数值代数　第 1 次上机作业

李佳 2100010793

1　问题描述

实现 Guass 消去法计算下列线性方程组, 已知精确解是 $x = (x_1, ..., x_n)^T = (1, ..., 1)^T$,

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & & & \\ 8 & 6 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 8 & 6 & 1 \\ & & & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 15 \\ \vdots \\ 15 \\ 14 \end{bmatrix}$$

分别取 $n = 2, 12, 24, 48, 84$, 计算 n 取不同值时数值解 x^* 与精确解 x 的误差 $\|x^* - x\|_2, \|x^* - x\|_\infty$. 其中

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + ... + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}},\ \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \{|x_i|\}.$$

2　数值方法

2.1　直接三角分解

记题目中矩阵为 A. 注意到，A 的顺序主子式均非 0, 故可进行三角分解. 将矩阵进行三角分解 $A = LU$ 后, 通过前代法解 $Ly = b$, 再由回代法解 $Ux = y$ 可得数值解 x.

2.2　列主元 Guass 消去法

对矩阵 A, 在第 k 步 Guass 消元中先寻找第 k 列的最大元 (第 k 至第 n 行之间), 找到之后交换最大元所在行至第 k 行, 再进行 Guass 消元.

对矩阵进行列主元三角分解 $PA = LU, P = P_{n-1}...P_1$, 先计算 $b' = Pb = P_{n-1}...P_1 b$ (用向量 u 记录每次交换的行, 逐一对向量 b 交换回去), 通过前代法解 $Ly = b'$, 再由回代法解 $Ux = y$ 可得数值解 x.

2.3 全主元 Guass 消去法

对矩阵 A, 在第 k 步 Guass 消元中先寻找子矩阵 $A(k:n,k:n)$ 的最大元 $A(p,q)$, 找到之后交换最大元所在行至第 k 行, 交换最大元所在列至第 k 列再进行 Guass 消元.

对矩阵进行列主元三角分解 $PAQ=LU$, $P=P_{n-1}...P_1$, $Q=Q_1Q_2...Q_{n-1}$, 先计算 $b'=Pb=P_{n-1}...P_1b$ (用向量 u 记录每次交换的行, 逐一对向量 b 交换回去), 通过前代法解 $Ly=b'$, 再由回代法解 $Ux'=y$, 最后计算 $x=Qx'=Q_1Q_2...Q_{n-1}x'$(用向量 v 记录每次交换的列, 反方向逐一对向量 b 的行交换回去) 可得数值解 x.

3 理论分析结果

随着矩阵阶数增大, 每一步 Guass 消元、前代法、回代法产生的舍入误差增大, 理论上每种方法在两个范数下的误差都会随 n 增大而增大.

列主元与全主元 Guass 消去法都可以保证三角分解的下三角矩阵元素 $|l_{ij}|\leq 1$, 因此有利于减少舍入误差, 理论上在两个范数下, 这两种方法与直接三角分解相比误差更小。而全主元相比列主元, 理论上误差也更小。

4 具体算法实现

4.1 直接三角分解

Step 1 : 三角分解

for $k=1:n-1$

% 计算 Guass 变换矩阵, 记录在下三角矩阵

$A(k+1:n,k)=A(k+1:n,k)/A(k,k)$

% 计算右下角子矩阵的 Guass 消元结果

$A(k+1:n,k+1:n)=A(k+1:n,k+1:n)-A(k+1:n,k)A(k,k+1:n)$

end

Step 2: 前代法解 $Ly=b$ (y 的结果记录在向量 b 中)

for $j=1:n-1$

% 将 $b(j)$ 得数代回方程

$b(j+1:n)=b(j+1:n)-b(j)A(j+1:n,j)$

end

Step 3: 回代法解 $Ux=y$ (x 的结果记录在向量 b 中)

for $j=n:-1:2$

% 计算 $b(j)$

$b(j)=b(j)/A(j,j)$

$b(1:j-1)=b(1:j-1)-b(j)A(1:j-1,j)$

end

% 剩余 $b(1)$ 未计算

$b(1)=b(1)/A(1,1)$

4.2 列主元 Guass 消去法

Step 1: 列主元三角分解

for $k = 1 : n-1$

% 寻找列主元

$A(p,k) = \max_{k \le i \le n}\{|A(i,k)|\}$

% 交换第 k 行与列主元所在的行

$A(k,1:n) \leftrightarrow A(p,1:n)$

% 记录第 k 行与第 p 行交换

$u(k) = p$

% 计算 Guass 变换矩阵, 记录在下三角矩阵

$A(k+1:n,k) = A(k+1:n,k)/A(k,k)$

% 计算右下角子矩阵的 Guass 消元结果

$A(k+1:n,k+1:n) = A(k+1:n,k+1:n) - A(k+1:n,k)A(k,k+1:n)$

end

Step 2: 计算 $b' = Pb$

% $b' = Pb = P_{n-1}...P_1 b$, 从前往后依次对 b 进行行交换

for $k = 1 : n-1$

$b(k) \leftrightarrow b(u(k))$

end

Step 3: 前代法解 $Ly = b'$(与 4.1 一致)

