解：$n=2k\pi$ 时 $\sin 2k\pi=0$ $\therefore \lim_{k\to\infty}\sin 2k\pi=0$

$n=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})=0$ $\lim_{k\to\infty}\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})=1$

$\sin n$ 的子数列的极限不相等 $\therefore \sin n$ 发散

3. 设 $\{a_n+b_n\}$ 收敛

则 $b_n=\{a_n+b_n-a_n\}$ 收敛 与题干 b_n 发散矛盾

4. $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}a_1\cdot a_2\cdots a_n$ $\forall 1>\varepsilon>0$

$\exists N_0\in N^*$

$\because (a_1\cdots)$ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ s.t. $n>N_0$ $|a_n|<\varepsilon$

$a\neq 0$ 时 由题

$M=|a_1a_2\cdots a_N|>0$ $|b_n|=|a_1a_2\cdots a_Na_{N+1}\cdots a_n|=M\varepsilon^{n-N}<M\varepsilon$

$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=0$

5. 由题 $\exists N_0\in N^*$ 保证 $a_n\cdot a>0$ $n>N_0$ 时 $\forall\varepsilon>0$, $|a_n-a|<\varepsilon\sqrt[3]{a^2}\varepsilon$

$(\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{a})=\left|\frac{a_n-a}{\sqrt[3]{a_n^2}+\sqrt[3]{a_n\cdot a}+\sqrt[3]{a^2}}\right|<\left|\frac{a_n-a}{\sqrt[3]{a^2}}\right|<\varepsilon$

$a=0$

$|a_n-a|=|a_n|<\varepsilon^3$ $\sqrt[3]{a_n}<\varepsilon$

即 $|\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{a}|<\varepsilon$ 满足

$\therefore n>N_0$ 时 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$

6.(1) 原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1-a^n}{1-a}}{\frac{1-b^n}{1-b}}$ $=\cancel{\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^n)(1-b)}{(1-a)(1-b^n)}}$

$(\because |a|<1, |b|<1)$ $=\frac{1-b}{1-a}\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^n}{1-b^n}$

$=\frac{1-b}{1-a}$

(3) 原式 $=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})$

$=1$

(5) 原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)n}{2}}{n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}$

$=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n})$

$=\frac{1}{2}$

(7) 原式 $=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}\right)$

$0<\lim_{n\to\infty}\frac{a}{2\sqrt{n}}=0$

$\frac{a}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}>\frac{a}{2\sqrt{n+a}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{2\sqrt{n+a}}=0$

$\therefore \lim\left(\frac{a}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}\right)=0$.

(9) 构造化简

可同乘 $\cos x$ 类乘 求出极限值

原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+x)(1-x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}})}{1-x}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^n})}{1-x}$.

$=\frac{1}{1-x}$

代入验证 例

(11) 原式 $=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2(n+2)}-\frac{n}{2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2(n+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2+\frac{4}{n}}$

$=-\frac{1}{2}$

(12) $m<k$ 时

原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{a_m\frac{1}{n}+a_{m-1}\frac{1}{n^2}+\cdots+a_1\frac{1}{n^m}+a_0\frac{1}{n^{m+1}}}{b_kn^{k-m-1}+b_{k-1}n^{k-m-2}+\cdots+b_1\frac{1}{n^{m+}}+b_0\frac{1}{n^{m+1}}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{b_kn^{k-m-1}+b_{k-1}n^{k-m-2}+\cdots+b_1\frac{1}{n^m}+b_0\frac{1}{n^{m+1}}}$

$=0$

$m=k$ 时

原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{a_m+a_{m-1}\frac{1}{n}+\cdots+a_0\frac{1}{n^m}}{b_k+b_{k-1}\frac{1}{n}+\cdots+a_0\frac{1}{n^m}}$.

$=\frac{a_m}{b_k}$.

(4) 证：设 $\{a_{2n}\}$ 与 $\{a_{2n+1}\}$ 都有相同极限 a.

