总的来说，本试验系列在两个方面是很成功的。第一，在内流的形成方面无须改变试验装置或程序；第二，这些试验使得对氧和氢管路中流体瞬态变化有了新的认识，从而能更好地了解推力室性能，因为这些数据可用来验证用于液体推进剂火箭发动机的数字方法。

参 考 文 献

[1] Gastal, J., "Ariane Third Stage Ignition Improvement , AIAA Paper 88-2932, AIAA/ASEE/ASME/SAE, 24th Joint Propulsion Conference, Boston, 1988.

[2] Kisselevsky, C., and Dederra, H., "Ariane Third Stage Engine System", AIAA Paper 74-1182, AIAA/SAE, 10th Joint Propulsion Conference, San Diego, 1974.

[3] Pouliquen, M., and Gill, G.S., "Performance Characteristics of the HM7 Rocket Engine for the Ariane Launcher , J. Spacecraft, Vol. 16, No. 6, pp. 367-372, 1979.

[4] Dederra, H., and Kirner, E., "Test Results with a Regeneratively Cooled LOX/LH2 Thrust Chamber for the Ariane 3rd Stage Propulsion System , AIAA Paper 75-1189, AIAA/SAE 11th Joint Propulsion Conference, Anaheim, 1975.

[5] Pouliquen, M.F., and Gill, G.S., "Altitude Simulation Testing of the HM7LOX/LH2 Rocket Engine for the Ariane Launcher , AIAA Paper 78-968, AIAA(SAE 14th Joint Propulsion Conference, Las Vegas, 1978.

[6] Kalnin, V.M., and Sherstiannikov, V.A., "Hydrodynamic Modelling of the Starting Process in Liquid-Propellant Engines , Acta Astronautica, Vol. 8, pp. 231-242, 1980.

[7] Ng, Y.S., Lee, J.H., and Kittel, P., "Proposed Mechanistic Model to Simulate Transfer Line Cool-Down Process Using Liquid Helium , J. Spacecraft, Vol. 24, No. 2, pp. 115-121, 1987.

[8] Steward, W.G., "Transfer Line Surge , Advancesin Cryogenic Engineering, Vol. 10, Plenum Press, New York, 1965.

[9] Steward, W.G., Smith, R.V., and Brennan, J.A., "Cooldown Transients in Cryogenic Transfer Lines , Advances in Cryogenic Engineering, Vol. 15, Plenum Press, New York, 1970.

[10] Steward, W.G., "Transient Flow of CryogenicFluids", Ph. D. Dissertation, Colorado State University, Fort Clooins, Colorado, 1968.

（田　青译　孙国庆校）

惯性导航系统的控制理论研究*

作者：I. Y. Bar-Itzhack等

摘要： 本文从控制理论的观点分析惯性导航系统(INS)。提出并讨论线性误差模型，计算几种特殊情况下误差模型的特征值。证明由特征值导出的精确表达式与通常所用的表达式稍有不同。在初始对准和校准期间，分析INS静止时的可观测性。引入从物理观点观察的转换，使我们能比较顺利地通过观察新的动态矩阵来确定不可观测的子空间和状态。最后建立系统可观测性和估计质量之间的关系。

主题词： 对准，校准，惯性导航，系统，可观测性

* 译自J. Guidance, Vol.11, No.3, May-June 1988

引　　言

惯性导航系统(INS)是一种尖端的自主电机系统，它提供载体飞行器的位置、速度和姿态。第一批投入使用的INS是第二次世界大战德国V-2火箭装备的INS。打那以后，INS已经成为弹道导弹和所有现代战斗机、客机的标准设备。INS特别适合弹道导弹制导的是它在助推阶段的自主工作方式。抗干扰的制导系统就是利用它的这一特点。

INS基本上是一个测量系统，因此，理想的INS的输出是主飞行器精确的位置、速度和姿态。对理想的INS的分析是一项繁琐而乏味的工作。只是在我们考虑INS(特别是地面的INS)的误差分析时，才发现INS有趣的特点是那样典型。所以，大多数有关INS的文献主要讨论它的误差分析和传播。从INS的用户和分析者累积的经验中，对INS的误差特性已有很多了解，并建立了精确描述这些误差特性的线性模型。60年代中期这些模型投入使用，使卡尔曼滤波器成功地实现了估算INS误差输出和误差源。

在分析INS误差时，会立刻在脑海中显现这样一些问题：这些误差是怎样随时间显现的？能测量全部误差分量吗？如果只能测量其中的一部分，那么能估算其余的部分吗？能控制这些误差吗？到目前为止在各个工作阶段使用有辅助和无辅助INS积累的经验提供了答案，对这些问题而言，这些回答都是经验性的。所以本文的目的不是揭示INS的新特点，而是按照线性系统和控制理论的概念来研究INS这些已知的特点和探索影响系统性能的系统参数和状态之间隐含的关系。例如，这个研究使我们能计算系统的特征值，证明振荡的精确频率和垂直通道状态与通常引证的值略有不同。

