

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, A Sadaca, N. Soussi, and C. Zeng

Introduction :
De la finance
au traitement
d'images

Modélisation

Modèle physique

Implémentation

## Restauration Markovienne d'Images

 $\mathsf{M.\ Karpe}^1\quad\mathsf{A.\ Sadaca}^1\quad\mathsf{N.\ Soussi}^1\quad\mathsf{and}\ \mathsf{C.\ Zeng}^1$ 

<sup>1</sup>Département de Première Année École Nationale des Ponts et Chaussées

Projet d'Initiation à la Recherche, 2017



## Sommaire

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, A Sadaca, N. Soussi, and C. Zeng

Introduction
De la finance
au traitement
d'images

Modélisation mathématique

Modèle physique

Implémentation

1 Introduction : De la finance au traitement d'images

2 Modélisation mathématique

3 Modèle physique

4 Implémentation numérique



# Recherche de sujet De la finance au traitement d'images

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, Sadaca, N Soussi, an C. Zeng

Introduction: De la finance au traitement d'images

Modélisation mathématique

Modèle physique

Implémentation

- Finance quantitative : Régulation des marchés de change
- Théorie des jauges, Espaces fibrés
- Remise en cause de notre sujet



## De l'intérêt de la restauration d'images

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, Sadaca, N Soussi, an C. Zeng

Introduction: De la finance au traitement d'images

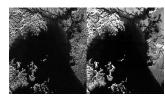
Modélisation mathématique

Modèle physiqu

Implémentation

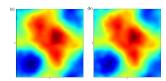






(a) IRM cérébrale [1]

(b) Surface de Titan  $^{[2]}$ 



(c) Reconstruction d'un signal diffus avec MAP [3]

<sup>[1]</sup> J. Imaging 2015, 1(1), 60-84; DOI :10.3390/jimaging1010060

<sup>[2]</sup> NASA/JPL-Caltech/ASI

<sup>[3]</sup> Astronomy & Astrophysics 574, A74 (2015) DOI: 10.1051/0004-6361/201323006



## Représentation markovienne

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, A Sadaca, N Soussi, and C. Zeng

Introduction
De la finance
au traitement
d'images

Modélisation mathématique

Modèle physique

Implémentation numérique • Champs de Markov :  $P(x_i|S_i) = P(x_i|N_i)$ 

• Champs de Gibbs :  $P(X = x) = \frac{\exp(-U(x))}{Z}$ 

### Théorème de Hammersley-Clifford

Tout champ de Markov est un champ de Gibbs.



## Représentation markovienne

Restauration Markovienne d'Images

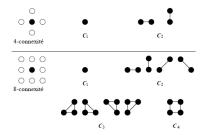
M. Karpe, A Sadaca, N Soussi, and C. Zeng

Introduction
De la finance
au traitemen
d'images

Modélisation mathématique

Modèle physiqu

Implémentatio



(d) Représentation de cliques

$$P(X_i = x_i | N_i) = \frac{\exp(-U_i(x_i | N_i))}{\sum_{a_i \in N_i} \exp(-U_i(a_i | V_i))}$$



# Modèle d'Ising Formalisation

Restauration Markovienne d'Images

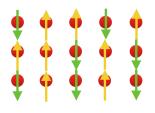
M. Karpe, Sadaca, N Soussi, an C. Zeng

Introduction
De la finance
au traitemen
d'images

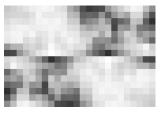
Modélisation mathématiqu

Modèle physique

Implémentatio



(e) Assemblée de spins



(f) Tableau de pixels



# Modèle d'Ising

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, A Sadaca, N. Soussi, and C. Zeng

Introduction De la finance au traitement d'images

Modélisation mathématique

Modèle physique

Implémentation

- Réseau régulier et infini
- $\blacksquare$  *N* spins  $s_i = \pm 1$
- Champ extérieur h
- Interactions d'intensité J > 0 entre chaque spin et ses plus proches voisins

