Лекция
Двойственные задачи ЛП

Домашова Д.В.

Определение двойственной задачи

Рассмотрим задачу ЛП в общей форме

$$F = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ . \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \le b_k \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(1)

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,l}, l \le n$$

Определение: Задача

$$F^* = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ . \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \dots + a_{ml}y_m \ge c_l \\ . \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m = c_n \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, i = \overline{1,k}, k \le m$$

называется двойственной к задаче (1).

Определение двойственной задачи

	Прямая задача	Двойственная задача
1	n - переменных	m - переменных
2	m - ограничений	n - ограничений
3	Целевая функция – ищется max	Целевая функция – ищется min
4	c – вектор коэффициентов целевой функции	b – вектор коэффициентов целевой функции
5	b – вектор свободных членов системы ограничений	c – вектор свободных членов системы ограничений
6	A – матрица коэффициентов системы ограничений	$A^т$ – матрица коэффициентов системы ограничений
7	x_j >=0, j=1,k	j-ое ограничение «>=»,j=1,k
8	x_j – не ограничена в знаке, j=k+1,n	j-ое ограничение «=»,j=k+1,n
9	i-ое ограничение «<=»,i=1,l	y_i >=0, i=1,l
10	i-ое ограничение «=»,i=l+1,m	y_i, – не ограничена в знаке, i=l+1,m

Пример постановки двойственной задачи

$$F = x_1 - 4x_2 - 3x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_3 \ge 4 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,3}$$

$$F = -\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 7 \\ -x_3 \le -4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,3}$$

$$F^* = 7y_1 - 4y_2 + 6y_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 3y_1 - y_3 \le -1 \\ 4y_1 - 2y_3 \le 4 \\ y_1 - y_2 + y_3 = 3 \end{cases}$$
$$y_{1,2} \ge 0$$

Симметричная пара двойственных задач

$$F = \langle c, x \rangle \to \max$$

$$Ax \le b$$

$$x \ge 0$$

$$F^* = \langle b, y \rangle \to \min$$

$$A^T y \ge C$$

$$y \ge 0$$

Основные теоремы двойственности

Теорема 1. Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем значения целевых функций задач при их оптимальных планах равны между собой: F(x*) = F*(y*). Если же целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена, то другая задача вообще не имеет планов (ОДР пуста).

Теорема2: $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ и $y^* = (y_1^*, \ldots., y_m^*)$ - оптимальные решения прямой и двойственной задач $\Leftrightarrow$

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i) y_i^* = 0, i = \overline{1, m}$$

$$(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j) x_j^* = 0, \ j = \overline{1, n}$$

Основные теоремы двойственности

Теорема 3. $y^* = C_b A_B^{-1}$

Доказательство.
Пусть прямая задача:

$$F = \langle c, x \rangle \to \max_{\substack{Ax=b \\ x\geq 0}}$$

Тогда двойственная:

$$F^* = \langle y, b \rangle \to \min_{A^T y \geq C}$$

Пусть x^* - оптимальное решение прямой.

Тогда $A_B x^*_b = b$, $A_B^{-1} A_B x_b^* = A_B^{-1} b$, $x_b^* = A_B^{-1} b$.

Подставим x^* в целевую функцию:

$F = \langle c, x^* \rangle = c_b x^*_b = C_b A_B^{-1} b$,

$C_b A_B^{-1} b = y^* b$ тогда $y^* = C_b A_B^{-1}$,

где C_b – коэффициенты при базисных переменных;

A_B^{-1} - обратная матрица к матрице, составленной из компонент векторов, вошедших в оптимальных базис (расположена в первых m строках последней (оптимальной) симплекс-таблицы, в столбцах векторов, представляющих начальный базис.

При этом $y^* = C_b A_B^{-1}$ - находится в строке Δ

Основные теоремы двойственности

Установим соответствие между переменными прямой и двойственной задач в симплекс-таблице:

$$\underbrace{x_1 \ldots x_n}_{\text{основные}} \qquad \underbrace{x_{n+1} \ldots x_{n+m}}_{\text{дополнительные}}$$

$$\underbrace{y_{m+1} \ldots y_{m+n}}_{\text{дополнительные}} \qquad \underbrace{y_1 \ldots y_m}_{\text{основные}}$$

Пример

$$f = 4x1 + 5x2 \rightarrow \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$x_{\max} = \left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$$f_{\max} = 25$$

$$f^* = 35y1 + 8y2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 7y_1 + y_2 \ge 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 5 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$$

