Задание №2 по дисциплине "Методы оптимизации"

Симплекс-метод

$a)\, F = 5x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 6 \\ -x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \le 10 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0$

Записываем в канонической форме:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 10 \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\, i = \overline{1,5}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\, A_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\, A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Начальный базис: $(A_3,\, A_4,\, A_5)$

базис	$c_б$	B	$c_1 = 5$	$c_2 = 4$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	6	**1**	-2	1	0	0

A_4	0	8	-1	1	0	1	0
A_5	0	10	1	1	0	0	1
Оценки		$F = 0$	$\Delta_1 = 5$	$\Delta_2 = 4$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = 0$	$\Delta_5 = 0$

Опорная точка:

$x_{опор} = (0, 0, 6, 8, 10)$
$F(x_{опор}) = 0$

Симплекс-разности:

$\Delta_1 = 5 - (0) = 5 \ - \ max$
$\Delta_2 = 4 - (0) = 4$
$\Delta_3 = 0$
$\Delta_4 = 0$
$\Delta_5 = 0$

Не все $\Delta_r \leq 0 \implies$решение не оптимально.

Не существует такой $\Delta_r > 0$, что все $x_{ir} \leq 0$, $i = \overline{1, 3} \implies$критерий отсутствия решения не выполняется.

Так как $\Delta_1 -$наибольшая положительная, A_1 вводится в базис.

Так как $\frac{6}{1} = 6, \ \frac{10}{1} = 10, \ 6 < 10$, A_3 выводится из базиса, **1** – разрешающий элемент.

$(A_1, \ A_4, \ A_5)$ – базис

базис	$c_б$	B	$c_1 = 5$	$c_2 = 4$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	5	6	1	-2	1	0	0
A_4	0	14	0	-1	1	1	0
A_5	0	4	0	<u>**3**</u>	-1	0	1
Оценки		$F = 30$	$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = 14$	$\Delta_3 = -5$	$\Delta_4 = 0$	$\Delta_5 = 0$

Опорная точка:

$x_{опор} = (6,\ 0,\ 0,\ 14,\ 4)$
$F(x_{опор}) = 30$

Симплекс-разности:

$\Delta_1 = 0$
$\Delta_2 = 4 - (-10) = 14 - max$
$\Delta_3 = 0 - (5) = -5$
$\Delta_4 = 0$
$\Delta_5 = 0$

Не все $\Delta_r \le 0 \implies$решение не оптимально.

Не существует такой $\Delta_r > 0$, что все $x_{ir} \le 0,\ i = \overline{1,3} \implies$критерий отсутствия решения не выполняется.

Так как $\Delta_2 -$наибольшая положительная, A_2 вводится в базис.

A_5 выводится из базиса, **3** – разрешающий элемент.

$(A_1,\ A_4,\ A_2)$ – базис

базис	$c_б$	B	$c_1 = 5$	$c_2 = 4$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	5	$\frac{26}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
A_4	0	$\frac{46}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
A_2	4	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
Оценки		$F = \frac{146}{3}$	$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = 0$	$\Delta_3 = -\frac{1}{3}$	$\Delta_4 = 0$	$\Delta_5 = -\frac{14}{3}$

Опорная точка:

$$x_{опор} = \left(\frac{26}{3},\ \frac{4}{3},\ 0,\ \frac{46}{3},\ 0\right)$$

$$F(x_{опор}) = \frac{146}{3}$$

Симплекс-разности:

$\Delta_1 = 0$
$\Delta_2 = 0$
$\Delta_3 = 0 - \left(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{3}$
$\Delta_4 = 0$
$\Delta_5 = 0 - \left(\frac{10}{3} + \frac{4}{3}\right) = -\frac{14}{3}$

Все $\Delta_r \leq 0 \implies$решение оптимально.

$x_{max} = \left(\frac{26}{3}, \frac{4}{3}, 0, \frac{46}{3}, 0\right)$
$F_{max} = \frac{146}{3}$

Ответ: $x_{max} = \left(\frac{26}{3}, \frac{4}{3}\right), F_{max} = \frac{146}{3}$

$b) F = 5x_1 + 2x_2 \to \max$

$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \end{cases}$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Канонический вид:

$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 = 30 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 4 \end{cases}$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}$

Ставим вспомогательную задачу:

$G = -y_1 \to max$

$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 = 30 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + y_1 = 4 \end{cases}$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}$, $y_1 \geq 0$

$A_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, A_{y_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Начальный базис: $(A_3,\ A_{y_1})$

