

1 Линейное программирование. Постановка задачи планирования производства, составление смеси (о диете).

1.1 Линейное программирование

Определение 1. Задача, состоящая в нахождении наибольшего (наименьшего) значения целевой функции $f = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n \xrightarrow{?} \max(\min)$ на множестве точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих системе ограничений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n R_1 b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n R_2 b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n R_n b_m \end{cases}$$

называется **задачей линейного программирования общего вида**. Здесь:

- $R_i, i = \overline{1, m}$ — один из знаков $=, \geq, \leq$;
- $C_j, j = \overline{1, n}$ и $a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ — заданные константы.

Определение 2. Всякую точку $X = (x_1, \dots, x_n)$, компоненты которой удовлетворяют системе ограничений, будем называть **допустимой точкой** или **допустимым решением задачи**, или **допустимым планом задачи**.

Задача линейного программирования состоит в нахождении такой допустимой точки x (такого допустимого плана) среди множества допустимых точек, при которой целевая функция принимает **max(min)** значение.

Определение 3. Допустимое решение $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, доставляющее целевой функции оптимальное значение (оптимум), будем называть **оптимальным решением** или **оптимальным планом задачи**.

Определение 4. Задача об оптимальном плане производства продукции

- n видов продукции, $j = \overline{1, n}$;
- m видов ресурсов (сырья), $i = \overline{1, m}$;
- a_{ij} - количество ресурса вида i , требующегося для производства единицы продукции вида j

- b_i - запасы ресурса вида i , $i = \overline{1, m}$
- c_j - доход (прибыль) от реализации единицы продукции вида j

Необходимо найти такой план производства продукции, при котором достигается максимальная прибыль, для реализации которого достаточно имеющихся ресурсов.

$$f = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

Определение 5 (Задача о диете (исторически одна из самых первых)). Условия:

- n — видов кормов, $j = \overline{1, n}$;
- m — видов питательных веществ, $i = \overline{1, m}$;
- a_{ij} — содержание i -го вида питательного вещества в единице j -го вида корма;
- b_i — необходимый минимум i -го питательного вещества в день, $i = \overline{1, m}$;
- c_j — стоимость единицы j -го вида корма.

Необходимо составить рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

$$f = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases} \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$