Методы оптимизации

Динамическое программирование

Д.В. Домашова

Динамическое программирование

- Это раздел математического программирования, посвященный исследованию многошаговых задач принятия оптимальных решений.

При этом многошаговость задачи:

- либо отражает реальное протекание принятия решений во времени;
- либо вводится в эту задачу искусственно за счет расчленения процесса принятия однократного решения на отдельные этапы, шаги.

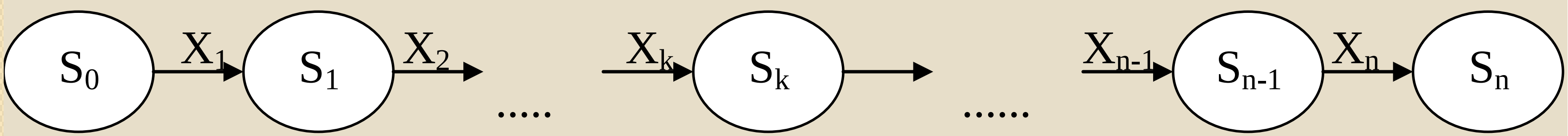
Динамическое программирование

- Цель такого представления состоит в сведении исходной задачи высокой размерности к решению на каждом шаге задачи небольшой размерности (часто одномерной).
- Методы ДП могут применяться к разнообразным задачам планирования и управления, например, управление запасами, замены и ремонта оборудования и др.

Задача управления (общая схема многошагового процесса)

Пусть имеется некоторая система S. В результате управления эта система переводится из некоторого состояния S_0 в конечное состояние S_n.

Предположим, что управление можно разбить на “n” шагов, т.е. решение принимается последовательно на любом шаге, а управление, переводящие систему S из состояния S_0 в S_n, представляет собой совокупность “n” пошаговых управлений.



$X = (X_1, ..., X_n)$ – управление (политика), переводящее систему S из S_0 в S_n, где X_k – управление на к-ом шаге.

Задача управления (общая схема многошагового процесса)

- $X = (X_1, \ldots, X_n)$ – управление (политика), переводящее системуS из S_o в S_n, где
  X_k – управление на к-ом шаге.
- Переменные X_k удовлетворяют некоторым ограничениям: как исходным, так и ограничениям, возникающим за счет ранее сделанных выборов
  $X_1, \ldots, X_{к-1}$.
- Каждое решение приносит определенный выигрыш (доход), при этом качество каждого из управлений X характеризуется соответствующем значением функции $W = F(S_o, X)$ – показатель эффективности.

Условия, которым должна удовлетворять задача, решаемая методом ДП

1. Состояние S_k системы после к-ого шага зависит только от предшествующего состояния S_{k-1} и управления на к-ом шаге X_k и не зависит от предшествующих состояний и управлений. Это требование называется “отсутствием последействия”.

   $S_k = \varphi_k(S_{k-1}, X_k),$ - уравнение состояний $k = \overline{1, n}$ (1)

2. Целевая функция W = F(S_0, X) является аддитивной от показателя эффективности каждого шага

   $$W_k = f_k(S_{k-1}, X_k), k = \overline{1, n}$$

   $$\Rightarrow W = \sum_{k=1}^{n} W_k = \sum_{k=1}^{n} f_k(S_{k-1}, X_k) \quad (2)$$

Последовательность X = (X_1, ..., X_n) допустимых управлений X_k на отдельных шагах называется политикой.

Задача управления (общая схема многошагового процесса)

Задача управления состоит в поиске такой оптимальной стратегии управления (оптимальной политики) $X^* = (X_1^*, ..., X_n^*)$, в результате реализации которой система S переходит из начального состояния S_0 в конечное S_n и при этом функция (2) принимает оптимальное значение (например, max), т.е. $W \to \max$.

Сформулированная задача является многоэтапной. В целом ряде задач многоэтапность не следует из их условий. Однако в целях нахождения решения методом ДП их следует рассматривать как многоэтапные.

Принцип оптимальности Беллмана(1953)

Оптимальная политика обладает тем свойством, что каковы бы ни были

- решение, принятое на 1-ом шаге, и
- состояние системы после первого шага,

последующие решения должны составлять оптимальное относительно этого состояния поведение.

Любое оптимальное решение может быть образовано только оптимальными частными решениями.

Принцип оптимальности Беллмана(1953)

- Для применения принципа оптимальности в конкретных задачах пользуются приемом, часто называемым погружением.
- Он состоит в том, что вместо решения исходной задачи с данным начальным состоянием S_0 и данным числом шагов "n" решается целое семейство задач с произвольным начальным состоянием и с произвольным числом шагов .
- Формализация принципа оптимальности приводит к некоторым функциональным уравнениям, решение которых и составляет основу вычислительной схем ДП.
- Во многих случаях функциональные уравнения ДП представляют собой систему рекуррентных соотношений.
- Их называют уравнениями Беллмана.

Принцип оптимальности Беллмана(1953)

- Вместо исходной задачи с фиксированным числом шагов “n” и начальным состоянием S_0 рассматривается последовательность задач. Полагая последовательно n=1,2,… при различных S, получаем одношаговую, двухшаговую и т.д. задачи.
- На каждом шаге любого состояния системы S_{k-1} решение X_k нужно выбирать “с оглядкой”, т.к. этот выбор влияет на последующее состояние системы S_k и дальнейший процесс управления, зависящий от S_k.
- Но! На последнем шаге можно для любого состояния S_{n-1} планировать локально-оптимально, исходя из соображений этого шага.

Уравнения Беллмана

Согласно принципу оптимальности X_n нужно выбирать так, чтобы для любого состояния S_{n-1} получить максимум целевой функции на этом шаге.

$$S_{n-1} \xrightarrow[f_n(S_{n-1}, X_n)]{X_n} S_n$$

Уравнения Беллмана

Согласно принципу оптимальности X_n нужно выбирать так, чтобы для любого состояния S_{n-1} получить максимум целевой функции на этом шаге.

$$S_{n-1} \xrightarrow[f_n(S_{n-1}, X_n)]{X_n} S_n$$

Обозначим $W_n^*(S_{n-1})$ - максимум целевой функции – показатель эффективности n-ого шага при условии, что к началу последнего шага система S была в произвольном состоянии S_{n-1}, а на последнем шаге управление было оптимальным.

$W_n^*(S_{n-1})$ называется условным max целевой функции на n-ом шаге.

$$W_n^*(S_{n-1}) = \max_{\{X_n\}} f_n(S_{n-1}, X_n) \text{, где} \qquad (3)$$

максимум берется по всем допустимым управлениям X_n.

Уравнения Беллмана

Согласно принципу оптимальности X_n нужно выбирать так, чтобы для любого состояния S_{n-1} получить максимум целевой функции на этом шаге.

$$S_{n-1} \xrightarrow[f_n(S_{n-1}, X_n)]{X_n} S_n$$

Обозначим $W_n^*(S_{n-1})$ - максимум целевой функции – показатель эффективности n-ого шага при условии, что к началу последнего шага система S была в произвольном состоянии S_{n-1}, а на последнем шаге управление было оптимальным.

$W_n^*(S_{n-1})$ называется условным max целевой функции на n-ом шаге.

$$W_n^*(S_{n-1}) = \max_{\{X_n\}} f_n(S_{n-1}, X_n), \text{ где} \qquad (3)$$

максимум берется по всем допустимым управлениям X_n.

