# 1 Решение транспортной задачи методом потенциалов

## 1.1 Двойственная задача

Рассмотрим двойственную задачу для транспортной задачи:

$$G = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to \max$$

с ограничениями:$u_i + v_j = c_{ij}$, где переменные $u_i, v_j$ не ограничены в знаке.

Из второй теоремы двойственности следует:

$$(u_i^* + v_j^* - c_{ij}) \cdot x_{ij}^* = 0$$

что эквивалентно:

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij} \quad \forall x_{ij}^* \neq 0 \tag{1}$$

$$u_i^* + v_j^* \leq c_{ij} \quad \forall x_{ij}^* = 0 \tag{2}$$

## 1.2 Идея решения транспортной задачи

- На каждой итерации решения транспортной задачи для текущего опорного решения исходной задачи получают одно из соответствующих решений двойственной задачи, используя соотношения (1).
- Далее, для него осуществляют проверку условий (2).
- Если условия выполнены, то текущее опорное решение транспортной задачи является оптимальным.
- Иначе осуществляется переход к новому (лучшему) опорному решению, в котором значение целевой функции будет лучше (меньше), чем в предыдущем.

Для решения транспортной задачи необходимо:

- Находить опорное решение транспортной задачи.
- Иметь правило перехода к новому опорному решению.
- Критерий отсутствия решения не требуется.

## 1.3 Пример решения

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2 \\ u_1 + v_2 = 3 \\ u_1 + v_3 = 4 \\ u_2 + v_3 = 1 \\ u_2 + v_4 = 4 \\ u_3 + v_4 = 7 \\ u_3 + v_5 = 2 \end{cases} \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 2 \\ v_2 = 3 \\ v_3 = 4 \\ u_2 = -3 \\ v_4 = 7 \\ u_3 = 0, v_5 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_i = c_{ij} - v_j \\ v_j = c_{ij} - u_i \end{cases}$$

## 1.4 Проверка на оптимальность

Проверяем выполнение условий оптимальности:

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \Rightarrow d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$$

$$d_{12} = 8 - (-3) - 2 = 9 \geq 0$$

$$d_{13} = 9 - 0 - 2 = 7 \geq 0$$

$$d_{22} = 5 - (-3) - 3 = 5 \geq 0$$

$$d_{23} = 8 - 0 - 3 = 5 \geq 0$$

$$d_{33} = 4 - 0 - 4 = 0 \geq 0$$

$$d_{41} = 2 - 0 - 7 = -5 < 0$$

$$d_{51} = 4 - 0 - 2 = 2 \geq 0$$

$$d_{52} = 1 - (-3) - 2 = 2 \geq 0$$

Так как $d_{41} = -5 < 0$, клетка (4,1) является клеткой пересчета.

## 1.5 Переход к новому опорному решению

Для улучшения плана строим цикл пересчета. Циклом пересчета в таблице транспортной задачи называется ломаная линия, вершины которой находятся в заполненных клетках, в клетке пересчета она имеет начало и конец, а звенья располагаются вдоль строк и столбцов таблицы.

Новый план получаем следующим образом: в клетку пересчета записывается наименьшая из величин поставок, стоящих в минусовых клетках. Одновременно это число вычитается из величин поставок «-» клеток и прибавляется к величинам поставок «+» клеток.

## 1.6 Пример нового плана

| | 1 | 2 | 3 | Запасы |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $2^{60}$ | 8 | 9 | $V_1 = 2$ |
| 2 | $3^{70}$ | 5 | 8 | $V_2 = 3$ |
| 3 | $4^{10-W}$ | $1^{110+W}$ | 4 | $V_3 = 4$ |
| 4 | $2^{W}$ | $4^{70-W}$ | $7^{60}$ | $V_4 = 7$ |
| 5 | 4 | 1 | $2^{100}$ | $V_5 = 2$ |
| Спрос | $u_1 = 0$ | $u_2 = -3$ | $u_3 = 0$ | 480 |

## 1.7 Проверка нового плана на оптимальность

Проверяем выполнение условий (2) для незаполненных клеток:

$$d_{12} = 8 - 2 - 2 = 4 \geq 0$$

$$d_{13} = 9 - 5 - 2 = 2 \geq 0$$

$$d_{22} = 5 - 2 - 3 = 0 \geq 0$$

$$d_{23} = 8 - 5 - 3 = 0 \geq 0$$

$$d_{31} = 4 - 0 + 1 = 5 \geq 0$$

$$d_{33} = 4 - 5 - (-1) = 0 \geq 0$$

$$d_{51} = 4 - 0 - (-3) = 7 \geq 0$$

$$d_{52} = 1 - 2 - (-3) = 2 \geq 0$$

Условия (2) выполнены, следовательно, текущее опорное решение является оптимальным.

$$F^* = 1330$$

$$G^* = 0 \cdot 140 + 2 \cdot 180 + 5 \cdot 160 + 60 \cdot 2 + 70 \cdot 3 - 120 + 2 \cdot 130 - 3 \cdot 100 = 1330$$