

数值分析 上机作业 4

李佳 2100010793

(选择问题 A)

1 问题描述

求解 Lorentz 系统并分析其行为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases}$$

- (1) 对取定的参数值 $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$, 选取不同的初值, 观察计算结果的特点: 解的曲线是否有界, 是不是周期的或者趋于某个固定的点?
- (2) 在问题允许的范围内适当改变参数值, 再选取初值, 观察并记录计算结果的特点. 是否发现什么不同的现象?

2 算法描述

2.1 Runge-Kutta 方法

Runge-Kutta 方法希望通过使用函数在某些点处的值, 间接地利用 Taylor 展开式来构造常微分方程数值解的高阶格式: 具体来说, 对方程 $y' = f(t, y)$, 希望用函数 f 在 m 个点处的值的线性组合代替 y 的导数, 并且使组合得到的高阶项系数与 Taylor 展式中的系数匹配. 一般的 Runge-Kutta 格式如下:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^m b_j K_j \\ K_i = f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^m a_{ij} K_j), i = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

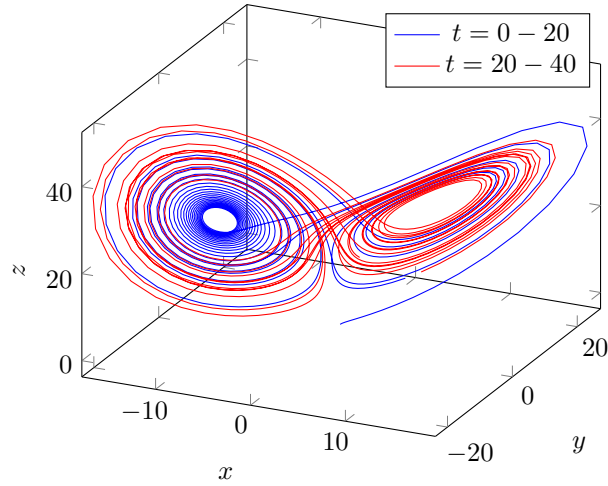


Figure 1: $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$, 初值为 $(1, 1, 1)$, $t = 0 - 40$ 的数值解曲线

本题使用四级四阶的古典显式 Runge-Kutta 公式:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(t_n, y_n) \\ K_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_1) \\ K_3 = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_2) \\ K_4 = f(t_n + h, y_n + hK_3) \end{cases}$$

3 计算结果

(1) 参数 $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$, 初值为 $(1, 1, 1)$, 取时间间隔为 0.02, 用四级四阶显式古典 Runge-Kutta 公式, 得到时间从 0-40 的数值解曲线如图所示, 分量 x 随时间变换的情况如图 1,2 所示.

取初值为 $(15, -15, 0)$ 时, 得到类似的数据如图 3,4.

(2)

- (i). 改变参数为 $\sigma = 11, \rho = 29, \beta = 16/7$, 初值 $(1, 1, 1)$, 得到数据如图 5,6.
- (ii). 改变参数为 $\sigma = 5, \rho = 21, \beta = 8/3$, 初值 $(1, 1, 1)$, 得到数据如图 7,8.
- (iii). 改变参数为 $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 16/3$, 初值 $(1, 1, 1)$, 得到数据如图 9,10.

