力迫关系是对象语言中的一个公式，它用到的参数是 $p, \tau_1, \ldots, \tau_n$。

由理想的向下封闭性，p 有力迫关系蕴含了 p 的任意扩张有力迫关系。

等式的力迫

今天要证明的力迫基本定理告诉我们，$M[G]$ 满足的任何公式，都是被 G 中的某一个元素所力迫的，并且力迫关系可以在 $\mathbf{M}$ 中定义。乍听之下这强得令人难以置信，但是注意到所以公式都是递归地构造出来的，所以实际上需要解决的是几个基本的情况。而证明中最繁琐的部分在于力迫 $x_1 = x_2$。这是本节的任务。

我们首先在 $\mathbf{M}$ 中递归地定义一列集合 $\langle \mathcal{F}_\alpha \rangle_{\alpha \in \mathbf{On} \cap \mathbf{M}}$，然后再证明 $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$ 当且仅当 $\langle p, \tau_1, \tau_2 \rangle$ 属于其中之一，从而证明等式的力迫关系是在 $\mathbf{M}$ 中可定义的。

在 M 中定义等式力迫关系

在 $\mathbf{M}$ 中定义等式力迫关系

令 $\mathsf{nr}(\tau_1,\tau_2)=\max\{\mathbb{P}\text{-rank}(\tau_1),\mathbb{P}\text{-rank}(\tau_2)\}$。

定义

在 $\mathbf{M}$ 中递归定义 $\langle\mathcal{F}_\alpha\rangle_{\alpha\in\mathbf{On}\cap\mathbf{M}}$。$\langle p,\tau_1,\tau_2\rangle\in\mathcal{F}_{nr(\tau_1,\tau_2)}$ 当且仅当

1. $(\forall\langle\sigma_1,q_1\rangle\in\tau_1)[p\subseteq q_1\to (\exists\langle\sigma_2,q_2\rangle\in\tau_2)(q_1\subset q_2\wedge\langle q_2,\sigma_1,\sigma_2\rangle\in\mathcal{F}_{nr(\sigma_1,\sigma_2)})]$
2. $(\forall\langle\sigma_2,q_2\rangle\in\tau_2)[p\subseteq q_2\to (\exists\langle\sigma_1,q_1\rangle\in\tau_1)(q_2\subset q_1\wedge\langle q_1,\sigma_2,\sigma_1\rangle\in\mathcal{F}_{nr(\sigma_1,\sigma_2)})]$

注意，整个递归是相对化到 $\mathbf{M}$ 中的，因而 $\mathcal{F}_\alpha=\mathcal{F}_\alpha^{\mathbf{M}}\in\mathbf{M}$。

脱殊理想的几个性质

定理

对任意脱殊理想 G,

1. $D \in \mathbf{M}$，如果任意 $p \in G$ 都和 D 中某个元素相容，那么 $G \cap D \neq \emptyset$。
2. $D \in \mathbf{M}$，如果存在 $p \in G$ 使得 D 在 p 以上稠密，那么 $G \cap D \neq \emptyset$。
3. $A \in \mathbf{M}$，如果 $G \subset A$，那么存在 $p \in G$ 使得 p 的所有扩张都属于 A。

证明 1

$D \in \mathbf{M}$，如果任意 $p \in G$ 都和 D 中某个元素相容，那么 $G \cap D \neq \emptyset$。

证明 2

$D \in \mathbf{M}$，如果存在 $p \in G$ 使得 D 在 p 以上稠密，那么 $G \cap D \neq \emptyset$。

证明 3

$A \in \mathbf{M}$，如果 $G \subset A$，那么存在 $p \in G$ 使得 p 的所有扩张都属于 A。

等式的力迫基本定理

定理

对任意 $\mathbb{P}$-名字 τ_1, τ_2，*(a)* 对任意脱殊理想 G，$\tau_{1G} = \tau_{2G}$ 当且仅当存在 $p \in G$ 使得 $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$。
(b) 对任意 $p \in \mathbb{P}$，$p \Vdash \tau_1 = \tau_2$ 当且仅当 $(\exists\alpha)\langle p, \tau_1, \tau_2\rangle \in \mathcal{F}_\alpha$

证明

对 $\mathrm{nr}(\tau_1, \tau_2)$ 作归纳。
$A = \{q_1 : (\forall \langle \sigma_1, q_1 \rangle \in \tau_1)(\exists \langle \sigma_2, q_2 \rangle \in \tau_2)(q_1 \subseteq q_2 \wedge q_2 \Vdash \sigma_1 = \sigma_2)\}$
Claim:
(i) 如果 ${\tau_1}_G \subseteq {\tau_2}_G$，那么 $G \subset A$。
(ii) 如果存在 $p \in G$ 使得 p 的每个扩张都属于 A，那么 ${\tau_1}_G \subseteq {\tau_2}_G$。

证明 (i)

$A=\{q_1:(\forall\langle\sigma_1,q_1\rangle\in\tau_1)(\exists\langle\sigma_2,q_2\rangle\in\tau_2)(q_1\subseteq q_2\wedge q_2\Vdash\sigma_1=\sigma_2)\}$

(i) 如果 ${\tau_1}_G\subseteq{\tau_2}_G$，那么 $G\subset A$。

证明 (ii)

$A = \{q_1 : (\forall\langle\sigma_1, q_1\rangle \in \tau_1)(\exists\langle\sigma_2, q_2\rangle \in \tau_2)(q_1 \subseteq q_2 \wedge q_2 \Vdash \sigma_1 = \sigma_2)\}$

(ii) 如果存在 $p \in G$ 使得 p 的每个扩张都属于 A，那么 ${\tau_1}_G \subseteq {\tau_2}_G$。

证明 (a)