Решение X_n, при котором достигается $W_n^*(S_{n-1})$, также зависит от S_{n-1} и называется условным оптимальным управлением на n-ом шаге. Обозначим его $X_n^*(S_{n-1})$.

Решив одномерную задачу локальной оптимизации для всех возможных состояний S_{n-1}, получим две последовательности значений: $W_n^*(S_{n-1})$ и $X_n^*(S_{n-1})$.

Уравнения Беллмана

Согласно принципу оптимальности X_n нужно выбирать так, чтобы для любого состояния S_{n-1} получить максимум целевой функции на этом шаге.

$$S_{n-1} \xrightarrow[f_n(S_{n-1}, X_n)]{X_n} S_n$$

Обозначим $W_n^*(S_{n-1})$ - максимум целевой функции – показатель эффективности n-ого шага при условии, что к началу последнего шага система S была в произвольном состоянии S_{n-1}, а на последнем шаге управление было оптимальным.

$W_n^*(S_{n-1})$ называется условным max целевой функции на n-ом шаге.

$$W_n^*(S_{n-1}) = \max_{\{X_n\}} f_n(S_{n-1}, X_n) \text{, где} \qquad (3)$$

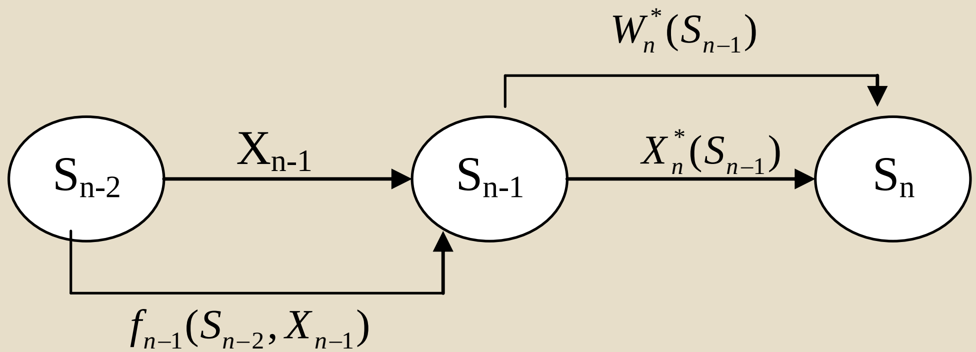
максимум берется по всем допустимым управлениям X_n.

Решение X_n , при котором достигается $W_n^*(S_{n-1})$, также зависит от S_{n-1} и называется условным оптимальным управлением на n-ом шаге. Обозначим его $X_n^*(S_{n-1})$.

Решив одномерную задачу локальной оптимизации для всех возможных состояний S_{n-1}, получим две последовательности значений: $W_n^*(S_{n-1})$ и $X_n^*(S_{n-1})$.

Уравнения Беллмана

Рассмотрим теперь 2-ух шаговую задачу: присоединим к n-ому шагу (n-1)-ый.

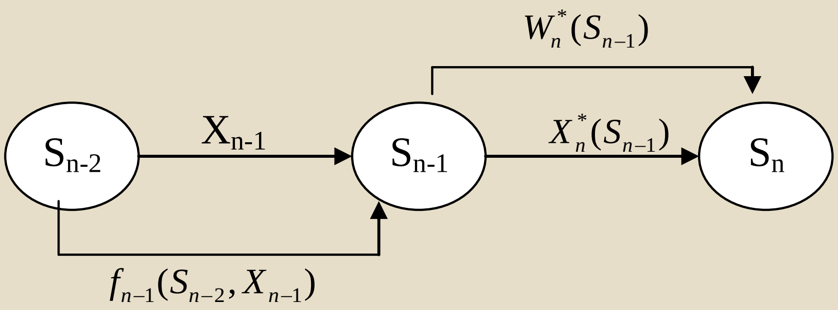


Для любого состояния S_{n-2} и любых произвольных управлений X_{n-1} и оптимальном управлении на n-ом шаге значение целевой функции на 2-ух последних шагах равно:

$$f_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}) + W_n^*(S_{n-1}) \rightarrow \max \qquad (4)$$

Тогда по принципу оптимальности для любого S_{n-2} решение нужно выбирать так, чтобы оно вместе с оптимальным управлением на последнем n-ом шаге приводило бы к максимуму целевой функции на 2-ух последних шагах.

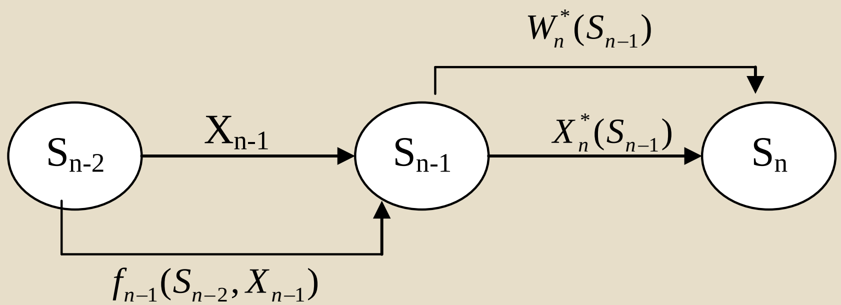
Уравнения Беллмана



Следовательно, ищем максимум (4) по всем допустимым X_{n-1}.

$$W_{n-1}^*(S_{n-2}) = \max_{\{X_{n-1}\}}\left\{f_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}) + W_n^*(S_{n-1})\right\} \qquad (5)$$

Уравнения Беллмана



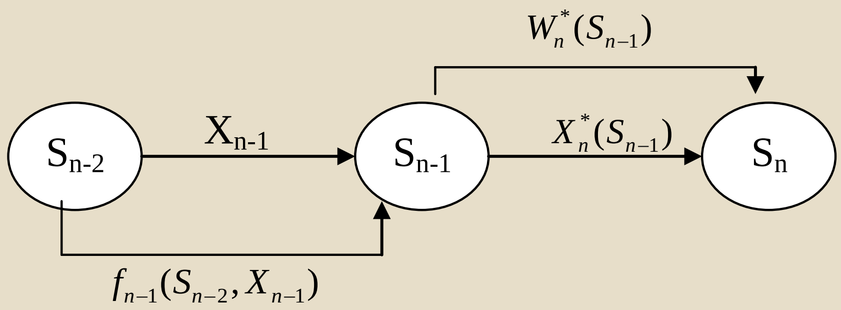
Следовательно, ищем максимум (4) по всем допустимым X_{n-1}.

$$W_{n-1}^*(S_{n-2}) = \max_{\{X_{n-1}\}} \left\{ f_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}) + W_n^*(S_{n-1}) \right\} \qquad (5)$$

Максимум этой суммы зависит от S_{n-2} и равен $W_{n-1}^*(S_{n-2})$, называется условным максимумом целевой функции при оптимальном управлении на 2-ух последних шагах.

Соответствующее $X_{n-1}^*(S_{n-2})$ называется условным оптимальным управлением на (n-1)-ом шаге.

Уравнения Беллмана



Следовательно, ищем максимум (4) по всем допустимым X_{n-1}.

$$W_{n-1}^*(S_{n-2}) = \max_{\{X_{n-1}\}} \left\{ f_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}) + W_n^*(S_{n-1}) \right\} \qquad (5)$$

Максимум этой суммы зависит от S_{n-2} и равен $W_{n-1}^*(S_{n-2})$, называется условным максимумом целевой функции при оптимальном управлении на 2-ух последних шагах.

