1 Задачи целочисленного линейного программирования. Общие подходы к решению.

Общая постановка задачи целочисленного программирования отличается от общей постановки задачи ЛП лишь наличием дополнительного ограничения: требования целочисленности, в соответствии с которым значения всех или части переменных являются целыми числами.

$$f = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad x_j \in \mathbb{N}_0, j = \overline{1,k}, k \le n$$

- $k < n$ – задача частично-целочисленная
- $k = n$ – задача полностью целочисленная

1.1 Методы отсечений

1. Решается задача ЛП, получающаяся из исходной отбрасыванием требования целочисленности $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

   Если найденное решение x^1 является целочисленным, то оно является решением ЗЦЛП.

   Если найденное решение x^1 не является целочисленным, то к ограничениям задачи, решаемой на первом этапе, добавляется ограничение вида: $\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j} \cdot x_j \ge b_{m+1}$, которое:

   (a) Отсекает точку x^1, т.е. $\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j} \cdot x_j^1 < b_{m+1}$

   (b) Сохраняет в допустимом множестве все целочисленные точки допустимого множества исходной задачи. Такое ограничение называется правильным отсечением.

2. На втором этапе находится решение x^2 задачи ЛП с дополнительным ограничением. Если x^2 не является целочисленным, тогда вводится новое правильное отсечение вида $\sum_{j=1}^{n} a_{m+2,j} \cdot x_j \ge b_{m+2}$ и т.д., до тех пор, пока решение очередной задачи ЛП не окажется целочисленным.

1.2 Комбинаторные методы

В основе комбинаторных методов лежит идея перебора всех элементов множества допустимых решений, удовлетворяющих требованию целочисленности, с целью нахождения оптимального решения.

Такими методами являются методы ветвей и границ. Различные методы типа ветвей и границ существенно используют специфику конкретной задачи и заметно отличаются друг от друга.

Все они основаны на последовательном разбиении допустимого множества на подмножества (ветвление) и вычислении оценок (границ), позволяющих отбрасывать подмножества, заведомо не содержащие решений задачи

1.3 Общая идея методов ветвей и границ

Задача:

$$f(x)_{x \in X} \to \min$$

1. В зависимости от специфики задачи выбирается некоторый способ вычисления оценок снизу $d(X')$ функции $f(x)$ на множествах $X' \subset X$: (в частности, может быть $X' = X$)

   $$f(x) \geq d(X'),\; x \in X'.$$

   Оценка снизу часто вычисляется путем релаксации, т.е. замены задачи минимизации $f(x)$ по множеству X' задачей минимизации по некоторому более широкому множеству. (Например, релаксация целочисленной или частично целочисленной задачи может состоять в отбрасывании требования целочисленности.)

2. Выбирается также правило ветвления, состоящее в выборе разветвляемого подмножества X' из числа подмножеств, на которые к данному шагу разбито множество X, и выборе способа разбиения X' на непересекающиеся подмножества.

   Обычно из числа кандидатов на ветвление выбирается множество X' с наименьшей оценкой, поскольку именно в таком множестве естественно искать минимум в первую очередь.

   При этом рассматриваются только такие способы вычисления оценок снизу, в которых оценки для подмножеств, получившихся в результате разветвления X', не меньше $d(X')$.

1.4 Метод отсечений Гомори

1. Полностью целочисленная задача: Рассмотрим полностью целочисленную задачу, представленную в канонической форме:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j,\ i = 1, m$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, n,\ x_j \in \mathbb{N}_0,\ j = 1, n$$

Будем считать, что $c_j,\ a_{ij},\ b_j \in \mathbb{Z}$. Иначе строим правильное отсечение Для этого выбираем любое базисное x_i^*, которому соответствует нецелое значение, и выписываем i-ую строку оптимальной симплекс-таблицы:

$$x_i + \sum_{j \in S} a_{ij}^* x_j = b_i^* \quad (1)$$

где S – множество индексов свободных переменных. Полагая, что в (1) все переменные целочисленные, получаем:

$$\sum_{j \in S} a_{ij}^* x_j - b_i^* = a \in \mathbb{Z} \quad \text{для любых } d_j \in \mathbb{Z} \text{ существует } d \in \mathbb{Z} :$$

$$\sum_{j \in S} (a_{ij}^* - d_j) x_j - (b_i^* - d_i) = d$$

При этом, если считать $d_j = \lfloor a_{ij}^* \rfloor, j \in S, d_i = \lfloor b_i^* \rfloor$, получим:

$$\sum_{j \in S} y_j x_j = d + y_i, d \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

