数值分析　上机作业 2

李佳 2100010793

(选择作业 B)

1　问题描述

用不同的数值积分法 (复合中点、复合梯形、复合 Simpson、Romberg 求积方法、自适应方法) 计算

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx \quad (=\pi),$$

并数值估计收敛阶.

2　算法描述

2.1　复合中点公式

中点公式使用常值多项式近似函数以求积分值的近似:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2}),$$

复合中点公式将积分区间分为若干小段, 最长的区间长度为 h, 分段应用中点公式近似积分, 近似值记为 $M(h)$. 其误差估计为

$$|\int_a^b f(x)\,dx - M(h)| \leq \frac{h^2}{24}M_2(b-a),$$

其中 $M_2 = \max\{|f''(x)| : x \in [a,b]\}$.

2.2　复合梯形公式

梯形公式使用一次多项式近似函数以求积分值的近似:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2},$$

复合梯形公式将积分区间分为若干小段, 最长的区间长度为 h, 分段应用梯形公式近似积分, 近似值记为 $T(h)$. 其误差估计为

$$|\int_a^b f(x)\,dx - T(h)| \leq \frac{h^2}{12}M_2(b-a),$$

其中 $M_2 = \max\{|f''(x)| : x \in [a,b]\}$.

2.3 复合 Simpson 公式

Simpson 公式使用二次多项式近似函数以求积分值的近似:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a)+f(b)+4f(\frac{a+b}{2})),$$

复合 Simpson 公式将积分区间分为若干小段, 最长的区间长度为 h, 分段应用 Simpson 公式近似积分, 近似值记为 $S(h)$. 其误差估计为

$$|\int_a^b f(x)\,dx - S(h)| \le \frac{h^4}{2880}M_4(b-a),$$

其中 $M_4 = \max\{|f^{(4)}(x)| : x \in [a,b]\}$.

2.4 Romberg 求积方法

Romberg 求积方法通过使用 Euler-Maclaurin 公式, 对低阶格式作线性组合得到高阶格式. 具体是递推地计算 $R_{k+1}(h) = (4^k R_k(h/2) - R_k(h))/(4^k-1)$ 得到高阶格式, 其中 $R_k(h)$ 是误差为 $O(h^{2k})$ 的近似公式.

2.5 自适应方法

自适应方法是根据函数的具体形式来确定求积节点的数值积分方法. 主要思想是: 若近似积分的误差近似地超过某标准 (例如误差等分布原则), 则对区间加细以得到更小误差的近似积分值. 近似误差的计算方法为 (以 Simpson 公式为例): 记区间 $[u,v]$ 上 Simpson 公式得到的近似值为 $S(u,v)$, 令 $w=\frac{u+v}{2}$, 有结果 (课上已讲):

$$\int_u^v f(x)\,dx \approx S(u,w)+S(w,v)+\frac{1}{15}(S(u,w)+S(w,v)-S(u,v)),$$

即误差近似为

$$\left|\frac{1}{15}(S(u,w)+S(w,v)-S(u,v))\right| \tag{1}$$

具体实现中, 先设置误差阈值 ε, 将整段区间 $[a,b]$ 分为三类区间: 已完成计算的区间 S(Safe), 正在自适应的区间 A(Active), 未处理的区间 N(Not Examined). 记 S 上得到的数值积分为 $I_S(f)$. 初始化 $S=N=\varnothing, A=[a,b]$. 将(1)中的系数改为 1/10(误差是估计值不准确, 因此增大系数以加强判定的条件) 后按该公式计算 $A=[\alpha,\beta]$ 上数值积分的近似误差 e_A,

1. 若 $e_A < \varepsilon\frac{\beta-\alpha}{b-a}$, 即通过检验. 记 A 的中点 γ, 则 $I_S(f) \leftarrow I_S(f)+S(\alpha,\gamma)+S(\gamma,\beta)$, $S \leftarrow S\cup A$, $A \leftarrow N$;
2. 若未通过检验, 则区间折半, $A \leftarrow [\alpha,\gamma]$, $N \leftarrow N\cup[\gamma,\beta]$, 重新计算 A 上数值积分的近似误差并返步 1.

3 计算结果

对复合中点公式、复合梯形公式、复合 Simpson 公式、Romberg 方法数值估计收敛阶, 因此计算误差后, 除以对应的收敛阶再作图, 验证其是否大致为 O(1) (例如对中点公式, 误差 $e \sim O(h^2)$, 因此计算 $e/h^2 = n^2 \cdot e$ 随 n 的变化图).

对自适应方法, 其本身就需要设置一个误差的阈值, 因此没有必要数值估计收敛阶, 仅呈现若干数值算例的结果.

