偏微分方程数值解　第二次上机报告

李佳 2100010793

1　问题描述

考虑两点边值问题

$$-u''(x) = f(x), x \in (0,1), u(0) = 0, u(1) = 1,$$

其中 f 由真解 $u = (1 - e^{-x/\varepsilon})/(1 - e^{-1/\varepsilon})$ 确定, $\varepsilon > 0$.

尝试用非均匀网格上的有限差分格式对不同的 ε 数值求解上述问题, 尝试理解对一些问题使用非均匀网格的必要性.

2　数值方法及分析

2.1　非均匀网格的构造

由真解 u 的表达式可绘图得到其图像如下图所示:

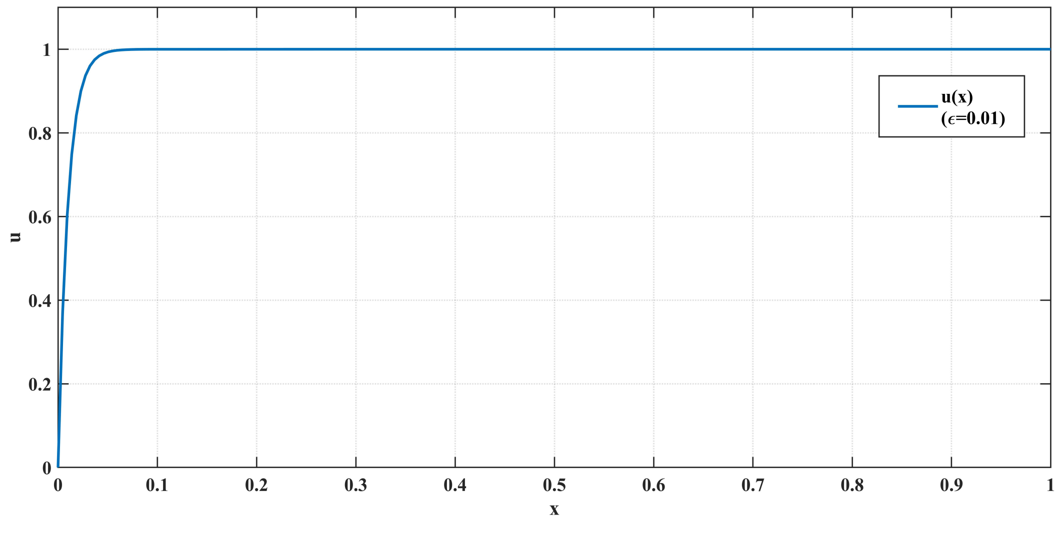

Figure 1: the plot of $u(x)$ when $\varepsilon = 0.01$

容易看出, 对较小的 ε, 其在远离原点的地方取值几乎等于 1, 导数值几乎为 0, 而在靠近原点处增长极快, 原点处形成一个边界层. 因此直观上看, 我们只需对靠近原点处加细网格即可. 我们考虑设一个分界点 bd, 对 $(0, bd)$ 和 $(bd, 1)$ 分别进行均匀剖分. 设左

侧节点为 $0 = x_0 < x_1 < ... < x_M = bd$, 右侧节点为 $bd = x_M < x_{M+1} < ... < x_{M+N} = 1$, 其中对 $i \le M$, $x_i - x_{i-1} = h_M := bd/M$, 对 $i > M$, $x_i - x_{i-1} = h_N := (1-bd)/N$.

为更好地确定分界点 bd, 作以下计算:

$$u'(x) = \frac{e^{-x/\varepsilon}}{\varepsilon(1-e^{-1/\varepsilon})},$$

$$f(x) = -u''(x) = \frac{e^{-x/\varepsilon}}{\varepsilon^2(1-e^{-1/\varepsilon})},$$

$$u^{(4)}(x) = \frac{e^{-x/\varepsilon}}{\varepsilon^4(1-e^{-1/\varepsilon})}.$$

可知,

$$u'(x) \sim O(1) \Leftarrow x \ge \varepsilon \log(1/\varepsilon),$$

$$f(x) \sim O(1) \Leftarrow x \ge 2\varepsilon \log(1/\varepsilon),$$

$$u^{(4)}(x) \sim O(1) \Leftarrow x \ge 4\varepsilon \log(1/\varepsilon).$$

注意到在二维 Poisson 方程五点差分格式中, 误差为 $O(h^2)$, 其中的系数是真解的 4 阶导数. 类似地, 对两点边值问题, 若使用均匀网格, 误差应为 $\|e_h\| \le \|u^{(4)}\|_\infty h^2$. 因此边界点可以考虑定在 $4\varepsilon\log(1/\varepsilon)$ 处, 使得 $(bd, 1)$ 上 $u^{(4)} \sim O(1)$, 可以进行一般尺度的均匀网格划分, 而 $(0, bd)$ 上使用加细的网格划分. 在上机计算中, 也试验了以 $\varepsilon\log(1/\varepsilon), 2\varepsilon\log(1/\varepsilon)$ 为边界点的情形.