### Energie totale

$$E(s_1, s_2, \cdots, s_N) = -J \sum_{\langle i, j \rangle} s_i s_j - h \sum_i s_i$$
 (1)



# Des propriétés critiques

Restauration Markovienne d'Images

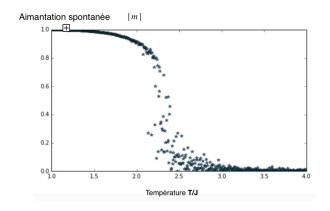
M. Karpe, . Sadaca, N Soussi, and C. Zeng

Introduction
De la finance
au traitemen
d'images

Modélisation mathématiqu

Modèle physique

Implémentation



Résultat d'Onsager :  $\frac{T_c}{I} = 2.263$ 



## Une modélisation Hypothèses

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, A Sadaca, N Soussi, and C. Zeng

Introduction
De la finance
au traitement
d'images

Modélisation mathématique

Modèle physique

Implémentation

## Hypothèses

- Champ magnétique extérieur nul : h = 0
- Existence d'interactions avec les 4 plus proches voisins

$$E(s_1, s_2, \cdots, s_N) = -J \sum_{\langle i, i \rangle} s_i s_j$$

où  $s_i = \pm 1$  et J est le paramètre de couplage d'Ising-Heisenberg



# Une approche par champs moyens

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, A Sadaca, N Soussi, and C. Zeng

Introduction
De la finance
au traitement
d'images

Modélisation mathématique

Modèle physique

Implémentation

Résultats obtenus par résolution graphique :

$$\frac{T_c}{J} = 2.898$$

$$\epsilon = \frac{2.899 - 2.269}{2.269} = 27.8\%$$



# Une approche markovienne

ParisTech

Restauration
Markovienne

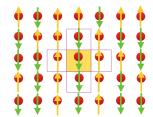
M. Karpe, Sadaca, N. Soussi, and

Introduction
De la finance
au traitement
d'images

Modélisation mathématique

Modèle physique

Implémentatio



### **Notations**

- Champs de Markov
- $P(x_s|S_s) = P(x_s|N_s)$



# Une approche markovienne Méthode

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, A Sadaca, N Soussi, and C. Zeng

Introduction De la finance au traitement d'images

Modélisation mathématiqu

Modèle physique

Implémentation

■ Théorème de Hammersley-Clifford & Distribution de probabilité

$$P(x_s|S_s) = P(x_s|N_s) = \frac{1}{Z_{N_s}} \exp\left(\frac{-U(x_s|N_s)}{k_BT}\right)$$

•  $U(x_s|N_s)$  : somme des termes énergétiques impliquant le site s selon la configuration du voisinage  $N_s$ 

$$Z_{N_s} = \sum_{\{x_s\}} \exp\left(\frac{-U(x_s|N_s)}{k_B T}\right)$$



## Une approche markovienne Détails

Restauration Markovienne d'Images

Modèle physique

### $p = P(x_s = 1)$

### Formule de Bayes

$$p = P(x_s = 1) = \sum_{\substack{\{N_s\}\\P(x_s = 1_s)P(N_s)}} P(x_s = 1_s)P(N_s)$$

$$p = \sum_{\{N_s\}} \frac{\exp(\frac{-U(x_s|N_s)}{k_BT})}{Z_{N_s}} P(N_s)$$

$$p = \sum_{\{N_s\}} \frac{\exp(\frac{-U(x_s|N_s)}{k_B T})}{Z_{N_s}} P(N_s)$$

Notation : 
$$i(j)$$
 et  $K = \frac{2J}{k_BT}$ 



# Une approche markovienne Détails

Restauration Markovienne d'Images

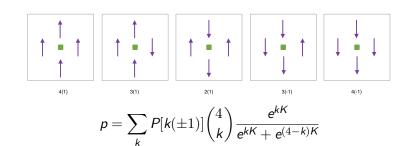
M. Karpe, A Sadaca, N Soussi, and C. Zeng