过去也用过这个方法。例如Broxmeyer和Britting求出了巡航INS的特征值，由于巡航INS的垂直通道和水平通道只有很弱的耦合，并且经常是有阻尼的，所以略去了垂直通道。但后面要说明，垂直通道的确对特征值稍有影响。在检验系统的可观测性时，我们将系统直接转换成可观测和不可观测的子系统，它们揭示出那些在初始对准和校准阶段妨碍INS误差估计的状态。Kortum过去曾成功地应用过这个方法，他研究了INS的平台对准问题，那时测量值是水平加速度计的输出，而现在，测量值是INS的水平速度分量。此外，把这种方法同本文提出的古典方法进行比较，以及对可观测性和估计质量之间的一致性和关系的讨论，对可观测性问题提供了更多的了解。我们希望从控制理论的观点把INS作为统一系统进行检验将对系统和INS的分析提供更多的了解。

在下节，我们将介绍INS的线性误差模型，它是我们研究的对象。第三节将介绍INS在各个工作阶段的特征值，第四节讨论系统的可控性和可观测性。第五节讨论系统可观测性和初始对准阶段估算它的状态的能力之间的关系。最后(第六节)为结论。

INS 误 差 模 型

有两种推导INS误差模型的方法，一种叫做扰动法(即真实坐标系)，一种叫ψ角法(即计算坐标系)。在推导扰动误差模型时，在当地水平指北笛卡尔坐标系（相应于INS的真实地理位置）内对标准的非线性导航方程摄动。而ψ角误差模型是在与INS指示的地理位置相应的当地水平指北笛卡尔坐标系中摄动标准方程得到的。在参考文献[1]、[2]中研究了

第一种模型，而在参考文献[5]和[6]中研究了ψ角模型。Benson证明两种模型是等效的，因而结果也是一样的。描述 INS 误差特性的微分方程分成描述平动误差传播的方程和描述姿态误差传播的方程。平动误差方程和姿态误差方程可以用两种方式表示，得到两种形式的平动误差方程和两种形式的姿态误差方程。平动误差方程的这两种形式取决于方程变量是位置误差分量，还是速度误差分量。姿态误差方程的两种形式取决于方程变量是平台对计算坐标系姿态偏差的分量，还是平台对真实坐标系姿态偏差的分量。当然，所有这些形式都是相同的。为了得到一组完整的 INS 误差方程，分析者必须决定采用扰动法还是ψ角法。一旦做出选择，分析者必须决定采用平动误差方程的哪一种形式和采用姿态误差方程的哪一种形式(这两种选择是独立的)。

多数关于 INS 误差的著作都采用ψ角法和平动误差方程的速度误差形式。本文的分析也用这个模型。此外，用平台对计算坐标系姿态偏差的分量作为姿态误差方程的变量。虽然这种角偏差是虚假的，不能测出的，但是它有平动误差不同姿态误差方程耦合的优点。平台和当地水平指北坐标系之间的物理姿态偏差可用由 INS 误差方程的解得到的位置误差和姿态误差来计算。这些选择使我们得到由下列方程表示的完整的地面 INS 误差模型：

$$\dot{v}+(\Omega+\omega)\times v=\nabla-\psi\times f+\Delta g \tag{1a}$$

$$\dot{r}+\rho\times r=v \tag{1b}$$

$$\dot{\psi}+\omega\times\psi=\varepsilon \tag{1c}$$

式中v，r和ψ分别为速度、位置和姿态误差向量；Ω是地球速率向量；ω是真实坐标系相对惯性坐标系的角速率向量；∇是加速度误差向量；f是比力向量；Δg是计算重力向量的误差；ρ是真实坐标系相对地球转动的速率向量；ε是陀螺漂移向量。可以证明，在当地北东向下坐标系中，

$$\Omega=\begin{bmatrix}\Omega\cos L\\ 0\\ -\Omega\sin L\end{bmatrix} \tag{2}$$

式中L是当地纬度。ω向量按下式计算：

$$\omega=\Omega+\rho \tag{3}$$

式中

$$\rho=\begin{bmatrix}\dot{\lambda}\cos L\\ -\dot{L}\\ -\lambda\sin L\end{bmatrix} \tag{4}$$

