1. (1) $AB=\begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$AB-BA=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

(2) $AB=\begin{bmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix} a+c+ac & b+c+ab & 2c+a^2 \\ a+b+bc & b^2+2b & b+c+ab \\ 2a+c^2 & a+b+bc & a+c+ac \end{bmatrix}$

$AB-BA=\begin{bmatrix} b-ac & a^2+b^2+c^2-b-c-ab & 2ac+b^2-2c-a^2 \\ c-bc & 2ac-2b & a^2+b^2+c^2-b-c-ab \\ \cancel{b+c-a-c^2} & c-bc & b-ac \end{bmatrix}$

$3-a-c^2$

2. (8)

$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$

$\boxed{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

$\cancel{=\lambda^n}$

要是A里边的才可以提出.

原式 $=\lambda^n\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n$ 归纳

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

~~原式 $=\lambda^n$~~ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n=\lambda^n\begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ← 不可盲目提出

$\begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$

10. $AA=0$

$\Rightarrow A\cdot A^T=0$

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

~~$a_{12}=a_{21}$~~ $A=A^T$.

$a_{12}=a_{21}$, $a_{n2}=a_{2n}$.

$A\cdot A=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}a_{1i}^2 & & \\ & \sum_{i=1}^{n}a_{2i}^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \sum_{i=1}^{n}a_{ni}^2 \end{bmatrix}=0$

$\therefore \sum_{i=1}^{n}a_{1i}^2=0$, $\sum_{i=1}^{n}a_{2i}^2=0$, …, $\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^2$

$\therefore a_{1i}=0$

$a_{2i}=0$ $\quad i=1,2,3\cdots n$.

$\vdots$

$a_{ni}=0$

$\therefore A=0$.

CamScanner