Der Dynamische Mechanismus-Design

Michael Füg und Philip Zilke

28. April 2016

Aufbau des Vortrages

Die Hauptansätze:

- Dynamische private Information und statische Allokationen
- Dynamische Allokationen und statische private Information

Mathemtische Modellierung

Sei im Folgenden für das Signal τ

- Kummulierte Verteilung $G(\tau)$
- Positive Dichte $g(\tau)$
- Trägermenge $[\underline{\tau}, \bar{\tau}]$

Sei im Folgenden für die Bewertung θ

- Kummulierte Verteilung $F(\theta \mid \tau)$
- Korrespondierende Dichte $f(\theta \mid \tau)$
- Trägermenge $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ mit $0 \leq \underline{\theta} < \bar{\theta}$ für alle $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$

Annahmen

Wir setzen im Folgenden voraus, dass

- Trägermenge von $F(\theta \mid \tau)$ ist $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ für alle $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}], 0 \leq \underline{\theta} < \bar{\theta}$
- Trägermenge von $F(\theta \mid \tau)$ unabhängig von τ
- $f(\theta \mid \tau) > 0$ für alle $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ und $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$
- $F(\theta \mid \tau)$ und $f(\theta \mid \tau)$ sind stetig differenzierbar in τ
- Für die Familie $F(\cdot \mid \tau)$ mit $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ gilt

$$\delta F(\theta \mid \tau)/\delta\tau < 0 \; für \; alle \; \theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta}) \qquad \text{(FOSD)}$$

Dynamischer direkter Mechanismus

Definition

Ein (dynamischer) direkter Mechanismus besteht aus den beiden Funktionen

$$q : [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \to [0,1] \quad \text{und} \quad t : [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \to \mathbb{R}.$$

Zwei wesentliche Hauptänderungen:

1. Verwende nun das kartesische Produkt $[\underline{\tau}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$
2. Zwei Report-Ebenen: τ und θ

Ein-Personen-Entscheidungsproblem

Optimale Entscheidungsregel ist das Paar $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ mit

- $\sigma_1 : [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \to [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ (Report ex ante Typ τ)
- $\sigma_2 : [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \times [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \to [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ (Report ex post Typ θ)

Das dynamische Revelations-Prinzip

Proposition

Für jeden dynamischen Mechanismus Γ *und jede optimale Käuferstrategie* σ *in* Γ *gibt es einen direkten Mechanismus* Γ' *und eine optimale Käuferstrategie* $\sigma' = (\sigma'_1, \sigma'_2)$*, so dass gilt:*

i) Die Strategie σ' *genügt*

$$\sigma'_1(\tau) = \tau \; \forall \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \quad \textit{und} \quad \sigma'_2(\tau, \theta, \tau) = \theta \; \forall \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}], \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}].$$

ii) Wenn der Käufer seine optimale Strategie spielt, dann ist für alle $(\tau, \theta) \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ *die Wahrscheinlichkeit* $q(\tau, \theta)$ *und die Auszahlung* $t(\tau, \theta)$ *unter* Γ' *identisch mit der Wahrscheinlichkeit eines Kaufes und der erwarteten Auszahlung unter* Γ*.*

Folgerungen aus dem Revelations-Prinzip

Betrachte direkte Mechanismen:

1. Im Gleichgewicht: Die Wahrheit wird berichtet
2. Kein Gleichgewicht: Keine Aussage möglich

$$\theta^r : [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \to [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$$

$$u(\tau, \theta) = \theta q(\tau, \theta) - t(\tau, \theta)$$

$$\hat{U}(\tau' | \tau) = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} u(\tau', \hat{\theta}) f(\hat{\theta} \mid \tau) \, d\hat{\theta}$$

$$U(\hat{\tau}) = \hat{U}(\hat{\tau} | \hat{\tau})$$

Anreiz-kompatibel und individuell rational

Definition

Ein direkter Mechanismus ist Anreiz-kompatibel, wenn
i) er Anreiz-kompatibel im Bezug auf seinem ex post Typen θ ist:

$$u(\tau,\theta) \geq \theta q(\tau,\theta') - t(\tau,\theta') \quad \forall \tau \in [\underline{\tau},\bar{\tau}] \text{ und } \theta,\theta' \in [\underline{\theta},\bar{\theta}].$$

ii) er Anreiz-kompatibel im Bezug auf seinem ex ante Typen τ ist:

$$U(\tau) \geq \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} [\hat{\theta} q(\tau',\theta^r(\hat{\theta})) - t(\tau',\theta^r(\hat{\theta}))] f(\hat{\theta} \mid \tau) d\hat{\theta}$$
$$\forall \tau,\tau' \in [\underline{\tau},\bar{\tau}] \text{ und } \theta^r : [\underline{\theta},\bar{\theta}] \to [\underline{\theta},\bar{\theta}].$$

Ein direkter Mechanismus ist individuel rational, wenn

$$U(\tau) \geq 0 \quad \forall \tau \in [\underline{\tau},\bar{\tau}].$$

Vereinfache Anreiz-Kompatibilität I

Proposition

Ein direkter Mechanismus ist Anreiz-kompatibel genau dann, wenn

i) $u(\tau, \theta) \geq \theta q(\tau, \theta') - t(\tau, \theta') \quad \forall \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ *und* $\theta, \theta' \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$,

ii) $U(\tau) \geq \hat{U}(\tau' \mid \tau) \quad \forall \tau, \tau' \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$.

