

## 关于刚体姿态的数学表达

刘延柱<sup>1)</sup>

(上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

**摘要** 本文概述表达刚体姿态数学方法的产生和发展过程, 以及各种表达方法之间的内在联系。

**关键词** 欧拉有限转动公式, 欧拉角, 四元数, 对偶四元数

刚体姿态有多种数学表达方法, 在此基础上建立起来的刚体运动学和动力学是经典力学的重要组成部分。各种数学表达方法出自 18 和 19 世纪的数学力学大师, 是对抽象数学概念赋予具体力学内涵的典范<sup>[1,2]</sup>。在科学技术飞速发展的今天, 这些经典数学工具仍在航天器姿态控制、空间机构、惯性技术和机器人技术中被广泛应用<sup>[3]</sup>。本文综述刚体姿态数学表达方法的产生和发展过程, 以及各种表达方法之间的内在联系。

### 1 欧拉有限转动公式和欧拉角

刚体姿态的数学表达以及在此基础上建立起来的刚体运动学和动力学, 欧拉 (Euler L, 1707~1783) 是公认的奠基人 (图 1)。欧拉于 1765 年提出了刚体的一次转动定理: 刚体绕定点的任意有限转动可由绕过定点某根轴的一次有限转动实现, 并于 1775 年发表了有限转动公式<sup>[4]</sup>

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{a} \quad (1)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p_1^2(1 - c\phi) + c\phi & p_2p_1(1 - c\phi) - p_3s\phi & p_3p_1(1 - c\phi) + p_2s\phi \\ p_2p_1(1 - c\phi) + p_3s\phi & p_2^2(1 - c\phi) + c\phi & p_3p_2(1 - c\phi) - p_1s\phi \\ p_3p_1(1 - c\phi) - p_2s\phi & p_3p_2(1 - c\phi) + p_1s\phi & p_3^2(1 - c\phi) + c\phi \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中  $p_i (i = 1, 2, 3)$  为矢量  $\mathbf{p}$  相对  $(O-xyz)$  的投影,  $c, s$  为  $\cos, \sin$  的简写符号。由于存在  $\sum_{i=1}^3 p_i^2 = 1$  关系式, 矩阵 (3) 中的 4 个参数  $p_i (i = 1, 2, 3)$  和  $\phi$  只有 3 个独立变量, 与绕定点转动刚体的 3 个自由度相对应。刚体作  $n$  次有限转动后的方向余弦矩阵由历次转动的方向余弦矩阵的乘法运算确定

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_n \mathbf{A}_{n-1} \cdots \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \quad (4)$$

有限转动顺序的不可交换性由矩阵乘法运算的不可交换性体现。

欧拉设想刚体的有限转动依次绕  $z-x-z$  坐标轴分

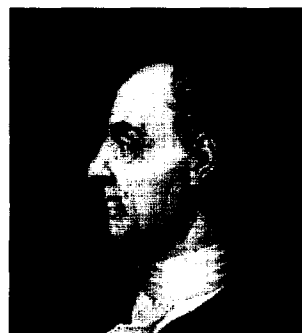


图 1 欧拉 (L. Euler, 1707~1783)

其中  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  为刚体上任意矢量在有限转动前后的位置, 并矢  $\mathbf{A}$  为刚体的有限转动张量

$$\mathbf{A} = \cos \phi \mathbf{E} + (1 - \cos \phi) \mathbf{p}\mathbf{p} + \sin \phi (\mathbf{p} \times \mathbf{E}) \quad (2)$$

其中  $\mathbf{p}$  为沿有限转动轴的基矢量,  $\phi$  为转过的角度,  $\mathbf{E}$  为单位并矢。建立与刚体固结的直角坐标系  $(O-xyz)$ ,  $\mathbf{A}$  在  $(O-xyz)$  上的投影矩阵即转动前后坐标系之间的方向余弦矩阵。在不致引起混淆情况下, 仍以  $\mathbf{A}$  表示为