Соответствующее $X_{n-1}^*(S_{n-2})$ называется условным оптимальным управлением на (n-1)-ом шаге.

$W_{n-1}^*(S_{n-2})$ зависит только от S_{n-2} и X_{n-1}, т.к. S_{n-1} можно найти из уравнения состояния (1): $S_k = \varphi_k(S_{k-1}, X_k)$ при k=n-1:

$S_{n-1} = \varphi_{n-1}(S_{k-2}, X_{n-1})$, подставим вместо S_{n-1} в функцию $W_n^*(S_{n-1})$.

В результате максимизируя только по одной переменной X_{n-1} вновь получаем две последовательности: $W_{n-1}^*(S_{n-2})$ и $X_{n-1}^*(S_{n-2})$.

Уравнения Беллмана

Далее рассматривается 3-х шаговая задача: к 2 –ум последним присоединяется (n-2)-ой шаг и т.д.

Уравнения Беллмана

Далее рассматривается 3-х шаговая задача: к 2 –ум последним присоединяется (n-2)-ой шаг и т.д.

Обозначим $W_k^*(S_{k-1})$ - условный максимум целевой функции, получаемый при оптимальном управлении на n-k+1 шагах, начиная с k-ого до конца, при условии, что к началу k–ого шага система находилась в состоянии S_{k-1}:

$$W_k^*(S_{k-1}) = \max_{\{(X_k,\ldots,X_n)\}} \sum_{i=k}^{n} f_i(S_{i-1}, X_i) \Rightarrow W_{k+1}^*(S_k) = \max_{\{(X_{k+1},\ldots,X_n)\}} \sum_{i=k+1}^{n} f_i(S_{i-1}, X_i)$$

Уравнения Беллмана

Далее рассматривается 3-х шаговая задача: к 2 –ум последним присоединяется (n-2)-ой шаг и т.д.

Обозначим $W_k^*(S_{k-1})$ - условный максимум целевой функции, получаемый при оптимальном управлении на n-k+1 шагах, начиная с k-ого до конца, при условии, что к началу k–ого шага система находилась в состоянии S_{k-1}:

$$W_k^*(S_{k-1}) = \max_{\{(X_k,\dots,X_n)\}} \sum_{i=k}^{n} f_i(S_{i-1}, X_i) \Rightarrow W_{k+1}^*(S_k) = \max_{\{(X_{k+1},\dots,X_n)\}} \sum_{i=k+1}^{n} f_i(S_{i-1}, X_i)$$

Целевая функция на (n-k) последних шагах при любом X_k и оптимальном управлении на последних (n-k) шагах равна:

$$f_k(S_{k-1}, X_k) + W_{k+1}^*(S_k) \to \max$$

По принципу оптимальности X_k выбирается из условия max, т.е.

$$W_k^*(S_{k-1}) = \max_{\{X_{n-1}\}} \left\{ f_k(S_{k-1}, X_k) + W_{k+1}^*(S_k) \right\} \qquad (6)$$

Уравнения Беллмана

Далее рассматривается 3-х шаговая задача: к 2 –ум последним присоединяется (n-2)-ой шаг и т.д.

Обозначим $W_k^*(S_{k-1})$ - условный максимум целевой функции, получаемый при оптимальном управлении на n-k+1 шагах, начиная с k-ого до конца, при условии, что к началу k–ого шага система находилась в состоянии S_{k-1}:

$$W_k^*(S_{k-1}) = \max_{\{(X_k,\dots,X_n)\}} \sum_{i=k}^{n} f_i(S_{i-1}, X_i) \Rightarrow W_{k+1}^*(S_k) = \max_{\{(X_{k+1},\dots,X_n)\}} \sum_{i=k+1}^{n} f_i(S_{i-1}, X_i)$$

Целевая функция на (n-k) последних шагах при любом X_k и оптимальном управлении на последних (n-k) шагах равна:

$$f_k(S_{k-1}, X_k) + W_{k+1}^*(S_k) \to \max$$

По принципу оптимальности X_k выбирается из условия max, т.е.

$$W_k^*(S_{k-1}) = \max_{\{X_{n-1}\}} \left\{ f_k(S_{k-1}, X_k) + W_{k+1}^*(S_k) \right\} \qquad (6)$$

Управление X_k на k-ом шаге, при котором достигается максимум обозначим $X_k^*(S_{k-1})$ - условное оптимальное управление на k-ом шаге.

Вместо S_k из уравнения состояния подставим $S_k = \varphi_k(S_{k-1}, X_k)$.

Уравнение (6) называется уравнением Беллмана.

Это рекуррентное соотношение, позволяющее найти предыдущее значение, зная последующее.

Уравнения Беллмана

Процесс решения уравнений

$$W_n^*(S_{n-1}) = \max_{\{X_{n-1}\}} f_n(S_{n-1}, X_n)$$

$$W_k^*(S_{k-1}) = \max_{\{X_{n-1}\}} \left\{ f_k(S_{k-1}, X_k) + W_{k+1}^*(S_k) \right\}, k = n-1, n-2, \ldots, 1$$

называется <u>условной оптимизацией</u>.

<u>Замечание</u>: Мы описали способ решения ДП, начинающийся с последнего шага. Можно n-ый и 1-ый шаги поменять местами.

Нахождение решения

В результате условной оптимизации получаются две последовательности:

1) $W_n^*(S_{n-1}), W_{n-1}^*(S_{n-2}), \ldots, W_2^*(S_1), W_1^*(S_0)$ - условные максимумы целевой функции на последнем, на двух последних,…, на “n” шагах
2) $X_n^*(S_{n-1}), X_{n-1}^*(S_{n-2}), \ldots, X_2^*(S_1), X_1^*(S_0)$ - условные оптимальные управления на n-ом, (n-1)-ом,…, 1 шагах.

Нахождение решения

В результате условной оптимизации получаются две последовательности:

1) $W_n^*(S_{n-1}), W_{n-1}^*(S_{n-2}), \ldots, W_2^*(S_1), W_1^*(S_0)$ - условные максимумы целевой функции на последнем, на двух последних,…, на “n” шагах
2) $X_n^*(S_{n-1}), X_{n-1}^*(S_{n-2}), \ldots, X_2^*(S_1), X_1^*(S_0)$ - условные оптимальные управления на n-ом, (n-1)-ом,…, 1 шагах.

Используя эти последовательности, можно найти решение задачи при данных «n» и S_0 следующим образом:

по определению $W_1^*(S_0)$ - условный максимум целевой функции за «n» шагов при условии, что к началу 1-ого шага система была в состоянии S_0, т.е. $W_{\max} = W_1^*(S_0)$.

Далее следует использовать последовательность условных оптимальных управлений и уравнения состояний.

Нахождение решения

В результате условной оптимизации получаются две последовательности:

1) $W_n^*(S_{n-1}), W_{n-1}^*(S_{n-2}), \ldots, W_2^*(S_1), W_1^*(S_0)$ - условные максимумы целевой функции на последнем, на двух последних,…, на “n” шагах

2) $X_n^*(S_{n-1}), X_{n-1}^*(S_{n-2}), \ldots, X_2^*(S_1), X_1^*(S_0)$ - условные оптимальные управления на n-ом, (n-1)-ом,…, 1 шагах.

