一 、单选题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知数列$\{x_n\}$收敛, 则可由（　　　）推出$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

A. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + x_n^2) = 0$； B. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + \sqrt{x_n^2}) = 0$；

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan x_n = 0$； D. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+x_n^2) = 0$.

2. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+b}{x\sin x} = 2$,则$a,b$的值分别为（　　　）.

A. $a=2,b=0$； B. $a=1,b=1$； C. $a=2,b=1$； D. $a=-2,b=0$.

3. 设函数$y=f(x)$由方程$y-x-\mathrm{e}^{x(1-y)}=0$所确定,则$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=$（　　　）.

A. 0； B. 1； C. -1； D. 此极限不存在.

4.设$f(x)=\dfrac{x-1}{1-e^{\frac{x-1}{x}}}$,则其间断点及类型分别为（　　　）.

A. $x=0,x=1$均为跳跃间断点；

B. $x=0$为无穷间断点,$x=1$为可去间断点；

C. $x=0$为跳跃间断点,$x=1$为可去间断点；

D. $x=0,x=1$均为可去间断点.

5.设$f(x)$有连续的二阶导数,且$f'(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)-1}{x^2}=1$，则（　　　）.

A． $f(0)$为函数的极大值； B. $f(0)$为函数的极小值；

C. $(0,f(0))$为函数曲线的拐点； D. $f(0)$不是函数的极值.

二、计算证明（共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1.计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(e^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n})^{n^2}$.

2.设函数$\begin{cases} x = t^3 + 3t \\ y = te^t \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

3.设 $f(x) = (x^2 - 4x + 3)^{2023}$,求 $f^{(2023)}(1)$.

4. 求集合$A = \left\{ a_n \middle| a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n},\ n = 1, 2, \cdots \right\}$的下确界，并用确界的定义加以证明.

5. 证明 $y = \ln x$ 在 $(0,1)$ 内不一致连续.

三、已知数列$\left\{x_n\right\}$，$0<x_1<1$，$x_{n+1}=\dfrac{4(1+x_n)}{4+x_n},\forall n\ge 1$．证明数列$\left\{x_n\right\}$收敛，并求

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$．

那

四、设$\alpha>0$，函数$f(x)$定义如下，

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

(1) 用$\varepsilon-\delta$语言证明函数$f(x)$在$x=0$处连续.

(2) 若函数$f(x)$在$x=0$处可导，求α的取值范围，并求$f'(0)$.

(3) 若函数$f'(x)$在$x=0$处连续，求α的取值范围.

五、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)=0$，$f'_{+}(0)$ 和 $f'_{-}(1)$ 都存在，且 $f'_{+}(0)\cdot f'_{-}(1)>0$．试证明：存在点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$．

六、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上三阶可导，$f(x)\ge 0, \forall x\in[a,b]$，且在 (a,b) 内存在两个不同的点 x_1, x_2，使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$. 试证明:

(1) $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

(2)存在点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'''(\xi)=0$.

七、设函数 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

(1) 求函数的单调区间、函数的极值点、极值和最值.

(2) 求函数的凹凸区间、函数曲线的拐点.