11. 证明 ∵ A, B 都是 n×n 对称矩阵.

∴ $a_{ij}=a_{ji}$, $b_{ij}=b_{ji}$ 当且仅当则为充要条件.

~~$AB=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{js}$ i=1,2,3,…n, s=1,2,…,n~~

~~必要性: AB 对称 则 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{js}=\sum_{j=1}^{n}a_{sj}b_{ji}$~~

~~i=1,2,3…n, s=1,2,…,n.~~

~~⇒ AB=BA.~~

~~必要性~~ 单个元素

~~充分性 对于 AB 中 m 行 n 列的一个元素.~~ 整体运算

$AB=C_{n\times n}$. ∵ $C_{mn}=\sum_{k=1}^{n}a_{mk}b_{kn}$

充分性 $AB=A^TB^T$

$BA=D_{n\times n}$ ∴ $D_{mn}=\sum_{k=1}^{n}b_{mk}a_{kn}$

$=(BA)^T$

AB 对称 即 $C_{mn}=C_{nm}$

$=(AB)^T$

$\sum_{k=1}^{n}a_{mk}b_{kn}=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}b_{km}$

当必要性.

∵ $a_{ij}=a_{ji}$, $b_{ij}=b_{ji}$

$AB=(AB)^T$

∴ $\sum_{k=1}^{n}a_{mk}\cdot b_{kn}=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}b_{km}$

$=B^TA^T=BA$.

$=\sum_{k=1}^{n}b_{mk}a_{kn}$.

∴ 可交换

⇒ $C_{mn}=D_{mn}$.

∴ AB 对称 ⇒ A, B 可交换

充分性: ∵ $\sum_{k=1}^{n}a_{mk}b_{kn}=\sum_{k=1}^{n}b_{mk}\cdot a_{kn}$

$=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}b_{km}$

$C_{mn}=C_{nm}$

2) AB 对称 证毕.

12. 设任一 n×n 矩阵为 A.

则 $B=(A+A^T)$ 为一个对称矩阵.

证: $B_{ij}=a_{ij}+a_{ji}=a_{ji}+a_{ij}=B_{ji}$

则 $C=(A-A^T)$ 为一个反对称矩阵.

证: $c_{ij}=a_{ij}-a_{ji}=-(a_{ji}-a_{ij})=-c_{ji}$

$A=\frac{B+C}{2}$ ∴ 任一 n×n 矩阵均可表为 …

14. 设 B=E. 必要性

则 A·E=A=0 $|A|=0$.

充分性: $|A|=0$

$|AB|=|0|=0$.

必要性 设 $B=(B_1,B_2,\cdots B_n)$

B_i 是 B 的第 i 列, 则 AB=0

$(AB_1,\cdots AB_n)=$

充分性

$|A|=0$. ⇒ $|A|\cdot|B|=0$.

∴ B 非零

∴ AZ=0 有非零解

∴ $B_i\neq 0$

~~无论~~ 此式恒成立

AZ=0 有非零解

无论 B 为什么, 均成立

∴ $\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}\neq 0$

∴ B≠0.

16. 1) $B=[b_1,b_2,\cdots,b_r]$ $|A|=0$

$C=\begin{bmatrix}c_{1s}\\c_{2s}\\\vdots\\c_{rs}\end{bmatrix}$ s=1,2,3,…,n

~~BC~~

$B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1r}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2r}\\\vdots&&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nr}\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\\c_{r1}&c_{r2}&\cdots&c_{rn}\end{bmatrix}$

~~$B\cdot C=\begin{bmatrix}\sum a_{1i}b_{is}\\\sum_{i=1}^{s}a_{2i}b_{is}\\\vdots\\\sum_{i=1}^{s}a_{ri}b_{rs}\end{bmatrix}=0$~~

~~∵ 秩(C)=0 不存在 $k_1c_1+k_2c_2+\cdots+k_rc_r=0$~~

~~$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$~~

转换为齐次方程组问题

BC=0

B 的列向量是 CX=0 的解

秩数为 n. 非 r

无法利用结论

(2) BC=C

(B−E)C=0 ∴ $\sum_{i=1}^{s}b_{1i}=0$ $\sum_{i=1}^{s}b_{2i}=0$

由(1) ∴ B−E=0 ∴ B=E

$B\cdot C=D$

转置

$(BC)^T=0$ $C^TB^T=0$

$D_{ij}=\sum_{r=1}^{r}b_{ir}c_{rj}=0$ $C^TX=0$ B^T 的每个列向量均为其的解

又 c_{rj} 不全为 0 则 $b_{ir}=0$. ⇒ B=0

秩数为 r.

基础解系个数为 n−r =0

即零解 ∴ B=0

2) ∵ BC=C

$d_{ij}=c_{ij}$

$\sum_{r=1}^{r}$ …

… $+b_{ii}c_{ij}=c_{ij}$

∴ $b_{ii}=1$

其他 $b_{ir}=0$ 当 r≠i ∴ B=E

7. 证：A+B可由A与B分别的极大线性无关组表示，
而A、B的极大线性无关组可能互相表示，
即 秩$(A+B)\le r(A)+r(B)$。
A+B的列向量组可由A的列向量组与B的列向量组线性表出。

8. $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$.

$AB=C$

$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=0$.

$A=\begin{bmatrix} \vec{\alpha_1} \\ \vec{\alpha_2} \\ \vdots \\ \vec{\alpha_n} \end{bmatrix}$ $B=(\vec{\beta_1},\vec{\beta_2},\cdots,\vec{\beta_n})$

$AB=\begin{bmatrix} \vec{\alpha_1}\vec{\beta_1} & \vec{\alpha_1}\vec{\beta_2} & \cdots & \vec{\alpha_1}\vec{\beta_n} \\ \vec{\alpha_2}\vec{\beta_1} & \vec{\alpha_2}\vec{\beta_2} & \cdots & \vec{\alpha_2}\vec{\beta_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{\alpha_n}\vec{\beta_1} & \vec{\alpha_n}\vec{\beta_2} & \cdots & \vec{\alpha_n}\vec{\beta_n} \end{bmatrix}$.

$\boxed{\vec{\alpha_i}\cdot\vec{\beta_j}=0}$

$AB=0$
∴B是$AX=0$的解向量
∴B可由基础解系线性表出

∴$r(B)\le n-r(A)$

$\Rightarrow r(A)+r(B)\le n$.