1. $x_0\in[a,b]$ $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim_{x\to x_0}f(x_0)}=\frac{1}{f(x_0)}$

$\therefore \frac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 连续

$\forall\varepsilon>0$ $\delta>0$, $|x-x_0|<\delta$

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

$\varepsilon_0<\frac{f(x_0)}{2}$ $\exists\delta_2>0$ $|x-x_0|<\delta$

有 $|f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2}$

$\frac{f(x_0)}{2}<f(x)<\frac{3f(x_0)}{2}$

$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}\right|=\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x)\cdot f(x_0)}\right|<2\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{f^2(x_0)}\right|<\frac{2\varepsilon}{f^2(x_0)}$ 连续

2. ~~若 $f(x)>0$~~ 由题 $\lim_{x\to x_0}f(x_0)=f(x_0)$

1. $f(x)\leq 0$ ~~若~~ $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=\lim_{x\to x_0}-f(x)$

用ε定义

$=-f(x_0)=|f(x_0)|$

2. $f(x)>0$ $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$0\leq\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|\leq|f(x)-f(x_0)|$

$=|f(x_0)|$

$\therefore |f(x)|$ 在 x_0 处连续

反之举例.

~~$f^2(x)$~~ $\lim_{x\to x_0}f^2(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}f(x)$

$=f(x_0)\cdot f(x_0)=f^2(x_0)$

$\therefore$ 成立

$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$

2) $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 或 $\lim_{x\to x_0}f(x)=-f(x_0)$

$\lim_{x\to x_0}f^2(x)=f^2(x_0)\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

或 $\lim_{x\to x_0}f(x)=-f(x_0)$

$\therefore f(x)$ 不一定在 x_0 处连续

3.(1). $x=1$ 和 $x=2$ → 可去

函数不存在定义 第二类无穷间断点

(2). 没有不连续点

$x\to0^-$ $e^{\frac{1}{x}}=0$

$x\to0^+$ $\sin x=0$

可去间断点 ~~$\lim_{x\to0}\frac{e^x}{x}$~~ 拼凑构建 $\frac{\ln(x+1)}{x}\to1$ $\frac{e^x-1}{x}\to1$

(3). $x=\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$

$\tan x$ 若 ~~$k\pi$~~ $x\neq\frac{k\pi}{2}+k\pi$. $k\in Z$

$x=0$ $\lim_{x\to0}f(x)=1$ 可去.

$x=k\pi$. $\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=\infty$ 第二类

$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 可去.

(4). $\boxed{x=0}$ 可去. $\boxed{x=1}$ 跳跃

$x\to1^-$ $x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

$x\to1^+$ $x\left[\frac{1}{x}\right]=0$

$x=\frac{1}{k}$ 跳跃.

$x=-\frac{1}{k}$ 跳跃.

4.(2) 令 $\sqrt[n]{1-2x}=t$

$x=\frac{1-t^n}{2}$,

$\lim_{t\to1}\frac{(1-t)\cdot2}{1-t^n}$

$\lim_{t\to1}\frac{2}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}=\frac{2}{n}$.

(4) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x\cdot x^2(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\cdot\cos x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\cdot4\cdot\cos x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$=\frac{1}{4}$

(5). 令 $\cos x=t^6$

原式 $=\lim_{x\to0}\frac{t^3-t^2}{2x\cdot\sin x\cdot t^6}=\lim_{x\to0}\frac{t-1}{2x\cdot\sin x\cdot t^4}$

$x\sim\sin x$

$\lim_{t\to1}\frac{t-1}{2\sin^2x\cdot t^4}$

$\lim_{t\to1}\frac{t-1}{2(1-t^{12})t^4}$

$=\lim_{t\to1}\frac{-1}{2(1+t+\cdots+t^{11})\cdot t^4}$

$=-\frac{1}{24}$

(6) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^x-2x^2)}{\ln(e^{3x}+x^2)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+e^x-2x^2-1)}{\ln(1+x^2+e^{3x}-1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+e^x-2x^2-1)}{e^x-2x^2-1}\cdot\frac{x^2+e^{3x}-1}{\ln(1+x^2+e^{3x}-1)}\cdot\frac{e^x-2x^2-1}{x^2+e^{3x}-1}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-2x}{x+\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot3}$

$=\frac{\lim_{x\to0}(\frac{e^x-1}{x}-2x)}{\lim_{x\to0}(x+\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot3)}$

CamScanner

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln e^x(1-\frac{2x^2}{e^x})}{\ln e^{3x}(1+\frac{x^2}{e^{3x}})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\ln(1-\frac{2x^2}{e^x})}{3x+\ln(1+\frac{x^2}{e^{3x}})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{x}\ln(1-\frac{2x^2}{e^x})}{3+\frac{1}{x}\ln(1+\frac{x^2}{e^{3x}})}$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1-\frac{2x^2}{e^x})$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{2x^2}{e^x}}{x}\cdot\frac{\ln(1-\frac{2x^2}{e^x})}{-\frac{2x^2}{e^x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}(-2x)=0$,

原式$=\frac{1}{3}$.

