Kurs 01610 SIMULATION

Einsendeaufgaben zur Kurseinheit 2

Aufgabe 1 (25 Punkte)

Um eine Differentialgleichung numerisch zu lösen, kann das explizite oder implizite Eulerverfahren[1] verwendet werden. Das Eulerverfahren löst auf dem Zeitintervall $t \in [t_0, t_N]$ ein Anfangswertproblem

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t), t) \quad \text{mit } y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

Für das Eulerverfahren wird das Zeitintervall mit der Startzeit t_0 und der Endzeit t_N in n gleich große Zeitschritte mit der Zeitdauer h aufgeteilt. Die Länge eines Zeitschritts h wird wie folgt berechnet:

$$h = \frac{t_N - t_0}{n}$$

Die Differentialgleichung wird nun schrittweise angenähert, wobei die vorherige Lösung verwendet wird um den nächsten Wert auszurechnen.

Explizites Eulerverfahren
Anfangswert $x(0) = x_0$ gegeben

FOR $i = 0, ..., n-1$
$x_{i+1} = x_i + h \cdot f(x_i, t_i)$

Implizites Eulerverfahren
Endwert $x(t_N) = x_N$ gegeben

FOR $i = n-1, ..., 0$
$x_i = x_{i+1} - h \cdot f(x_{i+1}, t_{i+1})$

Betrachten wir eine Population von Wasserschnecken in einem Zeitintervall von $t \in [0, 20]$ Jahren. Die Schnecken vermehren sich mit einem Wachstumsfaktor c abhängig von ihrer Bevölkerungsstärke:

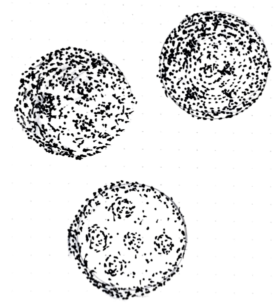
$$\frac{dy(t)}{dt} = c \cdot y \quad \text{mit } y(0) = 4 \tag{2}$$

1. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung 2 mit dem Expliziten Eulerverfahren[2] für $c = 0.2$ und $n = 200$. Plotten Sie ihr Ergebnis.
2. Wie ändert sich die Simulation mit weniger Zeitschritten?
3. Implementieren Sie das implizite Eulerverfahren für $c = 0.2$ und $y(20) = 300$. Wie viele Wasserschnecken hatte die Population am Anfang?
4. Für welche Werte von c ist die Wasserschnecke vom Aussterben bedroht?

[1] Im Basistext wird das Eulerverfahren im Kapitel 2.4.5 erläutert
[2] Hilfestellung finden Sie im Jupyter-Notebook

Aufgabe 2 (25 Punkte)

In dem Wasserbecken einer Forschungseinrichtung wird die Diffusion von Grünalgen in Wasser beobachtet. Das Becken ist Ringförmig und hat eine Länge von $l = 20$m. Um die Diffusion zu beobachten, wird das Wasserbecken in $n = 360$ äquidistante Volumenabschnitte unterteilt und die Dichte der Grünalgen für $m = 60$ Minuten beobachtet. Die Dichte der Grünalgen beschreibt die Anzahl der Zellen pro Volumeneinheit und kann durch einen Farbtest bestimmt werden. Die Ausbreitung der Dichte soll nun mithilfe der Fundamentalgleichung[3] modelliert werden:



$$\rho_{i,j+1} = \rho_{i,j} - \frac{\delta t}{h} v_{max} \left(\left(1 - \frac{\rho_{i+1,j}}{\rho_{max}} \right) \rho_{i+1,j} - \left(1 - \frac{\rho_{i,j}}{\rho_{max}} \right) \rho_{i,j} \right)$$

Der Index i beschreibt die Unterteilung des Wasserbeckens und der Index j die Zeitschritte im expliziten Eulerverfahren. Während dem Experiment werden $v_{max} = 0.1$ und $\rho_{max} = 1$ gemessen.

1. Simulieren Sie die Dichtefunktion mit dem expliziten Eulerverfahren für die Startdichte $\rho(x, 0) = 0.2 \cdot \cos(x) + 0.5$. Plotten Sie ihr Ergebnis für 0, 10, 30 und 60 Minuten

2. Setzen Sie die Startdichte auf $\rho(x, 0) = 0.2$. Nun wird eine Nährlösung $\rho(0, t) = 0.8$ mit Grünalgen konstant dem Wasserbecken zugeführt. Plotten Sie die Ausbreitung der Grünalgen.