базис	$c_б$	B	$c_1 = 0$	$c_2 = 0$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	$c_{y_1} = -1$
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_{y_1}
A_3	0	30	5	-6	1	0	0
A_{y_1}	-1	4	1	**<u>2</u>**	0	-1	1
Оценки		$G = -4$	$\Delta_1 = 1$	$\Delta_2 = 2$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = -1$	$\Delta_{y_1} = 0$

Опорная точка:

$$x_{опор} = (0,\ 0,\ 30,\ 0,\ 4)$$
$$G(x_{опор}) = -4$$

Симплекс-разности:

$$\Delta_1 = 0 - (-1) = 1$$
$$\Delta_2 = 0 - (-2) = 2\ -\ \max$$
$$\Delta_3 = 0$$
$$\Delta_4 = 0 - (1) = -1$$
$$\Delta_{y_1} = 0$$

Не все $\Delta_r \leq 0\ \Longrightarrow$решение не оптимально.

Не существует такой $\Delta_r > 0$, что все $x_{ir} \leq 0,\ i = \overline{1,2}\ \Longrightarrow$критерий отсутствия решения не выполняется.

Так как $\Delta_2 -$наибольшая положительная, A_2 вводится в базис.

A_{y_1} выводится из базиса, **2** – разрешающий элемент.

$(A_3,\ A_2)$ – базис

базис	$c_б$	B	$c_1 = 0$	$c_2 = 0$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	$c_{y_1} = -1$
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_{y_1}
A_3	0	42	8	0	1	-3	3
A_2	0	2	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Оценки	$G=0$	$\Delta_1=0$	$\Delta_2=0$	$\Delta_3=0$	$\Delta_4=0$	$\Delta_{y_1}=-1$

Опорная точка:

$x_{опор}=(0,\ 2,\ 42,\ 0,\ 0)$
$G(x_{опор})=0$

Симплекс-разности:

$\Delta_1=0-(0)=0$
$\Delta_2=0$
$\Delta_3=0$
$\Delta_4=0-(0)=0$
$\Delta_{y_1}=-1$

Все $\Delta_r\le 0 \implies$решение оптимально.

Базис, соответствующий оптимальному решению вспомогательной задачи, нужно взять в качестве исходного базиса основной задачи.

Теперь переходим к исходной целевой функции, используя базис, который приводит вспомогательную задачу к оптимальному решению.

$(A_3,\ A_2)$ – базис

базис	$c_б$	B	$c_1=5$	$c_2=2$	$c_3=0$	$c_4=0$
			A_1	A_2	A_3	A_4
A_3	0	42	8	0	1	-3
A_2	2	2	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$
Оценки		$F=4$	$\Delta_1=4$	$\Delta_2=0$	$\Delta_3=0$	$\Delta_4=1$

Опорная точка:

$x_{опор}=(0,\ 2,\ 42,\ 0)$
$F(x_{опор})=4$

Симплекс-разности:

$\Delta_1 = 5 - (1) = 4 - \ max$
$\Delta_2 = 0$
$\Delta_3 = 0$
$\Delta_4 = 0 - (-1) = 1$

Не все $\Delta_r \leq 0 \implies$решение не оптимально.

Не существует такой $\Delta_r > 0$, что все $x_{ir} \leq 0,\ i = \overline{1,3} \implies$критерий отсутствия решения не выполняется.

Так как Δ_1-наибольшая положительная, A_1 вводится в базис.

Так как $\dfrac{42}{8} = 5.25,\ \dfrac{2}{\frac{1}{2}} = 4,\ 4 < 5.25$, A_2 выводится из базиса, $\dfrac{1}{2}$ – разрешающий элемент.

$(A_3,\ A_1)$ – базис

базис	$c_б$	B	$c_1 = 5$	$c_2 = 2$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$
			A_1	A_2	A_3	A_4
A_3	0	10	0	-16	1	<u>**5**</u>
A_1	5	4	1	2	0	-1
Оценки		$F = 20$	$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = -8$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = 5$

Опорная точка:

$x_{опор} = (4,\ 0,\ 10,\ 0)$
$F(x_{опор}) = 20$

Симплекс-разности:

$\Delta_1 = 0$
$\Delta_2 = 2 - (10) = -8$
$\Delta_3 = 0$
$\Delta_4 = 0 - (-5) = 5 - max$

Не все $\Delta_r \leq 0 \implies$решение не оптимально.

Так как Δ_4-наибольшая положительная, A_4 вводится в базис.

A_3 выводится из базиса, <u>**5**</u> – разрешающий элемент.

