第 0 章　目录

第 1 章 复习第一轮微积分基础 Basics of Calculus

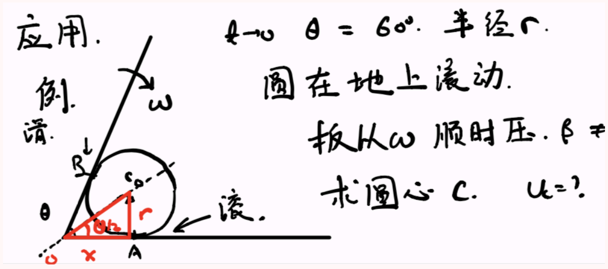
1.1 单元函数微分和应用 Single Variable Differenciation

☞ 例题 1

单元函数求导数。求出下列函数的导数。

1. $y = e^{\sin(x)}$
2. $y = e^{x \ln x}$
3. $y = \cosh^{-1} x$
4. $y = \sinh^{-1} x$

☞ **例题 2**



如图所示，一个圆柱半径为 r 质量为 m，在地面滚动。一个板子以角速度 ω 角加速度 β 顺时针压过来，圆柱和地面是纯滚的，和板子之间是光滑的。请求出圆心 C 的运动速度 v_c 加速度 a_c. 初始的板子和地面之间的夹角为 $60°$

泰勒级数展开

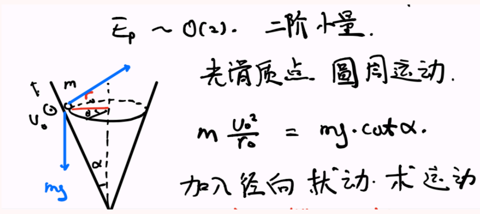
☞ 例题 3

请写出下列函数的泰勒级数，写出前四个非零项即可。

1. $(1+x)^n$
2. e^x
3. $\ln(1+x)$
4. $\cos(x)$
5. $\cos(ix)$
6. $\left(1+x^2+\cos\theta x\right)^{-\frac{1}{2}}$ 其中 $\cos\theta$ 是常数
7. $\left(1+x^2+k\times x\right)^{3/2}$ 其中 k 是常数

小量的展开，在小振动里面有很常见的应用

☞ 例题 4



如图所示，光滑的圆锥里面，有个质点正好做匀速圆周运动。这个时候加入一个径向的扰动，请问形成的运动是怎样的？

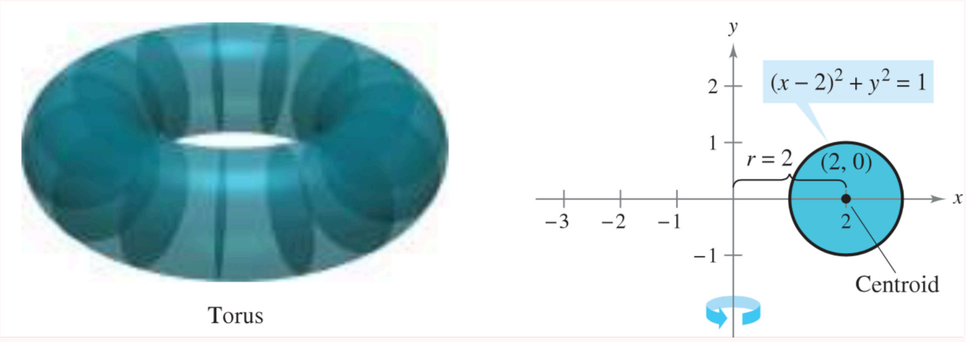
已经知道初始时候速度为 v_0 圆周运动的圆锥上的点和顶点的距离是 l 母线和竖直方向角度是 α 重力加速度为 g 质点的质量是 m

❏ 1.2 单元函数积分和应用 Single Variable Integration

定积分 vs 不定积分

常见的积分技巧，换元、分部积分积分常见用来求明显的体积、面积等物理量。

☞ 例题 5



求出这个环的体积。已经知道它的截面是圆形。这个圆形在截面满足函数关系。

$$(x-2)^2+y^2=1$$

☞ 例题 6

求出下列的积分

1. $\int_0^{2\pi} \sin\theta \cos\theta \mathrm{d}\theta$
2. $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos\theta \mathrm{d}\theta$
3. $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta$
4. $\int_0^{2\pi} \sin^3\theta \mathrm{d}\theta$
5. $\int_0^{2\pi} \sin^4\theta \mathrm{d}\theta$

