

**Теор. 17.4)**

Действительная и мнимая части аналитической в области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  функции имеют в этой области непрерывные частные производные всей порядков .

« Для производной арифметической функции  $f(z) = U(x, y) + i V(x, y)$  существуют различные формулы.

$$f'(z) = U'_x + i V'_x = V'_y + i V'_x = U'_x - i U'_y = V'_y - i U'_y . \quad (17.5)$$

Но формула  $f'(z)$  в свою очередь дифференцируема (как сумма некоторого сходящегося степенного ряда) , и, значит, непрерывна в  $\mathcal{D}$ . Отсюда вытекает непрерывность всех частных производных первого порядка для функций  $U$  и  $V$ .

Рассматривая на основ. (17.5) аналогичные представления для  $f''(x)$  ,  $f'''(x)$  и т.д. , приходим к требуемому. »

Напомним, что вещественная функция  $\varphi(x, y)$  , называется гармонической в некоторой области, если в этой области она имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет всюду в  $\mathcal{D}$  уравнению Лапласа :

$$\Delta \varphi = \varphi''_{x^2} + \varphi''_{y^2} \equiv 0 .$$

Как следствие из теоремы 17.4 получим следующее свойство :

**Теор . 17.5)**

Действительная и мнимая части аналитической в области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  функции  $f = U + i V$  являются гармоническими в этой области функциями.

«В данном случае функции  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$  имеют в области  $\mathcal{D}$  непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяют условиям  $(C - R)$  :

$$\begin{cases} U'_x = V'_y \\ U'_y = -V'_x \end{cases}.$$

Дифференцируется здесь 1 – ое равенство по  $x$ , а 2 – ое по  $y$ , и складывая их почленно, получим, что  $\Delta U \equiv 0$ . Аналогично, дифференцируется 1 – ое равенство по  $y$ , а 2 – ое по  $x$ , и вычитая их почленно, имеем :  $\Delta U \equiv 0$ . »

Теор. 17.6) (Дж. Мореры)

Пусть  $f(z)$  – непрерывная в области

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{C} \text{ функция и интеграл } \oint f(z) dz = 0,$$

то любой замкнутый спрямляемой кривой  $\mathcal{L} \subset \mathcal{D}$ . Тогда  $f$  – аналитическая в  $\mathcal{D}$  функция.

«В данном случае на основании теоремы 15.2 функция

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(t) dt.$$

является аналитической в  $\mathcal{D}$  и, кроме того,  $F'(z) = f(z)$ . Но производная аналитической функции также является аналитической, т.е.  $f(z)$  – аналитическая в  $\mathcal{D}$  функция. »

Эта теорема является в некотором смысле обратной интегральной теореме Коши для односвязной области. Разница лишь в том, что область  $\mathcal{D}$  в теореме ~~Мореры~~ может быть многосвязной, а на  $f$  накладывается условие

непрерывности. Это условие существенно.

Пример 17.1 Пусть  $f(z) = \begin{cases} 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \\ 1, & z = z_0 \end{cases}$ .

Тогда  $\oint f(z) dz = 0$  по любой замкнутой спрямляемой кривой  $\mathcal{L} \subset \mathcal{D}$ . Но  $f(z)$  не является аналогичной в  $\mathcal{D}$ , ибо она не является тоже непрерывной (в т.  $z_0$ ).

Теор. 17.7)

(К. Вейерштрасса о равномерно сходящихся рядах аналитических функций)

Пусть члены ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$  ( $f(z) = \infty$ ) –

аналитический в области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  функции,  
а сам ряд сходится равномерно на  
любом компакте из области  $\mathcal{D}$ . Тогда :

- 1) сумма ряда  $f(z)$  – является аналитической в  $\mathcal{D}$  функций.
- 2) ряд можно почленно дифференцировать любое число раз

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z), \quad z \in \mathcal{D} \quad (n = 1, 2, \dots).$$