1 Базисное решение ЗЛП

Рассмотрим задачу ЛП в канонической форме:

$$\begin{cases} (c, x) \to \max \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Предполагается, что $m < n$ и что $\operatorname{rang} A = m$. Тогда можно выбрать из этой матрицы базисный минор $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Оставшиеся столбцы матрицы обозначим как $N \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$.

Такая операция разделит неизвестные на базисные и свободные:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad x_N = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

С учётом введённых обозначений ограничения можно описать в виде матричного уравнения:

$$Bx_B + Nx_N = b$$

Матрица B представляет собой базисный минор, поэтому невырождена. Значит $\exists B^{-1}$. Умножим равенство на B^{-1}, чтобы выразить вектор базисных переменных:

$$x_B = B^{-1}(b - Nx_N)$$

Таким образом, вектор

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}(b - Nx_N) \\ x_N \end{pmatrix}$$

удовлетворяет системе ограничений, а при $x \geq 0$ является допустимым решением. Выделим случай $x_N = 0$. Здесь $x = x_B$, и такое решение называется **базисным решением**. Базисное решение не является единственным, так как зависит от выбора минора, однако число базисных решений конечно.