第一讲 重要不等式

一 不等式$a^2+b^2\geqslant 2ab$（a、b为实数）是不等式中最基本最重要的一个，它有许多变形，如：

$a^2+b^2\geqslant 2|ab|$，$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$，$(a+b)^2\geqslant 4ab$，$2\left(a^2+b^2\right)\geqslant(a+b)^2$.

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqslant 2$（$ab>0$）. $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.（$a$、$b>0$）

【例题1】 证明：(1)$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant\dfrac{4}{a+b}$，（$a$、$b>0$），(2)$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant 2\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right)$（$a$、$b$、$c>0$）.

【分析】(1)$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqslant 2\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}+1+\dfrac{b}{a}+1\geqslant 4\Leftrightarrow\dfrac{a+b}{b}+\dfrac{a+b}{a}\geqslant 4\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant\dfrac{4}{a+b}$

(2)$\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant\dfrac{4}{a+b}\\[2mm]\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant\dfrac{4}{b+c}\\[2mm]\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\geqslant\dfrac{4}{c+a}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}\geqslant 4\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right)$.

【例题2】 (1)$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant ab+bc+cd+da$. (2)$(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)$

【分析】(1)解法一：$a^2+b^2\geqslant 2ab$，$b^2+c^2\geqslant 2bc$，$c^2+d^2\geqslant 2cd$，$d^2+a^2\geqslant 2da$相加即得

$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant ab+bc+ca+da$

解法二：$a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-da=\dfrac{1}{2}(a-b)^2+\dfrac{1}{2}(b-c)^2+\dfrac{1}{2}(c-d)^2+\dfrac{1}{2}(d-a)^2\geqslant 0$.

所以$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant ab+bc+cd+da$.

(2)容易证得$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$，

所以$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\geqslant 3(ab+bc+ca)$，

即$(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)$.

【例题3】 设a_1、$a_2\cdots\cdots a_n$为不同的正整数，求证$\dfrac{a_1}{1^2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n^2}\geqslant\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\cdots\dfrac{1}{n}$.

【分析】$\dfrac{a_1}{1^2}+\dfrac{1}{a_1}\geqslant\dfrac{2}{1}$，$\dfrac{a_2}{2^2}+\dfrac{1}{a^2}\geqslant\dfrac{2}{2}$，……$\dfrac{a_n}{n^2}+\dfrac{1}{a_n}\geqslant\dfrac{2}{n}$，

又因a_1、$a_2\cdots\cdots a_n$为不同的正整数，于是不妨设：

$1\leqslant a_1<a_2<\cdots a_n$，故有$a_1\geqslant 1$，$a_2\geqslant 2$，……，$a_n\geqslant n$，

从而$\dfrac{1}{a_1}\leqslant 1$，$\dfrac{1}{a_2}\leqslant\dfrac{1}{2}$，……，$\dfrac{1}{a_n}\leqslant\dfrac{1}{n}$，

即有$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\leqslant 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$

所以由$\dfrac{a_1}{1^2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n^2}+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\geqslant 2\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{2}{n}\right)$

可得$\dfrac{a_1}{1^2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\dfrac{a_n}{n^2}\geqslant\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

不等式$a^2+b^2\geqslant 2ab$或$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$可以被推广，例如由于有恒等式：

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$，

即知当a、b、c均为正实数时必有：

$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.

或把a、b、c代以$\sqrt[3]{a}$、$\sqrt[3]{b}$、$\sqrt[3]{c}$则可有：

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc} \qquad ①$$

再如，当a、b、c、d为正实数时则：

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}\geqslant\sqrt[4]{abcd} \qquad ②$$

等等，一般若a_i为正实数，$i=1$，2，…，n．则有

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \qquad ③$$

③式即可称为算术平均值≥几何平均值，它是一个非常重要的不等式，由于其证明方法超出初中范围，故略.

顺便指出，①式可以由②式推出，即在②式中令$\dfrac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}\geqslant\sqrt[4]{abc\cdot\frac{a+b+c}{3}}$

或$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[4]{abc}\cdot\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$，

于是上式解出$\frac{a+b+c}{3}$，即得①.

不等式$2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$也可以被推广，即有：$3(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2$，……，$n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$，$a_1$，$a_2$，…，$a_n$为实数是成立，它们的证明留给读者.

下面再举几例说明以下一些不等式的应用.

【例题4】 设a、$b>0$求证：$\frac{a^6+b^6}{2}\geqslant\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}$.

【分析】 不妨设$a\geqslant b$，于是$a^2\geqslant b^2$，$a^3\geqslant b^3$，

$a^6+b^6\geqslant\frac{1}{2}(a^3+b^3)(a^3+b^3)$，

又$a^2-2ab+b^2\geqslant 0\Rightarrow\frac{a^2}{2}-ab+\frac{b^2}{2}\geqslant 0\Rightarrow a^2-ab+b^2\geqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

所以$(a+b)(a^2-ab+b^2)\geqslant\frac{1}{2}(a+b)(a^2+b^2)$，

即$a^3+b^3\geqslant\frac{1}{2}(a+b)(a^2+b^2)$，

两式相乘即可推得.

【例题5】 证明$(ab+cd)^2\leqslant(a^2+c^2)(b^2+d^2)$.（柯西不等式二元形式）

【分析】 证法一：$(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2=(ad-bc)^2\geqslant 0$，等号当且仅当$a=bk$，$c=dk$时成立.

证法二：若$a^2+c^2=0$则原式正确，现设$a^2+c^2\neq 0$考虑二次三项式：

$(ax-b)^2+(cx-d)^2=(a^2+c^2)x^2-2(ab+cd)x+(b^2+d^2)\geqslant 0$成立，故应有：

$\Delta=4(ab+cd)^2-4(a^2+c^2)(b^2+d^2)\leqslant 0$，

此式与原式等价.

【例题6】 若$3x+4y+5z=1$（x、y、z为实数），求$3x^2+2y^2+5z^2$的最小值.（利用柯西不等式）

【分析】$1=(3x+4y+5z)^2$

$$=\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}x+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}y+\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}z\right)^2$$

$$\leqslant\left[\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2\right]\left(3x^2+2y^2+5z^2\right)$$

$$=16\left(3x^2+2y^2+5z^2\right)$$

其中等号仅当$\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}y}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}z}{\sqrt{5}}$或者$x=\frac{y}{2}=z=\frac{1}{16}$时取到，故最小值为$\frac{1}{16}$.

本讲练习：

1. 证明：(1) $a+\frac{b^2}{a}\geqslant 2b$（$a$、$b>0$），(2) $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c$（$a$、$b$、$c>0$）.

2. 已知x、y、z为正实数且$x+y+z\leqslant 3$，试证明$\sqrt{5x+1}+\sqrt{5y+1}+\sqrt{5z+1}\geqslant 3\sqrt{6}$.

3. 证明：$a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c)$.

4. 设a、b、$c>0$，证明$\frac{a+b}{c}z^2+\frac{b+c}{a}x^2+\frac{c+a}{b}y^2\geqslant 2(xy+yz+zx)$.

5. 已知a、b、$c>0$，$a+b=1$，求证$ax^2+by^2 \geqslant (ax+by)^2$．

6. 已知a、b、$c>0$，且$a+b+c=1$，证明$(1-a)(1-b)(1-c) \geqslant 8abc$．

7. 设$a \geqslant b$，$c \geqslant d$，证明：$ac+bd \geqslant \frac{1}{2}(a+b)(c+d)$

第二讲 二次函数

【例题1】 二次函数$f(x)=x^2+ax+b$，$M=\max|f(x)|,-1\le x\le 1$，求$M$的最小值.

【分析】

由已知得：$M\ge |f(x)|$，$-1\le x\le 1$

所以：$\left.\begin{array}{l} M\ge |f(x)|=|1-a+b|\ge 1-a+b \\ M\ge |f(x)|=|b|\ge -b \\ M\ge |f(x)|=|1+a+b|\ge 1+a+b \end{array}\right\}\Rightarrow 4M\ge 2$，

所以：$M\ge \dfrac{1}{2}$.

又当$a=0,b=-\dfrac{1}{2}$时，$M=\dfrac{1}{2}$，故M的最小值是$\dfrac{1}{2}$.

【例题2】 二次函数$f(x)$满足(1)$f(-1)=0$，(2)对任意实数x有$x\le f(x)\le \dfrac{x^2+1}{2}$成立，求$f(x)$.

【分析】设$f(x)=ax^2+bx+c(a\ne 0)$

(1)$f(-1)=0\to a-b+c=0$

(2) $1\le f(1)\le \dfrac{1^2+1}{2}=1$，

$f(1)=1\to a+b+c=1$

$b=\dfrac{1}{2},a+c=\dfrac{1}{2},c=\dfrac{1}{2}-a$

$f(x)=ax^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}-a$

$f(x)\ge x\Rightarrow ax^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}-a\ge 0$

对任意x成立， $a>0,\Delta=\dfrac{1}{4}-4a(\dfrac{1}{2}-a)\le 0\Rightarrow (2a-\dfrac{1}{2})^2\le 0\Rightarrow a=\dfrac{1}{4}$

$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}$

【例题3】 问同时满足条件

(1) $-1 \le x \le 1$ 时，$|f(x)| \le 1$；

(2) $|f(2)| > 7$ 的二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 是否存在？证明你的结论.

【分析】

假设存在满足条件的二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$

(1) $-1 \le x \le 1$ 时，$|f(x)| \le 1$

$|f(-1)| \le 1, |f(0)| \le 1, |f(1)| \le 1$

则 $4a = 2f(-1) + 2f(1) - 4f(0), 2b = f(1) - f(-1), c = f(0)$

$7 < |f(2)| = |4a + 2b + c| = |f(-1) + 3f(1) - 3f(0)| \le |f(-1)| + 3|f(1)| + 3|f(0)| \le 7$ 矛盾

所以不存在.

【例题4】 已知 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1$，

求证：$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 1)^2 \ge (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1)$

【分析】

若 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ 不等式显然成立；

若 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 < 0$，令

$f(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)x^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 1)x + (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1)$

$f(x) = (x_1x + y_1)^2 + (x_2x + y_2)^2 + (x_3x + y_3)^2 - (x+1)^2$ $\quad f(-1) \ge 0$

又二次项系数 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 < 0$ 所以抛物线与 x 轴有交点 $\Delta \ge 0$

$4(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 1)^2 - 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1) \ge 0$

$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 1)^2 \ge (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1)$

【例题5】 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

(1) 若$f(x)=x$有实根，求证$f(f(x))=x$也有实数根

(2) 若$f(x)=x$无实数根，求证$f(f(x))=x$也无实数根

【分析】

（1） 若x_0是$f(x)=x$的实数根，则$f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$，即x_0是$f(f(x))=x$的实数根

（2）若$f(x)=x$无实数根，当$a>0$时，$f(x)>x$对于一切实数都成立，$f(f(x))>f(x)>x$

所以$f(f(x))=x$无实数根，同理当$a<0$时，$f(x)<x$对于一切实数都成立$f(f(x))<x$

所以$f(f(x))=x$无实数根

本讲练习：

1、已知实数a,b,c满足$a>b>c$，$a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=1$，求$a+b$的取值范围.

2、求证：对一切实数a方程$(a^3-2a^2+7a)x^2-(a^3+4a^2+9a+6)x+5a^2+4=0$至少有一个实根.

3、设a,b是实数，二次函数$f(x)=ax^2+b$满足$-4\le f(1)\le -1,-1\le f(2)\le 5$.求$f(3)$的取值范围.

4、方程$mx^4-(m-3)x^2+3m=0$有一根小于-2，其余3根都大于-1，求m的取值范围.

5、二次函数$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$，若$m\le x\le n(m<n)$时，$km\le f(x)\le kn,(k>1)$，求m,n,k应满足的条件.

6、$f(x)=\frac{1}{4}x^2-4x+16-a$，当$0\le x\le b(b>0)$时，$0\le f(x)\le 3b$，求$a,b$.

7、已知$\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$.且$a\ge 0,m>0$.求证：$ax^2+bx+c=0$有一根$x_0$，满足$0<x_0<1$.

8、已知$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$满足$6a,2b,a+b+c,d$均为整数，求证：对任意的整数x，$f(x)$均取整数值.

9、二次函数$f(x)=x^2+bx+c$满足$-1\le x\le 3$时，$|f(x)|\le 2$求$f(x)$的解析式.

10、二次函数$y=ax^2+bx+c$满足$y\ge 0,b>a$，求$\dfrac{a+b+c}{b-a}$的最小值.

11、求所有的二次函数$f(x)=x^2+ax+b$，a,b为实数，且存在三个取自$1,2,3,\ldots,9$的不同整数m,n,p，使得$|f(m)|=|f(n)|=|f(p)|=7$

12、试求实数a,b使得抛物线$y=x^2+ax+b$与$y=x^2+bx+a$与x轴有4个交点，且相邻两点之间的距离相等。

间的距

第三讲 二次方程和函数

【例题1】 关于x的二次方程$(k^2-6k+8)x^2+(2k^2-6k-4)x+k^2=4$的两根都是整数．求满足条件的所有实数$k$的值．

【分析】 一元二次方程的整数解的典型难题．由根为整数无法得知实数 k 为整数．解题的基本思路是消去实数 k，得到关于整数解x_1,x_2的典型方程．

由$\left(k^2-6k+8\right)x^2+\left(2k^2-6k-4\right)x+k^2=4$可知，

$\left[(k-4)x+(k-2)\right]\left[(k-2)x+(k+2)\right]=0$

故$x_1=-\dfrac{k-2}{k-4}$，$x_2=-\dfrac{k+2}{k-2}$（由题意可知，$k^2-6k+8\neq0\Rightarrow k\neq2$且$k\neq4$）

$x_1=-\dfrac{k-2}{k-4}=-(1+\dfrac{2}{k-4})$，$x_2=-\dfrac{k+2}{k-2}=-\left(1+\dfrac{4}{k-2}\right)$

于是有，$k-4=-\dfrac{2}{x_1+1}$，$k-2=-\dfrac{4}{x_2+1}$，两式相减可得，$2=-\dfrac{4}{x_2+1}+\dfrac{2}{x_1+1}\Rightarrow x_1x_2+3x_1+2=0$．

故$x_1(x_2+3)=-2$，从而可知，$\begin{cases}x_1=1\\x_2+3=-2\end{cases}$，或$\begin{cases}x_1=-1\\x_2+3=2\end{cases}$，或$\begin{cases}x_1=2\\x_2+3=-1\end{cases}$，或$\begin{cases}x_1=-2\\x_2+3=1\end{cases}$

又$x_1\neq-1$且$x_2\neq-1$，故$\begin{cases}x_1=1\\x_2=-5\end{cases}$，或$\begin{cases}x_1=2\\x_2=-4\end{cases}$，或$\begin{cases}x_1=-2\\x_2=-2\end{cases}$，故$k=6,3,\dfrac{10}{3}$．

注：得出$x_1=-\dfrac{k-2}{k-4}=-\left(1+\dfrac{2}{k-4}\right)$，$x_2=-\dfrac{k+2}{k-2}=-\left(1+\dfrac{4}{k-2}\right)$后，

直接有$k-4=\pm1,\pm2$，$k-2=\pm1,\pm2,\pm4$．由于上述两个等式是同时成立的，

故这样的k只能取$k=6,3$．

此法不严密，k不一定是整数，如果k是整数，此法可用，如果不是，就不能用！

【例题2】 已知a是正整数，如果关于x的方程$x^3+(a+17)x^2+(38-a)x-56=0$的根都是整数，求$a$的值及方程的整数根．

【分析】 本题貌似是一元三次方法，但是结合因式定理可以观察出一个解，题目就转变成典型的一元二次方程的整数解．易知方程有一个整数根$x_1=1$，将方程的左边分解因式，得：

$(x-1)\left[x^2+(a+18)x+56\right]=0$

因为a是正整数，所以关于x的方程：$x^2+(a+18)x+56=0$ ……①

的判别式$\Delta=(a+18)^2-224>0$，它一定有两个不同的实数根．

而原方程的根都是整数，所以方程①的根都是整数，

因此它的判别式$\Delta=(a+18)^2-224$应该是一个完全平方数．

设$(a+18)^2-224=k^2$（其中k为非负整数），

则$(a+18)^2-k^2=224$，即：$(a+18+k)(a+18-k)=224$．

显然$a+18+k$与$a+18-k$的奇偶性相同，且$a+18+k\geqslant18$，$a+18+k\geqslant a+18-k$．

而$224=112\times2=56\times4=28\times8$，所以：

$\begin{cases}a+18+k=112\\a+18-k=2\end{cases}$，或$\begin{cases}a+18+k=56\\a+18-k=4\end{cases}$，或$\begin{cases}a+18+k=28\\a+18-k=8\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=39\\k=55\end{cases}$，或$\begin{cases}a=12\\k=26\end{cases}$，或$\begin{cases}a=0\\k=10\end{cases}$

而a是正整数，所以只可能$\begin{cases}a=39\\k=55\end{cases}$，或$\begin{cases}a=12\\k=26\end{cases}$．

当 $a=39$ 时，方程①即 $x^2+57x+56=0$，它的两根分别为 -1 和 -56.
此时原方程的三个根为1，-1 和 -56.
当 $a=12$ 时，方程①即 $x^2+30x+56=0$，它的两根分别为 -2 和 -28.
此时原方程的三个根为1，-2 和 -28.