Используя эти последовательности, можно найти решение задачи при данных «n» и S_0 следующим образом:

по определению $W_1^*(S_0)$ - условный максимум целевой функции за «n» шагов при условии, что к началу 1-ого шага система была в состоянии S_0, т.е. $W_{\max} = W_1^*(S_0)$.

Далее следует использовать последовательность условных оптимальных управлений и уравнения состояний.

При фиксированном S_0 получаем $X_1^* = X_1^*(S_0)$. Далее из уравнения состояний находим $S_1^* = \varphi_1(S_0, X_1^*)$ и подставляем это выражение в последовательность условных оптимальных управлений:

$X_2^* = X_2^*(S_1^*)$ и т.д. по следующей цепочке:

$$X_1^* = X_1^*(S_0) \to S_1^* = \varphi_1(S_0, X_1^*) \Rightarrow X_2^* = X_2^*(S_1^*) \to S_2^* = \varphi_2(S_1, X_2^*) \Rightarrow$$

$$X_3^* = X_3^*(S_2^*) \to \ldots \to S_{n-1}^* = \varphi_{n-1}(S_{n-2}, X_{n-1}^*) \Rightarrow X_n^* = X_n^*(S_{n-1}^*)$$

$\Rightarrow$ получаем оптимальное решение задачи ДП: $X_1^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*)$

Задача распределения ресурсов

Имеется однородный ресурс в количестве S единиц, который должен быть распределен между N предприятиями.
Использование i-ым предприятием x_i единиц ресурса дает доход, определяемый значением нелинейной функции $f_i(x_i)$. Требуется найти распределение ресурсов между предприятиями, обеспечивающее максимальный доход.

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$$

Задача распределения ресурсов

В данной задаче принятие решений является однократным, а многошаговость вводится формально. Вместо того, чтобы рассматривать допустимые варианты распределения ресурсов между “n” предприятиями и оценивать их эффективность, будем рассматривать следующий многошаговый процесс:

1 шаг состоит в оценки эффективности выделения ресурса на 1-ое предприятие (первое направление);

2 шаг : выделение ресурса на первые два предприятия;

...

n шаг : оценка эффективности распределения на “n” предприятий.

Следовательно, получаем “n” этапов, на каждом из которых состояние системы описывается объемом ресурса, подлежащим распределению между “k” предприятиями.

Задача распределения ресурсов

В данной задаче принятие решений является однократным, а многошаговость вводится формально. Вместо того, чтобы рассматривать допустимые варианты распределения ресурсов между "n" предприятиями и оценивать их эффективность, будем рассматривать следующий многошаговый процесс:

1 шаг состоит в оценки эффективности выделения ресурса на 1-ое предприятие (первое направление);

2 шаг : выделение ресурса на первые два предприятия;

...

n шаг : оценка эффективности распределения на "n" предприятий.

Следовательно, получаем "n" этапов, на каждом из которых состояние системы описывается объемом ресурса, подлежащим распределению между "k" предприятиями.

Управлениями будут являться решения об объеме ресурса, выделенного k-му предприятию.

Задача состоит в выборе таких управлений, при которых целевая функция принимает максимальное значение.

Задача распределения ресурсов

Для применения схемы ДП погружают данную задачу в семейство задач с любым числом шагов k≤n и любым запасом ресурса $X_C \le S$.

Пусть $W_i(C)$ - максимальный доход при распределении объема C ресурса между i предприятиями, $i = \overline{1, n-1}$

$$W_i(C) = \max \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i), k = \overline{1, n},$$

где максимум берется по всем неотрицательным x_i : $x_1+...+x_k=C$.

Задача распределения ресурсов

Для применения схемы ДП погружают данную задачу в семейство задач с любым числом шагов k≤n и любым запасом ресурса $X_C \le S$.

Пусть $W_i(C)$ - максимальный доход при распределении объема С ресурса между i предприятиями, $i = \overline{1, n-1}$

$$W_i(C) = \max \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i), k = \overline{1, n},$$

где максимум берется по всем неотрицательным x_i : $x_1+...+x_k=C$.

Следовательно, применение принципа оптимальности приводит к рекуррентным соотношениям:

$W_i(C) = \max\limits_{0 \le X_i \le C} \{f_i(x_i) + W_{i-1}(C - x_i)\}, i = \overline{2, n-1},$ при $\forall$ допустимых С

$W_1(C) = \max\limits_{0 \le X_1 \le C} \{f_1(x_1)\}$, при $\forall$ допустимых С ($0 \le C \le S$)

Значение функции $\varphi_n(C)$ вычисляется лишь для данного значения С=S:

$$W_n(S) = \max_{0 \le X_{ni} \le S} \{f_n(x_n) + \varphi_{n-1}(C - x_n)\}$$

Задача распределения ресурсов

Рекуррентные соотношения позволяют вычислить значения $W_1(C)$, $W_2(C)$,…, $W_n(C)$ при всех допустимых С и найти оптимальные политики. Оптимальный доход для исходной задачи определяется значением $W_n(S)$.

Следовательно, зная $W_n(S)$ можно определить x_n^0, соответствующее оптимальному решению:

x_{n-1}^0 определяется из $W_{n-1}(S - x_n^0)$

x_{n-2}^0 определяется из $W_{n-2}(S - x_n^0 - x_{n-1}^0)$

.

.

.

x_1^0 определяется из $W_1(S - x_n^0 - x_{n-1}^0 - \ldots - x_2^0)$

Задача распределения ресурсов (пример)

0	0	0	0	0
1	3	4	5	7
2	8	2	3	10
3	5	6	2	1
4	4	3	3	2

1. $$\varphi_1(x) = \max_{0 \le x_1 \le x} \{ f_1(x_1) \}$$

$\varphi_1(0)=0,\ x_1^0=0$

$\varphi_1(1)=\max\{0,3\}=3,\quad x_1^0=1$

$\varphi_1(2)=\max\{0,3,8\}=8,\ x_1^0=2$

$\varphi_1(3)=\max\{0,3,8,5\}=8,\ x_1^0=2$

$\varphi_1(4)=\max\{0,3,8,5,4\}=8,\ x_1^0=2$

Задача распределения ресурсов (пример)

0	0	0	0	0
1	3	4	5	7
2	8	2	3	10
3	5	6	2	1
4	4	3	3	2

2. $$\varphi_2(x) = \max_{0 \le x2 \le x} \{ f_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2) \}$$

Задача распределения ресурсов (пример)

0	0	0	0	0
1	3	4	5	7
2	8	2	3	10
3	5	6	2	1
4	4	3	3	2

2. $$\varphi_2(x) = \max_{0 \le x2 \le x} \{ f_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2) \}$$

$\varphi_2(0)=0,\ x_2^0=0$

$$\varphi_2(1) = \max \begin{Bmatrix} f_2(1) & +\varphi_1(0) \\ f_2(0) & +\varphi_1(1) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 4+0 \\ 0+3 \end{Bmatrix} = 4,\ x_2^0 = 1$$

Задача распределения ресурсов (пример)

0	0	0	0	0
1	3	4	5	7
2	8	2	3	10
3	5	6	2	1
4	4	3	3	2

2. $$\varphi_2(x) = \max_{0 \le x2 \le x} \{ f_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2) \}$$

$\varphi_2(0)=0,\ x_2^0=0$

$$\varphi_2(1) = \max \begin{Bmatrix} f_2(1) + \varphi_1(0) \\ f_2(0) + \varphi_1(1) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 4+0 \\ 0+3 \end{Bmatrix} = 4,\ x_2^0 = 1$$

$$\varphi_2(2) = \max \begin{Bmatrix} f_2(2) + \varphi_1(0) \\ f_2(1) + \varphi_1(1) \\ f_2(0) + \varphi_1(2) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 2+0 \\ 4+3 \\ 0+8 \end{Bmatrix} = 8,\ x_2^0 = 0$$