3 次实现, 将各次转动的角度  $\psi, \vartheta, \varphi$  作为确定刚体姿态的广义坐标, 即欧拉角。欧拉角在经典力学中被普遍应用, 其主要缺点是章动角  $\vartheta$  存在  $n\pi (n = 0, 1, \cdots)$  的奇异位置, 当  $\vartheta$  接近于零时计算即无法进行。改进的欧拉角将 3 次转动改为绕  $x-y-z$  不同轴进行, 称为卡尔丹角<sup>2)</sup>。卡尔丹角的奇异位置为  $90^\circ$  而远离零点, 比欧拉角更适合于飞行器、船舶和陀螺仪等工程对象的姿态表达。

### 2 欧拉 - 罗德里格参数

1840 年法国数学家罗德里格 (Rodrigues BO,

本文于 2007-08-01 收到。

1) E-mail: liuyzhc@online.sh.cn

2) 卡尔丹角名称的由来是因为它正好是陀螺仪万向支架的转角, 这种万向支架在西方错误地认为是 16 世纪意大利人卡尔丹 (Cardan J, 1501~1576) 的发明。实际上我国早在西汉刘歆的《西京杂记》里对万向支架已有具体描述, 比卡尔丹提前了一千多年。

1794~1851) (图 2) 利用半角公式将式 (3) 中的三角函数进行变换, 引入以下 4 个参数<sup>[5]</sup>

$$\lambda_0 = \cos \frac{\phi}{2}, \quad \lambda_k = p_k \sin \frac{\phi}{2} \quad (k=1, 2, 3) \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) - 1 & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_2\lambda_1 + \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_2^2) - 1 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_3\lambda_1 - \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_3\lambda_2 + \lambda_0\lambda_1) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2) - 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$



图 2 罗德里格 (B.O.Rodrigues, 1794~1851)

在相当数量的文献中, 如威泰克 (Whittaker E.T.) 和戈德斯坦 (Goldstein H.) 的经典著作, 以及国内有关著作和教材均将参数 (5) 称为欧拉参数, 而略去罗德里格姓氏, 未免有失公允. 用欧拉 - 罗德里格参数表示的刚体角速度具有极好的对称性

$$\omega_1 = 2(-\lambda_1\dot{\lambda}_0 + \lambda_0\dot{\lambda}_1 + \lambda_3\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_3)$$

$$\omega_2 = 2(-\lambda_2\dot{\lambda}_0 - \lambda_3\dot{\lambda}_1 + \lambda_0\dot{\lambda}_2 + \lambda_1\dot{\lambda}_3)$$

$$\omega_3 = 2(-\lambda_3\dot{\lambda}_0 + \lambda_2\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_2 + \lambda_0\dot{\lambda}_3)$$

欧拉 - 罗德里格参数的最大优点是不存在奇点, 且以代数运算代替三角运算提高了数值计算效率.

### 3 哈密顿四元数和凯莱 - 克莱因参数

1843 年哈密顿 (Hamilton W.R., 1805~1865) (图 3) 创造了四元数的数学概念. 即将复数概念扩展为由一个实数单位和 3 个虚数单位  $i, j, k$  组成的包含 4 个实元  $\lambda_k$  ( $k=0, 1, 2, 3$ ) 的超复数, 称为四元数 (quaternions), 记作  $A$ <sup>[6]</sup>

$$A = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$$

用空心圆点  $\circ$  表示乘法运算, 规定虚数单位之间的运算规则为

$$\left. \begin{aligned} i \circ i = j \circ j = k \circ k = -1, \quad j \circ k = -k \circ j = i \\ k \circ i = -i \circ k = j, \quad i \circ j = -j \circ i = k \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

称为欧拉 - 罗德里格参数. 由于存在  $\sum_{i=0}^3 \lambda_i^2 = 1$  关系式, 其中也只有 3 个独立变量. 式 (3) 中的三角函数元素可转化为  $\lambda_k$  ( $k=0, 1, 2, 3$ ) 代数式