在真实系中求解方程(1)时，能得到形成状态空间模型的 9 个标量微分方程。如果用表达式(2—4)，得到状态空间模型如下：

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}r_N\\ r_E\\ r_D\\ v_N\\ v_E\\ v_D\\ \psi_N\\ \psi_E\\ \psi_D\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cccccc}0 & -\dot{\lambda}sL & \dot{L} & 1 & 0 & 0\\ \dot{\lambda}sL & 0 & \dot{\lambda}cL & 0 & 1 & 0\\ -\dot{L} & -\dot{\lambda}cL & 0 & 0 & 0 & 1\\ -g/R & 0 & 0 & 0 & -(2\Omega+\dot{\lambda})sL & \dot{L}\\ 0 & -g/R & 0 & (2\Omega+\dot{\lambda})sL & 0 & (2\Omega+\dot{\lambda})cL\\ 0 & 0 & 2g/R & -\dot{L} & -(2\Omega+\dot{\lambda})cL & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right.$$

$$
\begin{matrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & -f_D & f_E \\
f_D & 0 & -f_N \\
-f_E & f_N & 0 \\
0 & -(\Omega+\dot{\lambda})sL & \dot{L} \\
(\Omega+\dot{\lambda})sL & 0 & (\Omega+\dot{\lambda})cL \\
-L & -(\Omega+\dot{\lambda})cL & 0
\end{matrix}\Bigg)
\begin{pmatrix} r_N \\ r_E \\ r_D \\ v_N \\ v_E \\ v_D \\ \psi_N \\ \psi_E \\ \psi_D \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \nabla_N \\ \nabla_E \\ \nabla_D \\ \varepsilon_N \\ \varepsilon_E \\ \varepsilon_D \end{pmatrix}
\tag{5}
$$

式中 sL 和 cL 分别表示 L 的正弦和余弦，而下标 N，E 和 D 分别表示北、东和向下分量。

我们感兴趣的是系统静止时的INS误差传播，因为在INS大部分工作期间，飞行器是处在巡航状态，而INS在静止状态和巡航状态的特性差别是非常小的。其次，在多数情况下，在系统静止时进行INS的对准和校准（它们是任何INS工作的最基本阶段），最后，在系统静止时才能暴露INS的特殊特性。INS静止时，方程（1）化简为

$$
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r_N \\ r_E \\ r_D \\ v_N \\ v_E \\ v_D \\ \psi_N \\ \psi_E \\ \psi_D \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-\omega & 0 & 0 & 0 & 2\Omega_D & 0 & 0 & g & 0 \\
0 & -\omega^2 & 0 & -2\Omega_D & 0 & 2\Omega_N & -g & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2\omega^2 & 0 & -2\Omega_N & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_D & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega_D & 0 & \Omega_N \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega_N & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} r_N \\ r_E \\ r_D \\ v_N \\ v_E \\ v_D \\ \psi_N \\ \psi_E \\ \psi_D \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \nabla_N \\ \nabla_E \\ \nabla_D \\ \varepsilon_N \\ \varepsilon_E \\ \varepsilon_D \end{pmatrix}
\tag{6a}
$$

式中 $\omega^2=g/R$，$\Omega_N=\Omega\cos L$ 是地球角速率的北向分量，而 $\Omega_D=-\Omega\sin L$ 是地球角速率的向下分量。这个模型可写成

$$
\dot{x}'=A'x+f' \tag{66}
$$

式中 x'、f' 和 A' 的定义是明确的。

通常INS静止在地理坐标精确知道的位置上时，进行初始对准和校准；也就是说 $r_N\sim r_E\sim r_D\sim 0$。为此，可以消除状态向量的前三个状态。在初始对准和校准期间的测量信号是 v_N 和 v_E，而对垂直速度误差 v_D 不感兴趣。而且，我们清楚地知道垂直通道同水平通道的耦合很弱。因此，在研究测量信号 v_N 和 v_E 时，v_D 不起任何作用；所以在初始对准和校准阶段，从描述INS误差特性的模型的状态向量中也可以消去 v_D。在现代系统中，用卡尔曼滤波器来进行初始对准和校准；但是方程（6）中给出的模型不适用于卡尔曼滤波器，因为加速度计的误差和陀螺漂移角速率不是白噪声过程，这是用卡尔曼滤波器所必需的。这个障碍很容易克服，因为真实加速度计和陀螺的误差数据统计特性可以十分精确地用由白噪声过程推导出的线性模型的输出来表示。这样做以后，并且用INS基本误差模型增广这些模型以后，增广模型的驱动力就不包括相关噪声，这样模型就可用在卡尔曼滤波器中。在分析中，假设加速度计误差基本上是零位误差，而陀螺误差基本上是常值漂移，也就是

$$\dot{V}=0 \tag{7a}$$

$$\dot{\varepsilon}=0 \tag{7b}$$

从方程组(6)的 INS 误差模型的状态中消去 r_N，r_E，r_D 和 v_D，并且用方程组(7)增广得到的模型后，得到

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_N \\ v_E \\ \psi_N \\ \psi_E \\ \psi_D \\ \nabla_N \\ \nabla_E \\ \varepsilon_N \\ \varepsilon_N \\ \varepsilon_D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2\Omega_D & 0 & g & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\Omega_D & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_D & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_D & 0 & \Omega_N & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_N \\ v_E \\ \psi_N \\ \psi_E \\ \psi_D \\ \nabla_N \\ \nabla_E \\ \varepsilon_N \\ \varepsilon_E \\ \varepsilon_D \end{pmatrix} \tag{8a}$$