Задача распределения ресурсов (пример)

0	0	0	0	0
1	3	4	5	7
2	8	2	3	10
3	5	6	2	1
4	4	3	3	2

2. $$\varphi_2(x) = \max_{0 \le x2 \le x} \{f_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)\}$$

$\varphi_2(0)=0,\ x_2^0=0$

$$\varphi_2(1) = \max\begin{Bmatrix} f_2(1) & +\varphi_1(0) \\ f_2(0) & +\varphi_1(1) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 4+0 \\ 0+3 \end{Bmatrix} = 4,\ x_2^0 = 1$$

$$\varphi_2(2) = \max\begin{Bmatrix} f_2(2)+\varphi_1(0) \\ f_2(1)+\varphi_1(1) \\ f_2(0)+\varphi_1(2) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 2+0 \\ 4+3 \\ 0+8 \end{Bmatrix} = 8,\ x_2^0 = 0$$

$$\varphi_2(3) = \max\begin{Bmatrix} f_2(3)+\varphi_1(0) \\ f_2(2)+\varphi_1(1) \\ f_2(1)+\varphi_1(2) \\ f_2(0)+\varphi_1(3) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 6+0 \\ 2+3 \\ 4+8 \\ 0+8 \end{Bmatrix} = 12,\ x_2^0 = 1$$

Задача распределения ресурсов (пример)

0	0	0	0	0
1	3	4	5	7
2	8	2	3	10
3	5	6	2	1
4	4	3	3	2

2. $$\varphi_2(x) = \max_{0 \le x2 \le x} \{f_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)\}$$

$\varphi_2(0)=0,\ x_2^0=0$

$$\varphi_2(1) = \max\begin{Bmatrix} f_2(1) + \varphi_1(0) \\ f_2(0) + \varphi_1(1) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 4+0 \\ 0+3 \end{Bmatrix} = 4,\ x_2^0 = 1$$

$$\varphi_2(2) = \max\begin{Bmatrix} f_2(2) + \varphi_1(0) \\ f_2(1) + \varphi_1(1) \\ f_2(0) + \varphi_1(2) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 2+0 \\ 4+3 \\ 0+8 \end{Bmatrix} = 8,\ x_2^0 = 0$$

$$\varphi_2(3) = \max\begin{Bmatrix} f_2(3) + \varphi_1(0) \\ f_2(2) + \varphi_1(1) \\ f_2(1) + \varphi_1(2) \\ f_2(0) + \varphi_1(3) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 6+0 \\ 2+3 \\ 4+8 \\ 0+8 \end{Bmatrix} = 12,\ x_2^0 = 1$$

$$\varphi_2(4) = \max\begin{Bmatrix} f_2(4) + \varphi_1(0) \\ f_2(3) + \varphi_1(1) \\ f_2(2) + \varphi_1(2) \\ f_2(1) + \varphi_1(3) \\ f_2(0) + \varphi_1(4) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 3+0 \\ 6+3 \\ 2+8 \\ 4+8 \\ 0+8 \end{Bmatrix} = 12,\ x_2^0 = 1$$

Задача распределения ресурсов (пример)

0	0	0	0	0
1	3	4	5	7
2	8	2	3	10
3	5	6	2	1
4	4	3	3	2

3. $$\varphi_3(x) = \max_{0 \le x3 \le x} \{ f_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3) \}$$

Задача распределения ресурсов (пример)

0	0	0	0	0
1	3	4	5	7
2	8	2	3	10
3	5	6	2	1
4	4	3	3	2

3. $$\varphi_3(x) = \max_{0 \le x3 \le x} \{ f_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3) \}$$

$\varphi_3(0)=0,\ x_3^{\,0}=0$

$$\varphi_3(1) = \max \begin{Bmatrix} f_3(1) & +\varphi_2(0) \\ f_3(0) & +\varphi_2(1) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 5+0 \\ 0+4 \end{Bmatrix} = 5,\ x_3^0 = 1$$

Задача распределения ресурсов (пример)

0	0	0	0	0
1	3	4	5	7
2	8	2	3	10
3	5	6	2	1
4	4	3	3	2

3. $$\varphi_3(x) = \max_{0 \le x3 \le x} \{ f_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3) \}$$

$\varphi_3(0)=0,\ x_3^0=0$

$$\varphi_3(1) = \max \begin{Bmatrix} f_3(1) & +\varphi_2(0) \\ f_3(0) & +\varphi_2(1) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 5+0 \\ 0+4 \end{Bmatrix} = 5,\ x_3^0 = 1$$

$$\varphi_3(2) = \max \begin{Bmatrix} f_3(2)+\varphi_2(0) \\ f_3(1)+\varphi_2(1) \\ f_3(0)+\varphi_2(2) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 3+0 \\ 5+4 \\ 0+8 \end{Bmatrix} = 9,\ x_3^0 = 1$$

Задача распределения ресурсов (пример)

0	0	0	0	0
1	3	4	5	7
2	8	2	3	10
3	5	6	2	1
4	4	3	3	2

3. $$\varphi_3(x) = \max_{0 \le x3 \le x} \{ f_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3) \}$$

$\varphi_3(0)=0,\ x_3^0=0$

$$\varphi_3(1) = \max \begin{Bmatrix} f_3(1) & +\varphi_2(0) \\ f_3(0) & +\varphi_2(1) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 5+0 \\ 0+4 \end{Bmatrix} = 5,\ x_3^0 = 1$$

$$\varphi_3(2) = \max \begin{Bmatrix} f_3(2) + \varphi_2(0) \\ f_3(1) + \varphi_2(1) \\ f_3(0) + \varphi_2(2) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 3+0 \\ 5+4 \\ 0+8 \end{Bmatrix} = 9,\ x_3^0 = 1$$

$$\varphi_3(3) = \max \begin{Bmatrix} f_3(3) + \varphi_2(0) \\ f_3(2) + \varphi_2(1) \\ f_3(1) + \varphi_2(2) \\ f_3(0) + \varphi_2(3) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 2+0 \\ 3+4 \\ 5+8 \\ 0+12 \end{Bmatrix} = 13,\ x_3^0 = 1$$

Задача распределения ресурсов (пример)

0	0	0	0	0
1	3	4	5	7
2	8	2	3	10
3	5	6	2	1
4	4	3	3	2

3. $$\varphi_3(x) = \max_{0 \le x3 \le x} \{ f_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3) \}$$

$\varphi_3(0)=0,\ x_3^0=0$

$$\varphi_3(1) = \max \begin{Bmatrix} f_3(1) + \varphi_2(0) \\ f_3(0) + \varphi_2(1) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 5+0 \\ 0+4 \end{Bmatrix} = 5,\ x_3^0 = 1$$

$$\varphi_3(2) = \max \begin{Bmatrix} f_3(2) + \varphi_2(0) \\ f_3(1) + \varphi_2(1) \\ f_3(0) + \varphi_2(2) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 3+0 \\ 5+4 \\ 0+8 \end{Bmatrix} = 9,\ x_3^0 = 1$$

$$\varphi_3(3) = \max \begin{Bmatrix} f_3(3) + \varphi_2(0) \\ f_3(2) + \varphi_2(1) \\ f_3(1) + \varphi_2(2) \\ f_3(0) + \varphi_2(3) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 2+0 \\ 3+4 \\ 5+8 \\ 0+12 \end{Bmatrix} = 13,\ x_3^0 = 1$$

$$\varphi_3(4) = \max \begin{Bmatrix} f_3(4) + \varphi_2(0) \\ f_3(3) + \varphi_2(1) \\ f_3(2) + \varphi_2(2) \\ f_3(1) + \varphi_2(3) \\ f_3(0) + \varphi_2(4) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 3+0 \\ 2+4 \\ 3+8 \\ 5+12 \\ 0+12 \end{Bmatrix} = 17,\ x_3^0 = 1$$

