Dynamic Mechanism-Design

Michael Füg und Philip Zilke

28. April 2016

1. Vom statischen zum dynamischen Mechanismus Design

2. Dynamische private Information
   - Dynamischer direkter Mechanismus
   - Das Revelations-Prinzip
   - Anreiz-Kompatibilität und indiviuelle Rationalität
   - Optimaler Verkaufs-Mechanismus

3. Ausblicke
   - Die Rolle der privaten Information
   - Sequentielles Mechanismus Design
   - Dynamische Allokationen

Aufbau des Vortrages

Die Hauptansätze:

- Dynamische private Information und statische Allokationen
- Dynamische Allokationen und statische private Information

Modellrahmen

Modellrahmen ist Zwei-Personen Spiel:

- Verkäufer
  - Verkauft unteilbares Gut
  - Legt Mechanismus Γ fest
- Käufer
  - Bewertung des Gutes θ zunächst unbekannt
  - Erhält Signal τ, welches mit θ korreliert ist
  - Wenn er den Mechanismus aktzeptiert, berichtet er τ
  - θ erfährt er erst nach Aktzeptieren des Mechanismus Γ und berichtet sie danach

Mathemtische Modellierung

Sei im Folgenden für das Signal τ

- Kummulierte Verteilung $G(\tau)$
- Positive Dichte $g(\tau)$
- Trägermenge $[\underline{\tau}, \bar{\tau}]$

Sei im Folgenden für die Bewertung θ

- Kummulierte Verteilung $F(\theta \mid \tau)$
- Korrespondierende Dichte $f(\theta \mid \tau)$
- Trägermenge $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ mit $0 \leq \underline{\theta} < \bar{\theta}$ für alle $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$

Annahmen

Wir setzen im Folgenden voraus, dass

- Trägermenge von $F(\theta \mid \tau)$ ist $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ für alle $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}], 0 \leq \underline{\theta} < \bar{\theta}$
- Trägermenge von $F(\theta \mid \tau)$ unabhängig von τ
- $f(\theta \mid \tau) > 0$ für alle $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ und $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$
- $F(\theta \mid \tau)$ und $f(\theta \mid \tau)$ sind stetig differenzierbar in τ
- Für die Familie $F(\cdot \mid \tau)$ mit $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ gilt

$$\delta F(\theta \mid \tau)/\delta\tau < 0 \; f\ddot{u}r \; alle \; \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \qquad \text{(FOSD)}$$

Dynamischer direkter Mechanismus

Definition

Ein (dynamischer) direkter Mechanismus besteht aus den beiden Funktionen

$$q : [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \to [0,1] \quad \textit{und} \quad t : [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \to \mathbb{R}.$$

Zwei wesentliche Hauptänderungen:

1. Verwende nun das kartesische Produkt $[\underline{\tau}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$
2. Zwei Report-Ebenen: τ und θ (dynamisch hinsichtlich Zeit)

Ein-Personen-Entscheidungsproblem

Optimale Entscheidung ist das Paar $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ mit

- $\sigma_1 : [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \to [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ (Report ex ante Typ τ)
- $\sigma_2 : [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \times [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \to [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ (Report ex post Typ θ)

Das Revelations-Prinzip

Proposition (Nur Beweisidee und Interpretation)

Für jeden dynamischen Mechanismus Γ *und jede optimale Käuferstrategie* σ *in* Γ *gibt es einen direkten Mechanismus* Γ' *und eine optimale Käuferstrategie* $\sigma' = (\sigma'_1, \sigma'_2)$*, so dass gilt:*

i) Die Strategie σ *genügt*

$$\sigma'_1(\tau) = \tau \ \forall \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \quad \textit{und} \quad \sigma'_2(\tau, \theta, \tau) = \theta \ \forall \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}], \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$$

ii) Wenn der Käufer seine optimale Strategie spielt, dann ist für alle $(\tau, \theta) \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \times [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ *die Wahrscheinlichkeit* $q(\tau, \theta)$ *und die Auszahlung* $t(\tau, \theta)$ *unter* Γ' *identisch mit der Wahrscheinlichkeit eines Kaufes und der erwarteten Auszahlung unter* Γ.