Пример

$$f = 4x1 + 5x2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$x_{\max} = \left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$$f_{\max} = 25$$

$$f^* = 35y1 + 8y2 \to \min$$

$$\begin{cases} 7y_1 + y_2 \ge 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 5 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$$

$$\begin{cases} 7 \cdot \frac{10}{3} + 5 \cdot \frac{7}{3} = 35 \Rightarrow y_1^* > 0 \\ \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{7}{3} = 8 \Rightarrow y_2^* > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^* > 0 \Rightarrow 7y_1^* + y_2^* = 4 \\ x_2^* > 0 \Rightarrow 5y_1^* + 2y_2^* = 5 \end{cases}$$

$$y_1^* = \frac{1}{3}, y_2^* = \frac{5}{3}$$

$$f_{\min}^* = 25$$

Пример

N	Базис	C(базис)	B опор.	A1	A2	A3	A4
1	A1	4	3,333333333	1	0	0,222222222	-0,55555555
2	A2	5	2,333333333	0	1	-0,11111111	0,777777777
				d1=0	d2=0	d3=0,333333	d4=1,666666

$$y^* = C_b A_B^{-1} = (4,5) \cdot \begin{pmatrix} 0,222 & -0,555 \\ -0,111 & 0,777 \end{pmatrix} = (0,333;1,666)$$

Экономическая интерпретация двойственных задач

Экономическая интерпретация двойственных задач

Задача об оптимальном плане производства продукции

- n – видов продукции, ;
- m – видов ресурсов (сырья), ;
- a_{ij} – количество ресурса i-го вида, требующегося для производства единицы продукции j-го вида;
- b_i – запасы ресурса i-го вида ;
- c_j – доход (прибыль) от реализации единицы продукции j-го вида.

Экономическая интерпретация двойственных задач

Задача об оптимальном плане производства продукции

- Необходимо найти такой план производства продукции, при котором достигается максимальная прибыль, для реализации которого достаточно имеющихся ресурсов.
- Оценить каждый из видов сырья, используемых для производства продукции. Оценки, приписываемые каждому из видов сырья должны быть такими, чтобы оценка всего используемого сырья была минимальна, а суммарная оценка сырья, используемого на производство единицы продукции любого вида, - не меньше цены единицы продукции данного вида.
- Найти интервалы устойчивости двойственных оценок по отношению к изменениям ресурсов каждого типа.

Экономическая интерпретация двойственных задач

	A	B	C	D	Запасы
C_1	1	0	2	1	180
C_2	0	1	3	2	210
C_3	4	2	0	4	800
Цена за единицу продукции	9	6	4	7	

Экономическая интерпретация двойственных задач

Построим модели

Экономическая интерпретация двойственных задач

Построим модели

$$F = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 \le 180 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \le 210 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_4 \le 800 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}$$

Экономическая интерпретация двойственных задач

Построим модели

$$F = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 \le 180 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \le 210 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_4 \le 800 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1{,}4}$$

$$F^* = 180y_1 + 210y_2 + 800y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_3 \ge 9 \\ y_2 + 2y_3 \ge 6 \\ 2y_1 + 3y_2 \ge 4 \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ge 7 \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, i = \overline{1{,}3}$$

Экономическая интерпретация двойственных задач

Приведем к канонической форме

$$F = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 180 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 210 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_4 + x_7 = 800 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,7}$$

Экономическая интерпретация двойственных задач

базис	Сб.	B	9	6	4	7	0	0	0
			A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
A5	0	180	[1]	0	2	1	1	0	0
A6	0	210	0	1	3	2	0	1	0
A7	0	800	4	2	0	4	0	0	1
		F = 0	-9	-6	-4	-7	0	0	0

- При данном плане ничего не производится, сырье не используется, F = 0.
- Δj показывают на сколько увеличится F (цена за произведенную продукцию) при введении в план единицы j-го вида продукции.
- Отсюда следует, что целесообразно включить в план изделие А в объеме min{180/1, 800/4} = 180.
- Тогда сможем изготовить 180 единиц изделия А. На это потребуется 180 единиц С1 и 180 · 4 С3.
- Т.е. максимум количества изделия А ограничивается запасами сырья С1. При этом все сырье С1 израсходуется.