(a) 对任意脱殊理想 G，$\tau_{1G} = \tau_{2G}$ 当且仅当存在 $p \in G$ 使得 $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$。

证明 (b)

(b) 对任意 $p \in \mathbb{P}$，$p \Vdash \tau_1 = \tau_2$ 当且仅当 $(\exists\alpha)\langle p, \tau_1, \tau_2\rangle \in \mathcal{F}_\alpha$

$\mathcal{F}_\alpha^\phi$

力迫基本定理其实是个定理模式。现在我们要证明对所有公式 ϕ 都有相应的定理成立，思路和等式的情况一样，先在 $\mathbf{M}$ 中递归定义集合。这里有两个递归，首先是对公式复杂度的递归，然后是对参数的 $\mathbb{P}$-rank 的递归。

定义

给定 ϕ，根据它的形式，在 $\mathbf{M}$ 中递归地定义 $\langle \mathcal{F}_\alpha^\phi \rangle_{\alpha \in \mathbf{On} \cap \mathbf{M}}$。
令 $\alpha = nr(\tau_1, \ldots, \tau_n)$，$\langle p, \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle \in \mathcal{F}_\alpha^\phi$ 当且仅当

$(x_1 \in x_2)$	$\{q : (\exists \langle \sigma, q \rangle \in \tau_2) q \Vdash \tau_1 = \sigma\}$ 在 p 以上稠密。
$(\neg \psi)$	不存在 p 的扩张 q 使得 $\langle q, \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle \in \mathcal{F}_\alpha^\psi$。
$(\psi_1 \to \psi_2)$	对任意 p 的扩张 q_1 使得 $\langle q_1, \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle \in \mathcal{F}_\alpha^{\psi_1}$，$q_1$ 有扩张 q_2 使得 $\langle q_2, \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle \in \mathcal{F}_\alpha^{\psi_2}$。
$((\forall x) \psi)$	对任意 τ，$\{q : \langle q, \tau, \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle \in \mathcal{F}_\alpha^\psi\}$ 在 p 以上稠密。

力迫基本定理

定理模式

给定 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$。对任意 $\mathbb{P}$-名字 $\tau_1, \ldots, \tau_n$，
(a) 对任意脱殊理想 G，$\mathbf{M}[G] \models \phi({\tau_1}_G, \ldots, {\tau_n}_G)$ 当且仅当存在 $p \in G$ 使得 $p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$。
(b) 对任意 $p \in \mathbb{P}$，$p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ 当且仅当 $(\exists\alpha)\langle p, \tau_1, \ldots, \tau_n\rangle \in \mathcal{F}_\alpha^\phi$

与等式力迫的证明类似，根据公式的形式，我们定义相应的 A，然后证明:
(i) 如果 $\mathbf{M}[G] \models \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$，那么 $G \subset A$。
(ii) 如果存在 $p \in G$ 使得 p 的每个扩张都属于 A，那么 $\mathbf{M}[G] \models \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$。
有这两条命题以后，剩下的证明就和等式力迫的情形几乎相同。

$\in$ 的情形

定义 $A = \{q : (\exists\langle\sigma, q'\rangle \in \tau_2)(q \subseteq q' \wedge q' \Vdash \tau_1 = \sigma)\}$。

$\neg$ 的情形

定义 $A = \{q : q \not\Vdash \psi\}$。

$\rightarrow$ 的情形

定义 $A = \{q : q \Vdash \neg\psi_1 \vee (\exists q' \supseteq q) q \Vdash \psi_2\}$。

$\forall$ 的情形

定义 $A = \{q : (\forall \tau)(\exists q' \supset q) q \Vdash \psi(\tau)\}$。

$\mathbf{M}[G]$ 满足分离公理模式

定理模式

给定公式 ϕ。对任意 $\mathbb{P}$-名字 $\tau, \tau_1, \ldots, \tau_n$，

$$y = \{x \in \tau_G : \mathbf{M}[G] \models \phi(x, \tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG})\}$$

属于 $\mathbf{M}[G]$。

$\mathbf{M}[G]$ 满足幂集公理

定理

定义 $\hat{\tau} = \{\langle\sigma, p\rangle : \sigma \subset \tau \wedge \sigma$是 $\mathbb{P}$-名字 $\wedge\, p \in \mathbb{P}\}$。对任意 $\mathbb{P}$-名字 τ，$P(\tau_G) \cap \mathbf{M}[G] = \hat{\tau}_G \in \mathbf{M}[G]$。

M[G] 的集合层谱

定理

定义 $\tilde{V}_\alpha = \{\sigma_G : \sigma \in N_\alpha\}$。则对任意 $\alpha \in \mathbf{On} \cap \mathbf{M}$，
$\tilde{V}_\alpha = P(\tilde{V}_{<\alpha}) \cap \mathbf{M}[G]$。

$\mathbf{M}[G]$ 满足替换公理模式

定理模式

给定公式 $\phi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$。对任意 $\mathbb{P}$-名字 $\tau, \tau_1, \ldots, \tau_n$，如果 $\mathbf{M}[G] \models (\forall x \in \tau_G)(\exists! y)\phi(x, y, \tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG})$，那么

$$R = \{y \in \mathbf{M}[G] : (\exists x \in \tau_G)\phi(x, y, \tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG})\}$$

属于 $\mathbf{M}[G]$。

$\mathbf{M}[G]$ 满足选择公理

定理

$\mathbf{M}[G] \models$ 任意集合上都有良序。

元定理

对 ZFC 中的任意公理 ϕ，$\mathsf{ZFC}^{+} \vdash \ulcorner$ 如果 $\mathbb{P} \in \mathbf{M}$，$G$ 是 $\mathbb{P}$ 上的脱殊理想，那么 $\mathbf{M}[G] \models \phi \urcorner$。