

# *Recherche de la trajectoire parfaite au billard anglais :* *Annexes.*

*Etude des chocs.*

*Etude des frottements : roulement avec glissement.*

*Etude des frottements : roulement sans glissement.*

*Etude de la vitesse initiale.*

*Recherche de la trajectoire parfaite : Programmes informatiques.*

## Etude des chocs.

Dans notre étude, nous considérons que toutes les billes ont la même masse. Nous considérons des chocs sans effet dans les billes, sans quoi les résultats que nous allons établir ne sont pas valables. Les chocs entre billes sont alors régis par les lois des chocs élastiques, c'est-à-dire des chocs tels qu'il n'y a pas de transfert de masse entre les deux billes, et que le système composé des deux billes conserve son énergie cinétique et sa quantité de mouvement.

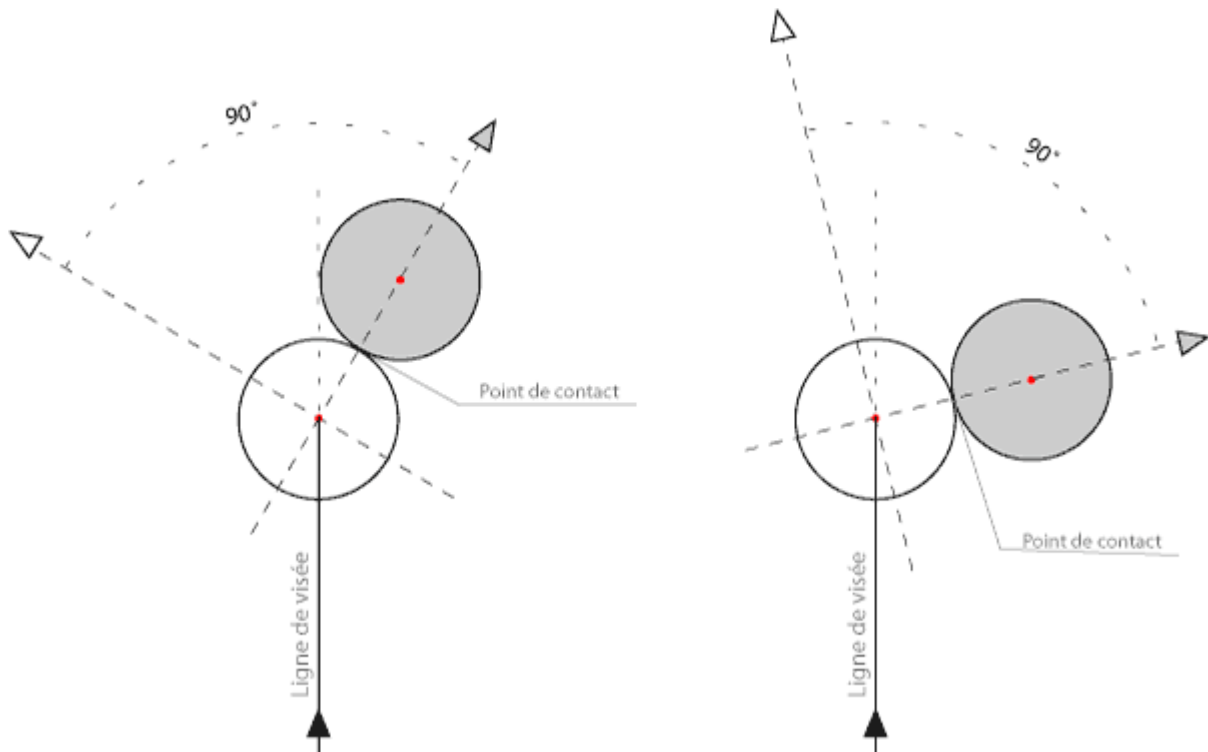
Par hypothèse de choc élastique, nous avons les équations suivantes :

$$\begin{cases} \vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \\ \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \end{cases}$$

En élevant la première équation au carré et en simplifiant les équations en raison des masses identiques, avec  $\alpha$  l'angle entre les vecteurs  $v'_1$  et  $v'_2$ ,  $\alpha \in [0 ; \pi]$  :

$$\begin{cases} v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2v_1'v_2' \cos \alpha \\ v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \end{cases}$$

Enfin, en soustrayant la deuxième équation à la première, on obtient :  $\alpha = \pi/2$  .



