高数 C (上) 作业问题汇总

王老师助教组

25-26 秋

第一次作业

第一讲: 函数

P10. 7. *注意复合函数的定义域:* $e^{\ln x} = x$, $\mathbf{x > 0}$.

第二讲: 数列极限

P41. 6. 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

典型错误:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = \lim_{n\to\infty} \sin n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$\sin n$ 极限不存在!

P41. 14,15. *"反过去是否成立?":*

证明命题"$A \Rightarrow B$" 不成立, 不能用" 由 A 推 B 推不过去" 证明不成立. 证明命题不成立只需要举出反例: A 成立而 B 不成立.

P41. 16. 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, 则 $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |A|$.

法一: 三角不等式

$$||x_n| - |A|| \leq |x_n - A|.$$

法二: 分情况讨论: $A > 0, A < 0, A = 0$.

(1) $A > 0$**:** 由 14 题知存在 N, 当 $n > N$ 时, $x_n > 0$, 即 $x_n = |x_n|$. 故 $||x_n| - |A|| = |x_n - A|$.

(2) $A = 0$**:** 只需证明 $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$. 由 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ 的定义立刻推出.

(3) $A < 0$**:** 与 $A > 0$ 的情形同理.

P57. 18.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 1.$$

典型错误 1:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0.$$

典型错误 2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = 1.$$

n 项求和的极限不等于各项极限之和 $^{(1)}$, 也不等于与各项相差无穷小量的项的和的极限 $^{(2)}$, 因为项数 n 也趋向于无穷, 每一项的误差累积起来就不一定趋向于 0.

反例 (1):

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \neq \sum_{k=1}^{n} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

反例 (2):

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \neq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln 2.$$

反例 (3): 令 $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}$, $y_n = \sum_{k=1}^{n} b_{n,k}$, 即使 $\lim_{n\to\infty} \sup_{1\le k\le n} |\frac{b_{n,k}}{a_{n,k}} - 1| = 0$ 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 存在, 也不一定有 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

令

$$a_{n,k} = \begin{cases} (-1)^k, & 1 \le k \le n-1, \\ 1, & k = n\text{偶数}, \\ 0, & k = n\text{奇数}, \end{cases}$$

令

$$b_{n,k} = a_{n,k} + \frac{1}{n}|a_{n,k}|.$$

则 $x_n = 1$, $y_n = x_n + \frac{1}{n} \cdot 2[n/2], \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 2$.

正确解法 1: 夹逼定理:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le x_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

正确解法 2: 估计误差累计:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{n\sqrt{n^2+n}(\sqrt{n^2+n}+n)} \le \frac{1}{2n^2}.$$

$$\Rightarrow |1 - x_n| \le n \cdot \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n} \to 0.$$

第二次作业

补充作业（数列极限）

3. 已知 $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, 求证 $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})$.

证明. 由二项式定理:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}.$$

对于 $k \geq 2$,

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leq 1.$$

因此,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

另一方面，给定 m, 对 $n \geq m$ 有

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\ &\geq \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).\end{aligned} \tag{1}$$

对 $k \leq m$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = 1.$$

所以给定 m, 对 (1) 式两边关于 n 取极限可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}.$$

即 $e \geq \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}$ 对任意 m 成立。

所以对任意正整数 n 有

$$(1+\frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq e,$$

由夹逼定理即得

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})$$

$\square$

4. 证明极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n)$ 不存在。

错误表述 1: n 为偶数时 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n)=-\frac{1}{2}$, n 为奇数时 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n)=\frac{1}{2}$，故极限不存在。

错误原因: 对数列 $\{x_n\}$, 使用符号 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 即意为在整个正整数集上取极限，所以上述两式的左边极限均不存在，自然无法计算。

错误表述 2: n 为偶数时原式 $=-\frac{1}{2}$, n 为奇数时原式 $=\frac{n+1}{2n}\to\frac{1}{2}$, 故极限不存在。

错误原因: "原式"指代不够明确，且表述不够清晰。

正确表述: 记 $x_n=\frac{1}{n}(1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n)$, 则有

$$\lim_{k\to\infty}x_{2k}=-\frac{1}{2},$$

$$\lim_{k\to\infty}x_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k}{2(2k-1)}=\frac{1}{2},$$

故该数列有两个子列极限不同，因而极限不存在。

第三讲: 函数极限

P42. 22. 设 $\lim_{x\to a}f(x)=A$, 当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时 $(\delta>0)$, $f(x)<0$, 证明 $A\le 0$。

