Методы оптимизации

Целочисленное программирование

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера

Д.В. Домашова

Общая идея методов ветвей и границ

Задача: $\underset{x \in X}{f(x)} \to \min$

1) В зависимости от специфики задачи выбирается некоторый способ вычисления оценок снизу $d(X')$, функции $f(x)$ на множествах $X' \subset X$: (в частности может быть $X' = X$)

$f(x) \geq d(X'),\ x \in X'$.

Оценка снизу часто вычисляется путем релаксации, т.е. замены задачи минимизации $f(x)$ по множеству X' задачей минимизации по некоторому более широкому множеству. (Например, релаксацией целочисленного или частично целочисленной задачи может состоять в отбрасывании требования целочисленности.)

2) Выбирается также правило ветвления, состоящее в выборе разветвляемого подмножества X' из числа подмножеств, на которые к данному шагу разбито множество X, и выборе способа разбиения X' на непересекающиеся подмножества.

Обычно из числа кандидатов на ветвление выбирается множество X' с наименьшей оценкой, поскольку именно в таком множестве естественно искать минимум в первую очередь.

При этом рассматриваются только такие способы вычисления оценок снизу, в которых оценки для подмножеств, получившихся в результате разветвления X' не меньше $d(X')$.

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Постановка задачи

Постановка задачи:
n – городов

c_{ij} - стоимость (расстояние) переезда из i в j

$j,i=1,2,\ldots n;\ j\neq i$

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Выезжая из одного, коммивояжер должен объехать все и вернуться в исходный город. В каждый город можно заезжать только один раз.

Нужно: Найти замкнутый маршрут объезда всех городов минимальной стоимости.

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Постановка задачи

Введем переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если коммивояжер едет из } i \text{ в } j \\ 0, & \text{если коммивояжер не едет из } i \text{ в } j \end{cases}$$

$j,i=1,2,\ldots n;\ j\neq i$

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Постановка задачи

Введем переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если коммивояжер едет из } i \text{ в } j \\ 0, & \text{если коммивояжер не едет из } i \text{ в } j \end{cases}$$

$j,i=1,2,\ldots n;\ j\neq i$

Математическая модель

$$F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$ - в каждый *j*-ый город приезжает один раз, $j = \overline{1,n}$.

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ - из каждого *i*-го города выезжает ровно один раз, $i = \overline{1,n}$.

$u_i - u_j + nx_{ij} \le n-1$ - обеспечивает замкнутость маршрута и отсутствие петель

$u_i \in \{1,2,\ldots\}$, $x_{ij} \in \{0,1\}$, $i, j = \overline{1,n}$

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Постановка задачи

1) Покажем, что любой набор переменных, u_i, x_{ij}, удовлетворяющий ограничениям этой ЦЛП, определяет допустимый маршрут коммивояжеров.
Пусть некоторый допустимый набор переменных определяет маршрут, распадающийся на не связанные между собой подциклы. Возьмем любой подцикл. Сложим ограничения неравенства, соответствующие переездам, входящим в этот подцикл.
Например: 1-2-3-1

$$u_1 - u_2 + n \le n - 1$$

$$u_2 - u_3 + n \le n - 1$$

$$u_3 - u_1 + n \le n - 1$$

Складываем уравнения => $3n \le 3(n-1)$ - неверное неравенство.

Итак, разности $u_i - u_j$ взаимно уничтожаются, и получается неверное неравенство: $kn \le k(n-1)$, где k – число переездов.

2) Покажем, что произвольному дополнительному маршруту коммивояжера соответствует некоторый, набор переменных, удовлетворяющих ограничению задачи. Положим $u_i = p$, если коммивояжер на маршруте прибывает в i-ый город после p-го переезда.

=> $u_i - u_j \le n - 1 \quad \forall i, j$, при $x_{ij} = 0$

$$(p - (p+1) \le n - 1)$$

$u_i - u_j + nx_{ij} = p - (p+1) + n = n - 1$ => Задача ЛП – правильная.

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Определения

Определение: Циклом t назовем набор из n упорядоченных пар городов, образующих маршрут проходящий через каждый город только один раз. $t = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_1)\}$

Издержки цикла $z(t) = \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik,ik+1} + c_{in,i1}$

Для каждого допустимого маршрута каждая строка и каждый столбец содержат ровно по одному элементу, соответствующему этому маршруту.

$$C = \begin{pmatrix} \infty & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & \infty \end{pmatrix}$$

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Алгоритм

1. Определение нижних границ.

Для определения нижних границ воспользуемся понятием приведения матрицы.

Определение: Матрица, получаемая из данной вычитанием из элементов каждой строки минимального элемента этой строки, а затем вычитанием из элементов каждого столбца минимального элемента этого столбца называется приведенной матрицей:

1) $$\| c'_{ij} \| = \| c_{ij} - \min c_{ij} \|$$

2) $$\| c''_{ij} \| = \| c_{ij} - \min_{i=\overline{1,n}} c'_{ij} \|$$

Определение: Приводящая константа:

$$h = \sum_{i=1}^{n} \min_{j=\overline{1,n}} c_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \min_{i=\overline{1,n}} c'_{ij}$$

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Алгоритм

Пусть t – некоторый маршрут.

$z(t)$ - его издержки по исходной матрице

$z^{'}(t)$ - его издержки по приведенной матрице

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Алгоритм

Пусть t – некоторый маршрут.

$z(t)$ - его издержки по исходной матрице

$z'(t)$ - его издержки по приведенной матрице

=> $z(t) = z'(t) + h$

=> h является нижней границей издержек для всех циклов t исходной матрицы расстояний, поскольку h - сумма минимальных элементов строк и столбцов.