2.2 有限差分格式的构造

将原问题写为 $-\mathcal{L}u = f$, 记真解为 u, 数值解为 U. 对 $i \ne 0, M, M+N$, 该点处在均匀网格内部, 可以用一般的二阶中心差商逼近二阶导数, 局部截断误差为 $O(h^2)$:

$$\mathcal{L}_h U_i = \begin{cases} \dfrac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h_M^2}, 1 \le i < M; \\ \dfrac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h_N^2}, M < i < M+N, \end{cases}$$

差分格式为 $-\mathcal{L}_h U_i = f_i := f(x_i)$.

对 $i = M$, 此处 $x_M - x_{M-1} \ne x_{M+1} - x_M$, 用 3 点的离散:

$$\mathcal{L}_h U_M = \frac{2}{h_M + h_N}\left(-\frac{u_M - u_{M-1}}{h_M} + \frac{u_{M+1} - u_M}{h_N}\right)$$

其局部截断误差计算可知为:

$$\mathcal{L}_h u_M + f_M = u^{(3)}(x_M)\frac{h_N - h_M}{3} + O(h_M^2 + h_N^2) = -f'(x_M)\frac{h_N - h_M}{3} + O(h_M^2 + h_N^2),$$

故考虑定义差分格式为

$$-\mathcal{L}_h U_M = f_M + f'_M \frac{h_N - h_M}{3},$$

则此时的局部截断误差为 $O(h^2)$.

对 $i = 0, M+N$, 由 Dirichlet 边界条件得 $U_0 = 0, U_{M+N} = 1$.

如此得到的差分格式显然满足最大值原理, 与二维 Poisson 方程完全类似的分析可得该格式也是二阶的.

2.3 具体实现中矩阵的对称化

直接由差分格式得到的线性方程组系数矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix}
2/h_M^2 & -1/h_M^2 & & & & & & \\
-1/h_M^2 & 2/h_M^2 & -1/h_M^2 & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & -1/h_M^2 & 2/h_M^2 & -1/h_M^2 & & & & \\
 & & -2/(h_M+h_N)h_M & 2/h_M h_N & -2/h_N(h_M+h_N) & & & \\
 & & & -1/h_N^2 & 2/h_N^2 & -1/h_N^2 & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & -1/h_N^2 & 2/h_N^2
\end{pmatrix},$$

这并不是对称的矩阵, 无法应用共轭梯度法等算法快速求解. 因此考虑将该线性系统对称化, 将第 M 行乘以 $(h_M+h_N)/2h_M$, 第 $M+1 \sim M+N-1$ 行乘以 h_N/h_M, 可得:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix}
2/h_M^2 & -1/h_M^2 & & & & & & \\
-1/h_M^2 & 2/h_M^2 & -1/h_M^2 & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & -1/h_M^2 & 2/h_M^2 & -1/h_M^2 & & & & \\
 & & -1/h_M^2 & (h_M+h_N)/h_M^2 h_N & -1/h_M h_N & & & \\
 & & & -1/h_M h_N & 2/h_M h_N & -1/h_M h_N & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & -1/h_M h_N & 2/h_M h_N
\end{pmatrix},$$

又由于矩阵严格对角占优且对角元均为正数, 可知这是对称正定的.

对应的右端项为

$$\tilde{F} = [f_1, ..., f_{M-1}, \frac{h_M + h_N}{2h_M}(f_M + \frac{h_N - h_M}{3} f'_M), \frac{h_M}{h_N} f_{M+1}, ..., \frac{h_M}{h_N} f_{M+N-1}]^T$$

3 计算结果及相应分析

使用共轭梯度法求解对称正定线性系统 $\tilde{A}U = \tilde{F}$, 设置停机条件为残量 $\|\tilde{F} - \tilde{A}U\|_\infty < 10^{-4}$.

