Работа №3

а) $F = -8x_1 + 3x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14 \\ -4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 \le 6 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решим сначала на максимум:

Решение исходной задачи:

$$x_{\max} = (0, 4)$$

Формулировка двойственной задачи:

1. **Целевая функция:**

$$F^* = 14y_1 + 12y_2 + 6y_3 \to \min$$

2. **Ограничения:**

$$\begin{cases} y_1 - 4y_2 + y_3 \ge -8 \\ 2y_1 + 3y_2 \ge 3 \\ y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} (x_1 + 2x_2 - 14)y_1^* = 0 \\ (-4x_1 + 3x_2 - 12)y_2^* = 0 \\ (x_1 - 6)y_3^* = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (0 + 2 \cdot 4 - 14)y_1^* = 0 \Rightarrow y_1^* = 0 \\ (-4 \cdot 0 + 3 \cdot 4 - 12)y_2^* = 0 \Rightarrow y_2^* > 0 \\ (0 - 6)y_3^* = 0 \Rightarrow y_3^* = 0 \end{cases}$$

Теорема о дополняющей нежесткости:

Если x_1 и x_2 — оптимальное решение прямой задачи, а y_1, y_2, y_3 — оптимальное решение двойственной задачи, то:

1. $x_1(y_1 - 4y_2 + y_3 + 8) = 0$ 2. $x_2(2y_1 + 3y_2 - 3) = 0$

Из решения прямой задачи:

$$\begin{cases} 0 \cdot (y_1 - 4y_2 + y_3 + 8) = 0 \\ 4 \cdot (2y_1 + 3y_2 - 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow y^* = (0, 1, 0) \text{ — Оптимальное решение двойств}$$

$$F^* = 14 \cdot 0 + 12 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 12$$

Решим на максимум через теорему 3:
Берем данные из последней таблицы решения этого номера в работе 2:

$$y^* = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -0.67 & 0 \\ 0 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 1, 0)$$

Получили то же самое.

Решим теперь на минимум. Решим так же, находя максимум функции $G = -F$:
Решение исходной задачи:

$$x_{\max} = (6, 0)$$

Прямая задача:

$$G = 8x_1 - 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Двойственная задача:
1. **Целевая функция:**

$$G^* = 14y_1 + 12y_2 + 6y_3 \to \max$$

2. **Ограничения:**

$$\begin{cases} y_1 - 4y_2 + y_3 \geq 8 \\ 2y_1 + 3y_2 \geq -3 \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} (x_1 + 2x_2 - 14)y_1^* = 0 \\ (-4x_1 + 3x_2 - 12)y_2^* = 0 \\ (x_1 - 6)y_3^* = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (6+2\cdot 0-14)y_1^*=0 \Rightarrow y_1^*=0 \\ (-4\cdot 6+3\cdot 0-12)y_2^*=0 \Rightarrow y_2^*=0 \\ (6-6)y_3^*=0 \Rightarrow y_3^*>0 \end{cases}$$

Теорема о дополняющей нежесткости:
Если x_1 и x_2 — оптимальное решение прямой задачи, а y_1, y_2, y_3 — оптимальное решение двойственной задачи, то:

1. $x_1(y_1^*-4y_2^*+y_3^*-8)=0$ **2.** $x_2(2y_1^*+3y_2^*+3)=0$

Из решения прямой задачи $x_1=6$ и $x_2=0$:

$$\begin{cases} 6\cdot(y_1^*-4y_2^*+y_3^*-8)=0 \\ 0\cdot(2y_1^*+3y_2^*+3)=0 \end{cases} \quad \Rightarrow y^*=(0,0,8) \text{ — Оптимальное решение двойст}$$

$$G^*=14\cdot 0+12\cdot 0+6\cdot 8=48 \Rightarrow F^*=-G^*=-48$$

b) $F=2x_1+x_2\to\min(\max)$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2\geq 10 \\ -4x_1+x_2\leq 8 \\ x_1\geq 0,\quad x_2\geq 0 \end{cases}$$

$\nexists F_{\max}$

Решим теперь на минимум. Решим так же, находя максимум функции $G=-F$:

Решение исходной задачи:

$$x_{\max}=(5,0)$$

Прямая задача:

$$G=-2x_1-x_2\to\max$$

$$\begin{cases} -2x_1-x_2\leq -10 \\ -4x_1+x_2\leq 8 \\ x_1\geq 0,\quad x_2\geq 0 \end{cases}$$

Двойственная задача:

1. **Целевая функция:**

$$G^*=-10y_1+8y_2\to\max$$

2. **Ограничения:**

$$\begin{cases} -2y_1 - 4y_2 \geq -2 \\ -y_1 + y_2 \geq -1 \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} (-2x_1 - x_2 + 10)y_1^* = 0 \\ (-4x_1 + x_2 - 8)y_2^* = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-2 \cdot 5 - 0 + 10)y_1^* = 0 \Rightarrow y_1^* > 0 \\ (-4 \cdot 5 + 0 - 8)y_2^* = 0 \Rightarrow y_2^* = 0 \end{cases}$$

Теорема о дополняющей нежесткости:

1. $x_1(-2y_1 - 4y_2 + 2) = 0$ 2. $x_2(-y_1 + y_2 + 1) = 0$

Из решения прямой задачи:

$$\begin{cases} 5 \cdot (-2y_1 - 4y_2 + 2) = 0 \\ 0 \cdot (-y_1 + y_2 + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow y^* = (1, 0)$$ — Оптимальное решение двойственн

$$G^* = -10 \cdot 1 + 8 \cdot 0 = -10 \Rightarrow F^* = -G^* = 10$$

c) $F = 2x_1 - x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 21 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\nexists F_{\min}, \nexists F_{\max}$