图 3 哈密顿 (W.R. Hamilton, 1805~1865)

若将  $i, j, k$  视为基矢量, 则  $A$  的后 3 项构成矢量  $\lambda$ . 因此也可将四元数定义为标量  $\lambda_0$  和矢量  $\lambda$  的组合, 借用加法符号写作  $A = \lambda_0 + \lambda$ . 改变  $\lambda$  的正负号, 得到  $A$  的共轭四元数, 记作  $A^* = \lambda_0 - \lambda$ . 四元数的乘法运算规则由式 (7) 的基本规则导出. 以  $A = \lambda_0 + \lambda$ ,  $M = \mu_0 + \mu$  为例, 运算规则为

$$A \circ M = (\lambda_0\mu_0 - \lambda \cdot \mu) + (\lambda_0\mu + \mu_0\lambda + \lambda \times \mu)$$

1845 年英国数学家凯莱 (Cayley A, 1821~1895) 将欧拉 - 罗德里格参数视为特殊的四元数  $A$ , 从而赋予抽象的数学概念以具体的力学内涵, 使四元数成为欧拉 - 罗德里格参数的同义词<sup>[7]</sup>. 欧拉有限转动式 (1) 可用  $A$  及其共轭四元数  $A^*$  表示为

$$a = A \circ a_0 \circ A^*$$

刚体相继作  $n$  次有限转动后的合成四元数  $A$  等于各次转动四元数的乘积

$$A = A_n \circ A_{n-1} \circ \cdots \circ A_2 \circ A_1$$

将四元数的 4 个实元  $\lambda_k$  ( $k=0, 1, 2, 3$ ) 排成列阵和方阵, 可以建立四元数的矩阵运算规则.



图 4 凯莱 (A. Cayley, 1821~1895)

1874 年凯莱和德国数学家克莱因 (Klein F.C., 1849~1925)<sup>[8]</sup> 提出以 4 个复数代替欧拉 - 罗德里格参数, 称为凯莱 - 克莱因参数

$$\alpha = \lambda_0 + i\lambda_3, \quad \beta = -\lambda_2 + i\lambda_1$$

$$\gamma = \lambda_2 + i\lambda_1, \quad \delta = \lambda_0 - i\lambda_3$$

其中  $\alpha$  与  $\delta$ ,  $\gamma$  与  $-\beta$  互为共轭。欧拉 - 罗德里格参数可用凯莱 - 克莱因参数表示为

$$\lambda_0 = (\alpha + \delta)/2, \quad \lambda_1 = (\gamma + \beta)/2i$$

$$\lambda_2 = (\gamma - \beta)/2, \quad \lambda_3 = (\alpha - \delta)/2i$$

代入式 (6) 的矩阵  $A$ , 转换为常规的复数运算。

#### 4 罗德里格 - 吉布斯矢量

罗德里格在创造参数  $\lambda_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) 的同时, 还提出将其中的  $\lambda_0$  与  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) 相除, 转化为与半角正切成比例的 3 个独立参数, 即狭义的罗德里格参数

$$\rho_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_0} = \rho_k \tan \frac{\phi}{2} \quad (k = 1, 2, 3)$$

以  $\rho_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) 为投影的矢量  $\rho$  称为罗德里格矢量, 也称吉布斯 (Gibbs J.W.) 矢量<sup>[9]</sup>。欧拉有限转动张量  $A$  可用罗德里格矢量  $\rho$  表示为

$$A = (1 + \rho^2)^{-1} [(1 - \rho^2)E + 2\rho\rho + 2(\rho \times E)]$$

其中  $\rho = \tan(\phi/2)$  为矢量  $\rho$  的模。与四元数相比罗德里格参数具有独立变量特点, 与欧拉角相比, 其奇异位置  $\pm\pi$  远离零点, 因此在工程技术问题中也被实际应用。

