Kurs 01610 SIMULATION

Einsendeaufgaben zur Kurseinheit 4

Aufgabe 1 (25 Punkte)

Bis Ende Juni kann in heimischen Gärten der Rhabarber geerntet werden. Seinen seltsamen Namen hat der Rhabarber aus dem Lateinischen, wo er *Rheum barbarum* genannt wurde, was soviel bedeutet wie *Wurzel der Barbaren*. Wichtig bei der Ernte ist es, nicht mehr als die Hälfte der Rhabarberstangen zu entfernen, da die Pflanze sonst im nächsten Jahr eine kleinere Ernte liefert. Wir modellieren ein Rhabarberfeld durch ein deterministisches Modell:

$$x_{n+1} = x_n \cdot (4 - x_n) - r \tag{1}$$

Die Variable x repräsentiert ein Dutzend Rhabarberpflanzen, n die vergangenen Jahre seit beginn der Pflanzung und r die Erntemenge.

1. Simulieren Sie die Entwicklung der Rhabarberpflanzen für 30 Jahre mit $x_0 = 1$ und den Erntemengen $r \in \{0.1, 1.2, 1.7\}$. Plotten Sie für jede Iteration ein n-x_n-Diagramm. Welche Unterschiede können Sie erkennen?

2. Erstellen Sie ein Bifurkationsdiagramm[1] für $n = 1000$ Iterationsschritte und Startwert $x_0 = 1$ mit dem Bifurkationsparameter $r \in [0, 2]$ mit $m = 1000$ diskretisierten Werten. Plotten Sie das Ergebnis:

   – Wählen Sie einen Wert r aus dem diskretisierten Intervall
   – Iterieren Sie n Schritte mit dem ausgewählten Bifurkationsparameter
   – Plotten Sie die letzten 100 Iterationen als senkrechte Linie über r
   – Wiederholen Sie den Vorgang für alle Werte des Bifurkationsparameters

3. Analysieren Sie das Bifurkationsdiagramm und beantworten Sie die folgenden Fragen:

   – Berechnen Sie die stationären Punkte (Fixpunkte) für $r = 1$. Wie können Sie die stabilen Punkte im Bifurkationsdiagramm für $r = 1$ interpretieren?
   – Für welche Bifurkationsparameter ist das System chaotisch?
   – Was passiert im Sonderfall $r = 0$?

[1] Siehe Basistext Seite 287

Aufgabe 2 (35 Punkte)

Im Monat Juni suchen Glühwürmchen in lauen Sommernächten nach einem Partner und leuchten in der Abenddämmerung im Garten. Das folgende Modell beschreibt die Populationsdynamik von Glühwürmchen in einem Landschaftsschutzgebiet:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x + \beta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy$$

Die Variablen repräsentieren 100 Glühwürmchen, x weibliche Tiere und y männliche. Die positiven Parameter α und γ beschreibt die Todesrate der Tiere, β und δ die Geburtenrate abhängig vom Paarungsverhalten. Vereinfachend nehmen wir an, dass die Geburtenrate und Todesrate für beide Geschlechter gleich groß ist.

1. Es sei $\alpha = \gamma = 0.5$ und $\beta = \delta = 0.1$. Berechnen Sie die Koordinaten der Fixpunkte.

2. Simulieren Sie die Glühwürmchen-Population für verschiedene Anfangswerte mit dem expliziten Eulerverfahren. Plotten Sie die Kurven in ein gesammeltes x-y-Diagramm

   – Verwenden Sie die Parameterwerte aus der vorherigen Aufgabe
   – Iterieren Sie über das Zeitintervall $t \in [0, 20]$ mit $n = 500$ Iterationsschritten
   – Wählen Sie als Anfangswerte $(x_0, y_0) = (8, c)$ oder $(x_0, y_0) = (c, 8)$ mit $c \sim 2.7$
   – Beschränken Sie das Diagramm auf $x \in [0, 8]$ und $y \in [8, 0]$

3. Beantworten Sie mit dem x-y-Diagramm die folgenden Fragen:

   – Sind die Fixpunkte anziehend oder abstoßend?
   – Für welche Anfangswerte können die Glühwürmchen überleben?
   – Wie können Sie ihre Ergebnisse aus biologischer Sicht interpretieren?

4. Experimentieren Sie mit den Parametern. Wie verändert sich die Lage der Fixpunkte?

5. Das Modell beschreibt nur das Paarungsverhalten und die Todesrate der zwei Geschlechter. In der Natur können weitere Faktoren die Populationsdynamik beeinflussen, wie könnte man das Modell verbessern?