错误表述 1: 反证法，假设 $A>0$，取 $\varepsilon=\frac{A}{2}>0$。
当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\frac{A}{2}.$$

即

$$\frac{A}{2}<f(x)<\frac{3A}{2}.$$

与 $f(x)<0$ 矛盾。
因此假设不成立，故 $A\leq 0$。
错误原因: 对极限定义理解不清晰，$\epsilon-\delta$ 语言选定的 δ 未必是题目中给定的 δ。

错误表述 2: 由 $\lim_{x\to a}f(x)=A$, 知

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_0>0,\ \forall\ 0<|x-a|<\delta_0,\ |f(x)-A|<\varepsilon,$$

$$\Rightarrow f(x)-\varepsilon<A<f(x)+\varepsilon. \tag{2}$$

取 $\varepsilon=-f(x)>0$, 则推出 $A<0$.
错误原因: 逻辑不清. 如果 ε 事先确定, 那么不能在后面另取. 若先取定 x 再根据此取 ε, 注意到 ε 决定 δ_0, δ_0 决定不等式(2)成立的范围. 事先确定的 x 不一定包含在 δ_0-去心邻域内.

正确解法 1: 反证法，假设 $A>0$，取 $\varepsilon=\frac{A}{2}>0$, 由极限定义，存在 $\delta_0>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta_0$ 时，有

$$|f(x)-A|<\frac{A}{2}.$$

即

$$\frac{A}{2}<f(x)<\frac{3A}{2}.$$

取 $\delta'=\min\{\delta_0,\delta\}$，则当 $x\in(a-\delta',a+\delta')\setminus\{a\}$ 时，一方面由题设 $f(x)<0$，另一方面由极限定义 $f(x)>\frac{A}{2}>0$，矛盾。
因此假设不成立，故 $A\leq 0$。

正确解法 2: 由极限定义，任意给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_0>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta_0$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

即

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

取 $\delta'=\min\{\delta_0,\delta\}$, 则当 $x\in(a-\delta',a+\delta')\setminus\{a\}$ 时, 由题设可得 $A-\varepsilon<f(x)<0$。
故 $A<\varepsilon$。由 ε 的任意性可得 $A\leq 0$。

第三次作业

第四讲：函数极限 II

P57. 28. 求 $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$.

不需要用洛必达法则. 考虑变量代换 $t=1-x$, 则有

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{t\to 0}t\tan\frac{\pi(1-t)}{2}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan\frac{\pi}{2}t},$$

用等价无穷小的结果即可.

$\star$ **无穷小量的理解.**

1. **小 o 符号的含义**: $x\to 0$ 时, $f(x)=o(x)\Leftrightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0}$.

   $\Rightarrow$ 把 $o(x)$ 当成一个满足特定性质的函数, 其性质是 $\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0$.

   例 1: $\sin x=x+o(x)$ 的含义是: $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x}=0}$.

   例 2: $\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=1+\frac{1}{2}(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})+o(\frac{1}{x})$

   证明. 由 $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+o(x)$ $(x\to 0)$ 可知:

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=1+\frac{1}{2}(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})+o(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}),$$

   因此只需证 $o(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})=o(\frac{1}{x})$.

   只需检验:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{o(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x}}=0.$$

   由小 o 符号的含义: $\lim_{x\to\infty}\frac{o(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}{\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$, 可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{o(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{o(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}{\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=0.$$

□

2. **等价无穷小的含义**: $x \to 0$ 时, $f(x) \sim x \Leftrightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1}$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-x}{x} = 0} \Leftrightarrow f(x) - x = o(x)$.

$\Rightarrow$ 等价无穷小的关系都可以用小 o 符号来表达.

<u>小 o 符号的好处</u>: 给出的关系都是等式, **等式永远可以代换**! 但等价无穷小不一定可以代换.

3. 计算极限时, 能不能用等价无穷小量**代换**?

$x \to 0$ 时, $f(x) \sim x$, 将 $f(x)$ 换成 x, 误差是 $o(x)$, 能否用等价无穷小代换, 取决于**这部分误差在代入式子之后的影响是否为 0**.

<u>可以代换的例子</u>:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^3+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2+x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}+o(1)}{1+x} = \frac{1}{2},$$

其中用到了 $o(x^2)/x^2 = o(1)$ (用定义验证).

<u>不能代换的例子</u>:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} - \frac{2}{(1+t)^2-1} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} - \frac{2}{2t+o(t)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1+o(1)-1}{t+o(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{o(1)}{t+o(t)} = ??\end{aligned}$$

在用代换 $(1+t)^2 - 1 \sim 2t$ 的情况下, 误差 $o(t)$ 代入式子后无法得出明确的极限, 误差的影响不是 0.