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N_1\in N^*$, s.t. $n>N_1$ $|a_{2n}-a|<\varepsilon$.

$\exists N_2\in N^*$, s.t. $n>N_2$ $|a_{2n+1}-a|<\varepsilon$.

$\therefore \exists N_0=\max\{N_1,N_2\}$, s.t. $n>2N_0+1$ 时

$|a_n-a|<\varepsilon$. 即 $\{a_n\}$ 收敛

7. $\because a_n\le c_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$

$\therefore \forall\varepsilon>0$, $\exists N_0\in N^*$, s.t. $n>N_0$, $c_n-a_n<\varepsilon$

$c_n-b_n \cancel{+b_n-a_n} \le c_n-b_n+b_n-a_n<\varepsilon$.

$\therefore c_n-b_n<\varepsilon$ 同理 $b_n-a_n<\varepsilon$.

但由于不清楚 a_n 与 c_n 是否收敛 ~~和相同极限~~

$\therefore$ 无法判断 $\{b_n\}$ 是否收敛

$\begin{cases} b_n \text{收敛} & c_n\text{收敛时} \\ b_n\text{不收敛} & c_n\text{不收敛} \end{cases}$

8 (1) 原式 $\le \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$

原式 $\ge \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$

由夹逼准则 原式 $=1$

(2) 原式 $\le \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

原式 $\ge \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(2n)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4n}=0$

$\therefore$ 由夹逼准则 原式 $=1$

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} \cancel{(n-2)(n+1)} (n^2-n+2)^{\frac{1}{n}}$. $n>2$ 时

$0\le(n^2-n+2)<n^2$.

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}=1$

(4) $|(\arctan n)^{\frac{1}{n}}-1|=y$ $n\ge1$ 时 n 可以无穷大

$\frac{\pi}{4}=\arctan 1\le\arctan n<\frac{\pi}{2}$

~~$\arctan n=(y+1)^n$~~ 又 $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\pi}{4}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\pi}{2}}=1$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(\arctan n)^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[n]{\frac{\pi}{4}}\le\sqrt[n]{n}\le\sqrt[n]{\frac{\pi}{2}}$ $\because \boxed{n\ge1}$

$\arctan n\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$.

(5)

原式 $\le \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\cdot3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{3^n}=3$.

原式 $\ge \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}=3$.

$\therefore$ 原式 $=3$.

(6) 不妨设 ~~$a_n<a_2$~~

$0<a_1<a_2<\cdots<a_m$.

原式 $\le \lim\limits_{n\to\infty}(m\cdot a_m^n)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_m}$

$=a_m$

原式 $\ge \lim\limits_{n\to\infty}(a_m^n)^{\frac{1}{n}}=a_m$.

其中 $a_m=\max\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}$

9 证 (1)

~~$\frac{[n\cdot a_n]}{n}-a=\frac{[n\cdot a_n]-n\cdot a}{n}\le\frac{n(a_n-a)}{n}=a_n-a$~~

又 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

~~$\forall\varepsilon\ge0$ $\exists N_0\in N^*$ $n>N_0$, s.t. $|a_n-a|<\varepsilon$.~~

~~$\therefore \frac{[n\cdot a_n]}{n}-a<\varepsilon$.~~

~~$\left|\frac{[n\cdot a_n]}{n}-a\right|\ge\left|\frac{n(a_n-a)-1}{n}\right|$~~

$\lim \frac{[na_n]}{n}\le\frac{na_n}{n}=a_n$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

$\frac{[na_n]}{n}\ge\frac{na_n-1}{n}=a_n-\frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-\frac{1}{n})=a$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n-1}{n}\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[na_n]}{n}\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{n}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{[na_n]}{n}=a$

(2) $\because \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ $\therefore a_n$ 有界.

设 $a_n\in(0,M)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{M}=1$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N_0\in N^*$, s.t. ~~$\lim$~~ $|a_n-a|<\varepsilon$

$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}>\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a-\varepsilon}=1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$