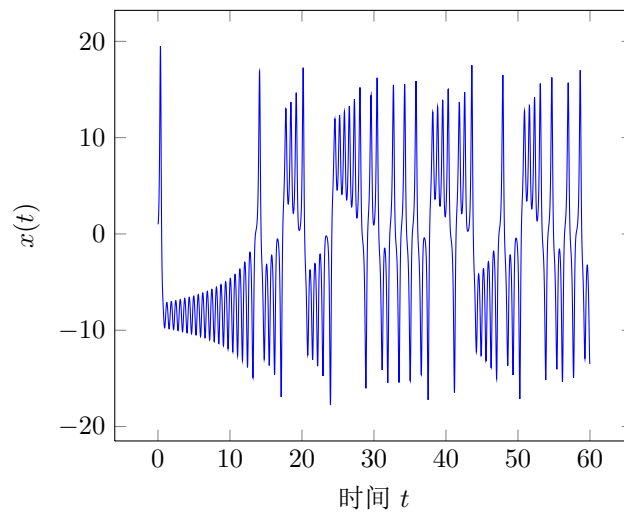


Figure 2: $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$, 初值为 $(1, 1, 1)$, $t = 0 - 60$ 时 $x(t)$ 随 t 变化图

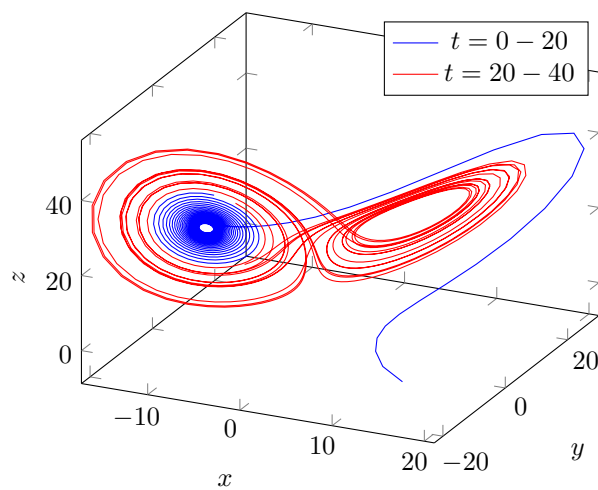


Figure 3: $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$, 初值为 $(15, -15, 0)$, $t = 0 - 40$ 的数值解曲线

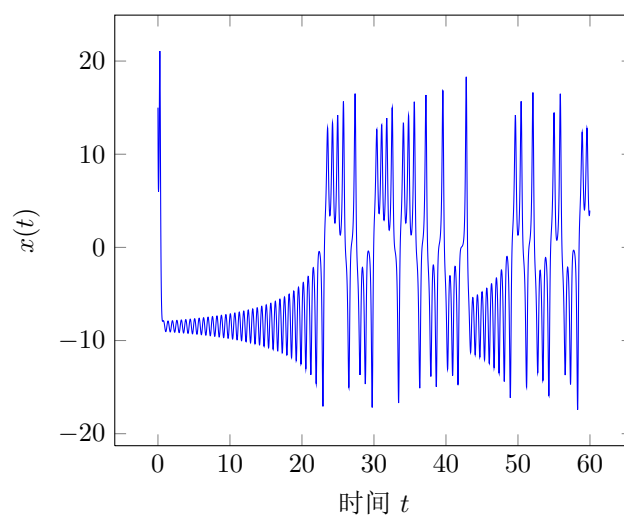


Figure 4: $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$, 初值为 $(15, -15, 0)$, $t = 0 - 60$ 时 $x(t)$ 随 t 变化图

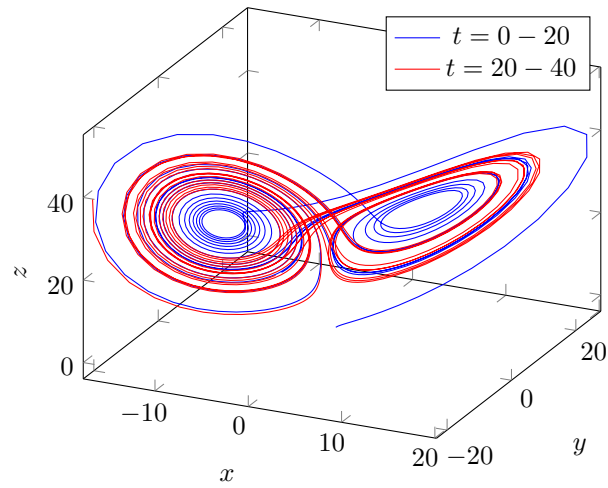


Figure 5: $\sigma = 11, \rho = 29, \beta = 16/7$, 初值为 $(1, 1, 1)$, $t = 0 - 40$ 的数值解曲线