【例题3】 **试确定一切有理数 r，使得关于 x 的方程 $rx^2+(r+2)x+r-1=0$ 有根且只有整数根。**

【分析】 当 $r=0$ 时，原方程化为 $2x-1=0$，解得 $x=\frac{1}{2}$，不满足原方程有根且只有整数根。

当 $r\neq0$ 时，设关于 x 的一元二次方程 $rx^2+(r+2)x+r-1=0$ 的两个实根

为 x_1、x_2（$x_1\leqslant x_2$）；

由韦达定理，$x_1+x_2=-\frac{r+2}{r}$，$x_1x_2=\frac{r-1}{r}$；

所以 $2x_1x_2-(x_1+x_2)=2\times\frac{r-1}{r}-\left(-\frac{r+2}{r}\right)=3$；

所以 $2[2x_1x_2-(x_1+x_2)]+1=(2x_1-1)(2x_2-1)=3\times2+1=7$；

因为只有整数根，所以 $2x_1-1$，$2x_2-1$ 都是7的约数；

因为 $x_1\leqslant x_2$，所以 $2x_1-1\leqslant 2x_2-1$；

所以 $\begin{cases}2x_1-1=1\\2x_2-1=7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x_1-1=-7\\2x_2-1=-1\end{cases}$；

当 $\begin{cases}2x_1-1=1\\2x_2-1=7\end{cases}$ 时，$\begin{cases}x_1=1\\x_2=4\end{cases}$，$-\frac{r+2}{r}=x_1+x_2=1+4=5$，$\frac{r-1}{r}=x_1x_2=1\times4=4$，$r=-\frac{1}{3}$；

当 $\begin{cases}2x_1-1=-7\\2x_2-1=-1\end{cases}$ 时，$\begin{cases}x_1=-3\\x_2=0\end{cases}$，$-\frac{r+2}{r}=x_1+x_2=-3+0=-3$，$\frac{r-1}{r}=x_1x_2=-3\times0=0$，$r=1$。

综上所述，$r=-\frac{1}{3}$ 或 $r=1$。

【例题4】 **若抛物线 $y=x^2+mx+2$ 与连结两点 $M(0,1)$、$N(2,3)$ 的线段 MN（包括 M、N 两点）有两个不同的交点，求 m 的取值范围.**

【分析】线段 MN 的函数解析式为 $y=x+1$. 于是，原问题等价于方程 $x^2+mx+2=x+1$ 在 $[0,2]$ 内有两个不同的实根. 整理，得 $x^2+(m-1)x+1=0$. 令 $f(x)=x^2+(m-1)x+1$.

要使得 $f(x)=0$ 在 $[0,2]$ 内有两个不同实根，不仅要考虑端点，还要考虑判别式和对称轴，则有

$$\begin{cases}\Delta=(m-1)^2-4>0,\\ f(0)=1>0,\\ f(2)=4+2(m-1)+1\geq 0,\\ 0<-\dfrac{m-1}{2}<2.\end{cases}$$ 解得：$-\dfrac{3}{2}\leq m<-1$.

【例题5】 已知a、b、c为正整数，且抛物线$f(x)=ax^2+bx+c$与x轴有两个不同的交点A、B.若A、B到原点的距离都小于1，求$a+b+c$的最小值.

【分析】 令$A(x_1,0),B(x_2,0)$.依题意，得:

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0,(1)\\ f(1)=a+b+c>0,(2)\\ f(-1)=a-b+c>0.(3)\end{cases}$$

由（1）得$b>2\sqrt{ac}$；由（3）得$a+c>b$.

$a+c>b\Rightarrow a+c\geq b+1>2\sqrt{ac}+1\Rightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2>1$.

因为$\dfrac{c}{a}=x_1x_2<1$，则$a>c$.所以，$\sqrt{a}>\sqrt{c}+1$

$\Rightarrow a>(\sqrt{c}+1)^2\geq(1+1)^2=4$.

从而，$a\geq 5,b>2\sqrt{5}>4$.

故$b\geq 5$.

因此，$a+b+c\geq 11$.

取$a=5,b=5,c=1$,得

$f(x)=5x^2+5x+1=0$,

$-1<x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{10}<1$

符合条件，因此，$a+b+c$的最小值为11.

本讲练习：

1、方程$2x^2-xy-3x+y+2006=0$的正整数解(x,y)共有__________对.

2、求所有正实数a，使得方程$x^2-ax+4a=0$仅有整数根.

3、是否存在质数 p，q，使得关于 x 的一元二次方程 $px^2-qx+p=0$ 有有理数根

4、求所有有理数 r，使得方程 $rx^2+(r+1)x+(r-1)=0$ 的所有根的整数.

5、若 k 为正整数，且关于 k 的方程 $(k^2-1)x^2-6(3k-1)x+72=0$ 有两个相异正整数根，求 k 的值.

6、已知 p 为质数，使二次方程

$$x^2-2px+p^2-5p-1=0$$

的两根都是整数，求出所有可能的 p 的值.

7、方程 $(x-a)(x-8)-1=0$，有两个整数根，则 $a=$______。

8、关于 x 的一元二次方程 $2ax^2-2x-3a-2=0$ 的一根大于 1，另一根小于 1.求 a 的值.

9、当k为何值时，方程$x^2-kx+k+3=0$有两个实根，且两根均在区间$(1,4)$内？

10、方程$x^2+(2m-1)x+(m-6)=0$的一个根不大于-1，而另一根不小于1.试求：

（1）参数m的取值范围；

（2）方程两根的平方和的最大值和最小值.

11、设m是整数，且方程$3x^2+mx-2=0$的两根都大于$-\frac{9}{5}$而小于$\frac{3}{7}$.则$m=$______.

12、已知关于x的二次方程$ax^2-2(a-3)x+a-2=0$至少有一个整数根，求负整数a的值。

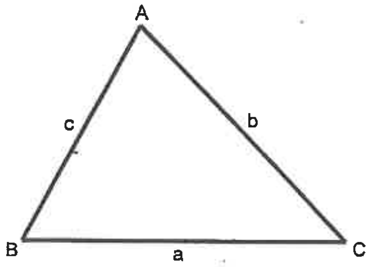
第四讲 正弦定理和余弦定理

正弦定理与余弦定理是揭示三角形中边角之间的数量关系的两个重要定理，而三角形是最基本、最重要的几何图形，所以它们是联系三角与几何的纽带。因此，正弦定理和余弦定理有着极广泛的应用，它们在代数方面主要用于解斜三角形、判定三角形形状等等；在几何方面主要用于计算、证明以及求解几何定值与几何最值等等。

正弦定理：在三角形中，各边和它所对的角的正弦的比相等。这个表述等价于：在三角形中，各边之比等于它所对的角的正弦之比。

余弦定理：在三角形中，任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角余弦的积的两倍。这个表述等价于：任何一角的余弦等于它的两条夹边的平方和减去对边的平方的差除以夹边乘积的两倍所得的商。

如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别为a，b，c。



根据正弦定理，

有$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，此式变形得$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$。

根据余弦定理，

有$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$。

变形得

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$。

在本讲中，我们首先来证明正弦定理与余弦定理，然后学习如何运用这两个定理解决数学问题。

几个拓展公式：

$\sin(180^\circ-\angle A)=\sin\angle A$

$\cos(180^\circ-\angle A)=-\cos\angle A$

$\tan(180^\circ-\angle A)=-\tan\angle A$

$\cot(180^\circ-\angle A)=-\cot\angle A$

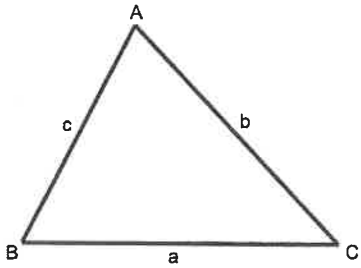
证明过程我们将在高中讲解。

我们在解答正弦定理和余弦定理的相关习题的时候会发现，以前所学的锐角三角比有了局限性，所以我们

需要知道在三角形中一些特殊角的三角比。

三角比	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

【例题1】 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别为a，b，c. 求证：$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}$.

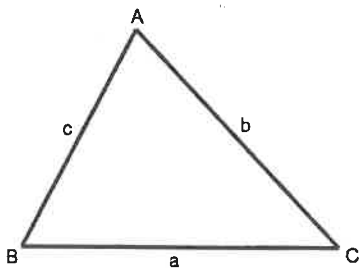


【分析】 作高AD，$c\sin B=AD=b\sin C$，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

（若$\angle C>90^\circ$，同样有$c\sin B=AD=b\sin(180^\circ-C)=b\sin C$），

同理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，所以$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

【例题2】 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别为a，b，c
求证：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\angle B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle C$.



【分析】 作高AD，$AD=c\sin B$，$BD=c\cos B$.

当$\angle C<90^\circ$时，$CD=a-c\cos B$；当$\angle C>90^\circ$，$CD=c\cos B-a$.

所以总有$b^2=(c\sin B)^2+(a-c\cos B)^2=a^2+c^2(\sin^2 B+\cos^2 B)-2ac\cos B$，

由于$\sin^2 B+\cos^2 B=1$，代入上式得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

同理可证$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$。

【例题3】 若钝角三角形的三边分别为$\sqrt{3}$、2、x，试求x的取值范围。

【分析】 若x为最大边，设钝角为α，$\cos\alpha=\frac{2^2+3-x^2}{2\times2\sqrt{3}}<0$，又$x>0$，解得$x>\sqrt{7}$. 又

$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$，所以$\sqrt{7}<x<2+\sqrt{3}$.

若2为最大边，$\cos\alpha=\frac{3+x^2-2^2}{2\sqrt{3}x}<0$，又$x>0$，解得$0<x<1$. 又因为$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$，

得$2-\sqrt{3}<x<1$.

综上，$\sqrt{7}<x<2+\sqrt{3}$或$2-\sqrt{3}<x<1$.

【例题4】 在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别为a，b，c，且$\angle A=60^{\circ}$，$c=3b$

（1） $\dfrac{a}{c}$的值

（2） $\cot\angle B+\cot\angle C$的值

【分析】 （1）$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 60^{\circ}$，$a^2=7b^2$，所以$\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

（2）$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}},\cot B=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$，$\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}},\cot C=-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

$\therefore \cot B+\cot C=\dfrac{14\sqrt{3}}{9}$.

【例题5】 在$\triangle ABC$中，$\sin A:\sin B=\sqrt{2}:1$，且$c^2=b^2+\sqrt{2}bc$，求$\angle ABC$的度数.

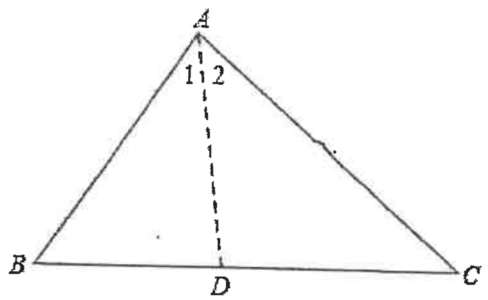
【分析】 $a:b=\sin A:\sin B=\sqrt{2}:1$，$a=\sqrt{2}b$.

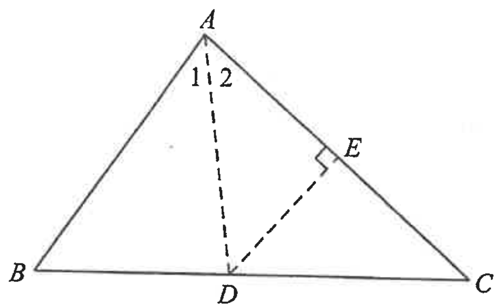
根据余弦定理，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+c^2-2b^2}{2bc}=\dfrac{c^2-b^2}{2bc}$，

由已知得$c^2-b^2=\sqrt{2}bc$，所以$\cos A=\dfrac{\sqrt{2}bc}{2bc}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle A=45^{\circ}$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin B=\sqrt{2}\sin A=\dfrac{1}{2}$。

又因为$\angle A>\angle B$，所以$\angle ABC=30^{\circ}$.

【例题6】 在$\triangle ABC$中，已知最大内角A是最小内角C的二倍，且三边长a，b，c是三个连续自然数，求各边的长.





【分析】 设三边长为$a=n+1,b=n,c=n-1$（n为整数，且$n\geq 2$）

作$\angle A$的平分线AD交BC于D，再作$DE\perp AC$于E

$\because \angle 1=\angle 2\ \therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}\ \therefore \dfrac{AB+AC}{AC}=\dfrac{BD+DC}{DC}\ \therefore DC=\dfrac{n(n+1)}{2n-1}$

$\because \angle 2=\angle C$，$\therefore AD=CD$

$\therefore EC=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{n}{2}$在$Rt\triangle EDC$中，$\cos C=\dfrac{EC}{DC}=\dfrac{2n-1}{2(n+1)}$

又在$\triangle ABC$中，由余弦定理，有

$$\cos C=\frac{BC^2+CA^2-AB^2}{2BC\bullet CA}=\frac{(n+1)^2+n^2-(n-1)^2}{2(n+1)\bullet n}=\frac{n+4}{2(n+1)}$$

$$\therefore \frac{2n-1}{2(n+1)}=\frac{n+4}{2(n+1)}$$

$\therefore n=5$

三角形三边长为4，5，6

本讲练习：

1. 某人要做一个三角形，要求它的三条高的长度分别是$\frac{1}{13},\frac{1}{11},\frac{1}{5}$，则此人将（　　）

   (A)不能做出满足要求的三角形　　(B)做出一个锐角三角形

   (C).做出一个直角三角形　　(D)做出一个钝角三角形

2. 在△ABC中，AB=3，BC=$\sqrt{13}$，AC=4，则边AC上的高为（　　）

   (A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　(B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　(C). $\frac{3}{2}$　　(D). $3\sqrt{3}$

3. △ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知cosC=$\frac{1}{4}$，a=1，c=2，则△ABC的面积为（　　）

   (A) $\frac{\sqrt{15}}{4}$　(B) $\frac{\sqrt{15}}{8}$　(C) $\frac{1}{4}$　(D) $\frac{1}{8}$

4. 在ΔABC中，$AB=5,BC=7,AC=8$，则ΔABC的面积是__________

5. 在ΔABC中，若$\angle B=30^\circ$，$AB=2\sqrt{3}$，$AC=2$，求ΔABC的面积__________

6. 在ΔABC中，$\angle A=60^\circ,b=1,$且面积为$\sqrt{3}$，则$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=$__________

7. 判断已知下列各三角形中的两边及其一边的对角，先判断三角形是否有解？有解的解三角形。

   (1) $a=7$，$b=8$，$A=105^\circ$

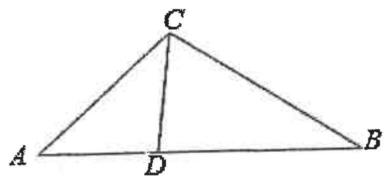
   (2) $a=10$，$b=20$，$A=80^\circ$

   (3) $a=5$，$b=5\sqrt{3}$，$A=30^\circ$

8. 如图，在△ABC中，D为AB边上一点，DA=DC，已知$\angle B=45^\circ$，BC=1.

（I）若△ABC是锐角三角形，$DC=\frac{\sqrt{6}}{3}$，求$\angle A$的大小；

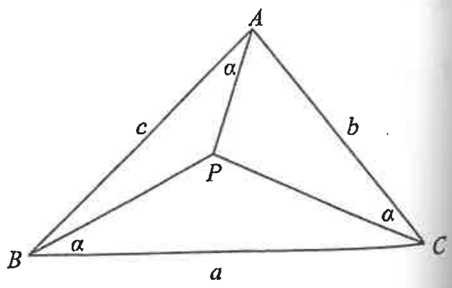
（II）若△BCD的面积为$\frac{1}{6}$，求边AB的长.



9 在△ABC中，内角A、B、C的对边长分别为a、b、c，已知$a^2-c^2=2b$，且 $\sin A\cos C=3\cos A\sin C$，

求b

10. P为在△ABC内的一点，且$\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\alpha$，求证$\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}$



第五讲 相似三角形

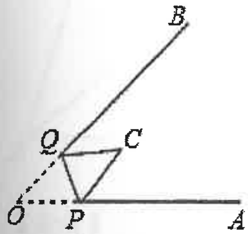
本讲的相似试题大多来自外省市的中考试题或者模考试题，大家一起来欣赏一下。

【例题1】 如图（1），$\angle AOB=45°$，点 P、Q 分别是边 OA，OB 上的两点，且 $OP=2cm$．将 $\angle O$ 沿 PQ 折叠，点 O 落在平面内点 C 处．

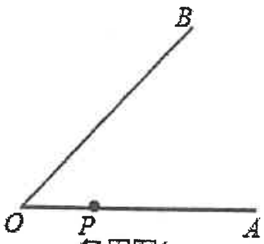
（1）①当 $PC\parallel QB$ 时，$OQ=$______；

②当 $PC\perp QB$ 时，求 OQ 的长．

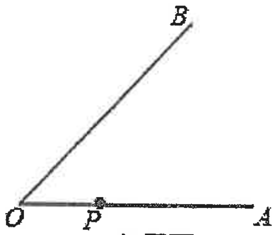
（2）当折叠后重叠部分为等腰三角形时，求 OQ 的长．



图（1）



备用图1



备用图2

【分析】 （1）①当 $PC\parallel QB$ 时，$\angle O=\angle CPA$，

由折叠的性质得：$\angle C=\angle O$，$OP=CP$，

$\therefore \angle CPA=\angle C$，$\therefore OP\parallel QC$，

$\therefore$四边形 $OPCQ$ 是平行四边形，$\therefore$四边形 $OPCQ$ 是菱形，

$\therefore OQ=OP=2cm$；

故答案为：$2cm$；

②当 $PC\perp QB$ 时，分两种情况：

（i）如图 1 所示：设 $OQ=xcm$，

$\because \angle O=45°$，$\therefore \triangle OPM$ 是等腰直角三角形，

$\therefore OM=\frac{\sqrt{2}}{2}OP=\sqrt{2}$，$\therefore QM=\sqrt{2}-x$

由折叠的性质得：$\angle C=\angle O=45°$，$CQ=OQ=x$，

$\therefore \triangle CQM$ 是等腰直角三角形，

$\therefore QC=\sqrt{2}QM \therefore x=\sqrt{2}$（$\sqrt{2}-x$），

解得：$x=2\sqrt{2}-2$，即 $OQ=2\sqrt{2}-2$；

（ii）如图 2 所示：同（i）得：$OQ=2\sqrt{2}+2$

综上所述：当 $PC\perp QB$ 时，OQ 的长为 $2\sqrt{2}-2$，或 $2\sqrt{2}+2$．

（2）当折叠后重叠部分为等腰三角形时，符合条件的点 Q 共有 5 个；

①点 C 在 $\angle AOB$ 的内部时，四边形 $OPCQ$ 是菱形，$OQ=OP=2cm$；

②当点 C 在 $\angle AOB$ 的一边上时，$\triangle OPQ$ 是等腰直角三角形，$OQ=\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{2}$；

③当点 C 在 $\angle AOB$ 的外部时，分两种情况：

（i）如图 3 所示：$PM=PQ$，则 $\angle PMQ=\angle PQM=\angle O+\angle OPQ$，

由折叠的性质得：$\angle OPQ=\angle MPQ$，

设 $\angle OPQ=\angle MPQ=x$，则 $\angle PMQ=\angle PQM=45°+x$，

在 $\triangle OPM$ 中，由三角形内角和定理得：$45°+x+x+45°+x=180°$，

解得：$x=30°$，$\therefore \angle OPQ=30°$，

作 $QN\perp OP$ 于 N，设 $ON=a$，

$\because \angle O=45°$，则 $QN=ON=a$，$OQ=\sqrt{2}a$，$PN=\sqrt{3}QN=\sqrt{3}a$

$\because ON+PN=OP$，$\therefore a+\sqrt{3}a=2$

解得：$a=\sqrt{3}-1$，$\therefore OQ=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

（ii）如图 4 所示：$PQ=MQ$，作 $QN\perp OA$ 于 N，

同①得：$OQ=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

综上所述：当折叠后重叠部分为等腰三角形时，OQ 的长为 $2cm$ 或 $\sqrt{2}\,cm$ 或 $2\sqrt{2}\,cm$，或（$\sqrt{6}-\sqrt{2}$）cm 或（$\sqrt{6}+\sqrt{2}$）cm.

