算法历年大题汇总

一．简答题

1.

在分布式算法中，bit 复杂性是指算法发送的所有消息中 bit 的总数；消息链复杂性是指算法的任何执行中最长消息链的长度，若某消息链是 m_1，m_2，…，m_k，则 m_i 在因果关系上领先于 m_{i+1}，该消息链的长度为 k。请问这两种复杂性应分别属于通信复杂性和时间复杂性中的哪一种？并简述其理由。

答：

bit 复杂性属于通信复杂性，消息链复杂性属于时间复杂性；若在一个分布式算法中每个 msg 信息的 bit 数目相同，则 msg 的个数就等于 bit 的总数除以一个 msg 的 bit 数目，则 bit 复杂性可以等价为 msg 复杂性；消息链复杂性是最长消息链的长度，在同步系统中它就是最大轮数，异步系统中假定任何执行的 msg 延迟至多是一个单位时间，它就是计算直到终止时间的最大运行时间，在同，异步系统中皆为时间复杂性。

2.

已知事件 e1、e2、e3 和 e4 的向量时戳分别为（1,0,0,0）、（3,5,0,0）、（0,0,1,2）、（3,6,4,3），与 e3 有因果关系的是哪个事件？若该事件发生在 e3 之前，则会发生什么情况？

答：

e4,处理器会抑制过早到达的 e4 msg(不发送 e4)，直到 e3 msg 达到,才会将 e3,e4 一起发送。

3.

对于一个优化问题Π，最佳可达性能比 $R_{MIN}(\Pi)$（定义如下）分别为何值时，问题Π易于近似和难于近似？

$$R_{MIN}(\Pi)=\inf\{r\geq 1 \mid \exists\Pi\text{的多项式时间算法}A\text{使}R_A^{\infty}\leq r\}$$

答：

该优化问题渐进性能比上界集合中的下确界，当 Rmin 为：

(1)1 时，因为渐进性能比大于等于 1，所以渐进性能比可以无限接近 1，则易于近似；

(2)正无穷大时，因为渐进性能比大于等于 1，所以渐进性能比也为无穷大，则难于近似；

4.

对于一个优化问题，什么情况下其近似算法的绝对性能比和渐近性能比相同？

答：

具有 Scaling 性质的问题，近似算法的绝对性能比和近似性能比是相同的。

5.

装箱问题是将 n 件物品放入尽可能少的若干个箱子中。不妨设每个箱子的容量均为 1，物品 $I_j(1\leqslant j\leqslant n，n=6)$的大小依次为：0.5, 0.6, 0.3, 0.7, 0.5, 0.4，请给出其最优解，以及采用首次适应（First Fit）策略得到的近似解。这里，解是指使用了几个箱子，每个箱子中放了哪些物品。

答：
FF 的近似解：4 个箱子；x1=0.5+0.3;x2=0.6+0.4;x3=0.7;x4=0.5
最优解：3 个箱子；x1=0.3+0.7;x2=0.4+0.6;x3=0.5+0.5
6.

1、若要将一个偏y的，55%－正确的，一致的MC算法改进到95%－正确的算法，需要重复调用MC算法多少次？并给出推导过程。 $1-(1-55\%)^n \geq 95\%$

答：
1-(1-55%)^n>=95%,n=3 时：左式=0.91；n=4 时，左式=0.959
7.

3，在分布式算法的时间复杂性和ont－time复杂性中，一个msg的延迟分别假定为至多1个时间单位和恰好1个时间单位，但有时后者是前者的一个下界。为什么？举例说明。?