本题正确的极限为 1/2, 但做代换之后的结果为 0. 上面的推导解释了这一原因.

本质上, 这一代换的精度过低, 误差过大, 造成了极限结果的错误.

P68. 11. 求 $\lim_{x\to\infty} \sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}$.

错误解法:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x} &= \lim_{x\to\infty} 2\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} 2\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right) \lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)\end{aligned}$$

错误原因: 标红的极限不存在。对极限做四则运算时务必保证所有式子中所有极限都存在。

正确解法:

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\cos(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2})\sin(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}).$$

注意到 $\cos(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2})\in[-1,1]$ 有界, 且

$$\lim_{x\to\infty}2\sin(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2})=\lim_{x\to\infty}2\sin(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})})=0,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=0.$$

第四次作业

本次作业的主题是求导运算，主要的方法是四则运算、复合函数求导法则、隐函数求导法、取“对数”求导法。本次作业整体完成情况不错，但还是有几点需要指出：

1. 对 $y = f(u(x))$ 使用复合函数求导法则 $y'(x) = f'(u(x))u'(x)$ 时, 需要注意右侧第一部分中代入的是 $u(x)$ 而不是 x。对于类似于 $y = f(u(\phi(x)))$ 的多重复合函数求导时，需要多次使用复合函数求导法则，不要漏了步骤。

2. 对于 94 页常见函数的求导公式需要熟记，可以简便计算、节省时间。

P88. 24. 求 $y = \dfrac{1}{2a}\ln|\dfrac{x-a}{x+a}| \quad (a > 0)$ 的导数

简单解法: 很多同学采取的分类处理不是最佳的方法，也反映了大家对

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0$$

这样一个常见的求导公式不够熟悉。令 $f = \frac{1}{2a}\ln|u|$，中间变量 $u = \frac{x-a}{x+a}$，利用上述公式和复合函数的求导法则有：

$$y' = \frac{1}{2a}\frac{x+a}{x-a}(\frac{x-a}{x+a})' = \frac{1}{2a}\frac{x+a}{x-a}\frac{2a}{(x+a)^2} = \frac{1}{x^2-a^2}$$

P98. 17. 求 $y = x^{e^x}$ 的导数.

错误解法:

$$y' = e^x x^{e^x-1} \cdot e^x = e^{2x}x^{e^x-1}.$$

错误原因: 将复合函数当作幂函数 x^a 与 e^x 的复合. 但实际上, 幂函数中的 a 为固定常数.

正确解法: $y = e^{e^x \ln x}$ 为 e^x 与 $e^x \ln x$ 的复合, 从而

$$y' = e^{e^x \ln x} \cdot (e^x \ln x + e^x \frac{1}{x}) = x^{e^x} e^x (\ln x + \frac{1}{x}).$$

⋆ **左右导数和导函数的左右极限的区别**

- 右导数 $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$;

  导函数的右极限 $f'(x_0+) = \lim_{x\to x_0+} f'(x)$

- 右导数存在时, 导函数的右极限不一定存在:

  例子:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

$\Rightarrow$ 导函数在 $x = 0$ 处右极限 $\lim_{x\to 0+} f'(x)$ 不存在! 但

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0+} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

第五次作业

P111. 34. 求如下参数方程的一阶导和二阶导:

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$$

错误解法 1: 求一阶导是没有问题的:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3\sin^2(t)\cos(t)}{-3\cos^2(t)\sin(t)} = -\tan(t)$$

二阶导有的同学给出的是下面的结果:

$$y''(x) = \frac{dy'(x)}{dt} = (-\tan(t))' = -\sec^2(t)$$

错误原因: 求二阶导仍然是 $y'(x)$ 作为 x 的函数关于 x 继续求导，上面的解法实际上是将 $y'(x)$ 当作 t 的函数 $y'(x(t))$，然后再关于 t 求导，自然导致了错误。

正确解法: 注意到此时仍然是一个参数方程求导的问题:

$$\begin{cases} x = x(t) = \cos^3(t) \\ y'(x) = y'(x(t)) = -\tan(t) \end{cases}$$

因此我们有:

$$y''(x) = \frac{(-\tan(t))'}{(\cos^3(t))'} = \frac{1}{3\cos^4(t)\sin(t)}$$

错误解法 2: 因为 $d^2y = y''(t)\,dt^2$, $dt = \dfrac{1}{x'(t)}\,dx$, 所以

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)}{x'(t)^2} = \frac{6\sin t\cos^2 t - 3\sin^3 t}{9\cos^4 t\sin^2 t} = \frac{2\cos^2 t - \sin^2 t}{3\cos^4 t\sin t}$$