где $y_j = \{a_{ij}^*\}, y_i = \{b_i^*\}$.

$$\sum_{j \in S} \{a_{ij}^*\} x_j = d + \{b_i^*\},\ d \in \mathbb{Z}$$

Т.к. левая часть равенства (2) является неотрицательной $(Y_{ij} \geq 0,\ x_j \geq 0)$, то $d \in \mathbb{N}_0$ и отсечение Гомори:

$$\sum_{j \in S} \{a_{ij}^*\} x_j \geq \{b_i^*\}$$

2. Частично целочисленная задача Из (1) следует, что

$$x_i + \sum_{j\in S} a_{ij}x_j = \lfloor b_i^* \rfloor + \{b_i^*\} \quad (3)$$

$$x_i - \lfloor b_i^* \rfloor = \{b_i^*\} - \sum_{j\in S} a_{ij}^* x_j$$

При этом для переменной x_i, удовлетворяющей требованию $x_i \in \mathbb{N}_0$, выполняется одно из условий: а) $x_i \le \lfloor b_i^* \rfloor$ б) $x_i \ge \lfloor b_i^* \rfloor + 1$ Согласно (3) эти условия могут быть представлены в следующем виде:

$$\sum_{j\in S} a_{ij}^* x_j \ge \{b_i^*\} \quad (4)$$

$$\sum_{j\in S} a_{ij}^* x_j \le \{b_i^*\} - 1 \quad (5)$$

Пусть S^+ — множество значений j: $a_{ij}^* \ge 0$
S^- — множество значений j: $a_{ij}^* < 0 \quad S = S^+ \cup S^-$
Из (4) следует, что

$$\sum_{j\in S^+} a_{ij}^* x_j \ge \{b_i^*\} \quad (6)$$

а (5) может быть преобразовано к следующему неравенству:

$$\sum_{j\in S^-} a_{ij}^* x_j \le \{b_i^*\} - 1 \quad \text{или} \quad \frac{\{b_i^*\}}{\{b_i^*\} - 1} \sum_{j\in S^-} a_{ij}^* x_j \ge \{b_i^*\} \quad (7)$$

Неравенства (4), (5) и следствия из них (6), (7) не могут выполняться одновременно. Но независимо от того, какой случай имеет место, для каждого допустимого решения будет выполняться ограничение:

$$\sum_{j\in S^+} a_{ij}^* x_j + \frac{\{b_i^*\}}{\{b_i^*\} - 1} \sum_{j\in S^-} a_{ij}^* x_j \ge \{b_i^*\} \quad (8)$$

Неравенство (8) определяет новое дополнительное ограничение. Это ограничение получено без учета требования целочисленности для некоторых переменных модели.

$$\sum_{j\in S^+} (a_{ij}^* - \lfloor a_{ij}^* \rfloor) x_j + \frac{\{b_i^*\}}{1 - \{b_i^*\}} \sum_{j\in S^-} (1 - \{a_{ij}^*\}) x_j \ge \{b_i^*\} - \lfloor a_{ij}^* \rfloor$$

$$\sum_{j\in S^+} a_{ij}x_j + \frac{\{b_i^*\}}{\{b_i^*\}-1}\sum_{j\in S^-} a_{ij}x_j \geq \{b_i^*\} \quad (8)$$

(8) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j\in S} \gamma_{ij}x_j \geq \{b_i^*\}$$

для переменных, которые могут быть нецелыми:

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \frac{\{b_i^*\}}{\{b_i^*\}-1}a_{ij}, & \text{если } a_{ij}^* < 0 \\ a_{ij}, & \text{если } a_{ij}^* \geq 0 \end{cases}$$

для переменных, которые могут быть только целыми:

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \{a_{ij}^*\}, & \text{если } \{a_{ij}^*\} \leq \{b_i^*\} \\ \frac{1-\{a_{ij}^*\}}{1-\{b_i^*\}}\{b_i^*\}, & \text{если } \{a_{ij}^*\} > \{b_i^*\} \end{cases}$$