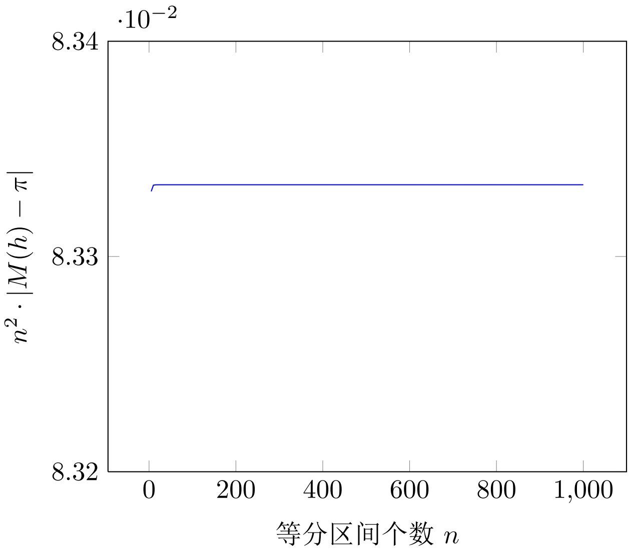

Figure 1: 复合中点公式下 $n^2 \cdot |M(h) - \pi|$ 关于 n 的变化图

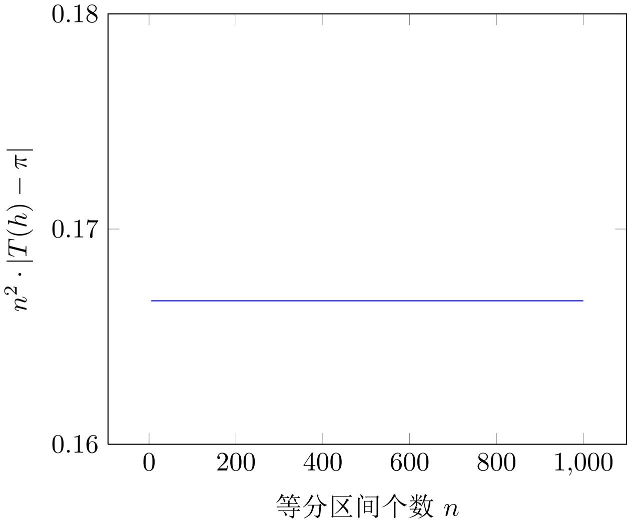

Figure 2: 复合梯形公式下 $n^2 \cdot |T(h) - \pi|$ 关于 n 的变化图

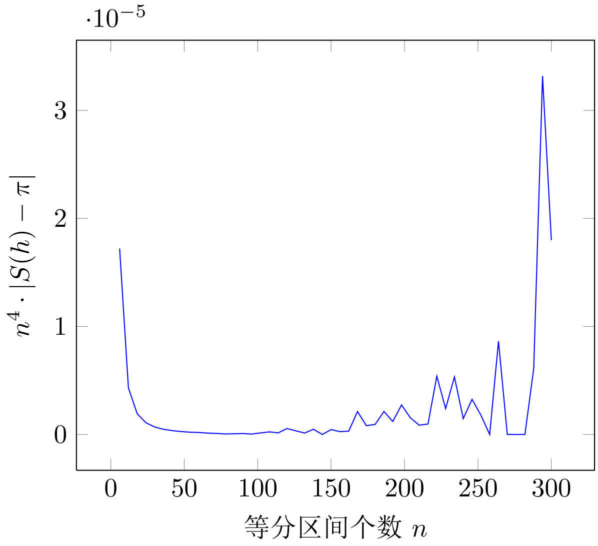

Figure 3: 复合 Simpson 公式下 $n^4 \cdot |S(h) - \pi|$ 关于 n 的变化图

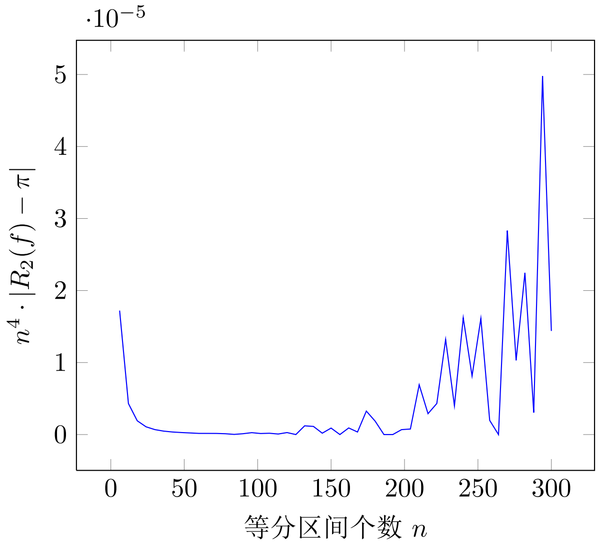

Figure 4: Romberg 求积方法 $k = 2$ 下 $n^4 \cdot |R_2(f) - \pi|$ 关于 n 的变化图

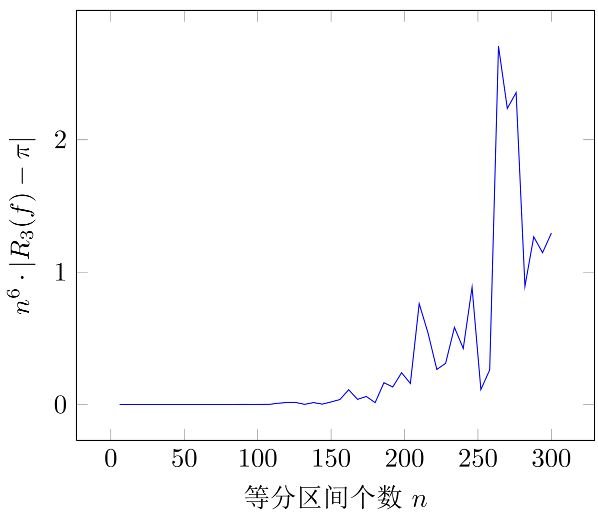

Figure 5: Romberg 求积方法 $k = 3$ 下 $n^6 \cdot |R_3(f) - \pi|$ 关于 n 的变化图

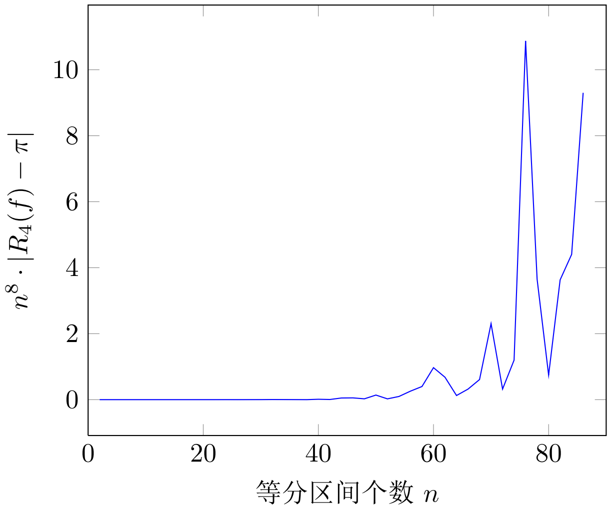

Figure 6: Romberg 求积方法 $k = 4$ 下 $n^8 \cdot |R_4(f) - \pi|$ 关于 n 的变化图

误差阈值 ε	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
计算误差	2.403E-05	2.403E-05	2.403E-05	1.511E-07	8.180E-07	9.849E-08
误差阈值 ε	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}