这个模型可以写成

$$\dot{x}=Ax \tag{8b}$$

式中 x 和 A 的定义是明确的。这一模型描述了 INS 静止状态下，加速度计和陀螺误差是常值时 v_N 和 v_E 的传播。这个模型看来似乎不够普遍，但由它而推出的结论是十分普遍的。状态向量的估算得到 ψ 的估算和加速度表及陀螺常值误差的估算。前者就叫做对准，后者叫做校准。

我们现在的兴趣是从控制分析者的观点考查方程组(6)、(8)给出的模型。

特　征　值

在研究一个常参数线性系统时，提出的第一个问题是：什么是系统的特征值？INS 静止时描述 INS 误差传播的模型的特征值是多项式方程

$$|A'-\lambda I|=0 \tag{9}$$

的根。式中 A' 由方程(6a)给出。令 $S=\lambda^2$，则研究行列式 $|A'-\lambda I|$ 得出下列 λ 和 S 的多项式方程：

$$\lambda(S+\Omega^2)[S^3+4\Omega^2S^2+\omega^2(4\Omega_N^2-8\Omega_D^2-3\omega^2)S-2\omega^6]=0 \tag{10}$$

显然，特征值中的三个是

$$\lambda_1=0 \tag{11a}$$

$$\lambda_{2,3}=\pm j\Omega \tag{11b}$$

它们与姿态误差方程（“地球速率回路”）有关。第一个特征值是在原点的极，这是众所周知的。而第二个和第三个特征值是我们熟悉的24小时振荡状态。求其余的特征值需要解括号内的多项式。在两种极端情况下，即在 INS 在赤道上和在地球的极上，是容易求解的。在赤道上$\Omega_N^2=\Omega^2$，$\Omega_D^2=0$，这样要解的多项式变为

$$S^3+4\Omega^2S^2+\omega^2(4\Omega^2-3\omega^2)S-2\omega^6=0 \tag{12}$$

可改写为

$$(S+\omega^2)[S^2+(4\Omega^2-\omega^2)S-2\omega^4]=0 \tag{13}$$

结果

$$\lambda_{4,5}=\pm j\omega \tag{14}$$

而计算二次多项式的根为

$$S_{1,2}=\frac{\omega^2-4\Omega^2}{2}\pm\left[\frac{(\omega^2-4\Omega^2)^2}{4}+2\omega^4\right]^{1/2}$$

因此，

$$\lambda_{6,7}=\pm j\left\{\frac{\omega^2-4\Omega^2}{2}-\left[\frac{(\omega^2-4\Omega^2)^2}{4}+2\omega^4\right]^{1/2}\right\}^{1/2} \tag{15}$$

$$\lambda_{8,9}=\pm\left\{\frac{\omega^2-4\Omega^2}{2}+\left[\frac{(\omega^2-4\Omega^2)^2}{4}+2\omega^4\right]^{1/2}\right\}^{1/2} \tag{16}$$

因为 $\omega^2\sim1.\times10^{-6}$，而 $4\Omega^2\sim2\times10^{-8}$，我们可以从方程(15)和(16)中去掉后者而得到

$$\lambda_{6,7}\sim\pm j\omega \tag{17}$$

$$\lambda_{8,9}\sim\pm\sqrt{2}\,\omega \tag{18}$$

特征值 $\lambda_4\sim\lambda_7$ 为与 INS 水平通道有关的两个振荡状态(舒勒状态)，而后两个特征值是与INS垂直通道有关的实际的发散和收敛状态。注意：虽然方程(15)和(16)给出的 $\lambda_6\sim\lambda_9$ 的精确值不等于方程(17)、(18)给出的值，但其差小于0.25%。在极点 $\Omega_N^2=0$，而 $\Omega_D^2=\Omega^2$，这样方程(10)变为

$$S^3+4\Omega^2S^2-\omega^2(8\Omega^2+3\omega^2)S-2\omega^6=0 \tag{19}$$

方程可改写为

$$(S-2\omega^2)[S^2+2(2\Omega^2+\omega^2)S+\omega^4]=0 \tag{20}$$

这里，垂直通道状态为 $\pm\sqrt{2}\,\omega$；也就是

$$\lambda_{8,9}=\pm\sqrt{2}\,\omega \tag{21}$$

舒勒状态是二次多项式方程

$$S^2+2(2\Omega^2+\omega^2)S+\omega^4=0 \tag{22}$$

的根，它们是

$$S_{1,2}=-(2\Omega^2+\omega^2)\pm[(2\Omega^2+\omega^2)^2-\omega^4]^{1/2}$$

结果

$$\lambda_{4,5}=\pm j\{(2\Omega^2+\omega^2)-[(2\Omega^2+\omega^2)^2-\omega^4]^{1/2}\}^{1/2} \tag{23a}$$

$$\lambda_{6,7}=\pm j\{(2\Omega^2+\omega^2)+[(2\Omega^2+\omega^2)-\omega^4]^{1/2}\}^{1/2} \tag{23b}$$

