

Dynamic Mechanism-Design

Michael Füg und Philip Zilke

28. April 2016

1 Vom statischen zum dynamischen Mechanismus Design

2 Dynamische private Information

- Dynamischer direkter Mechanismus
- Das Revelations-Prinzip
- Anreiz-Kompatibilität und individuelle Rationalität
- Optimaler Verkaufs-Mechanismus

3 Ausblicke

- Die Rolle der privaten Information
- Sequentielles Mechanismus Design
- Dynamische Allokationen

Aufbau des Vortrages

Die Hauptansätze:

- Dynamische private Information und statische Allokationen
- Dynamische Allokationen und statische private Information

Mathematische Modellierung

Sei im Folgenden für das Signal τ

- Kummulierte Verteilung $G(\tau)$
- Positive Dichte $g(\tau)$
- Trägermenge $[\underline{\tau}, \bar{\tau}]$

Sei im Folgenden für die Bewertung θ

- Kummulierte Verteilung $F(\theta \mid \tau)$
- Korrespondierende Dichte $f(\theta \mid \tau)$
- Trägermenge $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ mit $0 \leq \underline{\theta} < \bar{\theta}$ für alle $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$

Annahmen

Wir setzen im Folgenden voraus, dass

- Trägermenge von $F(\theta | \tau)$ ist $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ für alle $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$, $0 \leq \underline{\theta} < \bar{\theta}$
- Trägermenge von $F(\theta | \tau)$ unabhängig von τ
- $f(\theta | \tau) > 0$ für alle $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ und $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$
- $F(\theta | \tau)$ und $f(\theta | \tau)$ sind stetig differenzierbar in τ
- Für die Familie $F(\cdot | \tau)$ mit $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ gilt

$$\delta F(\theta | \tau) / \delta \tau < 0 \text{ für alle } \theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta}) \quad (\text{FOSD})$$

Dynamischer direkter Mechanismus

Definition

Ein (dynamischer) *direkter Mechanismus* besteht aus den beiden Funktionen

$$q : [\underline{I}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow [0, 1] \quad \text{und} \quad t : [\underline{I}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Zwei wesentliche Hauptänderungen:

- 1 Verwende nun das kartesische Produkt $[\underline{I}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$
- 2 Zwei Report-Ebenen: τ und θ

Ein-Personen-Entscheidungsproblem

Optimale Entscheidungsregel ist das Paar $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ mit

- $\sigma_1 : [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \rightarrow [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ (Report ex ante Typ τ)
- $\sigma_2 : [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \times [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \rightarrow [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ (Report ex post Typ θ)

Das Revelations-Prinzip

Proposition

Für jeden dynamischen Mechanismus Γ und jede optimale Käuferstrategie σ in Γ gibt es einen direkten Mechanismus Γ' und eine optimale Käuferstrategie $\sigma' = (\sigma'_1, \sigma'_2)$, so dass gilt:

i) Die Strategie σ' genügt

$$\sigma'_1(\tau) = \tau \quad \forall \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \quad \text{und} \quad \sigma'_2(\tau, \theta, \tau) = \theta \quad \forall \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}], \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$$

ii) Wenn der Käufer seine optimale Strategie spielt, dann ist für alle $(\tau, \theta) \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ die Wahrscheinlichkeit $q(\tau, \theta)$ und die Auszahlung $t(\tau, \theta)$ unter Γ' identisch mit der Wahrscheinlichkeit eines Kaufes und der erwarteten Auszahlung unter Γ .