计算误差	1.155E-09	1.605E-09	1.027E-10	1.507E-11	8.074E-13	5.818E-14

Table 1: 自适应方法在不同误差阈值下得到的真实计算误差

4 简明分析

- 由图可知, 中点公式、梯形公式在 $n \leq 1000$ 时, 误差与 n^2 的乘积均几乎不变, 保持 $O(1)$, 验证了它们的收敛阶 $O(h^2)$;
- 由图可知, Simpson 公式在 $n \leq 200$ 时, 误差与 n^4 的乘积均几乎不变, 保持 $O(1)$, 验证了它的收敛阶 $O(h^4)$; 但其在后面产生波动上升, 可能是因为 h^4 此时已达到接近 10^{-10}, 而其误差估计 $\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}h^4$, 其误差要保持在约 10^{-13} 左右, 才能保证误差与 n^4 的乘积保持几乎不变. 但 10^{-13} 过小, 受舍入误差影响较大, 可能因此导致了后面图像的波动.
- 由图可知, $k = 2, 3$ 时, Romberg 求积方法下误差与 n^{2k} 的乘积在 $n \leq 200$ 时均近似不变, 大致为 $O(1)$; $k = 4$ 时, 在 $n \leq 60$ 时, 误差与 n^{2k} 的乘积近似不变, 保持在 $O(1)$, 因此验证了 Romberg 求积方法收敛阶 $O(h^{2k})$. 其在后面的波动原因与上一条类似;
- 从上述数值积分的计算可以看出, 复合积分并非取的区间长度越短越好, 取的足够小后, 舍入误差的影响可能导致其收敛效果不会按照其理论上的收敛阶收敛, 精度不会有明显的改善;
- 自适应方法在不同误差阈值下, 在不是很特殊的情况下, 其真实计算误差均略小于给定阈值, 验证了近似误差的合理性, 同时也说明该自适应方法没有为达到误差要求而过多加细, 因此不会因此进行过多不必要的区间加细, 能够有较好的计算效率.