数值代数　第 3 次上机作业

李佳 2100010793

1　问题描述

(1) 估计 5-20 阶 Hilbert 矩阵的 ∞ 范数条件数.

(2) 设

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

先随机地选取 $x \in \mathbb{R}^n$, 并计算出 $b = A_n x$; 然后再利用列主元 Guass 消去法求解该方程组, 假定计算解为 $\hat{x}$. 试对 n 从 5 到 30 估计计算解 $\hat{x}$ 的精度, 并且与真实相对误差作比较.

2　数值方法

2.1　估计矩阵的 1-范数: 优化法

为估计矩阵 A 的 ∞ 范数下条件数, 需要估计 A^{-1} 的 ∞ 范数, 也就是 A^{-T} 的 1 范数. 通过教材上的定理 2.5.1 知, 要估计矩阵 B 的 1 范数, 可以选定向量 x 满足 $\|x\|_1 = 1$ 且 Bx 的各分量非 0, 计算 $sign(Bx) = v$,$z = B^T v$. 若 $\|z\|_\infty = z^T x$, 则 $\|Bx\|_1$ 取得最大值, 从而 $\|B\|_1 = \|Bx\|_1$; 若 $\|z\|_\infty > z^T x$, 则 $\|Be_j\|_1 > \|Bx\|_1$, 其中 j 满足 $z_j = \|z\|_\infty$, 取 $x = e_j$ 再回到第一步进行迭代即可.

而在计算 A^{-T} 的 1 范数时, 需要计算的 $w = Bx, z = B^T v$ 就相当于解方程 $A^T w = x, Az = v$, 可利用先前通过列主元 Guass 消去法得到的 A 的三角分解进行计算.

2.2　估计计算解的相对误差

教材 2.5.1 给出了计算解相对误差的估计:

$$\frac{\|x - \hat{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty},$$

其中

$$r = b - A\hat{x}.$$

$\|A\|_\infty$ 通过直接计算每行元素绝对值之和的最大值得到; $\|A^{-1}\|_\infty$ 通过 2.1 节的方法进行估计; $\|r\|_\infty, \|b\|_\infty$ 通过计算向量各分量绝对值最大值得到.

3 理论分析结果

(1) 考虑比对 n 阶 Hilbert 矩阵的最后两行:

$$(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{2n-2}),$$

$$(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{2n-1}).$$

这两行几乎是线性相关的, 大概可知随着阶数增加,Hilbert 矩阵越接近奇异矩阵, 其条件数也可能越大.

(2) 随着矩阵阶数增加, 列主元高斯消去法及求解过程带来的舍入误差增大, 因此真实的求解误差可能随阶数增加而增大; 随着矩阵阶数增加, 矩阵的条件数求解误差的估计也可能随阶数增加而增大.

4 具体算法实现

4.1 估计矩阵的条件数

```
function [norm1] = InftyNorm_Inv(A)
OK = 1; % 用于判定是否终止循环
[~,n] = size(A);
[A0,u] = LU_col(A);          % 提前作列主元三角分解
x = ones(n,1)/n; B0 = A0'; % 定义初始向量对矩阵作转置
while OK == 1
    w = x;
    % 求解 A^Tw=x
    for i = 1:n-1   % 前代法解 U^Ty=b(y 记录在 b 中)
        w(i) = w(i)/B0(i,i);
        w(i+1:n) = w(i+1:n) - w(i)* B0(i+1:n,i);
    end
    w(n) = w(n)/B0(n,n);
    for j = n:-1:2 % 回代法解 L^Tx=y(x 记录在 b 中)
        w(1:j-1) = w(1:j-1) - w(j)* B0(1:j-1,j);
    end
    for k = n-1:-1:1   % 向量进行行交换计算(P^Tb)
        mid = w(k);
        w(k) = w(u(k));
        w(u(k)) = mid;
    end
    z = sign(w);
    % 求解 Az=v
    for k = 1:n-1   % 向量进行行交换计算(P^(-1)b)
        mid = z(k);
```

```
        z(k) = z(u(k));
        z(u(k)) = mid;
    end
    for i = 1:n-1  % 前代法解 Ly=z(y 记录在 z 中)
        z(i+1:n) = z(i+1:n) - z(i)* A0(i+1:n,i);
    end
    for j = n:-1:2 % 回代法解 Ux=y(x 记录在 z 中)
        z(j) = z(j)/A0(j,j);
        z(1:j-1) = z(1:j-1) - z(j)* A0(1:j-1,j);
    end
    z(1) = z(1)/A0(1,1);
    inftynorm = 0; % z 的无穷范数;
    pos = 1;        % z 某个分量的模与无穷范数相等对应的坐标
    for index = 1:n
        if abs(z(index)) > inftynorm
            inftynorm = abs(z(index));
            pos = index;
        end
    end
    if inftynorm > z'* x   % 不是最大值继续迭代
        x = zeros(n,1);
        x(pos) = 1;
    else                   % 停止迭代
        norm1 = sum(abs(w));
        OK = 0;
    end
end
```