# Etude des frottements : roulement avec glissement.

Principe fondamental de la dynamique à {bille} dans R galiléen :

$$m\vec{a}_{/R}(G) = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$$

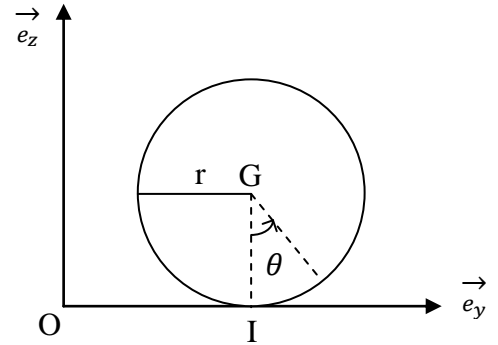
En projetant sur  $\vec{e}_z$  et par loi de Coulomb :

$$N = mg \text{ et } \|\vec{T}\| = fmg$$

Théorème du moment cinétique en G fixe dans R\* galiléen :

$$\frac{d\vec{\sigma}_{/R}(G)}{dt} = J \frac{d\vec{\Omega}_{/R}(G)}{dt} = \vec{GI} \wedge \vec{T} = \vec{GI} \wedge m \frac{d\vec{v}_{/R}(G)}{dt}$$

$$\text{où } J = \frac{2}{5}mr^2 \text{ et } \vec{GI} = -r\vec{e}_z$$



Par composition des vitesses :

$$\vec{v}_{/R}(G) = \vec{v}_{/R}(I) + \vec{GI} \wedge \vec{\Omega}_{/R}(G)$$

En dérivant, comme  $\vec{GI}$  est constant :

$$\frac{d\vec{v}_{/R}(G)}{dt} = \frac{d\vec{v}_{/R}(I)}{dt} + \vec{GI} \wedge \frac{d\vec{\Omega}_{/R}(G)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}_{/R}(G)}{dt} = \frac{d\vec{v}_{/R}(I)}{dt} + \vec{GI} \wedge \left( \vec{GI} \wedge m \frac{d\vec{v}_{/R}(G)}{dt} \right) = \frac{d\vec{v}_{/R}(I)}{dt} - \frac{5}{2} \frac{d\vec{v}_{/R}(G)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}_{/R}(G)}{dt} = \frac{2}{7} \frac{d\vec{v}_{/R}(I)}{dt}$$

Soit en injectant dans le PFD :

$$m \frac{d\vec{v}_{/R}(G)}{dt} = \frac{2}{7} m \frac{d\vec{v}_{/R}(I)}{dt} = -fmg \frac{\vec{v}_{/R}(I)}{\|\vec{v}_{/R}(I)\|}$$

Donc  $\vec{v}_{/R}(I)$  est de direction constante, puis  $\frac{\vec{v}_{/R}(I)}{\|\vec{v}_{/R}(I)\|}$  est constant, donc par double intégration :

$$\vec{OG}(t) = \vec{OG}(0) + \vec{v}_{/R}(G, 0) * t - \frac{fgt^2}{2} \frac{\vec{v}_{/R}(I,0)}{\|\vec{v}_{/R}(I,0)\|}$$

# Etude des frottements : roulement sans glissement.

Soit la bille de billard de centre G et de rayon r, en contact avec le tapis au point I, dans le référentiel lié au billard  $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , la bille se déplaçant dans le plan  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ .

Vitesse de glissement au point I de la bille par rapport au sol :

$$\vec{U}_{bille/sol}(I) = \vec{V}_{bille/R} - \vec{V}_{sol/R} = \vec{V}_{bille/R^*} + \vec{V}_e = r\vec{\Omega}_{/R}(G) + \vec{v}_{/R}(G)$$

Bilan des forces exercées sur {bille} : poids et réaction du support

$$\vec{P} = -mg\vec{e}_z$$

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T} \quad \text{avec} \quad \vec{N} = N\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{T} = T\vec{u} = T \frac{\vec{v}_{/R}(G)}{\|\vec{v}_{/R}(G)\|}$$

Le principe fondamental de la dynamique (PFD) à {bille} dans R galiléen s'écrit :

$$m\vec{a}_{/R}(G) = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$$

La projection sur  $\vec{e}_z$  donne  $N = mg$  et dans le plan donne :

$$\frac{d\vec{v}_{/R}(G)}{dt} = \frac{T}{m}\vec{u} \quad (1)$$

où u est le vecteur unitaire du repère orthonormé  $R'(I, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$  défini tel que  $T = T\vec{u}$ .

Le théorème du moment cinétique à la bille en G fixe dans  $R^*$  non galiléen donne :

$$\frac{2}{5}mr^2 \frac{d\vec{\Omega}_{/R}(G)}{dt} = \vec{M}_G(\vec{T}) = \vec{GI} \wedge \vec{T} = -rT\vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{\Omega}_{/R}(G)}{dt} = -\frac{5T}{2mr}\vec{v} \quad (2)$$

Toutefois, à partir du moment où la bille entame un mouvement de roulement sans glissement :

$$\vec{U}_{bille/sol}(I) = r\vec{\Omega}_{/R}(G) + \vec{v}_{/R}(G) = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{v}_{/R}(G)}{dt} = -r \frac{d\vec{\Omega}_{/R}(G)}{dt} \quad (3)$$

Or d'après (1), (2) et (3) :

$$\frac{T}{m}\vec{u} = \frac{d\vec{v}_{/R}(G)}{dt} = -r \frac{d\vec{\Omega}_{/R}(G)}{dt} = \frac{5T}{2m}\vec{v}$$

D'où  $T = 0$  car  $R'(I, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$  est un repère orthonormé.