罗德里格参数在经历一个半世纪后被进一步改进为<sup>[10]</sup>

$$r_k = \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_0} = \rho_k \tan \frac{\phi}{4} \quad (k = 1, 2, 3)$$

改进后罗德里格参数  $r_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) 的奇异位置从  $\pm\pi$  变为  $\pm 2\pi$ , 有限转动的允许计算范围从而被扩大一倍。以  $r_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) 为投影的矢量  $r$  为改进的罗德里格矢量, 有限转动张量  $A$  可表示为

$$A = (1 + r^2)^{-1} \{ [(1 - r^2)^2 - 4r^2]E + 4rr + 4(1 - r^2)(r \times E) \}$$

其中  $r = \tan(\phi/4)$  为矢量  $r$  的模。

#### 5 对偶数和对偶四元数

上述刚体姿态的数学表达仅能用于分析刚体绕定点 (或绕质心) 的转动。在空间机构和机器人技术中, 需要有能同时表达刚体位置和姿态的数学工具。

1873 年英国数学家克里弗德 (Clifford W.K.) (图 5) 提出的对偶数 (dual number) 是复数概念的另一类扩展, 是由实数单位 1 和对偶单位  $\varepsilon$  组成的包含 2 个实元  $a$  和  $a'$  组成的一对有序实数组合, 记作  $\hat{a}$ <sup>[11]</sup>

$$\hat{a} = a + \varepsilon a' \quad (8)$$



图 5 克里弗德 (W.K. Clifford, 1845~1879)

$\varepsilon$  称为克里弗德算符, 遵循  $\varepsilon^2 = 0$  的规定。以对偶数  $\hat{a}, \hat{b}$  为例, 其运算规则为

$$\left. \begin{aligned} \hat{a} + \hat{b} &= a + b + \varepsilon(a' + b') \\ \hat{a}\hat{b} &= ab + \varepsilon(b'a + a'b) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

将式 (8) 中的标量换作矢量, 构成对偶矢量  $\hat{a}$

$$\hat{a} = a + \varepsilon a'$$

对偶矢量的运算规则与式 (9) 相同, 只须将其中的加法和乘法符号理解为矢量求和以及矢量点积或叉积。普吕克 (Plücker, J.) 矢量是一类特殊的对偶矢量, 由滑动矢量  $a$  及其相对固定点的矩  $a' = r \times a$  组

成, 其中  $r$  为矢量  $a$  作用线上任意点相对固定点  $O$  的矢径. 普吕克矢量完全确定矢量  $a$  的空间位置. 设矢量  $a, b$  的空间垂直距离为  $s$ , 其公垂线方向的单位矢量视为仅含实数部分的对偶矢量, 记作  $\hat{s}^0$ ,  $a$  与  $b$  在  $\hat{s}^0$  的垂直平面上的投影夹角为  $\phi$  (图 6), 定义  $a$  与  $b$  之间的

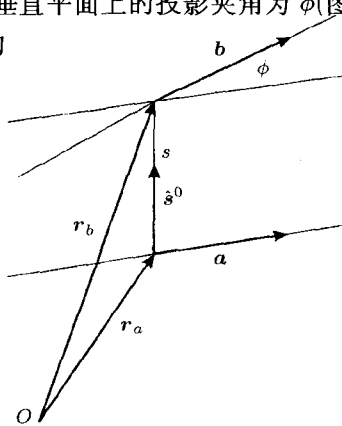


图 6 对偶角定义

按照对偶矢量的运算规则, 导出

$$\hat{a}\hat{b} = \cos \hat{\phi}, \quad \hat{a} \times \hat{b} = \hat{s}^0 \sin \hat{\phi}$$

形式上与矢量代数规则一致, 也存在  $\sin^2 \hat{\phi} + \cos^2 \hat{\phi} = 1$  等代数恒等式.

