



Лекция

Введение

Задачи линейного программирования

Домашова Д.В.

Содержание

- ❖ **Определение задачи принятия решения**
- ❖ **Постановка задачи оптимизации**
- ❖ **Разрешимость ЗО. Классификация ЗО.**
- ❖ **Постановка задачи линейного программирования (ЛП)**
- ❖ **Геометрическая интерпретация решения задачи ЛП**
- ❖ **Свойства задачи ЛП**

Задача принятия решения (ЗПР)

Системное описание ЗПР



При принятии решения основной задачей является нахождение оптимального решения.

На содержательном уровне оптимальное решение можно определить как наилучшее в следующем смысле:

оптимальное решение в наибольшей степени соответствует цели

Управляющей подсистемы в рамках имеющейся у нее информации о

состоянии среды

Управляющая подсистема может воздействовать на объект управления с помощью альтернативных управляющих воздействий: $УВ_1, УВ_2, УВ_n$

Состояние Объекта управления определяется двумя факторами: выбранным $УВ$; состоянием среды

Принципиальным является следующее обстоятельство: Управляющая подсистема не может воздействовать на среду, более того, она, как правило, не имеет полной информации о состоянии среды

Цель Управляющей подсистемы: перевести объект управления в наиболее предпочтительное для себя состояние, используя для этого любое $УВ$, имеющееся в ее распоряжении

Выбор Управляющей подсистемой конкретного $УВ$ (допустимой альтернативы, допустимого решения) называется принятием решения

Задача принятия решения (ЗПР)

В зависимости от информации, которую имеет при принятии решения управляющая подсистема относительно состояния среды, различают несколько основных типов задач принятия решения.

1. *Принятие решения в условиях определенности* характеризуется тем, что состояние среды является фиксированным (неизменным), причем управляющая система «знает», в каком состоянии находится среда.
2. *Принятие решения в условиях риска* означает, что управляющая подсистема имеет информацию стохастического характера о поведении среды (например, ей известно распределение вероятностей на множестве состояний среды)
3. *Принятие решения происходит в условиях неопределенности*, если никакой дополнительной информации (кроме знания самого множества возможных состояний среды) управляющая подсистема не имеет.
4. *Принятие решения в теоретико-игровых условиях* имеет место тогда, когда среду можно трактовать как одну или несколько целенаправленных управляющих подсистем. В этом случае математическая модель принятия решения называется *теоретико-игровой моделью (игрой)*.

Постановка задачи оптимизации

$$f(x) \rightarrow \min$$

$$D = \begin{cases} g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m} \\ x \in X \subseteq R^n \end{cases} \quad (1)$$

где $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ - нелинейные функции.

Решение: $x^* = \arg \min_{x \in D} f(x)$

Разрешимость задачи оптимизации

$$x^* \in \mathbb{R}^n$$

Опр.: Точка $x^* \in D$ называется точкой глобального минимума функции f на множестве D , или глобальным решением задачи (1), если

$$f(x^*) \leq f(x) \quad (2)$$

для любого x принадлежащего множеству D

Опр.: Точка x^* принадлежащая множеству D называется точкой локального минимума f на D , или локальным решением задачи (1), если

$$\exists \varepsilon > 0 : f(x^*) \leq f(x) \quad (3)$$

для любого $x \in D \cap U_\varepsilon(x^*)$,

где $U_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| < \varepsilon\}$ – шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в x^* .

Замечание: Если неравенство (2) или (3) выполняется как строгое при $x \neq x^*$, то говорят, что x^* - точка строгого минимума в глобальном или локальном смысле.

Обозначение : $x^* \in X$ – точка глобального минимума:

$$f(x^*) = \min_{x \in D} f(x)$$

$$\text{или } x^* = \arg \min_{x \in D} f(x)$$

Разрешимость задачи оптимизации

$$\begin{array}{l} f(x) \rightarrow \max \\ x \in D \end{array} \quad (4)$$

Задача (4) эквивалентна задаче

$$\begin{array}{l} - f(x) \rightarrow \min \\ x \in D \end{array}$$

Отсюда следует, что можно переносить результаты, полученные для задачи \min на задачи \max и наоборот.