Задача распределения ресурсов (пример)

$$\begin{array}{c|cccc|}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 4 & 5 & 7 \\
2 & 8 & 2 & 3 & 10 \\
3 & 5 & 6 & 2 & 1 \\
4 & 4 & 3 & 3 & 2
\end{array}$$

4 $\varphi_4(x) = \max\limits_{0 \le x4 \le x} \{ f_4(x_4) + \varphi_4(x - x_4) \}$

Задача распределения ресурсов (пример)

$$\begin{array}{c|cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} \\
1 & 3 & 4 & 5 & 7 & \\
2 & 8 & 2 & 3 & 10 & \\
3 & 5 & 6 & 2 & 1 & \\
4 & 4 & 3 & 3 & 2 &
\end{array}$$

$$\varphi_4(x) = \max_{0 \le x4 \le x} \{ f_4(x_4) + \varphi_4(x - x_4) \}$$

$$\varphi_4(0)=0$$

Задача распределения ресурсов (пример)

0	0	0	0	0	**4**
1	3	4	5	7	
2	8	2	3	10	
3	5	6	2	1	
4	4	3	3	2	

$$\varphi_4(x) = \max_{0 \le x4 \le x} \{f_4(x_4) + \varphi_4(x - x_4)\}$$

$\varphi_4(0)=0$

$$\varphi_4(1) = \max_{X4} \begin{Bmatrix} f_4(1) & +\varphi_3(0) \\ f_4(0) & +\varphi_3(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7+0 \\ 0+3 \end{Bmatrix} = 7, x_4^0 = 1$$

Задача распределения ресурсов (пример)

0	0	0	0	0
1	3	4	5	7
2	8	2	3	10
3	5	6	2	1
4	4	3	3	2

4

$$\varphi_4(x) = \max_{0 \le x4 \le x} \{ f_4(x_4) + \varphi_4(x - x_4) \}$$

$$\varphi_4(0)=0$$

$$\varphi_4(1) = \max_{X4} \begin{Bmatrix} f_4(1) + \varphi_3(0) \\ f_4(0) + \varphi_3(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7+0 \\ 0+3 \end{Bmatrix} = 7, x_4^0 = 1$$

$$\varphi_4(2) = \max_{X4} \begin{Bmatrix} f_4(2) + \varphi_3(0) \\ f_4(1) + \varphi_3(1) \\ f_4(0) + \varphi_3(2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10+0 \\ 7+5 \\ 0+9 \end{Bmatrix} = 12, x_4^0 = 0$$

Задача распределения ресурсов (пример)

0	0	0	0	0	**4**
1	3	4	5	7	
2	8	2	3	10	
3	5	6	2	1	
4	4	3	3	2	

$$\varphi_4(x) = \max_{0 \le x4 \le x} \{ f_4(x_4) + \varphi_4(x - x_4) \}$$

$$\varphi_4(0) = 0$$

$$\varphi_4(1) = \max_{X4} \begin{Bmatrix} f_4(1) & + \varphi_3(0) \\ f_4(0) & + \varphi_3(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7+0 \\ 0+3 \end{Bmatrix} = 7, x_4^0 = 1$$

$$\varphi_4(2) = \max_{X4} \begin{Bmatrix} f_4(2) + \varphi_3(0) \\ f_4(1) + \varphi_3(1) \\ f_4(0) + \varphi_3(2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10+0 \\ 7+5 \\ 0+9 \end{Bmatrix} = 12, x_4^0 = 0$$

$$\varphi_4(3) = \max_{X4} \begin{Bmatrix} f_4(3) + \varphi_3(0) \\ f_4(2) + \varphi_3(1) \\ f_4(1) + \varphi_3(2) \\ f_4(0) + \varphi_3(3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1+0 \\ 10+5 \\ 7+9 \\ 0+13 \end{Bmatrix} = 16, x_4^0 = 1$$

Задача распределения ресурсов (пример)

0	0	0	0	0	**4**
1	3	4	5	7	
2	8	2	3	10	
3	5	6	2	1	
4	4	3	3	2	

$$\varphi_4(x) = \max_{0 \le x4 \le x} \{ f_4(x_4) + \varphi_4(x - x_4) \}$$

$$\varphi_4(0) = 0$$

$$\varphi_4(1) = \max_{X4} \begin{Bmatrix} f_4(1) + \varphi_3(0) \\ f_4(0) + \varphi_3(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7+0 \\ 0+3 \end{Bmatrix} = 7, \boldsymbol{x}_4^0 = 1$$

$$\varphi_4(2) = \max_{X4} \begin{Bmatrix} f_4(2) + \varphi_3(0) \\ f_4(1) + \varphi_3(1) \\ f_4(0) + \varphi_3(2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10+0 \\ 7+5 \\ 0+9 \end{Bmatrix} = 12, \boldsymbol{x}_4^0 = 0$$

$$\varphi_4(3) = \max_{X4} \begin{Bmatrix} f_4(3) + \varphi_3(0) \\ f_4(2) + \varphi_3(1) \\ f_4(1) + \varphi_3(2) \\ f_4(0) + \varphi_3(3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1+0 \\ 10+5 \\ 7+9 \\ 0+13 \end{Bmatrix} = 16, \boldsymbol{x}_4^0 = 1$$

$$\varphi_4(4) = \max_{X4} \begin{Bmatrix} f_4(4) + \varphi_3(0) \\ f_4(3) + \varphi_3(1) \\ f_4(2) + \varphi_3(2) \\ f_4(1) + \varphi_3(3) \\ f_4(0) + \varphi_3(4) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2+0 \\ 1+5 \\ 10+9 \\ 7+13 \\ 0+17 \end{Bmatrix} = 20, \boldsymbol{x}_4^0 = 1$$

Задача распределения ресурсов (пример)

0	0	0	0	0	**4**
1	3	4	5	7	
2	8	2	3	10	
3	5	6	2	1	
4	4	3	3	2	

$$\varphi_4(x) = \max_{0\le x4 \le x}\{f_4(x_4) + \varphi_4(x - x_4)\}$$

$\varphi_4(0)=0$

$$\varphi_4(1) = \max_{X4}\begin{Bmatrix} f_4(1) & +\varphi_3(0) \\ f_4(0) & +\varphi_3(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7+0 \\ 0+3 \end{Bmatrix} = 7, x_4^0 = 1$$

$$\varphi_4(2) = \max_{X4}\begin{Bmatrix} f_4(2)+\varphi_3(0) \\ f_4(1)+\varphi_3(1) \\ f_4(0)+\varphi_3(2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10+0 \\ 7+5 \\ 0+9 \end{Bmatrix} = 12, x_4^0 = 0$$

$$\varphi_4(3) = \max_{X4}\begin{Bmatrix} f_4(3)+\varphi_3(0) \\ f_4(2)+\varphi_3(1) \\ f_4(1)+\varphi_3(2) \\ f_4(0)+\varphi_3(3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1+0 \\ 10+5 \\ 7+9 \\ 0+13 \end{Bmatrix} = 16, x_4^0 = 1$$

$$\varphi_4(4) = \max_{X4}\begin{Bmatrix} f_4(4)+\varphi_3(0) \\ f_4(3)+\varphi_3(1) \\ f_4(2)+\varphi_3(2) \\ f_4(1)+\varphi_3(3) \\ f_4(0)+\varphi_3(4) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2+0 \\ 1+5 \\ 10+9 \\ 7+13 \\ 0+17 \end{Bmatrix} = 20, x_4^0 = 1$$

