1.(1) 不可以，任意与无限多个不等价

(2) 不可以，无穷多个 n，不能保证 $n>N^*$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon$. $\{a_n\}=\{(-1)^n\}$，任意正数 $\varepsilon>0$，偶数项都满足 $|a_n-1|<\varepsilon$，但 $\{a_n\}$ 发散

(3) 可以，~~不妨设~~ $\frac{1}{k}<\varepsilon$ 则 $n>N_k$ 时 $|a_n-a|<\frac{1}{k}<\varepsilon$ ε 用来描述通项与极限A距离很小，只要 k 足够大，$\frac{1}{k}$ 任意

$\varepsilon>0$ 任意 N　ε 任意 N

(4) 可以，设 $\varepsilon<1$　$\varepsilon^2<\varepsilon$　则 $|a_n-a|<\varepsilon^2<\varepsilon$

(5) 不可以，应改为 $|a_n-a|<\varepsilon$，可以从 $a_n-a+\varepsilon$ 右侧逼近

数列 4 3 2 1 0 N

-1 -2 -3 -4 … -n

从第五项开始 $a_n-0<\varepsilon$

但 a_n 发散

2.(1) $\left|\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right|<\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon \Rightarrow n>\varepsilon^{-2}$，$\forall\varepsilon>0$ 可以取 $N=[\varepsilon^{-2}]+1$

当 $n>N$ 时 ~~$\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$~~ $\left|\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right|<\varepsilon$　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{n}}=0$

$\forall\varepsilon>0$

(2) $\left|\frac{\sqrt{n}\cos n^2}{n+1}\right|<\left|\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right|<\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon^2}$　可取 $N=[\frac{1}{\varepsilon^2}]+1$

当 $n>N$ 时　$\left|\frac{\sqrt{n}\cos n^2}{n+1}-0\right|<\varepsilon$.　$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cos n^2}{n+1}=0$

(3) $\left|\frac{3(\sqrt{n}+\frac{1}{2})-\frac{5}{2}}{2\sqrt{n}+1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{5}{4\sqrt{n}+2}\right|<\frac{5}{4\sqrt{n}}<\varepsilon$　$n>\frac{25}{16\varepsilon^2}$　可取 $N=[\frac{25}{16\varepsilon^2}]+1$

可以把系数也放掉 没必要，N的同阶即可

当 $n>N$ 时　$\left|\frac{3\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}+1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{5}{4\sqrt{n}+2}\right|<\varepsilon$　$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}+1}=\frac{3}{2}$

(4) $\left|\frac{5n^2}{7n-n^2}+5\right|=\left|\frac{35n}{7n-n^2}\right|=\left|\frac{35}{7-n}\right|$　设 $n>7$　原式 $=\left|\frac{35}{n-7}\right|<\varepsilon$.

$n>\frac{35}{\varepsilon}+7$　放大了　可取 $N=[\frac{35}{\varepsilon}]+8$

~~$n>N$ 时~~

$n>\max\{7,N\}$　$\left|\frac{5n^2}{7n-n^2}+5\right|=\left|\frac{35n}{7n-n^2}\right|<\varepsilon$.　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2}{7n-n^2}=-5$

$n+1>n$ 不仅要全部

(5) $|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$，可取 $n>\frac{1}{\varepsilon^2}$，$N=[\frac{1}{\varepsilon^2}]+1$

$n>N$ 时　$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|=\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right|<\varepsilon$　$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$

(6) $\left|\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{\frac{(n+1)\cdot n}{2}}{n^2}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2n}<\varepsilon$　$n>\frac{1}{2\varepsilon}$　可取 $N=[\frac{1}{2\varepsilon}]+1$

$n>N$ 时

$\left|\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2n}<\varepsilon$.　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{1}{2}$

(7) $\left|\frac{n!}{n^n}\right|=\left|\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{n\cdots n}\right|<\left|\frac{1\cdot n\cdot n\cdots n}{n\cdot n\cdot n\cdots n}\right|=\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$　$n>\frac{1}{\varepsilon}$　可取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$