Betrachte jetzt Monotonie-Kriterien $\rightarrow$ gelten im Allgemeinen nicht:

1. Anreiz-Kompatibilität des ex ante Typen τ impliziert nicht Monotonie der Allokationsregel.
   $\Rightarrow$ Wesentlicher Unterschied zu statischem Screening Model.
2. Betrachte Anreiz-Kompatibilität gegeben des ex post Typen θ.

Vereinfache Anreiz-Kompatibilität II

Proposition

Ein direkter Mechanismus ist Anreiz-kompatibel gegeben seinem ex post Typen θ genau dann, wenn

i) für alle ex ante Typen τ die Funktion $q(\tau, \theta)$ steigend in θ ist,
ii) für alle ex ante Typen τ und ex post Typen θ:

$$\frac{\delta u(\tau, \theta)}{\delta \theta} = q(\tau, \theta),$$

iii) für alle ex ante Typen τ und ex post Typen θ:

$$t(\tau, \theta) = t(\tau, \underline{\theta}) + (\theta q(\tau, \theta) - \underline{\theta} q(\tau, \underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(\tau, \hat{\theta})\ d\hat{\theta}.$$

Beispiel für Anreiz-Kompatibilität

Wir definieren zunächst $[\underline{\theta}, \bar{\theta}] = [0, \bar{\theta}]$ und $[\underline{\tau}, \bar{\tau}] = [0, \bar{\tau}]$.

Lemma

Der direkte Mechanismus charakterisiert durch

$$q(\tau, \theta) := 1 - e^{-(\tau+\theta)} \textit{ und } t(\tau, \theta) := -e^{-(\tau+\theta)} \cdot (1 + \theta)$$

ist Anreiz-kompatibel.

Implikationen aus Anreiz-Kompatibilität I

Proposition

Wenn ein direkter Mechanismus Anreiz-kompatibel ist, dann gilt für alle ex ante Typen τ:

$$i)\ U'(\tau) = -\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q(\tau,\hat{\theta}) \frac{\delta F(\hat{\theta} \mid \tau)}{\delta \tau}\ d\hat{\theta},$$

$$ii)\ \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} t(\tau,\hat{\theta}) f(\hat{\theta} \mid \tau)\ d\hat{\theta} = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \hat{\theta} q(\tau,\hat{\theta}) f(\hat{\theta} \mid \tau)\ d\hat{\theta}$$

$$+ \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} [t(\underline{\tau},\hat{\theta}) - \hat{\theta} q(\underline{\tau},\hat{\theta})] f(\hat{\theta} \mid \underline{\tau})\ d\hat{\theta}$$

$$+ \int_{\underline{\tau}}^{\tau} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q(\hat{\tau},\hat{\theta}) \frac{\delta F(\hat{\theta} \mid \hat{\tau})}{\delta \tau}\ d\hat{\theta}\ d\hat{\tau}.$$

Implikationen aus Anreiz-Kompatibilität II

Wir haben festgestellt:

1. Vorige Propositionen implizieren zwei Restriktionen an $t(\tau, \theta)$.
2. Nächste Proposition impliziert: Gegeben $q(\tau, \theta)$, dann wird $t(\tau, \theta)$ festgelegt durch $t(\underline{\tau}, \underline{\theta})$.

Implikationen aus Anreiz-Kompatibilität III

Proposition

Wenn ein direkter Mechanismus Anreiz-kompatibel ist, dann gilt

$$t(\tau, \theta) = t_0(\tau) + \theta q(\tau, \theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(\tau, \hat{\theta})\ d\hat{\theta},$$

mit

$$t_0(\tau) = t(\underline{\tau}, \underline{\theta}) - \underline{\theta} q(\underline{\tau}, \underline{\theta}) + \int_{\underline{\tau}}^{\tau} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q(\hat{\tau}, \hat{\theta}) \frac{\delta F(\hat{\theta} \mid \hat{\tau})}{\delta \tau}\ d\hat{\theta}\ d\hat{\tau}$$
$$+ \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \int_{\underline{\theta}}^{\hat{\theta}} [q(\tau, x) f(\hat{\theta} \mid \tau) - q(\underline{\tau}, x) f(\hat{\theta} \mid \underline{\tau})]\ dx\ d\hat{\theta}.$$

Existenz eines Transferplanes für Anreiz-Kompatibilität

Anfangsproblem: Monotonie-Kriterium versagt im dynamischen Kontext für Anreiz-Kompatibilität!

