2.(1) $\vec{\beta}=k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}+k_3\vec{\alpha_3}+k_4\vec{\alpha_4}$

$\Rightarrow\begin{cases}1=k_1+k_2+k_3+k_4\\2=k_1+k_2-k_3-k_4\\1=k_1-k_2+k_3-k_4\\1=k_1-k_2-k_3+k_4.\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}k_1=\frac{5}{4}\\k_2=\frac{1}{4}\\k_3=-\frac{1}{4}\\k_4=-\frac{1}{4}.\end{cases}$

3.证：∵ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$ 线性无关

∴不存在不全为0的 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 使

$k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}+\cdots+k_r\vec{\alpha_r}=0.$

又 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关.

∴ $k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}+\cdots+k_r\vec{\alpha_r}+k_{r+1}\vec{\beta}=0.$

且 $k_1,k_2,\cdots,k_r,k_{r+1}$ 不全为0.

① β 为零向量，则 β 一定可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表出

② $\beta\neq\vec{0}$ ~~则~~ a. $k_{r+1}=0$ 则 但~~不存在~~ $k_1\vec{\alpha_1}+\cdots+k_r\vec{\alpha_r}\neq 0$

∴不成立

b. $k_{r+1}\neq 0$

$\vec{\beta}=-\frac{k_1}{k_{r+1}}\vec{\alpha_1}-\frac{k_2}{k_{r+1}}\vec{\alpha_2}-\cdots-\frac{k_r}{k_{r+1}}\vec{\alpha_r}.$

5.证

$\vec{\alpha_1}=(1,t_1,t_1^2,\cdots,t_1^{n-1})$

$\vec{\alpha_2}=(1,t_2,t_2^2,\cdots,t_2^{n-1})$

— —— .

$\vec{\alpha_r}=(1,t_r,t_r^2,\cdots,t_r^{n-1})$

$\Rightarrow k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}+\cdots+k_r\vec{\alpha_r}=0.$

$\Rightarrow\begin{cases}k_1+k_2+\cdots+k_r=0\\t_1k_1+t_2k_2+\cdots+t_rk_r=0\\\text{— ———}\\t_1^{n-1}k_1+t_2^{n-1}k_2+\cdots+t_r^{n-1}k_r=0\end{cases}$

$k_1,k_2,\cdots,k_r$ 有非零解的充要条件是系数矩阵 $|A|=0$

$|A|=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\t_1&t_2&\cdots&t_r\\\vdots&\vdots&&\vdots\\t_1^{n-1}&t_2^{n-1}&\cdots&t_r^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le r}(t_i-t_j)$ 又 t_i 与 t_j 互不相同.

∴ $|A|\neq 0$

即 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 无非零解

$\Rightarrow\alpha_i$ 线性无关

P107