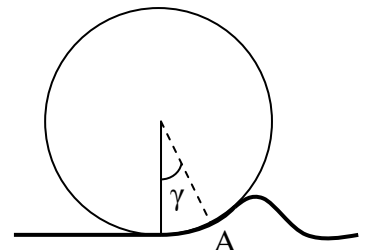
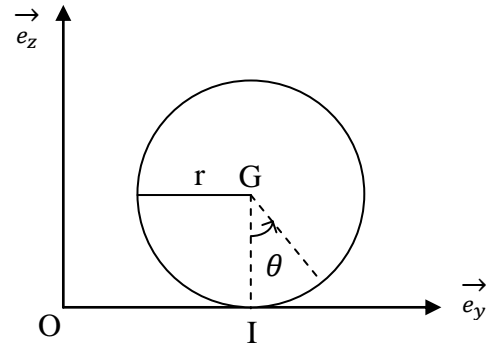
On ne peut alors plus négliger la force de résistance à l'avancement en phase de roulement sans glissement. Régis Petit, ingénieur-chercheur, nous indique dans sa Théorie du jeu sur le billard que cette force est telle que :

$$\vec{F} = -f_c mg \frac{\vec{v}_{/R}(G)}{\|\vec{v}_{/R}(G)\|} \quad \text{où} \quad f_c = \frac{\sin \gamma}{0,4 + \cos \gamma}$$

où  $\gamma$  est l'angle entre la verticale et le point réel où s'exerce la réaction du tapis (point A sur le schéma ci-dessous) :

Toujours selon Régis Petit, une bonne approximation de la valeur de  $f_c$  est

$f_c = \frac{2L}{gt^2}$ , où L est la longueur du billard et t le temps qu'il faut à la bille pour parcourir la longueur L du billard en arrivant au bout de cette longueur L à une vitesse nulle. Ce coefficient est d'environ 2% selon Régis Petit.



# Etude de la vitesse initiale.

## 1) Détermination de l'instant du choc entre la bille blanche et la bille de couleur

Soit la vitesse de la bille blanche B de la forme :  $v(t) = v_0 - at$  où  $-a$  est l'accélération de la bille, avec annulation de la vitesse lorsque :  $t = \frac{a}{v_0}$

En intégrant, on a donc  $x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{at^2}{2}$  où  $x_0 = 0$ .

Si la bille blanche n'a pas rencontré d'autre bille, elle aura atteint le point C à une distance  $x_1 = BC$  à l'instant  $t_1$  tel que

$$x_1 = v_0 t - \frac{at^2}{2} \Leftrightarrow -\frac{at^2}{2} + v_0 t - x_1 = 0$$

Cette équation a pour discriminant :  $\Delta = v_0^2 - 2ax_1$

On veut  $\Delta \geq 0$ , ce qui est équivalent à  $x_1 \leq \frac{v_0^2}{2a}$ , condition toujours vérifiée,  $\frac{v_0^2}{2a}$  étant la valeur maximale d'évolution de la bille atteinte lorsque la vitesse devient nulle à  $t = \frac{a}{v_0}$ . En effet,  $\Delta < 0$  implique qu'il n'y a pas de solution car la distance  $x_1$  est trop importante. Or, il faut  $v(t) \geq 0$ , i.e.  $t \leq \frac{a}{v_0}$ , donc la seule solution est :

$$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2ax_1}}{a}$$

## 2) Détermination de la vitesse initiale $v_0$ pour empêcher une bille de couleur.

On veut déterminer la vitesse initiale  $v_0$  de la bille blanche pour empêcher une bille de couleur donnée.

Etudions par exemple un cas simple, où :

- 1) la bille blanche parcourt une distance  $x_1$  avant de faire un rebond ;
- 2) sa vitesse est alors multipliée par un rendement de bande  $\eta = 0,8$  ;
- 3) la bille blanche parcourt ensuite une distance  $x_2$  avant de choquer la bille de couleur ;
- 4) la bille de couleur prend alors la vitesse de la bille blanche multipliée par un coefficient  $\beta$  ;
- 5) la bille de couleur parcourt enfin une distance  $x_3$  avant d'être empochée à vitesse nulle.