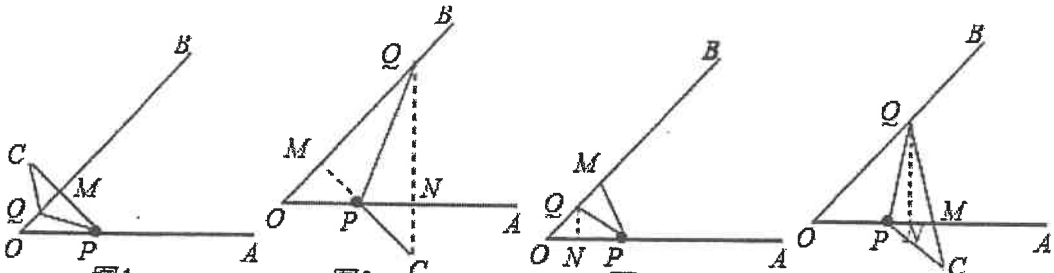


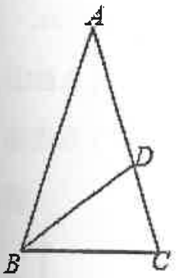
图1　图2　图3　图4

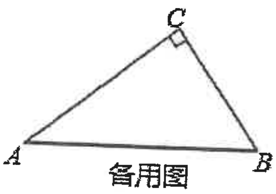
【例题2】　我们知道，三角形的内心是三条角平分线的交点，过三角形内心的一条直线与两边相交，两交点之间的线段把这个三角形分成两个图形．若有一个图形与原三角形相似，则把这条线段叫做这个三角形的“内似线”．

（1）等边三角形“内似线”的条数为______；

（2）如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 在 AC 上，且 $BD=BC=AD$，求证：BD 是 $\triangle ABC$ 的“内似线”；

（3）在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$BC=3$，E、F 分别在边 AC、BC 上，且 EF 是 $\triangle ABC$ 的“内似线”，求 EF 的长．





备用图

【分析】

(1)等边三角形“内似线”的条数为 3 条；理由如下：

过等边三角形的内心分别作三边的平行线，如图 1 所示：

则$\triangle AMN\backsim\triangle ABC$，$\triangle CEF\backsim\triangle CBA$，$\triangle BGH\backsim\triangle BAC$，$\therefore MN$、$EF$、$GH$ 是等边三角形 ABC 的内似线”；

故答案为：3；

（2）证明：$\because AB=AC$，$BD=BC=AD$，

$\therefore\angle ABC=\angle C=\angle BDC$，$\angle A=\angle ABD$，

$\therefore\triangle BCD\backsim\triangle ABC$，

又$\because\angle BDC=\angle A+\angle ABD$，$\therefore\angle ABD=\angle CBD$，$\therefore BD$ 平分$\angle ABC$，即 BD 过$\triangle ABC$ 的内心，

$\therefore BD$ 是$\triangle ABC$ 的“内似线”；

（3）解：设 D 是$\triangle ABC$ 的内心，连接 CD，则 CD 平分$\angle ACB$，

$\because EF$ 是$\triangle ABC$ 的“内似线”，$\therefore\triangle CEF$ 与$\triangle ABC$ 相似；

分两种情况：①当 $\dfrac{CE}{CF}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{4}{3}$ 时，$EF\parallel AB$，

$\because\angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=3$，$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$

作 $DN\perp BC$ 于 N，如图 2 所示：

则 $DN\parallel AC$，DN 是 $Rt\triangle ABC$ 的内切圆半径，

$\therefore DN=\dfrac{1}{2}(AC+BC-AB)=1$，

$\because CD$ 平分$\angle ACB$，$\therefore \frac{DE}{DF}=\frac{CE}{CF}=\frac{4}{3}$

$\because DN /\!/ AC$，$\therefore \frac{DN}{CE}=\frac{DF}{EF}=\frac{3}{7}$ $\therefore CE=\frac{7}{3}$

$\because EF /\!/ AB$，

$\therefore \triangle CEF \backsim \triangle CAB$，$\therefore \frac{EF}{AB}=\frac{CE}{AC}$，解得：$EF=\frac{35}{12}$

②当$\frac{CF}{CE}=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{3}$时，同理得：$EF=\frac{35}{12}$；

综上所述，EF 的长为$\frac{35}{12}$

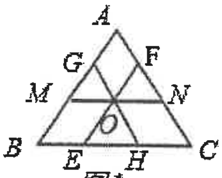


图1

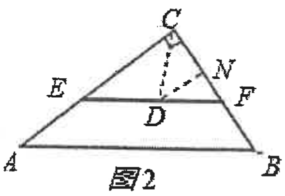


图2

【例题3】 如图 1，在平面直角坐标系中，直线 MN 分别与 x 轴、y 轴交于点 $M(6,0)$，$N(0,2\sqrt{3})$，等边△ABC 的顶点 B 与原点 O 重合，BC 边落在 x 轴正半轴上，点 A 恰好落在线段 MN 上，将等边△ABC 从图 1 的位置沿 x 轴正方向以每秒 1 个单位长度的速度平移，边 AB，AC 分别与线段 MN 交于点 E，F（如图 2 所示），设△ABC 平移的时间为 t（s）.

（1）等边△ABC 的边长为______；

（2）在运动过程中，当 $t=$______时，MN 垂直平分 AB；

（3）若在△ABC 开始平移的同时．点 P 从△ABC 的顶点 B 出发．以每秒 2 个单位长度的速度沿折线 $BA-AC$ 运动．当点 P 运动到 C 时即停止运动．△ABC 也随之停止平移．

①当点 P 在线段 BA 上运动时，若△PEF 与△MNO 相似．求 t 的值；

②当点 P 在线段 AC 上运动时，设 $S_{\triangle PEF}=S$，求 S 与 t 的函数关系式，并求出 S 的最大值及此时点 P 的坐标．

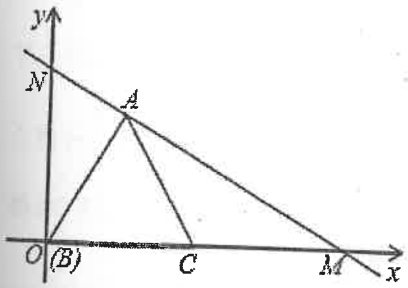


图1

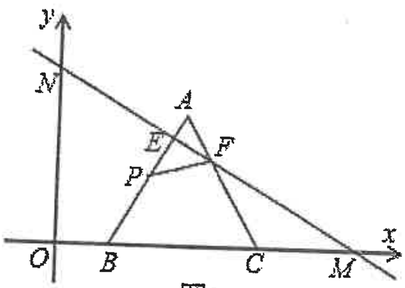


图2

【分析】

（1）∵直线 MN 分别与 x 轴正半轴、y 轴正半轴交于点 M、N，$OM=6cm$，$ON=2\sqrt{3}$

∴$\tan\angle OMN=\frac{ON}{OM}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴$\angle OMN=30°$，∴$\angle ONM=60°$，

∵△ABC 为等边三角形

∴$\angle AOC=60°$，$\angle NOA=30°$ ∴$OA\perp MN$，即△OAM 为直角三角形，∴$OA=\frac{1}{2}OM=3$.

故答案为 3.

（2）易知当点 C 与 M 重合时直线 MN 平分线段 AB，此时 $OB=3$，所以 $t=3$.

故答案为 3.

（3）①如图 1 中，由题意 $BP=2t$，$BM=6-t$，

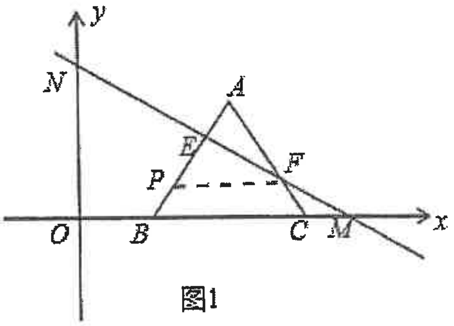


图1

∵ $\angle BEM=90°$，$\angle BME=30°$，∴$BE=3-\frac{t}{2}$，$AE=AB-BE=\frac{t}{2}$，

∵ $\angle BAC=60°$，∴$EF=\sqrt{3}AE=\frac{\sqrt{3}}{2}t$，

当点 P 在 EF 下方时，$PE=BE-BP=3-\frac{5}{2}t$，

由 $\begin{cases} t \ge 0 \\ 2t \le 3 \\ 3-\frac{5}{2}t > 0 \end{cases}$，解得 $0 \leqslant t < \frac{6}{5}$，

∵△PEF 与△MNO 相似，

∴ $\frac{PE}{EF}=\frac{2\sqrt{3}}{6}$ 或 $\frac{EF}{PE}=\frac{2\sqrt{3}}{6}$，

解得 $t=1$ 或 $\frac{3}{4}$

当点 P 在点 E 上方时，同法得 $t=\frac{3}{2}$ 或 3

∵$0 \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}$，且 $3-\frac{5}{2}t>0$，即 $\frac{6}{5}<t \leqslant \frac{3}{2}$，

∴$t=\frac{3}{2}$，

综上所述，$t=1$ 或 $\frac{3}{4}$ 或 $\frac{3}{2}$.

②当 P 点在 EF 上方时，过 P 作 $PH\perp MN$ 于 H，如图 2 中，

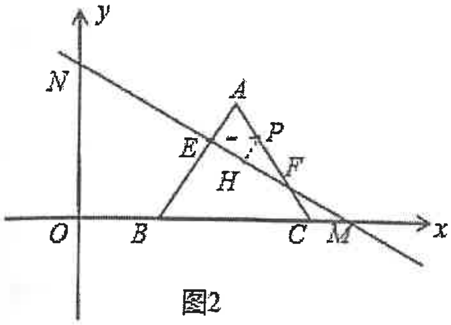


图2

由题意，$EF=\frac{\sqrt{3}}{2}t$，$FC=MC=3-t$，$\angle PFH=30°$，

$\therefore PF=PC-CF=(6-2t)-(3-t)=3-t$，

$\therefore PH=\frac{1}{2}PF=\frac{3-t}{2}$，

$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot EF\cdot PH=-\frac{\sqrt{3}}{8}t^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}t=-\frac{\sqrt{3}}{8}(t-2)^2+\frac{9\sqrt{3}}{32}$

$\because \frac{3}{2}\leqslant t\leqslant 3$，

$\therefore$ 当 $t=\frac{3}{2}$ 时，$\triangle PEF$ 的面积最大，最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{32}$，此时 P（3，$\frac{3\sqrt{3}}{2}$），

当 $t=3$ 时，点 P 与 F 重合，故 P 点在 EF 下方不成立．

本讲练习

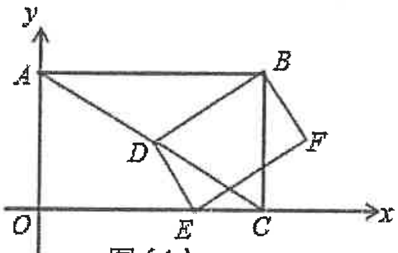
1. 如图，在平面直角坐标系中，O 为原点，四边形 $ABCO$ 是矩形，点 A，C 的坐标分别是 A（0，2）和 C（$2\sqrt{3}$，0），点 D 是对角线 AC 上一动点（不与 A，C 重合），连结 BD，作 $DE\perp DB$，交 x 轴于点 E，以线段 DE，DB 为邻边作矩形 $BDEF$.

（1）填空：点 B 的坐标为____________；

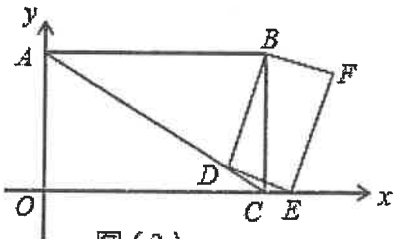
（2）是否存在这样的点 D，使得$\triangle DEC$ 是等腰三角形？若存在，请求出 AD 的长度；若不存在，请说明理由；

（3）①求证：$\dfrac{DE}{DB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

②设 $AD=x$，矩形 $BDEF$ 的面积为 y，求 y 关于 x 的函数关系式（可利用①的结论），并求出 y 的最小值.



图(1)



图(2)

2. 我们给出如下定义：若一个四边形有一组对角互补（即对角之和为 180°），则称这个四边形为圆满四边形.

（1）概念理解：在平行四边形、菱形、矩形、正方形中，你认为属于圆满四边形的有____________.

（2）问题探究：如图 ，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，若 $\angle ADB=\angle ACB$，问四边形 $ABCD$ 是圆满四边形吗？请说明理由．小明经过思考后，判断四边形 $ABCD$ 是圆满四边形，并提出了如下探究思路：先证明 $\triangle AOD\backsim\triangle BOC$，得到比例式 $\frac{OA}{OB}=\frac{OD}{OC}$，再证明 $\triangle AOB\backsim\triangle DOC$，得出对应角相等，根据四边形内角和定理，得出一组对角互补．请你帮助小明写出解题过程.

（3）问题解决：请结合上述解题中所积累的经验和知识完成下题．如图，四边形 $ABCD$ 中，$AD\perp BD$，$AC\perp BC$，AB 与 DC 的延长线相交于点 E，$BE=BD$，$AB=5$，$AD=3$，求 CE 的长.

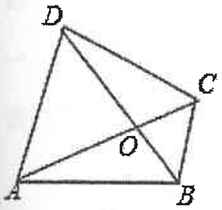


图1

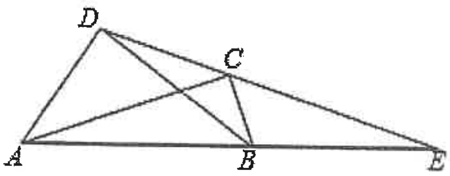


图2

3. 如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle DAB$ 被对角线 AC 平分，且 $AC^2=AB\cdot AD$，我们称该四边形为“可分四边形”，$\angle DAB$ 称为“可分角”．

（1）如图 2，若四边形 $ABCD$ 为“可分四边形”，$\angle DAB$ 为“可分角”，且 $\angle DCB=\angle DAB$，则 $\angle DAB=$________°．

（2）如图 3，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=60°$，AC 平分 $\angle DAB$，且 $\angle BCD=150°$，求证：四边形 $ABCD$ 为“可分四边形”；

（3）现有四边形 $ABCD$ 为“可分四边形”，$\angle DAB$ 为“可分角”，且 $AC=4$，$BC=2$，$\angle D=90°$，求 AD 的长？

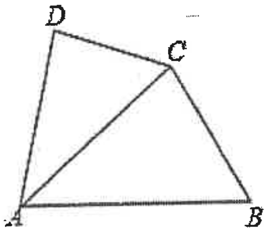


图1

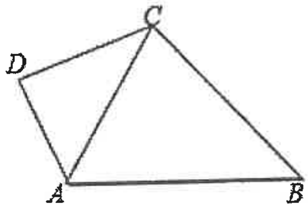


图2

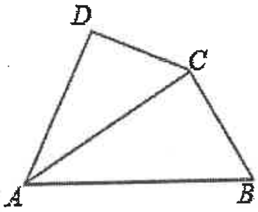


图3

4. 在锐角$\triangle ABC$中，$AB=AC$，AD为BC边上的高，E为AC中点.

（1）如图1，过点C作$CF\perp AB$于F点，连接EF. 若$\angle BAD=20°$，求$\angle AFE$的度数；

（2）若M为线段BD上的动点（点M与点D不重合），过点C作$CN\perp AM$于N点，射线EN，AB交于P点.

①依题意将图2补全；

②小宇通过观察、实验，提出猜想：在点M运动的过程中，始终有$\angle APE=2\angle MAD$.

小宇把这个猜想与同学们进行讨论，形成了证明该猜想的几种想法：

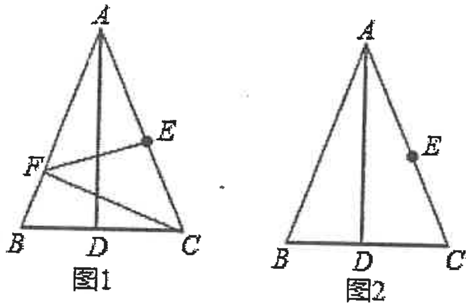
想法1：连接DE，要证$\angle APE=2\angle MAD$，只需证$\angle PED=2\angle MAD$.

想法2：设$\angle MAD=\alpha$，$\angle DAC=\beta$，只需用α，β表示出$\angle PEC$，通过角度计算得$\angle APE=2\alpha$.

想法3：在NE上取点Q，使$\angle NAQ=2\angle MAD$，要证$\angle APE=2\angle MAD$，只需证$\triangle NAQ\backsim\triangle APQ$.

…

请你参考上面的想法，帮助小宇证明$\angle APE=2\angle MAD$.（一种方法即可）



5. 如图 1，两个等腰直角三角板 ABC 和 DEF 有一条边在同一条直线 l 上，$DE=2$，$AB=1$. 将直线 EB 绕点 E 逆时针旋转 45°，交直线 AD 于点 M. 将图 1 中的三角板 ABC 沿直线 l 向右平移，设 C、E 两点间的距离为 k.

