1 Задачи выпуклого программирования. Выпуклое множество. Выпуклая функция

Задача **выпуклого** программирования: Допустимое множество Ω выпуклое, и целевая функция $f_0(x)$ выпуклая.

1.1 Выпуклое множество

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если для $\forall x, y \in X$ и $\forall \alpha \in (0, 1)$ выполняется условие:

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in X.$$

Пересечение любого семейства выпуклых множеств является выпуклым множеством.

1.2 Выпуклая функция

Функция $f(x)$, определённая на выпуклом множестве X, называется выпуклой, если:

$$\forall x, y \in X, \quad \forall \alpha \in (0, 1) \Rightarrow f(\alpha x + (1 - \alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y).$$

Если неравенство выполняется строго, то $f(x)$ строго выпуклая. Пример: квадратичная функция с положительно определённой квадратичной формой.

Если функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ определены на выпуклом множестве и являются выпуклыми, то и функция:

$$f(x) = \min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\}$$

выпуклая.

Для выпуклой функции любая точка локального минимума есть точка наименьшего значения. Для выпуклой и дифференцируемой функции любая стационарная точка (точка с нулевым значением градиента) есть точка наименьшего значения. Строго выпуклая функция может иметь только одну точку наименьшего значения.

1.3 Сильно выпуклая функция

Функция $f(x)$ называется сильно выпуклой, если:

$$\forall x, y \in X, \quad \forall \alpha \in (0, 1), \quad \exists \gamma > 0 \Rightarrow f(\alpha x + (1 - \alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) - \alpha(1 -$$

Сильно выпуклая функция всегда достигает наименьшего значения.