方程(23)给出的振荡频率精确值与 ω 的差约为6%。这些状态偏离 ω 的原因同 $24h$ 状态有关。在初步分析INS误差时忽略了这个因素。但是，当我们把所有误差方程看成是在状态空间中表示的统一线性系统时，我们必须确保在计算动力学矩阵的特征值时得到系统状态的精确表达式。在文献[1]和[2]中采用了类似的方法，但从误差模型中去掉了影响特征值的垂直通道。

在静止状态下的初始对准和校准阶段，当敏感元件误差由方程(7)描述时，支配误差动态的状态是方程(8a)中给出的 A 的特征值。它们是

$$|A-\lambda I|=0 \tag{24}$$

的根。由方程(24)很容易得到

$$\lambda^6(\lambda^2+4\Omega_D^2)(\lambda^2+\Omega^2)=0 \tag{25}$$

因此，特征值是

$$\lambda_{1-6}=0 \tag{26a}$$

$$\lambda_{7,8}=\pm j2\Omega_D \tag{26b}$$

$$\lambda_{9,10}=\pm j\Omega \tag{26c}$$

5个零特征值是由于敏感元件误差是按常值建模［方程组(7)］这个事实造成的。第6个零特征值和$\lambda_{9,10}$与姿态误差方程［见方程组(11)］有关。最后，$\lambda_{7,8}$是由于v_N和v_E之间的交连引起的。我们认为存在于A'中的地球速率回路的所有特征值也出现在初始对准和校准误差动态中（即在A中）。另一方面，这个模型中不存在舒勒回路状态。此外，在赤道$\lambda_{7,8}$也是零。

可控性和可观测性

在给定线性系统的模型时，控制分析者提出的问题是：系统是可控的吗？是可观测的吗？在INS中，可控性不是问题，因为尽管外部控制不包括在方程(6)和(8)的模型中，但众所周知所有状态可以由控制信号直接得到。位置、速度、加速度计和陀螺的误差状态可以通过改变它们在寄存器中的值来控制。当系统是捷联INS时，在寄存器中的姿态误差状态也可改变。当系统是平台INS时，则可通过对平台轴直接加矩来改变这些状态。（按照可控性的正式定义，可控系统在任意选择的时间间隔内，总能从一个任意的状态进入另一个任意的状态。在这个意义上，平台INS是不可控的，因为由平台最大转动速率决定的一定时间内，不能对系统加矩。但是，如果我们坚持可控性的正式定义，那么就没有哪个物理系统是可控的，因为实际上控制信号和状态总是有界的。为此，我们使系统工作在平台的最大加矩速率内，即使姿态误差状态是可控的。）

实际感兴趣的问题是可观测性，特别是在系统的初始对准和校准阶段，因为INS和它的初始对准和校准几乎一样，并且后者的质量很大地取决于系统的可观测性。现在来详细研究可观测性。自然，我们主要关心方程组(8)给出的模型。在初始对准和校准阶段，我们测量速度误差状态并试图观测系统的全部10个状态。观测模型是

$$z=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}x \tag{27a}$$

即

$$z=Cx \tag{27b}$$

式中C由方程(27a)定义。

我们希望研究隶属于测量模型［方程组(27)］的动力学系统［方程组(8)］的可观测性，也就是想研究配对$\{A,C\}$的可观测特性。为了达到这个目的，我们将原来的状态空间转换到特殊的状态空间，我们称之为“速率状态空间”，并且把它分解成不可观测的子空间和可观测的子空间，不可观测的子空间由向量u来表征。u的形式为$u=\nabla_E Z_1+\varepsilon_E Z_2+\varepsilon_D Z_3$，式中$\{Z_1,Z_2,Z_3\}$对于下面要说明的不可观测子空间而言是一个正交基。这样，经过这个转换，$\nabla_E,\varepsilon_E,\varepsilon_D$是不可观测的状态。我们在下一定理中将其概括并说明。（注意Ω_D和Ω_N取决于

纬度，在两极 $\Omega_N=0$，在赤道 $\Omega_D=0$。暂时我们不考虑两极的情况，即 Ω_N 非零值。在两极对准的情况，将在以后讨论。)

定理 1：如果给定方程组(8)和(27)的配对 $\{A,C\}$，其中 Ω_N 为非零值，那么定义矩阵 T 为

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\Omega_D & 0 & g & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\Omega_D & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_D & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_D & 0 & \Omega_N & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

然后 T 转换 x 为 y，使

(1) y 分成 y_1 和 y_2，其中 y_1 是可观测的，y_2 是不可观测的；

(2) y_1 的维数是 7；

(3) $y_2^T=[\nabla_E, \varepsilon_E, \varepsilon_D]$。

证明：定义 W 矩阵为

$$W=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\Omega_D/g & 0 & 0 & -1/g & 0 & 0 & 0 & 1/g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\Omega_N & 0 & 0 & 1/\Omega_N \\ -2\Omega_D^2/g\Omega_N & 0 & 0 & -\Omega_D/g\Omega_N & 0 & 1/\Omega_N & 0 & \Omega_D/g\Omega & -\Omega_N & 0 \\ 0 & -2\Omega_D & 1 & 0 & 0 & 0 & g/\Omega_N & 0 & 0 & -g/\Omega_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \Omega_D/\Omega_N & 0 & 0 & -\Omega_D/\Omega_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