错误原因: 错误使用了记号, 将符号 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 理解为了" d^2y " 与" dx^2 " 的商. 事实上, 对二阶导及高阶导数记号, 这个符号不可以看作" 商", 原因是" d^2y " 是不良定义的:
设 $y = f(u), u = g(x)$, 假设可以良定义 d^2y, 即

$$d^2y = f''(u)du^2, \quad d^2y = [f(g(x))]''dx^2.$$

由于

$$du = g'(x)dx,$$

于是

$$d^2y = f''(g(x))g'^2(x)dx^2.$$

然而, 由复合函数求导法则可知:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [f'(g(x))g'(x)]' = f''(g(x))g'^2(x) + f'(g(x))g''(x),$$

矛盾!
多余的这一项体现出, **二阶微分及高阶微分不存在形式不变性** (d^2y 不是良定义的, 不能单独拿出来作为一个符号). 只有一阶微分有形式不变性, 只有 dy, dx 可以单独作为一个符号.

P111.28. 设 x 的相对误差不超过 δ, 求 x 的常用对数 $y = \lg x$ 的绝对误差的范围。

错误原因： 部分同学对相对误差和绝对误差的概念理解混淆，导致最后得到的结果与 x 相关。绝对误差是精确值与近似值的差的绝对值，而相对误差是绝对误差与近似值之比。

正确解法： 本题中，x 的相对误差为 $|\frac{\Delta x}{x}|$, 而 y 的绝对误差应为 $|\Delta y| = |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)|$, 其中 $f(x) = \lg x$。

$$|\Delta y| \approx |f'(x_0)||\Delta x| = \frac{|\Delta x|}{|\ln 10||x_0|} \approx \frac{|\Delta(x)|}{|x|}\frac{1}{\ln 10} \le \frac{\delta}{\ln 10}.$$

所以绝对误差不超过 $\frac{\delta}{\ln 10}$。

第八次作业

洛必达法则

除了下面的两个例子，25 题关于洛必达法则不能成立的主要原因是：洛必达法则成立的条件之一是分子分母同时求导后的表达式极限存在，25 题中这一极限是不存在的，所以自然无法使用。关于极限为什么不存在可以考虑利用余弦函数的周期性取两个子列，通过两个子列极限不相等来说明，振荡可以为大家提供直观，严格写出来其实就是取子列的方法，这在本讲义第二讲的习题 4 中可以看到，不是本节重点，就不具体写出来了。

P146．17.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}.$$

错误解法:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0.$$

错误原因: 等价无穷小在这里不能直接代换，参考第四次作业中"$\star$ 无穷小量的理解":

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+o(1)}{x+o(x)}-\frac{1}{x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{o(1)}{x+o(x)}=?$$

无法判断极限. 这一代换的精度过低.

正确解法 1: 用泰勒公式进行高精度代换

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x}{2}+o(x)}{x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}-\frac{1}{x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}+o(x^2)}{x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

注: 泰勒公式帮助我们对错因中出现的 $o(1)$ 进行更精细的刻画, 从而判断出极限大小，同时注意 $\frac{o(x^2)}{x}=o(x)$ 这一可由小 o 符号定义来验证的等式，这是上面第二个等号后第一项的来历。

正确解法 2: 洛必达法则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{(x+1)e^x-1}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{(x+2)e^x}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

泰勒公式

P152. 2(1). 计算 x^2e^x 在 $x=0$ 处泰勒展开.

不需要用算高阶导数就能得到. 事实上, 由 e^x 在 $x=0$ 处的泰勒展开公式:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+o(x^{n-2})$$

可得

$$x^2e^x=x^2+x^3+\frac{x^4}{2}+\cdots+\frac{x^n}{(n-2)!}+o(x^n),$$

其中最后的无穷小量用到了 $o(x^{n-2})\cdot x^2=o(x^n)$.

P152. 3(2). 计算 e^{x^2} 在 $x=0$ 处泰勒展开.

不需要用算高阶导数就能得到. 事实上, 由 e^u 在 $u=0$ 处的泰勒展开公式:

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + o(u^n)$$

令 $u = x^2$, 可得

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + o(x^{2n}).$$

注 2: 若一个函数是简单函数的四则运算或复合, 可以通过上述方法先求出其泰勒公式, 从而简单地得到在泰勒展开处的高阶导数值, 而不需要先算出高阶导函数.

P152. 5.

