

Dynamic Mechanism-Design

Michael Füg und Philip Zilke

28. April 2016

1 Vom statischen zum dynamischen Mechanismus Design

2 Dynamische private Informationen

- Dynamischer direkter Mechanismus
- Das Revelations-Prinzip
- Anreiz-Kompatibilität und individuelle Rationalität
- Optimaler Verkaufs-Mechanismus

3 Ausblicke

- Die Rolle der privaten Information
- Sequentieller Mechanismus Design
- Dynamische Allokation

Aufbau des Vortrages

Die Hauptansätze:

- Dynamische private Informationen und statische Allokationen
- Dynamische Allokationen und statische private Informationen

Modelrahmen

Modellrahmen ist Zwei-Personen Spiel:

- Verkäufer
 - Verkauft unteilbares Gut
 - Legt Mechanismus Γ fest
- Käufer
 - Bewertung des Gutes θ zunächst unbekannt
 - Erhält Signal τ , welches mit θ korreliert ist
 - Wenn Mechanismus akzeptiert wird, dann wird τ berichtet
 - θ ist erst nach Akzeptieren des Mechanismus Γ und wird danach berichtet

Mathematische Modellierung

Sei im Folgenden für das Signal τ

- Kommulierte Verteilung $G(\tau)$
- Positive Dichte $g(\tau)$
- Trägermenge $[\underline{\tau}, \bar{\tau}]$

Sei im Folgenden für die Bewertung θ

- Kommulierte Verteilung $F(\theta \mid \tau)$
- Korrespondierende Dichte $f(\theta \mid \tau)$
- Trägermenge $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ mit $0 \leq \underline{\theta} < \bar{\theta}$ für alle $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$

Annahmen

Wir setzen im Folgenden voraus, dass

- Trägermenge von $F(\theta | \tau)$ ist $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ für alle $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$, $0 \leq \underline{\theta} < \bar{\theta}$
- Trägermenge von $F(\theta | \tau)$ unabhängig von τ
- $f(\theta | \tau) > 0$ für alle $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ und $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$
- $F(\theta | \tau)$ und $f(\theta | \tau)$ sind stetig differenzierbar in τ
- Für die Familie $F(\cdot | \tau)$ mit $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ gilt

$$\delta F(\theta | \tau) / \delta \tau < 0 \text{ für alle } \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \quad (\text{FOSD})$$

Dynamischer direkter Mechanismus

Definition

Ein (dynamischer) *direkter Mechanismus* besteht aus den beiden Funktionen

$$q : [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow [0, 1] \quad \text{und} \quad t : [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Zwei wesentliche Hauptänderungen:

- 1 Verwende nun das kartesische Produkt $[\underline{\tau}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$
- 2 Zwei Report-Ebenen: τ und θ (dynamisch hinsichtlich Zeit)

Ein-Personen-Entscheidungsproblem

Optimale Entscheidung ist das Paar $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ mit

- $\sigma_1 : [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \rightarrow [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ (Report ex ante Typ τ)
- $\sigma_2 : [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \times [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \rightarrow [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ (Report ex post Typ θ)

Das Revelations-Prinzip

Proposition (Nur Beweisidee und Interpretation)

Für jeden dynamischen Mechanismus Γ und jede optimale Käuferstrategie σ in Γ gibt es einen direkten Mechanismus Γ' und eine optimale Käuferstrategie $\sigma' = (\sigma'_1, \sigma'_2)$ so dass gilt:

i) Die Strategie σ genügt

$$\sigma'_1(\tau) = \tau \quad \forall \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \quad \text{und} \quad \sigma'_2(\tau, \theta, \tau) = \theta \quad \forall \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}], \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$$

ii) Wenn der Käufer seine optimale Strategie spielt, dann ist für alle $(\tau, \theta) \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \times [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ die Wahrscheinlichkeit $q(\tau, \theta)$ und die Auszahlung $t(\tau, \theta)$ unter Γ' identisch mit der Wahrscheinlichkeit eines Kaufes und der erwarteten Auszahlung unter Γ .

Folgerungen aus dem Revelations-Prinzip

Betrachte direkte Mechanismen:

- ① Im Gleichgewicht: Die Wahrheit wird berichtet (keine Aussage für τ möglich?)
- ② Kein Gleichgewicht: Keine Aussage möglich

⇒ Definiere **Anreiz-kompatibel** und **individuell rational**:

$$\theta^r : [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$$

Berichtsfunktion

$$u(\tau, \theta) = \theta q(\tau, \theta) - t(\tau, \theta)$$

Nutzenfunktion

$$U(\tau') := \hat{U}(\tau' | \tau) = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} u(\tau', \hat{\theta}) f(\hat{\theta} | \tau) d\hat{\theta}$$

Interpretation?