Разрешимость задачи оптимизации

В пространстве R^n множество D – компактно \Leftrightarrow когда оно замкнуто и ограничено (содержится в шаре радиуса $M < +\infty$)

Следующая теорема дает ответ на вопрос о существовании оптимального решения для задачи оптимизации.

Теорема Вейерштрасса. Если f – непрерывная действительная функция на компактном множестве $D \subset R^n$ (D – замкнуто и ограничено) \Rightarrow задача (1) имеет оптимальное решение $x^* \in D$.

Классификация задач оптимизации

1. Задачи безусловной оптимизации.

$$f(x) \rightarrow \min, x \in R^n \quad (5)$$

Условия оптимальности (экстремума)

Необходимое:

Теорема: Пусть функция f дифференцируема в т. $x^* \in R^n$. Если x^* - локальное решение задачи (5), то $f'(x^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) \right) = 0$

Точка x^* - стационарная точка.

Достаточное:

Теорема: Пусть функция f дважды дифференцируема в т. $x^* \in R^n$. Пусть $f'(x^*) = 0$, а матрица $f''(x^*)$ положительно определена $\{ (f''(x^*)h, h) > 0 \text{ для любого } h \in R^n, h \neq 0 \}$. Таким образом, x^* -строгое локальное решение задачи (5).

Классификация задач оптимизации

2. Задачи условной оптимизации.

2.1 Задачи линейного программирования.

Целевая функция – линейна. D задается системой линейных равенств и неравенств.

2.2 Задачи нелинейного программирования.

Целевая функция – нелинейная.

В классе задач нелинейного программирования можно выделить:

- задачи выпуклого программирования.

Выпуклая целевая функция и выпуклое D .

- квадратичного программирования.

Целевая функция имеет квадратичную форму, ограничения – линейные неравенства и равенства.

Задача об оптимальном плане производства продукции

n – видов продукции, $j = \overline{1, n}$;

m – видов ресурсов (сырья), $i = \overline{1, m}$;

a_{ij} – количество ресурса i -го вида, требующегося для производства единицы продукции j -го вида;

b_i – запасы ресурса i -го вида $i = \overline{1, m}$;

c_j – доход (прибыль) от реализации единицы продукции j -го вида.

Необходимо найти такой план производства продукции, при котором достигается максимальная прибыль, для реализации которого достаточно имеющихся ресурсов.

$$f = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$$

Задача о диете

(исторически одна из самых первых)

n – видов кормов, $j = \overline{1, n}$;

m – видов питательных веществ, $i = \overline{1, m}$;

a_{ij} – содержание i -го вида питательного вещества в единице j -го вида корма;

b_i – необходимый минимум i -го питательного вещества в день $i = \overline{1, m}$;

c_j – стоимость единицы j -го вида корма.

Необходимо составить рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

$$f = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$$

Линейное программирование

Определение 1. Задача, состоящая в нахождении наибольшего (наименьшего) значения (1) на множестве точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих системе ограничений вида (2) называется задачей линейного программирования общего вида.

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \xrightarrow{?} \max(\min) \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & R_1 & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & R_2 & b_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & R_n & b_m \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \xrightarrow{?} \max$ – целевая функция;

$R_i, i = \overline{1, m}$ – один из знаков $=, \geq, \leq$;

$c_j, j = \overline{1, n}$ и $a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ – заданные константы.

Линейное программирование

Определение 2. Всякую точку $\bar{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, компонента которой удовлетворяет всем ограничениям системы (2), будем называть допустимой точкой или допустимым решением задачи, или допустимым планом задачи.

Задача линейного программирования состоит, таким образом, в нахождении такой допустимой точки $\bar{\mathbf{x}}^0$ (такого допустимого плана) среди множества допустимых точек, при которой целевая функция принимает ***max(min)*** значение.

Допустимое решение $\bar{\mathbf{x}}^{(0)} = (\mathbf{x}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{x}_n^{(0)})$, доставляющее целевой функции оптимальное значение (оптимум), будем называть оптимальным решением или оптимальным планом задачи.