在 $x = 3$ 处泰勒展开的 peano 余项为 $o((x-3)^2)$ 而非 $o(x^2)$, 应注意小 o 符号的含义. 见"$\star$ 无穷小量的理解".

第九次作业

泰勒公式补充作业. 将 $(1+e^x)^{1/3}$ 展开至 x^3 项.

正确解法:

$$\begin{aligned}(1+u)^{1/3} &= 1+\frac{1}{3}u+\frac{(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})}{2}u^2+\frac{(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{3!}u^3+o(u^3)\\ &= 1+\frac{1}{3}u-\frac{1}{9}u^2+\frac{5}{81}u^3+o(u^3),\\ e^x &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (1+e^x)^{1/3} &= \left(2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^{1/3} = 2^{1/3}(1+u)^{1/3}\\ &= 2^{1/3}\left(1+\frac{1}{3}u-\frac{1}{9}u^2+\frac{5}{81}u^3+o(u^3)\right),\end{aligned}$$

其中 $u=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+o(x^3)$. 由于

$$\begin{aligned}u^2 &= \frac{1}{4}x^2+\boxed{\mathbf{\frac{1}{4}x^3}}+o(x^3),\\ u^3 &= \frac{1}{8}x^3+o(x^3),\\ o(u^3) &= o(x^3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (1+e^x)^{1/3} &= 2^{1/3}\Bigg(1+\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+o(x^3))-\frac{1}{9}(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x^3+o(x^3))\\ &\quad+\frac{5}{81}(\frac{1}{8}x^3+o(x^3))+o(x^3)\Bigg)\\ &= 2^{1/3}\left(1+\frac{1}{6}x+\frac{1}{18}x^2+\frac{5}{648}x^3+o(x^3)\right).\end{aligned}$$

错误 1: u^2 项做展开时, 没有写 x 与 x^2 的交叉项;
错误 2: 直接将 e^x 换元为 u 做泰勒展开. 但 $x \to 0$ 时, $e^x \not\to 0$, 此时不能用 $u = 0$ 附近的泰勒展开, 这一点非常重要, 应该牢记泰勒公式一般都是在零点展开的, 否则会做出不正确的代换, 包括之前求函数极限用到的无穷小代换.

P171. 40. 计算不定积分 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$.

参数取值.

错误例子:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} \overset{x=a\tan\theta}{=} \int \frac{\cos\theta}{a|a|\sin^2\theta}\,d\theta = -\frac{1}{a|a|\sin\theta} + C = -\frac{1}{a|a|}\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{|x|} + C.$$

错因: 最后一个等号里, θ 和 x 的变换关系没有写对.
当 $x = a\tan\theta, \theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ (第一个等号成立需要 θ 在这个范围),

$$\tan\theta = x/a, \quad \Rightarrow \cos\theta = (1+\tan^2\theta)^{-1/2} = \frac{|a|}{\sqrt{x^2+a^2}} (\text{因为} \cos\theta \geq 0),$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \cos\theta\tan\theta = \frac{|a|}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a|a|\sin\theta} + C = -\frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + C.$$

注 1: 将参数分情况讨论很好, 但写完结果后应检查一下结果是否合理.
例如本题中 a **换为** $-a$**, 结果应该不变.** 若不一样, 应检查一下是否中间哪一步做错了.
注 2: 三角函数做代换时要非常注意**取值范围**, $\sin, \cos$ 应取哪个正负号. 可以代入特殊的值来检查是否算对了.

P172. 32. 计算不定积分 $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-(u+b)^2}}$

错误解法:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-(u+b)^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{\sqrt{1-(\frac{u}{a}+\frac{b}{a})^2}} \overset{t=\frac{u}{a}+\frac{b}{a}}{=\!=} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$= \arcsin t + C = \arcsin \frac{u+b}{a} + C$$

错因: 上面的第一个等号将 a^2 从根号中分离出来时犯了错误，第一个等号后实际应该是 $\frac{1}{|a|}\int \frac{du}{\sqrt{1-(\frac{u}{a}+\frac{b}{a})^2}}$, 后面的步骤一样, 因此正确的结果应该是 $\frac{a}{|a|}\arcsin\frac{u+b}{a}+C$, 当然也可以写的更简洁也就是 $\arcsin\frac{u+b}{|a|}+C$。

注: 类似于上题的注 1，将 a 换成 $-a$ 应不改变结果，所以原函数若视为 a 的函数应该是偶函数才对，这样也能帮助大家快速发现错误。或者大家可以当 a 是正的先得到半边结果，然后再利用上面的对称性进一步得到全部的结果，会更加简洁。

⋆ 积分中的双曲代换

我们知道, 若被积函数中有形如 $\sqrt{a^2-x^2}$ 的项, 可令 $x=a\sin t$, 此时 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$ 去掉根号。但如果出现 $\sqrt{x^2\pm a^2}$ 的形式, 这时也可以考虑使用双曲代换简化问题 (相比三角函数, 其取值范围与正负号更方便确定)。

双曲函数:

$$\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

双曲代换的基础: $\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$

因此, 若出现 $\sqrt{x^2+a^2}$, 令 $x=a\sinh t$, $\Rightarrow \sqrt{x^2+a^2}=a\cosh t$.