Экономическая интерпретация двойственных задач

Оптимальная симплекс-таблица

базис	Сб.	B	9	6	4	7	0	0	0
			A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
A1	9	95	1	0	-3/2	0	0	-1/2	1/4
A5	0	85	0	0	7/2	1	1	1/2	-1/4
A2	6	210	0	1	3	2	0	1	0
		2115	0	0	1/2	5	0	3/2	9/4

$$x^* = (95,210,0,0) \quad y^* = (0, {}^{3}\!/_{2}, {}^{9}\!/_{4})$$

При оптимальном плане производится 95 изделий А, 210 изделий В, при этом остается неиспользованными 85 единиц С1.

Экономическая интерпретация двойственных задач

1. Подставим x^* в ограничения прямой задачи:

$$\left\{\begin{array}{l} 95 + 2\cdot 0 + 0 < 180 \\ 210 + 3\cdot 0 + 2\cdot 0 = 210 \\ 4\cdot 95 + 2\cdot 210 + 4\cdot 0 = 800 \end{array}\right\}$$

Второе и третье ограничения выполняются как «=» => ресурсы 2-го и 3-го видов полностью используются в оптимальном плане, являются дефицитными ($y_2^* = 3/2 > 0, y_3^* > 0$).

Первое ограничение выполняется как строгое «<» => ресурс первого вида не является дефицитным ($y_1^* = 0$). Его остатки $x_5^* = 85$
=> положительную двойственную оценку имеют лишь те виды ресурсов, которые полностью используются в оптимальном плане.

Экономическая интерпретация двойственных задач

2. Подставим y^* в ограничение двойственной задачи

$$\begin{cases} 0+4\cdot\dfrac{9}{4}=9 \\ \dfrac{3}{2}+2\cdot\dfrac{9}{4}=6 \\ 2\cdot 0+3\cdot\dfrac{3}{2}>4 \\ 0+2\cdot\dfrac{3}{2}+4\cdot\dfrac{9}{4}>7 \end{cases}$$

Первое и второе ограничения выполняются как «=» => двойственные оценки ресурсов, используемых для производства единицы продукции А и В, равны в точности доходам => производить эти изделия целесообразно => $x_1^*=95>0$, $x_2^*=210>0$.

Третье и четвертое ограничения выполняются как «>» => производить изделия С и D экономически не выгодно => $x_3^*=0$, $x_4^*=0$.

Экономическая интерпретация двойственных задач

3. Величина двойственной оценки показывает, насколько возрастает значение целевой функции при увеличении дефицитного ресурса на одну единицу.

Увеличение ресурса С2 на одну единицу приведет к получению нового оптимального плана, в котором прибыль возрастает на 3/2: 2115+3/2. При этом коэффициенты матрицы A_b^{-1} (столбца А6) оптимальной симплекс-таблицы показывают, что указанное увеличение прибыли достигается за счет уменьшения выпуска изделий А на ½ единицы, увеличения выпуска изделия В на 1 единицу и увеличения остатка ресурса С1 на ½ единицы (использования ресурса расхода С1 сократится на ½ единицы).

Увеличение ресурса С3 на 1 единицу приведет к получению нового оптимального плана, в котором прибыль возрастает на 9/4: 2115 + 9/4. Это произойдет за счет увеличения выпуска изделия А на ¼ единицы, при этом расход сырья С1 возрастает (остаток уменьшится) на ¼ единицы.

Экономическая интерпретация двойственных задач

- Двойственные оценки связаны с оптимальным планом прямой задачи. Всякое изменение исходных данных прямой задачи оказывает влияние на ее оптимальный план и на систему двойственных оценок.
- В свою очередь двойственные оценки служат инструментом анализа и принятия правильного решения в условиях меняющихся коммерческих ситуаций.

Анализ устойчивости двойственных оценок

Будем рассматривать максимальные значения целевой функции прямой задачи, как функцию свободных членов системы ограничений:

$F_{\max}(b_1,\ldots,b_m)$.

Утверждение: В оптимальном плане двойственной задачи значение переменной y_i^* численно равно частной производной функции $F_{\max}(b_1,\ldots,b_m)$ по соответствующему аргументу: $\frac{\partial F_{\max}}{\partial b_i} = y_i^*$, $i = \overline{1,m}$

Двойственные оценки ресурсов показывают, на сколько единиц изменяется доход (F) от реализации продукции при изменении запаса соответствующего ресурса на одну единицу.

Большей оценке соответствует наиболее дефицитный ресурс. Для недефицитного ресурса $y_i^* = 0$.

