6. ∵ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

∴ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续

由题：$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*)$

又 $x_n \in [a,b]$ ∴ x_n 必有收敛子列 x_{k_n}

∴ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x^*)$ ∴ ~~证~~ $\{f(x_n)\}$ 是收敛数列

$\Rightarrow f(\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}) = f(x^*)$

又 $f(x^*)$ 为最小值 且 x^* 唯一

∴ $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x^*$

~~假设~~ x_n 不收敛于 x^*

则两个收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ $\{y_{n_k}\}$ 收敛到不同数.

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq x^*$ 又 $f(x)$ 最小值在唯一的

$f(\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}) \neq f(x^*)$. x^* 取得

$\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = b$.

与题意矛盾 错误

~~$f(\lim$~~ $f(\lim x_{n_k})$ 与 $f(\lim y_{n_k})$ 收敛于同一极限

∴ x_n 收敛于 x^*.

又 $\lim\limits_{n_k\to\infty} f(\lim x_{n_k})$

$= f(a) = f(x^*)$

$\lim\limits_{n_k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(b) = f(x^*)$

$f(x)$ 在 a, b 取最小值

8. 证：$f(x) = x^3 + px + q$

$f(-\frac{q}{p}) = -\frac{q^3}{p^3}$.

$f(x) = x^3 + px$

$f'(x) = 3x^2 + p > 0$ ∴ $f(x)$ 严格单调递增

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

~~而 $f(x)$ 在 R 上单调~~ ~~连续~~

~~$-q \in (-\infty, +\infty)$~~

~~由介值定理 必存在 $f(\xi) = -q$~~

~~又 ∵ $f(x)$ ↗ ∴ ξ 唯一~~

又对于任意 $-q$

一定能找到 $\exists a<0$ $\exists b>0$.

$f(a) \le -q \le f(b)$

且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

由介值定理：必存在 $f(\xi) = -q$.

也可以 反证 原型

又 $f(x)$ ↗ ∴ ξ 唯一

证单调：$f(x) - f(y)$

12. 不妨在 R 中取定一点 A.

则只要证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, A]$ 与 $[A, +\infty)$ 上分别连续即可.

下证 $[A, +\infty)$ 连续

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$. s.t. $x > N$ $|f(x) - A| \le \frac{\varepsilon}{2}$

则 $x_1, x_2 > N$ $|f(x_1) - f(x_2)|$

$= |[f(x_1) - A] - [f(x_2) - A]|$

$\le |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A|$

$\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

~~即 $f(x)$ 在 $[N, +\infty)$ 上一致~~

而 $f(x)$ 在 $[A, N+1]$ 连续

∴ $f(x)$ 在 $[A, N+1]$ 一致连续

~~即~~ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 > 0$ 使 $|x_1 - x_2| < \delta_1$ 由 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

∴ 在 $[A, +\infty)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \min\{\delta_1, 1\}$

当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

∴ $f(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 一致连续

同理 $f(x)$ 在 $(-\infty, A]$ 一致连续

∴ $f(x)$ 在 R 上一致连续.

4.1

4. 证：$\lambda_1 h - (-\lambda_2 h) = h$

∵ $f(x)$ 在 x_0 可导

$\lim\limits_{h\to0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

$\lim\limits_{h\to0} \frac{f(x_0+\lambda_1 h) - f(x_0-\lambda_2 h)}{(\lambda_1+\lambda_2)h}$

$= f'(x_0 - \lambda_2 h)$.

又 $h \to 0$

插入中间量化为基本形式

$\lim\limits_{h\to0} \frac{f(x_0+\lambda_1 h) - f(x_0-\lambda_2 h)}{h}$ $f(x_0+\lambda_2 h) - f(x_0)$

$= \lim\limits_{h\to0} \frac{f(x_0+\lambda_1 h) - f(x_0) + [f(x_0) - f(x_0-\lambda_2 h)]}{h}$

$= \lim\limits_{h\to0} \lambda_1 \frac{f(x_0+\lambda_1 h) - f(x_0)}{\lambda_1 h} + \lim\limits_{h\to0} \lambda_2 \frac{f(x_0+\lambda_2 h) - f(x_0)}{\lambda_2 h}$

$= \lambda_1 f'(x_0) + \lambda_2 f'(x_0)$

$= f'(x_0)$

λ_2 为常数 / 参数 全为极小量

原式 $= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\frac{f(\frac{1}{n})}{f(0)}}$

$\cancel{\lim_{n\to+\infty}\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}} = a$.