若出现 $\sqrt{x^2-a^2}$, 令 $x=a\cosh t$, $\Rightarrow \sqrt{x^2-a^2}=a\sinh t$.

双曲函数有以下性质，与三角函数类似，但注意区别 (红色是与三角函数有差别的

地方)

$$\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$$
$$\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$$
$$\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$$
$$\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x=2\cosh^2 x-1=1+2\sinh^2 x$$
$$(\sinh x)'=\cosh x,\quad (\cosh x)'=\sinh x\quad (\text{没有负号!!!})$$
$$(\tanh x)'=\frac{1}{\cosh^2 x}=1-\tanh^2 x,\quad (\coth x)'=-\frac{1}{\sinh^2 x}$$
$$\tanh(x\pm y)=\frac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\tanh y}$$

双曲函数的万能代换: 令 $t=\tanh x$, 则

$$\sinh 2x=\frac{2t}{1-t^2},\quad \cosh 2x=\frac{1+t^2}{1-t^2},\quad \tanh 2x=\frac{2t}{1+t^2}$$

双曲函数的反函数:

$$y=\sinh x\Rightarrow x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}),\quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$
$$y=\cosh x\Rightarrow x=\ln(y+\sqrt{y^2-1}),\quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\quad (x\geq 0)$$
$$y=\tanh x\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y},\quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{1-y^2}$$

用双曲代换计算积分的例子:

例 1. $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx\ (a>0)$
解: 令 $x=a\sinh t$. 则

$$\sqrt{x^2+a^2}=\int a\cosh t\cdot a\cosh t\,dt=a^2\int\frac{1+\cosh 2t}{2}\,dt$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sinh 2t+C=\frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)+\frac{a^2}{2}\sinh t\cosh t+C$$
$$=\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+C.$$

(最后一项是由于 $\ln a$ 是常数)。
同样可得 $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+C$。
例 2. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\ (a>0)$

解: 令 $x = a\sinh t$. 则

$$\begin{aligned}\int \frac{a\cosh t\,dt}{a^3\cosh^3 t} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\cosh^2 t} \\ &= \frac{1}{a^2}\tanh t + C = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + C.\end{aligned}$$

例 3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}\ (a > 0)$
解: 令 $x = a\cosh t$. 则

$$\begin{aligned}\int \frac{a\sinh t\,dt}{a\cosh t\cdot a\sinh t} &= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{\cosh t} \\ &= \frac{1}{a}\int \frac{\cosh t\,dt}{\cosh^2 t} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\sinh t)}{1+\sinh^2 t} = \frac{1}{a}\arctan(\sinh t) + C \\ &= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) + C.\end{aligned}$$

第十次作业

1. 多项式除法

有理分式做不定积分, 要先转化为多项式 + 真分式(分子次数 < 分母次数), 然后真分式再分解为部分分式 ($\frac{C}{(x-a)^n}$, $\frac{Ax+B}{(x^2-px+q)^n}$ 的形式). 第一步得到多项式的过程需要进行**多项式带余除法**. 多项式的带余除法可以用列竖式 的方法计算, 与算术的带余除法完全类似.

例: 计算分式 $\dfrac{x^3-12x^2-42}{(x-1)^2}$ 的分解.

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & x-10 \\
x^2-2x+1 & \overline{)\, x^3-12x^2+0x-42} \\
 & \underline{x^3-\ \ 2x^2+\ \ x} \\
 & -10x^2-\ \ \ \ x-42 \\
 & \underline{-10x^2+20x-10} \\
 & -21x-32
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \frac{x^3-12x^2-42}{(x-1)^2}=(x-10)+\frac{-21x-32}{(x-1)^2}.$$

P204.4.(2). 利用定积分的几何意义，求定积分

$$\int_a^b -x\,dx \quad (0<a<b)$$

的值。

正确解法: 当 $x>0$ 时，函数 $f(x)=-x<0$，因此曲线在 x 轴下方。由定积分的几何意义，当曲线在 x 轴下方时，定积分值为该区域面积的相反数。
区间 $[a,b]$ 上曲线 $y=-x$ 与 x 轴围成的直角梯形的面积为

