1 Метод искусственного базиса поиска начальной опорной точки.

Будем считать, что для задачи $\langle c, x\rangle \to \max, D : Ax = b,\ x \geq 0$ выполнено условие $b \geq 0$.

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \to \max \quad (2)$$

$$\tilde{D} : Ax + y = b,\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

$$\tilde{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : \sum_{j=1}^{n} A_j x_j + \sum_{i=1}^{m} e_i y_i = b,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{(\vec{0}, b) - \text{опорная точка в } D.\right.$$

Целевая функция вспомогательной задачи ограничена сверху нулем (0). Следовательно, эта задача имеет оптимальное решение.

$$G = -y_1 - y_2 - \cdots - y_m \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + 0y_1 + y_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + 0y_1 + \cdots + y_m = b_m \end{cases} \qquad x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

Переменные $y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m$ называют искусственными переменными.

Очевидно, что векторы

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad A_{n+m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют базис для опорного решения $x = (0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$, который называют искусственным базисом.

Утверждение 1. *Пусть (x^*, y^*) — решение задачи (2) и*

$$f^* = -\sum_{i=1}^{m} y_i^*$$

Если $f^* = 0$, то x^* — опорная точка множества D. Если $f^* < 0$, то задача (1) не имеет допустимых точек: множество D — пусто.

Доказательство. 1) Если $f^* = 0$, $y^* = 0$, то $(x, 0)$ — опорная точка множества $\tilde{D}$ и D, следовательно, оптимальный базис вспомогательной задачи можно взять в качестве начального для задачи (1).

2) Если $f^* < 0$, то, если $\exists x \in D \Rightarrow \exists (x, 0) \in \tilde{D}$, что несовместимо с условием $f^* < 0 \Rightarrow$ задача (1) не имеет область допустимых решений.

Решая вспомогательную задачу симплекс-методом, мы найдем оптимальное решение

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \cdots, y_m^{(0)}).$$

Если в этом решении среди искусственных переменных есть положительные, то исходная задача линейного программирования неразрешима, так как её ОДР (область допустимых решений) пуста.

Если же $y_i^{(0)} = 0$, $i = 1, \ldots, m$, то базис, соответствующий оптимальному решению вспомогательной задачи, можно взять в качестве исходного базиса основной задачи. □

Замечание 1. *Проблема зацикливания*

- *Вырожденные планы могут привести к зацикливанию,
т.е. к многократному повторению процесса вычислений, не позволяющему получить оптимальный план.*

- *Можно использовать метод Крено: Элементы строк, имеющие одинаковые наименьшие симплексные отклонения, делятся на предполагаемые разрешающие элементы. За ведущую выбирается та сторона, в которой раньше встретится наименьшее частное при просмотре слева направо по столбцам.*

Бесчисленное множество решений

- *Если в строке Δ оптимального плана находится нуль, принадлежащий свободной переменной, вектор которой не входит в базис, а в столбце этого вектора имеется хотя бы один положительный элемент, то задача имеет бесчисленное множество решений.*

- *Свободные переменные можно ввести в базис, в результате будет получен новый оптимальный план с другим набором базисных переменных.*