☞ **例题 7**

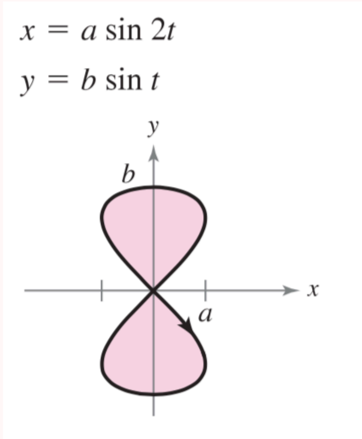
请利用积分的方法求出 n 维球的“体积”和”表面积”

☞ **例题 8**

请完成下列不定积分

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$
3. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$
5. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$

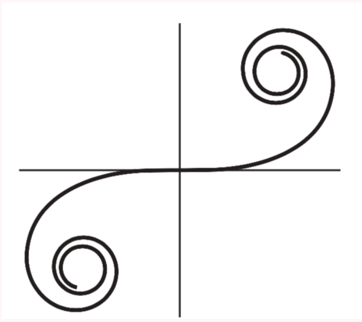
☞ **例题 9**



如图所示，一个沙漏计时器的截面积可以用参数方程表达出来。沙漏是三维物体。

1. 请求出这个沙漏的体积。
2. 如果这个沙漏装满了沙子，请求出绕 y 轴旋转的转动惯量。

☞ **例题 10**



如图所示，这个曲线叫做 cornu spiral 科纽螺线。它的函数可以写成如下形式

$$x(t)=\int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right)\mathrm{d}u$$

$$y(t)=\int_0^t \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right)\mathrm{d}u$$

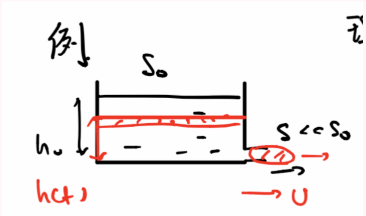
我们的图显示的是 $-\pi \le t \le \pi$ 的区间画出来的形象。

1. 请求出曲线从 $t=0$ 到 $t=a$ 区间的长度
2. 求出曲线在 $t=a$ 处的曲率半径
3. 这个曲线是 James Bernoulli 搞出来的。他发现这个曲线的曲率半径和曲线的长度之间有个有趣的关系。你能不能看出来这个关系是什么?

第 2 章 简单微分方程 Simple Differential Equations

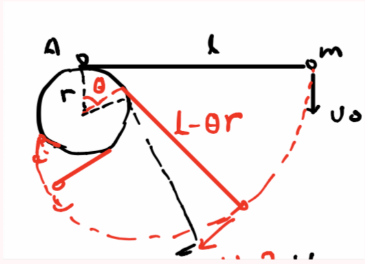
2.1 可分离变量

☞ **例题 11**



如图所示，一个很宽大的底面积为 S_0 的池子，水深度为 h_0，底部侧面有个面积很小为 $S \ll S_0$ 可以向外漏水。请问全部的水漏掉需要时间是多少?

☞ **例题 12**



如图所示，圆柱的半径为 r 不计重力影响。绳子的初长度为 l_0 小球的质量为 m 初速度为 v_0 方向在平面内垂直与绳子的方向。圆柱的质量为 m as well. 求小球绕上去的时间。分下面两种情况讨论。

1. 圆柱是完全固定的不能转动。
2. 圆柱是在平面内可以进行定轴转动的。初角速度为 0

❑ 2.2 常系数

$$y'' + ay' + b = 0$$

以这个微分方程为例，注意到导数、二阶导数都是一次的。因此叫做线性。另外注意到前面的系数是常数，所以是常系数。

比如下面的这个就是属于：线性、常系数、齐次微分方程。

$$y' + ay = 0$$

这种一般都猜解

$$y = Ae^{\lambda x}$$

然后代入原来的微分方程，得到的 λ 满足的方程一般叫做特征方程，它的解就是特征根。其他的系数比如 A 可以通过边界条件求得。

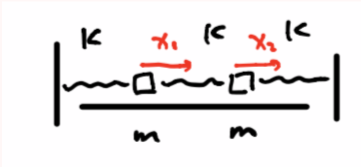
☞ 例题 13

求解方程 $y'' + by' + cy = 0$.