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Алгоритм

2. Ветвление

На каждом шаге алгоритма будет строиться одно звено оптимального маршрута. Для построения решения в начале целесообразно выбрать звено нулевой длины, а затем последовательно добавлять звенья нулевой или минимальной длины.

Процесс ветвления можно наглядно представить в виде дерева, каждая вершина которого соответствует некоторому множеству маршрутов, являющегося подмножеством множества X.

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Алгоритм

Пусть G_0 - множество всех маршрутов. Разобьем G_0 на два подмножества:

- Множество маршрутов, включающих переезд из *i* в *j* $\{(i, j)\}$
- Множество маршрутов, не содержащих пару *i,j* $\{\overline{(i, j)}\}$

Пару городов *(i,j)* для ветвления будем выбирать среди тех пар, которым в приведенной матрице соответствуют нулевые элементы, причем выбирается такая пара *(i,j)* чтобы подмножество $\{\overline{(i, j)}\}$ имело максимальную оценку.

Разветвляя далее множество с меньшей оценкой, в конце концов будет получено подмножество, содержащее один маршрут. Двигаясь по дереву в обратном направлении, получим маршрут:

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Алгоритм

Выбор пары городов *{i,j}* для ветвления:

1) c''_{ij} =0

2) оценка множества $\{\overline{i, j}\}$ должна быть максимальной.

Рассмотрим маршруты, которые будут включены в $\{\overline{i, j}\}$. Поскольку город i должен быть связан с некоторым другим городом, то каждый маршрут из $\{\overline{i, j}\}$ должен содержать звено, длина которого не меньше минимального элемента i-ой строки, не считая c''_{ij} .

Вычисляем сумму этих минимальных элементов для каждого c''_{ij} =0.

Назовем эту сумму оценкой пары *(i,j)* или штрафом за использование звена *(i,j)*:

$$\Theta_{ij} = \min_{\forall j' \neq j} c''_{ij'} + \min_{\forall i' = i} c''_{i'j}$$

=> в качестве пары городов для ветвления выбираем ту *(i,j)*, для которой Θ_{ij} является максимальной.

=> $\begin{Bmatrix} c''_{ij} = 0 \\ \Theta_{ij} = \max \Theta_{ij} \end{Bmatrix}$

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Алгоритм

3. Вычисление нижней границы множества $\left\{\overline{(i,\, j)}\right\}$.

Нижняя граница множества $\left\{\overline{(i,\, j)}\right\}$ определяется как сумма оценки разветвляемого множества и максимального значения Θ_{ij}.

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Алгоритм

3. Вычисление нижней границы множества $\left\{\overline{(i,\, j)}\right\}$.

Нижняя граница множества $\left\{\overline{(i,\, j)}\right\}$ определяется как сумма оценки разветвляемого множества и максимального значения Θ_{ij} .

4. Так как из каждого города можно выезжать только один раз и в каждый город можно въезжать только один раз, то строку *i* и столбец *j* из дальнейшего рассмотрения исключаем. Чтобы не получить замкнутых неполных циклов, нужно наложить необходимые запреты, в частности, на переезд из *j* в *i*, т.е. положить $c_{ij} = \infty$.

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Алгоритм

3. Вычисление нижней границы множества $\left\{\overline{(i,\, j)}\right\}$.

Нижняя граница множества $\left\{\overline{(i,\, j)}\right\}$ определяется как сумма оценки разветвляемого множества и максимального значения Θ_{ij} .

4. Так как из каждого города можно выезжать только один раз и в каждый город можно въезжать только один раз, то строку *i* и столбец *j* из дальнейшего рассмотрения исключаем. Чтобы не получить замкнутых неполных циклов, нужно наложить необходимые запреты, в частности, на переезд из *j* в *i*, т.е. положить $c_{ij} = \infty$.

5. Если усеченная матрица ещё не имеет размерности 2x2, то приводим полученную матрицу и находим оценку множества $\{(i,\, j)\}$ как сумму оценки разветвляемого множества и полученной приводящей константы, переход пункт 2.

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Алгоритм

3. Вычисление нижней границы множества $\left\{\overline{(i,\, j)}\right\}$.

Нижняя граница множества $\left\{\overline{(i,\, j)}\right\}$ определяется как сумма оценки разветвляемого множества и максимального значения Θ_{ij}.

4. Так как из каждого города можно выезжать только один раз и в каждый город можно въезжать только один раз, то строку *i* и столбец *j* из дальнейшего рассмотрения исключаем. Чтобы не получить замкнутых неполных циклов, нужно наложить необходимые запреты, в частности, на переезд из *j* в *i*, т.е. положить $c_{ij} = \infty$.

5. Если усеченная матрица ещё не имеет размерности 2x2, то приводим полученную матрицу и находим оценку множества $\{(i,\, j)\}$ как сумму оценки разветвляемого множества и полученной приводящей константы, переход пункт 2.

6. Если полученная матрица имеет размерность 2x2, то определяемые ею пары городов завершают маршрут.

Приводя эту матрицу и добавляя приводящую константу к оценке последнего разветвляемого множества, получим оценку маршрута.

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Алгоритм

3. Вычисление нижней границы множества $\left\{\overline{(i,\, j)}\right\}$.

Нижняя граница множества $\left\{\overline{(i,\, j)}\right\}$ определяется как сумма оценки разветвляемого множества и максимального значения Θ_{ij}.

4. Так как из каждого города можно выезжать только один раз и в каждый город можно въезжать только один раз, то строку *i* и столбец *j* из дальнейшего рассмотрения исключаем. Чтобы не получить замкнутых неполных циклов, нужно наложить необходимые запреты, в частности, на переезд из *j* в *i*, т.е. положить $c_{ij} = \infty$.

