2.4) $\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$ 由几何意义知，逆时针

令 $n=2$ $\begin{bmatrix}\cos 2\varphi & -\sin 2\varphi\\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi\end{bmatrix}$

旋转 $\varphi$ 角 旋转 $n$ 次

$\therefore \begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{bmatrix}$

假设 $\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}^n$ $\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}^{n-1}$ $\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$

20.1) $A_{11}=d \quad A_{12}=c \quad A_{21}=\cancel{c}\, b \quad A_{22}=a$

$A^*=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{bmatrix}d & b\\ -c & a\end{bmatrix}$ 再往算出来

3) $|A|=-1$

$A_{11}=-1 \quad A_{12}=1 \quad A_{13}=1$

$A_{21}=-4 \quad A_{22}=5 \quad A_{23}=6$

$A_{31}=3 \quad A_{32}=-3 \quad A_{33}=-4$

$A^*=\begin{bmatrix}-1 & -4 & 3\\ -1 & 5 & +3\\ 1 & -6 & -4\end{bmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{bmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{bmatrix}$

7)

$A_{11}=1 \quad A_{21}=3 \quad A_{31}=11 \quad A_{41}=1$

$A_{12}=0 \quad A_{22}=1 \quad A_{32}=2 \quad A_{42}=2$

$A_{13}=0 \quad A_{23}=0 \quad A_{33}=1 \quad A_{43}=2$

$A_{14}=0 \quad A_{24}=0 \quad A_{34}=0 \quad A_{44}=1$

$A^*=\begin{bmatrix}1 & -3 & 11 & 38\\ 0 & 1 & -2 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad |A|=1$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{bmatrix}1 & -3 & 11 & 38\\ 0 & 1 & -2 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

23.2) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix} \quad |A|=6$

$A^*=\begin{bmatrix}2 & +1 & 4\\ +2 & 1 & -2\\ -2 & +2 & 2\end{bmatrix} \quad A\cdot X=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$A^*\cdot A\cdot X=\begin{bmatrix}2 & +1 & 4\\ +2 & 1 & -2\\ -2 & +2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$6\cdot X=\begin{bmatrix}9 & 1 & 6\\ 3 & 5 & 0\\ -8 & -2 & -4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}11 & 3 & 6\\ -1 & -3 & 0\\ 4 & 6 & 0\end{bmatrix}$ 记得加负号。

$X=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{6} & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & 0\\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\frac{11}{6} & \frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{2}{3} & 1 & 0\end{bmatrix}$ 是代数余子式

4) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$

$A^*=\begin{bmatrix}2 & +1 & 4\\ +2 & 1 & -2\\ -2 & +2 & 2\end{bmatrix}$ $|A|=6$

$XA\cdot A^*=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & +1 & 4\\ +2 & 1 & -2\\ -2 & +2 & 2\end{bmatrix}$

$6X=\begin{bmatrix}2 & -4 & 4\\ 0 & 0 & 6\\ 0 & -3 & 12\end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 8\\ 4 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{bmatrix}$

$X=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -\frac{1}{2} & 2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$

2). 证

$A\cdot A^*=|A|E.$

1° $r(A)=n.$

$A=[\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\cdots,\vec{\alpha}_n]$

$A^*=\begin{bmatrix}\vec{\beta}_1\\ \vec{\beta}_2\\ \vdots\\ \vec{\beta}_n\end{bmatrix}$

$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0 \quad \therefore |A^*|\neq 0$

$\therefore r(A^*)=n.$

2° $r(A)=n-1$

至少有一个 $(n-1)$ 级子式不为0 则 $r(A^*)\geq 1.$

$A\cdot A^*=|A|\cdot E=0.$

又 $r(A)+r(A^*)=n.$

$\therefore r(A^*)=1$

3° $r(A)<n-1$

所有 $(n-1)$ 级子式均为0

$\therefore A^*=0$