答：
考虑运行在环上的分布式算法的 1-time 时间复杂性和时间复杂性。
<1> 1-time 时间复杂性：
满足条件 O2：发送和接收一个 msg 之间的时间恰好是一个时间单位，每个阶段节点转发消息都是同步进行，从而 1-time 时间复杂度仅与环直径相关，为 O(D)。
<2> 时间复杂度：
满足条件 T2：一个 msg 的发送和接收之间的时间至多为一个时间单位，即为 O(1)。节点转发消息并非同步进行，消息转发轨迹可能呈链状结构，时间复杂性与环节点个数相关，为 O(n)。
例如：echo 协议，即应答协议，主要用于调试和检测中，是路由也是网络中最常用的数据包，可以通过发送 echo 包知道当前的连接节点有哪些些路径，并且通过往返时间能得出路径长度。echo 算法的实现，如果转发消息同步进行，则对应 1-time 时间复杂性，为 O(D)；如果不同步转发消息，网络路径可能呈链状结构，即对应时间复杂度 O(N)。

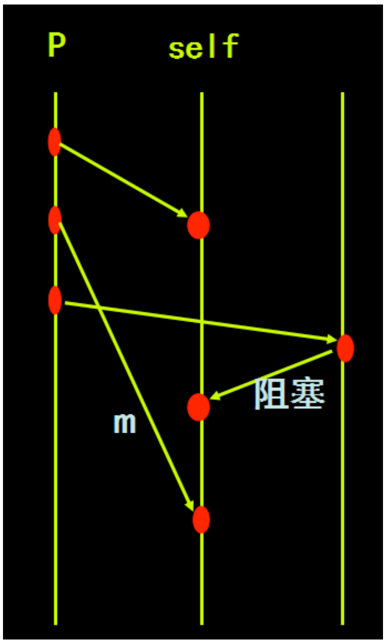
Note：考虑时间复杂度，任一节点可以在 O(d)时间内将询问包发送到网络上的其它节点，但却可能需要 O(N)的时间接收其它节点发来的响应包。
8.

4，对于同步环，在一个均匀的leader选举算法中，为什么一个id为i的msg是以2^i速率被转发的？其目的是什么？

答：
同步环的 leader 选举算法是选最小的 id,不同的 id 的 msg 以 2^id 速率转发时，leader 的 msg 的转发速率(延时)最小，则可以使得其他非 leader 的转发 msg 被淹没，降低消息复杂度。
9.设 F(x)是一个 MC 算法，若 F(x)以大于 1/2 的概率返回 ture,且放回 ture 时算法正确，则下述算法 F2(x)是偏真的还是偏假的？请分析 F2(x)的出错概率至多是多少？

```
F2(x)
{
    If F(x) then
        return ture;
```

    else return F(x);
}
答：
偏真；第一次 F(x)返回 false，第二次也放回 false 则 1/2*1/2=1/4
10.试举例说明 Casual Msg delivery 算法可能出现的死锁情况，并分析为什么该算法通常被应用于组播通信的一部分？
答：若一节点长时间不发送你要的 msg，则会发生死锁。
本地节点的初始化在本地节点完成，有处理阻塞的机制。



二. 算法题

1、设网络的生成树已经建立，各个节点 Pi 的 id 为 i，并持有初值 xi，且 id 和持有的初值均互不相同，试写一个分布式算法使得根节点知道树中持有初值最大的节点，以及持有初值最小的节点。
答：生成树上的 leader(初值最大，最小)选举算法
节点 i 拥有局部变量 max,min,max_x,min_x,lx,id(i)，拥有所有子节点的集合 child(i)，拥有父节点 parent(i)
设有 n 个节点，root 节点 id=0,则算法如下：

```
Code for Pi,    0<=i<=n-1
var child(i)[],parent(i),id(i),max=id(i),min=id(i),lx,max_x=lx,min_x=lx;
if (i!=0)
{
    upon receiving<max,min,max_x,min_x> from child Pj
        将受到的值与本地值比较,重新赋值 max,min,max_x,min_x;
        child(i)[]=child(i)[]-Pj; //将 Pj 从 child 中删去
        if child(i)[]为空
            send<max,min,max_x,min_x> to parent(i);
}
```

```
if(i==0)
{
      upon receiving<max,min,max_x,min_x> from child Pj
            将受到的值与本地值比较,重新赋值 max,min,max_x,min_x；
            child(i)[]=child(i)[]-Pj；//将 Pj 从 child 中删去
}
if(i 为叶子节点)
{
        send<max,min,max_x,min_x> to parent(i);
}
```