5. Если усеченная матрица ещё не имеет размерности 2x2, то приводим полученную матрицу и находим оценку множества $\{(i,\, j)\}$ как сумму оценки разветвляемого множества и полученной приводящей константы, переход пункт 2.

6. Если полученная матрица имеет размерность 2x2, то определяемые ею пары городов завершают маршрут.

Приводя эту матрицу и добавляя приводящую константу к оценке последнего разветвляемого множества, получим оценку маршрута.

Критерий оптимальности

Если эта оценка не больше оценок всех тупиковых ветвей, то маршрут описанный деревом ветвей, является оптимальным, иначе процесс ветвления должен быть продолжен, исходя из множества с меньшей оценкой.

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Пример

Пример. Имеется четыре пункта, расстояние между которыми описано матрицей расстояний. Найти оптимальный (минимальный) замкнутый маршрут объезда городов.

$$S = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \hline \begin{pmatrix} \infty & 13 & 12 & 4 \\ 13 & \infty & 7 & 8 \\ 12 & 7 & \infty & 5 \\ 4 & 8 & 5 & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример

1 Приводим матрицу: ***S***.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 13 & 12 & 4 \\ 13 & \infty & 7 & 8 \\ 12 & 7 & \infty & 5 \\ 4 & 8 & 5 & \infty \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ 4 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \end{array}$$

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример

1 Приводим матрицу: ***S***.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
1 & & & & \\
2 & & & & \\
3 & & & & \\
4 & & & &
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \multicolumn{4}{c}{\left(\begin{array}{cccc} \infty & 13 & 12 & 4 \\ 13 & \infty & 7 & 8 \\ 12 & 7 & \infty & 5 \\ 4 & 8 & 5 & \infty \end{array}\right)} \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
1 & \infty & 13 & 12 & 4 \\
2 & 13 & \infty & 7 & 8 \\
3 & 12 & 7 & \infty & 5 \\
4 & 4 & 8 & 5 & \infty
\end{array}
\begin{array}{c} 4 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \end{array}
\rightarrow
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
1 & \infty & 9 & 8 & 0 \\
2 & 6 & \infty & 0 & 1 \\
3 & 7 & 2 & \infty & 0 \\
4 & 0 & 4 & 1 & \infty \\
 & 0 & 2 & 0 & 0
\end{array}
$$

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Пример

1 Приводим матрицу: ***S***.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline 1 & \infty & 13 & 12 & 4 & 4 \\ 2 & 13 & \infty & 7 & 8 & 7 \\ 3 & 12 & 7 & \infty & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 8 & 5 & \infty & 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \infty & 9 & 8 & 0 \\ 2 & 6 & \infty & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & \infty & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & \infty \\ \hline & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \infty & 7 & 8 & 0 \\ 2 & 6 & \infty & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & \infty & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & \infty \end{array}$$

2. Найдем сумму приводящих констант: h=4+7+5+4+2=22

Найдем оценку множеств G_0: $w(G_0)$=22.

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример

1 Приводим матрицу: ***S***.

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\infty & 13 & 12 & 4 \\
13 & \infty & 7 & 8 \\
12 & 7 & \infty & 5 \\
4 & 8 & 5 & \infty
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \\ 4
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & \infty & 9 & 8 & 0 \\
2 & 6 & \infty & 0 & 1 \\
3 & 7 & 2 & \infty & 0 \\
4 & 0 & 4 & 1 & \infty \\
\hline
 & 0 & 2 & 0 & 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & \infty & 7 & 8 & 0 \\
2 & 6 & \infty & 0 & 1 \\
3 & 7 & 0 & \infty & 0 \\
4 & 0 & 2 & 1 & \infty
\end{array}
$$

2. Найдем сумму приводящих констант: h=4+7+5+4+2=22

Найдем оценку множеств G_0: $w(G_0)=22$.

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример

3. Укажем претендентов на ветвление и осуществим выбор пары для ветвления:

$S_{14}=0$, $S_{23}=0$, $S_{32}=0$, $S_{34}=0$, $S_{41}=0$

$Q_{14}=7+0=7$, $Q_{23}=1+1=2$, $Q_{32}=0+2=2$, $Q_{34}=0+0=0$, $Q_{41}=6+1=7$

$\max Q_{ij}=Q_{14}=7$ (можно $Q_{41}=7$).

$$
\begin{array}{c c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} \infty & 7 & 8 & 0 \\ 6 & \infty & 0 & 1 \\ 7 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \infty \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \\
 & \begin{array}{cccc} 6 & 2 & 1 & 0 \end{array} &
\end{array}
$$

Итак, для ветвления выбираем пару (1,4) и начинаем строить дерево ветвей.

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Пример

4. Найдем оценку множества $\{1,4\}$ – множества всех маршрутов не содержащих пару (1,4): $w(\{1,4\})=w(G_0)+Q(1,4)=22+7=29$.

5. Вычеркнем строку «1», столбец «4» и наложим запрет на переезд из «4» в «1»

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & \infty & 0 \\ 7 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример

4. Найдем оценку множества {1,4} – множества всех маршрутов не содержащих пару (1,4): $w(\{1,4\})=w(G_0)+Q(1,4)=22+7=29$.

