Kurs 01610 SIMULATION

Einsendeaufgaben zur Kurseinheit 3

Aufgabe 1 (25 Punkte)

Radioaktiver Zerfall ist ein gutes Beispiel für zufällig eintretende Ereignisse. Es ist zwar möglich die Wahrscheinlichkeit anzugeben, mit der ein Atom in den nächsten Minuten zerfällt, aber der tatsächliche Zeitpunkt ist nicht vorhersehbar.
Um Modelle mit zufälligen Ereignissen simulieren zu können, braucht man einen Pseudozufallsgenerator. Dieser erzeugt Zufallsvariablen, die so unregelmäßig und unvorhersehbar wie möglich sein sollen. Da der Generator allerdings ein Algorithmus ist und damit vorhersehbare Werte liefert, simuliert er nur bis zu einem gewissen Grad tatsächlichen Zufall.

Einen einfachen Pseudozufallsgenerator liefert die lineare Kongruenzmethode:

```
PARAMETER a,b,m
SEED x_0
FOR i = 0,...,n
    x_{i+1}=(a·x_i+b) MODULO m
```

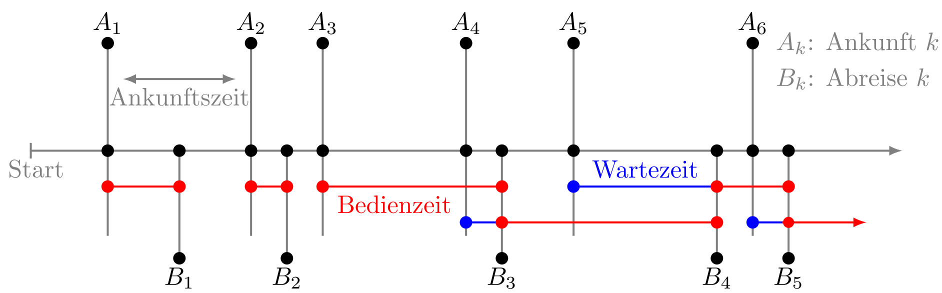
Im Pseudozufallsgenerator werden die Parameter a, b und m festgelegt. Als Startwert dient ein zufällig erzeugter Wert SEED. Um SEED zu bestimmen, kann man zum Beispiel einen Würfel in die Luft werfen und die gewürfelte Augenzahl notieren.

1. Implementieren Sie die lineare Kongruenzmethode und generieren Sie eine Zahlenkette der Länge $n = 100$ für die Parameterwerte $a = 4$, $b = 1$ und $m = 9$.
   - Können Sie in der Zahlenkette Wiederholungen erkennen?
   - Experimentieren Sie mit den Parameterwerten. Können Sie die Unregelmäßigkeit der Zufallszahlen verbessern?
2. Programmiersprachen[1] enthalten auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen basierte Pseudozufallsgeneratoren. Erzeugen Sie $n = 1000$ Zufallsvariablen mit den folgenden Verteilungen und Parametern:
   - Gleichverteilung mit $a = 0$ und $b = 5$
   - Exponentialverteilung mit $\lambda = 0.6$
   - Gaussverteilung mit $\mu = 0.9$ und $\sigma = 1$
3. Plotten Sie die Werte der Zufallsvariablen als Histogramme mit 15 Bins

[1] Zum Beispiel das Paket `random` in Python

Aufgabe 2 (35 Punkte)

Am Franz-Josef-Strauß Flughafen in München steht am Check-In-Schalter nur eine Bedienung zur Verfügung. Der Andrang der Flugreisenden ist nach der Corona-Pandemie groß. Um die Wartezeiten der Kunden zu simulieren, wird eine $M/M/1$ Warteschlange modelliert. Im Modell kann als Ereignis entweder ein Kunde ankommen oder abreisen. Ein Kunde am



Check-In-Schalter kommt zu einem exponentiell verteilten Zeitpunkt ($\lambda = 0.6$) an und wird mit einer exponentiellen Zeitdauer bedient ($\mu = 0.9$). Modellieren Sie eine M/M/1 Warteschlange. Sie können die folgenden Schritte als Anhaltspunkte verwenden.