Anreiz-kompatibel und individuell rational

Definition

Ein direkter Mechanismus ist *Anreiz-kompatibel*, wenn

i) er Anreiz-kompatibel gegeben seinem Ex-Post Typen θ ist:

$$u(\tau, \theta) \geq \theta q(\tau, \theta') - t(\tau, \theta') \quad \forall \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \text{ und } \theta, \theta' \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$$

ii) er Anreiz-kompatibel gegeben seinem Ex-Ante Typen τ ist:

$$U(\tau) \geq \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} [\hat{\theta} q(\tau', \theta^r(\hat{\theta})) - t(\tau', \theta^r(\hat{\theta}))] f(\hat{\theta} | \tau) d\hat{\theta}$$

$$\forall \tau, \tau' \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \text{ und } \theta^r : [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow [\underline{\theta}, \bar{\theta}].$$

Ein direkter Mechanismus ist *individuell rational*, wenn

$$U(\tau) \geq 0 \quad \forall \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$$

Vereinfachte Anreiz-Kompatibilität I

Proposition (Nur Beweisidee und Interpretation)

Ein direkter Mechanismus ist *Anreiz-kompatibel* genau dann, wenn

- i) $u(\tau, \theta) \geq \theta q(\tau, \theta') - t(\tau, \theta') \quad \forall \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \text{ und } \theta, \theta' \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}],$
- ii) $U(\tau) \geq \hat{U}(\tau'|\tau) \quad \forall \tau, \tau' \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}].$

Betrachte jetzt Monotonie-Kriterien \rightarrow Allgemein gilt nicht:

- ① Anreiz-Kompatibilität des Ex-Ante Typen τ impliziert nicht Monotonie der Allokationsregel.
 \Rightarrow Wesentlicher Unterschied zu statischen Screening Model.
- ② Betrachte Anreiz-Kompatibilität des Ex-Post Typen θ .

Vereinfachte Anreiz-Kompatibilität II

Proposition (Nur Beweisidee und Interpretation)

Ein direkter Mechanismus ist Anreiz-kompatibel gegeben seinem Ex-Post Typen θ genau dann, wenn

- i) Für alle Ex-Ante Typen τ die Funktion $q(\tau, \theta)$ steigend in θ ist,*
- ii) Für alle Ex-Ante Typen τ und Ex-Post Typen θ :*

$$\frac{\delta u(\tau, \theta)}{\delta \theta} = q(\tau, \theta),$$

- iii) Für alle Ex-Ante Typen τ und Ex-Post Typen θ :*

$$t(\tau, \theta) = t(\tau, \underline{\theta}) + (\theta q(\tau, \theta) - \underline{\theta} q(\tau, \underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(\tau, \hat{\theta}) d\hat{\theta}.$$

Implikationen aus Anreiz-Kompatibilität I

Proposition (Beweis an der Tafel)

Wenn ein direkter Mechanismus Anreiz-kompatibel ist, dann gilt für alle Ex-Ante Typen τ :

$$\begin{aligned}
 i) \quad U'(\tau) &= - \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q(\tau, \hat{\theta}) \frac{\delta F(\hat{\theta} | \tau)}{\delta \tau} d\hat{\theta}, \\
 ii) \quad \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} t(\tau, \hat{\theta}) f(\hat{\theta} | \tau) d\hat{\theta} &= \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \hat{\theta} q(\tau, \hat{\theta}) f(\hat{\theta} | \tau) d\hat{\theta} \\
 &+ \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} [t(\underline{\tau}, \hat{\theta}) - \hat{\theta} q(\underline{\tau}, \hat{\theta})] f(\hat{\theta} | \underline{\tau}) d\hat{\theta} \\
 &+ \int_{\underline{\tau}}^{\tau} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q(\hat{\tau}, \hat{\theta}) \frac{\delta F(\hat{\theta} | \hat{\tau})}{\delta \tau} d\hat{\theta} d\hat{\tau}.
 \end{aligned}$$

Implikationen aus Anreiz-Kompatibilität II

Wir haben festgestellt:

- 1 Vorigen Propositionen implizieren zwei Restriktionen an $t(\tau, \theta)$.
- 2 Führen diese Restriktionen zu Widersprüchen?
- 3 Nein! Nächste Proposition impliziert: Gegeben $q(\tau, \theta)$, dann wird $t(\tau, \theta)$ festgelegt durch $t(\underline{\tau}, \underline{\theta})$.