5. Вычеркнем строку «1», столбец «4» и наложим запрет на переезд из «4» в «1»

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & \infty & 0 \\ 7 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример

6. Приведем матрицу

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & \infty & 0 \\ 7 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Пример

6. Приведем матрицу

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 3 & \\ \hline 2 & 6 & \infty & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & \infty & 0 \\ 4 & \infty & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример

6. Приведем матрицу

$$\begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & \infty & 0 \\ 7 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & \infty & 0 \\ 7 & 0 & \infty \\ \infty & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример

6. Приведем матрицу

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
2 & 6 & \infty & 0 \\
3 & 7 & 0 & \infty \\
4 & \infty & 2 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
0 \\ 0 \\ 1
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
2 & 6 & \infty & 0 \\
3 & 7 & 0 & \infty \\
4 & \infty & 1 & 0 \\
\hline
 & 6 & 0 & 0
\end{array}
$$

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример

6. Приведем матрицу

$$\begin{array}{c|c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 6 & \infty & 0 \\ 7 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 6 & \infty & 0 \\ 7 & 0 & \infty \\ \infty & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} 6 & 0 & 0 \end{matrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \infty & 0 \\ 1 & 0 & \infty \\ \infty & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример

6. Приведем матрицу

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & \infty & 0 \\ 7 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & \infty & 0 \\ 7 & 0 & \infty \\ \infty & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{ccc} 6 & 0 & 0 \end{array}
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \infty & 0 \\ 1 & 0 & \infty \\ \infty & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

7. Найдем h=1+6=7 и найдем оценку {1,4}: $w(\{1,4\})=w(G_0)+h=22+7=29$

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример

6. Приведем матрицу

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 3 & \\ 2 & 6 & \infty & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & \infty & 0 \\ 4 & \infty & 2 & 1 & 1 \end{array} \to \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & \infty & 0 \\ 3 & 7 & 0 & \infty \\ 4 & \infty & 1 & 0 \\ & 6 & 0 & 0 \end{array} \to \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & \infty & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \infty \\ 4 & \infty & 1 & 0 \end{array}$$

7. Найдем h=1+6=7 и найдем оценку {1,4}: $w(\{1,4\})=w(G_0)+h=22+7=29$

8. Укажем претендентов для ветвления и выберем пару для ветвления:
$S_{21}=0$, $S_{23}=0$, $S_{32}=0$, $S_{43}=0$
$Q_{21}=0+1=1$, $Q_{23}=0+0=0$, $Q_{32}=1+1=2$, $Q_{43}=1+0=1$
$\max Q_{ij}=Q_{32}=2$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 3 & \\ 2 & 0 & \infty & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \infty & 1 \\ 4 & \infty & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

Итак, для ветвления берем пару (3,2).

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример

9. Найдем оценку {3,2}: $w(\{3,2\})=w(\{1,4\})+Q_{32}=29+2=31$

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Пример

9. Найдем оценку {3,2}: $w(\{3,2\})=w(\{1,4\})+Q_{32}=29+2=31$

10. Вычеркнем строку «3», столбец «2» и наложим запрет на переезд из «2» в «3».

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \infty \\ \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример

9. Найдем оценку {3,2}: $w(\{3,2\})=w(\{1,4\})+Q_{32}=29+2=31$

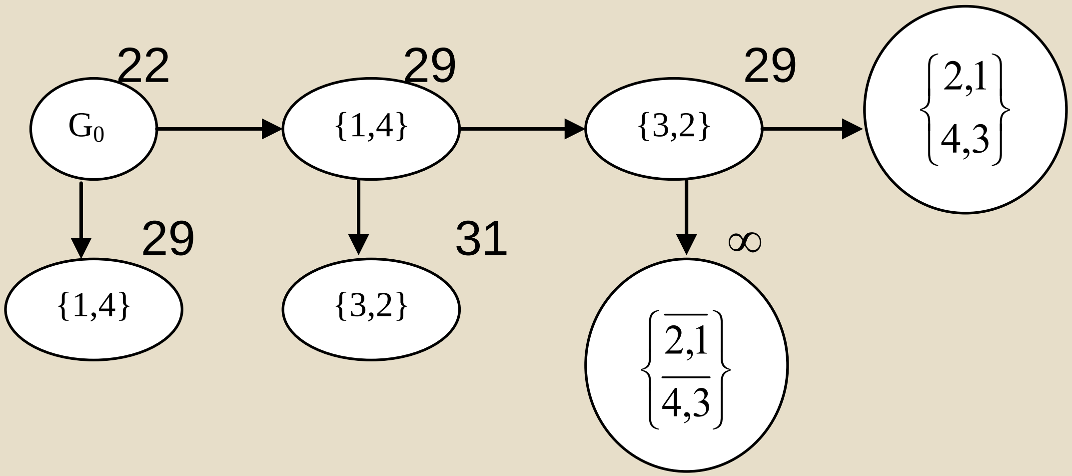
10. Вычеркнем строку «3», столбец «2» и наложим запрет на переезд из «2» в «3».

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \infty \\ \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