- 1) D'après le raisonnement précédent, on rappelle que la bille blanche parcourt  $x_1$  après  $t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2ax_1}}{a}$ .
- 2) La vitesse de la bille blanche juste avant le rebond est alors  $v_{1,av} = v_0 - at_1 = \sqrt{v_0^2 - 2ax_1}$ , et celle après le rebond est donc  $v_{1,ap} = \eta * v_{1,av}$ .
- 3) On recommence le raisonnement initial avec  $v_{1,ap}$  au lieu de  $v_0$  et  $x_2$  au lieu de  $x_1$ . On détermine  $t_2$ .
- 4) Puis l'expression de :  $v_{2,av} = v_{1,ap} - at_2 = \sqrt{v_{1,ap}^2 - 2ax_2}$  ; ensuite, après le choc :  $v_{2,ap} = \beta * v_{2,av}$ .
- 5) Enfin, on a, après que la bille de couleur a parcouru  $x_3$  :  $v_f = \sqrt{v_{2,ap}^2 - 2ax_3}$

En remplaçant dans l'expression de  $v_f$  de façon successive les vitesses par les expressions obtenues, on a donc :

$$v_f = \sqrt{(\beta v_{2,av})^2 - 2ax_3} = \sqrt{\beta^2(v_{1,ap}^2 - 2ax_2) - 2ax_3} = \sqrt{\beta^2(\eta^2(v_0^2 - 2ax_1) - 2ax_2) - 2ax_3}$$

$$v_f = \sqrt{(\beta\eta v_0)^2 - 2a((\beta\eta)^2 x_1 + \beta^2 x_2 + x_3)}$$

En généralisant, on a donc l'expression de la vitesse finale après n-1 rebonds et le choc avec la bille de couleur :

$$v_{f,n} = \sqrt{v_0^2 \prod_{i=1}^n \eta_i^2 - 2a \sum_{i=1}^{n+1} x_i \prod_{j=i}^n \eta_j^2}$$

où  $a$  : décélération de la bille liée aux frottements

$(\eta_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  : coefficients de restitution de la vitesse de la bille blanche après un événement :

- soit après un rebond, et  $\eta_i = \eta = 0,8$  (rendement de bande)
- soit après le choc avec la bille de couleur (n-ième coefficient), et  $\eta_n = \beta = \cos \alpha$  (rendement de choc)

$(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  : distance parcourue avant le i-ème rebond

$x_{n+1}$  : distance parcourue après le choc avec la bille de couleur

On veut que la bille de couleur arrive dans le trou avec une vitesse nulle, soit  $v_{f,n} = 0$  puis :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2a \sum_{i=1}^{n+1} x_i \prod_{j=i}^n \eta_j^2}{\prod_{i=1}^n \eta_i^2}}$$

On remarque ainsi que si  $\alpha_n$  est très petit devant 1 (i.e. la bille de couleur tend à être touchée en finesse),  $v_0$  augmente significativement. Toutefois, l'homme ne pouvant pas fournir une vitesse infiniment grande à la bille blanche, la vitesse  $v_0$  maximale pour que le coup soit considéré comme réalisable sera de  $2 \text{ m.s}^{-1}$ .

Bien sûr, cette formule se montre par récurrence ! Soit  $(H_n)$  l'expression de  $v_{f,n}$  qui donne la vitesse finale après n rebonds. Nous avons vérifié que les propositions  $(H_1)$  et même  $(H_2)$  sont vraies, nous supposons donc  $(H_n)$  en vue de montrer  $(H_{n+1})$ .

Soit  $v_{f,n} = \sqrt{v_0^2 \prod_{i=1}^n \eta_i^2 - 2a \sum_{i=1}^{n+1} x_i \prod_{j=i}^n \eta_j^2}$ . Cette vitesse est obtenue juste avant un rebond ou un choc, donc on a  $v_{f,n} = v_{n,av}$ . Après le (n+1)<sup>ème</sup> rebond, on a  $v_{n,ap} = \eta_{n+1} v_{n,av}$ .

La vitesse finale après n+1 rebonds est alors obtenue par :

$$v_{f,n+1} = \sqrt{v_{n,ap}^2 - 2ax_{n+2}} = \sqrt{\eta_{n+1}^2 v_{f,n}^2 - 2ax_{n+2}} = \sqrt{\eta_{n+1}^2 (v_0^2 \prod_{i=1}^n \eta_i^2 - 2a \sum_{i=1}^{n+1} x_i \prod_{j=i}^n \eta_j^2) - 2ax_{n+2}}$$

Donc on obtient bien l'expression de  $v_{f,n+1}$  :

$$v_{f,n+1} = \sqrt{v_0^2 \prod_{i=1}^{n+1} \eta_i^2 - 2a \sum_{i=1}^{n+2} x_i \prod_{j=i}^{n+1} \eta_j^2}$$

Le théorème de récurrence conclut.