可以很容易验证 $|T|\neq 0$ 和 $TW=1$。因此 $W=T^{-1}$。如果进行相似转换，则容易证明：

$$\dot{y}=Ly \tag{30a}$$

$$z=Cy \tag{30b}$$

式中

$$L=TAT^{-1}$$

且

$$
L=\left(\begin{array}{ccccccc|ccc}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 2\Omega_D & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -2\Omega_D & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_D & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega_D & 0 & \Omega_N & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega_N & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \tag{31}
$$

即

$$
L=\left[\begin{array}{c|c}
L_{11} & 0\\
\hline
0 & 0
\end{array}\right] \tag{32}
$$

式中

$$
L_{11}=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 2\Omega_D & 0 & g & 0\\
0 & 0 & -2\Omega_D & 0 & -g & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_D & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega_D & 0 & \Omega_N\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega_N & 0
\end{pmatrix} \tag{33}
$$

显然，y 分成 y_1 和 y_2，其中

$$\dot{y}_1=L_{11}y_1 \tag{34a}$$

$$z=C_{L1}y_1 \tag{34b}$$

$$\dot{y}_2=0 \tag{34c}$$

且

$$
C_{L1}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \tag{35}
$$

构成可观测性矩阵 Q_{L1} 为：

$$
Q_{L1}=\begin{pmatrix}
C_{L1}\\
C_{L1}L_{11}\\
\vdots\\
C_{L1}L_{11}^{6}
\end{pmatrix} \tag{36}
$$

因为 $|Q_{L1}|\neq 0$，因此 Q_{L1} 是满秩矩阵。所以配对 $\{L_{11},C_{L1}\}$ 是完全可观测的；这样 y_1 是完全可观测的，显然它的维数是7。另一方面，方程组(34)表明 y_2 与 y_1 完全无关，是不可测量的；因此 y_2 是不可观测的，对方程组(8)和(28)进行研究就能证明上述第(3)条。

当我们把这个定理的结果同用古典的求不可观测子空间的方法来证明这个定理的结果(在附录中给出)进行比较时，我们确信现在的方法是比较容易的；也就是说新的转换法(通

过观测动态矩阵L）立刻可显示哪一个转换状态是不可观测的和怎样确定一组覆盖这个不可观测子空间的向量。这样就可消除冗长的推导，而且，虽然我们还得求矩阵的秩，但它只是7阶而不是10阶矩阵。但是，更重要的是与此有关的可观测性的转换和讨论不仅仅是数学运算而且同系统的物理性能紧密相关。下面介绍这种转换的物理基因。

方程（8a）中给出的系统动力方程分成INS动力方程（前5行）和敏感元件动力方程。INS动力方程为

$$\dot{v}_N=2\Omega_D v_E+g\psi_E+\nabla_N \tag{37a}$$

$$\dot{v}_E=-2\Omega_D v_N-g\psi_N+\nabla_E \tag{37b}$$

$$\dot{\psi}_N=\Omega_D\psi_E+\varepsilon_N \tag{37c}$$

$$\dot{\psi}_E=-\Omega_D\psi_N+\Omega_N\psi_D+\varepsilon_E \tag{37d}$$

$$\dot{\psi}_D=-\Omega_N\psi_E+\varepsilon_D \tag{37e}$$

在典型的初始对准中，将v_N和v_E信号反馈到控制器中，对INS加矩（机械地或解析地）以便驱动ψ_N、ψ_E和ψ_D到零。这是初始对准的目的。但是，当这3个角为零时，对准过程并不停止，而在v_N和v_E达到零时停止，这种情况是在$\psi_N=\nabla_E/g$和$\psi_E=-\nabla_N/g$时发生的[见方程(37a)和(37b)]，而且$\dot{\psi}_N$和$\dot{\psi}_E$必须为零。这意味着∇_E和∇_N是常值。最后，因为ε_E是常值，所以从方程（37d）可看出，在$\dot{\psi}_N$为零时，如果$\dot{\psi}_D=0$那么$\dot{\psi}_E$也为零。总之，在$\dot{v}_N=\dot{v}_E=\dot{\psi}_N=\dot{\psi}_D=0$时对准过程停止，而在$\psi_N=\psi_E=\psi_D=0$时，对准过程并不停止。