Proposition

Wenn $q(\tau, \theta)$ wachsend in τ und θ ist, dann existiert ein Transferplan $t(\tau, \theta)$, so dass der direkte Mechanismus Anreiz-kompatibel ist.

Individuel-rational

Proposition

Ein Anreiz-kompatibler direkter Mechanismus ist individuel-rational genau dann, wenn

$$U(\underline{\tau}) \geq 0.$$

Beispiel: Individuel-rational

Lemma

Sei $[\underline{\theta}, \bar{\theta}] = [0, \bar{\theta}]$ und $[\underline{\tau}, \bar{\tau}] = [0, \bar{\tau}]$. Dann ist der Anreiz-kompatible direkte Mechanismus charakterisiert durch

$$q(\tau, \theta) := 1 - e^{-(\tau+\theta)} \text{ und } t(\tau, \theta) := -e^{-(\tau+\theta)} \cdot (1 + \theta)$$

individuel-rational.

Die erwartete Auszahlung

Lemma

Die erwartete Auszahlung für den Verkäufer ergibt sich als

$$\int_{\underline{\tau}}^{\bar{\tau}} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} [\hat{\theta} q(\hat{\tau}, \hat{\theta}) - u(\hat{\tau}, \hat{\theta})] f(\hat{\theta} \mid \hat{\tau}) g(\hat{\tau}) \; d\hat{\theta} \; d\hat{\tau}$$

$$= \int_{\underline{\tau}}^{\bar{\tau}} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \psi(\hat{\tau}, \hat{\theta}) q(\hat{\tau}, \hat{\theta}) f(\hat{\theta} \mid \hat{\tau}) g(\hat{\tau}) \; d\hat{\theta} \; d\hat{\tau} - U(\underline{\tau}),$$

mit

$$\psi(\tau, \theta) := \hat{\theta} + \frac{1 - G(\hat{\tau})}{g(\hat{\tau})} \frac{\delta F(\theta \mid \tau)/\delta \tau}{f(\theta \mid \tau)}.$$

Optimierung der erwarteten Auszahlung

Annahme

$\psi(\tau, \theta)$ ist wachsend in τ und θ.

Ferner gilt:

1. Maximiere erwartete Auszahlung unter Berücksichtigung von individueler Rationalität $\Rightarrow U(\underline{\tau}) = 0$
2. Nach Modellannahme ist $\psi(\tau, \theta)$ stetig
$\Rightarrow p(\tau) = \min\{\hat{\theta} \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \mid \psi(\tau, \hat{\theta}) \geq 0\}$ wohldefiniert
3. Erwartete Auszahlung linear in $q(\tau, \theta)$
$$\Rightarrow q(\tau, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \psi(\tau, \theta) \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \theta \geq p(\tau) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der optimale direkte Mechanismus

Satz

Unter der vorigen Annahme ist ein Anreiz-kompatibler und individuel rationaler direkter Mechanismus optimal genau dann, wenn

$$q(\tau, \theta) = \begin{cases} 1, & \textit{falls } \theta \geq p(\tau) \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

und

$$t(\tau, \theta) = \begin{cases} t_0(\tau) + p(\tau), & \textit{falls } \theta \geq p(\tau) \\ t_0(\tau), & \textit{sonst}, \end{cases}$$

mit t_0 wie in Proposition vorher. Ferner gilt

$$t(\underline{\tau}, \underline{\theta}) = \int_{p(\underline{\tau})}^{\bar{\theta}} \hat{\theta} f(\hat{\theta} \mid \underline{\tau}) \, d\hat{\theta} - p(\underline{\tau})[1 - F(p(\underline{\tau}) \mid \underline{\tau})] + \underline{\theta} q(\underline{\tau}, \underline{\theta}).$$

Modelltransformation

- Modellerweiterung durch unabhängiges Signal

$$\gamma := F(\theta \mid \tau) \Leftrightarrow \theta = F^{-1}(\gamma \mid \tau)$$

- γ unabhängig von τ

Lemma

Sei $\tilde{\psi}(\tau, \gamma) := \psi(\tau, F^{-1}(\gamma \mid \tau))$. *Dann gilt*

$$\tilde{\psi}(\tau, \gamma) = F^{-1}(\gamma \mid \tau) - \frac{1 - G(\tau)}{g(\tau)} \frac{\delta F^{-1}(\gamma \mid \tau)}{\delta \tau}.$$