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Im Staudenbeet haben Blattläuse ein neues Zuhause gefunden. Wird eine Pflanze von einer Blattlaus-Kohorte befallen, dauert es eine gewisse Zeit bis die Pflanze sich der Nutznieser entledigen kann. Bekämpft werden die Blattläuse durch ihre Fressfeinde wie Spinne, Raupe oder Marienkäfer. In der Epidemologie wird die Krankheitsausbreitung mit dem Kermack-McKendrick Modell[2] simuliert. Der Parameter α beschreibt die Genesungsrate, also den An-

Variable	**Name**	**Bedeutung**	**Modell**
S	Susceptible	Bevölkerungsteil mit Ansteckungsgefahr	$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$
I	Infected	Infizierter Bevölkerungsanteil	$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I$
R	Recovered	Immune Bevölkerung	$\frac{dR}{dt} = \alpha I$
N	$S + I + R = N$	Gesamtbevölkerung	

teil der befallenen Pflanzen die sich pro Zeitschritt von den Blattläusen befreien. In diesem Modell können genesene Pflanzen nicht erneut von Blattläusen befallen werden. Der Parameter β modelliert die Infektionsrate. Ist der Anteil der Infizierten Pflanzen I höher, so steigt die Zahl der Neuinfektionen. Simulieren und plotten Sie die S, I und R Kurven in Relation zur Zeiteinheit in dasselbe Diagramm, für $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.01$, $S_0 = 200$, $I_0 = 1$ und $R_0 = 0$

- Wie lange dauert es, bis die Blattläuse das Beet wieder verlassen?
- Nehmen Sie an, dass sich die Pflanzen nach einem Befall erneut infizieren können.
  - Wie sieht das neue Differentialgleichungsssystem aus?
  - Wie verändert sich die Dynamik des Systems?

Aufgabe 4 (25 Punkte)

In einem Gemüsebeet wohnt eine Regenwurm-Kolonie mit der folgenden Wachstumsfunktion:

$$x_{n+1} = r x_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right) \tag{2}$$

Die Variable x repräsentiert zehn Regenwürmer. Der Parameter r modelliert die Wachstumsrate der Population und der Parameter K beschreibt die Kapazität.

1. Simulieren Sie die Populationsdynamik für $r = 2$ und $K = 5$ mit einer Anfangsmenge von $x_0 = 1$ und plotten Sie Ihr Ergebnis. Experimentieren Sie mit der Kapazität K.
   - Was passiert wenn die Startmenge der Regenwürmer größer als K ist?
   - Welche ökologische Bedeutung hat K?
2. Setzen Sie $K = 5$ und betrachten Sie den Bifurkationsparameter r.
   - Bestimmen sie die zwei Fixpunkte in Abhängigkeit von r
   - Für welche Werte von r sind die Fixpunkte anziehend oder abstoßend?

[2] Auch bekannt als SIR-Modell

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe)

Neben dem Gemüsebeet mit der Regenwurm-Kolonie aus der vorherigen Aufgabe, nisten im angrenzenden Obstbaumgarten Amseln. Die Amseln sammeln die Regenwürmer aus dem Gemüsebeet und füttern einen Teil ihre Beute an ihren Nachwuchs. Wir beschreiben die Dynamik mit dem folgenden Modell:

$$\frac{dx}{dt} = 1.1x - 0.4xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 0.1xy - 0.4y$$

Die Variable x repräsentiert zehn Regenwürmer, die Variable y fünf Amseln.

1. Simulieren Sie die Populationsdynamik mit dem expliziten Eulerverfahren für $t \in [0, 30]$, $x_0 = 10$, $y_0 \in [2, 6, 8, 10]$ und plotten Sie Ihre Ergebnisse in ein x-y-Diagramm
   - Welche Besonderheit können Sie in der Dynamik erkennen?
   - Wie groß ist die langfristige Überlebenswahrscheilichkeit der Vögel?

Wir betrachten nun ein verfeinertes Modell mit der maximalen Kapazität aus der vorherigen Aufgabe:

$$\frac{dx}{dt} = 1.1x(1 - x/15) - 0.4xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 0.1xy - 0.4y$$

2. Simulieren Sie die Populationsdynamik mit dem expliziten Eulerverfahren für $t \in [0, 30]$, $x_0 = 10$, $y_0 = 5$ und plotten Sie Ihre Ergebnisse in ein x-y-Diagramm
   - Welchen Unterschied können Sie zum vorherigen Modell erkennen?
   - Wie schätzen Sie die langfristige Entwicklung in diesem Fall ein?