5. ① 极限 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=A$.

由题 $f(ax)=f(x)$ 极限 ⇒ 所有 x. 所有 ⇒ 极限 ✓

∴ $\lim\limits_{x\to0^+}f(ax)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=A$.

$f(x)=f(ax)=\cdots=f(a^nx)$

$a>1$ | $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=+\infty$, $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(a^nx)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(y)=A$

$1>a>0$ $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=0$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a^nx)=\lim\limits_{x\to0^+}f(y)=A$.

为常值

7. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x_0)=f(x_0)$ △

$f(x_0+1)=f(x_0)+f(1)$ 取 $x>y>0$

$f(x_0+2)=f(x_0+1)+f(1)$ ⇒ $f(0)=0$

$x=x$ $y=-x$

$f[x+(-x)]=f(x)+f(-x)=0$ ∴奇

$f(x_0+x)=f(x_0+x-1)+f(1)$

$\Rightarrow f(x_0+x)=f(x_0)+x\cdot f(1)$

$f(x_0+x)=f(x_0)+f(x)$

$\Rightarrow f(x)=x\cdot f(1)$ 仅 $x\in N^*$

$\boxed{任意都成立}$

设 $x=\frac{n}{m}>0$ $n=mx$

$f(n)=n\cdot f(1)=f(mx)=m\cdot f(x)=mf(x)$ ∴ $f(x)=\frac{n}{m}f(1)$ ∴唯一.

9. $x\in[a,b]$, $f(x)\in(a,b)$

∴ ~~x_n~~ $x_n\in(a,b)$

∵ $f(x)\nearrow$

∴ $f(x_{n+1})-f(x_n)>0$

∴ $x_{n+2}-x_{n+1}>0$ ∴ $x_n\nearrow$.

∴ x_n必有极限

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$. → $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{n+1}=f(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)$

⇒ ~~$x_{n+1}=f(x_n)$~~ $c=f(c)$.

$c\to b^-$.

10. $|f(x)-f(y)|\le k|x-y|<|x-y|$

令 $y=0$

~~$|f(x)|\le k\cdot|x|<|x|$~~ $|f(x)-f(0)|\le k|x|<|x|$

~~∴ $f(x)\in[-|x|,|x|]$~~ $f(x)\in[f(0)-|x|, f(0)+|x|]$.

~~即 $f(x)$ 有界~~ 即 $f(x)$ 有界

~~$f(x_n)\in[-|x_n|,|x_n|]$~~ $f(x_n)\in[f(0)-|x_n|, f(0)+|x_n|]$.

~~令 $x_{n+1}=f(x_n)$~~ $x_{n+1}=f(x_n)$

∴ ~~$f(x_{n+1})\in[-|x_{n+1}|,|x_{n+1}|]$~~ $f(x_{n+1})\in[f(0)-|x_{n+1}|, f(0)+|x_{n+1}|]$

~~$\in[-|f(x_n)|,|f(x_n)|]$~~. $\in[f(0)-|f(x_n)|, f(0)+|f(x_n)|]$

~~∴ $n\to+\infty$~~

~~$f(x_n)\to0$~~

$|x_{n+1}-x_n|=|f(x)-f(x_{n-1})|\le k|x_n-x_{n-1}|$

$\le k|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|\le k^2|x_{n-1}-x_{n-2}|\le\cdots\le k^{n-1}|x_2-x_1|$

$|x_{n+p}-x_n|\le|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$

$\le(k^{n+p-2}+k^{n+p-3}+\cdots+k^n)|x_2-x_1|$

$=k^n\frac{1-k^{p-1}}{1-k}|x_2-x_1|\le\frac{k^n}{1-k}|x_2-x_1|$

∵ $k\in(0,1)$ ∴ $\{x_n\}$是柯西数列 ∴ x_n收敛

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in Z^+$, 当 $n>N$ 时, $|x_n-\xi|<\varepsilon$

$|f(x_n)-f(\xi)|\le k|x_n-\xi|\le k\cdot\varepsilon<\varepsilon$.

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\xi)$

对 $x_{n+1}=f(x_n)$ 取极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\xi=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\xi)$