(1) 首先对均匀网格的情形计算, 设网格 n 等分, 观察 L^∞ 误差 (后面的误差均指 L^∞ 误差) 随网格加细及 ε 的变化, 如下表所示:

	$n=10$	$n=20$	$n=40$	$n=80$
$\varepsilon=0.1$	5.273 e-02	1.374 e-02	3.477 e-03	8.713 e-04
$\varepsilon=0.01$	8.959 e-01	7.822 e-01	3.689 e-01	1.138 e-01
$\varepsilon=0.001$	0.9000	0.9500	0.9750	0.9869

Table 1: 均匀网格 n 等分, 取不同的 ε, n 时数值解的 L^∞ 误差

由此可看出:

- 固定网格时, 减小 ε 会使误差增大;
- 对较大的 $\varepsilon(=0.1)$, 加细网格可以减小误差, 且收敛阶大致为 $O(h^2)$; 但对较小的 ε 以及不充分大的 n, 加细网格对误差的减小速度可能达不到 $O(h^2)$ 一般有的速度, 甚至可能会使误差增大 ($\varepsilon = 0.001$).

由上述结果分析可知, 均匀网格在这类问题下的表现较差, 在网格尺度与 ε 不匹配时会产生较大的数值振荡. 因此有必要使用非均匀网格求解.

(2) 对非均匀网格的情形计算. 首先固定网格点总数不变, 对边界点 $bd = \varepsilon\log(1/\varepsilon), 2\varepsilon\log(1/\varepsilon)$, $4\varepsilon\log(1/\varepsilon)$ 的情形计算, 观察误差随 bd 与 ε 的选取的变化, 如下表所示:

	Uniform mesh, $n=25$	$bd=\varepsilon\log(1/\varepsilon)$ $M=20, N=5$	$bd=2\varepsilon\log(1/\varepsilon)$ $M=20, N=5$	$bd=4\varepsilon\log(1/\varepsilon)$ $M=20, N=5$
$\varepsilon=0.1$	8.8534 e-3	7.9752 e-2	8.6032 e-3	1.1711 e-2
$\varepsilon=0.01$	0.65533	0.020786	0.015755	0.063992
$\varepsilon=0.001$	0.9600	0.14105	0.038241	0.14381

Table 2: 取不同 ε 时, 均匀网格与不同的非均匀网格下数值解的 L^∞ 误差

由计算结果可知,

- 网格点总数相同时, 在 ε 较大时, 均匀网格与非均匀网格误差相差不大; 但 ε 较小时, 非均匀网格的数值解误差远小于均匀网格;
- 网格点总数相同时, $bd = 2\varepsilon\log(1/\varepsilon)$ 的网格在不同的 ε 下均得到了最小的误差.

我们还希望探索误差随 $M((0, bd)$ 的网格划分个数) 与 $N((bd, 1)$ 的网格划分个数) 的变化情况, 计算了固定 N(固定 M) 时, 误差随 M(随 N) 及 ε 的变化情况, 如下表所示:

	$M=10,N=5$	$M=20,N=5$	$M=40,N=5$	$M=80,N=5$
$\varepsilon=0.1$	1.339 e-2	8.603 e-3	8.887 e-3	9.571 e-3
$\varepsilon=0.01$	6.203 e-2	1.576 e-2	3.969 e-3	1.203 e-3
$\varepsilon=0.001$	1.432 e-1	3.824 e-2	9.670 e-3	2.402 e-3

Table 3: 取不同 ε, M 时, $bd=2\varepsilon\log(1/\varepsilon)$ 的非均匀网格下数值解的 L^∞ 误差

	$M=20,N=2$	$M=20,N=4$	$M=20,N=8$	$M=20,N=16$
$\varepsilon=0.1$	1.290 e-02	9.932 e-03	6.029 e-03	3.501 e-03
$\varepsilon=0.01$	1.444 e-02	1.552 e-02	1.615 e-02	1.649 e-02
$\varepsilon=0.001$	3.785 e-02	3.817 e-02	3.835 e-02	3.844 e-02

Table 4: 取不同 ε, N 时, $bd=2\varepsilon\log(1/\varepsilon)$ 的非均匀网格下数值解的 L^∞ 误差

由两表可知:

- 对较大的 $\varepsilon(=0.1)$, 仅增加 M 对误差的减少作用不大, 说明此时的边界层附近已经计算地较好了, 主要的误差在边界层外;
- 对较小的 ε, 增加 M 显著地减少了误差, 且几乎是按照 $O(h^2)$ 的速度减少, 说明此时主要的误差都在边界层附近;
- 对较大的 $\varepsilon(=0.1)$, 仅增加 N 可以减少误差, 这也验证了主要的误差在边界层外;
- 对较小的 ε, 增加 N 不能显著减少误差这也验证了此时主要的误差都在边界层附近.