Геометрическая интерпретация решения двумерной задачи линейного программирования

Рассмотрим двумерную задачу:

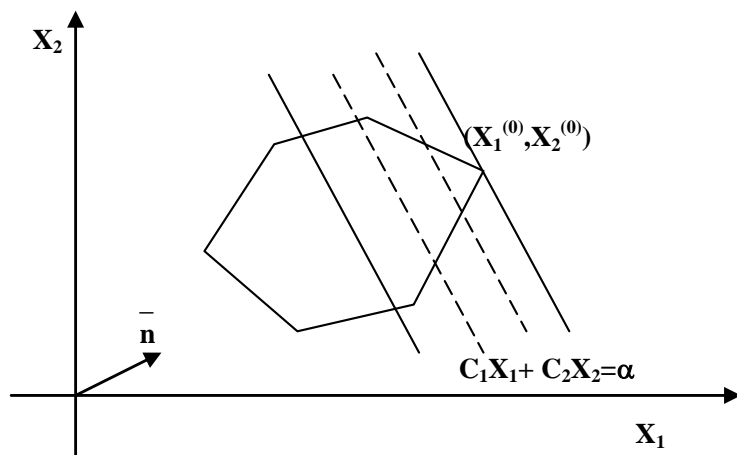
$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \end{cases}$$

Каждое из ограничений $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ определяет в плоскости, с системой координат X_1OX_2 , множество точек лежащих по одну сторону от прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ (т.е. полуплоскость).

Множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют всем ограничениям, т.е. принадлежат сразу всем полуплоскостям, определяемым отдельными ограничениями, будет представлять собой допустимое множество.

Геометрическая интерпретация



Пусть допустимая область задачи оказалась непустой.

Мы хотим найти те точки допустимой области, координаты которых дают целевой функции наибольшее значение.

Построим линию уровня целевой функции $F = c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$.

Перемещая линию уровня в направлении вектора $\mathbf{grad} G = (c_1, c_2) = \bar{n}$, нормального к линии уровня, будем получать в пересечении этой линии с допустимой областью точки, в которых целевая функция принимает новое значение, большее, чем на предшествующих линиях уровня.

Пересечение допустимой области с линией уровня в том ее положении, когда дальнейшее перемещение дает пустое множество, и будет множеством оптимальных точек задачи линейного программирования.