4.2 估计计算解相对误差

```
r = b - A*x;          % 计算残差
rnorm = max(abs(r)); % r 的无穷范数
bnorm = max(abs(b)); % b 的无穷范数
Anorm = max_i sum(abs(A(i,:))); % A 的无穷范数
AInvnorm = InftyNorm_Inv(A);    % A^-1 的无穷范数
error(1,n-4) = rnorm * Anorm * AInvnorm / bnorm;  % 计算解的误差估计
```

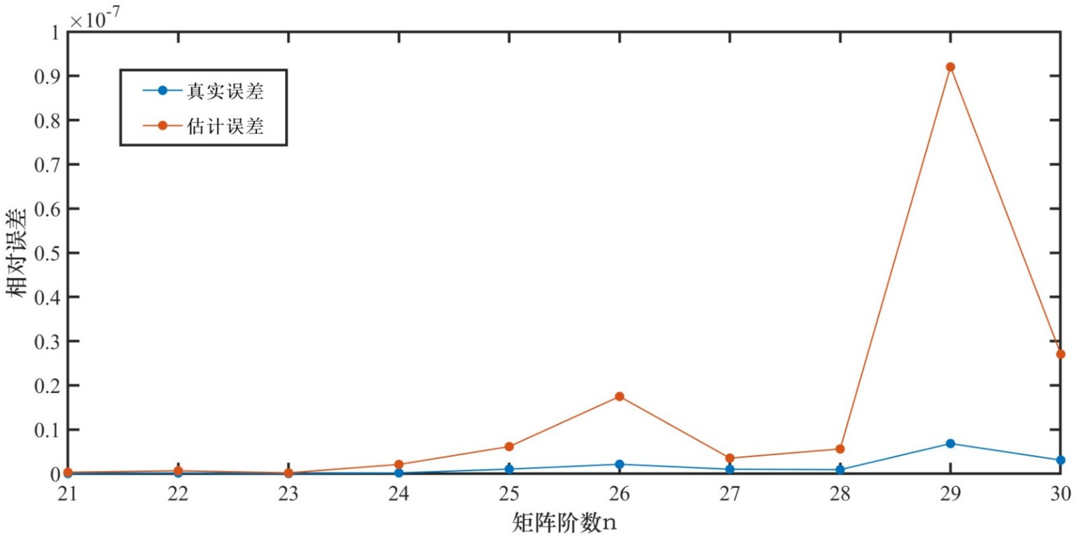
5 数值结果及相应分析

(1) 估计 5-20 阶 Hilbert 矩阵的条件数结果如下:

$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=11$	$n=12$
9.437e+5	2.907e+7	9.850e+8	3.390e+10	1.100e+12	3.540e+13	1.230e+15	3.830e+16
$n=13$	$n=14$	$n=15$	$n=16$	$n=17$	$n=18$	$n=19$	$n=20$
4.640e+17	1.410e+19	1.030e+18	1.970e+18	1.850e+18	9.710e+19	3.980e+19	3.000e+18

可知: Hilbert 矩阵如预期分析, 条件数较大, 随着阶数增加有着波动上升的趋势. 在 $n = 20$ 时达到 10^{18}, 因此可知求解系数矩阵为 Hilbert 矩阵的线性方程组是一个非常" 病态" 的问题, 求解的误差很可能会非常大.

(2) 计算解的误差估计和真实误差结果如图所示 (受数字大小影响, 不便全部展示在图中. 此图只展示 $n = 21 \sim 30$.):



可知:

(a) 真实误差与估计误差均大致随 n 增大而增大, 偶尔存在突变的位置, 可能与向量选取的随机性有关;

(b) 真实误差始终不大于估计误差 (因为是误差的上界);

(c) 估计误差与真实误差的比例均小于 13.5, 数量级上差距不大, 说明估计误差是具有实用性的 (即估计误差并不是远大于真实误差).