17.2 Другие свойства аналитических функций.

Теорема 17.4

Действительная и мнимая части аналитической в области $D \subset \mathbb{C}$ функции имеют в этой области непрерывные частные производные всех порядков .

△

Для производной арифметической функции $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ существуют различные формулы.
$f'(z) = u'_x + i\,v'_x = v'_y + i\,v'_x = u'_x - i\,u'_y = v'_y - i\,u'_y$.
(17.5)
Но функция $f'(z)$ в свою очередь дифференцируема (как сумма некоторого сходящегося степенного ряда), и, значит, непрерывна в D. Отсюда вытекает непрерывность всех частных производных первого порядка для функций u и v. Рассматривая на основ. (17.5) аналогичные представления для $f''(x)$, $f'''(x)$ и т.д., приходим к требуемому.

▽

Напомним, что вещественная функция $\varphi(x, y)$, называется гармонической в некоторой области, если в этой области она имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет всюду в D уравнению Лапласа:

$\Delta\varphi = \varphi''_{x^2} + \varphi''_{y^2} \equiv 0.$

Как следствие из теоремы 17.4 получим следующее свойство:

Теорема 17.5

Действительная и мнимая части аналитической в области $D \subset \mathbb{C}$ функции $f = u + i\,v$ являются гармоническими в этой области функциями.

△

В данном случае функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют в области D непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяют условиям $(C - R)$:

$$\begin{cases} u'_x = v'_x \\ u'_y = -v'_x \end{cases}.$$

Дифференцируется здесь первое равенство по x, а второе по y, и складывая их почленно, получим, что $\Delta u \equiv 0$. Аналогично, дифференцируется первое равенство по y, а второе по x, и вычитая их почленно, имеем: $\Delta u \equiv 0$.

▽

Теорема 17.6. (Дж. Мореры)

Пусть $f(z)$ — непрерывная в области $D \subset \mathbb{C}$ функция и интеграл $\oint f(z)\,dz = 0$ по любой замкнутый спрямляемой кривой $L \subset D$. Тогда f — аналитическая в D функция.

△

В данном случае на основании теоремы 15.2 функция

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)\,dt.$$

является аналитической в D и, кроме того $F'(z) = f(z)$. Но производная аналитической функции также является аналитической, т.е. $f(z)$ — аналитическая в D функция.

▽

Эта теорема является в некотором смысле обратной интегральной теореме Коши для односвязной области. Разница лишь в том, что область D в теореме Мореры может быть многосвязной, а на f накладывается условие непрерывности. Это условие существенно.

Пример 17.1

Пусть $(z) = \begin{cases} \square & \square \\ \square & \square \end{cases}$

Тогда $\oint f(z)\,dz = 0$ по любой замкнутой спрямляемой кривой $L \subset D$. Но $f(z)$ не является аналитической в D, ибо она не является тоже непрерывной (в точке z_0).

Теорема 17.7 (К. Вейерштрасса о равномерно сходящихся рядах аналитических функций)

Пусть члены ряда $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ — аналитический в области $D \subset \mathbb{C}$ функции, а сам ряд сходится равномерно на любом компакте из области D. Тогда:
1) сумма ряда $f(z)$ — является аналитической в D функций.
2) ряд можно почленно дифференцировать любое число раз $f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z),\ z \in D\ (n = 1, 2, \ldots)$.