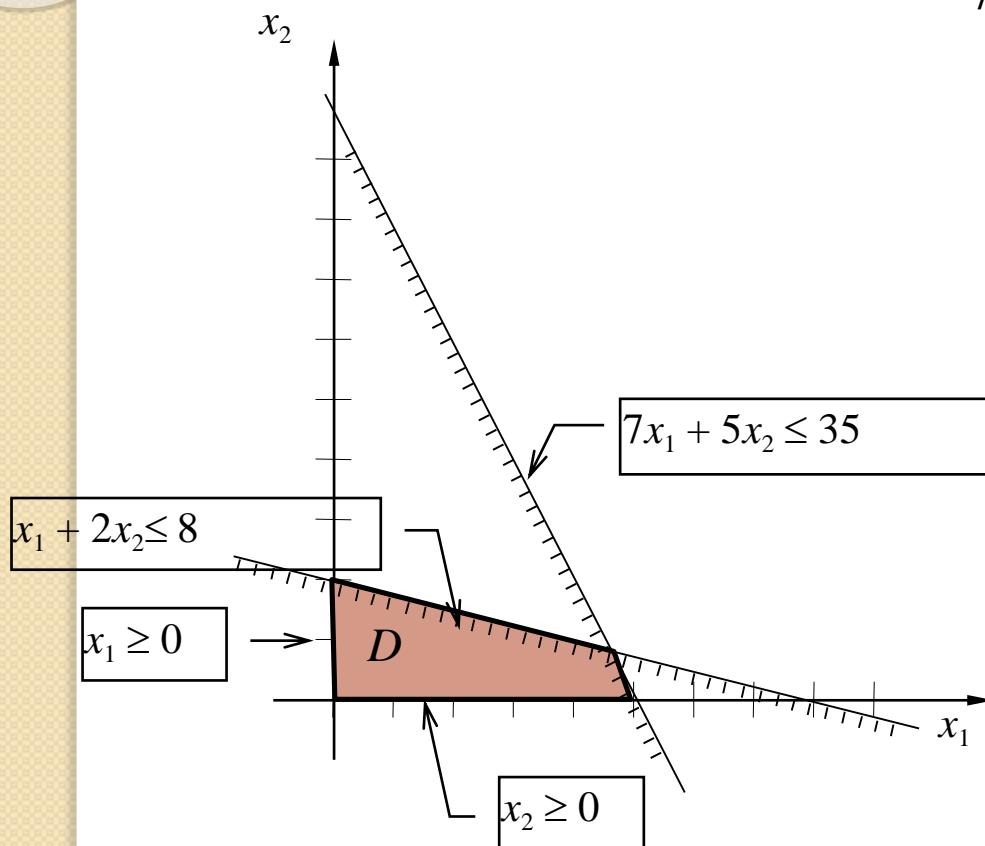
Геометрическая интерпретация ЗЛП

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$7x_1 + 5x_2 \leq 35$$

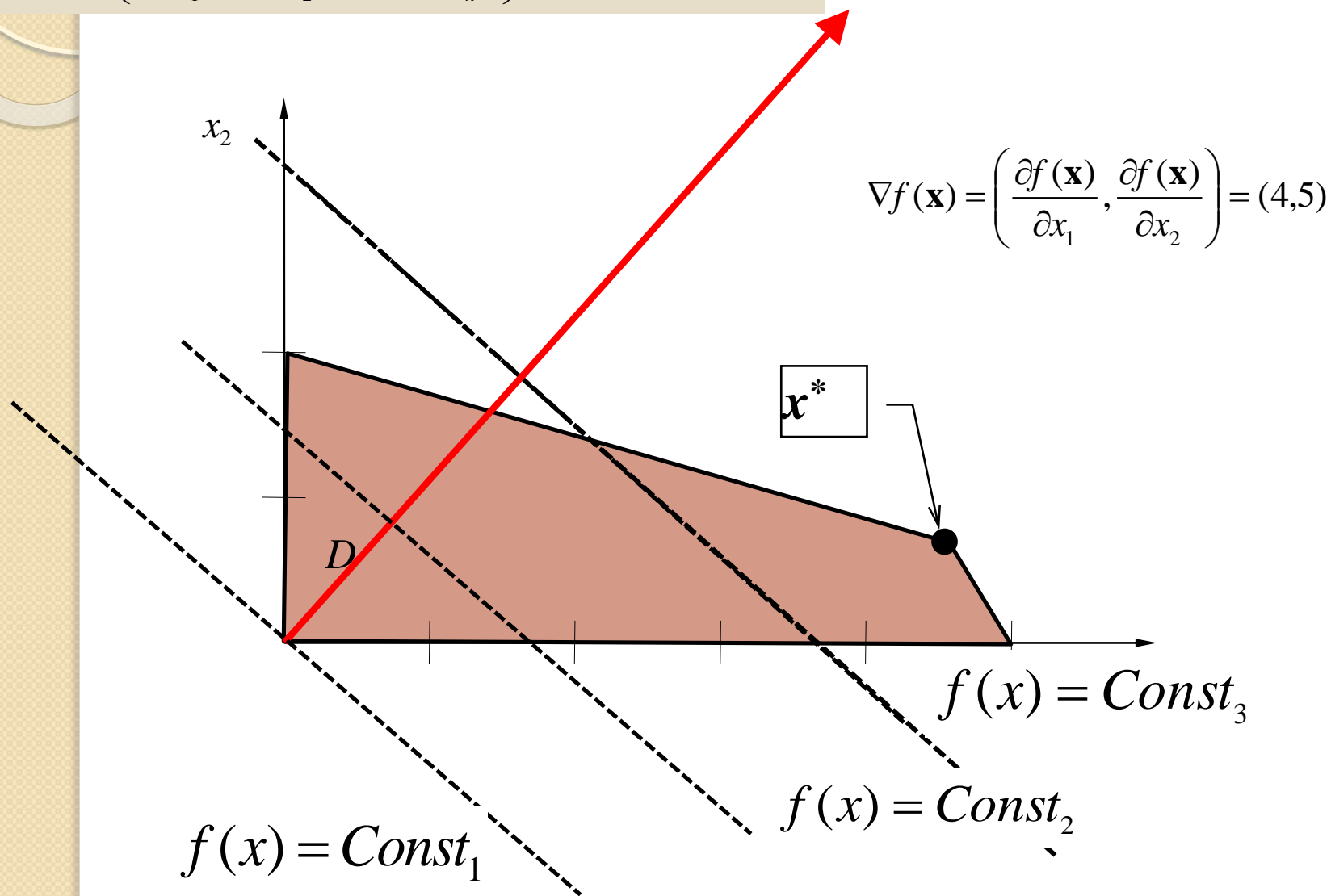
$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$