$M=\frac{(k+1)!\,2^k}{b^{k+1}}$

$n>N$ 时.　$\left|\frac{n!}{n^n}\right|<\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

(8) $a^n=(1+b)^n=1+C_n^1b+\cdots+C_n^nb^n>C_n^{k+1}b^{k+1}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k)b^{k+1}}{(k+1)!}$

$\frac{n^k}{a^n}=\frac{(k+1)!}{n(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k}{n})b^{k+1}}$　$\because n>2k$　$(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k}{n})>\frac{1}{2^k}$　$\frac{n^k}{a^n}<\frac{(k+1)!\,2^k}{n\cdot b^{k+1}}=\frac{M}{n}<\varepsilon$

$N=\max\{2k,[\frac{M}{\varepsilon}]+1\}$

(9) $\frac{a^n}{n!}=\frac{a\cdot a\cdots a}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$ 取 k_0 使 $k_0 \le a \le k_0+1$ 令 $M=\frac{a^{k_0}}{k_0!}\cdot a$

$=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{k_0}\cdot\left(\frac{a}{k_0+1}\cdots\frac{a}{n}\right)\le\frac{a^{k_0}}{k_0!}\cdot\frac{a}{n}=\frac{M}{n}<\varepsilon$ $n>$ 当 $\max\{[\frac{M}{\varepsilon}]+1, k_0+1\}$

$\frac{a^n}{n!}<\varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

3. $|a_n-a|<\varepsilon$. $\cancel{|a_n|-|a|}-\varepsilon$.

$0<a_n-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$

1° $a>0$ $\forall\varepsilon>0$ 当 $n>N_1$ 均有 $|a_n-a|<\varepsilon$

$\therefore \big||a_n|-|a|\big|=|a_n-a|<\varepsilon$.

2° $a<0$ $\forall\varepsilon>0$ 当 $n>N_2$ 均有 $|a_n-a|<\varepsilon$. $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon<0$

$\therefore \big||a_n|-|a|\big|=|a_n-a|<\varepsilon$. $\big||a_n|-|a|\big|\le|a_n-a|$

$\therefore n>\max\{N_1,N_2\}$ $\big||a_n|-|a|\big|<\varepsilon$.

$a>2$

$a_n=-2+(-\frac{1}{2})^n$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}|-2+(-\frac{1}{2})^n|=2$.

但 $\lim\limits_{n\to\infty}-2+(-\frac{1}{2})^n=-2\ne a$.

4. $\forall\varepsilon>0$ $n>N$ $|b_n-a_n|<\varepsilon$. 又 $b_n\geq a\geq a_n$

$\cancel{|b_n-a_n|\le|b_n-a|+|a-a_n|}$ $\therefore |b_n-a|\le|b_n-a_n|<\varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$ 同理 $|a_n-a|\le|\underbrace{\cancel{b_n-a_n}}_{a_n-b_n}|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

5. $\because \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ $\forall\varepsilon>0$ $n>N$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon$.

$\because n+k>n>N$ $\therefore |a_{n+k}-a|<\varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}=a$

6. 取 $N\in N^*$ $n>N$，且 n 为偶数 $|a_n-a|=|2n-a|$

任意取 $a\in R$. 取都可取 $\varepsilon_0=1$ $\therefore |2n-a|\geq 1$

$\therefore n\geq \max\{\frac{a+1}{2}, N\}$ $|2n-a|\geq|2\cdot\frac{a+1}{2}-a|=1$

说明任意 $a\in R$ 均非数列极限 $a_n=n[1+(-1)^n]$ 发散.

可以取 ε

$a\neq 0$ n 为奇 $n>N$ 时 $\varepsilon=\frac{|a|}{2}$

$|a_{n_0}-a|=|a|>\frac{|a|}{2}=\varepsilon$.

$a=0$ $n>N$ 且 n 为偶 $\exists N>\frac{\varepsilon}{2}$

$|a_n-0|=|2n|>2N>\varepsilon$.