1.(1) $\lim_{x\to2}(x^2-6x+10)=2$

$\Rightarrow \lim_{x\to2}(x^2-6x+8)=0$.

$\Rightarrow \lim_{x\to2}|(x-2)(x-4)|$

令 $\delta = \cancel{1}$ ~~...~~

~~...~~ $\forall \varepsilon>0$.

不妨取 $\delta=1$ $|x-1|<1 \Rightarrow x\in(1,3)$.

$|(x-2)(x-4)|<|3(x-2)|<\varepsilon$.

$2-\frac{\varepsilon}{3}<x<2+\frac{\varepsilon}{3}$

$\therefore \delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{3}\}$

$|x-2|<\delta$. $|(x-2)(x-4)-2|<\varepsilon$

$\lim_{x\to2}|(x-2)(x-4)|<|3(x-2)|<\varepsilon$.

即 $\lim_{x\to2}|(x-2)(x-4)|=0$

~~即 x^2-6x+8 ...~~

$\therefore \lim_{x\to2} x^2-6x+8=0$

$\Rightarrow \lim_{x\to2} x^2-6x+10=0$.

6(1) $\lim_{x\to0^+}x[\frac{1}{x}]\le\lim_{x\to0^+}x\cdot\frac{1}{x}=1$

$\lim_{x\to0^+}x[\frac{1}{x}]\ge\lim_{x\to0^+}x(\frac{1}{x}-1)$ 或看是 $\boxed{\frac{x}{x+1}}$

$=\lim_{x\to0^+}(1-x)$ 法2:可试试变成(n)

$=1$ 0^+ $\frac{1}{1+n}<x\le\frac{1}{n}$.

$\therefore \lim_{x\to0^+}x[\frac{1}{x}]=1$. $\Rightarrow n\le[\frac{1}{x}]\le n+1$

即 $\boxed{[\frac{1}{x}]=n}$

(2). ~~$\lim_{x\to0^+}(\frac{1}{x})^x\le\lim_{x\to0^+}(1+\frac{1}{x})^x=e$.~~

~~$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ 令 $t=\frac{1}{x}$~~ $\frac{1}{1+n}\cdot n<x[\frac{1}{x}]$

~~$\therefore \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}\le\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t+1)}{t}$~~ $<\frac{1}{n}\cdot n$.

均为1.

0^- $-\frac{1}{n}<x\le-\frac{1}{1+n}$

~~$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$~~ $\Rightarrow -(1+n)\le[\frac{1}{x}]\le-n$.

$x\to0^+$ $n\le\frac{1}{x}\le n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}$.

$n^{\frac{1}{n+1}}<n^x\le(\frac{1}{x})^x<(n+1)^x\le(n+1)^{\frac{1}{n}}$.

$\lim_{n\to+\infty}n^{\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}n^{\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}}=1$. $\lim_{n\to+\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}(n+1)^{\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}}=1$.

7.(2) 原式 $=\lim_{x\to0}\frac{C_{10}^0x^{10}+\cdots+C_{10}^{10}\cdot1^{10}-1}{x}$

$=\lim_{x\to0}x^9+C_{10}^1x^8+\cdots+C_{10}^9$

$=10$.

(3). 原式 $=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{x-1}$.

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} > \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

原式 $=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{3}{2}$

(5) 原式 $=$ ~~$\frac{x(1-x^k)}{1-x}-k$~~ ~~$x-1$~~ $\lim_{x\to1}\frac{x-1+x^2-1+x^3-1+\cdots+x^k-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}1+(x+1)+(x^2+x+1)+(x^3+x^2+x+1)+$

$(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+1)$

$=\frac{(1+k-1)(k-1)}{2}=\frac{k(k+1)}{2}$

(7) 原式 $=\lim_{x\to1}\frac{l-k+k\cdot x^l-l\cdot x^k}{(x^k-1)(x^l-1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{l(1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1})-k(1-x)(1+x+\cdots+x^{l-1})}{(x-1)^2(1+\cdots+x^{k-1})(1+\cdots+x^{l-1})}\triangleq g(x)$

令 $t=x-1$

$=\lim_{t\to0}\frac{k[(t+1)^l-1]-l[(t+1)^k-1]}{g(t+1)t^2}$

$=\lim_{t\to0}\frac{k[1+lt+\frac{l(l+1)}{2}t^2+\cdots-1]-l[1+kt+\frac{k(k+1)}{2}t+\cdots-1]}{g(t+1)t^2}$

$=\lim_{t\to0}\frac{(k\cdot l\frac{l+1}{2}-k\,l\frac{k+1}{2})t^2+o(t^2)}{g(t+1)t^2}$ t次数过大

$=\frac{kl\frac{l+1}{2}-k\cdot l\frac{k+1}{2}}{g(1)}$

$=\frac{k\cdot l\frac{l+1}{2}-k\cdot l\frac{k+1}{2}}{l\cdot k}=\frac{l-k}{2}$.