☞ **例题 14**

1. 光滑水平面上弹簧劲度系数为 k 一端固定，另一端质量为 m 初态原长，速度为 v 求运动。
2. 求阻尼振动。阻力满足公式 $f=-\beta v$
3. 受迫振动在刚才的问题基础上给一个外力 $F=F_0\cos(\Omega t)$

☞ **例题 15**



如图所示，只能在一个维度上运动。两个质量为 m 的质点，放在三个劲度系数为 k 的弹簧中间。初试条件：三个弹簧都是原长。

❑ 2.3 齐次非常系数

☞ 例题 16

求解方程

$$y' = -(a + bx) \cdot y$$

注意到本题是可以分离变量来解决的。如果更复杂的需要数学手册。

❑ 2.4 线性非齐次

☞ 例题 17

求解方程

$$y' = -k \cdot y + f(x)$$

分成两个步骤

1. y_1 是方程 $y' = -ky$ 的解（通解）
2. y_2 是方程 $y' = -k \cdot y + f(x)$ 的解（特解）
3. 最后的解应该是 y_1 和 y_2 的线性组合

第 3 章 偏导数 Partial Differenctiation

3.1 偏导数概念

3.1.1 偏导数定义

对于多元函数，我们可以研究函数对于不同自变量的变化规律，也就是利用偏导数来研究。定义如下：

$$\partial_x f = \frac{\partial}{\partial x} f = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

可以理解为 y 不动的时候，看函数的关于 x 的变化规律。偏导数的运算规则和导数的运算规则基本一致。符号 ∂，读作 partial，汉语（偏）。

☞ 例题 18

求出下列函数关于几个自变量的偏导数

1. $f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \sin z$
2. $f(x, y) = e^{y \cdot \sin x}$
3. $f(x, y) = \dfrac{8}{1 + x^2 + 3y^2}$
4. $f(x, y) = \ln(x - y)$
5. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

3.1.2 多次偏导数

“正常的函数”是指满足

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f$$

的函数。

例题 19

已经知道函数 $f(x,y)=e^{x^2y}$ 求出这个函数的二阶偏导数。也就是求出

1. $\partial_x\partial_x f$
2. $\partial_y\partial_y f$
3. $\partial_x\partial_y f$
4. $\partial_y\partial_x f$

思考，这算“正常函数”么?

3.2 偏导数应用

3.2.1 偏导数求极值

简单的极值条件就是直接偏导数是零就可以了。复杂一点的可能增加约束条件，可以用拉格朗日数乘法来解决。

例题 20

求出下列函数的极值

1. $f(x,y)=3x^3-12xy+y^3$
2. $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2+1\right)$
3. $f(x,y)=e^{x^2+xy+y^2}$

☞ **例题 21**

已经知道世界上有蔡子星和黄俏两个人生产女装大佬专用裙。他俩的年产量分别为 x, y 。这种裙子的价格受到价值规律影响，单个价格满足 $p = 6 - x - y$. 假设单个成本为 2 . 价格减去成本，再乘以产量就是预期收益。

1. 假设两者都自私，请问他们各自获得的最大收益 I_x, I_y 分别是多少？对应的产量分别是多少？
2. 假设两者合作，并且把产量弄成一样的，请问最大收益分别是多少？对应的产量分别是多少？
3. 如果已经达成协议。这个时候，黄俏遵守协议生产。请问这个时候蔡子星觉得没有必要遵守协议，他应该生产多少使得收益最高？最高收益是多少？
4. 为了迫使蔡子星和黄俏遵守协议，孙鹏作为第三者，过来监管，一旦有不遵守规定就会被孙鹏发现，并且规定不遵守协议的人要付出罚金给第三者，请问罚金定成多少比较适合？
5. 如果孙鹏监管，发现犯规的概率为 β 请问这个时候罚金多少比较适合？
6. 如果没有监管，有 n 个厂商各自独立生产，完全自由竞争，请问最终的预期收益是多少？各自的产量是多少？

