1 Опорные точки допустимого множества. Вырожденные и невырожденные опорные точки. Базис невырожденной опорной точки. Теорема о связи опорной точки и вершины ОДР

$$f = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \to \max, x = (x_1, \ldots, x_n)\colon x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Введем в рассмотрение векторы

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, j = \overline{1, n}$$

$$f = (c, x) \to \max$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = b, x \geq 0$$

Задачу ЛП можно трактовать следующим образом: из всех разложений вектора b по векторам $A_1 \ldots A_n$ с неотрицательными коэффициентами требуется выбрать хотя бы одно такое, коэффициенты $x_j, j = \overline{1, n}$, которого доставляют целевой функции f оптимальное значение. Не ограничивая общности, считаем ранг матрицы A равным m и $n > m$ (случай $n = m$ тривиален).

Определение 1. *Ненулевое допустимое решение $x = (x_1, \ldots, x_n)$ называется **опорным**, если векторы A_j, соответствующие отличным от нуля координатам вектора x, линейно независимы.*

Определение 2. *Ненулевое опорное решение назовем **невырожденным**, если оно имеет точно m положительных координат.*

Определение 3. *Если число положительных координат опорного решения меньше m, то оно называется **вырожденным**.*

Определение 4. *Упорядоченный набор из m линейно независимых векторов A_j, соответствующих положительным координатам опорного решения, назовем **базисом**.*

Теорема 1 (Теорема о связи опорного решения и вершины допустимого множества)**.** *Вектор* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *тогда и только тогда является опорным решением задачи, когда точка* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *является вершиной допустимого множества.*

Таким образом, задача нахождения вершины допустимого множества свелась к задаче нахождения опорного решения, а, следовательно, к нахождению базиса.

Будем считать, что исходный базис $A_1, A_2, \ldots, A_m$ дан. Отправляясь от него, покажем, как найти опорное решение. Сформулируем условие оптимальности решения, условие отсутствия решения. Покажем, как перейти к базису, дающему лучшее решение.