解答问题：

（1）①当点 C 与点 F 重合时，如图 2 所示，可得 $\dfrac{AM}{DM}$ 的值为______；②在平移过程中，$\dfrac{AM}{DM}$ 的值为__（用含 k 的代数式表示）；

（2）将图 2 中的三角板 ABC 绕点 C 逆时针旋转，原题中的其他条件保持不变. 当点 A 落在线段 DF 上时，如图 3 所示，请补全图形，计算 $\dfrac{AM}{DM}$ 的值；

（3）将图 1 中的三角板 ABC 绕点 C 逆时针旋转 α 度，$0<\alpha\leqslant 90$，原题中的其他条件保持不变. 计算 $\dfrac{AM}{DM}$ 的值（用含 k 的代数式表示）.

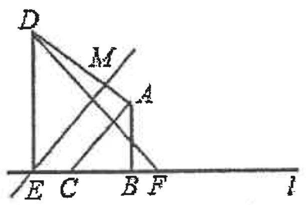


图1

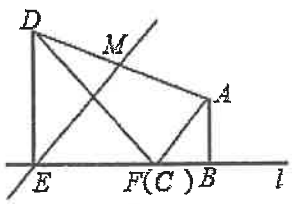


图2

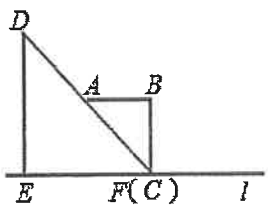
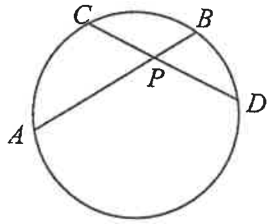


图3

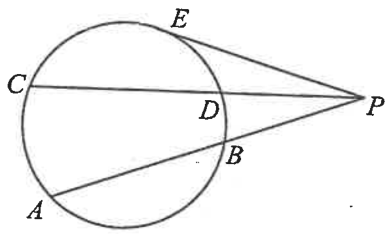
第六讲 圆中的拓展内容

处理圆中比例线段的问题，通常用到圆幂定理．圆幂定理是初中几何中最重要的定理之一．相交弦定理、切割线定理和割线定理统称为圆幂定理．

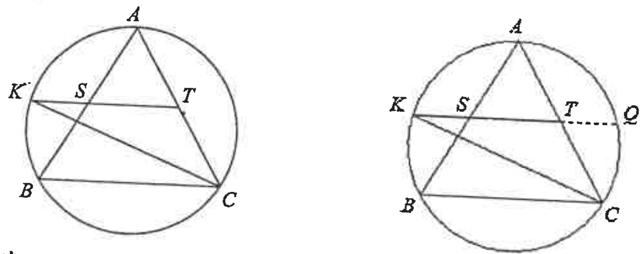
相交弦定理：圆的弦相交于圆内的一点，各弦被这点内分（分点在线段内）成的两条线段长的乘积相等．即如图所示，有 $PA \bullet PB = PC \bullet PD$．



切割线定理：圆的弦延长相交于圆外一点，各弦被这点外分（分点在线段的延长线上）成的两线段长的乘积相等，并且等于这点到 圆的切线长的平方. 即如图所示，有 $PA \bullet PB = PC \bullet PD = PE^2$



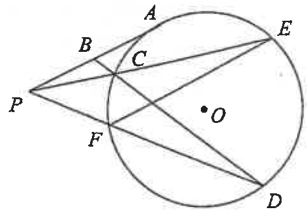
【例题1】 正ΔABC中与BC平行的中位线和ΔABC的外接圆弧AB交于K，CK和AB交于P，求$\dfrac{AP}{BP}$.



【分析】 如图，设S、T分别为AB、AC中点，ST两端延长，交圆于K、Q，易见$KS = TQ$. 设$KS = x$，$AS = BS = ST = a$，则由相交弦定理有$x(x+a) = a^2$，解得$x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$．由$\dfrac{BP}{SP} = \dfrac{BC}{KS}$，知$\dfrac{BP}{BS} = \dfrac{BC}{BC+KS} = \dfrac{2a}{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a + 2a} = \dfrac{4}{\sqrt{5}+3}$，$BP = \dfrac{4a}{3+\sqrt{5}} = \left(3-\sqrt{5}\right)a$，$AP = 2a - BP = \left(\sqrt{5}-1\right)a$，于是$\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

【例题2】　如图，PA 是 $\odot O$ 的切线．从 PA 的中点 B 作割线 BCD，分别交 $\odot O$ 于 C、D，连结 PC、PD，分别交 $\odot O$ 于 E、F．

求证：$\angle APD=\angle EFD$．



【分析】∵　PA 是 $\odot O$ 的切线，BA 是 $\odot O$ 的切线，BCD 是 $\odot O$ 的割线，

∴　$BA^2=BC\cdot BD$．

又∵　B 为 PA 的中点，

∴　$BA=PB$，

∴　$PB^2=BC\cdot BD$，

即 $\dfrac{PB}{BD}=\dfrac{BC}{PB}$．

又∵　$\angle PBC=\angle DBP$，

∴　$\Delta PBC\backsim\Delta DBP$．

∴　$\angle BPC=\angle D$．

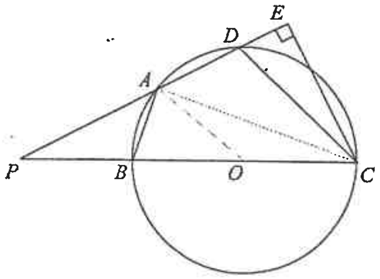
∵　$\angle E=\angle D$，

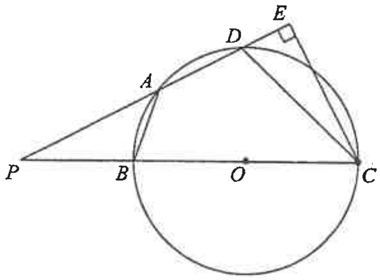
则 $\angle BPC=\angle E$，

∴　$EF/\!/PA$，

∴　$\angle APD=\angle EFD$．

【例题3】　如图，四边形 $ABCD$ 内接于以 BC 为直径的半圆 O，且 $AB=AD$，DA、CB 的延长线相交于 P 点．$CE\perp PE$，$PB=BO$，已知 $DC=18$，求 DE 的长．





【分析】注意到 $\angle CDE=\angle CBA$，所以 $\mathrm{Rt}\Delta CDE\backsim\mathrm{Rt}\Delta CBA$，因此只需求出 AB 与 $\odot O$ 半径之间的关系．因为 $AB=AD$，所以 BA 所对的圆心角等于 BD 所对的圆周角，即 $AO/\!/CD$．利用平行线分线段成比例以及圆幂定理可以联立解得 AB 与 $\odot O$ 半径之比．

连结 AO，AC．设 $\odot O$ 半径为 r．

∵ $AB=\dfrac{1}{2}BD$，

∴ $\angle AOB=\angle DCB$．

∴ $AO/\!/DC$．

设 $AD=x$，则 $\dfrac{PA}{AD}=\dfrac{PO}{OC}=2$．∴ $PA=2x$．

由切割线定理有：$PA\cdot PD=PB\cdot PC$，即 $2x\cdot(2x+x)=r\cdot 3r$．

∴ $x^2=\dfrac{1}{2}r^2$，∴ $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$．

∴ $AB=AD=\dfrac{\sqrt{2}r}{2}$．

∵ $\angle CDE=\angle CBA$，$\angle CED=90^\circ=\angle CAB$

$\therefore \triangle CDE \backsim \triangle CBA$.

$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{ED}{DC}$

又$\because \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}r}{2r}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$,

$\therefore DE=\dfrac{\sqrt{2}}{4}DC=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.

此题也可以通过勾股定理解答.

【例题6】 如图，O为等腰$\triangle ABC$底边BC的中点，以O为圆心作半圆与两腰相切于D、E，过半圆上任一点F作半圆的切线，分别交AB、AC于M、N，则$\dfrac{BM\cdot CN}{BC^2}=$________.

【分析】 连结OD、OM、OF、ON、OE，

由切线的性质得$OD\perp BM$，$OE\perp CN$，$OF\perp MN$，$OD=OE=OF$，

且由切线长定理得$DM=FM$，$FN=EN$，

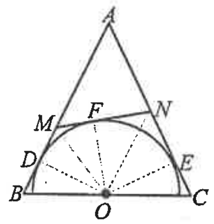
$\therefore \angle BOD=\angle COE$，$\angle DOM=\angle FOM$，$\angle EON=\angle FON$，

$\therefore \angle BOM=\angle CNO$，

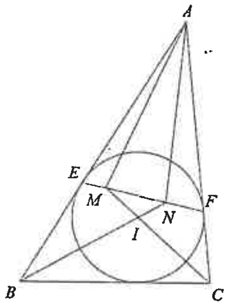
$\because AB=AC$，$\therefore \angle B=\angle C$，$\therefore \triangle BOM\backsim\triangle CNO$，

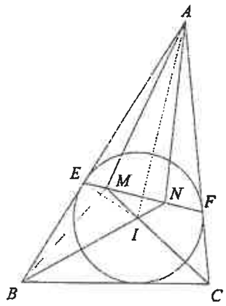
$\therefore \dfrac{BM}{CO}=\dfrac{BO}{CN}$，即$BM\cdot CN=BO\cdot CO=\dfrac{1}{2}BC\cdot\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{4}BC^2$，

$\therefore \dfrac{BM\cdot CN}{BC^2}=\dfrac{1}{4}$.



【例题7】 如图所示，$\triangle ABC$的内切圆$\odot I$与AB、AC分别切于E、F两点，射线BI、CI分别交EF于点N、M，求证$S_{\triangle AMN}=S_{\triangle IBC}$.

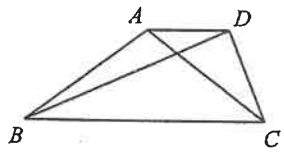


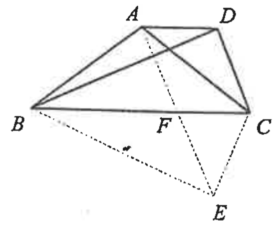


【分析】 显然$AI\perp MN$，故$S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}MN\times AI$，而$S_{\triangle IBC}=\dfrac{1}{2}BC\times r$（$r$是$\triangle IBC$中$BC$边上的高，也是$\triangle ABC$的内切圆半径），从而只需证明$MN\times AI=BC\times r$.

注意到$\angle AEF=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle BAC$，$\angle BIM=180^\circ-\angle BIC=180^\circ-(90^\circ+\dfrac{1}{2}\angle BAC)=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle BAC$，故$\angle AEF=\angle BIM$，从而B、E、M、I四点共圆，则$\angle BMI=\angle BEI=90^\circ$，$\angle MBI=\angle MEI=\angle EAI$，从而$\triangle BMI\backsim\triangle AEI$，再结合$\triangle IMN\backsim\triangle IBC$故得证.

【例题8】 如图所示，在梯形$ABCD$中，$AD // BC$，$BC=BD=1$，$AB=AC$，$CD<1$，且$\angle BAC+\angle BDC=180°$，求$CD$的长.





【分析】 如图，作点D关于BC的对称点E，连接AE、BE、CE．设AE与BC交于点F．由$AD//BC$，知点A、E到BC的距离相等．则$AF=EF$

设$CD=CE=x$，$AF=EF=m$．

由$\angle BAC+\angle BDC=180°$，得$\angle BAC+\angle BEC=180°$．故$A$、$B$、$E$、$C$四点共圆．

由$AB=AC$，得$\angle ABC=\angle ACB$．故$\angle AEB=\angle ACB=\angle ABC=\angle AEC$．

又$\angle EBF=\angle EAC\Rightarrow\triangle BFE\backsim\triangle ACE\Rightarrow\dfrac{BE}{EF}=\dfrac{AE}{CE}$．故$2m^2=AE\cdot EF=BE\cdot CE=x$．

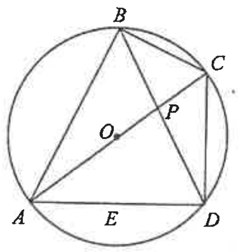
由角平分线的性质得$\dfrac{BF}{CF}=\dfrac{BE}{CE}=\dfrac{1}{x}$．

又因为$BF+CF=1$，所以$BF=\dfrac{1}{x+1}$，$CF=\dfrac{x}{x+1}$，$m^2=AF\cdot EF=BF\cdot FC=\dfrac{x}{(x+1)^2}$．

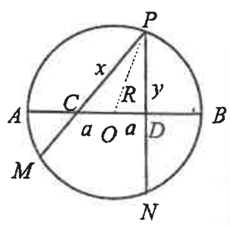
于是，由$\dfrac{2x}{(x+1)^2}=x$，解得$x=\sqrt{2}-1$．故$CD=\sqrt{2}-1$．

本讲练习：：

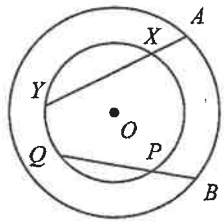
1、已知：四边形$ABCD$内接于直径为3的圆O，对角线AC和BD的交点是P，AC是直径，$AB=BD$，且$PC=0.6$，求四边形$ABCD$的周长．



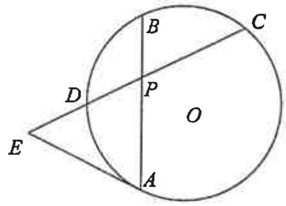
2、如图，已知圆O的直径AB上有两定点C，D和圆心O等距离，P是圆周上任意一点，联结PC，PD分别延长交圆O于M，N，求证：$\dfrac{PC}{CM}+\dfrac{PD}{DN}$是定值．



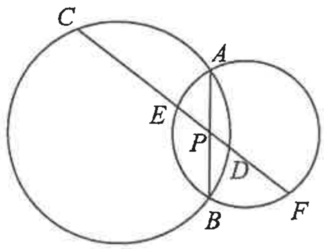
3、如图，在以O为圆心的两个同心圆中，A，B是大圆上任意两点，过A，B作小圆的割线AXY和BPQ. 求证：$AX\cdot AY=BP\cdot BQ$.



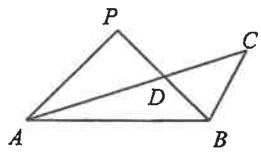
4、如图，已知$\odot O$的弦AB，CD相交于点P，$PA=4$，$PB=3$，$PC=6$，EA切$\odot O$于点A，AE与CD的延长线交于点E，$EA=2\sqrt{5}$，求PE的长.



5、已知P点为$\odot O_1$和$\odot O_2$公共弦AB上的一个点，过P的一条直线交$\odot O_1$和$\odot O_2$分别于C，D，E，F. 证明：$\dfrac{CE}{PE}=\dfrac{DF}{PD}$.

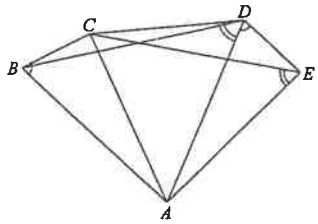


6、如图，若$PA=PB$，$\angle APB=2\angle ACB$，AC与BP交于D，且$PB=4, PD=3$，求$AD\cdot DC$.

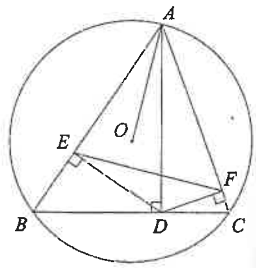


7、两个角的边交于点A、B、C、D. 已知，这两个角的平分线互相垂直，证明，点A、B、C、D四点共圆.

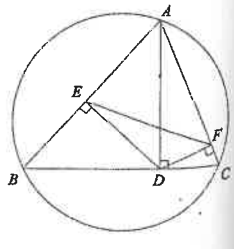
8、如图所示，如果凸五边形$ABCDE$中，$\angle ABC=\angle ADE$且$\angle AEC=\angle ADB$. 求证：$\angle BAC=\angle DAE$.



9、如图所示，在锐角ΔABC中，$AD\perp BC$，垂足为点D；$DE\perp AB$，垂足为点E；$DF\perp AC$，垂足为点F. 若点O为ΔABC的外心，求证$AO\perp EF$.

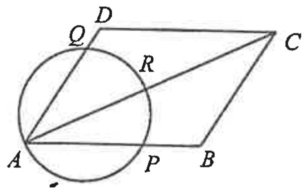


10、如图所示，ΔABC的外接圆半径为R，$AD\perp BC$，垂足为点D；$DE\perp AB$，垂足为点E；$DF\perp AC$，垂足为点F. 求证$S_{\Delta ABC}=EF\cdot R$.