Introduction
De la finance
au traitemen
d'images

Modélisation mathématiqu

#### Modèle physique

Implémentatio



## Hypothèses supplémentaires

- (forte) Décorrélation des spins du voisinage  $N_s$
- (faible) Invariance de la probabilité *p* par translation sur le réseau de spins



# Une approche markovienne Détails

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, A Sadaca, N. Soussi, and C. Zeng

Introduction
De la finance
au traitement
d'images

Modélisation mathématique

Modèle physique

Implémentation

$$\mathbf{x}_{s} \sim \mathcal{B}(p)$$

$$ule{N_s} \sim \mathcal{B}(4, p)$$

$$p = \sum_{k} P[k(\pm 1)] {4 \choose k} \frac{e^{kK}}{e^{kK} + e^{(4-k)K}}$$

### Equation

$$\begin{split} p &= \phi(p) = \frac{e^{4K}}{1 + e^{4K}} p^4 + \binom{4}{1} \frac{e^{3K}}{e^K + e^{3K}} p^3 (1 - p) \ + \\ \binom{4}{2} \frac{e^{2K}}{2e^{2K}} p^2 (1 - p)^2 + \binom{4}{3} \frac{e^K}{e^K + e^{3K}} p (1 - p)^3 + \frac{1}{1 + e^{4K}} (1 - p)^4 \end{split}$$



# Une approche markovienne Résultats

Restauration Markovienne d'Images

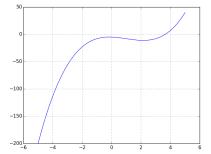
M. Karpe, A Sadaca, N. Soussi, and C. Zeng

Introduction
De la finance
au traitemen
d'images

Modélisation mathématique

Modèle physique

Implémentatio



$$\exp(2K_c) = 3.649$$

$$\frac{T_c}{I} = 2.269$$



# Modèles de potentiels

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, A Sadaca, N. Soussi, and C. Zeng

Introduction
De la finance
au traitemen
d'images

Modélisation mathématique

Modèle physique

Implémentation

Modèle de Potts

$$U(x) = \beta \sum_{c=(s,t)\in C} (\mathbf{1}_{\{x_s \neq x_t\}} - \mathbf{1}_{\{x_s = x_t\}})$$

■ Modèle markovien gaussien

$$U(x) = \underbrace{\beta \sum_{c=(s,t) \in C} (x_s - x_t)^2}_{\text{faible différence entre pixels voisins}} + \underbrace{\alpha \sum_{s \in S} (x_s - \mu_s)^2}_{\text{attache aux données}}$$



# Minimisation de l'énergie

Restauration Markovienne d'Images

ParisTech

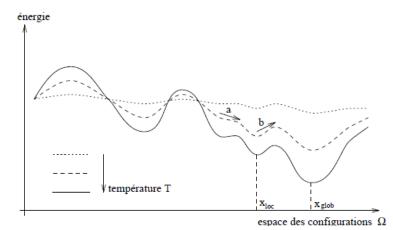
M. Karpe, A Sadaca, N Soussi, and C. Zeng

Introduction
De la finance
au traitemen
d'images

Modélisation mathématiqu

Modèle physique

Implémentation



a :  $\Delta U < 0$ , transition acceptée

b :  $\Delta U > 0$ , transition selon une probabilité  $p = \exp(-\Delta U/T)$ 



## Tirages de configurations

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, Sadaca, N Soussi, an C. Zeng

Introduction
De la finance
au traitement
d'images

Modélisation mathématique

Modèle physique

Implémentation

■ Échantillonneur de Gibbs

• Algorithme de Metropolis :  $\lambda \in E = \llbracket 0,255 \rrbracket$ 

$$\Delta U = U_{s}(\lambda | V_{s}^{(n-1)}) - U_{s}(x_{s}^{(n-1)} | V_{s}^{(n-1)})$$