Анализ устойчивости двойственных оценок

Представляет интерес определить такие интервалы изменения b_i , в которых оптимальный план двойственной задачи не меняется.

$$x_b^* = A_B^{-1}(b + \Delta b) = A_B^{-1}b + A_B^{-1}\Delta b = x_b + A_B^{-1}\Delta b$$

Это имеет место для всех тех значений $b_i + \Delta b_i$, при которых x_b^* не содержит отрицательных (т.е. являются допустимым решением).

$$A_B^{-1}\begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ . \\ . \\ b_m + \Delta b_m \end{pmatrix} \geq 0$$

Анализ устойчивости двойственных оценок

Определим интервалы устойчивости для нашей задачи:

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 180 \\ 210 \\ 800 \end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1}(b + \Delta b) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 180 + \Delta b_1 \\ 210 + \Delta b_2 \\ 800 + \Delta b_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 95 - 1/2 \cdot \Delta b_2 + y_4 \cdot \Delta b_3 \\ 85 + \Delta b_1 + 1/2 \cdot \Delta b_2 - 1/4 \cdot \Delta b_3 \\ 210 + \Delta b_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

Анализ устойчивости двойственных оценок

Частные случаи

1) Если $\Delta b_2 = 0$, $\Delta b_3 = 0$ => $85 + \Delta b_1 \geq 0$ => $\Delta b_1 \geq -85$

2) Если $\Delta b_1 = 0$, $\Delta b_3 = 0$

$$\begin{cases} 95 - 1/2 \cdot \Delta b_2 \geq 0 \\ 210 + \Delta b_2 \geq 0 \\ 85 + 1/2 \cdot \Delta b_3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Delta b_2 \leq 190 \\ \Delta b_2 \geq -210 \\ \Delta b_2 \geq -170 \end{matrix} \quad => -170 \leq \Delta b_2 \leq 190$$

3) Если $\Delta b_1 = 0$, $\Delta b_2 = 0$

$$\begin{cases} 95 + 1/4 \cdot b_3 \geq 0 \\ 85 - 1/4 \cdot b_3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Delta b_3 \geq -380 \\ \Delta b_3 \leq 340 \end{matrix} \quad -380 \leq \Delta b_3 \leq 340$$

=> интервалы изменения ресурсов:

$$210 - 170 \leq b_2 \leq 210 + 190 \qquad 800 - 380 \leq b_3 \leq 800 + 380$$

$$40 \leq b_2 \leq 400 \qquad 420 \leq b_3 \leq 1140$$

Первый вид ресурса в оптимальном плане недоиспользован, является недефицитным.

Увеличение данного ресурса приведет лишь к росту его остатка.

При этом изменений в оптимальном плане не будет, т.к. $y_1^* = 0$.

Анализ устойчивости двойственных оценок

Предельные значения изменения всякого из ресурсов, для которого двойственные оценки остаются неизменными, определяются следующим образом:

$$\Delta b_i^- = \max_{x_{ji}>0}\left\{\frac{-x_j^*}{x_{ji}}\right\} \le \Delta b_i \le \min_{x_{ji}<0}\left\{\frac{-95}{-1/2}\right\}$$

$$-85 \le \Delta b_1$$

$$-170 \le \Delta b_2 \le 190$$

$$\max_{x_{ji}>0}\left\{\frac{-95}{1/4}\right\} \le \Delta b_3 \le \left\{\frac{-85}{-1/4}\right\} \quad -380 \le \Delta b_3 \le 340$$

Анализ устойчивости двойственных оценок

Аналогично можно определить интервалы устойчивости с точки зрения дохода изделия.

$$\max_{x_{jk}<0}\left\{\frac{x_j^*}{x_{jk}}\right\} \le x_k \le \min_{x_{jk}>0}\left\{\frac{x_j^*}{x_{jk}}\right\}$$

Пример для x_3 и x_4:

$$\max\left\{\frac{95}{-3/2}\right\} \le x_3 \le \min\left\{\frac{85}{7/2}, \frac{210}{3}\right\} \quad -60 \le x_3 \le \left[\frac{170}{7}\right] = 24$$

$$\max\{\varnothing\} \le x_4 \le \min\left\{\frac{85}{1}, \frac{210}{2}\right\} = 85 \quad x_4 \le 85$$

=> В производство можно вводить изделие С до 24 единиц, или изделие D до 85 единиц.

Ошибки, упомянутые в лекции, представлены в качестве заметок к каждому слайду

Сушкевич Владислав
Калугер Роман