Anreiz-kompatibel mit beobachtbarem γ

Definition

Wir nennen einen direkten Mechanismus $(\tilde{q}(\tau,\gamma),\tilde{t}(\tau,\gamma))$ Anreiz-kompatibel mit beobachtbarem γ, wenn

$$U(\tau) \geq \int_0^1 F^{-1}(\gamma \mid \tau)\tilde{q}(\tau',\gamma) - \tilde{t}(\tau',\gamma)\ d\gamma \quad \text{für alle } \tau' \in [\underline{\tau},\bar{\tau}].$$

Proposition

Wenn der direkte Mechanismus $(\tilde{q}(\tau,\gamma),\tilde{t}(\tau,\gamma))$ Anreiz-kompatibel mit beobachtbarem γ ist, dann ist

$$U(\tau) = U(\underline{\tau}) + \int_{\underline{\tau}}^{\tau} \int_0^1 \frac{\delta F^{-1}(\gamma \mid \hat{\tau})}{\delta \tau} \tilde{q}(\hat{\tau},\gamma)\ d\gamma\ d\hat{\tau}.$$

Optimalität im privaten und öffentlichen Fall

Proposition

Angenommen $\psi(\tau, \theta)$ ist wachsend in τ und θ. Wenn der direkte Mechanismus $(\tilde{q}(\tau, \gamma), \tilde{t}(\tau, \gamma))$ optimal ist bei privat beobachtbarem γ, so ist er auch optimal bei öffentlichem beobachtbarem γ.

- Verkäufer entzieht zusätzliche private Informationen die nach Signal τ erfahren werden zu Kosten 0
- Verkäufer will so viel ex post private Informationen wie möglich entziehen
- Verkäufer will so früh wie möglich Mechanismus vorschlagen

Modellerweiterung auf N Käufer I

Betrachte indiziertes Modell

- Spielermenge $I = \{1, ..., N\}$
- Signal τ_i und Bewertung θ_i mit $i \in I$
- $\tau := (\tau_1, ..., \tau_N), \theta := (\theta_1, ..., \theta_N), \mathcal{T} := [\underline{\tau}, \bar{\tau}], \Theta := [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$
- $q(\tau, \theta) = (q_1(\tau, \theta), ..., q_N(\tau, \theta))$ und
  $\Delta := \{(q_1, ..., q_N) \mid 0 \leq q_i \leq 1 \; \forall i \in I, \sum_{i \in I} q_i \leq 1\}$

Definition

Ein (dynamischer) direkter Mechanismus besteht aus den beiden Funktionen

$$q : \mathcal{T} \times \Theta \to \Delta \quad \text{und} \quad t_i : \mathcal{T} \times \Theta \to \mathbb{R}.$$

Modellerweiterung auf N Käufer II

Indizierung setzt sich durch alle vorigen Ergebnisse fort:

- Maximiere die erwartete Auszahlung des Verkäufers
- Charakterisierung optimaler direkter Mechanismen $\{q_i, t_i\}$
- Implementierung durch Benachteiligte Auktion
  - 1. Runde: Möglichkeit von Abgabe $t_0(\tau_i)$ und Zuteilung einer Prämie $p(\tau_i)$
  - 2. Runde: Zweitpreisauktion zuzüglich $p(\tau_i)$
  - Wie ist die Abgabe $t_0(\tau_i)$ und die Prämie $p(\tau_i)$ zu wählen?

Wiederholtes Spiel mit Diskontierung

- Zwei-Personen-Spiel, fixiere $\theta > 0$ und betrachte Perioden $\tau = 1, ..., T$
- Modelliere mit Diskontierungsfaktor $\delta \in [0, 1)$
- Betrachte periodenabhängige q_τ und t_τ
- $u(\theta) := \sum_{\tau=1}^{T} \delta^{\tau-1}(\theta q_\tau(\theta) - t_\tau(\theta))$

Definition

Ein (dynamischer) direkter Mechanismus besteht aus den beiden Funktionen

$$q : [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \to [0, 1]^T \quad \textit{und} \quad t : [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \to \mathbb{R}^T.$$

Anreiz-kompatibel und individuel-rational

Definition

Ein direkter Mechanismus bestehend aus den beiden Funktionen $q = (q_1, \ldots, q_T)$ und $t = (t_1, \ldots, t_T)$ ist Anreiz-kompatibel, wenn für alle $\theta, \theta' \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$

$$u(\theta) \geq \sum_{\tau=1}^{T} \delta^{\tau-1}(\theta q_\tau(\theta') - t_\tau(\theta')).$$

Ein direkter Mechanismus ist individuel rational, wenn

$$u(\theta) \geq 0 \quad \forall \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}].$$

Optimalitätskriterium

Die Optimalität lässt sich charakterisieren:

- Optimaler Mechanismus reduziert sich gemäß Kapitel 2: Eine Periode ohne Diskontierung
- Käufer- vs. Verkäuferstrategien
- Wie kann ich gegenseitige Beeinflussung verhindern?