Геометрическая интерпретация ЗЛП

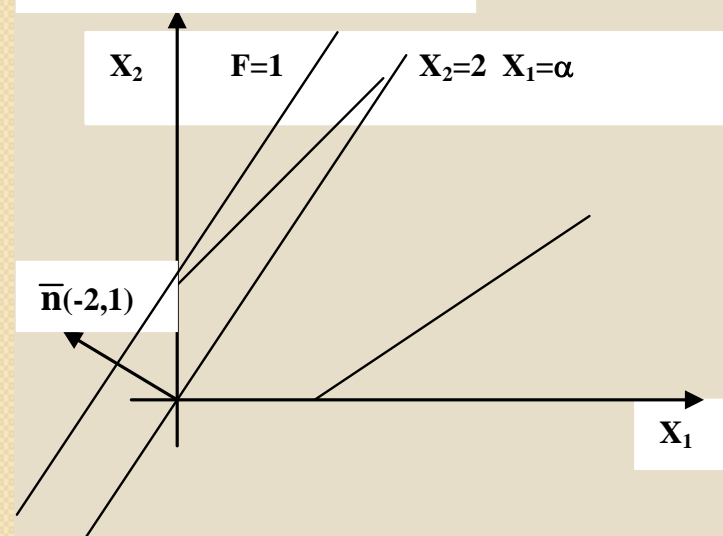
$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right) = (c_1, c_2, \dots, c_n) = \mathbf{c}$$



Геометрическая интерпретация ЗЛП

$$F = -2x_1 + x_2$$

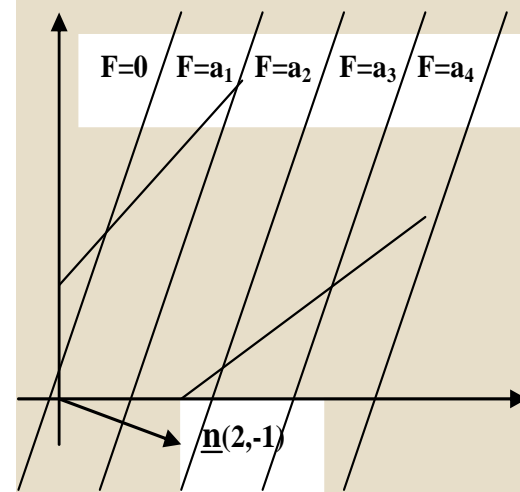
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$F_{\max} = (-2x_1 + x_2) \Big|_{\begin{pmatrix} x_1=0 \\ x_2=1 \end{pmatrix}} = 1$$

$$F = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max$$

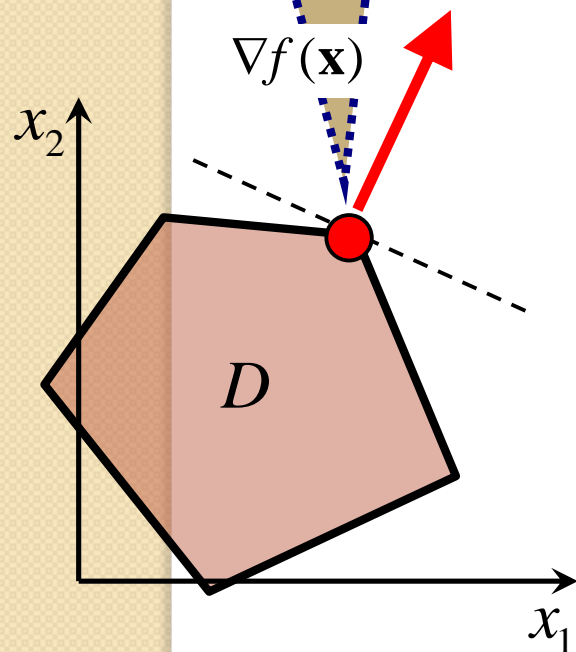
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Функция F не достигает оптимального значения в допустимой области (она не ограничена).