Step 4: 回代法解 $Ux = y$(与 4.1 一致)

4.3 全主元 Guass 消去法

Step 1: 全主元三角分解

for $k = 1 : n-1$

% 寻找全主元

$A(p,q) = \max_{k \le i,j \le n}\{|A(i,j)|\}$

% 交换第 k 行与全主元所在的行、第 k 列与全主元所在的列

$A(k,1:n) \leftrightarrow A(p,1:n),\ A(1:n,k) \leftrightarrow A(1:n,q)$

% 记录第 k 行与第 p 行交换、第 k 列与第 q 列交换

$u(k) = p,\ v(k) = q$

% 计算 Guass 变换矩阵, 记录在下三角矩阵

$A(k+1:n,k) = A(k+1:n,k)/A(k,k)$

% 计算右下角子矩阵的 Guass 消元结果

$A(k+1:n,k+1:n) = A(k+1:n,k+1:n) - A(k+1:n,k)A(k,k+1:n)$

end

Step 2: 计算 $b' = Pb$

% $b' = Pb = P_{n-1}...P_1 b$, 从前往后依次对 b 进行行交换 (与 4.2 一致)

Step 3: 前代法解 $Ly = b'$(与 4.1 一致)

Step 4: 回代法解 $Ux' = y$(与 4.1 一致)

Step 5: 计算 $x = Qx'$

% $x = Qx' = Q_1...Q_{n-1}b$, 从后往前依次对 x' 进行行交换

for $k = n-1 : -1 : 1$

$b(k) \leftrightarrow b(v(k))$

end

4.4 误差计算 (每个方法计算完毕后均进行)

% 2 范数误差计算

$error_2 = sqrt(sum_{1\le i\le n}(b(i)-1)^2)$

% ∞ 范数误差计算

$error_\infty = \max_{1\le i\le n} abs(b(i)-1)$

5 数值结果及相应分析

Matlab 求解得到以下结果:

Table 1: 2 范数下误差

	$n=2$	$n=12$	$n=24$	$n=48$	$n=84$
直接三角分解	2.220 e-16	1.537 e-13	6.297 e-10	1.056 e-02	7.259 e+08
列主元 Guass 消去	0	0	0	0	3.783 e-06
全主元 Guass 消去	0	0	0	0	3.783 e-06

Table 2: ∞ 范数下误差

	$n=2$	$n=12$	$n=24$	$n=48$	$n=84$
直接三角分解	2.220 e-16	1.137 e-13	4.656 e-10	7.812 e-03	5.368 e+08
列主元 Guass 消去	0	0	0	0	2.797 e-06
全主元 Guass 消去	0	0	0	0	2.797 e-06

可以看出,

(1)对每种方法，各范数下的误差随 n 增大而增大.

(2)对固定的 n, 两种范数下的误差大小相对差距不大,(两种范数均能产生有效数字的情况下) 均有 $1.000 \le \dfrac{error_2}{error_\infty} < 1.500$.

(3)直接三角分解产生的误差在 n 取各值时均大于另外两种方法，且在 $n=84$ 时产生的误差远大于另外两种. $n=84$ 时有 $\dfrac{error_2}{\|x^*\|} > \dfrac{error_\infty}{\|x^*\|} > 5.857$ e+07, 可以认为此时的数值解已经不再可靠.

(4)列主元、全主元 Guass 消去法在 $n=2,12,24,48$ 时的误差都小于 1.000 e-16, 小于软件中浮点数下界, 因此显示为 0. $n=84$ 时的误差也相对较小, $\dfrac{error_\infty}{\|x^*\|} < \dfrac{error_2}{\|x^*\|} <$ 4.128 e-07, 可以认为这两种方法求得的数值解在 $n=84$ 时依然可靠.

(5)列主元、全主元 Guass 消去法在 $n=2,12,24,48,84$ 时产生误差的结果均相等, 这是由于问题中的矩阵恰好满足最大元 8 每一列都有, 且由于矩阵非零元带状分布,Guass 消去的过程中只有很少的元素发生了改变, 导致寻找子矩阵最大元时恰好寻找的就是当前所在列的列主元, 从而导致全主元各步求解的结果与列主元一致, 因而得到的数值解也相同.