Folgerungen aus dem Revelations-Prinzip

Betrachte direkte Mechanismen:

1. Im Gleichgewicht: Die Wahrheit wird berichtet (keine Aussage für τ möglich?)
2. Kein Gleichgewicht: Keine Aussage möglich

$\Rightarrow$ Definiere Anreiz-kompatibel und individuell rational:

$$\theta^r : [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \to [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$$

$$u(\tau, \theta) = \theta q(\tau, \theta) - t(\tau, \theta)$$

$$\hat{U}(\tau' | \tau) = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} u(\tau', \hat{\theta}) f(\hat{\theta} \mid \tau) \, d\hat{\theta}$$

$$U(\tau) = \hat{U}(\tau | \tau)$$

Anreiz-kompatibel und individuell rational

Definition

Ein direkter Mechanismus ist Anreiz-kompatibel, wenn
i) er Anreiz-kompatibel gegeben seinem Ex-Post Typen θ ist:

$$u(\tau, \theta) \geq \theta q(\tau, \theta') - t(\tau, \theta') \quad \forall \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \text{ und } \theta, \theta' \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$$

ii) er Anreiz-kompatibel gegeben seinem Ex-Ante Typen τ ist:

$$U(\tau) \geq \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} [\hat{\theta} q(\tau', \theta^r(\hat{\theta})) - t(\tau', \theta^r(\hat{\theta}))] f(\hat{\theta} \mid \tau) d\hat{\theta}$$
$$\forall \tau, \tau' \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \text{ und } \theta^r : [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \to [\underline{\theta}, \bar{\theta}].$$

Ein direkter Mechanismus ist individuel rational, wenn

$$U(\tau) \geq 0 \;\; \forall \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$$

Vereinfache Anreiz-Kompatibilität I

Proposition (Nur Beweisidee und Interpretation)

Ein direkter Mechanismus ist Anreiz-kompatibel genau dann, wenn

i) $u(\tau,\theta) \geq \theta q(\tau,\theta') - t(\tau,\theta') \quad \forall \tau \in [\underline{\tau},\bar{\tau}]$ *und* $\theta,\theta' \in [\underline{\theta},\bar{\theta}]$,

ii) $U(\tau) \geq \hat{U}(\tau'\tau) \quad \forall \tau,\tau' \in [\underline{\tau},\bar{\tau}]$.

Betrachte jetzt Monotonie-Kriterien $\rightarrow$ gelten im Allgemeinen nicht:

1. Anreiz-Kompatibilität des Ex-Ante Typen τ impliziert nicht Monotonie der Allokationsregel.
   $\Rightarrow$ Wesentlicher Unterschied zu statischem Screening Model.
2. Betrachte Anreiz-Kompatibilität gegeben des Ex-Post Typen θ.

Vereinfache Anreiz-Kompatibilität II

Proposition (Nur Beweisidee und Interpretation)

Ein direkter Mechanismus ist Anreiz-kompatibel gegeben seinem Ex-Post Typen θ genau dann, wenn

i) Für alle Ex-Ante Typen τ die Funktion $q(\tau, \theta)$ steigend in θ ist,
ii) Für alle Ex-Ante Typen τ und Ex-Post Typen θ:

$$\frac{\delta u(\tau, \theta)}{\delta \theta} = q(\tau, \theta),$$

iii) Für alle Ex-Ante Typen τ und Ex-Post Typen θ:

$$t(\tau, \theta) = t(\tau, \underline{\theta}) + (\theta q(\tau, \theta) - \underline{\theta} q(\tau, \underline{\theta})) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(\tau, \hat{\theta}) \, d\hat{\theta}.$$

Beispiel für Anreiz-Kompatibilität

Wir definieren zunächst $[\underline{\theta}, \bar{\theta}] = [0, \bar{\theta}]$ und $[\underline{\tau}, \bar{\tau}] = [0, \bar{\tau}]$.

Lemma

Der direkte Mechanismus charakterisiert durch

$$q(\tau, \theta) := 1 - e^{-(\tau+\theta)} \text{ und } t(\tau, \theta) := -e^{-(\tau+\theta)} \cdot (1 + \theta)$$

ist Anreiz-kompatibel.