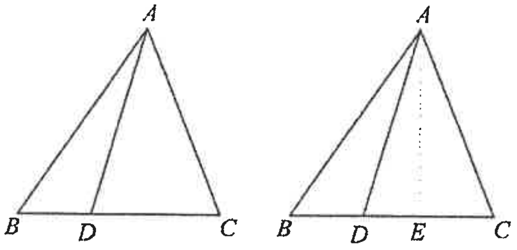
11、如图，过A的圆截平行四边形$ABCD$的边和对角线分别于P，Q，R，

求证：$AP\cdot AB+AQ\cdot AD=AR\cdot AC$．



第七讲 几何著名定理

【例题1】 证明：斯德瓦尔特定理：如图，ΔABC 中，D 是 BC 上任意一点，则有 $AB^2\cdot CD+AC^2\cdot BD=AD^2\cdot BC+BD\cdot CD\cdot BC$．



【分析】过点 A 作 BC 的垂线，垂足为 E，则有 $AB^2=AE^2+BE^2$，$AC^2=AE^2+CE^2$，$AD^2=AE^2+DE^2$

故 $AB^2\cdot CD+AC^2\cdot BD-AD^2\cdot BC=\left(AE^2+BE^2\right)\cdot CD+\left(AE^2+CE^2\right)\cdot BD$

$-\left(AE^2+DE^2\right)\cdot BC=AE^2\left(CD+BD-BC\right)+BE^2\cdot CD+CE^2\cdot BD-DE^2\cdot BC$

$=BE^2\cdot CD+CE^2\cdot BD-DE^2\cdot BC=\left(BD+DE\right)^2\cdot CD+\left(CD-DE\right)^2\cdot BD$

$-DE^2\cdot BC=\left(BD^2+DE^2+2BD\cdot DE\right)\cdot CD+\left(CD^2+DE^2-2CD\cdot DE\right)\cdot BD$

$-DE^2\cdot BC=BD^2\cdot CD+CD^2\cdot BD+DE^2\cdot BC-DE^2\cdot BC=BD^2\cdot CD+CD^2\cdot BD$

$=BD\cdot CD\cdot BC$．

即 $AB^2\cdot CD+AC^2\cdot BD=AD^2\cdot BC+BD\cdot CD\cdot BC$

点评： 由斯德瓦尔特定理可以得出很多有用的结论，比如上例，令本例中 $BD=CD$，则很快得出上例的结论以及中线长的公式，一般地，只要 ΔABC 的三条边已知，BC 上一点 D 的位置已知，则 AD 的长度便可直接求出来．另外，此结论用余弦定理证明也是很快的：

在 ΔABD 中，由余弦定理可知，$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB$；

在 ΔACD 中，由余弦定理可知，$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\angle ADC$；

故 $AB^2\cdot CD+AC^2\cdot BD-AD^2\cdot BC=AD^2\cdot CD+BD^2\cdot CD+AD^2\cdot BD+CD^2\cdot BD$

$-AD^2\cdot BC=AD^2\cdot BC+BD\cdot CD\cdot BC-AD^2\cdot BC=BD\cdot CD\cdot BC$．

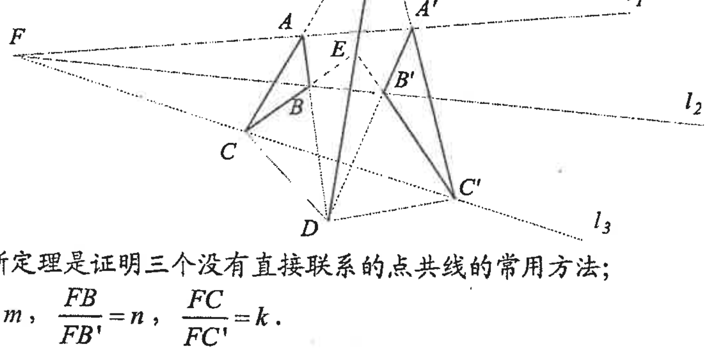
【例题2】 证明斯坦纳（Steiner）定理：若 P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点，作 $PD\perp BC$，交 BC 于点 D，作 $PE\perp CA$ 于点 E，作 $PF\perp AB$ 于点 F．则 $AF^2+BD^2+CE^2=AE^2+CD^2+BF^2$．

【分析】$AF^2+BD^2+CE^2=PA^2-PF^2+PB^2-PD^2+PC^2-PE^2$

$=PA^2-PE^2+PC^2-PD^2+PB^2-PF^2$

$=AE^2+CD^2+BF^2$．

【例题3】 证明笛沙格定理：平面上有两个三角形 ΔABC、$\Delta A'B'C'$，设它们的对应顶点（A 和 A'、B 和 B'、C 和 F'）的连线交于一点，这时如果对应边或其延长线相交，则这三个交点共线．



【分析】运用梅涅劳斯定理是证明三个没有直接联系的点共线的常用方法；

假设：$\dfrac{FA}{FA'}=m$，$\dfrac{FB}{FB'}=n$，$\dfrac{FC}{FC'}=k$．

直线AC割三角形$FA'C'$，所以$\dfrac{CC'}{CF}\cdot\dfrac{FA}{AA'}\cdot\dfrac{A'G}{GC'}=1$.

即$\left(\dfrac{1}{k}-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{m}-1}\right)\cdot\dfrac{A'G}{GC'}=1$.

$\therefore\dfrac{A'G}{GC'}=\dfrac{(1-m)k}{(1-k)m}$.

同理$\dfrac{CC'}{CF}\cdot\dfrac{FB}{BB'}\cdot\dfrac{B'E}{EC'}=1$，

可得到：$\dfrac{B'E}{EC'}=\dfrac{(1-n)k}{(1-k)n}$.

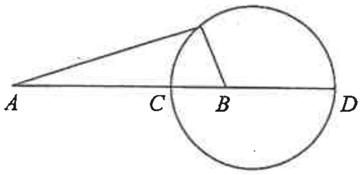
同理可得到：$\dfrac{B'D}{DA'}=\dfrac{(1-n)m}{(1-m)n}$.

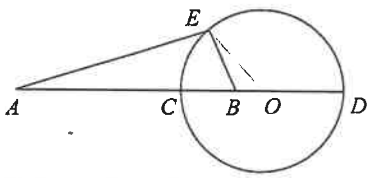
$\therefore\dfrac{A'G}{GC'}\cdot\dfrac{C'E}{EB'}\cdot\dfrac{B'D}{DA'}=\dfrac{(1-m)k}{(1-k)m}\cdot\dfrac{(1-k)n}{(1-n)k}\cdot\dfrac{(1-n)m}{(1-m)n}=1$.

$\therefore G$、E、D共线.

证明逆定理可以使用同一法.

【例题4】 **证明阿波罗尼斯圆：到两定点A、B的距离之比为定比$m:n$（值不为1）的点p，位于将线段AB分成$m:n$的内分点C和外分点D为直径两端点的定圆周上.**





【分析】首先证明阿波罗尼斯定理的逆定理：将线段AB分成$m:n$（值不为1）的内分点C和外分点D为直径两端点的定圆周上任意一点到两定点A、B的距离之比为定比$m:n$.

不妨设$m>n$，设$AB=l$，则$AC=\dfrac{ml}{m+n}$，$BC=\dfrac{nl}{m+n}$，

$AD=\dfrac{ml}{m-n}$，$BC=\dfrac{nl}{m-n}$.

$\therefore$圆的直径为$AD-AC=\dfrac{ml}{m-n}-\dfrac{ml}{m+n}=\dfrac{2mnl}{m^2-n^2}$.

圆的半径$R=\dfrac{mnl}{m^2-n^2}$，

$AO=\dfrac{AC+AD}{2}=\dfrac{m^2l}{m^2-n^2}$，

$BO=\dfrac{BD-BC}{2}=\dfrac{n^2l}{m^2-n^2}$，

可得到$AO\cdot BO=\dfrac{m^2n^2l^2}{(m^2-n^2)}=R^2$.

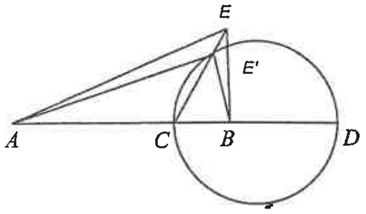
$\therefore$对于$\odot$上任意一点E有.

$\dfrac{BO}{EO}=\dfrac{AO}{EO}=\dfrac{m}{n}$. $\angle EOA=\angle BOE$.

$\therefore\triangle EOA\backsim\triangle BOE$.

$\therefore\dfrac{EB}{AE}=\dfrac{m}{n}$.

阿波罗尼斯定理的逆定理证明成立后，反过来再证明原来的定理可以使用反证法.



设E不在圆上并且$AE:BE=m:n=AC:BC$，
联结EC，则EC为三角形AEB的角平分线，
如果EC或其延长线与圆有另一个交点E'，则根据已证明的逆定理$AE':BE'=m:n=AC:BC$，所以$E'C$是三角形$AE'B$的角平分线，于是很容易证明
$\triangle AEE' \cong \triangle BEE'$，该结论与$m:n$值不为1矛盾.
如果EC或其延长线与圆只有一个交点，则EC与圆相切，于是容易证明$\triangle AEC \cong \triangle BEC$，同样能得出矛盾．所以假设不成立．即满足$AE:BE=m:n=AC:BC$的点只能在$CD$为直径的圆上.
另解：运用余弦定理可以直接得到原命题.

已知：A,B,C,D共线，$AE:BE=AC:BC=AD:BD=m:n$，O为CD中点，求证$OE=\frac{1}{2}CD$

$$\frac{AO^2+EO^2-2AO\cdot EO\cdot\cos\angle\theta}{m^2}=\frac{EO^2+BO^2-2EO\cdot BO\cdot\cos\angle\theta}{n^2}$$

$\because AO=\frac{AC+AD}{2}=\frac{m^2l}{m^2-n^2}$，$BO=\frac{BD-BC}{2}=\frac{n^2l}{m^2-n^2}$.

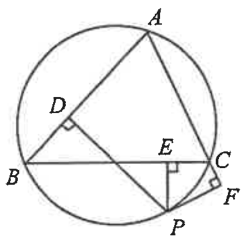
$\therefore \frac{AO}{m^2}=\frac{BO}{n^2}$，

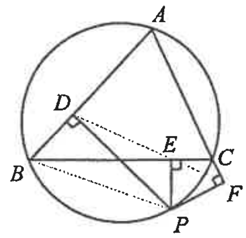
$\therefore \frac{2AO\cdot EO\cdot\cos\angle\theta}{m^2}=\frac{2EO\cdot BO\cdot\cos\angle\theta}{n^2}$，

$\therefore \frac{AO^2+EO^2}{m^2}=\frac{EO^2+BO^2}{n^2}$，

$\therefore EO^2=\left(\frac{mnl}{m^2-n^2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}CD\right)^2$.

【例题5】　证明：西姆松定理：
（1）如图，从$\triangle ABC$外接圆上任一点P向三边AB，BC，CA所在直线引垂线，设垂足分别为D，E，F，则D，E，F共线.
（2）由$\triangle ABC$外一点P向其三边AB，BC，CA所在直线引垂线，垂足为D，E，E．若D，E，F共线，则P点必在$\triangle ABC$的外接圆上.





【分析】（1）证明　连接DE，EF，PB，PC．由$PD\perp AB$，$PE\perp BC$可知，D，B，P，E四点共圆，故$\angle BED=\angle BPD$
由$PF\perp AC$，$PE\perp BC$可知，P，E，C，F四点共圆，故$\angle CEF=\angle CPF$
又$\angle PCF=\angle ABP$，$PD\perp AB$，$PF\perp Ac$可知，$\angle CPF=\angle BPD$
故$\angle BED=CEF$，从而可知，D，E，F三点共线.
（2）证明　由$PD\perp AB$，$PE\perp BC$可知，D，B，P，E四点共圆，故$\angle BED=\angle BPD$
由$PF\perp AC$，$PE\perp BC$可知，P，E，C，F四点共圆，故$\angle CEF=\angle CPF$
又$\angle BED=\angle CEF$，故$\angle BPD=\angle CPF$.

又 $PD\perp AB$，$PF\perp AC$，故 $\angle PCF=\angle ABP$，
从而可知，A，B，P，C 四点共圆，即 P 点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

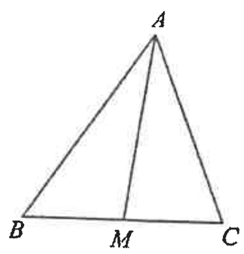
本讲练习：：

1、在 ΔABC 中，证明正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

2、在 ΔABC 中，证明余弦定理：
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$．$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$．

3、证明海伦公式：$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，$p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，$a,b,c$ 为三边长.

4、如图，AM 是 ΔABC 的 BC 边上的中线，求证：$AB^2+AC^2=2\left(AM^2+BM^2\right)$．



5、证明：若G为$\triangle ABC$的重心，P为$\triangle ABC$所在平面上任意一点．则
$PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3PG^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)+3PG^2$.

6、证明：平行四边形的两条对角线的平方和等于四条边的平方和.

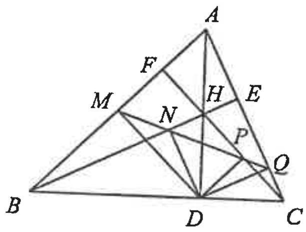
7、已知：四边形$ABCD$内接于圆，求证：$AC\cdot BD=AD\cdot BC+AB\cdot CD$

8、求证：任意四边形四条边的平方和等于对角线的平方和加对角线中点连线平方的4倍.

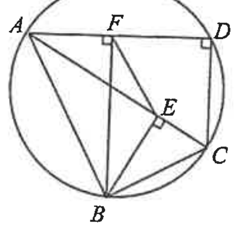
9、在$\triangle ABC$中，已知$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:4$，求证：$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{BC}$.

10、若a、b、x、y是实数，且$a^2+b^2=1$，$x^2+y^2=1$．求证：$ax+by\leqslant 1$．（几何方法）

11、如图，已知AD，BE，CF是$\triangle ABC$的三条高，点D在直线AB，BE，CF，CA上的射影分别是M，N，P，Q．求证：M，N，P，Q四点共线.



12、四边形$ABCD$是圆内接四边形，且$\angle D$是直角，若从B作直线AC、AD的垂线，垂足分别为E、F，则直线EF平分线段BD．

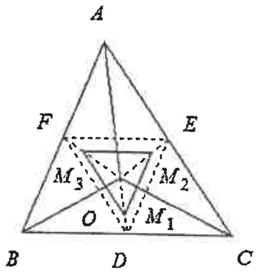


第八讲 三角形的五心

如果你不知道五心,可以去查阅相关资料.

【例题1】 给定ΔABC和点O，分别将ΔOBC、ΔOCA、ΔOAB的重心记为M_1、M_2、M_3.

求证：$S_{\Delta M_1M_2M_3}=\frac{1}{9}S_{\Delta ABC}$.



【分析】设D、E、F分别是BC、CA、AB的中点，则

$\frac{OM_1}{OD}=\frac{OM_2}{OE}=\frac{OM_3}{OF}=\frac{2}{3}$，

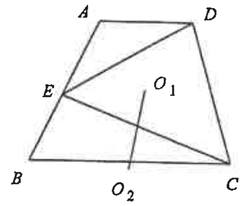
从而$\Delta M_1M_2M_3\backsim\Delta DEF$.

而$\Delta DEF\backsim\Delta ABC$，则$\Delta M_1M_2M_3\backsim\Delta ABC$.

又$\frac{M_1M_2}{DE}=\frac{OM_1}{OD}=\frac{2}{3}$，$\frac{DE}{AB}=\frac{1}{2}$，则$\frac{M_1M_2}{AB}=\frac{1}{3}$，

故$\frac{S_{\Delta M_1M_2M_3}}{S_{\Delta ABC}}=\left(\frac{M_1M_2}{AB}\right)^2=\frac{1}{9}$，即$S_{\Delta M_1M_2M_3}=\frac{1}{9}S_{\Delta ABC}$.

【例题2】 在给定的梯形$ABCD$中，$AD\,//\,BC$，E是AB边上的动点．O_1、O_2分别是ΔAED和ΔBEC的外心．求证：O_1O_2的长为一定值.



【分析】 连EO_1、EO_2，则$\angle AEO_1=90°-\angle ADE$，
$\angle BEO_2=90°-\angle BCE$.

于是$\angle O_1EO_2=\angle ADE+\angle ECB$.

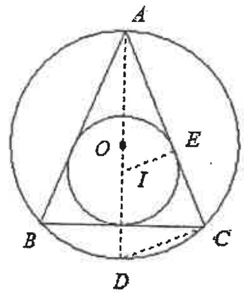
由于$AD\,//\,BC$，过E作AD的平行线可证出
$\angle DEC=\angle ADE+\angle BCE$．所以$\angle O_1EO_2=\angle DEC$.

又由正弦定理，可知$\frac{DE}{EC}=\frac{2O_1E\cdot\sin\angle A}{2O_2E\cdot\sin\angle B}=\frac{O_1E}{O_2E}$，从而$\Delta DEC\backsim\Delta O_1EO_2$.

所以$\frac{O_1O_2}{DC}=\frac{O_1E}{DE}=\frac{O_1E}{2O_1E\cdot\sin\angle A}=\frac{1}{2\sin A}$，故$O_1O_2=\frac{DC}{2\sin\angle A}$为定值.

【例题3】 已知一等腰三角形的外接圆半径为R，内切圆半径为r，

证明：两圆心的距离为$d=\sqrt{R(R-2r)}$.



【分析】如图，设$AB=AC$，O为ΔABC的外接圆圆心，I为ΔABC的内切圆圆心(即I为ΔABC的内心)，连接AI并延长AI，

交圆O于D，则易知AD是圆O的直径.

设AC与圆O相切于E，

连接IE、DC，则$\angle AEI=\angle ACD=90°$，

所以$IE\,//\,DC$，从而$\frac{AI}{AD}=\frac{IE}{DC}$，

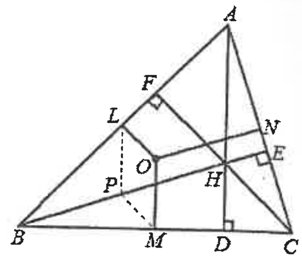
于是$AI\cdot DC=AD\cdot IE=2Rr$，由此，得$DC=DI$.

因为$AI=OA+OI=R+d$，$DI=OD-OI=R-d$，

所以$(R+d)(R-d)=2Rr$，整理，得$d=\sqrt{R(R-2r)}$.

思考： 非等腰的时候这个命题还成立吗？

【例题4】 证明：三角形的任一顶点到垂心的距离，等于外心到对边距离的两倍.



【分析】事实上，如图，AD、BE、CF 分别为 $\triangle ABC$ 的三条高，D、E、F 分别为垂足，H 是垂心. O 是 $\triangle ABC$ 的外心，M、N、L 分别是 BC、CA、AB 的中点，则 OM、ON、OL 即为外心 O 到三边的距离.

取 BH 的中点 P，连 PL、PM，则

$PL \parallel \frac{1}{2}AH$，$PL=\frac{1}{2}AH$，$PM \parallel \frac{1}{2}HC$，$PM=\frac{1}{2}HC$.

而 $OM \parallel AD$，$OL \parallel CF$，

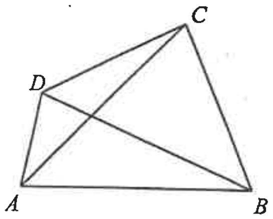
则 $PL \parallel MO$，$PM \parallel LO$，

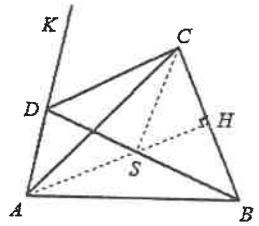
即四边形 $PMOL$ 为平行四边形（或连 PO，有 $\triangle PLO \cong \triangle OMP$）有

$OM=LP=\frac{1}{2}AH$，$OL=MP=\frac{1}{2}CH$.