1. Ein Ereignis in der Warteschlange kann entweder eine Ankunft oder Abreise sein. Modellieren Sie das Ereignis als Objekt mit den folgenden Eigenschaften:
   - Anzahl der Wartenden Kunden
   - Uhrzeit des Ereignis
   - Ankunftszeitpunkt des nächsten Kunden
   - Abreisezeitpunkt des nächsten Kunden
   - Wartezeit
2. Implementieren Sie zwei Funktionen: Die erste erzeugt einen exponentiell verteilten Zufallswert für die Bedienzeit, die andere liefert die Zeit bis zur nächsten Ankunft eines Kunden.
3. Modellieren Sie eine Zeitschritt-Funktion, mit den folgenden Aufgaben:
   - Sie überprüft ob das nächste Ereignis eine Ankunft oder Abreise ist
   - Sie löst das nächste Ereignis aus
   - Sie aktualisiert die Uhrzeit und Wartezeit
4. Das Ereignis Ankunft ändert die Anzahl der wartenden Kunden und berechnet den nächsten Ankunftszeitpunkt. Das Ereignis Abreise reduziert die Anzahl der Wartenden Kunden und kontrolliert die Zeit bis zur nächsten Abreise. Implementieren Sie zwei entsprechende Funktionen

Führen Sie die Simulation für 100 Ereignisse durch und werten Sie ihr Ergebnis als Plot mit den Koordinatenachsen Uhrzeit und Anzahl der Kunden aus.

Aufgabe 3 (15 Punkte)

In der vorherigen Aufgabe[2] wurde eine M/M/1 Warteschlange modelliert. Die Parameter seien definiert als $\lambda = 0.6$ und $\mu = 0.9$.

1. Die Warteschlange hat die charakteristischen Werte Mittlere Verweilzeit E_Y, Mittlere Bedienzeit E_B, Mittlere Wartezeit E_W und Mittlere Füllung der Warteschlange E_{FWS}
   1. Berechnen Sie die charakteristischen Werte
   2. Welche Bedingung müssen die Parameterwerte für Stabilität erfüllen?
2. Bitte schätzen Sie mithilfe Ihrer simulierten Warteschlange die Antworten auf die folgenden essenziellen Fragen:
   - Wie viel Akkulaufzeit muss Ihr Smartphone mindestens noch haben, wenn Sie während der maximalen Wartezeit Angry-Birds spielen möchten?
   - Wie viele wartende Kunden können Sie maximal gleichzeitig zu einer Floss-Dance-Challenge überreden?

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Eine Töpferei wird als Wartenetz modelliert. Damit der Kunsthandwerker einen Auftrag ausführen kann, werden die folgenden Bearbeitungsstationen benötigt:

Brennofen Trocknen Glasieren Rohling formen Versäubern

Eine Galerie hat für eine Kunstausstellung eine Serie handgearbeiteter Skulpturen in Auftrag gegeben. Für die Bearbeitung des Auftrags werden im Durchschnitt die folgenden Besuchszahlen v_i und erwarteten Bedienzeiten $E(B_i)$ (in Stunden) der einzelnen Stationen ermittelt:

	B	T	G	R	V	Einheit
v_i	10	1	3	5	1	
$E(B_i)$	10	5	1	5	1	h

Bestimmen Sie für den Töpferauftrag die folgenden Parameter im Warteschlangennetz:

1. Grenzdurchsatz c_i der einzelnen Stationen
2. Bedienzeit $E(B_S)$ eines Auftrags
3. Auslastung ρ_i einer Station in Relation zum Gesamtdurchsatz $E(D_S)$
4. Verkehrsengpass[3] ρ_{VE}
5. Gesamtdurchsatz $\widehat{E}(D_S)$, bei dem der Verkehrsengpass voll ausgelastet ist
6. Zugehörige Sättigungsfülle $\widehat{f_S}$

[2] Falls Sie die vorherige Aufgabe nicht bearbeitet haben, überspringen Sie bitte Punkt Zwei
[3] Station mit der maximalen Auslastung