现代方法是用卡尔曼滤波器根据误差信号v_N和v_E来估算ψ_N、ψ_E和ψ_D。典型的控制器不能驱动ψ_N、ψ_E和ψ_D角到零并且卡尔曼滤波器不能完全估算它们之间有直接的对应关系。这个缺陷是由于系统的状态通过测量值v_N和v_E不是完全可观测的这一事实造成的。这是因为在稳态时，$g\psi_E$同∇_N一样为常值，而滤波器不能区别它们对$\dot{v}_N$的影响[见方程(37a)]。这对$-g\psi_N$和∇_E也一样。同样地，在稳态时，在方程(37c)中$\Omega_D\psi_E$同ε_N不好区别，在方程(37d)中，$-\Omega_D\psi_N$不能同$\Omega_N\psi_D$或ε_E区别，反之亦然。最后，在方程(37e)中$-\Omega_N\psi_E$不能同ε_D区别。换句话说，在稳态时，没有哪一个状态能对可观测的v_N或v_E中的任一个给出一致的特征。的确，如下节要说明的那样，在用卡尔曼滤波器来估算状态向量时，不直接测量的状态达到稳态，没有达到稳态估值就不会降低。只有方程组(37)提供的状态组合才能估算，从而属于可观测的子空间。因此，如果我们把它们连同可测量的状态定义为新的状态，那么其余的状态必然是不可观测的。因此，我们定义新的状态向量如下：

$$y_1=v_N \tag{38a}$$

$$y_2=v_E \tag{38b}$$

$$y_3=2\Omega_D v_E+g\psi_E+\nabla_N \tag{38c}$$

$$y_4=-2\Omega_D v_N-g\psi_N+\nabla_E \tag{38d}$$

$$y_5=\Omega_D\psi_E+\varepsilon_N \tag{38e}$$

$$y_6=-\Omega_D\psi_N+\Omega_N\psi_D+\varepsilon_E \tag{38f}$$

$$y_7=-\Omega_N\psi_E+\varepsilon_D \tag{38g}$$

$$y_8=\nabla_E \tag{38h}$$

$$y_9=\varepsilon_E \tag{38i}$$

$$y_{10}=\varepsilon_D \tag{38j}$$

新的状态向量包括原来INS所有动态状态的变化率；因此，称这新的状态向量为速率状态。根据y的定义以及方程组(37)，我们很容易证明

$$\dot{y}_1=y_3 \tag{39a}$$

$$\dot{y}_2=y_4 \tag{39b}$$

$$\dot{y}_3=2\Omega_D y_4+g y_6 \tag{39c}$$

$$\dot{y}_4=-2\Omega_D y_3-g y_5 \tag{39d}$$

$$\dot{y}_5=\Omega_D y_6 \tag{39c}$$

$$\dot{y}_6=-\Omega_D y_5+\Omega_N y_7 \tag{39f}$$

$$\dot{y}_7=-\Omega_N y_6 \tag{39g}$$

$$\dot{y}_8=0 \tag{39h}$$

$$\dot{y}_9=0 \tag{39i}$$

$$\dot{y}_{10}=0 \tag{39j}$$

由方程组(38)给出的y的定义得到方程(28)给出的转换矩阵T，由方程组(39)给出的这组微分方程得到方程（31）给出的动态矩阵L，L的所有推断都涉及系统的可观测性特性。实际上，略为观察一下L就能立刻发现y_8、y_9和y_{10}是完全独立的。

注意：在极点ψ_D是不可观测的。这是很显然的，因为ψ_D是通过陀螺罗盘的进动观测的。如果沿北轴没有地球速率分量，陀螺罗盘就不会进动。实际上，可以证明，对可分成可观测部分和不可观测部分的y的任意选择，ψ_D总是构成y的不可观测部分状态中的一个。

估算和可观测性

如上节所述，由于卡尔曼滤波器在估算系统状态中的重要作用，我们把兴趣放在系统的可观测性上。正如前面提到的，估算方程(8)给出的系统状态并将其从INS中去掉的过程构成了系统工作的初始对准和校准阶段。

当用卡尔曼滤波器估算x时，估算误差的标准偏差（用EESD表示）达到稳态值；也就是说，因为系统不是完全可观测的，所以不直接测量的所有状态（x_{3-10}）的EESD不能降低到确定的边界之下。在估算y（在极点y变成y'）时，结果取决于初始协方差矩阵$P_y(0)$。如果$P_y(0)$是对角线矩阵，那么可观测状态的EESD渐趋于零，而不可观测状态的EESD不变。（鉴于L和L'最后的零列，这是可以估计到的。）但是，为了在估值y和x之间保持等价，必须分别从相应于$x(0)$和$P_x(0)$的$y(0)$和$P_y(0)$开始。

这用下列转换来做：

$$y(0)=Tx(0) \tag{46a}$$

$$P_y(0)=TP_x(0)T^T \tag{46b}$$

（当然在极点用T'来代替T。）在非对角线上$P_y(0)$有非零元素，它们在状态之间引入相关。在我们考查x和y之间的关系时，就会发现在不可观测和可观测状态之间存在初始相关。为此，在转换T或T'下所有状态的EESD（包括不可观测状态的EESD）在估算过程开始时会降低；但随着估算过程的进行，$P_y(0)$的影响减弱，以致在稳态时，不可观测状态的EESD达到非零的下界，而可观测状态的EESD达到零。也就是说，在原来的表达式中，所有不直接测量状态的EESD不能达到零，而在转换T或T'下，只有不可观测状态的