同理，$ON=\frac{1}{2}BH$.

【例题5】 如图，在凸四边形 $ABCD$ 中，$AB=AC=BD$ 它的四个内角中，有两个是锐角，其度数分别为 $72°$、$66°$. 求另外两个内角的度数.





【分析】显然. ΔABC、ΔBAD 都是等腰三角形

由于等腰三角形的底角是锐角，可知 $\angle BAD$、$\angle ABC$ 都是锐角.

不妨设 $\angle BAD=72°$，$\angle ABC=66°$ 此时，$\angle BDA=72°$，$\angle ACB=66°$

$\angle BAC=180°-2\times 66°=48°$，$\angle ABD=180°-2\times 72°=36°$.

如图，作 $AH \perp BC$ 于点 H，并交 BD 于点 S，

连接 SC 延长 AD 到点 K

易知 $\angle CAD=\angle BAD-\angle BAC=24°$，$\angle SAC=\angle HAC=\frac{1}{2}\angle BAC=24°$.

故 $\angle SAC=\angle CAD$，即 AC 平分 $\angle DAS$.

又 $\angle BSH=90°-\angle SBH=90°-(\angle ABC-\angle ABD)=60°$

易知 $\angle CSH=\angle BSH=60°$. 则 $\angle DSC=180°-(\angle BSH+\angle CSH)=60°$

故 $\angle DSC=\angle CSH$. 即 SC 平分 $\angle ASD$ 的外角.

由 AC 和 SC 分别平分 $\angle DAS$ 和 $\angle ASD$ 的外角知，C 必是 ΔASD 的旁心.

根据旁心的性质，得 DC 平分 $\angle ADS$ 的外角.

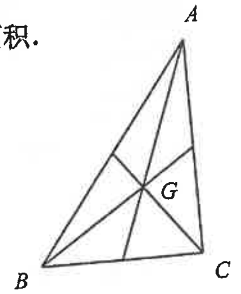
因为 $\angle BDA=72°$，$\angle BDK=108°$，则

$\angle BDC=\angle SDC=\frac{1}{2}\angle BDK=54°$，$\angle ADC=\angle BDA+\angle BDC=126°$

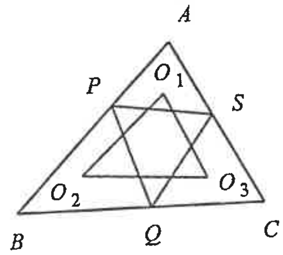
故 $\angle BCD=360°-72°-66°-126°=96°$.

本讲练习：:

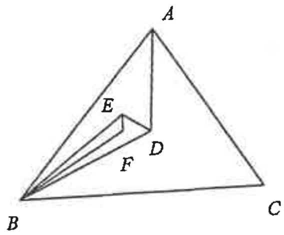
1、设G为ΔABC的重心，$GA=2\sqrt{3}$，$GB=2\sqrt{2}$，$GC=2$．求ΔABC的面积．



2、如图，在ΔABC的边AB、BC、CA上分别取点P、Q、S．证明：以ΔAPS、ΔBQP、ΔCSQ的外心为顶点的的三角形与ΔABC相似．

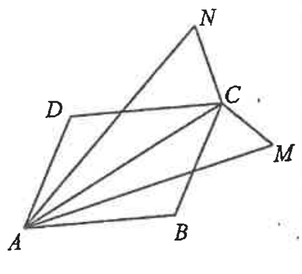


3、如图，D是ΔABC的内心，E是ΔABD的内心，F是ΔBDE的内心．若$\angle BFE$的度数是整数，求$\angle BFE$的最小度数．



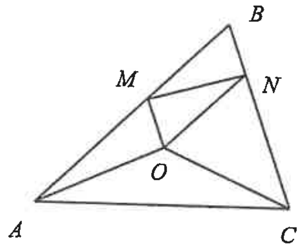
4、已知ΔABC的顶点A到垂心H的距离等于它的外接圆的半径，试求$\angle A$的度数．

5、在$ABCD$中，M N分别是ΔABC ΔADC的旁心．求证：$\angle AMC=\angle ANC$．



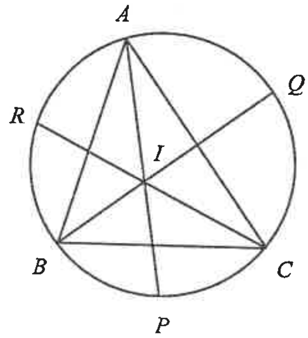
6、设凸四边形$ABCD$的对角线AC与BD相交于O，ΔOAB、ΔOBC、ΔOCD、ΔODA的重心分别为E、F、G、H，则$S_{EFGH}:S_{ABCD}=$________.

7、设ΔABC的外心为O．在其边AB和BC上分别取点M和N，使得$2\angle MON=\angle AOC$．证明：ΔMBN的周长不小于边AC之长.



8、如图，在ΔABC中，$\angle A$、$\angle B$，$\angle C$的平分线分别交外接圆于点P、Q、R．

证明：$AP+BQ+CR>BC+CA+AB$．

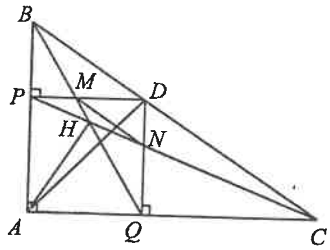


9、在$Rt\Delta ABC$中，$\angle A=90°$，$\angle A$的平分线交边BC于点D，点D在边AB，AC上的投影分别为P，Q．若BQ交DP于点M，CP交DQ于点N，BQ交CP于H，证明：

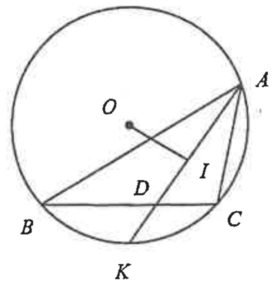
(1) $PM=DN$；

(2) $MN\ //\ BC$；

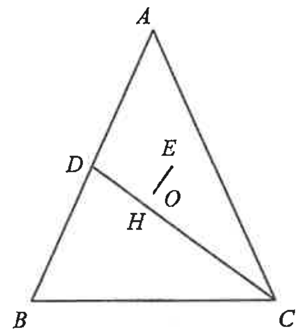
(3) $AH\perp BC$．



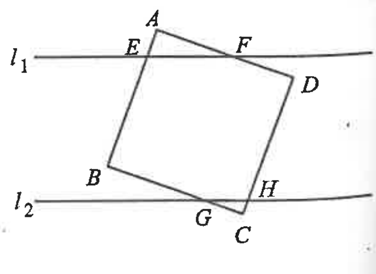
10、如图，已知在ΔABC中，$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$．设O、I分别是不等式ΔABC的外心和内心，AI的延长线与BC相交于点D，与其外接圆相交于点K，且$b+c=2a$．求证：$OI\perp AK$．



11、ΔABC的外心为O，$AB=AC$．D是AB的中点，E是ΔACD的重心，证明：$OE\perp CD$．

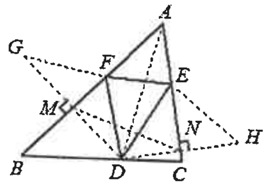


12、如图，平面内两条直线$l_1 // l_2$，它们之间的距离等于a．一块正方形硬纸板$ABCD$的边长也等于a．现将这块硬纸板平放在两条平行线上，使得l_1与AB、AD都相交，交点为G、H．设ΔAEF的周长为m_1，ΔCGH的周长为m_2．证明：无论怎样放置正方形硬纸板$ABCD$，m_1+m_2总是一个定值．



第九讲 几何不等式

【例题1】 在锐角$\triangle ABC$的边BC、CA、AB上各有一动点D、E、F，求证：$\triangle DEF$的周长达到最小当且仅当AD、BE、CF为$\triangle ABC$的三条高.



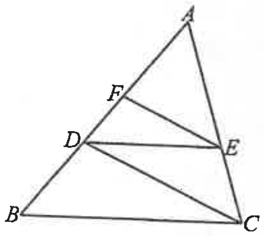
【分析】如图，设D关于AB、AC的对称点分别为G、H，GD与AB交于M，DH与AC交于N，则$\triangle DEF$的周长

$=GF+EF+EH\geqslant GH=2MN=2AD\sin\angle BAC\geqslant 2AD'\sin\angle BAC=$

$\dfrac{4S_{\triangle ABC}}{BC}\cdot\sin\angle BAC=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{R}$.

这里AD'为$\triangle ABC$的高，R为$\triangle ABC$的外接圆半径. 又由对称性，除了$AD\perp BC$外，BE、CF也分别必须垂直于AC、AB时方能达到.

【例题2】 如图，在$\triangle ABC$的边AB上取一点D，连CD，过D作$DE\parallel BC$交AC于E，过E作$EF\parallel CD$交AB于F．求证：$AB\geqslant 4DF$．



【分析】由$DE\parallel BC$知$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}$，且$\angle EDF=\angle CBD$，

又由$EF\parallel CD$得$\angle EFD=\angle CDB$，

$\therefore \triangle DEF\backsim\triangle BCD$，

从而$\dfrac{DF}{DB}=\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}$，即$\dfrac{DF}{AB-AD}=\dfrac{AD}{AB}$，

$\therefore AD^2-AB\cdot AD+AB\cdot DF=0$．

上式表明二次方程$x^2-AB\cdot x+AB\cdot DF=0$有实根，从而其判别式非负，

即$AB^2-4AB\cdot DF\geqslant 0$，故$AB\geqslant 4DF$．

另解：对于$AD^2-AB\cdot AD+AB\cdot DF=0$，可以配方得$AB^2-4AB\cdot DF=4\left(AD-\dfrac{1}{2}AB\right)^2\geqslant 0$，即得结论.

【例题3】 如图所示，在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边分别为a、b、c，如果$b<\dfrac{1}{2}(a+c)$，求证：$\angle B<\dfrac{1}{2}(\angle BAC+\angle BCA)$．

【分析】注意到$\angle BAC+\angle BCA=180^\circ-\angle B$，所以$\angle B<\dfrac{1}{2}(\angle BAC+\angle BCA)$等价于$\angle B<60^\circ$．

如图所示，延长BA至点D，使$AD=a$，延长BC至点E，使$CE=c$，

则$BD=BE=a+c$．

过点D作AC的平行线，过点C作AB的平行线，两线交于点F，连接EF，

则四边形$ADFC$为平行四边形.

则$DF=b$，$CF=a$．

因为$CE=BA=c$，$CF=BC=a$，$\angle ECF=\angle ABC$，

故$\triangle CEF\cong\triangle BAC$，

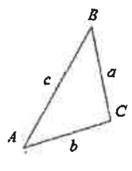
则$FE=CA=b$，

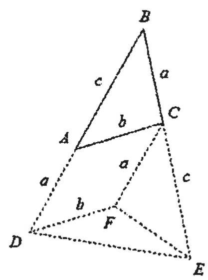
$DE<DF+FE=2b<a+c$，

即$DE<BD$，$DE<BE$．

从而，在$\triangle BDE$中，

$\angle DBE<\angle BDE=\angle BED$．



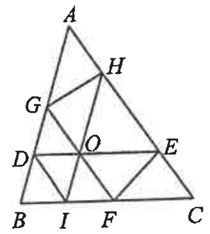


而 $\angle BDE=\angle BED=\dfrac{180^\circ-\angle DBE}{2}$，

故 $\angle DBE<\dfrac{180^\circ-\angle DBE}{2}$，

即 $\angle DBE<60^\circ$．

【例题4】 O 为 $\triangle ABC$ 内一点，过 O 引三条边的平行线 $DE\parallel BC$，$FG\parallel CA$，$HI\parallel AB$，D、E、F、G、H、I 为各边上的点（如图），记 S_1 为六边形 $DGHEFI$ 的面积，S_2 为 $\triangle ABC$ 的面积．证明：$S_1\geqslant\dfrac{2}{3}S_2$．



【分析】可以从 $\triangle DGO$、$\triangle OHE$、$\triangle OIF$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积关系入手．

设 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$FI=x$，$EH=y$，$DG=z$．易知

$\triangle OIF\backsim\triangle HOE\backsim\triangle GDO\backsim\triangle ABC$，

所以 $\dfrac{z}{c}=\dfrac{OD}{a}=\dfrac{BI}{a}$，$\dfrac{y}{b}=\dfrac{OE}{a}=\dfrac{FC}{a}$，

由此可得 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{IF+FC+BI}{a}=1$．

由柯西不等式知：

$$\frac{S_{\triangle OIF}+S_{\triangle OEH}+S_{\triangle OGD}}{S_2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\geqslant\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{1}{3},$$

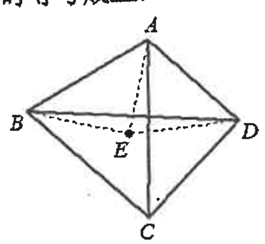
从而 $S_{四边形OHAG}+S_{四边形OECF}+S_{四边形OIBD}\leqslant\dfrac{2}{3}S_2$．

而四边形 $OHAG$、$OECF$、$OIBD$ 均为平行四边形，所以

$S_{\triangle AHG}+S_{\triangle CEF}+S_{\triangle BDI}\leqslant\dfrac{1}{3}S_2$，

即 $S_1\geqslant\dfrac{2}{3}S_2$．

【例题5】 证明 *Ptolemy* 定理(托勒密定理)：对于一般的四边形 $ABCD$，有 $AB\cdot CD+AD\cdot BC\geqslant AC\cdot BD$，当且仅当 $ABCD$ 是圆内接四边形时等号成立．



【分析】作线段 $AE=\dfrac{AB\cdot AD}{AC}$，且 $\angle BAE=\angle CAD$．

则有 $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AC}{AD}$，可得 $\triangle BAE\backsim\triangle CAD$，

所以 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{CD}$，所以 $AB\cdot CD=AC\cdot BE$ ①．

又因为 $\angle BAC=\angle BAE+\angle EAC=\angle CAD+\angle EAC=\angle EAD$．

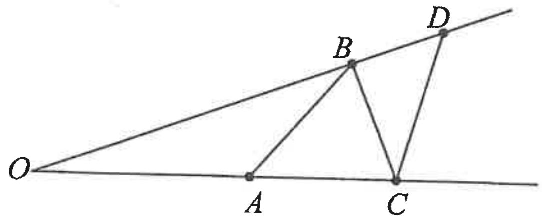
所以$\triangle ABC \backsim \triangle AED$，所以$\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BC}{ED}$．即$AD\cdot BC=AC\cdot ED$②.

①+②得到$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot(BE+ED)\geqslant AC\cdot BD$.

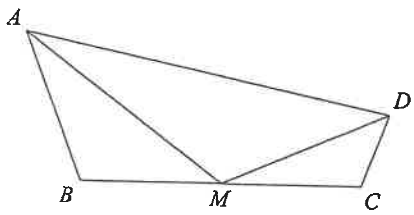
当且仅当E在BD上时$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$，此时$\angle ABE=\angle ACD$，即$A$、$B$、$C$、$D$四点共圆.

本讲练习：:

1、如图所示，设$\angle MON=20^{\circ}$,A为OM上一点，$OA=4\sqrt{3}$,D为ON上一点，$OD=8\sqrt{3}$,C为AM上任意一点，B是OD上任意一点，求折线$ABCD$的长度的最小值。



2、已知点M是四边形$ABCD$的BC边的中点，且$\angle AMD=120^{\circ}$，证明：$AB+\frac{1}{2}BC+CD\geqslant AD$.



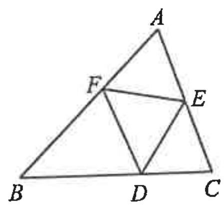
3、P为$\triangle ABC$内一点，点P至三边AB、BC、CA的距离分别为z、y、x，求当$\frac{c}{z}+\frac{b}{y}+\frac{a}{x}$取最小值时点$P$的位置.

4、已知平面内的任意四点，其中任意三点不共线.试问：是否一定能从这样的四个点中选出三点构成一个三角形，使得这个三角形至少有一个内角不大于45°？试证明你的结论.

5、正三角形ABC的边长为1，M、N、P分别在BC、CA、AB上，$BM+CN+AP=1$，求$\triangle MNP$的最大面积.

6、点D、E、F分别在BC、CA、AB上，若分别记$S_{\triangle AEF}$、$S_{\triangle BFD}$、$S_{\triangle CED}$为S_1、S_2、S_3，证明：

$S_{\triangle DEF}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{S_1\cdot S_2\cdot S_3}{S_{\triangle ABC}}}$，当且仅当$AD$、$BE$、$CF$共点时等号成立.



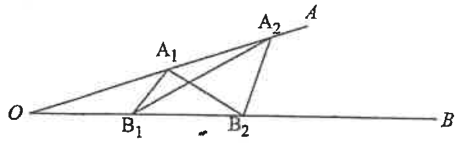
7、在$\triangle ABC$中，P为边BC上任意一点，$PE//BA,PF//CA$,若$S_{\triangle}ABC=1$,证明：

$S_{\triangle}BPF,S_{\triangle}PCE,S_{\square}PEAF$中至少有一个不小于$\dfrac{4}{9}$.

8、求证：在凸四边形$ABCD$，有$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2\geqslant AC^2+BD^2$.

9、在$\angle AOB$的边OA上依次有点A_1A_2,边OB上依次有点B_1B_2求证：

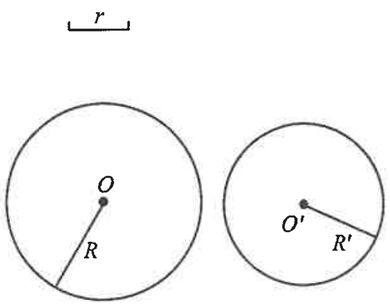
$OA_1 \cdot OB_1 + OA_2 \cdot OB_2 > OA_1 \cdot OB_2 + OA_2 \cdot OB_1$.

