1 Лемма о крайних точках

Лемма 1. *Допустимое решение $x = (x_1\, x_2\, \ldots\, x_n)^T$ задачи линейного программирования в канонической форме является точкой множества допустимых решений тогда и только тогда, когда система всех столбцов матрицы A, отвечающих ненулевым значениям x_i, $i = \overline{1, n}$, линейно независима.*

Доказательство. Докажем от противного. Можно считать, что вектор x имеет вид $x = (x_1\, x_2\, \ldots\, x_r\, 0\, \ldots\, 0)^T$, $x_i \neq 0$, $i = \overline{1, r}$.

Если вектор x не является крайней точкой допустимого множества, то $\exists u \neq 0$ вектор и такое число $\delta > 0$, что вектор $x + tu$, $|t| < \delta$, принадлежит допустимому множеству.

Т.е. $A(x + tu) = b$, $x + tu \geq 0$. Последнее неравенство можно записать в виде $x \geq -tu$, тогда имеем, что $\forall i = \overline{r + 1, n}$, $u_i = 0$, т.к. при $t > 0$ имеем $u_i \geq 0$, а при $t < 0$ — $u_i \leq 0$.

Поскольку x принадлежит допустимому множеству, выполняется $Ax = b$. С учётом равенства $A(x + tu) = b$ получаем, что $Au = 0$. С учётом вышепоказанного это выражение записывается так:

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_r u_r = 0 \quad (*)$$

По условию $u \neq 0$, значит по критерию линейной зависимости столбцы $a_1, a_2, \ldots$ линейно зависимы.

Теперь пусть столбцы $a_1, a_2, \ldots, a_r$ линейно зависимы. Тогда $\exists u_1, u_2, \ldots, u_r$ ($\sum\limits_{i=0}^{r} |u_i| \neq 0$), для которых выполняется равенство $(*)$. Рассмотрим вектор $u = (u_1\, \ldots\, u_r\, 0\, \ldots\, 0)^T$. Равенство $(*)$ означает, что $Au = 0$. Следовательно, $A(x + tu) = Ax = b$ для любого t, т.е. вектор $x + tu$ удовлетворяет ограничениям задачи ЛП. Покажем, что при малых значениях t этот вектор удовлетворяет и условию неотрицательности.

Пусть $\rho = \max\limits_{i=\overline{1,r}} |u_i| > 0$. Пусть $\delta = \min\limits_{i=\overline{1,r}} \frac{|x_i|}{\rho} > 0$. При этом при $|t| < \delta$ выполняется:

$$x_i + tu_i \geq x_i - |t||u_i| > x_i - \delta|u_i| \geq x_i - \delta\rho \geq 0$$

Следовательно, $x + u \geq 0$, и вектор x не является крайней точкой допустимого множества. □