9. 证明：向量组为 $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \cdots, \vec{\alpha_s}$

不妨设任意线性无关组为 $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \cdots \vec{\alpha_n}$ $(n \le s)$.

则有 $k_1\vec{\alpha_1} + k_2\vec{\alpha_2} + \cdots + k_n\vec{\alpha_n} = 0$ ①

其中 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n$ 必全为0.

而线性无关组中缺失的~~元素~~向量不妨设为

$\vec{\alpha_{n+1}}, \cdots, \vec{\alpha_r}$

~~其~~ $k_{n+1}\vec{\alpha_{n+1}} + k_{n+2}\vec{\alpha_{n+2}} + \cdots + k_r\vec{\alpha_r} = 0$. ②

其中 $k_{n+1} = k_{n+2} = \cdots = k_r$

① + ②

$k_1\vec{\alpha_1} + k_2\vec{\alpha_2} + \cdots + k_r\vec{\alpha_r} = 0$.

且 $k_1 = k_2 = k_3 = \cdots = k_r$ 证毕

10. 1) 假设 $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}$ 线性相关

则 $\exists\, k_1, k_2$ 不同时为0，使 $k_1\vec{\alpha_1} + k_2\vec{\alpha_2} = 0$

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ 3k_2 - k_1 = 0 \\ 2k_1 + k_2 = 0 \\ 4k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$$

与假设矛盾. ∴ $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}$ 线性无关

2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 14 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

∴ 秩为3.

$\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_4}$

$k_1\vec{\alpha_1} + k_2\vec{\alpha_2} + k_3\vec{\alpha_4} = 0$

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ -k_1 + 3k_2 - k_3 = 0 \\ 2k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \\ 4k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

∴ $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_4}$ 为极大线性无关组.

(1, 2) 与 (0, 2) 一样秩为3.

$\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_4}$ 为他它的一组极大线性无关组.

16. 证：充分性：$|a_{ij}| \ne 0$.

⇒ 原式有唯一解

$b_1 \cdots b_n$ 不为全为0 时应用克拉默法则

$b_1 = b_2 = \cdots b_n = 0$ $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

必要性：① $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$

只有零解 ⇒ $|a_{ij}| \ne 0$

有非零解 ⇒ $|a_{ij}| = 0$.

② $b_1, b_2, \cdots b_n$ 不全为0.

$|a_{ij}| \ne 0$ 有唯一解.

$|a_{ij}| = 0$ 无解

∴ $|a_{ij}| \ne 0$ 证毕.

19. (3)

$$\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ -113 & 2 & -30 & -59 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 秩为2.

(5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ 秩为5.

9.证明：向量组为 $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \cdots, \vec{\alpha_s}$

不妨设任意线性无关组为 $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \cdots \vec{\alpha_n}$ $(n \le s)$

则有 $k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}+\cdots+k_n\vec{\alpha_n}=0$ ①

其中 $k_1=k_2=\cdots=k_n$ 必全为0.

而线性无关组中缺失的元素向量不妨设为

$\vec{\alpha_{n+1}}, \cdots, \vec{\alpha_r}$

若 $k_{n+1}\vec{\alpha_{n+1}}+k_{n+2}\vec{\alpha_{n+2}}+\cdots+k_r\vec{\alpha_r}=0$. ②

其中 $k_{n+1}=k_{n+2}=\cdots=k_r$ ×

①+②

$k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}+\cdots+k_r\vec{\alpha_r}=0$.

且 $k_1=k_2=k_3=\cdots=k_r$ 证毕

(10.1) 假设 $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}$ 线性相关

则 $\exists k_1, k_2$ 不同时为0，使 $k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}=0$

$$\begin{cases} k_1=0 \\ 3k_2-k_1=0 \\ 2k_1+k_2=0 \\ 4k_1+2k_2=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=k_2=0$$

与假设矛盾 ∴ $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}$ 线性无关

2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 14 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

∴ 秩为3.

$\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_4}$

$k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}+k_3\vec{\alpha_4}=0$

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ -k_1+3k_2-k_3=0 \\ 2k_1+k_2+2k_3=0 \\ 4k_1+2k_2=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$$

∴ $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_4}$ 为极大线性无关组.

(11.2) 与(10.2)一样 秩为3.

$\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_4}$ 为向它的一组极大线性无关组.

(i) $l=s$ 自为极大线性无关组.

(ii) $l<s$，但 $a_{l+1}, a_{l+2} \cdots a_s$ 中任意向量加入 $a_1, a_2, \cdots a_l$ 后成为线性相关向量组 则 $a_1, a_2, \cdots a_l$ 为极大无关组

(iii) $l<s$ $a_{l+1}, a_{l+2} \cdots a_s$ 中有向量加入 $a_1, a_2 \cdots a_l$ 中 仍为线性无关 再从 a_1, a_2 情况开始

若仍属(iii) 可再扩大 但不可无限扩 最后属于(i)或(ii)

证：充分性：$|a_{ij}| \ne 0$.

⇒ 原式有唯一解

$b_1 \cdots b_n$ 不全为0时应用克拉默法则

$b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 时 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

必要性：① $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$

只有零解 ⇒ $|a_{ij}| \ne 0$.

有非零解 ⇒ $|a_{ij}|=0$.

② $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为0.

$|a_{ij}| \ne 0$ 有唯一解.

$|a_{ij}|=0$ 无解

∴ $|a_{ij}| \ne 0$ 证毕.

$|a_{ij}| \ne 0$ ⇔ $a_1, a_2, \cdots a_n$ 线性无关 ⇔ 任一 β 是 $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots \vec{a_n}$ 的线性组合 ⇔ 任何 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 均有解.

19.(3)

$$\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ -113 & 2 & -30 & -59 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 秩为2.

(5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ 秩为5.