2.设集合 S 和 T 中各有 n 个互不相同的元素，要求：

(1)写一 Monte Carlo 算法判定 S 和 T 是否相等

(2)分析算法出错的概率

(3)算法是否有偏，若有偏，偏什么？

答：

(1)

```
STequal(S,T)
{
   a=uniform(S);
   for i from 1 to n
   {
     if a=T[i];
        return ture;
   }
   return false;
}
```

(2)设有 x 个元素相同

x/n

(3)偏假

3.

1、设一个同步匿名的单向环有 n 个结点，每个结点均知道 n，每个结点的初始均状态相同，每个结点上的程序相同且开始于同一时刻。

（1） 请问是否存在一个确定的算法选出一个 leader？请简述理由。（5 分）

（2） 试设计一个概率的 leader 选举算法。**提示：** 算法由若干个 phase 构成，每个 phase 包括 n 轮，可用 phase 和轮控制算法流程。每个结点可以设置一个随机数发生器 uniform（1..m），这里 m 是局部变量，初值等于 n。（20 分）

（3） 请问你设计的概率算法属于哪一类算法？（5 分）

答：
(1)由 Lemma3.1 可得。(同步匿名非均匀)
假设 R 是大小为 n>1 的环（非均匀），A 是其上的一个匿名算法，它选中某处理器为 leader。因为环是同步的且只有一种初始配置，故在 R 上 A 只有唯一的合法执行。
Lemma3.1： 在环 R 上算法 A 的容许执行里，对于每轮 k，所有处理器的状态在第 k 轮结束时是相同的。Note：每个处理器同时宣布自己是 Leader！
(2)
n 个节点每个节点随机产生一个(1-n)的随机数作为自己的 id，然后将它发送，
若绕场一周后回到了该节点，该节点就用那个 id;
否则重新产生随机数，直到绕场一周回到该点；
对于每个节点若收到的 msg 中的 id 和自己产生的 id 一样就没收它，反之转发该 msg;
每个节点重复上述过程直至 n 节点的 id 均不相同；
于是得到一个同步非匿名环，可选举一个 id 最大的 leader.
(3)
4.

三，算法设计题：
1，量子运动的随机聚集过程可用量子赌博来描述。其规则是：
（1）开始时，A和B的赌本分别为x和y；
（2）每次通过掷一枚神奇的硬币来决定输赢，设正面A赢，反面B赢，但每次仍出硬币的正反面的概率正比于A和B当前的赌本；
（3）每次的输家将按固定的比例k从自己的赌本中付给赢家；
（4）设最小的赌本单位为1，若输家当前的赌本小于等于1，他付出自己的赌本后，游戏结束。

例如：设x和y的初值分别为20分和80分，k=10%，则第一次硬币仍出正面和反面的概率分别是20%和80%，若扔出的是正面，则B要付8分给A；第二次赌博时，x=28，y=72，硬币扔出正面和反面的概率将分别是28%和72% 赌博依此规则进行，直至一方赌光为止。
要求：
1——写一算法实现赌博游戏；（15分）
2——A和B最终输赢取决于什么？（3分）
3——请分析A、B最终输赢的概率。（5分）

while (x>1 && y>1) {
a ← uniform (1, x+y)
if (a≤x) {

答：
```
while(x>1and y>1)
{
   a=uniform(1,x+y);
   If(a<=x)
   {
      x=x+0.1y;
      y=0.9y;
   }
```

```
    else
    {
        y=y+0.1x;
        x=0.9x;
    }
}//end while

If(x<=1)
{
    y=y+x;
}
If(y<=1)
{
    x=y+x;
}
```