Работа №4

Задание 3

Для задач № 3, 4 составить математическую модель для прямой и двойственной задачи. Получить решение прямой и двойственной задачи симплекс-методом. Дать экономическую интерпретацию двойственных задач и двойственных оценок.

Задача №3:

Для производства четырех видов изделий (А, В, С) предприятие использует три вида сырья: металл, пластмассу, резину. Запасы сырья, технологические коэффициенты (расход каждого вида сырья на производство единицы каждого изделия) представлены в таблице 2 (варианты 1…20). В ней же указана прибыль от реализации одного изделия каждого вида. Требуется составить такой план выпуска указанных изделий, чтобы обеспечить максимальную прибыль.

Вариант 9					
металл	2	1	3	1	2300
пластмасса	4	1	6	5	1500
резина	4	7	9	10	1000
Прибыль (руб)	8	4	2	1	

Рис. 1: Изображение постановки задачи

Постановка задачи

Прямая задача

Найти оптимальный план производства продукции с максимальной прибылью, для которого достаточно имеющихся ресурсов.

x_1, x_2, x_3, x_4 — количество произведенной продукции.

Целевая функция:

$$F = 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 1x_4 \to \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 1x_4 \leq 2300 \\ 4x_1 + 1x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 1500 \\ 4x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 \leq 1000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Двойственная задача

Оценить каждый из видов сырья, используемого для производства продукции. Оценки, приписываемые каждому виду сырья, должны быть такими, чтобы оценка всего используемого сырья была минимальна, а суммарная оценка сырья, используемого для производства единицы продукции, — не меньше цены единицы продукции. **Целевая функция двойственной задачи**:

$$G = 2300y_1 + 1500y_2 + 1000y_3 \to \text{min}$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 4y_3 \geq 8 \\ 1y_1 + 1y_2 + 7y_3 \geq 4 \\ 3y_1 + 6y_2 + 9y_3 \geq 2 \\ 1y_1 + 5y_2 + 10y_3 \geq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Решим прямую задачу

$$F = 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \to \text{max}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 2300 \\ 4x_1 + 1x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 = 1500 \\ 4x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 = 1000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Basis	C base	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	B	reduced_cost
A5	0	2	1	3	1	1	0	0	2300	1150
A6	0	4	1	6	5	0	1	0	1500	375
A7	0	4	7	9	10	0	0	1	1000	250
	delta	8	4	2	1	0	0	0	0	
	c	8	4	2	1	0	0	0	0	

Basis	C base	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	B
A5	0	0	-2.5	-1.5	-4	1	0	-0.5	1800
A6	0	0	-6	-3	-5	0	1	-1	500
A1	8.0	1	1.75	2.25	2.5	0	0	0.25	250
	delta	0	-10	-16	-19	0	0	-2	2000
	c	8	4	2	1	0	0	0	0

$$x_1 = 250,\ x_5 = 1800,\ x_6 = 500$$

$$\begin{cases} 1x_2 + 3x_3 + 1x_4 = 0 \\ 1x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 0 \\ 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 + 1x_7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_2 + 3x_3 + 1x_4 = 0 \\ 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 + 1x_7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_2 + 3x_3 + -\frac{3}{4}x_3 = 0 \\ x_4 = -\frac{3}{4}x_3 \\ 7x_2 + 9x_3 - \frac{30}{4}x_3 + 1x_7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_2 + \frac{9}{4}x_3 = 0 \\ x_4 = -\frac{3}{4}x_3 \\ 7x_2 + \frac{6}{4}x_3 + 1x_7 = 0 \end{cases}$$

$$F_{\text{max}} = 2000 = 8 \cdot 250 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 2000 + 4x_2 + \frac{5}{4}x_3 \Rightarrow 4x_2 + \frac{5}{4}x_3 = 0$$

$$\begin{cases} 1x_2 + \frac{9}{4}x_3 = 0 \\ 4x_2 + \frac{5}{4}x_3 = 0 \\ 7x_2 + \frac{6}{4}x_3 + 1x_7 = 0 \\ x_4 = -\frac{3}{4}x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 250 \\ x_5 = 1800 \\ x_6 = 500 \\ x_2 = x_3 = x_4 = x_7 = 0 \end{cases}$$

$$F_{\text{max}} = 2000$$

Решим обратную задачу

$$y^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix} = (0, 0, 2)$$

$$G_{\text{min}} = 2300 \cdot 0 + 1500 \cdot 0 + 1000 \cdot 2 = 2000 = F_{\text{max}}$$

Видим, что первый и второй материал в избытке, третий материал дефицитный.

$$\begin{cases} 2\cdot 0+4\cdot 0+4\cdot 2=8 \\ 1\cdot 0+1\cdot 0+7\cdot 2>4 \\ 3\cdot 0+6\cdot 0+9\cdot 2>2 \\ 1\cdot 0+5\cdot 0+10\cdot 2>1 \end{cases}$$

Первое ограничение выполняется как равенство $\Rightarrow$ двойственные оценки ресурсов, используемых для производства единицы продукции А, равны в точности доходам $\Rightarrow$ производить это изделие целесообразно ($x_1^*=250$).

Второе, третье и четвертое ограничения выполняются как больше $\Rightarrow$ производить изделия B, C и S экономически невыгодно

$$x_2^*=0, x_3^*=0, x_4^*=0$$

Анализ устойчивости двойственных оценок

$$x_b^*=x_b+A_b^{-1}\cdot(b+\Delta b)$$

$$A_b^{-1}\cdot(b+\Delta b)=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2300+\Delta b_1 \\ 1500+\Delta b_2 \\ 1000+\Delta b_3 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 1800+\Delta b_1-0.5\Delta b_3 \\ 500+\Delta b_2-\Delta b_3 \\ 250+0.25\Delta b_3 \end{pmatrix}\geq 0$$

$$1)\Delta b_2=\Delta b_3=0\Rightarrow \Delta b_1\in[-1800,+\infty)$$

$$2)\Delta b_1=\Delta b_3=0\Rightarrow \Delta b_2\in[-500,+\infty)$$

$$3)\Delta b_1=\Delta b_2=0\Rightarrow \Delta b_3\in[-1000,500]$$

Предположим: $\Delta b_2=-100; \Delta b_3=-200$

$$\begin{pmatrix} 1800-0.5\cdot(-200) \\ 500-(-200) \\ 250+0.25\cdot(-200) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1900 \\ 700 \\ 200 \end{pmatrix}\geq 0$$

$$x_b^*=\begin{pmatrix} 1800+1900 \\ 500+700 \\ 250+200 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3700 \\ 1200 \\ 450 \end{pmatrix}$$

$$F^*=8\cdot 3700+4\cdot 1200+2\cdot 450+1\cdot 450=5750$$

Видим, что прибыль увеличилась.