15. 由题，不妨把 β_1,β_2,β_3 都设为基向量

$\vec{\alpha_1}=\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}$ $\vec{\alpha_2}=\begin{bmatrix}-3\\1\\-7\end{bmatrix}$ $\vec{\alpha_3}=\begin{bmatrix}5\\-3\\9\end{bmatrix}$ $\vec{\alpha_4}=\begin{bmatrix}-2\\1\\-4\end{bmatrix}$

解 $l_1\vec{\alpha_1}+l_2\vec{\alpha_2}+l_3\vec{\alpha_3}+l_4\vec{\alpha_4}=0$

等同解 $\left(\begin{array}{cccc|c}1&-3&5&-2&0\\-2&1&-3&1&0\\-1&-7&9&-4&0\end{array}\right)$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-3&5&-2&0\\0&-5&7&-3&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}l_1-3l_2+5l_3-2l_4=0\\-5l_2+7l_3-3l_4=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}l_1=-\frac{1}{3}(l_2+l_3)\\l_4=-\frac{5}{3}l_2+\frac{7}{3}l_3\\l_2=l_2\\l_3=l_3\end{cases}$

$\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\l_3\\l_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}-\frac13\\1\\0\\-\frac53\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-\frac13\\0\\1\\\frac73\end{bmatrix}$ $k_1,k_2\in R$

20.3) 齐方程组有解 $\Leftrightarrow$ 系数矩阵 $|A|\neq0$

$\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&2b&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&1&1\\1-a&b-1&0\\1-a&2b-1&0\end{vmatrix}$

$=1^{1+3}\begin{vmatrix}1-a&b-1\\1-a&2b-1\end{vmatrix}$

$=b(1-a)\neq0$

$a\neq1$ $b\neq0$.

具体分情况讨论

$b=0$

$X_1+X_3=3$

$X_1+X_4=4$

矛盾 无解

$\left(\begin{array}{ccc|c}a&1&1&4\\1&b&1&3\\1&2b&1&4\end{array}\right)$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&b&1&3\\0&1-ab&1-a&4-3a\\0&b&0&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{\frac1b-2}{1-a}\\x_2=\frac1b\\x_3=2+\frac{2-\frac1b}{1-a}\end{cases}$

$a=1$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&b-1&0&-1\\0&2b-1&0&0\end{pmatrix}$

$b=\frac12$

$\Rightarrow\begin{cases}X_1=2-X_3\\X_2=2\end{cases}$ 无穷解

$b\neq\frac12$

系数矩阵秩2

增广矩阵秩3 无解

22.1) $\begin{pmatrix}1&3&5&-4&0&1\\1&3&2&-2&1&-1\\1&-2&1&-1&-1&3\\1&-4&1&1&-1&3\\1&2&1&-1&1&-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&3&5&-4&0\\0&-1&-4&3&1\\0&0&-3&2&1\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x_1+3x_2+5x_3-4x_4=0\\-x_2-4x_3+3x_4+x_5=0\\-3x_3+2x_4+x_5=0\\-2x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_4\\x_2=x_4\\x_3=0\\x_4=x_4\\x_5=-2x_4\end{cases}$

$\gamma_0=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$

不是基础解系.

$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\-2\end{bmatrix}$

$\therefore\gamma=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\-2\end{bmatrix}$ $k\in R$

4) $\begin{pmatrix}2&-3&3&-2\\3&4&-5&7\\4&11&-13&16\\7&-2&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&-3&3&-2\\0&17&-19&20\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{3}{17}x_3+\frac{13}{17}x_4\\x_2=\frac{19}{17}x_3-\frac{20}{17}x_4\\x_3=x_3\\x_4=x_4\end{cases}$ $\begin{bmatrix}\frac{3}{17}\\\frac{19}{17}\\1\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\frac{13}{17}\\-\frac{20}{17}\\0\\1\end{bmatrix}$

$\gamma=k_1\begin{bmatrix}\frac{3}{17}\\\frac{19}{17}\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}\frac{13}{17}\\-\frac{20}{17}\\0\\1\end{bmatrix}$, $k_1,k_2\in R$.

6) $\begin{pmatrix}1&2&3&-1&1\\3&2&1&-1&1\\2&3&1&1&1\\2&2&2&-1&1\\5&5&2&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&-1&1\\0&-1&-5&3&-1\\0&0&6&-5&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x_1=\frac56x_4\\x_2=-\frac76x_4\\x_3=\frac56x_4\\x_4=x_4\end{cases}$ $\begin{bmatrix}\frac56\\-\frac76\\\frac56\\1\end{bmatrix}$ $\gamma_0=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$

$\gamma=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}\frac56\\-\frac76\\\frac56\\1\end{bmatrix}$ $k\in R$.