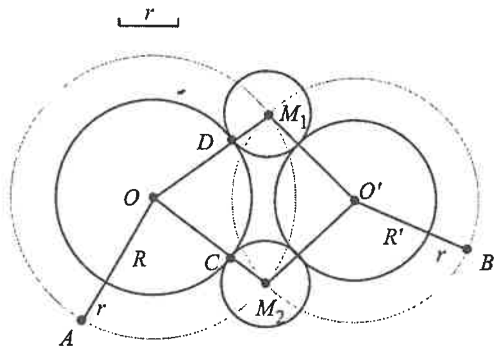


10、设四边形四边依次为a、b、c、d，则其面积S不大于$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$，其中$p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$. 取到最大值时，仅当四边形内接于圆.

第十讲 尺规作图

【例题1】 设⊙O与⊙O'相离，半径分别为R与R'，求作半径为r的圆，使其与⊙O及⊙O'外切.





【分析】 设⊙M是符合条件的圆，即其半径为r，并与⊙O及⊙O'外切，显然，点M是由两个轨迹确定的，即M点既在以O为圆心以$R+r$为半径的圆上，又在以O'为圆心以$R'+r$为半径的圆上，因此所求圆的圆心的位置可确定.若⊙O与⊙O'相距为b，当$2r<b$时，该题无解，当$2r=b$有唯一解；当$2r>b$时，有两解.

以当⊙O与⊙O'相距为b，$2r>b$时为例：

(1) 作线段$OA=R+r$，$O'B=R'+r$.

(2) 分别以O，O'为圆心，以$R+r$，$R'+r$为半径作圆，两圆交于M_1,M_2两点.

(3) 连接OM_1，OM_2，分别交以R为半径的⊙O于D、C两点.

(4) 分别以M_1,M_2为圆心，以r为半径作圆.

∴⊙M_1,⊙M_2即为所求.

【实践一下】

【例题2】 **尺规作图，四等分圆周（已知圆心）.**

【分析】设半径为1. 可算出其内接正方形边长为 $\sqrt{2}$，也就是说用这个长度去等分圆周. 我们的任务就是做出这个长度. 六等分圆周时会出现一个 $\sqrt{3}$ 的长度. 设法构造斜边为 $\sqrt{3}$，一直角边为1的直角三角形，$\sqrt{2}$ 的长度自然就出来了.

具体做法:

(1) 随便画一个圆. 设半径为 1.

(2) 先六等分圆周. 这时隔了一个等分点的两个等分点距离为 $\sqrt{3}$.

(3) 以这个距离为半径，分别以两个相对的等分点为圆心，同向作弧，交于一点.（“两个相对的等分点”其实就是直径的两端点啦！两弧交点与“两个相对的等分点”形成的是一个底为 2，腰为 $\sqrt{3}$ 的等腰三角形. 可算出顶点距圆心距离就是 $\sqrt{2}$.）

(4) 以 $\sqrt{2}$ 的长度等分圆周即可.

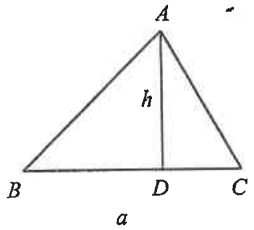
【实践一下】

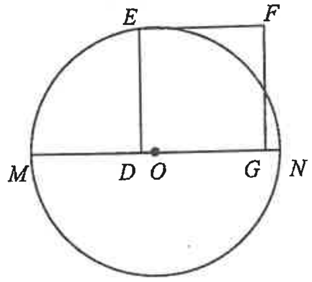
【例题3】 求作一正方形，使其面积等于已知ΔABC的面积．

【分析】设ΔABC的底边长为a，高为h，关键是在于求出正方形的边长x，使得$x^2=\frac{1}{2}ah$，$\therefore x$是$\frac{1}{2}a$与h的比例中项．

已知：在ΔABC中，底边长为a，这个底边上的高为h，

求作：正方形$DEFG$，使得：$S_{正方形DEFG}=S_{\Delta ABC}$．





作法：

(1) 作线段$MD=\frac{1}{2}a$；

(2) 在MD的延长线上取一点N，使得$DN=h$；

(3) 取MN中点O，以O为圆心，OM为半径作$\odot O$；

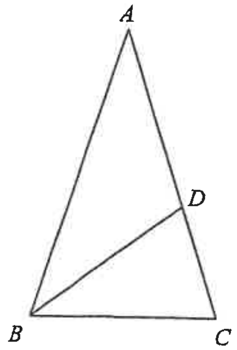
(4) 过D作$DE\perp MN$，交$\odot O$于E，

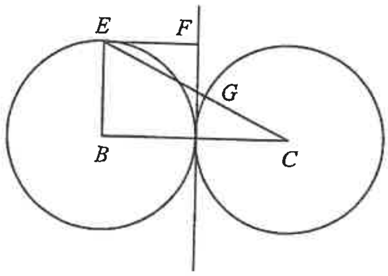
(5) 以DE为一边作正方形$DEFG$．

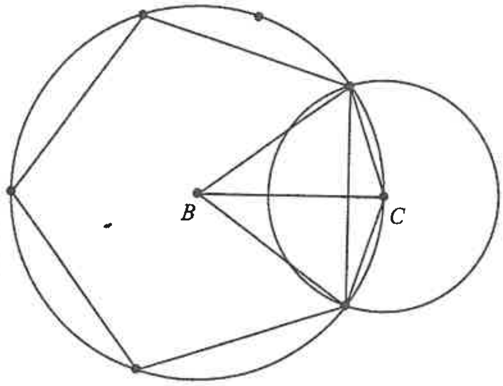
正方形$DEFG$即为所求．

【实践一下】

【例题4】 尺规作图，求作正五边形.



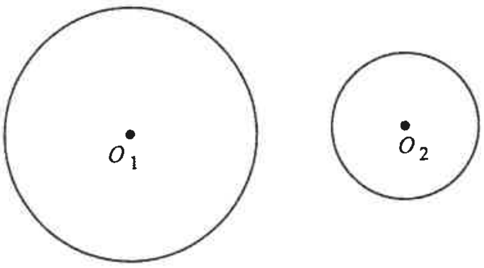


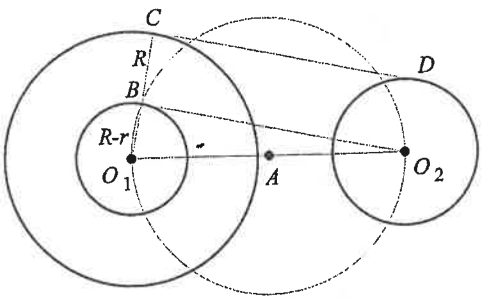


【分析】作正五边形关键是将圆周五等分，即作出 $72°$ 角．底角为 $72°$ 的等腰三角形有如下特殊性质：
如图 $\angle A=36°$，$\angle ABC=\angle ACB=72°$，作 $\angle ABC$ 的角平分线，则有 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BDC$ 都是等腰三角形．且 $\triangle ABC \backsim \triangle BCD$，$\therefore \dfrac{BC}{CD}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AD+DC}{BC}$，设 $BC=a$，则有 $\dfrac{a}{CD}=\dfrac{a+CD}{a}$，
可求得 $CD=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$，$\therefore AC=BC=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a$．
如图作 $EB\perp BC$，且 $EB=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{a}{2}$，则 $EC=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$，$\therefore EG=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$．
以 EG 为底边，BC 为腰，即可得到顶角为 $36°$ 的等腰三角形，以 BC 为半径，作圆，则三角形的底所对的圆心角为 $36°$．以该长度划分圆周，即可将圆周十等分，依次连接不相邻的五个点即可得到正五边形.

【实践一下】

【例题5】　已知$\odot O_1$和$\odot O_2$，求作两圆的外公切线.





【分析】法一：如果过一点作定圆的切线，只要用交轨迹的方法即可，如果作两个圆的公切线我们可以联想两个圆的相关辅助线作法．设大圆半径为R，小圆半径为r.

(1) 以O_1为圆心，$R-r$为半径作圆.

(2) 作O_1O_2中点A.

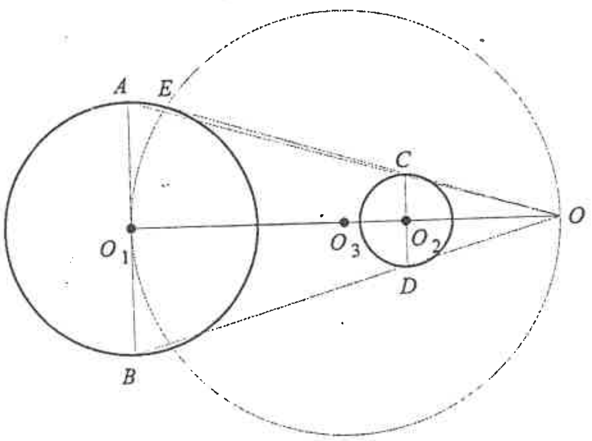
(3) 以A为圆心，$\dfrac{O_1O_2}{2}$为半径交第一个圆于B，连接BO_2

(4) 连接并延长O_1B，交$\odot O_1$于C.

(5) 过C作BO_2的平行线.

CD为其中一条外公切线.以O_1O_2为对称轴，作CD的对称图形，即为另外一条外公切线.

法二：两圆的外公切线交点可看作两圆的位似中心．∴可以先确定这个位似中心.



(1) 过O_1、O_2作O_1O_2的垂线，交$\odot O_1$、$\odot O_2$于A、B、C、D.

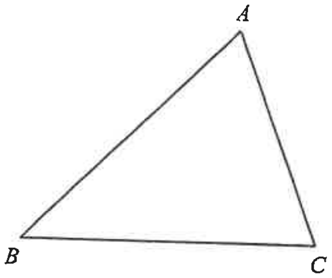
(2) 连接并延长AC、BD,交于O.

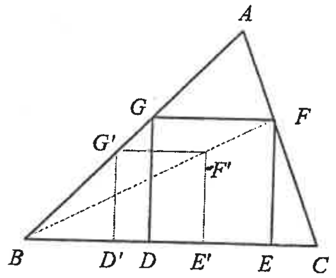
(3) 以O_1O为直径作圆．交$\odot O_1$于E，连接EO，则EO为所求.

【实践一下】

【例题6】 已知：一锐角ΔABC．

求作：一正方形$DEFG$，使得D、E在BC边上，F在AC边上，G在AB边上.





【分析】 先放弃一个顶点F在AC边上的条件，作出与正方形$DEFG$位似的正方形$D'E'F'G'$，然后利用位似变换将正方形$D'E'F'G'$放大（或缩小）得到满足全部条件的正方形$DEFG$．

作法:

(1) 在AB边上任取一点G'，过G'作$G'D'\perp BC$于D'

(2) 以$G'D'$为一边作正方形$D'E'F'G'$，且使E'在BD'的延长线上.

(3) 作直线BF'交AC于F．

(4) 过F分别作$FG // F'G'$交AB于G；作$FE // F'E'$交BC于E．

(5) 过G作$GD // G'D'$交BC于D．

则四边形$DEFG$即为所求.

【实践一下】

第十一讲 数论进阶

【例题1】 设正整数n至少有4个不同的正约数，且$0<d_1<d_2<d_3<d_4$是n的最小的4个正约数，它们满足$d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=n$.求所有这样的$n$.

【分析】显然最小的是1，其次如果n为奇数则矛盾，∴是偶数.于是第二小的数是2.于是剩下的两个约数是一奇一偶.如果第三个为偶数，那么只能是4，否则若是$2p$大于4，那么p必定是比第三个还小的约数.如果第三个是4，那么n是4的倍数，这和式子左边除以4余数是2矛盾.∴第三个是奇数.第四个是偶数，那么只能是第三个数的两倍.于是我们得到$n=130$.

【例题2】 从$1, 2, \cdots, 205$共205个正整数中，最多能取出多少个数，使得对于取出来的数中的任意3个数$a, b, c(a<b<c)$，都有$ab\neq c$.

【分析】直觉上来看，1可以取，除此之外，取比较大的数，使得连除1以外最小的两个数的乘积都比最大的那个数大，此时使用了“最不利原则”.

首先，$1, 14, 15, \cdots, 205$这193个数，满足题设条件. 事实上，设a, b, c $(a<b<c)$这三个数取自$1, 14, 15, \cdots, 205$. 若$a=1$，则$ab=b<c$；若$a>1$，则$ab\geqslant 14\times 15=210>c$.

另一方面，考虑如下12个数组：$(2, 25, 2\times 25)$，$(3, 24, 3\times 24)$，…，$(13, 14, 13\times 14)$.

上述这36个数互不相等，且其中最小的数为2，最大的数为$13\times 14=182<205$. ∴每一个数组中的3个数不能全部取出来. 于是，如果取出来的数满足题设条件，那么，取出来的数的个数不超过$205-12=193$（个）.

综上所述，从$1, 2, \cdots, 205$中，最多能取出193个数，满足题设条件.

【例题3】 已知某个直角三角形的两条直角边长都是整数，且在数值上该三角形的周长等于其面积的整数倍. 问：这样的直角三角形有多少个？

【分析】设该直角三角形的两条直角边长为a，b，且$a\leqslant b$，那么结合勾股定理及条件，可设

$a+b+\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{k}{2}ab$ ……①其中k为正整数.

对①两边乘以2，移项后，两边平方，$4(a^2+b^2)=(kab-2(a+b))^2$，

化简整理，得$k^2ab-4k(a+b)+8=0$，因式分解，得$(ka-4)(kb-4)=8$.

注意到，ka，kb为正整数，且$ka\leqslant kb$，

故$(ka-4, kb-4)=(1, 8), (2, 4)$.

分别可求得$(k, a, b)=(1, 5, 12), (1, 6, 8)$或$(2, 3, 4)$.

综上可知，满足条件的直角三角形恰有3个，它们的三边长为$(3, 4, 5), (6, 8, 10)$和$(5, 12, 13)$.

【例题4】 求所有的整数数组(a, b, c, x, y, z)，使得
$$\begin{cases}a\geqslant b\geqslant c\geqslant 1\\x\geqslant y\geqslant z\geqslant 1\\a+b+c=xyz\\x+y+z=abc\end{cases}.$$

【分析】如果$yz\geqslant 3$，并且$bc\geqslant 3$，则

$$3a\geqslant a+b+c=xyz\geqslant 3x\geqslant x+y+z=abc\geqslant 3a.$$

$\therefore$式中所有不等号均为等号，这要求$a=b=c$，$x=y=z$，$bc=3$，$yz=3$，这是不可能的，从而$yz\leqslant 2$或者$bc\leqslant 2$．不妨设$yz\leqslant 2$，则$(y, z)=(1, 1)$或$(2, 1)$．

情形一 $(y, z)=(1, 1)$，此时$a+b+c=x$，$x+2=abc$，故$abc=a+b+c+2$，可知$a\geqslant 2$，从而$a<abc=a+b+c+2\leqslant 4a$，故$1<bc\leqslant 4$，于是$(b, c)=(2, 1)$，$(3, 1)$或$(2, 2)$．分别代入可求得$(a, b, c, x, y, z)=(5, 2, 1, 8, 1, 1)$，$(3, 3, 1, 7, 1, 1)$或$(2, 2, 2, 6, 1, 1)$．

情形二 $(y, z)=(2, 1)$，此时$a+b+c=2x$，$x+3=abc$，即有$2abc=a+b+c+6$，同上可知$1<2bc\leqslant 6$，即$bc\leqslant 3$，因此，$(b, c)=(1, 1)$，$(2, 1)$或$(3, 1)$，对应地，可求得$(a, b, c, x, y, z)=(8, 1, 1, 5, 2, 1)$或$(3, 2, 1, 3, 2, 1)$（当$(b, c)=(3, 1)$时无解）.

综上，结合对称性，可知$(a, b, c, x, y, z)=(5, 2, 1, 8, 1, 1)$，$(8, 1, 1, 5, 2, 1)$，$(3, 3, 1, 7, 1, 1)$，$(7, 1, 1, 3, 3, 1)$，$(2, 2, 2, 6, 1, 1)$，$(6, 1, 1, 2, 2, 2)$或$(3, 2, 1, 3, 2, 1)$共7组解.

【例题5】 已知质数p使得p^3-6p^2+9p恰有30个正因数.则p的最小值为多少？

【分析】 当$p=2$或3时，不符合题意.$\therefore p>3$.

又$p^3-6p^2+9p=p(p-3)^2$，此时，$(p,p-3)=(p,3)=1$.

$\because p$有两个因数，$\therefore (p-3)^2$有15个因数.

而$15=5\times 3$，为使p最小，$p-3$又是偶数，故只能是$(p-3)^2=2^4\times 3^2$或$2^4\times 5^2$.

从而，$p=15$（舍）或23.

因此p的最小值为23.

【例题6】 有四个数,每三个数的积被第四个数除后余一，求这四个数.

【分析】 设这四个数分别为a,b,c,d，其实题目就一个条件：

$a\mid(bcd-1)$，$b\mid(acd-1)$，$c\mid(abd-1)$，$d\mid(abc-1)$

第一步：先证四个数两两互质（这个还是比较容易发现的）

设$(a,b)=p$

则：$a\mid(bcd-1)\Rightarrow p\mid(bcd-1)\Rightarrow p\mid 1\Rightarrow p=1$

$\therefore a,b$互质.同理，其他均两两互质.

第二步：构造一个多项式，能被四个数共享（这个技巧比较难想到）
令$x=bcd+acd+abd+abc-1$，

则$a\mid x,b\mid x,c\mid x,d\mid x$

由a,b,c,d两两互质得：$abcd\mid x$

即：$\dfrac{x}{abcd}=\dfrac{bcd+acd+abd+abc-1}{abcd}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{abcd}\in Z$（表示为整数）

很显然a,b,c,d中不可能有1，不然就没余数这回事了；

又由两两互质可知，这四个数都不相同.
那么我们不妨设$1<a<b<c<d$，
则$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{abcd}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}<2$
故$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{abcd}=1$
第三步：用不等式解方程（这个算基本功了）
首先a不能太大，我猜是2，不信咱就证一下：
若$a\geq 3$，则：
$1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{abcd}<\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}<1$
矛盾！$\therefore a=2$.
那么方程化为$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{2bcd}=\dfrac{1}{2}$
同理，b也不能太大
若$b\geq 6$，则：
$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{2bcd}<\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}<\dfrac{1}{2}$
$\therefore b=3$或4或5
讨论一下吧：
当$b=3$时，原方程化为：
$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{6cd}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow cd-6c-6d=-1$

构造因式分解：$(c-6)(d-6)=35$

得：$c=7,d=41$或$c=11,d=13$

同理，当$b=4,5$时，原方程无整数解.