☞ **例题 22**

已经知道黄俏生产女装裙子 x 件，女装头套 y 件的时候获得的利润函数是 $P=-5x^2-8y^2-2xy+42x+102y$ 请问他应该怎么生产才能使得利润最大？

如果增加一个条件 $3x+5y=100$ 呢？

☞ 例题 23

Shannnon Diversity Index 多样性指数生物老师朱斌告诉黄俏，多样性的计算可以这样来算。我们定义三个物种共同生活在一个栖息地中，他们占比分别是 x, y, z 则有 $x+y+z=1$ 。定义多样性指数

$$H=-x\ln x-y\ln y-z\ln z$$

1. 求证多样性指数的最大值出现在 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时。
2. 求出这个多样性指数的最大值。
3. 如果有 n 个不同的物种生活在这里，请问多样性指数的最大值是多少?

☞ **例题 24**

如果已经知道温度函数 $T(x,y,z) = 20 + 2x + 2y + z^2$ 。表示的是球 $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ 表面的温度分布。求平面 $x + y + z = 3$ 和球切出来的这个曲线上的温度的最大值是多少?（提示，用拉格朗日数乘法）

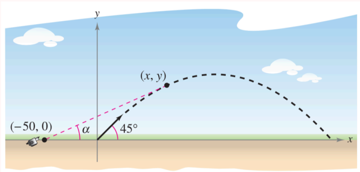
☞ **例题 25**

已经知道椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$ 可以包住圆 $x^2+y^2+z^2=2x$ 求出 a b 使得这个椭球的体积最小。

☞ 例题 26

如图所示，一个炮弹从原点，以 45° 角度，$t=0$ 时刻，速度 $64\frac{m}{s}$ 打出去。然后杜啸宇在 $(-50m,0)$ 位置架设了一个摄像机偷拍。

1. 求出摄像机视角 α 与炮弹飞行某位置坐标 x,y 的关系。
2. 求出摄像机视角 α 与时间 t 的关系。
3. 求出 $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$
4. 求出 α 的最大值。



3.2.2 方向导数和 nabla 算符

对于一个二元函数 $f(x,y)$ 求出一个沿着 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\tan\theta$ 方向的导数?
思考 $\Delta x=\Delta S\cdot\cos\theta$ ，$\Delta y=\Delta S\cdot\sin\theta$ 我们要求导数的这个方向用单位矢量表示 $\hat{n}=(\cos\theta,\sin\theta)$
对应的导数写为

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{f(x_0+\Delta S\cos\theta,y_0+\Delta S\sin\theta)-f(x_0,y_0)}{\Delta S}$$

这样有

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

对于三维的情况是物理里面研究最多的。引入了 nabla 算符之后，这一切都会变的很简单。如果我们要求的方向导数。他的方向可以表示为 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$
则方向导数可以用梯度表示

$$\frac{\partial f}{\partial l}=(\nabla f)\cdot\vec{l}$$

下一页，我们详细说一下 nabla 算符是什么东西。

物理中用的最多的是 nabla 算符，写做 “ ∇ ”
可以理解为既是求导数，也是矢量。
在笛卡尔直角坐标系中可以理解为。

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

nabla 算符作用在标量或者矢量上，起到不同的效果。我们一般把他们分别叫做：

1. 梯度（Gradient）：nabla 作用在标量上。得到矢量。
   (a) 三维笛卡尔直角坐标系下
   $$grad\cdot f\,(x,y,z)=\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$
   (b) 三维柱坐标系下
   $$grad\cdot f\,(r,\varphi,z)=\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$
   (c) 三维球坐标系下
   $$grad\cdot f\,(r,\theta,\varphi)=\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$
2. 散度（Divergence）:nabla 作用在矢量上，通过点乘作用，得到的是标量。
   (a) 三维笛卡尔直角坐标系下
   $$div\cdot\vec{F}=\nabla\cdot(F_x,F_y,F_z)=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$
   (b) 三维柱坐标系下
   $$div\cdot\vec{F}=\nabla\cdot(F_r,F_\varphi,F_z)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$
   (c) 三维球坐标系下
   $$div\cdot\vec{F}=\nabla\cdot(F_r,F_\theta,F_\varphi)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2F_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta F_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$
3. 旋度（Curl）：nabla 作用在矢量上，通过叉乘作用，得到的是矢量。一般我们物理中使用三维笛卡尔坐标系表达这种最多。
   $$curl\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ F_x&F_y&F_z\end{vmatrix}$$