11. Матрица приведенная, следовательно $h=0$ и $w(\{3,2\})=w(\{1,4\})+h=29$

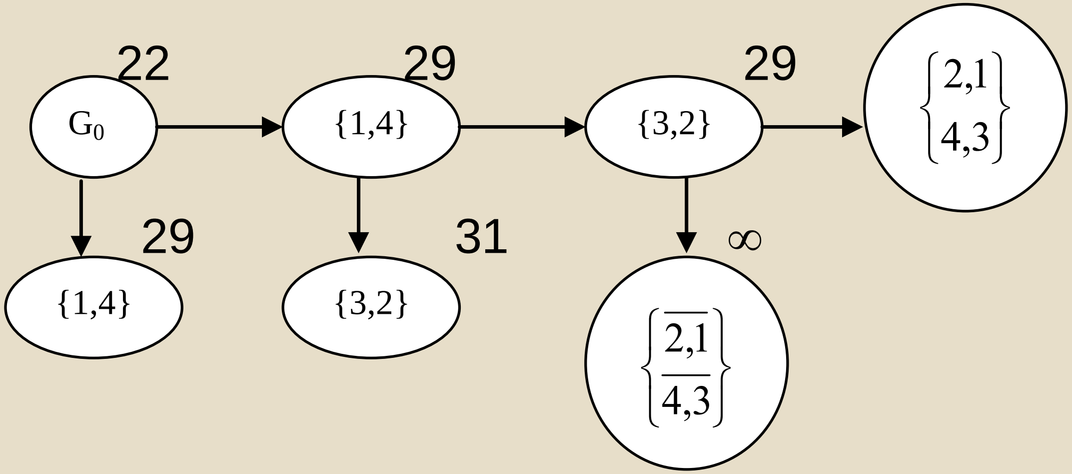
Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Пример

12. Так как матрица размерности 2*2, то не запрещенные пары (2,1) и (4,3) завершают маршрут.



Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Пример

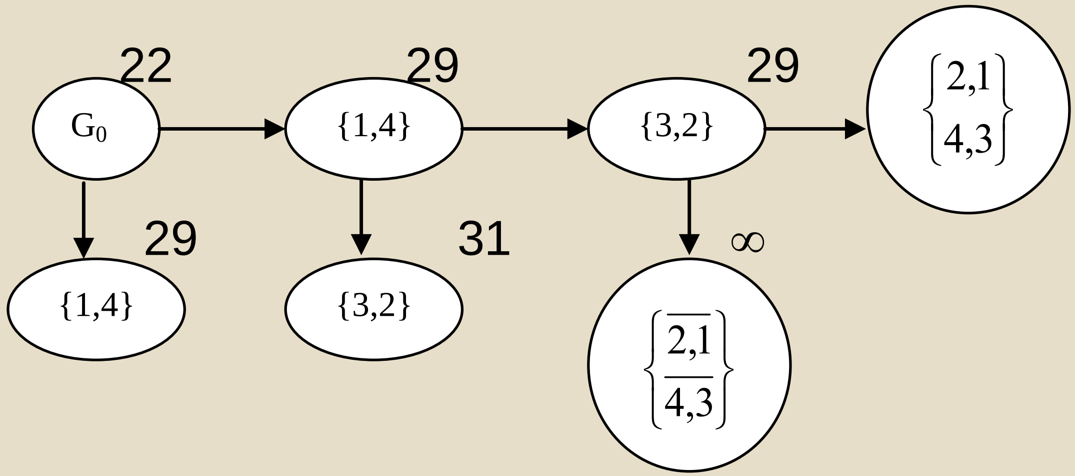
12. Так как матрица размерности 2*2, то не запрещенные пары (2,1) и (4,3) завершают маршрут.



13. Проверяем критерий оптимальности.

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример

12. Так как матрица размерности 2*2, то не запрещенные пары (2,1) и (4,3) завершают маршрут.



13. Проверяем критерий оптимальности.

Поскольку оценка последнего подмножества не больше оценок тупиковых ветвей, то пары (1,4), (3,2), (2,1), (4,3) задают оптимальный маршрут, который можно представить, скажем так:
1-4-3-2-1 с расстоянием S_{min}=29.

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример2

	1	2	3	4	5	6
1	∞	4	10	13	7	5
2	4	∞	3	4	1	12
3	10	3	∞	7	5	9
4	13	4	7	∞	11	8
5	7	1	5	11	∞	2
6	5	12	9	8	2	∞

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример2

	1	2	3	4	5	6	min
1	∞	**4**	**10**	**13**	**7**	**5**	**4**
2	4	∞	3	4	1	12	**1**
3	10	3	∞	7	5	9	**3**
4	13	4	7	∞	11	8	**4**
5	7	1	5	11	∞	2	**1**
6	5	12	9	8	2	∞	**2**

	1	2	3	4	5	6	min
1	∞	0	4	6	3	0	0
2	0	∞	0	0	0	10	0
3	4	0	∞	1	2	5	1
4	6	0	1	∞	7	3	1
5	3	0	2	7	∞	0	0
6	0	10	5	3	0	∞	0
min	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	

	1	2	3	4	5	6
1	∞	0	6	9	3	1
2	3	∞	2	3	0	11
3	7	0	∞	4	2	6
4	9	0	3	∞	7	4
5	6	0	4	10	∞	1
6	3	10	7	6	0	∞
min	**3**	**0**	**2**	**3**	**0**	**1**

Считаем оценки:
Q12=0, Q16=0, Q21=0, **Q23=1,**
Q24=1, Q25=0, Q32=1, Q42=1,
Q56=0, Q52=0,Q61=0, Q65=0

h=4+1+3+4+1+2+3+0+2+3+0+1
h=24

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример2

	1	2	4	5	6	min
1	∞	0	6	3	0	**0**
3	4	∞	1	2	5	**1**
4	6	0	∞	7	3	**0**
5	3	0	7	∞	0	**0**
6	0	10	3	0	∞	**0**

	1	2	4	5	6
1	∞	0	6	3	0
3	3	∞	0	1	4
4	6	0	∞	7	3
5	3	0	7	∞	0
6	0	10	3	0	∞
min	**0**	**0**	**0**	**0**	

h=1

Считаем оценки:

Q12=0, Q42=3, Q61=3, Q16=0, Q52=0, Q65=1, **Q34=4,** Q56=0

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Пример2

	1	2	5	6	min
1	∞	0	3	0	**0**
4	6	∞	7	3	**3**
5	3	0	∞	0	**0**
6	0	10	0	∞	**0**

	1	2	5	6
1	∞	0	3	0
4	6	∞	7	3
5	3	0	∞	0
6	0	10	0	∞
min	**0**	**0**	**0**	**0**

h=3

Считаем оценки:

Q12=0, Q52=0, Q65=1, Q16=0,

Q56=0, **Q46=3,** Q61=3

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример2

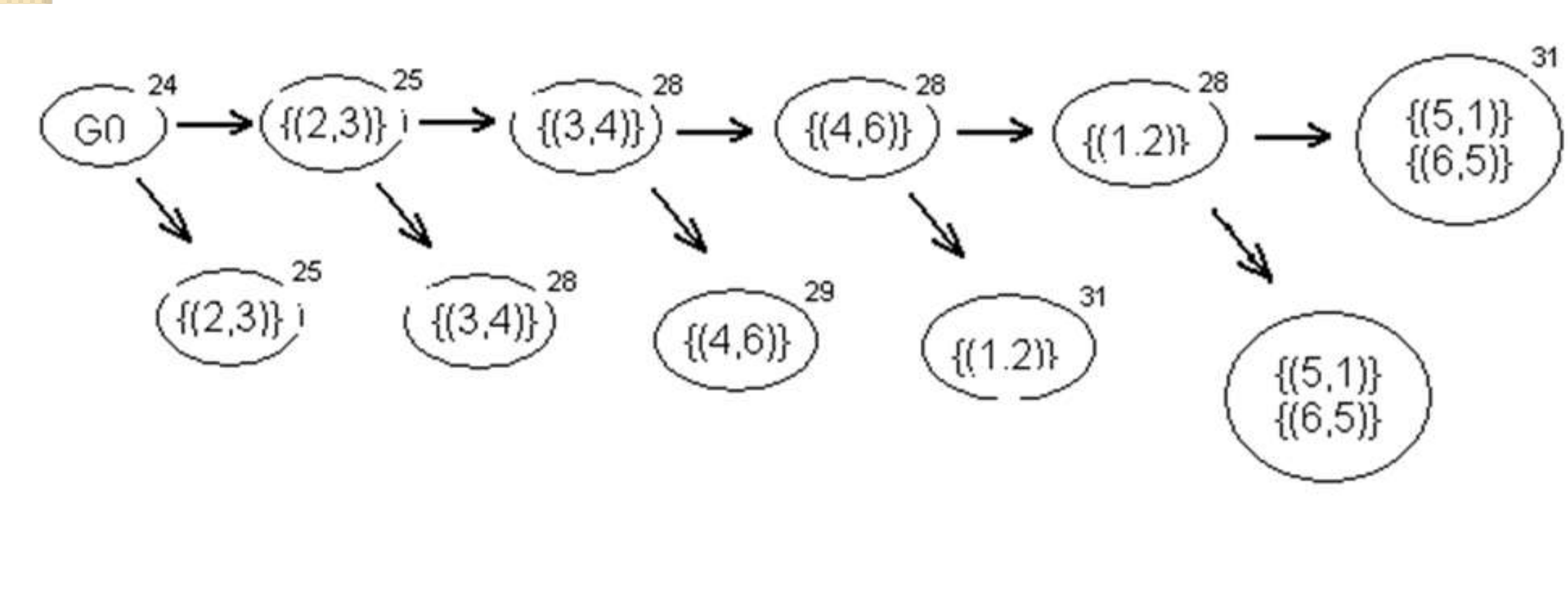
	1	2	5	min
1	∞	0	3	**0**
5	3	0	∞	**0**
6	0	∞	0	**0**
min	0	0	0	

h=0
Считаем оценки:
h=3
Q12=3 Q61=3, Q22=3, Q65=3

	1	5	min
5	3	∞	**3**
6	∞	0	**0**

	1	5
5	0	∞
6	∞	0

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера
Пример2



Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример2

Возврат:
Ставим запрет на (2,3)

	1	2	3	4	5	6	min
1	∞	4	10	13	7	5	**4**
2	4	∞	∞	4	1	12	**1**
3	10	3	∞	7	5	9	**3**
4	13	4	7	∞	11	8	**4**
5	7	1	5	11	∞	2	**1**
6	5	12	9	8	2	∞	**2**

	1	2	3	4	5	6
1	∞	0	6	9	3	1
2	3	∞	∞	3	0	11
3	7	0	∞	4	2	6
4	9	0	3	∞	7	4
5	6	0	4	10	∞	1
6	3	10	7	6	0	∞
min	**3**	**0**	**3**	**3**	**0**	**1**

h=4+1+3+4+1+2+3+0+3+3+0+1
h=25

	1	2	3	4	5	6	min
1	∞	0	3	6	3	0	0
2	0	∞	∞	0	0	10	0
3	4	0	∞	1	2	5	1
4	6	0	0	∞	7	3	0
5	3	0	1	7	∞	0	0
6	0	10	4	3	0	∞	0
min	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	

Считаем оценки:
Q12=0, Q16=0,Q21=0, **Q24=1,**
Q25=0, Q32=1, Q42=0, Q43=1,
Q52=0, Q56=0, Q61=0, Q65=0

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример2

	1	2	3	5	6	min
1	∞	0	3	3	0	**0**
3	4	0	∞	2	5	**0**
4	6	∞	0	7	3	**0**
5	3	0	1	∞	0	**0**
6	0	10	4	0	∞	**0**
min	0	0	0	0	**0**	

h=0

Считаем оценки:

Q12=0, Q32=2, Q52=0, Q61=3,

Q16=0, **Q43=4,** Q56=0, Q65=2

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример2

	1	2	5	6	min
1	∞	0	3	0	**0**
3	4	∞	2	5	**2**
5	3	0	∞	0	**0**
6	0	10	0	∞	**0**

	1	2	5	6
1	∞	0	3	0
3	2	∞	0	5
5	3	0	∞	0
6	0	10	0	∞
min	**0**	**0**	**0**	**0**

h=2

Считаем оценки:

Q12=0, Q52=0, Q65=0, Q16=0, Q56=0, **Q35=2,** Q61=2

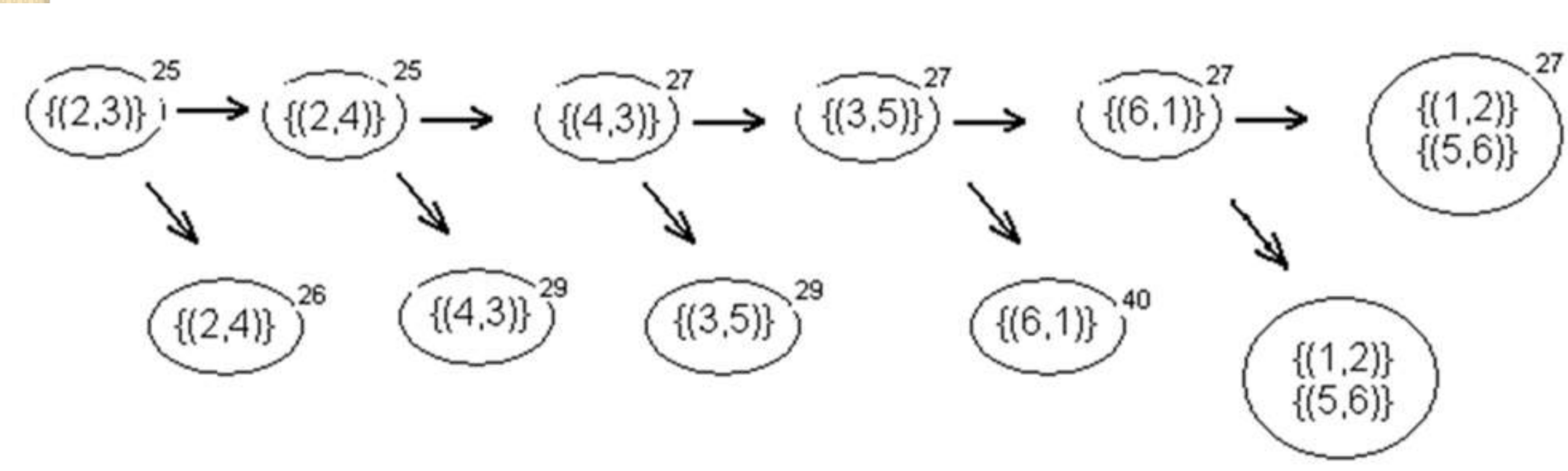
Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример2

	1	2	6	min
1	∞	0	0	**0**
5	3	∞	0	**0**
6	0	10	∞	**0**
min	**0**	**0**	**0**	

h=0
Считаем оценки:
Q12=10, Q16=0, Q56=3, **Q61=13**

	2	6
1	0	∞
5	∞	0

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример2



Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример2

Возврат:
Ставим запрет на (2,4)

	1	2	3	4	5	6	min
1	∞	4	10	13	7	5	**4**
2	4	∞	∞	∞	1	12	**1**
3	10	3	∞	7	5	9	**3**
4	13	4	7	∞	11	8	**4**
5	7	1	5	11	∞	2	**1**
6	5	12	9	8	2	∞	**2**

	1	2	3	4	5	6	min
1	∞	0	3	5	3	0	0
2	0	∞	∞	∞	0	10	0
3	4	0	∞	0	2	5	0
4	6	0	0	∞	7	3	0
5	3	0	1	6	∞	0	0
6	0	10	4	2	0	∞	0
min	**0**	**0**	**1**	**2**	**0**	**0**	

	1	2	3	4	5	6
1	∞	0	6	9	3	1
2	3	∞	∞	∞	0	11
3	7	0	∞	4	2	6
4	9	0	3	∞	7	4
5	6	0	4	10	∞	1
6	3	10	7	6	0	∞
min	**3**	**0**	**3**	**4**	**0**	**1**

Считаем оценки:
Q12=0, Q32=0, Q52=0, Q16=0, **Q34=2,** Q56=0, Q21=0, Q42=0, Q61=0, Q25=0, Q43=1, Q65=0

h=4+1+3+4+1+2+3+0+3+4+0+1
h=26

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример2

	1	2	3	5	6	min
1	∞	0	3	3	0	**0**
2	0	∞	∞	0	10	**0**
4	6	0	∞	7	3	**0**
5	3	0	1	∞	0	**0**
6	0	10	4	0	∞	**0**
min	0	0	1	0	**0**	

h=1
Считаем оценки:
Q12=0, **Q42=3,** Q61=0, Q16=0, Q52=0,
Q65=0, Q21=0, Q53=2, Q25=0, Q56=0

