Présentation orale TIPE.

- ***Transparent n°1 :***

Bonjour à tous. De nombreux joueurs de billard, moi y compris, rêveraient d'empocher toutes les billes les unes à la suite des autres. Toutefois, en raison des nombreux paramètres qui régissent le mouvement des billes, la tâche est difficile à réaliser, mais pas impossible. Nous allons donc rechercher la trajectoire parfaite au billard pour savoir « comment empocher à coup sûr une bille de billard ». Puisque nous cherchons à rendre les trajectoires le plus prévisible possible, nous considérerons dans notre étude des billes évoluant sans effet, donc de façon rectiligne. Nous nous focaliserons dans un premier temps sur une étude expérimentale des frottements, puis sur l'étude théorique des 3 principales lois physiques régissant le mouvement, et enfin je développerai la conception des programmes informatiques qui nous permettront de déterminer la, voire les trajectoires parfaites pour empocher une bille.

- ***Transparent n°2 :***

Tout d'abord, nous allons nous intéresser aux frottements de la bille avec le tapis, qui sont bien évidemment la cause de la perte de vitesse de la bille. Pour étudier l'évolution de cette vitesse, j'ai procédé à un pointage vidéo avec le logiciel LatisPro, après avoir placé un repère et un étalon de 1 mètre 82 correspondant à la longueur du billard. Le zoom du logiciel permet de faire des relevés très précis, néanmoins la vidéo ayant une cadence de 30 images par seconde, la bille ne se déplace que de quelques pixels entre deux images. Le tracé de l'évolution de la vitesse sur Excel est alors assez chaotique. J'ai donc ensuite relevé la position de la bille toutes les 5 images, pour constater une évolution linéaire de la vitesse, avec une décélération de 0,17 $m.s^{-2}$, et une incertitude sur cette décélération de 0,044 $m.s^{-2}$ obtenue par la méthode des moindres carrés.

- ***Transparent n°3 :***

Nous passons désormais à l'étude théorique pour justifier cette décélération constante, ainsi que le mouvement des billes lors des rebonds sur les bandes et lors des chocs entre billes. En considérant des bandes rigides, les rebonds suivent la loi de réflexion de Descartes, de façon analogue aux rayons lumineux en optique. Sous l'hypothèse de billes évoluant sans effet, les chocs entre billes sont régis par les lois des chocs élastiques, à savoir conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique, ce qui implique la déviation des billes selon des trajectoires formant un angle de 90°.

Enfin, pour les frottements, on distingue théoriquement deux phases de roulement. Cependant, nous nous intéresserons qu'à la seconde phase de roulement sans glissement, la première phase de roulement avec glissement ne se déroulant que pendant une durée négligeable. On montre avec le principe fondamental de la dynamique et le théorème du moment cinétique que, la bille étant en roulement sans glissement, on ne peut pas négliger la force de résistance à l'avancement due à l'enfoncement de la bille dans le tapis.

Régis Petit, ingénieur-chercheur, nous indique dans sa Théorie du jeu sur le billard que cette force est opposée à la vitesse, et proportionnelle à un coefficient défini ici. Une bonne approximation de ce coefficient s'obtient en mesurant le temps t mis par la bille pour parcourir la longueur L du billard, en arrivant à cette longueur L à vitesse nulle. Pour notre billard expérimental, il faut 5,5 s à la bille pour parcourir les 1 mètre 82 en arrivant à vitesse nulle, ce qui correspond à un angle gamma de 1° et un coefficient f_c égal à 1,25%. Ces résultats sont cohérents puisque les billards sont conçus de façon à ce que les frottements soient le plus négligeable possible.

- ***Transparent n°4 :***

Maintenant que nous connaissons les lois régissant le mouvement des billes, nous allons pouvoir réaliser les programmes informatiques qui vont nous indiquer les trajectoires parfaites pour empocher une bille. Dans le but de proposer des trajectoires prévisibles et réalisables facilement sur un vrai jeu de billard, on considère que seule la bille blanche se déplace, en effectuant uniquement des rebonds, et 2 au maximum. Lorsqu'elle choque la bille de couleur que nous souhaitons empocher, la bille de couleur se dirige directement dans le trou sans effectuer de rebonds.