Folgerungen aus dem Revelations-Prinzip

Betrachte direkte Mechanismen:

- 1 Im Gleichgewicht: Die Wahrheit wird berichtet
- 2 Kein Gleichgewicht: Keine Aussage möglich

$$\theta^r : [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$$

$$u(\tau, \theta) = \theta q(\tau, \theta) - t(\tau, \theta)$$

$$\hat{U}(\tau' | \tau) = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} u(\tau', \hat{\theta}) f(\hat{\theta} | \tau) d\hat{\theta}$$

$$U(\hat{\tau}) = \hat{U}(\hat{\tau} | \hat{\tau})$$

Anreiz-kompatibel und individuell rational

Definition

Ein direkter Mechanismus ist *Anreiz-kompatibel*, wenn

i) er Anreiz-kompatibel im Bezug auf seinem Ex-Post Typen θ ist:

$$u(\tau, \theta) \geq \theta q(\tau, \theta') - t(\tau, \theta') \quad \forall \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \text{ und } \theta, \theta' \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$$

ii) er Anreiz-kompatibel im Bezug auf seinem Ex-Ante Typen τ ist:

$$U(\tau) \geq \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} [\hat{\theta} q(\tau', \theta^r(\hat{\theta})) - t(\tau', \theta^r(\hat{\theta}))] f(\hat{\theta} | \tau) d\hat{\theta}$$

$$\forall \tau, \tau' \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \text{ und } \theta^r : [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow [\underline{\theta}, \bar{\theta}].$$

Ein direkter Mechanismus ist *individuell rational*, wenn

$$U(\tau) \geq 0 \quad \forall \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$$

Vereinfachte Anreiz-Kompatibilität I

Proposition

*Ein direkter Mechanismus ist **Anreiz-kompatibel** genau dann, wenn*

- i) $u(\tau, \theta) \geq \theta q(\tau, \theta') - t(\tau, \theta') \quad \forall \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \text{ und } \theta, \theta' \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}],$*
- ii) $U(\tau) \geq \hat{U}(\tau' | \tau) \quad \forall \tau, \tau' \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}].$*

Betrachte jetzt Monotonie-Kriterien \rightarrow gelten im Allgemeinen nicht:

- ❶ Anreiz-Kompatibilität des Ex-Ante Typen τ impliziert nicht Monotonie der Allokationsregel.
 \Rightarrow Wesentlicher Unterschied zu statischem Screening Model.
- ❷ Betrachte Anreiz-Kompatibilität gegeben des Ex-Post Typen θ .

Vereinfachte Anreiz-Kompatibilität II

Proposition

Ein direkter Mechanismus ist Anreiz-kompatibel gegeben seinem Ex-Post Typen θ genau dann, wenn

- i) für alle Ex-Ante Typen τ die Funktion $q(\tau, \theta)$ steigend in θ ist,*
- ii) für alle Ex-Ante Typen τ und Ex-Post Typen θ :*

$$\frac{\delta u(\tau, \theta)}{\delta \theta} = q(\tau, \theta),$$

- iii) für alle Ex-Ante Typen τ und Ex-Post Typen θ :*

$$t(\tau, \theta) = t(\tau, \underline{\theta}) + (\theta q(\tau, \theta) - \underline{\theta} q(\tau, \underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(\tau, \hat{\theta}) d\hat{\theta}.$$

Beispiel für Anreiz-Kompatibilität

Wir definieren zunächst $[\underline{\theta}, \bar{\theta}] = [0, \bar{\theta}]$ und $[\underline{\tau}, \bar{\tau}] = [0, \bar{\tau}]$.

Lemma

Der direkte Mechanismus charakterisiert durch

$$q(\tau, \theta) := 1 - e^{-(\tau+\theta)} \text{ und } t(\tau, \theta) := -e^{-(\tau+\theta)} \cdot (1 + \theta)$$

ist Anreiz-kompatibel.