	1	3	5	6	min
1	∞	2	3	0	**0**
2	0	∞	0	10	**0**
5	3	0	∞	0	**0**
6	0	3	0	∞	**0**
min	0	0	0	**0**	

h=0
Считаем оценки:
Q16=2, Q56=0, Q21=0, Q61=0
Q22=0, Q65=0, Q53=2

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример2

	1	3	5	min
2	0	∞	0	**0**
5	3	0	∞	**0**
6	∞	3	0	**0**
min	0	0	0	

h=0

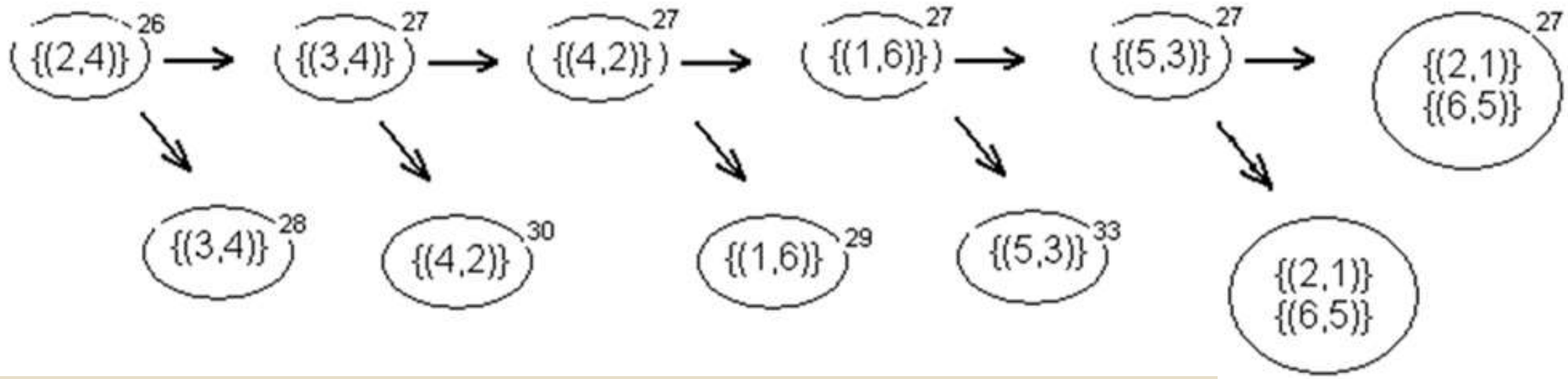
Считаем оценки:

Q21=3, **Q53=6,** Q25=0, Q65=3

	1	5
2	0	∞
6	∞	0

h=0

Метод ветвей и границ решения задачи коммивояжера Пример2



ОТВЕТ:

Оптимальный маршрут: 1-6-5-3-4-2-1

Длина маршрута: 27

Делаем проверку: 5+4+7+4+5+2=27

	1	2	3	4	5	6
1	∞	4	10	13	7	5
2	4	∞	3	4	1	12
3	10	3	∞	7	5	9
4	13	4	7	∞	11	8
5	7	1	5	11	∞	2
6	5	12	9	8	2	∞

Ошибки(Билашевский Е Н + Скорый В.А.)

Слайд №8 (28:30) в 1)под min нет указания что j=1,n

2)Нет штриха над Cij после знака “=“

Слайд №10 (33:44) Фраза ‘сумма строк и столбцов ‘

Изменить на фразу’сумма строк и столбцов промежуточной матрицы’

Слайд№12(45:40) Указали что не нужно обращать внимание на фразу ‘Двигаясь по дереву в обратном направлении получим ’

Слайд№13(47:20)нет продолжение ‘Поскольку необходимо чтобы в город j можно было бы попасть из некоторого другого города не равного j ,то каждый маршрут из не {I,j}должен содержать звено длина которого не меньше минимального элемента j-го столбца не считая Cij два штриха ’ после фразы ‘не меньше не меньше минимального элемента i-ой строки не считая Cij два штриха’

(50:10)Исправить фразу ‘Назовем эту сумму оценкой пары(I,j)’ или штрафом за неиспользование звена (I,j)

(50:50) В формуле под вторым min должно быть для любого j штрих ≠j

Слайд№15 (57:40) Конец пункта 4 должно быть Cji два штриха =∞

Слайд№22(1:08:30) Под пунктом 2 должно быть:’Найдем сумму всех вычитаемых элементов в процессе приведения’,а не ‘сумму приводящих констант’, (1:09:25) когда проговаривали алгоритм решения была немного неправильная нумерация так на слайде пункт 1и 2 –один пункт алгоритма решения и так вся нумерация сбилась

Слайд№34(1:26:40)Не хватает черточки сверху или слова ‘НЕ’ во фразе ‘Найдем оценку {3,2}’

Ошибки(Билашевский Е. Н. + Скорый В.А.)

- 1) Отсутствие черточек у тупиковых веток на слайдах 37, 38, 39 ($\{\overline{1,4}\}$ и $\{\overline{3,2}\}$).
- 2) h=3 на 44 слайде стоит не на том месте (должна стоять позже, после 2 таблички).
- 3) Отсутствие черточек у тупиковых веток на слайде 45 ($\{\overline{(2,3)}\}$, $\{\overline{(3,4)}\}$, $\{\overline{(4,6)}\}$, $\{\overline{(1,2)}\}$, $\{\overline{(5,1)}\}$, $\{\overline{(6,5)}\}$).
- 4) Отсутствие черточек у тупиковых веток и на начале маршрута на слайде 50 ($\{\overline{(2,3)}\}$, $\{\overline{(2,4)}\}$, $\{\overline{(4,3)}\}$, $\{\overline{(3,5)}\}$, $\{\overline{(6,1)}\}$, $\{\overline{(1,2)}\}$, $\{\overline{(5,6)}\}$).
- 5) Отсутствие черточек у тупиковых веток и на начале маршрута на слайде 54 ($\{\overline{(2,4)}\}$, $\{\overline{(3,4)}\}$, $\{\overline{(4,2)}\}$, $\{\overline{(1,6)}\}$, $\{\overline{(5,3)}\}$, $\{\overline{(2,1)}\}$, $\{\overline{(6,5)}\}$).