$\cancel{\lim_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n}) = \frac{a}{n}+b}$

$= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln(\frac{f(\frac{1}{n})-b}{b}+1)}$

$= e^{n\lim_{n\to\infty}[\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{b}]}$

$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b}[\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}]}$

$= e^{\frac{a}{b}}$

8. 令 $F(x) = f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x)$

$F(0) = -2f(1) = \lim_{x\to 0}[8x+\alpha(x)] = 0$.

$F(0) = f(1) = 0$ 求 $f'(1)$ 即求 $F'(0)$

$F'(0) = \cancel{\frac{F(x)}{x}}\ \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{3f(1-\sin x)}{x}$.

$= \lim_{x\to 0}\frac{[f(1+\sin x)-f(1)]}{\sin x}\frac{\sin x}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{3f(1-\sin x)-3f(1)}{-\sin x}\frac{-\sin x}{x}$.

$= f'(1)+3f'(1) = 4f'(1)$

$F'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{8x+o(x)}{x} = 8$.

$\therefore f'(1) = 2$.

(2). $x>2$ $\because f(x)$ 可导 $\therefore f(x)$ 连续

$\lim_{x\to 2^+}(x^2+b) = \lim_{x\to 2^-}(ax+1)$

$\Rightarrow b = 2a-3$.

$f'_+(2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+4 = 4$.

$f'_-(2) = \lim_{x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$= \lim_{x\to 0^-}\frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$.

$\therefore a=4$ $b=5$.

13. (1).

$f'_+(0) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ $\because \lambda>1$

$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x^\lambda\cos\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}$ $\lim_{\Delta x\to 0^+}\Delta x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{\Delta x} = 0$

$f'_-(0) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x\to 0^-}\lambda-|\Delta x|^{\lambda-1}\cos\frac{1}{\Delta x} = 0$

(2) $0\le\lambda<1$ 无穷大乘以有界

$f'_+(0) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ $\lim_{\Delta x\to 0^+}\Delta x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{\Delta x}$.

$\because \lambda\in[0,1]$ $\therefore \lambda-1\in[-1,0]$

$\therefore \lim\Delta x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{\Delta x}$ 不收敛

$f'_-(0) \lim_{\Delta x\to 0^-}-|\Delta x|^{\lambda-1}\cos\frac{1}{\Delta x}$ 同理也不收敛

即 $f'_+(0)$ 与 $f'_-(0)$ 不存在

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 不可导.

$\lambda=1$ 时

$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在,

15. $f'_+(a) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)}{\Delta x}$

同理 $f'_-(b) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(b+\Delta x)}{\Delta x}$.

又 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$

$\therefore f(a+\Delta x)\cdot f(b-\Delta x)<0$

且 $f(x)$ 在 $[a+\Delta x, b-\Delta x]$ 上连续 又 $\Delta x\to 0$

$\therefore f(x)$ 在 $[a+\Delta x, b-\Delta x]$ 至少存在一个零点.

$\xi\in[a+\Delta x, b-\Delta x]\subset(a,b)$

CamScanner

1.(1) $f'(x)=\sin x+x\cdot\cos x+2e^{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(3) $f'(x)=e^{x}\left(\tan x+\frac{1}{\cos^{2}x}-x^{3}-3x^{2}+2\cos x-2\sin x\right)$

(5) $f'(x)=\left(2^{x}\ln 2+\frac{1}{x\ln 3}\right)\cos x-\left(2^{x}+\log_{3}x\right)\cdot\sin x$

(7) $f'(x)=\frac{\left(3+\frac{2}{\sin^{2}x}\right)x\ln x-3x+2\cot x}{x\ln^{2}x}$.