Implikationen aus Anreiz-Kompatibilität I

Proposition (Beweis an der Tafel)

Wenn ein direkter Mechanismus Anreiz-kompatibel ist, dann gilt für alle Ex-Ante Typen τ:

$$i)\ U'(\tau) = -\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q(\tau,\hat{\theta}) \frac{\delta F(\hat{\theta} \mid \tau)}{\delta \tau}\, d\hat{\theta},$$

$$ii)\ \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} t(\tau,\hat{\theta}) f(\hat{\theta} \mid \tau)\, d\hat{\theta} = \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \hat{\theta} q(\tau,\hat{\theta}) f(\hat{\theta} \mid \tau)\, d\hat{\theta}$$

$$+ \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} [t(\underline{\tau},\hat{\theta}) - \hat{\theta} q(\underline{\tau},\hat{\theta})] f(\hat{\theta} \mid \underline{\tau})\, d\hat{\theta}$$

$$+ \int_{\underline{\tau}}^{\tau} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q(\hat{\tau},\hat{\theta}) \frac{\delta F(\hat{\theta} \mid \hat{\tau})}{\delta \tau}\, d\hat{\theta}\, d\hat{\tau}.$$

Implikationen aus Anreiz-Kompatibilität II

Wir haben festgestellt:

1. Vorige Propositionen implizieren zwei Restriktionen an $t(\tau, \theta)$.
2. Führen diese Restriktionen zu Widersprüchen?
3. Nein! Nächste Proposition impliziert: Gegeben $q(\tau, \theta)$, dann wird $t(\tau, \theta)$ festgelegt durch $t(\underline{\tau}, \underline{\theta})$.

Implikationen aus Anreiz-Kompatibilität III

Proposition (Beweis an der Tafel)

Wenn ein direkter Mechanismus Anreiz-kompatibel ist, dann gilt

$$t(\tau,\theta) = t_0(\tau) + \theta q(\tau,\theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(\tau,\hat{\theta})\ d\hat{\theta},$$

mit

$$t_0(\tau) = t(\underline{\tau},\underline{\theta}) - \underline{\theta} q(\underline{\tau},\underline{\theta}) + \int_{\underline{\tau}}^{\tau}\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} q(\hat{\tau},\hat{\theta}) \frac{\delta F(\hat{\theta}\mid\hat{\tau})}{\delta\tau}\ d\hat{\theta}\ d\hat{\tau}$$
$$+ \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}}\int_{\underline{\theta}}^{\hat{\theta}} [q(\tau,x) f(\hat{\theta}\mid\tau) - q(\underline{\tau},x) f(\hat{\theta}\mid\underline{\tau})]\ dx\ d\hat{\theta}.$$

Existenz eines Transferplanes für Anreiz-Kompatibilität

Anfangsproblem: Monotonie-Kriterium versagt im dynamischen Kontext für Anreiz-Kompatibilität!
$\Rightarrow$ Wir benötigen eine zusätzliche Existenz-Eigenschaft.

Proposition (Beweisskizze Tafel?)

Wenn $q(\tau, \theta)$ wachsend in τ und θ ist, dann existiert einn Transferplan $t(\tau, \theta)$, so dass der direkte Mechanismus Anreiz-kompatibel ist.

Individuel-rational und Anreiz-kompatibel

Proposition (Nur mündlicher Beweis)

Ein Anreiz-kompatibler direkter Mechanismus ist individuel-rational genau dann, wenn

$$U(\underline{\tau}) \geq 0.$$

Beispiel: Individuel-rational und Anreiz-kompatibel

Lemma

Sei $[\underline{\theta}, \bar{\theta}] = [0, \bar{\theta}]$ und $[\underline{\tau}, \bar{\tau}] = [0, \bar{\tau}]$. Dann ist der Anreiz-kompatible direkte Mechanismus charakterisiert durch

$$q(\tau, \theta) := 1 - e^{-(\tau+\theta)} \text{ und } t(\tau, \theta) := -e^{-(\tau+\theta)} \cdot (1 + \theta)$$

individuel-rational.

Die erwartete Auszahlung

Lemma (An der Tafel - 4 Zeiler)

Die erwartete Auszahlung für den Verkäufer ergibt sich als

$$\int_{\underline{\tau}}^{\bar{\tau}} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} [\hat{\theta} q(\hat{\tau}, \hat{\theta}) - u(\hat{\tau}, \hat{\theta})] f(\hat{\theta} \mid \hat{\tau}) g(\hat{\tau}) \; d\hat{\theta} \; d\hat{\tau}$$

$$= \int_{\underline{\tau}}^{\bar{\tau}} \int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \psi(\hat{\tau}, \hat{\theta}) q(\hat{\tau}, \hat{\theta}) f(\hat{\theta} \mid \hat{\tau}) g(\hat{\tau}) \; d\hat{\theta} \; d\hat{\tau} - U(\underline{\tau}),$$

mit

$$\psi(\tau, \theta) := \hat{\theta} + \frac{1 - G(\hat{\tau})}{g(\hat{\tau})} \frac{\delta F(\theta \mid \tau)/\delta\tau}{f(\theta \mid \tau)}.$$

Optimierung der erwarteten Auszahlung

Annahme

$\psi(\tau, \theta)$ ist wachsend in τ und θ.