注意我们经常还会用到 $\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2},\frac{\partial^2}{\partial y^2},\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ 也就是三个方向分别求二阶导数。这个叫做拉普拉斯算子。对应的方程叫做拉普拉斯方程。

$$\nabla^2\varphi=0$$

显然真空中的电势分布自然满足拉普拉斯方程。

另外，物理中还有很常用的是波动方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+c^2\nabla^2 f=0$$

其中 c 是波速。

☞ 例题 27

（1）求出函数

$$f = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3x - 2y$$

在点 $(1, 1, 2)$ 的梯度。

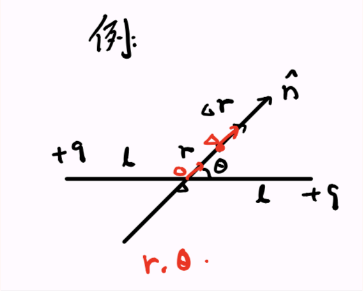
（2）并且求出哪些点存在梯度为零的情况。

☞ 例题 28

1. 求出点电荷的电势表达 $\varphi_1(r, \theta)$
2. 求出电偶极子的电势表达 $\varphi_2(r, \theta)$
3. 求出电偶极子在 $\hat{r}$ 以及 $\hat{\theta}$ 方向上的电场强度大小。
4. 求出电偶极子远方电场线形状。

例题 29

如图所示，空间中固定两个等量正电荷，电荷的电量都是 $+q$ 坐标分别在 $(l,0),(l,\pi)$ 上。极坐标表达。有个杆子，和 x 轴夹角是 θ 。在这个平面上，求出杆子上任何一点的沿着杆子方向的电场强度的大小。



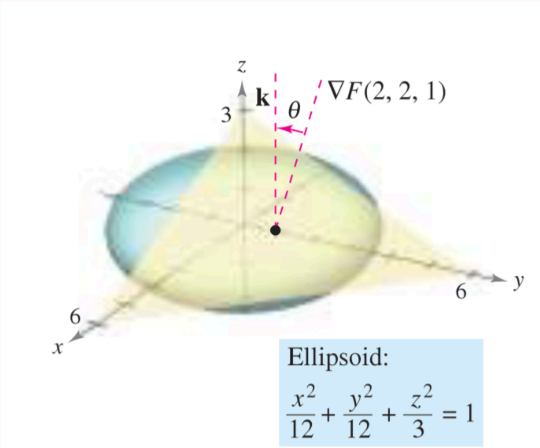
☞ 例题 30

对于椭球

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{3}=1$$

求出

1. 它的体积
2. 它绕着 z 轴的转动惯量
3. 在点 $(2,2,1)$ 处，切面垂线和 z 轴的夹角 θ 是多少?



☞ **例题 31**

已经知道真空中的麦克斯韦方程组可以写成

$$\nabla \cdot E = 0$$
$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot B = 0$$
$$\nabla \times B = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

再利用公式 $A \times (B \times C) = B \cdot (A \cdot C) - C \cdot (A \cdot B)$

1. 求证电磁波是横波
2. 求证电场和磁场同相位（同时达到最大值，同时达到零）
3. 真空中的光速为 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

3.2.3 链式法则 Chain Rule

Chain Rule: 链式法则表述如下：对于函数 $w = f(x, y)$ 如果我们知道 x, y 分别可以用参数 (s, t) 表达。也就是说 $x = g(s, t)$ ，$y = h(s, t)$ ，这样就有

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

太好理解了，不解释。

☞ **例题 32**

求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$：

$$3x^2 z - x^2 y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$$

☞ **例题 33**

求证柯西黎曼关系在极坐标的表达式？已经知道柯西黎曼关系（Cauchy-Riemann）在二维直角坐标中表达为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ \ and\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

极坐标表达应该为

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\ \ and\ \ \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

