1 Метод динамического программирования решения задачи распределения ресурсов. Постановка задачи. Рекуррентные соотношения Беллмана.

Имеется однородный ресурс в количестве S единиц, который должен быть распределен между N предприятиями. Использование i-ым предприятием x_i единиц ресурса дает доход, определяемый значением нелинейной функции $f_i(x_i)$. Требуется найти распределение ресурсов между предприятиями, обеспечивающее максимальный доход.

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}$$

В данной задаче принятие решений является однократным, а многошаговость вводится формально. Вместо того, чтобы рассматривать допустимые варианты распределения ресурсов между n предприятиями и оценивать их эффективность, будем рассматривать следующий многошаговый процесс:

1. 1 шаг состоит в оценке эффективности выделения ресурса на 1-ое предприятие (первое направление);
2. 2 шаг: выделение ресурса на первые два предприятия;
3. …
4. n-ый шаг: оценка эффективности распределения на n предприятий.

Следовательно, получаем n этапов, на каждом из которых состояние системы описывается объемом ресурса, подлежащим распределению между k предприятиями. Управлениями будут являться решения об объеме ресурса, выделенного k-му предприятию. Задача состоит в выборе таких управлений, при которых целевая функция принимает максимальное значение.

Для применения схемы ДП погружают данную задачу в семейство задач с любым числом шагов $k \leq n$ и любым запасом ресурса $X_C \leq S$.

Пусть $W_i(C)$ — максимальный доход при распределении объема C ресурса между i предприятиями, $i = \overline{1, n-1}$.

$$W_i(C) = \max \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i), \quad k = \overline{1, n},$$

где максимум берется по всем неотрицательным x_i, таким что $x_1 + \ldots + x_k = C$. Следовательно, применение принципа оптимальности приводит к рекуррентным соотношениям:

$$W_i(C) = \max_{0 \le x_i \le C} \{f_i(x_i) + W_{i-1}(C - x_i)\}, \quad i = \overline{2, n-1}, \quad \text{при } \forall \text{ допустимых } C$$

$$W_1(C) = \max_{0 \le x_1 \le C} \{f_1(x_1)\}, \quad \text{при } \forall \text{ допустимых } C \; (0 \le C \le S)$$

Значение функции $W_n(C)$ вычисляется лишь для данного значения $C = S$:

$$W_n(S) = \max_{0 \le x_n \le S} \{f_n(x_n) + W_{n-1}(S - x_n)\}$$

Рекуррентные соотношения позволяют вычислить значения $W_1(C)$, $W_2(C)$, ..., $W_n(C)$ при всех допустимых C и найти оптимальные политики. Оптимальный доход для исходной задачи определяется значением $W_n(S)$.

$\Rightarrow$, зная $W_n(S)$, можно определить x_n^0, соответствующее оптимальному решению:

x_{n-1}^0 определяется из $W_{n-1}(S - x_n^0)$

x_{n-2}^0 определяется из $W_{n-2}(S - x_n^0 - x_{n-1}^0)$

$\vdots$

x_1^0 определяется из $W_1(S - x_n^0 - x_{n-1}^0 - \ldots - x_2^0)$