24.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix}$$

必要性：易知 $|A|=0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum a_i \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix}$$ 秩为4.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 秩为4.

∴方程组有解.

充分性：

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sum a_i \\ 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix}$$

~~∵有解 ∴秩为4 ∴$\sum a_i=0$~~ 不能用，要一列展开简化

$$\begin{cases} x_1=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 \\ x_2=a_2+a_3+a_4+a_5 \\ x_3=a_3+a_4+a_5 \\ x_4=a_4+a_5 \\ x_5=a_5\ 0 \end{cases}$$

$x_1=x_5$
$x_2=x_5$
$x_3=x_5$
$x_4=x_5$

$$\xi=\begin{pmatrix} \sum_{1}^{4} a_i \\ \sum_{3}^{4} a_i \\ \sum a_i \\ \sum a_i \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

26. 由题：~~$\alpha_1 \eta_{11}+\alpha_2\eta_{12}+\cdots+\alpha_n\eta_{1n}=0$~~
设有基础解系 必然 $r<n$
~~令~~ 取 $n-r$ 个数 $(1,0,\cdots,0)$, $(0,1,0,\cdots,0)$
代自由未知量.
$\eta_1=(c_{11},\cdots,c_{1r},1,0,0,\cdots,0)$
$\eta_2=(c_{21},\cdots,c_{2r},0,1,0,\cdots,0)$
$\cdots$
设 $\eta=(c_1,\cdots,c_r,c_{r+1},c_{r+2},\cdots)$ 是方程组的一个解
~~$\eta=$~~ $c_{r+1}\cdot\eta_1+c_{r+2}\cdot\eta_2+\cdots$
比较 η 与上式后 $n-r$ 个数 ∵自由未知量相同 ∴解一样

取原方程基础解系 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$
那么取 $n-r$ 个解 ξ_i $(i\le n-r)$
的任一个 ξ_i 可表示 η
∴ η 是极大线性无关组
秩为 $n-r$ 则 ξ 也是极大线性无关组 且与 η 等价
则也是~~极大线性无关~~基础解系

又 $(n-r)$ 个解线性无关.
∴都是基础解系

27. 证.
①线性方程组是齐次线性方程组，易知解的线性组合仍为解.
②不是齐次线性方程组.

$$\begin{cases} \vec{\alpha_1}\cdot\eta_{11}+\vec{\alpha_2}\cdot\eta_{12}+\cdots+\vec{\alpha_n}\cdot\eta_{1n}=\vec{\alpha_i} \\ \cdots \\ \vec{\alpha_1}\cdot\eta_{t1}+\vec{\alpha_2}\cdot\eta_{t2}+\cdots+\vec{\alpha_n}\cdot\eta_{tn}=\vec{\alpha_i} \end{cases}$$

代入 $u_1\eta_1+u_2\eta_2+\cdots+u_t\eta_t$.

$\vec{\alpha_1}(u_1\eta_{11}+u_2\eta_{21}+\cdots+u_t\eta_{t1})+\vec{\alpha_2}(u_1\eta_{12}+u_2\eta_{22}+\cdots+u_t\eta_{t2})$
$\cdots=\vec{a_i}$ 可用矩阵加清晰表示

$\Rightarrow u_1(\vec{\alpha_1}\eta_{11}+\vec{\alpha_2}\eta_{12}+\cdots+\vec{\alpha_n}\eta_{1n})+$
$u_2(\vec{\alpha_1}\eta_{21}+\vec{\alpha_2}\eta_{22}+\cdots+\vec{\alpha_n}\eta_{2n})+$
$\cdots=\vec{a_i}$

$\Rightarrow u_1\vec{a_i}+u_2\vec{a_i}+\cdots+u_t\vec{a_i}=\vec{a_i}$
$\vec{a_i}(u_1+u_2+\cdots+u_t)=\vec{a_i}$
证毕

$$\begin{vmatrix} 2\lambda+1 & -\lambda & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda-2 \\ 2\lambda-1 & \lambda-1 & 2\lambda-1 \end{vmatrix}\neq 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\lambda & -\lambda \\ \lambda-3 & \lambda-1 & -3 \\ \lambda+1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(\lambda+1)\lambda(\lambda+2)$$

$\lambda\neq0$ 或 -1 或 -2

2) $\lambda=0$

3) $\lambda=-1$

$$\begin{cases} x_1=x_2+2 \\ x_2=x_2 \\ x_3=-\frac{5}{3}x_2-\frac{5}{3} \end{cases} \quad \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}3\\1\\-\frac{10}{3}\end{bmatrix}$$