Implikationen aus Anreiz-Kompatibilität I

Proposition

Wenn ein direkter Mechanismus Anreiz-kompatibel ist, dann gilt für alle Ex-Ante Typen τ :

$$\begin{aligned} i) \quad U'(\tau) &= - \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q(\tau, \hat{\theta}) \frac{\delta F(\hat{\theta} | \tau)}{\delta \tau} d\hat{\theta}, \\ ii) \quad \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} t(\tau, \hat{\theta}) f(\hat{\theta} | \tau) d\hat{\theta} &= \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \hat{\theta} q(\tau, \hat{\theta}) f(\hat{\theta} | \tau) d\hat{\theta} \\ &+ \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} [t(\underline{\tau}, \hat{\theta}) - \hat{\theta} q(\underline{\tau}, \hat{\theta})] f(\hat{\theta} | \underline{\tau}) d\hat{\theta} \\ &+ \int_{\underline{\tau}}^{\tau} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q(\hat{\tau}, \hat{\theta}) \frac{\delta F(\hat{\theta} | \hat{\tau})}{\delta \tau} d\hat{\theta} d\hat{\tau}. \end{aligned}$$

Implikationen aus Anreiz-Kompatibilität II

Wir haben festgestellt:

- 1 Vorige Propositionen implizieren zwei Restriktionen an $t(\tau, \theta)$.
- 2 Nächste Proposition impliziert: Gegeben $q(\tau, \theta)$, dann wird $t(\tau, \theta)$ festgelegt durch $t(\underline{\tau}, \underline{\theta})$.

Implikationen aus Anreiz-Kompatibilität III

Proposition

Wenn ein direkter Mechanismus Anreiz-kompatibel ist, dann gilt

$$t(\tau, \theta) = t_0(\tau) + \theta q(\tau, \theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(\tau, \hat{\theta}) d\hat{\theta},$$

mit

$$\begin{aligned} t_0(\tau) = & t(\underline{\tau}, \underline{\theta}) - \underline{\theta} q(\underline{\tau}, \underline{\theta}) + \int_{\underline{\tau}}^{\tau} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q(\hat{\tau}, \hat{\theta}) \frac{\delta F(\hat{\theta} | \hat{\tau})}{\delta \tau} d\hat{\theta} d\hat{\tau} \\ & + \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \int_{\underline{\theta}}^{\hat{\theta}} [q(\tau, x) f(\hat{\theta} | \tau) - q(\underline{\tau}, x) f(\hat{\theta} | \underline{\tau})] dx d\hat{\theta}. \end{aligned}$$

Existenz eines Transferplanes für Anreiz-Kompatibilität

Anfangsproblem: Monotonie-Kriterium versagt im dynamischen Kontext für Anreiz-Kompatibilität!

Proposition

Wenn $q(\tau, \theta)$ wachsend in τ und θ ist, dann existiert ein Transferplan $t(\tau, \theta)$, so dass der direkte Mechanismus Anreiz-kompatibel ist.

Individuel-rational

Proposition

Ein Anreiz-kompatibler direkter Mechanismus ist individuel-rational genau dann, wenn

$$U(\underline{t}) \geq 0.$$

Beispiel: Individuel-rational

Lemma

Sei $[\underline{\theta}, \bar{\theta}] = [0, \bar{\theta}]$ und $[\underline{\tau}, \bar{\tau}] = [0, \bar{\tau}]$. Dann ist der Anreiz-kompatible direkte Mechanismus charakterisiert durch

$$q(\tau, \theta) := 1 - e^{-(\tau+\theta)} \text{ und } t(\tau, \theta) := -e^{-(\tau+\theta)} \cdot (1 + \theta)$$

individuel-rational.

