

1 Общий метод нахождения начального допустимого базисного решения ЗЛП

Для решения задачи ЛП симплекс-методом необходимо выразить базисные переменные через свободные, причём в этом выражении свободные члены должны быть неотрицательными. В случае, если эта проблема не решается тривиально, используется *метод искусственного базиса*, при котором в задачу вводятся дополнительные искусственные переменные.

1.1 Метод вспомогательной задачи

Пусть дана задача ЛП:

$$\begin{aligned} \vec{c}\vec{x} &\rightarrow \max \\ \begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i, & i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, & j = \overline{1, n} \end{cases} \end{aligned}$$

Вспомогательная задача имеет вид:

$$\begin{aligned} -x_{n+1} - x_{n+2} - \dots - x_{n+m} &\rightarrow \max \\ \begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i, & i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, & j = \overline{1, n+m} \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $\forall b_i \geq 0$. В вспомогательной задаче очевидно опорное решение: $x' = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)$, где первые n нулей — значения основных переменных, а остальные значения соответствуют искусственным. Искусственные переменные образуют единичный базис, значит можно решать задачу симплекс-методом и получить оптимальное решение вспомогательной задачи:

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_{n+m}^*)$$

В зависимости от того, входят ли искусственные векторы в базис оптимального решения и какие при этом значения имеют искусственные переменные, относительно исходной задачи можно сделать различные выводы.

1.1.1 Случай 1

Среди чисел $x_{n+1}^*, \dots, x_{n+m}^*$ есть отличные от нуля. В этом случае исходная задача не имеет допустимых решений.

1.1.2 Случай 2

В оптимальном решении все искусственные переменные имеют нулевое значение.

Случай 2а В оптимальном базисе нет искусственных векторов. В этом случае получено опорное решение исходной задачи и известно разложение всех векторов задачи по базису опорного решения. Для решения исходной задачи достаточно:

- в полученной симплекс-таблице отбросить столбцы искусственных переменных;
- восстановить коэффициенты целевой функции исходной задачи;
- пересчитать значение целевой функции и оценки свободных векторов.

Случай 2б В оптимальный базис входят искусственные векторы. Важно знать, существуют ли среди коэффициентов разложения основных векторов при искусственных базисных векторах отличные от нуля.

Здесь для определённости принято, что первые l переменных основные, а остальные — искусственные. Рассматриваем область x_{rs} .

Случай 2б1 Все $x_{rs} = 0$. Тогда любой вектор исходной задачи выражается только через основные вектора, входящие в базис оптимального решения вспомогательной задачи. Таким образом, можно выкинуть строки и столбцы, связанные с искусственными переменными, и действовать как в случае 2а.

Случай 2б2 Существует $x_{rs} \neq 0$. Тогда основной вектор A_s принудительно вводится в базис вместо искусственного вектора A_{i_r} и по обычным правилам перестраивается симплекс-таблица. Процедура повторяется, пока не возникнет ситуация 2а или 2б1. В любом случае будет получено опорное решение исходной задачи и базис этого решения, состоящий только из основных векторов.