Теор. 17.4

Действительная и мнимая части аналитической в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ функции имеют в этой области непрерывные частные производные всей порядков .

△

Для производной арифметической функции $f(z) = U(x, y) + i\,V(x, y)$ существуют различные формулы.

$$f'(z) = U'_x + i\,V'_x = V'_y + i\,V'_x = U'_x - i\,U'_y = V'_y - i\,U'_y . \qquad (17.5)$$

Но формула $f'(z)$ в свою очередь дифференцируема (как сумма некоторого сходящегося степенного ряда), и, значит, непрерывна в $\mathcal{D}$. Отсюда вытекает непрерывность всех частных производных первого порядка для функций U и V. Рассматривая на основ. (17.5) аналогичные представления для $f''(x)$, $f'''(x)$ и т.д., приходим к требуемому.

▽

Напомним, что вещественная функция $\varphi(x, y)$, называется гармонической в некоторой области, если в этой области она имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет всюду в $\mathcal{D}$ уравнению Лапласа:

$\triangle\varphi = \varphi''_{x^2} + \varphi''_{y^2} \equiv 0.$

Как следствие из теоремы 17.4 получим следующее свойство:

Теор . 17.5

Действительная и мнимая части аналитической в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ функции $f = U + i\,V$ являются гармоническими в этой области функциями.

△

В данном случае функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$ имеют в области $\mathcal{D}$ непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяют условиям $(C - R)$:

$$\begin{cases} U'_x = V'_x \\ U'_y = -V'_x \end{cases} .$$

Дифференцируется здесь первое равенство по x, а второе по y, и складывая их почленно, получим, что $\triangle U \equiv 0$. Аналогично, дифференцируется первое равенство по y, а второе по x, и вычитая их почленно, имеем: $\triangle U \equiv 0$.

$\triangledown$

Теор. 17.6. (Дж. Мореры)

Пусть $f(z)$ — непрерывная в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ функция и интеграл $\oint f(z)\,dz = 0$, то любой замкнутый спрямляемой кривой $\mathcal{L} \subset \mathcal{D}$.
Тогда f — аналитическая в $\mathcal{D}$ функция.

$\triangle$

В данном случае на основании теоремы 15.2 функция

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)\,dt.$$

является аналитической в $\mathcal{D}$ и, кроме того $F'(z) = f(z)$. Но производная аналитической функции также является аналитической, т.е. $f(z)$ — аналитическая в $\mathcal{D}$ функция.

$\triangledown$

Эта теорема является в некотором смысле обратной интегральной теореме Коши для односвязной области. Разница лишь в том, что область $\mathcal{D}$ в теореме Мореры может быть многосвязной, а на f накладывается условие непрерывности. Это условие существенно.

Пример 17.1

Пусть $(z) = \begin{cases} 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{Z}_0\} \quad \square \\ 1, & z = z_0 \quad \square \end{cases}.$

Тогда $\oint f(z)\,dz = 0$ по любой замкнутой спрямляемой кривой $\mathcal{L} \subset \mathcal{D}$. Но $f(z)$ не является аналогичной в $\mathcal{D}$, ибо она не является тоже непрерывной (в точке z_0).

Теор. 17.7. (К. Вейерштрасса о равномерно сходящихся рядах аналитических функций)

Пусть члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\ (f(z) = \infty)$ — аналитический в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ функции, а сам ряд сходится равномерно на любом компакте из области $\mathcal{D}$. Тогда:
1) сумма ряда $f(z)$ — является аналитической в $\mathcal{D}$ функций.
2) ряд можно почленно дифференцировать любое число раз

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z), \;\; z \in \mathcal{D} \; (n = 1, 2, \; ...).$$