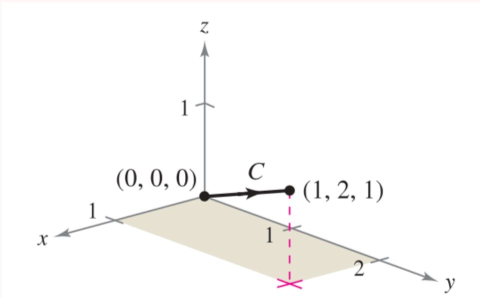
第 4 章 重积分 Multiple Integrals

4.1 线积分 Line Integrals

例题 34

一个线段，它的两个端点分别是 $(0,0,0)$ 和 $(1,2,1)$ 求沿着这个线段的线积分

$$\int_C \left(x^2 - y + 3z\right) \mathrm{d}s$$



☞ 例题 35

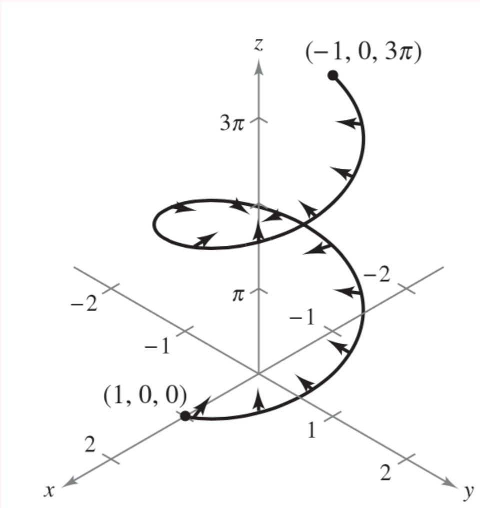
思考一个弹簧，形状可以用函数

$$r(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t\hat{x}+\sin t\hat{y}+t\hat{z}),0\leq t\leq 6\pi$$

表达。另外在考虑这个弹簧的密度分布也很奇怪，满足 $\rho(x,y,z)=1+z$

1. 求出这个弹簧的质量大小
2. 求出它的质心位置

☞ **例题 36**



一个螺旋线上运动的粒子，可以表示为

$$r(t) = \cos t\hat{x} + \sin t\hat{y} + t\hat{z}$$

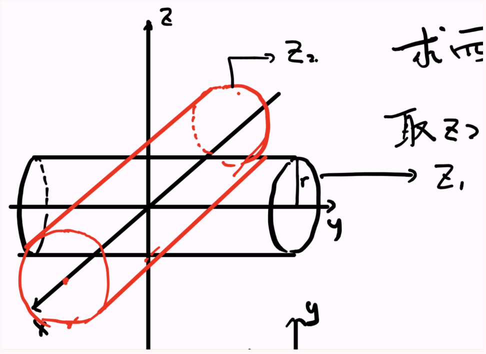
从点 $(1,0,0)$ 运动到 $(-1,0,3\pi)$. 如果这一切都发生在矢量力场

$$\vec{F}(x,y,z) = -\frac{1}{2}x\hat{x} - \frac{1}{2}y\hat{y} + \frac{1}{4}\hat{z}$$

中。请问，这个过程中的总功 W 是多少？

4.2 面积分 Area Integrals

☞ 例题 37



求两个半径为 r 的圆柱交集部分的体积大小

如图所示，两个圆柱的对称轴分别为 x , y 轴

☞ **例题 38**

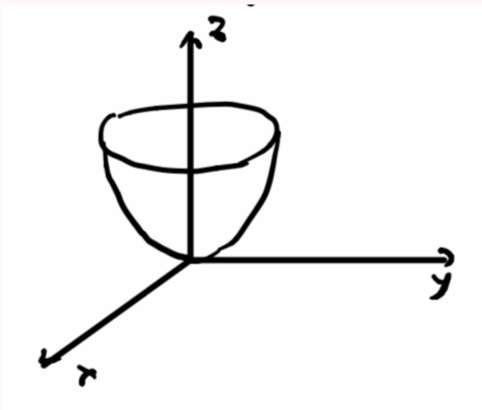
1. 求出积分
$$\int_0^{\infty} e^{-x}\mathrm{d}x$$
2. 求出积分
$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$$
3. 求积分
$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