4-му – X_4^0**=** 1 $\Rightarrow$ *S=S-1=3* (осталось 3) $\Rightarrow$ φ_3**(3)** при X_3^0**=1** $\Rightarrow$ 3-му – 1 $\Rightarrow$ *S=S-1=2* (осталось 2) $\Rightarrow$ φ_3**(2)** при X_2^0**=0**$\Rightarrow$ *S=S-1=2* (осталось 2) $\Rightarrow$ φ_1**(2)** при X_1^0**=2**

X^0= $(2,0,1,1)$ Прибыль=$8+5+7=20$

Задача о рюкзаке

Имеется рюкзак грузоподъемностью W.

P_i – вес одного предмета i-ого типа
V_i – стоимость (ценность) одного предмета i-ого типа
X_i – число предметов i-ого типа, которые будут загружаться на транспортировочное средство.

Требуется заполнить его грузом, состоящим из предметов “N” различных типов таким образом, чтобы стоимость (ценность) всего груза была максимальной.

Задача о рюкзаке

Имеется рюкзак грузоподъемностью W.

P_i – вес одного предмета i-ого типа
V_i – стоимость (ценность) одного предмета i-ого типа
X_i – число предметов i-ого типа, которые будут загружаться на транспортировочное средство.

Требуется заполнить его грузом, состоящим из предметов “N” различных типов таким образом, чтобы стоимость (ценность) всего груза была максимальной.

$$W(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i V_i \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i P_i \le S, x_i = 0,1,... - \textit{целочисленное}$$

Задача о рюкзаке

Имеется рюкзак грузоподъемностью W.

P_i – вес одного предмета i-ого типа
V_i – стоимость (ценность) одного предмета i-ого типа
X_i – число предметов i-ого типа, которые будут загружаться на транспортировочное средство.

Требуется заполнить его грузом, состоящим из предметов “N” различных типов таким образом, чтобы стоимость (ценность) всего груза была максимальной.

$$W(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i V_i \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i P_i \le S, x_i = 0,1,\ldots - \textit{целочисленное}$$

Задача о рюкзаке

Решение задачи разбивается на “n” этапов, на каждом из которых определяется максимальная стоимость груза, состоящего из предметов:1-го типа (1-ый этап); 1-го и 2-го типов (2-ой этап) и т.д.

1 шаг состоит в оценке ценности груза, состоящего из предметов 1-ого типа (первого вида);

2 шаг : состоит в оценке ценности груза, состоящего из предметов 2-ух типов (первого и второго вида);

...

n шаг : состоит в оценке ценности груза, состоящего из предметов всех типов.

Задача о рюкзаке

Решение задачи разбивается на “n” этапов, на каждом из которых определяется максимальная стоимость груза, состоящего из предметов:1-го типа (1-ый этап); 1-го и 2-го типов (2-ой этап) и т.д.

1 шаг состоит в оценке ценности груза, состоящего из предметов 1-ого типа (первого вида);

2 шаг : состоит в оценке ценности груза, состоящего из предметов 2-ух типов (первого и второго вида);

...

n шаг : состоит в оценке ценности груза, состоящего из предметов всех типов.

Рекуррентное уравнение Беллмана для задачи о рюкзаке

$W_i(C)$ - максимальная стоимость груза, состоящего из предметов типа $k=\overline{1,i}$

$$W_i(C) = \max_{0 \le X_i \le \left[\frac{C}{P_i}\right]} \{x_i V_i + W_{i-1}(C - x_i P_i)\}$$

, при $\forall$ допустимых С ($0 \le C \le S$), где

$x_i V_i$ - стоимость взятых предметов i-го типа

$W_{i-1}(C - x_i P_i)$ - максимальная стоимость груза, состоящего из предметов типа $k=\overline{1, i-1}$ с общим весом не более $(C - x_i P_i)$

Будем считать $W_0(C) = 0, \forall C : 0 \le C \le S$. Последовательно найдем значения функций, $W_1(C)$ $W_2(C)$ $,\ldots, W_{N-1}(C), при$ $\forall \underline{\underline{C}}$, а также $W_N(S)$.

Задача о рюкзаке (пример)

Пусть S=10 – грузоподъемность и

C	1	2	3	4
P	4	3	2	1
V	28	20	13	6

Задача о рюкзаке (пример)

Пусть S=10 – грузоподъемность и

C	1	2	3	4
P	4	3	2	1
V	28	20	13	6

$$W_1(C) = \max_{0 \le X_1 \le \left[\frac{10}{4}\right]} \{x_1 \cdot 28\},\ x_1 = 0,1,2$$

Задача о рюкзаке (пример)

Пусть S=10 – грузоподъемность и

C	1	2	3	4
P	4	3	2	1
V	28	20	13	6

$$W_1(C) = \max_{0 \le X_1 \le \left[\frac{10}{4}\right]} \{x_1 \cdot 28\},\ x_1 = 0,1,2$$

C	0-3	4-7	8-10
$W_1(C)$	0	28	56
X_1	0	1	2

Задача о рюкзаке (пример)

Пусть S=10 – грузоподъемность и

C	1	2	3	4
P	4	3	2	1
V	28	20	13	6

$$W_1(C) = \max_{0 \le X_1 \le \left[\frac{10}{4}\right]} \{x_1 \cdot 28\}, x_1 = 0,1,2$$

C	0-3	4-7	8-10
$W_1(C)$	0	28	56
X_1	0	1	2

$$W_2(S) = \max_{0 \le X_2 \le \left[\frac{C}{3}\right]} \{x_2 \cdot 20 + W_1(C - X_2 \cdot 3)\}, x_2 = 0,1,2,3$$

Задача о рюкзаке (пример)

Пусть S=10 – грузоподъемность и

C	1	2	3	4
P	4	3	2	1
V	28	20	13	6

$$W_1(C) = \max_{0 \le X_1 \le \left[\frac{10}{4}\right]} \{x_1 \cdot 28\},\ x_1 = 0,1,2$$

C	0-3	4-7	8-10
$W_1(C)$	0	28	56
X_1	0	1	2

$$W_2(S) = \max_{0 \le X_2 \le \left[\frac{C}{3}\right]} \{x_2 \cdot 20 + W_1(C - X_2 \cdot 3)\},\ x_2 = 0,1,2,3$$

C	0-2	3	4-5	6	7	8	9	10
$W_2(C)$	0	20	28	40	48	56	60	68
x_2	0	1	0	2	1	0	3	2

Задача о рюкзаке (пример)

Пусть S=10 – грузоподъемность и

C	1	2	3	4
P	4	3	2	1
V	28	20	13	6

$$W_3(S) = \max_{0 \le X_3 \le \left[\frac{C}{2}\right]} \{x_3 \cdot 13 + W_2(C - X_3 \cdot 2)\}, x_3 = 0,1,2,3,4,5$$