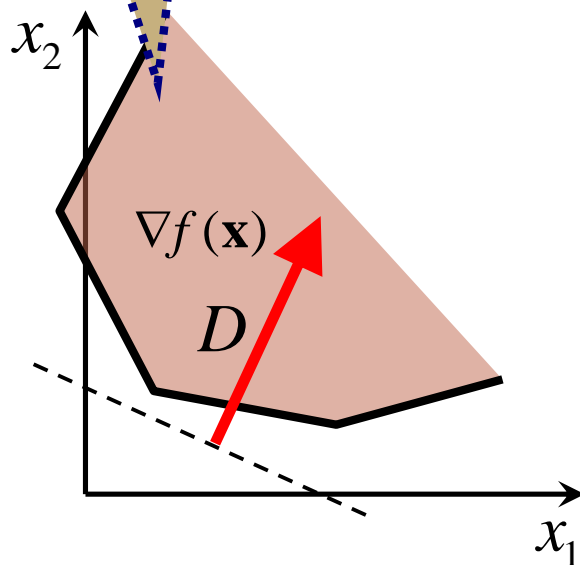
Принципиальные ситуации, возможные при решении задачи линейного программирования

Решение достигается в угловой точке



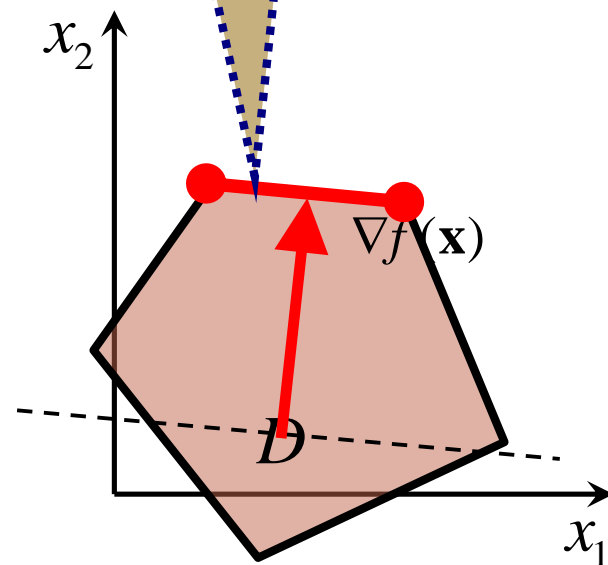
(a)

Целевая функция не ограничена



(b)

Бесконечное множество решений



(c)

Опр. Множество D – точек n -мерного евклидова пространства будем называть выпуклым, если для любых $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ и $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$ и любых $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, таких, что $\alpha + \beta = 1$, точка $x = \alpha x^{(1)} + \beta x^{(2)}$ также принадлежит D .

Опр. Вершиной выпуклого множества в R_n назовем такую точку, которую нельзя представить в виде $x = \alpha x^{(1)} + \beta x^{(2)}$, $\alpha > 0, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, ни при каких $x^{(1)}, x^{(2)}$.

Свойства задачи линейного программирования

- **Свойство 1.** Допустимая область задачи линейного программирования выпукла, если она не пуста.
- **Свойство 2.** Если допустимая область имеет вершины и задача линейного программирования имеет решение, то оно достигается по крайней мере в одной из вершин.
- **Свойство 3.** Множество решений задачи линейного программирования выпукло.
- **Свойство 4.** Если допустимая область ограничена, то задача линейного программирования имеет оптимальное решение.
- **Свойство 5.** Необходимым и достаточным условием существования решения задачи линейного программирования на максимум (минимум) является ограниченность целевой функции сверху (соответственно снизу) в допустимой области.

Ошибки

1. Слайд 2: классификация и разрешимость ЗО в презентации идут в другом порядке
2. Слайд 12: пропущено многоточие между первым и m -ым ограничениями
3. Слайд 13: индекс при R должен принимать значения от 1 до m , индекс при S должен быть j .

исправлено

Ошибки нашли:
Ефимов
Атаханова