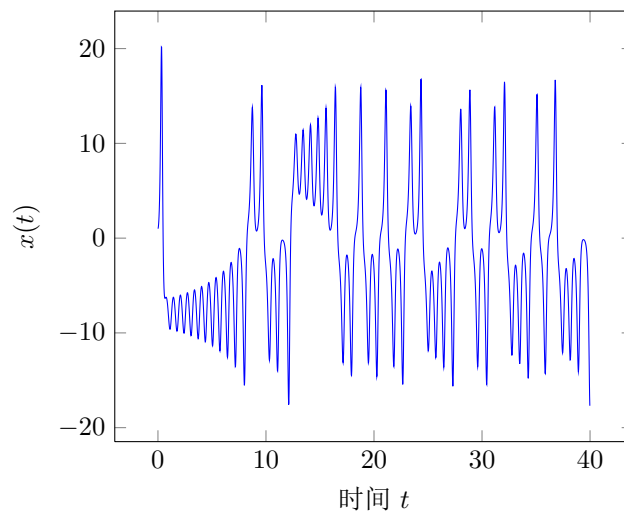


Figure 6: $\sigma = 11, \rho = 29, \beta = 16/7$, 初值为 $(1, 1, 1)$, $t = 0 - 40$ 时 $x(t)$ 随 t 变化图

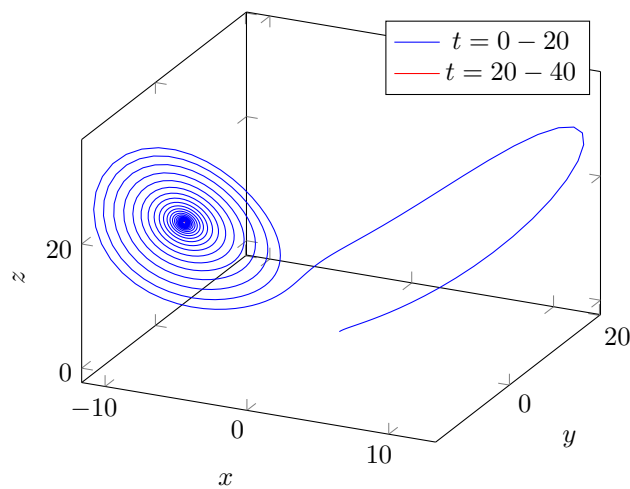


Figure 7: $\sigma = 5, \rho = 21, \beta = 8/3$, 初值为 $(1, 1, 1)$, $t = 0 - 40$ 的数值解曲线

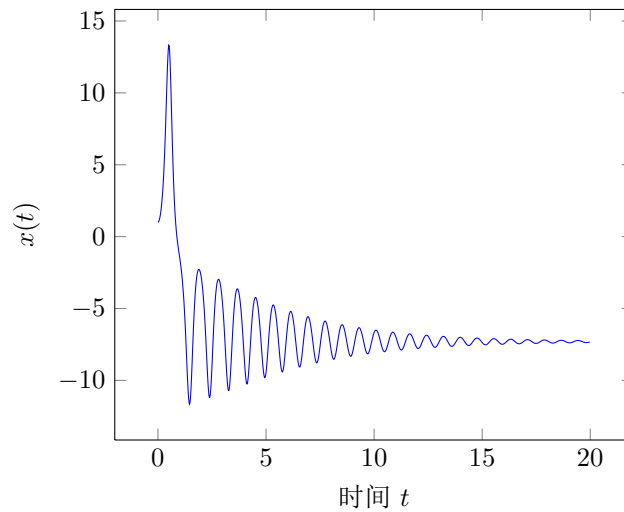


Figure 8: $\sigma = 5, \rho = 21, \beta = 8/3$, 初值为 $(1, 1, 1)$, $t = 0 - 20$ 时 $x(t)$ 随 t 变化图