Задача о рюкзаке (пример)

Пусть S=10 – грузоподъемность и

C	1	2	3	4
P	4	3	2	1
V	28	20	13	6

$$W_3(S) = \max_{0 \le X_3 \le \left[\frac{C}{2}\right]} \{x_3 \cdot 13 + W_2(C - X_3 \cdot 2)\}, x_3 = 0,1,2,3,4,5$$

C	0-1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$W_3(C)$	0	13	20	28	33	41	48	56	61	69
x_3	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1

Задача о рюкзаке (пример)

Пусть S=10 – грузоподъемность и

C	1	2	3	4
P	4	3	2	1
V	28	20	13	6

$$W_3(S) = \max_{0 \le X_3 \le \left[\frac{C}{2}\right]} \{x_3 \cdot 13 + W_2(C - X_3 \cdot 2)\}, x_3 = 0,1,2,3,4,5$$

C	0-1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$W_3(C)$	0	13	20	28	33	41	48	56	61	69
x_3	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1

$$W_4(S) = \max_{0 \le X_4 \le \left[\frac{C}{1}\right]} \{x_4 \cdot 6 + W_3(C - X_4 \cdot 1)\}$$

Задача о рюкзаке (пример)

Пусть S=10 – грузоподъемность и

C	1	2	3	4
P	4	3	2	1
V	28	20	13	6

$$W_3(S) = \max_{0 \le X_3 \le \left[\frac{C}{2}\right]} \{x_3 \cdot 13 + W_2(C - X_3 \cdot 2)\}, x_3 = 0,1,2,3,4,5$$

C	0-1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$W_3(C)$	0	13	20	28	33	41	48	56	61	69
x_3	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1

$$W_4(S) = \max_{0 \le X_4 \le \left[\frac{C}{1}\right]} \{x_4 \cdot 6 + W_3(C - X_4 \cdot 1)\}$$

C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$W_4(C)$	0	6	13	20	28	34	41	48	56	62	69
x_4	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0

Задача о рюкзаке (пример)

Пусть S=10 – грузоподъемность и

C	1	2	3	4
P	4	3	2	1
V	28	20	13	6

$$W_3(S) = \max_{0 \le X_3 \le \left[\frac{C}{2}\right]} \{x_3 \cdot 13 + W_2(C - X_3 \cdot 2)\}, x_3 = 0,1,2,3,4,5$$

C	0-1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$W_3(C)$	0	13	20	28	33	41	48	56	61	69
x_3	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1

$$W_4(S) = \max_{0 \le X_4 \le \left[\frac{C}{1}\right]} \{x_4 \cdot 6 + W_3(C - X_4 \cdot 1)\}$$

C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$W_4(C)$	0	6	13	20	28	34	41	48	56	62	69
x_4	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0

$x_4 = 0 : W_4(10)$ при $x_4^0 = 0$

$\Rightarrow W_3(10-0) = W_3(10) = 69$ при $x_3^0 = 1$

$\Rightarrow W_2(10 - 2 \cdot 1) = W_2(8) = 56$ при $x_2^0 = 0$

$\Rightarrow W_1(8-0) = W_1(8) = 56$ при $x_1^0 = 2$

$\Rightarrow x^0 = (2,0,1,0)$

Кудряшов М.А.

Слайд 21,22

$$W_k^*(S_{k-1}) = \max_{\{X_{n-1}\}}\left\{f_k(S_{k-1}, X_k) + W_{k+1}^*(S_k)\right\} \qquad (6)$$

Должно быть X_k

Слайд 23

$$W_k^*(S_{k-1}) = \max_{\{X_{n-1}\}}\left\{f_k(S_{k-1}, X_k) + W_{k+1}^*(S_k)\right\}, k = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Должно быть X_k

Кобыльникова А.О.

Слайд 28

1 шаг состоит в оценки эффективности выделения ресурса на 1-ое предприятие (первое направление);

На одно предприятие, в частном случае на первое предприятие

Слайд 30

Для применения схемы ДП погружают данную задачу в семейство задач с любым числом шагов k≤n и любым запасом ресурса $X_C \le S$.

Должно быть С

Слайд 30

Пусть $W_i(C)$ - максимальный доход при распределении объема С ресурса между i предприятиями, $i = \overline{1, n-1}$

До n

должно быть W_n

Слайд 30

Значение функции $\varphi_n(C)$ вычисляется лишь для данного значения C=S:

$$W_n(S) = \max_{0 \le X_{ni} \le S} \{ f_n(x_n) + \varphi_{n-1}(C - x_n) \}$$

Должно быть $W_n(S) = \max_{0 \le X_n \le S} \{ f_n(x_n) + W_{n-1}(S - x_n) \}$

Слайд 33-50 Желательно, чтобы вместо φ было W

Слайд 33

1. $\varphi_1(x) = \max_{0 \le x_1 \le x} \{ f_1(x_1) \}$

$$\varphi_1(x1) = \max_{0 \le x_1 \le C} \{ f_1(x_1) \}$$

Слайд 34-38

2. $\varphi_2(x) = \max_{0 \le x2 \le x} \{ f_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2) \}$

$$\varphi_2(\mathrm{C}) = \max_{0 \le x_2 \le C} \{ f_2(x_2) + \varphi_1(C - x_2) \}$$

Слайд 39-43

3. $\varphi_3(x) = \max_{0 \le x3 \le x} \{ f_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3) \}$

$$\varphi_3(\mathrm{C}) = \max_{0 \le x_3 \le C} \{ f_3(x_3) + \varphi_2(C - x_3) \}$$

Слайд 44-50

$4 \qquad \varphi_4(x) = \max_{0 \le x4 \le x} \{f_4(x_4) + \varphi_4(x - x_4)\}$

$$\varphi_4(\mathrm{C}) = \max_{0 \le x_4 \le C} \{f_4(x_4) + \varphi_3(C - x_4)\}$$

Бектев Данил:

Слайд 50

4-му – X_4^0= 1 ⇒ *S=S-1=3* (осталось 3) ⇒ φ_3**(3)** при X_3^0**=1** ⇒ 3-му – 1 ⇒ *S=S-1=2* (осталось 2) ⇒ φ_3**(2)** при X_2^0**=0**⇒ *S=S-1=2* (осталось 2) ⇒ φ_1**(2)** при X_1^0**=2**

X^0= *(2,0,1,1)* Прибыль=*8+5+7=20*

ОШИБКА: $\varphi_3(2)$ при $X_2^0 = 0 \quad => S = S - 1 = 2$

Правильно: $\varphi_2(2)$ при $X_2^0 = 0 \quad => \mathrm{S} = \mathrm{S} - 0 = 2$

Слайд 51

ОШИБКА: X_i − число предметов i − ого типа, которые будут загружаться на транспортировочное средство

Правильно: X_i − число предметов i − ого типа, которое мы будем брать

Слайд 60-66

ОШИБКИ: $W_2(S) = \cdots;$

$W_3(S) = \cdots;$

$W_4(S) = \max\{x_4 * 6 + W_3(C - X_4 * 1)\}$

Правильно: $W_2(\mathrm{C}) = \cdots;$

$W_3(\mathrm{C}) = \cdots;$

$W_4(S) = \max\{x_4 * 6 + W_3(S - X_4 * 1)\}$