EESD不能达到零值。这是由于这样的事实，即在x中，不可观测的状态是动态地同其余的状态有关，而在y中，它们与其余的状态动态地无关（虽然初始同它们有关）。

结　　论

用统一的状态空间模型来表示INS的误差方程可对系统的特性作出总的考查。研究了INS工作的两个重要阶段，即INS在静止时，和在初始对准和校准阶段。前者，可以解析地求得两个极端情况（在两极和在赤道工作的情况）系统的特征值。得到的特征值是精确的。

本文提出线性转换，将初始对准和校准阶段INS误差模型的状态向量转换成所谓速的率状态向量。根据对新的动态矩阵的观察，可以明显看出速率状态向量可以分成彼此完全无关的可观测的部分和不可观测的部分。这免除了确定系统不可观测空间的麻烦的过程。我们区别两种情况，即INS在地球上一点但不在极点上和INS在极点上。对这两种情况，转换略有不同，但方法是一样的。INS不在极点上时，不可观测子空间的维数是3，在极点上时是4。由区分两部可知，不可观测的状态在所有不直接测量的原始状态的估值误差的方差上加了一个下限。在速率状态下，我们观测到两种情况。第一种情况是用速率状态向量估值误差的初始对角线协方差矩阵来表征的。在这种情况下，所有可观测状态的方差渐趋于零，而不可观测状态的方差保持常数。第二种情况用初始状态向量估值误差的初始对角线协方差矩阵来表征。通过转换产生速率状态向量初始估值误差的非对角线协方差矩阵。这导致速率状态向量所有分量的误差方差估值的初始降低。虽然相应于可观测状态的方差渐趋于零，但是相应于不可观测状态的方差渐趋于非零的下限。最后，原始状态绕不可观测子空间的旋转不是唯一的。这意味着有若干可能的测量值组合，如果完成的话，将产生完全的可观测系统。

附　　录

本附录将说明如何定义由方程组(8)和(27)描述的系统的不可观测的子空间和当选用古典方法（见参考文献[14]）时，如何发现一组复盖该子空间的向量。考查计算出的可观测性矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^9 \end{pmatrix} \tag{A1}$$

显示：

$$\text{秩}\, Q=7<10$$

因此，系统不是完全可观测的。令F_1为同$\{A,C\}$对有关的可观测子空间，F_2为R^{10}中的正交分量。则F_2是同该对有关的不可观测的子空间，而F_1是7维的，F_2是3维的。因为Q的秩是7，我们首先选择Q中复盖F_1的7个独立的行来形成7×10矩阵Q_1。在按照方程(A1)计算Q后，它的前7行是独立的。我们选择它们来定义Q_1：

$$
Q_1=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2\Omega_D & 0 & g & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2\Omega_D & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-4\Omega_D^2 & 0 & -3\Omega_D g & 0 & g\Omega_N & 0 & 2\Omega_D & 0 & g & 0 \\
0 & -4\Omega_D^2 & 0 & -3\Omega_D g & 0 & -2\Omega_D & 0 & -g & 0 & 0 \\
0 & -8\Omega_D^3 & 0 & -g(7\Omega_D^2+\Omega_N^2 & 0 & -4\Omega_D^2 & 0 & -3\Omega_D g & 0 & g\Omega_N
\end{pmatrix} \tag{A2}
$$

我们现在寻找 3 个附加的独立的行向量以形成 3×10 矩阵 Q_2，使如下定义的 Q^*

$$
Q^*=\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \tag{A3}
$$

是 10 列的。这样，Q_2 的行复盖 F_2；而且，如果我们定义新的状态向量 f

$$
f=Q^*x=\begin{bmatrix} Q_1x \\ Q_2x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{A4}
$$

则

$$
f_2=Q_2x \tag{A5}
$$

在 F_2 中，因而是新状态向量 f 的不可观测的部分。为了求 f_2，需要按方程（A5）求 Q_2。考查 Q_2 的下列选择

$$
Q_2=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{A6}
$$

发现 Q^* 的秩为 10；也就是说，Q_2 的各行与 Q_1 的各行彼此无关；因此 Q_2 的选择是适当的。它的各行形成一组复盖 F_2 的正交单位向量。用方程(A5)中的这个 Q_2 表明

$$
f_2=\begin{bmatrix} \nabla_E \\ \varepsilon_E \\ \varepsilon_D \end{bmatrix} \tag{A7}
$$

应该指出，由于我们知道 ∇_E，ε_E 和 ε_D 是向量 y 的不可观测状态，因此很容易推测出 Q_2。我们是根据速率状态向量的定义和它的相应动力学（在第四节做了解释）了解这个情况的。

参考文献（略）

（王永平　译　　梅枝　校）