Implikationen aus Anreiz-Kompatibilität III

Proposition (Beweis an der Tafel)

Wenn ein direkter Mechanismus Anreiz-kompatibel ist, dann gilt

$$t(\tau, \theta) = t_0(\tau) + \theta q(\tau, \theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(\tau, \hat{\theta}) d\hat{\theta},$$

mit

$$\begin{aligned} t_0(\tau) = & t(\underline{\tau}, \underline{\theta}) - \underline{\theta} q(\underline{\tau}, \underline{\theta}) + \int_{\underline{\tau}}^{\tau} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q(\hat{\tau}, \hat{\theta}) \frac{\delta F(\hat{\theta} | \hat{\tau})}{\delta \tau} d\hat{\theta} d\hat{\tau} \\ & + \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \int_{\underline{\theta}}^{\hat{\theta}} [q(\tau, x) f(\hat{\theta} | \tau) - q(\underline{\tau}, x) f(\hat{\theta} | \underline{\tau})] dx d\hat{\theta}. \end{aligned}$$

Existenz eines Transferplanes für Anreiz-Kompatibilität

Anfangsproblem: Monotonie-Kriterium versagt im dynamischen Kontext für Anreiz-Kompatibilität!

⇒ Wir benötigen eine zusätzliche Existenz-Eigenschaft.

Proposition (Beweisskizze Tafel?)

Wenn $q(\tau, \theta)$ wachsend in τ und θ ist, dann existiert ein Transferplan $t(\tau, \theta)$, so dass der direkte Mechanismus Anreiz-kompatibel ist.

Individuel-rational und Anreiz-kompatibel

Proposition (Nur mündlicher Beweis)

*Ein Anreiz-kompatibler direkter Mechanismus ist
individuel-rationaler genau dann, wenn*

$$U(\mathcal{I}) \geq 0.$$

Die erwartete Auszahlung

Lemma (An der Tafel - 4 Zeiler)

Die erwartete Auszahlung für den Verkäufer ergibt sich zu

$$\begin{aligned} & \int_{\underline{\tau}}^{\bar{\tau}} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} [\hat{\theta} q(\hat{\tau}, \hat{\theta}) - u(\hat{\tau}, \hat{\theta})] f(\hat{\theta} \mid \hat{\tau}) g(\hat{\tau}) d\hat{\theta} d\hat{\tau} \\ &= \int_{\underline{\tau}}^{\bar{\tau}} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \psi(\hat{\tau}, \hat{\theta}) q(\hat{\tau}, \hat{\theta}) f(\hat{\theta} \mid \hat{\tau}) g(\hat{\tau}) d\hat{\theta} d\hat{\tau} - U(\underline{\tau}), \end{aligned}$$

mit

$$\psi(\tau, \theta) := \hat{\theta} + \frac{1 - G(\hat{\tau})}{g(\hat{\tau})} \frac{\delta F(\theta \mid \tau) / \delta \tau}{f(\theta \mid \tau)}.$$

Optimierung der erwarteten Auszahlung

Annahme

$\psi(\tau, \theta)$ ist wachsend in τ und θ .

Ferner gilt:

- ❶ Maximiere erwartete Auszahlung unter Berücksichtigung von individueller Rationalität $\Rightarrow U(\underline{\tau}) = 0$
- ❷ Nach Modelannahme ist $\psi(\tau, \theta)$ stetig
 $\Rightarrow p(\tau) = \min\{\hat{\theta} \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \mid \psi(\tau, \hat{\theta}) \geq 0\}$ wohldefiniert
- ❸ Erwartete Auszahlung linear in $q(\tau, \theta)$
$$\Rightarrow q(\tau, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \psi(\tau, \theta) \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \theta \geq p(\tau) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der optimale direkte Mechanismus

Satz (Wenn noch Zeit, Beweis an Tafel)

Unter der vorigen Annahme ist ein Anreiz-kompatibler und individuell rationaler direkter Mechanismus optimal genau dann, wenn

$$q(\tau, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \theta \geq p(\tau) \\ 0, & \text{sonst } 0 \end{cases}$$

und

$$t(\tau, \theta) = \begin{cases} t_0(\tau)p(\tau), & \text{falls } \theta \geq p(\tau) \\ t_0, & \text{sonst } 0, \end{cases}$$

mit t_0 wie in Proposition vorher. Ferner gilt

$$t(\underline{\tau}, \underline{\theta}) = \hat{\theta} f(\hat{\theta} \mid \underline{\tau}) d\hat{\theta} - p(\underline{\tau})[1 - F(p(\underline{\tau}) \mid \underline{\tau})] + \underline{\theta} q(\underline{\tau}, \underline{\theta}).$$

...

...

...

...

...

...