Aufgabe 3 (15 Punkte)

In das Wasserbecken werden nun 5 Flusskrebse eingesetzt. Das Wasserbecken wird in 20 Zellen unterteilt und die Position sowie Geschwindigkeit der Flusskrebse beobachtet. Die Bewegung der Krebse wird mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell modelliert:

- **Beschleunigen:** Falls ein Krebs die Maximalgeschwindigkeit 5 noch nicht erreicht hat, wird seine Geschwindigkeit um eins erhöht

- **Bremsen:** Falls die Anzahl der Zellen zum nächsten Flusskrebs kleiner ist als die Geschwindigkeit, wird die Geschwindigkeit auf die Größe der Lücke reduziert

- **Fahren:** Alle Krebse werden ihrer momentanen Geschwindigkeit entsprechend vorwärts bewegt.

Für die Flusskrebse werden die Anfangspositionen $[0, 2, 5, 9, 12]$ und Anfangsgeschwindigkeiten $[5, 1, 3, 2, 5]$ notiert.

1. Implementieren Se den Algorithmus und simulieren Sie die Bewegung der Flusskrebse für 10 Zeitschritte. Visualisieren Sie ihre Ergebnisse.

2. Erklären Sie die Unterschiede zwischen der makroskopischen Simulation in Aufgabe 2 und der Mikroskopischen Simulation in Aufgabe 3.

[3] Siehe Kapitel 7.2.2 auf Seite 145

Aufgabe 4 (35 Punkte)

Conways Spiel des Lebens ist ein zweidimensionaler zellulärer Automat, der eine mikroskopische Ausbreitung modelliert. Auf dem Spielfeld haben Zellen den Zustand DEAD oder ALIVE. Der Zustand einer Zelle wird von den acht Nachbarn der Zelle beeinflusst. Pro Zeitschritt erlebt eine Zelle das Ereignis BIRTH, SURVIVAL oder DEATH. Jede Generation unterliegt den folgenden Spielregeln:

Ereignis	Lebende Nachbarn	Zustandsänderung
BIRTH	3	DEAD $\rightarrow$ ALIVE
SURVIVAL	2 oder 3	ALIVE $\rightarrow$ ALIVE
DEATH	Nicht 2 oder 3	ALIVE $\rightarrow$ DEAD

0	0	0	0	0
1	2	3	2	1
1	1	2	1	1
1	2	3	2	1
0	0	0	0	0

0	1	1	1	0
0	2	1	2	0
0	3	2	3	0
0	2	1	2	0
0	1	1	1	0

Das Spielfeld besteht aus m Zeilen und n Spalten und ist von toten Zellen umgeben. Im Beispiel rechts werden zwei Generationen von *blinker* in einem 5×5 Spielfeldes visualisiert. Die Zahlen im Gitternetz repräsentieren die Anzahl der lebenden Nachbarn.

Um *Conways Spiel des Lebens*[4] zu simulieren, werden die folgenden Funktionen benötigt:

- PARSETEXTFILE: Übersetzt eine Text-Datei in ein Spielfeld. Die Zustände werden dabei mit 0 und 1 initialisiert.
- COUNTNEIGHBORS: Summiert die Anzahl der lebenden Nachbarn für jede Zelle im Spielfeld. Die Skizze rechts beschreibt die x und y Koordinaten der Nachbarn.
- UPDATESTATE: Generiert mithilfe der Spielregeln das Spielfeld der nächsten Generation

x-1,y-1	x,y-1	x+1,y-1
x-1,y	x,y	x+1,y
x-1,y+1	x,y+1	x+1,y+1

Programmieren Sie einen zellulären Automaten mit den Spielregeln von *Conways Spiel des Lebens*. Testen Sie ihren Algorithmus mit der Vorlage *blinker*[5], indem Sie die ersten zwei Generationen visualisieren.

1. Plotten Sie die ersten vier Generationen von *blinker*, *toad*, *beacon* und *clock*. Welches Verhalten können Sie beobachten?

2. Plotten Sie die ersten zwölf Generationen von *trafficlight* und *glider*. Welches Verhalten prognostizieren Sie für die weiteren Generationen?

3. Zusatzaufgabe: Animieren Sie *Gorsper Glider Gun* als GIF. Welches Lied würden Sie als Hintergrundmusik zur Animation empfehlen?

[4]Weitere Informationen und Vorlagen finden Sie auf der Internetseite `conwaylife.com`

[5]Die Text-Dateien für die folgenden Aufgaben finden Sie im Zusatzmaterial *Vorlagen*