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot(b-a)=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

由于曲线在 x 轴下方，定积分结果为负：

$$\int_a^b(-x)\,dx=-\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{a^2-b^2}{2}.$$

错误原因：定积分的几何意义是求有符号面积：

- 当曲线在 x 轴上方时，面积为正；
- 当曲线在 x 轴下方时，面积为负；
- 定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 等于这些有符号面积的代数和。

本题中，曲线 $y=-x$ 在区间 $[a,b]$ 上始终在 x 轴下方，因此有符号面积为负值. 如果忽略曲线的位置，直接使用梯形面积公式计算得到 $\frac{b^2-a^2}{2}$（正数），就遗漏了有符号面积的符号约定，从而导致与正确答案相差一个负号。

第十二次作业

P242. 25. 求曲线 $r = a\sin^3(\theta/3)$ 的全长.

注意 $\sin(\theta/3)$ 周期为 6π 而非 2π. 且由于极坐标要求 $r \geq 0$, 因此若 $a > 0$, θ 取值范围应为$[0, 3\pi]$ (或平移 $6k\pi$), $a < 0$ 则为 $[-3\pi, 0]$ (或平移 $6k\pi$).

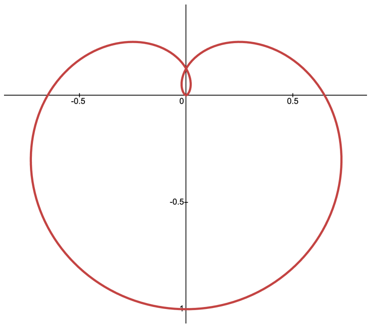

图 1: $r = \sin^3(\theta/3)$

P244. 34. 两均匀细棒分别长 l_1, l_2, 质量 m_1, m_2, 位于同一直线上, 两端点相距 a, 求两细棒之间的引力.

分析方法:

使用微元法一步步分析: 不妨以左棒左端点为原点.

第一步: 首先取左棒上的质量为 $\rho_1\,dx_1$ 的微元 (左棒密度为 ρ_1), 该微元受右棒引力 dF_1,

$$\Rightarrow F = \int dF_1.$$

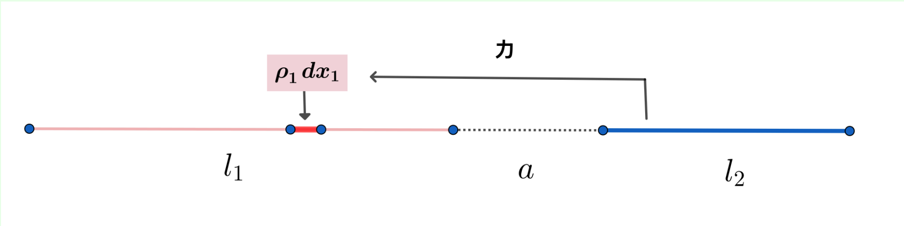

图 2: 第一步

第二步: 计算 dF_1. 取右棒质量为 $\rho_2\,dx_2$ 的微元 (右棒密度为 ρ_2), 可知左微元受右微元引力大小

$$\frac{k\rho_1\rho_2}{(x_1-x_2)^2}\,dx_1\,dx_2,$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow dF_1 &= k\rho_1\rho_2\,dx_1\cdot\int_{a+l_1}^{a+l_1+l_2}\frac{1}{(x_1-x_2)^2}\,dx_2\\ &= k\rho_1\rho_2\,dx_1\cdot\left(\frac{1}{x_1-(a+l_1+l_2)}-\frac{1}{x_1-(a+l_1)}\right).\end{aligned}$$