# Image test

Restauration Markovienne d'Images

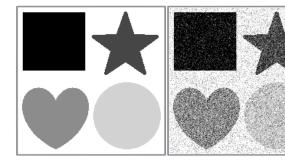
M. Karpe, Sadaca, N Soussi, an C. Zeng

Introduction
De la finance
au traitemen
d'images

Modélisation mathématique

Modèle physiqu

Implémentation numérique



$$SNR = 10 \log \left( \frac{\sum_{s \in S} x_s^2}{\sum_{s \in S} (y_s - x_s)^2} \right)$$



## Résultats obtenus

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, Sadaca, N Soussi, an C. Zeng

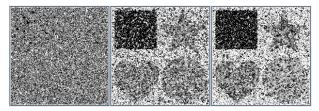
Introduction De la finance au traitemen d'images

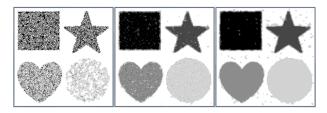
Modélisation mathématique

Modèle physiqu

Implémentation numérique

### ■ Modèle de Potts







## Résultats obtenus

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, A Sadaca, N Soussi, and C. Zeng

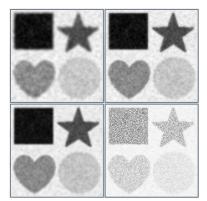
Introduction
De la finance
au traitemen
d'images

Modélisation mathématique

Modèle physiqu

Implémentation numérique

Modèle markovien gaussien





## **Améliorations**

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, A Sadaca, N Soussi, and C. Zeng

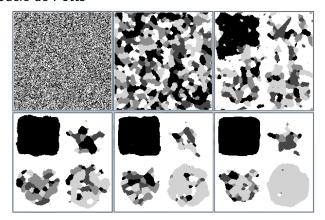
Introduction
De la finance
au traitemen
d'images

Modélisation mathématique

Modèle physiqu

Implémentation numérique

### Modèle de Potts





## **Améliorations**

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, Sadaca, N Soussi, an

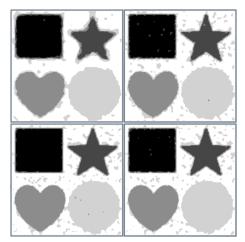
Introduction
De la finance
au traitemen
d'images

Modélisation mathématiqu

Modèle physiqu

Implémentation numérique

■ Modèle markovien gaussien





## Limites

ParisTech Restauration

Markovienne d'Images M. Karpe, A.

Introduction
De la finance

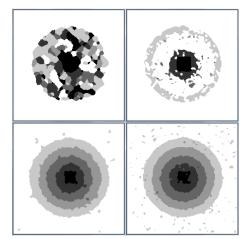
d'images Modélisation

mathématiqu

Modèle physiqu

Implémentation numérique

■ Image présentant des dégradés





## Limites

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, Sadaca, N Soussi, an C. Zeng

Introduction
De la finance
au traitemen
d'images

Modélisation mathématique

Modèle

Implémentation numérique

■ Photo comportant 256 nuances de gris





## Conclusion

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, A Sadaca, N. Soussi, and C. Zeng

Introduction
De la finance
au traitemen
d'images

Modélisation

Modèle

Implémentation numérique

Notre modèle simple donne de bons résultats sur des images "simples"!



## Références

Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe, A Sadaca, N Soussi, and C. Zeng

Références

M. Sigelle et F. Tupin. Champs de Markov en Traitement d'Image.

École Nationale Supérieure des Télécommunications, 1999.

F. Chevoir.

Cours de Physique Statistique.

École Nationale des Ponts et Chaussées.

M. Sigelle et A. Maruani.

Critical Properties of the 2D Ising Model : A Markovian Approach.

Maximum Properties and Bayesian Methods, 389 – 392, Kluwer Academic Publishers, 1992.