Dans un premier temps, il nous faut réaliser des programmes qui tracent le billard, les billes et les trajectoires, pour pouvoir vérifier le bon fonctionnement de nos futurs programmes. Le principal programme de tracé que j'ai réalisé est « traceinitialaleat », qui prend comme argument un nombre n, trace de façon aléatoire n billes sur le billard, et renvoie la liste des coordonnées des billes. Le programme « trajectoiredroite » trace la trajectoire passant par une position donnée, et le programme « rebond » trace la trajectoire après un rebond sur une bande selon la loi de Descartes. Ces deux programmes renvoient les coordonnées d'impact des billes sur les bandes.

Une fois ces programmes réalisés, j'ai d'abord cherché à savoir où choquer une bille pour qu'elle se dirige dans un trou. L'hypothèse des chocs élastiques implique que si la bille de couleur est immobile, il existe une unique position de choc qui permette d'empocher la bille dans un trou donné. Cette position est définie par les relations présentées ici, sachant qu'à l'instant du choc, les deux billes et le trou doivent être alignés. Puisqu'on connaît les coordonnées de la bille de couleur et des trous, on peut déterminer m, puis en déduire a et b qui définissent les coordonnées de la position de choc. On peut alors réaliser un programme « positionchoc » et qui, prenant en argument les coordonnées d'une bille, renvoie les coordonnées des 6 positions de choc correspondant aux 6 trous du billard, et trace ces positions sur l'interface graphique.

- ***Transparent n°5 :***

Il faut ensuite voir si ces positions sont accessibles ou non, c'est-à-dire si on peut les atteindre en 2 rebonds maximum. En tir direct, la trajectoire est simplement un segment délimité par la bille blanche et la position de choc. En un rebond ou en deux rebonds sur bandes parallèles, c'est-à-dire comme ça ou comme ça, n'importe quelle position sur le billard est accessible.

En deux rebonds sur bandes perpendiculaires par contre, comme ceci par exemple, tout le billard n'est pas accessible. En effet, dans cette configuration, il est impossible avec la bille blanche d'atteindre la bille noire par un rebond sur cette bande puis sur celle-ci. Il faut donc définir un programme « zoneaccessible » qui permet de déterminer la zone du billard accessible en 2 rebonds sur 2 bandes perpendiculaires données, tout en évitant les rebonds dans les trous. Cette zone est délimitée par une trajectoire limite, qui correspond à la trajectoire où la bille rebondit le plus près possible du trou. Le programme « zoneaccessible » renvoie alors les coordonnées du segment qui délimite cette zone.

Nous allons ensuite nous servir de ce segment pour déterminer si les positions de choc d'une bille sont accessibles. En transformant ce segment en vecteur et en le normant, nous allons créer une nouvelle base orthonormée. On définit alors la matrice de changement de base présente ici, puis on crée un programme qui renvoie les coordonnées des positions de choc dans la nouvelle base. Si une position est accessible, la coordonnée y' de cette position sera alors positive dans cet exemple.
On peut alors déterminer la trajectoire à emprunter en deux rebonds grâce au théorème de Thalès par un dépliage des triangles formés par la trajectoire à emprunter. Etant donné qu'on connaît les coordonnées de la bille blanche et de la position de choc, donc les paramètres a, b, c et d, on peut déterminer l'angle à donner à la bille blanche. La formule est présentée ici dans le cas de 2 rebonds, mais elle est analogue pour 3 rebonds ou +.