☞ **例题 39**

请计算

$$z = k\left(x^2 + y^2\right)$$

这个曲面，在范围 $0 \le x^2 + y^2 \le r_0^2$ 内的面积



❏ 4.3 体积分 Volumn Integrals

☞ **例题 40**

求圆锥的质心，已经知道圆锥的形状边界可以表示为

$$x^2 + y^2 = r^2 = k^2 z^2, z \in [0, h]$$

密度 $\rho = \rho_0$

☞ **例题 41**

一个半径为 r_0 的球，里面的电荷体密度为 $\rho=\rho_0\dfrac{r}{r_0}\cos\theta\cos\varphi$．求这个球的电偶极大小。

提示：

$$\vec{p}=\int\vec{r}\rho\mathrm{d}V$$

$$p_x=\int x\rho\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}V=r\mathrm{d}\theta\cdot r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\cdot\mathrm{d}r$$

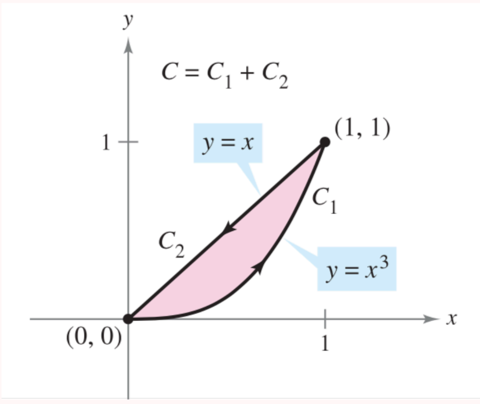
第 5 章　矢量微积分 Vector Calculus

5.1　格林公式 Green's Theorem

如果简单连通区域 R 由曲线 C 围成。函数 $M(x,y)$ 和函数 $N(x,y)$ 在 R 区域中具有一阶连续的偏导数，则有

$$\int\int_R\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int(N\mathrm{d}x+M\mathrm{d}y)$$

☞ 例题 42



利用格林公式求下面的这个线积分

$$\int_c\left[y^3\mathrm{d}x+\left(x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}y\right]$$

曲线 c 的第一段是从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的沿着曲线 $y=x^3$。第二段从 $(1,1)$ 到 $(0,0)$ 沿着曲线 $y=x$。这样就封闭起来了。

第 6 章 工具和方程 * More*

6.1 高斯积分 Gauss Integrals

定义高斯积分

$$G_n\left(\alpha\right)=\int_0^{\infty}x^n e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x$$

这样就可以得到

$$G_1\left(\alpha\right)=\int_0^{\infty}xe^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\alpha}\int e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x^2\alpha=\frac{1}{2\alpha}$$

请思考

$$G_0\left(\alpha\right)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x$$

请进一步思考高斯积分之间的关系。

$$G_n\to G_{n+2}$$

$$G_n\left(\alpha\right)=\int x^n e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}G_n\left(\alpha\right)=\int -x^{n+2}e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=-G_{n+2}\left(\alpha\right)$$

所以有

$$G_1\left(\alpha\right)=\frac{1}{2\alpha},G_3\left(\alpha\right)=\frac{1}{2\alpha^2},G_5\left(\alpha\right)=\frac{1}{4\alpha^3}$$

❑ 6.2 伽马函数 Gamma Function

定义实数域伽马函数

$$\Gamma\left(n\right)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x$$

注意这里 $x>0$ ，这里的 n 不一定是整数。

伽马函数的性质:

$$\Gamma\left(n+1\right)=n\Gamma\left(n\right)$$

所以很容易获得对于正整数 m 有

$$\Gamma\left(m\right)=\left(m-1\right)!$$

其中 $0!=1$. 另外，和贝塔函数的关系也有

$$B\left(m,n\right)=\frac{\Gamma\left(m\right)\Gamma\left(n\right)}{\Gamma\left(m+n\right)}$$

常用的结果

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

建议同学们背下来

用来计算和麦克斯韦玻尔兹曼分布有关的东西很方便。比高斯积分好用多了。

6.3 傅里叶初步

☞ 例题 43

求

$$S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\cdots$$

请利用傅里叶变换。提示，可以构造函数 $f(x)=|x|$.

❑ 6.4 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换：对于函数 $f(x)$ 可以这样搞

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} \mathrm{d}t$$

注意里面的 $t \geq 0$ 是正实数。这里的 $s = \sigma + i\omega$ 是复数，其中 σ, ω 是实数。$i^2 = -1$ 。