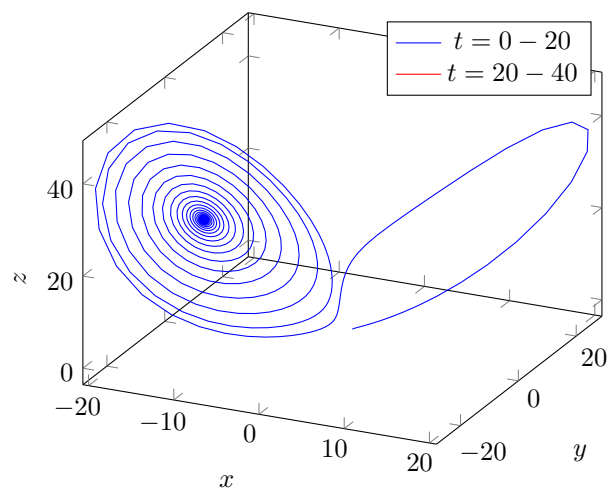


Figure 9: $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 16/3$, 初值为 $(1, 1, 1)$, $t = 0 - 40$ 的数值解曲线

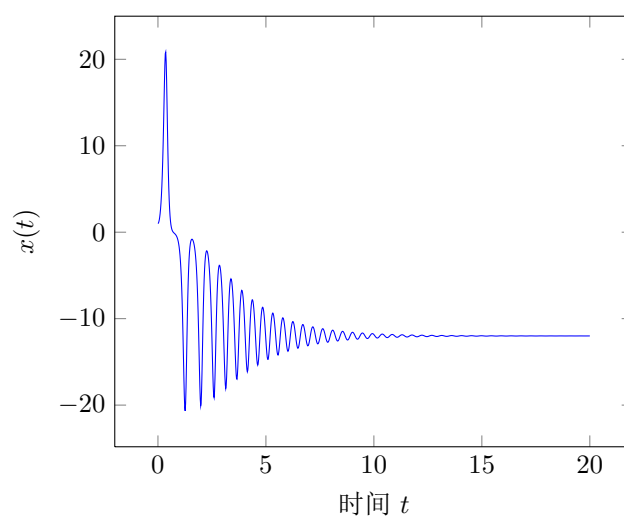


Figure 10: $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 16/3$, 初值为 $(1, 1, 1)$, $t = 0 - 20$ 时 $x(t)$ 随 t 变化图

4 简明分析

(1) 取定的参数值 $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$ 下, 取不同的初值得到数值解曲线与分量 x 的变化情况, 可知:

- 选取初值为 0 时, 解始终在原点处;
- 当选取初值非 0 时, 数值检验发现大多情况下: 解的曲线有界, 但不是周期的, 也不趋向于某个固定的点;
- 选取不同的非 0 初值, 大多情况下, 解曲线最终均会到达两个类似圆环的区域上, 在圆环区域上旋转, 并且由 x 分量长时间的变化图可看出, 解曲线总会在两个区域上来回跳跃, 表现出混沌性质.

(2) 改变参数后, 由得到的数值解曲线与分量 x 的变化情况可知:

- 当参数与 $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$ 相差不大时 ($\sigma = 11, \rho = 29, \beta = 16/7$), 初值取 $(1, 1, 1)$, 解曲线依然有着与 (1) 中解曲线类似的性质, 依然表现出混沌性质;
- 当参数改变较大时 ($\sigma = 5, \rho = 21, \beta = 8/3$ 或 $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 16/3$), 取初值 $(1, 1, 1)$, 解曲线仍然有界、不是周期的, 但趋向于某个非 0 的点, 不再表现出在两个区域来回变动的混沌性质.