- ***Transparent n°6 :***

Maintenant que nous avons déterminé toutes les trajectoires pour empocher une bille en 2 rebonds maximum, il nous faut éliminer les trajectoires qui ne sont pas réalisables, à savoir celles où des billes ou bien des trous sont présents sur la trajectoire. Pour détecter les billes présentes sur la trajectoire, on procède de nouveau à des changements de base avec pour axe des abscisses la trajectoire empruntée. Une bille est présente sur la trajectoire si la valeur absolue de son ordonnée dans la nouvelle base est inférieure à deux fois le rayon, soit 5 cm. Pour éliminer les trajectoires rebondissant dans les zones des trous, il suffit de définir des conditions sur les abscisses et ordonnées des positions de rebonds. Le programme final trace alors les trajectoires réalisables sur l'interface graphique.

Toutefois, nous n'avons pas encore pris en compte la décélération des billes lors du mouvement, qui est un paramètre important. En effet, une bille blanche envoyée trop doucement n'atteindra pas son but, et une bille qui va trop vite ne vérifie plus en pratique la loi de réflexion lors des rebonds, et donc n'atteindra pas son but également. Il faut donc calculer la vitesse initiale minimale nécessaire pour empocher une bille.

En considérant une décroissance linéaire de la vitesse de la bille blanche telle que déterminée expérimentalement avec a égal 0,17 $m.s^{-2}$, on connaît sa position en fonction du temps, puis l'instant t_1 où la bille aura parcouru une distance x_1 pour rebondir contre une bande. On connaît alors la vitesse juste avant le rebond, puis juste après en considérant que la bille repart avec un certain pourcentage éta de sa vitesse, à savoir 80%. De même, en raison de l'angle entre les billes lors du choc, seul un pourcentage béta de la vitesse de la bille blanche est transmis à la bille de couleur. On obtient alors par récurrence la vitesse finale de la bille après n rebonds ou chocs en fonction de la vitesse initiale. On définit ensuite la vitesse initiale minimale à donner à la bille blanche, qui est obtenue lorsque la bille de couleur est empochée à une vitesse nulle, soit $v_f = 0$.
Enfin, pour que la bille blanche respecte la loi de réflexion de Descartes, on définit une vitesse initiale maximale de 2 mètres par seconde. On ajoute alors la formule présente ici dans le programme final pour qu'il calcule la vitesse initiale minimale nécessaire. Si cette vitesse est supérieure à la vitesse initiale maximale, le coup correspondant à la trajectoire est considéré comme irréalisable. Sinon, la trajectoire est tracée en orange.

- ***Transparent n°7 :***

Pour conclure cette recherche de la trajectoire parfaite au billard anglais, j'ai d'abord procédé à une évaluation de la complexité temporelle du programme final, pour vérifier que ce programme s'exécute en un temps raisonnable. Il s'avère que notre programme est de complexité quadratique, ce qui est notamment cohérent avec le fait que pour n billes, il faut vérifier que n-1 billes ne soient pas présentes sur la trajectoire.

Enfin, j'ai réalisé une étude statistique sur l'ensemble des trajectoires, pour constater bien évidemment que la proportion de trajectoires réalisables diminue lorsque le nombre de rebonds augmente. Cependant, sur l'ensemble des trajectoires étudiées, il y a 8 fois plus de trajectoires en 2 bandes perpendiculaires que de trajectoires en tir direct, donc finalement plus de tirs réalisables en 2 bandes perpendiculaires qu'en tir direct.

Ainsi, pour répondre à la problématique initiale, à savoir « comment empocher à coup sûr une bille de billard », nous pouvons tout d'abord remarquer qu'il faut envoyer la bille blanche à vitesse moyenne, car alors la loi de réflexion de Descartes permet de déterminer facilement les trajectoires possibles pour empocher une bille. Il faut rappeler que toute l'étude est réalisée dans l'hypothèse de billes se déplaçant sans effet. Par conséquent le tir initial joue un rôle essentiel, car si l'on donne de l'effet à la bille, les trajectoires sont paraboliques et donc les lois de réflexion et des chocs élastiques ne sont plus du tout valables. Sachant désormais comment empocher une bille à coup sûr, ou du moins presque à coup sûr, je vous remercie de votre attention.