$(A_4,\, A_1)$ – базис

базис	$c_б$	B	$c_1 = 5$	$c_2 = 2$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$
			A_1	A_2	A_3	A_4
A_4	0	2	0	$-\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	1
A_1	5	6	1	$-\frac{6}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
Оценки		$F = 30$	$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = 8$	$\Delta_3 = -1$	$\Delta_4 = 0$

Опорная точка:

$x_{опор} = (6,\, 0,\, 0,\, 2)$
$F(x_{опор}) = 30$

Симплекс-разности:

$\Delta_1 = 0$
$\Delta_2 = 2 - (-6) = 8 - max$
$\Delta_3 = 0 - (1) = -1$
$\Delta_4 = 0$

Не все $\Delta_r \le 0 \implies$решение не оптимально.

$\Delta_2 - max$, координаты вектора $A_2 \le 0 \implies$нет оптимального решения, так как целевая функция не ограничена сверху на области допустимых решений.

Ответ: x_{max} не существует, так как целевая функция не ограничена сверху.

c) $F = x_1 + 3x_2 \rightarrow max$

$$\begin{cases} -7x_1 + 4x_2 \ge 28 \\ x_1 - 3x_2 \ge 15 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0$

Канонический вид:

$$\begin{cases} -7x_1 + 4x_2 - x_3 = 28 \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = 15 \end{cases}$$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}$

Ставим вспомогательную задачу:

$G = \ -y_1 - y_2 \rightarrow max$

$$\begin{cases} -7x_1 + 4x_2 - x_3 + y_1 = 28 \\ x_1 - 3x_2 - x_4 + y_2 = 15 \end{cases}$$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4},\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ A_{y_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_{y_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Начальный базис: $(A_{y_1},\ A_{y_2})$

базис	$c_б$	B	$c_1 = 0$	$c_2 = 0$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	$c_{y_1} = -1$	$c_{y_2} = -1$
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_{y_1}	A_{y_2}
A_{y_1}	-1	28	-7	**4**	-1	0	1	0
A_{y_2}	-1	15	1	-3	0	-1	0	1
Оценки		$G = -43$	$\Delta_1 = -6$	$\Delta_2 = 1$	$\Delta_3 = -1$	$\Delta_4 = -1$	$\Delta_{y_1} = 0$	$\Delta_{y_2} = 0$

Опорная точка:

$x_{опор} = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 28,\ 15)$
$G(x_{опор}) = -43$

Симплекс-разности:

$\Delta_1 = 0 - (7 - 1) = -6$
$\Delta_2 = 0 - (-4 + 3) = 1 - max$
$\Delta_3 = 0\ - (1) = -1$
$\Delta_4 = 0 - (1) = -1$
$\Delta_{y_1} = 0$
$\Delta_{y_2} = 0$

Не все $\Delta_r \le 0 \implies$решение не оптимально.

Не существует такой $\Delta_r > 0$, что все $x_{ir} \le 0,\ i = \overline{1,2} \implies$критерий отсутствия решения не выполняется.

Так как Δ_2– наибольшая положительная, A_2 вводится в базис.

A_{y_1} выводится из базиса, **4** – разрешающий элемент.

$(A_2,\ A_{y_2})$ – базис

базис	$c_б$	B	$c_1 = 0$	$c_2 = 0$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	$c_{y_1} = -1$	$c_{y_2} = -1$
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_{y_1}	A_{y_2}
A_2	0	7	$-\frac{7}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
A_{y_2}	-1	36	$-\frac{17}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	-1	$\frac{3}{4}$	1
Оценки		$G = -36$	$\Delta_1 = -\frac{17}{4}$	$\Delta_2 = 0$	$\Delta_3 = -\frac{3}{4}$	$\Delta_4 = -1$	$\Delta_{y_1} = -\frac{1}{4}$	$\Delta_{y_2} = 0$

Опорная точка:

$x_{опор} = (0,\ 7,\ 0,\ 0,\ 0,\ 36)$
$G(x_{опор}) = -36$

Симплекс-разности:

$$\Delta_1 = 0 - \left(\frac{17}{4}\right) = -\frac{17}{4}$$

$$\Delta_2 = 0$$

$$\Delta_3 = 0 - \left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$\Delta_4 = 0 - (1) = -1$$

$$\Delta_{y_1} = -1 - \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$\Delta_{y_2} = 0$$

Так как все $\Delta_i \leq 0,\ i=\overline{1,4},\ y_1,\ y_2,\ \ G=-36<0 \Rightarrow$ изначальная задача не имеет допустимых точек; множество D (область допустимых решений) - пусто.

Ответ: решений нет, так как область допустимых решений пуста.