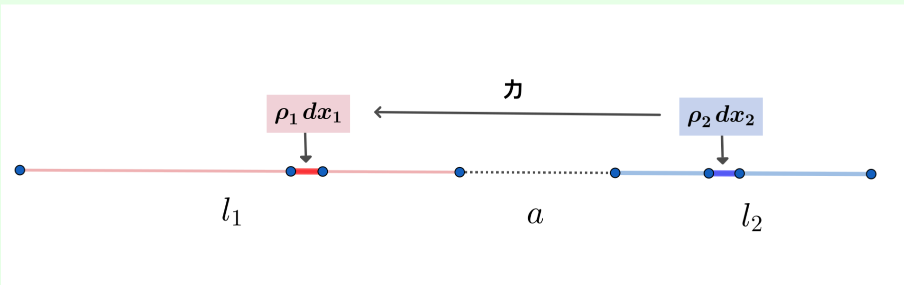

图 3: 第二步

$$\begin{aligned}\Rightarrow F &= \int_0^{l_1} k\rho_1\rho_2\cdot\left(\frac{1}{x_1-(a+l_1+l_2)}-\frac{1}{x_1-(a+l_1)}\right)dx_1\\ &= k\rho_1\rho_2\ln\frac{a(a+l_1+l_2)}{(a+l_1)(a+l_2)}\\ &= \frac{km_1m_2}{l_1l_2}\ln\frac{a(a+l_1+l_2)}{(a+l_1)(a+l_2)}.\end{aligned}$$

P244. 36. 有一半径为 r 的均匀半圆弧, 质量为 m, 求圆心处单位质点所受引力.

主要错因: 微元质量计算错误.
对角度积分, 取角度微元 $d\theta$ 时, 长度微元 $r\,d\theta$, 质量为 $\frac{m}{\pi r} r\,d\theta = \frac{m}{\pi}\,d\theta$.

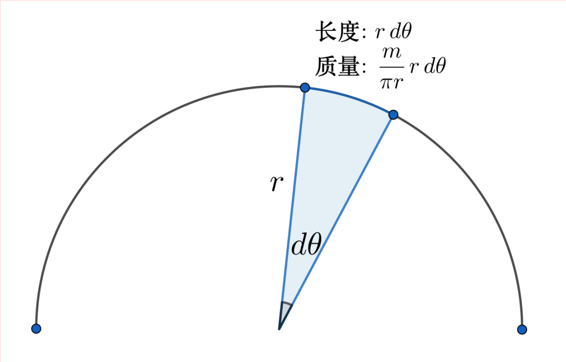

图 4: 微元信息

第十三次作业

P259. 1(1). 判断广义积分 $\int_0^{+\infty} x\,\sin x\,dx$ 敛散性.

正确解法 1: 广义积分收敛的柯西收敛准则:

$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx \ge \int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

因此广义积分 $\int_0^{+\infty} x\,\sin x\,dx$ 发散.

正确解法 2: 从定义出发. 不定积分

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x,$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} x\,\sin x\,dx = \lim_{x\to+\infty} -x\cos x + \sin x$$

取 $x_n = 2n\pi \to +\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} -x_n\cos x_n + \sin x_n = \lim_{n\to\infty} -2n\pi = -\infty,$$

取 $x_n' = 2n\pi + \pi/2 \to +\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} -x_n'\cos x_n' + \sin x_n' = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

故 $\lim_{x\to+\infty} -x\cos x + \sin x$ 不存在, 从而广义积分发散.

注: 证明极限不存在的方法是找两个 (子) 序列, 函数值趋于不同极限 (或找一个 (子) 序列, 函数值趋于无穷大). 仅从 $-x\cos x$ 和 $\sin x$ 各自的极限不存在, 来论证两者之和极限不存在是不充分的.

P258. 1(3). 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{8a^3}{x^2+4a^2}\,dx$.

易错点:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4a^2}&=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1}\quad (t=\frac{x}{2a})\\&=\frac{\pi}{4a},\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{8a^3}{x^2+4a^2}\,dx=2\pi a^2.$$

错因: $a<0$ 时, 当 $x\to+\infty$ 时, $t=\frac{x}{2a}\to-\infty$, 符号相反.

注: 从积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4a^2}$ 表达式也可看出, 当 a 换为 $-a$ 时, 该积分值应不变.

考前问题

1. 令 $F(x) = \int_0^x xe^{t^4}\,dt$, 求 $F'(x)$.

错误方法: Newton-Leibniz 法则推出

$$F'(x) = xe^{x^4}.$$

错误原因: 被积函数是与 x 是有关的. 如果将被积函数记为 $f_x(t)$ (以 x 为参数的关于 t 的函数), 则 Newton-Leibniz 法则能给出的只是:

$$\frac{d}{dy}\int_0^y f_x(t)\,dt = f_x(y)$$

即被积函数不变, 仅是关于变化的上限的导数. 原题中要求的是关于 x 的导数, x 变化时, 积分上限和被积函数同时发生变化, 因此不能直接使用.

正确方法:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x\int_0^x e^{t^4}\,dt\right) = \int_0^x e^{t^4}\,dt + x\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{t^4}\,dt\right) \quad (\text{乘法公式}) \\ &= \int_0^x e^{t^4}\,dt + xe^{x^4}. \end{aligned}$$