综上：这四个数分别为$2,3,7,41$或$2,3,11,13$

本讲练习

1. 正整数n恰好有 4 个正因数（包括 1 和n）.已知其中两个因数之和是另两个因数之和的六倍.求n的值.

2. 使得$n+1$整除$n^{2012}+2012$的正整数n共有多少个？

3. 若n为正整数，且满足$(n-1)^2 \mid (n^{2013}-1)$，则$n$的可能值有多少个？

4. 方程$2x^2+5xy+2y^2=2012$的所有不同整数解的个数为多少？

5. 已知正整数x、y.求$\frac{10}{x^2}-\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$的解$(x,y)$

6. 一个三位数是它的各位数字之和的 29 倍.则这个三位数是

7. 设$x=a+b-c, y=c+a-b, z=b+c-a$，其中，$a$、$b$、$c$是质数，且满足$x^2=y, \sqrt{z}-\sqrt{y}=2$.

问：a、b、c能否构成三角形的三边？如果能，求出三角形的面积；如果不能，请说明理由.

8. 已知a、b是整数，c是质数，且$(a+b)^4=c-|a-b|$.则有序数对(a,b)有多少组？

9. 若a、b均为质数，且$a^4+13b=107$，则$a^{2011}+b^{2012}$的末位数字是多少？

10. 设x为正整数，且$x<50$，则使x^3+11能被12整除的x共有多少个？

11. 已知p为大于5的质数，且m为$(p^2+5p+5)^2$除以120的最小非负数.则2009^m的个位数字是多少？

12. 对正整数n，记$1\times2\times\cdots\times n=n!$.若$M=1!\times2!\times\cdots\times10!$，则$M$的正因数中共有完全立方数多少个？

第十二讲 高斯函数[x]与{x}

不超过实数x的最大整数称为x的整数部分，记作$[x]$；$x-[x]$称为x的小数部分，记作$\{x\}$。例如，$[3.4]=3$，$[-2.1]=-3$。这一规定最早为大数学家高斯所使用，故$[x]$被称为高斯函数。

高斯函数的性质：

（1）$y=[x]$的定义域为实数集，值域为整数集；

（2）$x=[x]+\{x\}$；

（3）$x-1<[x]\le x<[x]+1$；

（4）当$x_1\le x_2$时，$[x_1]\le[x_2]$；

（5）设n为整数，则$[n+x]=n+[x]$；

（6）$[x_1+x_2+\cdots+x_n]\ge[x_1]+[x_2]+\cdots+[x_n]$；

（7）对任意正实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$有$[x_1x_2\cdots x_n]\ge[x_1][x_2]\cdots[x_n]$

特别地，对正数x及正整数n有$[x^n]\ge[x]^n,[x]\ge[\sqrt[n]{x}]^n$；

（8）对正实数x,y有$[\frac{y}{x}]\le\frac{[y]}{[x]}$；

（9）设n为正整数，则$[\frac{x}{n}]=[\frac{[x]}{n}]$；

（10）对整数x，有$[-x]=-[x]$；对非整数x，有$[-x]=-[x]-1$；

（11）对正整数m和n，不大于m的n的倍数共有$[\frac{m}{n}]$个；

（12）①$\{x\}=x-[x]$；

②$0\le\{x\}<1$；

③$\{n+x\}=\{x\}$，（n为整数）

（13）设p为任一素数，在$n!$中含p的最高乘方次数记为$p(n!)$，

则：$p(n!)=[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^2}]+[\frac{n}{p^3}]+\cdots$

【例题1】 计算$[\sqrt{2017+\sqrt{2017+\cdots+\sqrt{2017}}}]$的值.（2017 共出现了 2017 次）

【分析】为了方便表述，记$a_n=\sqrt{2017+\sqrt{2017+\cdots+\sqrt{2017}}}$ （n个 2017），

则$44<a_1=\sqrt{2017}<45$；

所以$45<\sqrt{2017+44}<a_2=\sqrt{2017+\sqrt{2017}}<\sqrt{2017+45}<46$，

即$45<a_2<46$；

所以$45<\sqrt{2017+45}<a_3=\sqrt{2017+a_2}<\sqrt{2017+46}<46$，

即$45<a_3<46$；

同理：$45<a_4<46$；$45<a_5<46$；……；$45<a_{2017}<46$，

所以$[a_{2017}]=45$.

【例题2】 计算$S=[\frac{305\times1}{503}]+[\frac{305\times2}{503}]+\cdots+[\frac{305\times502}{503}]$的值。

【分析】由题意$\frac{305k}{503}+\frac{305(503-k)}{503}=305$，$[\frac{305k}{503}]+[\frac{305(503-k)}{503}]=304$.

事实上：当$a+b$为整数，而a,b均不是整数时，有$a+b=[a]+\{a\}+[b]+\{b\}$为整数，则$\{a\}+\{b\}$为整数，又$0<\{a\}+\{b\}<2$，所以$\{a\}+\{b\}=1$，故$[a]+[b]=a+b-1$。根据上面结论，将原式首尾配对，共有 251 对，所以$S=304\times251=76304$.

【例题3】 已知$0<a<1$，且满足$[a+\frac{1}{30}]+[a+\frac{2}{30}]+\cdots+[a+\frac{29}{30}]=18$，求$[10a]$的值。

【分析】因为$0<a<1$，故$0<a+\frac{k}{30}<2$，（$k=1,2,\cdots,29$）则$[a+\frac{k}{30}]=0$或1，共有 18 个 1，由性质（4）可知，前面 11 项均为 0，后面 18 项均为 1，即

$$[a+\frac{1}{30}]=[a+\frac{2}{30}]=\cdots=[a+\frac{11}{30}]=0;$$

$$[a+\frac{12}{30}]=[a+\frac{13}{30}]=\cdots=[a+\frac{29}{30}]=1.$$

所以$\begin{cases}a+\frac{11}{30}<1\\a+\frac{12}{30}\ge1\end{cases}$解得$\frac{18}{30}\le a<\frac{19}{30}$，故$6\le10a<6\frac{1}{3}$，

所以$[10a]=6$

【例题4】 在$[\frac{1^2}{2017}],[\frac{2^2}{2017}],[\frac{3^2}{2017}],\cdots,[\frac{2017^2}{2017}]$中，有多少个不同的整数？

【分析】设$a_n=\frac{n^2}{2017}$，$n=1,2,\cdots,2017$

当$a_{n+1}-a_n<1$时，必有$[a_{n+1}]-[a_n]\le 1$，此时$\frac{(n+1)^2}{2017}-\frac{n^2}{2017}<1$，解得$n<1008$，$[a_{1008}]=503$，所以，从 0 到 503 的整数都能取到；当$a_{n+1}-a_n>1$时，必有$[a_{n+1}]-[a_n]\ge 1$，此时$n>1008$，所以$[a_{1009}],[a_{1010}],\cdots,[a_{2017}]$是不同的整数，从而，共有$504+1009=1513$个不同的整数。

【例题5】 解方程$6x-3[x]+7=0$

【分析】

解 1 原方程化为$x=\frac{3[x]-7}{6}$，代入$[x]\le x<[x]+1$得$[x]\le\frac{3[x]-7}{6}<[x]+1$，得$-\frac{13}{3}<[x]\le-\frac{7}{3}$，则$[x]$可能取值为$-4,-3$，对应的$x$取值为$-\frac{19}{6},-\frac{8}{3}$. 经检验，$x=-\frac{19}{6}$和$x=-\frac{8}{3}$均为原方程的解.

解 2 原方程化为$[x]=2x+\frac{7}{3}$，代入$x-1<[x]\le x$，得$x-1<2x+\frac{7}{3}\le x$，得$-\frac{10}{3}<x\le-\frac{7}{3}$，故$[x]=-4$或$-3$，对应的$x$取值为$-\frac{19}{6},-\frac{8}{3}$。经检验，$x=-\frac{19}{6}$和$x=-\frac{8}{3}$均为原方程的解.

【例题6】 解方程$x^2-2[x]-3=0$

【分析】原方程化为$[x]=\frac{x^2-3}{2}$，代入$x-1<[x]\le x$得$x-1<\frac{x^2-3}{2}\le x$，解得$-1\le x<1-\sqrt{2}$或$1+\sqrt{2}<x\le 3$. 所以$[x]$的可能取值为$-1,2,3$，对应的x取值分别为$-1,\sqrt{7},3$. 经检验$x=-1$或$x=\sqrt{7}$或$x=3$.

【例题7】 解方程$x+\frac{99}{x}=[x]+\frac{99}{[x]}$

【分析】去分母，将原方程化为$(x-[x])(x[x]-99)=0$，当$x=[x]$时，只需满足x为非零整数；当$x\ne[x]$时，$x[x]=99$，将$x=\frac{99}{[x]}$代入$[x]\le x<[x]+1$得$[x]\le\frac{99}{[x]}<[x]+1$，当$[x]>0$时，$[x]^2\le 99<[x]^2+[x]$，此时$[x]$无整数解；当$[x]<0$时，$[x]^2\ge 99>[x]^2+[x]$，解得$[x]=-10$，此时$x=-9.9$.

【例题8】 证明：对于任意实数x，有$[x]+[x+\frac{1}{2}]=[2x]$

【分析】

当$0\le\{x\}<\frac{1}{2}$时，$[x+\frac{1}{2}]=[[x]+\{x\}+\frac{1}{2}]=[x]$，$[2x]=[2[x]+2\{x\}]=2[x]$，

所以$[x]+[x+\frac{1}{2}]=[2x]$；当$\frac{1}{2}\le\{x\}<1$时，$[x+\frac{1}{2}]=[[x]+\{x\}+\frac{1}{2}]=[x]+1$，

$[2x]=[2[x]+2\{x\}]=2[x]+1$，

所以，$[x]+[x+\frac{1}{2}]=[2x]$，因此，对于任意实数x，$[x]+[x+\frac{1}{2}]=[2x]$恒成立

本讲练习：

1. 设$S=\frac{1}{[\frac{(10\times11-1)^2}{10\times11}]}+\frac{1}{[\frac{(11\times12-1)^2}{11\times12}]}+\cdots+\frac{1}{[\frac{(49\times50-1)^2}{49\times50}]}$，求$[30S]$.

2. 求$[\sqrt[3]{1\times2\times3}]+[\sqrt[3]{2\times3\times4}]+\cdots+[\sqrt[3]{2016\times2017\times2018}]$的值.

3. 计算$[\frac{17\times1}{2017}]+[\frac{17\times2}{2017}]+\cdots+[\frac{17\times2016}{2017}]$的值.

4. 在$[\frac{1^3}{2017}],[\frac{2^3}{2017}],[\frac{3^3}{2017}],\cdots,[\frac{2017^3}{2017}]$中，有多少个不同的整数？

5. 解方程$[3x+1]=2x-\frac{1}{2}$

6. 解方程$x-2[x]=\frac{7}{2}$

7. 解方程$x^3-[x]=3$

8. 解方程$4x^2-40[x]+51=0$

9．解方程$[2x]+[3x]=9x-\dfrac{7}{4}$

10．求满足$25\{x\}+[x]=125$的所有x的和.

11．解方程$x+\{x\}=2[x](x\neq 0)$

12．设$[x]$表示不超过x的最大整数，求方程$x^2-x[x]=[x]^2$的解。

13. （1）从 1017 到 2017 的整数中，有多少个数是 7 的倍数？

（2）如果 $7^k \mid 1017 \cdot 1018 \cdot \cdots \cdot 2017$，求最大的正整数 k.

第十三讲 组合提高

【例题1】 给定一个15×15的方格表，将其中有公共边的方格称为相邻的. 将某些相邻方格的中心用线段相连，得到一条不自交的闭折线. 现知该折线关于方格表的一条对角线对称. 证明：折线的长度不大于200.

【分析】 因为闭折线不自交，可知它恰好经过对角线方格上的两个中心点。(因为闭所以有2个，因为不自交所以只能为2个。) 那么可以得到这条闭折现一定不经过其他的13个对角线方格的中心点。将15×15的方格表黑白二染色，对角线染黑色，则黑色小方格一定比白色小方格多一个。又折现上的中心点所在的小方格是黑白交替出现的。所以闭折曲线上的黑点和白点个数是相等的。如果闭折线不经过13个黑点，那么他必然不经过12个白点。所以闭折线经过的中心点的个数最多不超过$15^2-13-12=200$;也就是说，折线的长度不大于200

【例题2】 物体A和B放在坐标平面上同时移动，且每次移动一个单位长度，A从$(0,0)$开始移动每次以相同的可能性向右或向上移动，物体B从$(5,7)$开始移动，每次以相同的可能性向左或向下移动，问两物体相遇的可能性是多少？

【分析】 因为从A到B的距离为12，所以要移动6次，物体A和B才能相遇。

在6次移动中，不同的移动方式有$2^6\bullet2^6=2^{12}$种

其中A和B能相遇的移动方式有$C_6^6C_6^1+C_6^5C_6^2+C_6^4C_6^3+C_6^3C_6^4+C_6^2C_6^5+C_6^1C_6^6=C_{12}^7$;

故A和B相遇的可能性为$\dfrac{C_{12}^7}{2^{12}}=\dfrac{99}{512}$;

【例题3】 摄影师给8名同学照相，有两人合影，也有三人合影，若任意两名同学都恰好合影一次，问最少要拍多少张照片？

【分析】 设3人合影的有x张，两人合影的有y张；则：

$C_3^2x+y=C_8^2\Rightarrow3x+y=28\Rightarrow x+y=28-2x$

因为每两人都恰好合影一张，所以每人至多可拍3张合影。故

$\dfrac{3x}{8}\le3;\Rightarrow x\le8\therefore x+y=28-2x\ge12.$

将8人编号为$1,2,3,4,5,6,7,8$;

8张三人合影为：$(1,2,4),(2,3,5),(3,4,6),(4,5,7),(5,6,8),(6,7,9),(7,8,2),(8,1,3)$;

4张二人合影为：$(1,5),(2,6),(3,7),(4,8)$;

显然这12张照片满足条件，所以最少要拍12张。

【例题4】 某同学在暑假里做数学竞赛题，每天至少做一题，每星期至多做12题，一共做了7个星期，求证：该同学在连续的若干天里恰好做了12道题.

【分析】 设前n天做了a_n道题；那么$1\le a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{49}\le 84$;

$1+12\le a_1+12<a_2+12<a_3+12<\ldots<a_{49}+12\le 84+12$;

上面这98个数不同的取值最多96种。所以其中必有两数相等。

不妨设$a_j=a_i+12$（$1\le i<j\le 49$;）$\Rightarrow a_j-a_i=12$;

这表明从第（$i+1$）天开始，到第j天这连续若干天里恰好做了12道题。

【例题5】 平面上有20个点，在他们之间已连了n条线段，若任意三点之间都至少有一条线段.求n的最小值.

【分析】 设A点连出的线段数最少，且为k条（$0\le k\le 19$）；将20个点分为两组，一组为A点和所有与A相连的k个点，共$(k+1)$个点；另外一组为余下的点，为$19-k$个点； 对于第一组的$(k+1)$个点，因为A点连出的最少为k，所以他们连出的最少为$\frac{k(k+1)}{2}$；对于第二组的$19-k$个点，他们都不和A点相连，那么如果选取A点和他们其中的两个点，那么这三点之间至少有一条直线，于是第二组的$19-k$个点必须两两相连，共有$\frac{(19-k)(18-k)}{2}$条线。两者相加最少为$\frac{k(k+1)+(19-k)(18-k)}{2}$；所以$n\ge k(k+1)+(19-k)(18-k)$;

整理得：$n\ge k^2-18k+19\times 9=(k-9)^2+90\ge 90$当且仅当$k=9$时取"="。

下面构造一种方法证明90是可以的：20个点分为2组，每组10个点。同组的两两相连，不同组的不连。共连$C_{10}^2+C_{10}^2=90$满足题意；

综上：n的最小值为90；

【例题6】 20个红球、17个白球，重量都是正整数。红球与白球重量之和相等，且都小于340。证明：一定可以取出一些红球和一些白球，使得这些红球重量之和等于这些白球重量之和（不能全取）

【分析】 对20个红球、17个白球的重量做排序：$a_1\le a_2\le a_3\le\cdots\le a_{20}$，$b_1\le b_2\le b_3\le\cdots\le b_{17}$，

记$S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$，$T_k=b_1+b_2+\cdots+b_{17}$。由已知条件知$S_{20}=T_{17}<340$。

考虑$S_i+T_j\left(1\le i\le 20,1\le j\le 17\right)$共340个元素，由抽屉原理，它们模339必有两个是同余的，

不妨设$S_i+T_j\equiv S_u+T_v\left(\bmod 339\right)\left(u<i,j<v\right)$，那么$S_i-S_u\equiv T_v-T_j\left(\bmod 339\right)$，

又因为$0<S_i-S_u<339$，$0<T_v-T_j<339$，所以$S_i-S_u=T_v-T_j$，

也就是得到了$a_{u+1}+\cdots+a_i=b_{j+i}+\cdots+b_v$，命题得证。

本讲练习：

1. 从$1,2,\ldots,2011$中选取n个数，使得其中任意两数的差都不等于4或7．求n的最大值.

2. 7名学生参加演出，学校为他们安排了m次演出，每次由其中3名同学同时登台演出，请你设计一种方案，使得7名学生中，任意两名同台演出的次数一样多，且使m最小.

3. 单位正方形内有若干个圆.它们的周长和为10．求证：必有一条直线与其中至少4个圆相交.

4. 求证：任意9个整数中，必有5个整数，它们的和被5整除.

5. 有红、黄、蓝卡片各6张，分别写有数字1.2.3.4.5.6．从中选取6张，要求三色俱全，且数字1.2.3.4.5.6各一张，则不同的选法有多少种？