1 Графический метод решения задач ЛП. Теорема о количестве решений ЗЛП

Если в задаче ЛП всего две переменных, то для её решения можно использовать геометрическую интерпретацию. В этом случае ограничение типа равенства представляет собой прямую, а каждое ограничение типа неравенства — полуплоскость.

Если задача записана в стандартной форме:

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

то допустимое множество Ω будет пересечением некоторого множества полуплоскостей и будет представлять собой:

- выпуклый многоугольник;
- отрезок;
- незамкнутую область;
- единственную точку;
- пустое множество.

Линии уровня целевой функции составляют семейство параллельных прямых, общим нормальным вектором которых является вектор $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ коэффициентов целевой функции. При перемещении прямой вдоль этого вектора можно найти её крайнее положение, когда она ещё пересекает многоугольник (прямая f^*).

Каждая точка пересечения этой прямой с многоугольником изображает оптимальное решение задачи, а значение функции, соответствующее этой линии уровня, есть максимальное значение целевой функции.

1.1 Теорема

Теорема 1. *Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то оно совпадает с одной (двумя) из угловых точек допустимого множества.*