Ferner gilt:

1. Maximiere erwartete Auszahlung unter Berücksichtigung von individueler Rationalität $\Rightarrow U(\underline{\tau}) = 0$
2. Nach Modelannahme ist $\psi(\tau, \theta)$ stetig
$\Rightarrow p(\tau) = \min\{\hat{\theta} \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \mid \psi(\tau, \hat{\theta}) \geq 0\}$ wohldefiniert
3. Erwartete Auszahlung linear in $q(\tau, \theta)$
$$\Rightarrow q(\tau, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \psi(\tau, \theta) \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \theta \geq p(\tau) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der optimale direkte Mechanismus

Satz (Wenn noch Zeit, Beweis an Tafel)

Unter der vorigen Annahme ist ein Anreiz-kompatibler und individuel rationaler direkter Mechanismus optimal genau dann, wenn

$$q(\tau,\theta) = \begin{cases} 1, & \textit{falls } \theta \geq p(\tau) \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

und

$$t(\tau,\theta) = \begin{cases} t_0(\tau)p(\tau), & \textit{falls } \theta \geq p(\tau) \\ t_0, & \textit{sonst} \end{cases},$$

mit t_0 wie in Proposition vorher. Ferner gilt

$$t(\underline{\tau},\underline{\theta}) = \int_{p(\underline{\tau})}^{\theta} \hat{\theta} f(\hat{\theta} \mid \underline{\tau})\, d\hat{\theta} - p(\underline{\tau})[1 - F(p(\underline{\tau}) \mid \underline{\tau})] + \underline{\theta} q(\underline{\tau},\underline{\theta}).$$

Modeltransformation

- Modellerweiterung durch unabhängiges Signal

$$\gamma := F(\theta \mid \tau) \Leftrightarrow \theta = F^{-1}(\gamma \mid \tau)$$

- γ unabhängig von τ

Lemma

Sei $\tilde{\psi}(\tau, \gamma) := \psi(\tau, F^{-1}(\gamma \mid \tau))$. *Dann gilt*

$$\tilde{\psi}(\tau, \gamma) = F^{-1}(\gamma \mid \tau) - \frac{1 - G(\tau)}{g(\tau)} \frac{\delta F^{-1}(\gamma \mid \tau)}{\delta \tau}.$$

Anreiz-kompatibel bezüglich γ

Definition

Wir nennen einen direkten Mechanismus $(\tilde{q}(\tau,\gamma), \tilde{t}(\tau,\gamma))$ *Anreiz-kompatibel bezüglich* γ, *wenn*

$$U(\tau) \geq \int_0^1 F^{-1}(\gamma \mid \tau)\tilde{q}(\tau',\gamma) - \tilde{t}(\tau',\gamma)\; d\gamma \quad \textit{für alle } \tau' \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}].$$

Proposition

Wenn der direkten Mechanismus $(\tilde{q}(\tau,\gamma), \tilde{t}(\tau,\gamma))$ *Anreiz-kompatibel bezüglich* γ *ist, dann ist*

$$U(\tau) = U(\underline{\tau}) + \int_{\underline{\tau}}^{\tau} \int_0^1 \frac{\delta F^{-1}(\gamma \mid \hat{\tau})}{\delta \tau} \tilde{q}(\hat{\tau},\gamma)\; d\gamma\; d\hat{\tau}.$$

Optimalität im privaten und öffentlichen Fall

Proposition

Angenommen $\psi(\tau, \theta)$ ist wachsend in τ und θ. Wenn der direkten Mechanismus $(\tilde{q}(\tau, \gamma), \tilde{t}(\tau, \gamma))$ optimal ist bei privat bekanntem γ, so ist er auch optimal bei öffentlichem bekanntem γ.

- Verkäufer entzieht zusätzliche private Informationen die nach Signal τ erfhren werden zu Kosten 0
- Umkehrung von Proposition gilt nicht!
- Verkäufer will so viel ex post private Informationen wie Möglich entziehen
- Verkäufer will so früh wie möglich Mechanismus vorschlagen

...

...

...

...