Die erwartete Auszahlung

Lemma

Die erwartete Auszahlung für den Verkäufer ergibt sich als

$$\begin{aligned} & \int_{\underline{\tau}}^{\bar{\tau}} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} [\hat{\theta} q(\hat{\tau}, \hat{\theta}) - u(\hat{\tau}, \hat{\theta})] f(\hat{\theta} \mid \hat{\tau}) g(\hat{\tau}) d\hat{\theta} d\hat{\tau} \\ &= \int_{\underline{\tau}}^{\bar{\tau}} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \psi(\hat{\tau}, \hat{\theta}) q(\hat{\tau}, \hat{\theta}) f(\hat{\theta} \mid \hat{\tau}) g(\hat{\tau}) d\hat{\theta} d\hat{\tau} - U(\underline{\tau}), \end{aligned}$$

mit

$$\psi(\tau, \theta) := \hat{\theta} + \frac{1 - G(\hat{\tau})}{g(\hat{\tau})} \frac{\delta F(\theta \mid \tau) / \delta \tau}{f(\theta \mid \tau)}.$$

Optimierung der erwarteten Auszahlung

Annahme

$\psi(\tau, \theta)$ ist wachsend in τ und θ .

Ferner gilt:

- ❶ Maximiere erwartete Auszahlung unter Berücksichtigung von individueller Rationalität $\Rightarrow U(\underline{\tau}) = 0$
- ❷ Nach Modellannahme ist $\psi(\tau, \theta)$ stetig
 $\Rightarrow p(\tau) = \min\{\hat{\theta} \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \mid \psi(\tau, \hat{\theta}) \geq 0\}$ wohldefiniert
- ❸ Erwartete Auszahlung linear in $q(\tau, \theta)$
$$\Rightarrow q(\tau, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \psi(\tau, \theta) \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \theta \geq p(\tau) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der optimale direkte Mechanismus

Satz

Unter der vorigen Annahme ist ein Anreiz-kompatibler und individuell rationaler direkter Mechanismus optimal genau dann, wenn

$$q(\tau, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \theta \geq p(\tau) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$t(\tau, \theta) = \begin{cases} t_0(\tau)p(\tau), & \text{falls } \theta \geq p(\tau) \\ t_0, & \text{sonst} \end{cases},$$

mit t_0 wie in Proposition vorher. Ferner gilt

$$t(\underline{\tau}, \underline{\theta}) = \int_{p(\underline{\tau})}^{\underline{\theta}} \hat{\theta} f(\hat{\theta} \mid \underline{\tau}) d\hat{\theta} - p(\underline{\tau})[1 - F(p(\underline{\tau}) \mid \underline{\tau})] + \underline{\theta} q(\underline{\tau}, \underline{\theta}).$$

Modeltransformation

- Modellerweiterung durch unabhängiges Signal

$$\gamma := F(\theta \mid \tau) \Leftrightarrow \theta = F^{-1}(\gamma \mid \tau)$$

- γ unabhängig von τ

Lemma

Sei $\tilde{\psi}(\tau, \gamma) := \psi(\tau, F^{-1}(\gamma \mid \tau))$. Dann gilt

$$\tilde{\psi}(\tau, \gamma) = F^{-1}(\gamma \mid \tau) - \frac{1 - G(\tau)}{g(\tau)} \frac{\delta F^{-1}(\gamma \mid \tau)}{\delta \tau}.$$

Anreiz-kompatibel im Bezug auf γ

Definition

Wir nennen einen direkten Mechanismus $(\tilde{q}(\tau, \gamma), \tilde{t}(\tau, \gamma))$
Anreiz-kompatibel im Bezug auf γ , wenn

$$U(\tau) \geq \int_0^1 F^{-1}(\gamma | \tau) \tilde{q}(\tau', \gamma) - \tilde{t}(\tau', \gamma) d\gamma \quad \text{für alle } \tau' \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}].$$

Proposition

Wenn der direkten Mechanismus $(\tilde{q}(\tau, \gamma), \tilde{t}(\tau, \gamma))$
Anreiz-kompatibel bezüglich γ ist, dann ist

$$U(\tau) = U(\underline{\tau}) + \int_{\underline{\tau}}^{\tau} \int_0^1 \frac{\delta F^{-1}(\gamma | \hat{\tau})}{\delta \tau} \tilde{q}(\hat{\tau}, \gamma) d\gamma d\hat{\tau}.$$

Optimalität im privaten und öffentlichen Fall

Proposition

Angenommen $\psi(\tau, \theta)$ ist wachsend in τ und θ . Wenn der direkten Mechanismus $(\tilde{q}(\tau, \gamma), \tilde{t}(\tau, \gamma))$ optimal ist bei privat bekanntem γ , so ist er auch optimal bei öffentlichem bekanntem γ .