6). 令 $x+1=t^6$

$$\lim_{t\to1}\frac{t^3-t^2}{t^6-1}=\lim_{t\to1}\frac{t^2(t-1)}{(t^3-1)(t^3+1)}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{t^2}{(t^2+t+1)(t^3+1)}$$

$$=\frac{1}{6}$$

8.1.(2) $$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\cdot2$$

$$=2$$

(4) $$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos3x}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin2x\cdot\sin(-x)}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot2$$

$=2$.

(6) $$\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)}{x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)}{x}\neq\frac{\tan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)}{x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan x)}{x\cdot\cos(\tan x)}$$ 配凑

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}\cdot\frac{\tan x}{x\cdot\cos(\tan x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$$

(8). $$\lim_{x\to1}(x-1)\tan\frac{\pi}{2}x$$

$$=\lim_{x\to1}(x-1)\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\cos\frac{\pi}{2}x}.$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\cos\frac{\pi}{2}x}$$

令 $x-1=t$

$$\lim_{t\to0}\frac{t}{\cos(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2})}=\lim_{t\to0}\frac{t}{-\sin\frac{\pi}{2}t}$$

因 $\sum_{k=1}^{n}a_k=0$ 构造与0恒等式

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot\left(-\frac{2}{\pi}\right)=-\frac{2}{\pi}.$$

12. 原极限等价于求 $\sqrt{n^2+\sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}n\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n^3}}}$$

去创造有理化条件.

$t=\sqrt{n}$.

$$\lim_{t\to\infty}\sqrt{t^4+t}=t^2\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n\right)=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n}$$

再证极限，因和差角拆开.

$\lim\sin(t^2\pi)=0$.

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi\cdot\sqrt{n^2+\sqrt{n}}\right)=0$$

~~$\lim_{n\to\infty}2n\sin(\pi\sqrt{4n^2+1})$~~. $\lim_{t\to\infty}\sqrt{t^2-1}\sin\pi t$

~~令 $\sqrt{4n^2+1}=t$~~

分之2n. 利用周期性 进而构建基本类型

$$\lim_{n\to\infty}2n\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}2n\sin2\pi n.=0$$

13.

$$\lim_{x\to0}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\right)\right].$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{\cos}\ \sin2x}{2^{n+1}\cdot\sin\frac{x}{2^n}}\right)\right].$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin2x}{2x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\right)\right]=1.$$

1.(3) $$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-1})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)=0.$$

$<\frac{1}{2x-1}<\varepsilon$ 取X可用定义法证明

2. 证: $$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\sin\sqrt{x+k}>\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\sin\sqrt{x}=0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\sin\sqrt{x+k}<\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\sqrt{x+n}=0.$$

$$\therefore\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\sin\sqrt{x+k}=0$$

构造 $\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+k}-\sqrt{x})=0.$

4. 若极限存在，由海涅定理，

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos x_n$ 存在，其中，

$\forall M>0$，$\exists N_0\in N^*$，s.t. $n>N_0$

有 $|x_n|>M$。

设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos x_n=\cos x_0$

则 $|\cos x_n-\cos x_0|$

$=\left|\cancel{\cos\frac{x_n+x_0}{2}}\right.$

$2\sin\frac{x_n+x_0}{2}\cdot\sin\frac{x_n-x_0}{2}\Big|$

$\leq\left|2\sin\frac{x_n-x_0}{2}\right|$

$\leq|x_n-x_0|$

$\because \lim\limits_{n\to+\infty}\cos x_n=\cos x_0$

$\therefore |x_n-x_0|<\varepsilon$.

即 $x_n<x_0+\varepsilon$

又 $\forall M>0$ $\exists N_0\in N^*$. s.t. $n>N_0$

$x_n>M>x_0+\varepsilon$. $\therefore$ 不成立

$\therefore$ 极限不存在

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2a}{x+a}\right)^x$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{x+a}{2a}}\right)^x$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{x}{2a}+\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{x+a}{2a}\cdot 2a}\cdot\left(1-\frac{1}{\frac{x}{2a}+\frac{1}{2}}\right)^{-a}$

$=e^{-2a}=e^2$ $\therefore a=-1$

~~8. 设存在无穷大数列 x_n $\forall M>0$~~

~~$\exists N_0\in N^*$, s.t. $n>N_0$ $x_n>M$~~

~~$\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$.~~

$\because f(x)$ 为周期函数.

$\lim\limits_{x_0\to+\infty}f(x_0)=A$

$f(x_0)=f(x_0+T)$

$\lim\limits_{x_0\to+\infty}f(x_0+T)=A$.

x_0 足够大

~~[illegible]~~ $x\in[x_0,x_0+T]$ $f(x)=A$. $\therefore f(x)\equiv A$.

$\forall y\in[0,T]$

$y+nT\xrightarrow{n\to\infty}+\infty$

$f(y)=f(y+nT)$

取极限

$f(y)=\lim\limits_{n\to\infty}f(y)=\lim\limits_{n\to\infty}f(y+nT)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

$f(y)\equiv A$.

$\boxed{\text{证 } y \text{ 与 } x \text{ 表示关系}}$ $\forall x\in R^+$ $\exists y\in[0,T]$ s.t. $x=y+nT$