将矢量  $b$  视为矢量  $a$  沿  $\hat{s}^0$  方向作螺旋运动后到达的位置, 引入对偶四元数  $\hat{A}$  (dual quaternions)

$$\hat{A} = \cos \hat{\phi} + \hat{s}^0 \sin \hat{\phi}$$

$\hat{A}$  称为螺旋算子, 可用于对普吕克矢量  $\hat{a}, \hat{b}$  的变换<sup>[12]</sup>  $\hat{b} = \hat{A} \circ \hat{a}$  与式 (1) 比较可以看出, 螺旋算子  $\hat{A}$  为有限转动矩阵  $A$  的扩展, 可以确定任意矢量作螺旋运动后到达的新位置. 多次螺旋运动对应的螺旋算子等于各次螺旋算子的四元数乘积

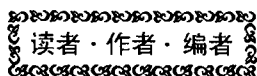
$$\hat{A} = \hat{A}_n \circ \hat{A}_{n-1} \circ \cdots \circ \hat{A}_2 \circ \hat{A}_1$$

刚体在空间中有 6 个自由度. 仿照欧拉角的定义, 设想刚体的空间位置变动分解为绕不同轴的 3 次螺旋

运动实现, 所对应的 3 个对偶角  $\hat{\psi}, \hat{\vartheta}, \hat{\phi}$  包含的 6 个标量可作为表达刚体位置和姿态的独立变量.  $\hat{\psi}, \hat{\vartheta}, \hat{\phi}$  可称为对偶欧拉角. 用对偶形式描述的力学基本定律具有最简练的形式. 在此基础上建立起来的运动学和动力学称为力学的旋量理论.

## 参 考 文 献

- 1 Cheng H, Gupta KC. An historical note on finite rotations. *J Applied Mechnaics*, 1989, 56: 139~145
- 2 Shuster MD. A survey of attitude representations. *J Astron Sci*, 1993, 41(4): 439~518
- 3 Phillips WF, Hailey CE, Gebert GA. A review of attitude kinematics for aircraft flight simulation. AIAA-2000-4302, 2000
- 4 Euler L. Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi. *Novi Commentari Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 1775, 20: 208~238
- 5 Rodrigues O. Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ses déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, 1840, 5: 380~440
- 6 Hamilton WR. On quaternions: or a new system of imaginaries in algebra. *Philosophical Magazine*, 1844, 25: 489~495
- 7 Cayley A. On certain results relating to quaternions. *Philosophical Magazine*, 1845: 141~145
- 8 Klein F. Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. *Mathematische Annalen*, 1874, 9: 183~208
- 9 Gibbs JW. *Vector Analysis*. New York: Scribners, 1901
- 10 Marandi SR, Modi VJ. A preferred coordinate system and the associated orientation representation in attitude dynamics. *Acta Astronautica*, 1987, 15: 833~843
- 11 Clifford MK. Preliminary sketch of biquaternions. *Proc London Math Soc*, 1873, 4: 381~395
- 12 Wittenburg J. Duale Quaternionen in der Kinematik räumlicher Getriebe, Eine anschauliche Darstellung. *Ingenieur Archiv*, 1981, 51: 17~20



新年新气象, 本刊从 2008 年第 1 期开始, 封面设计将有所改变.

本期封面插图是航天员和小女孩在太空中飞行, 背后是神秘的太空和美丽的星球. 该插图是现实主义与浪漫主义的完美结合. 图中的局部细节都是真实的, 如航天员身上的光影、土星的光环、木星的红斑, 仔细看看或许还能发现木星的卫星, 这些都来源于真实的照片, 是现实的反映. 但是把这些元素放在一起后, 特别是画面中小女孩的出现, 使得整体有种梦幻般的感觉.

航天员进入太空和出舱行走, 是人类进军宇宙的必然环节, 而插图的背景是我国神舟七号飞船即将开展的航天员出舱活动试验, 图中左下角是神舟飞船的模拟图.

插图也表现了一个小女孩的梦想: 乘着想象的翅膀, 和航天员并肩飞行, 探索未来. 她天真而又充满好奇, 稚气而又富于想象——这正是我们的未来和希望.