- Verkäufer entzieht zusätzliche private Informationen die nach Signal τ erfahren werden zu Kosten 0
- Verkäufer will so viel ex post private Informationen wie möglich entziehen
- Verkäufer will so früh wie möglich Mechanismus vorschlagen

Modellerweiterung auf N Käufer I

Betrachte indiziertes Modell

- Spielermenge $I = \{1, \dots, N\}$
- Signal τ_i und Bewertung θ_i mit $i \in I$
- $\tau := (\tau_1, \dots, \tau_N), \theta := (\theta_1, \dots, \theta_N), \mathcal{T} := [\underline{\tau}, \bar{\tau}], \Theta := [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$
- $q(\tau, \theta) = (q_1(\tau, \theta), \dots, q_N(\tau, \theta))$ und
 $\Delta := \{(q_1, \dots, q_N) \mid 0 \leq q_i \leq 1 \ \forall i \in I, \sum_{i \in I} q_i \leq 1\}$

Definition

Ein (dynamischer) *direkter Mechanismus* besteht aus den beiden Funktionen

$$q : \mathcal{T} \times \Theta \rightarrow \Delta \quad \text{und} \quad t_i : \mathcal{T} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}.$$

Modellerweiterung auf N Käufer II

Indizierung setzt sich durch alle vorigen Ergebnisse fort:

- Maximiere die erwartete Auszahlung des Verkäufers
- Charakterisierung optimaler direkter Mechanismen $\{q_i, t_i\}$
- Implementierung durch **Benachteiligte Auktion**
 - 1. Runde: Möglichkeit von Abgabe $t_0(\tau_i)$ und Zuteilung einer Prämie $p(\tau_i)$
 - 2. Runde: Zweitpreisauktion zuzüglich $p(\tau_i)$
 - Wie ist die Abgabe $t_0(\tau_i)$ und die Prämie $p(\tau_i)$ zu wählen?

Wiederholtes spiel mit Diskontierung

- Zweipersonenspiel, fixiere $\theta > 0$ und betrachte Perioden $\tau = 1, \dots, T$
- Modelliere mit Diskontierungsfaktor $\delta \in [0, 1)$
- Betrachte periodenabhängige q_τ und t_τ
- $u(\theta) := \sum_{\tau=1}^T \delta^{\tau-1} (\theta q_\tau(\theta) - t_\tau(\theta))$

Definition

Ein (dynamischer) *direkter Mechanismus* besteht aus den beiden Funktionen

$$q : [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow [0, 1]^T \quad \text{und} \quad t : [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}^T.$$

Anreiz-kompatibel und individuell-rational

Definition

Ein direkter Mechanismus bestehend aus den beiden Funktionen $q = (q_1, \dots, q_T)$ und $t = (t_1, \dots, t_T)$ ist *Anreiz-kompatibel*, wenn für alle $\theta, \theta' \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$

$$u(\theta) \geq \sum_{\tau=1}^T \delta^{\tau-1} (\theta q_{\tau}(\theta') - t_{\tau}(\theta')).$$

Ein direkter Mechanismus ist *individuell rational*, wenn

$$u(\theta) \geq 0 \quad \forall \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}].$$

Optimalitätskriterium

Die Optimalität lässt sich charakterisieren:

- Optimaler Mechanismus reduziert sich gemäß Kapitel 2:
Eine Periode ohne Diskontierung
- Käufer- vs. Verkäuferstrategien
- Wie kann ich gegenseitige Beeinflussung verhindern?