Методы оптимизации

Целочисленное программирование

Д.В. Домашова

Общая постановка задачи целочисленного программирования отличается от общей постановки задачи ЛП лишь наличием дополнительного ограничения: требования целочисленности, в соответствии с которым значения всех или части переменных являются целыми числами.

Постановка задачи ЦЛП

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \in N_0, \; j = \overline{1,k}, \; k \le n$$

k<n – задача частично-целочисленная

k=n – задача полностью целочисленная

Пример

$$F = x_1 + 1{,}5 \cdot x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 17 \\ 10x_1 + 4x_2 \le 45 \end{cases} \quad x_1, x_2 \ge 0, \quad x_1, x_2 \in N \cup \{0\}$$

$$x^* = \left(\tfrac{7}{2}, \tfrac{5}{2}\right) = (3{,}5,\ 2{,}5) \qquad f^* = 7{,}25$$

Подходы к решению ЗЦЛП
Методы отсечений

1. Решается задача ЛП, получающаяся из исходной отбрасыванием требования целочисленности $x = (x_1, ..., x_n)$.

Если найденное решение x^1 - целочисленное, то оно является решением ЗЦЛП.

Если найденное решение x^1 - не целочисленное, то к ограничениям задачи, решаемой на первом этапе, добавляется ограничение вида:

$\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j} \cdot x_j \geq b_{m+1}$, которое:

1) Отсекает точку x^1, т.е.: $\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j} \cdot x_j^1 < b_{m+1}$

2) Сохраняет в допустимом множестве все целочисленные точки допустимого множества исходной задачи. Такое ограничение называется правильным отсечением.

2. На втором этапе находится решение x^2 задачи ЛП с дополнительным ограничением. Если x^2 - не целочисленное, тогда вводится новое правильное отсечение вида $\sum_{j=1}^{n} a_{m+2,j} \cdot x_j \geq b_{m+2}$ и т.д. до тех пор, пока решение очередной задачи ЛП, не окажется целочисленным.

Подходы к решению ЗЦЛП
Комбинаторные методы

- В основе комбинаторных методов лежит идея перебора всех элементов множества допустимых решений, удовлетворяющих требованию целочисленности, с целью нахождения оптимального решения.
  - Такими методами являются методы ветвей и границ.
  - Различные методы типа ветвей и границ существенно используют специфику конкретной задачи и заметно отличаются друг от друга.
  - Все они основаны на последовательном разбиении допустимого множества на подмножества (ветвление) и вычислении оценок (границ), позволяющих отбрасывать подмножества, заведомо не содержащие решений задачи.

Подходы к решению ЗЦЛП

Общая идея методов ветвей и границ

Задача: $\min_{x \in X} f(x)$

1) В зависимости от специфики задачи выбирается некоторый способ вычисления оценок снизу $d(X')$, функции $f(x)$ на множествах $X' \subset X$:
(в частности может быть $X' = X$)
$f(x) \geq d(X')$, $x \in X'$.
Оценка снизу часто вычисляется путем релаксации, т.е. замены задачи минимизации $f(x)$ по множеству X' задачей минимизации по некоторому более широкому множеству. (Например, релаксацией целочисленного или частично целочисленной задачи может состоять в отбрасывании требования целочисленности.)

2) Выбирается также правило ветвления, состоящее в выборе разветвляемого подмножества X' из числа подмножеств, на которые к данному шагу разбито множество X, и выборе способа разбиения X' на непересекающиеся подмножества.
Обычно из числа кандидатов на ветвление выбирается множество X' с наименьшей оценкой, поскольку именно в таком множестве естественно искать минимум в первую очередь.
При этом рассматриваются только такие способы вычисления оценок снизу, в которых оценки для подмножеств, получившихся в результате разветвления X' не меньше $d(X')$.

Метод отсечений Гомори
1. Полностью целочисленная задача

Рассмотрим полностью целочисленную задачу, представленную в канонической форме:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}, x_j \in N_0, j = \overline{1, n}$$

Будем считать, что c_j, a_{ij}, b_j Є Z.

Метод отсечений Гомори

1. Полностью целочисленная задача

Иначе строим правильное отсечение.

Для этого выбираем любое базисное x_i^*, которому соответствует нецелое значение, и выписываем *i*-ую строку оптимальной симплекс-таблицы.

$$x_i + \sum_{j \in S} a_{ij}^* x_j = b_i^* \qquad (1)$$

где *S* – множество индексов свободных переменных.

Полагая, что в (1) все переменные целочисленные, получаем:

$\sum_{j \in S} a_{ij}^* x_j - b_i^* = a \in Z$ для любых d_j Є *Z* существует *d* Є *Z*:

$$\sum_{j \in S} (a_{ij}^* - d_j) x_j - (b_i^* - d_i) = d$$

при этом, если считать $d_j = [a_{ij}^*], j \in S, d_i = [b_i^*]$ получим:

$$\sum_{j \in S} \gamma_{ij} x_j = d + \gamma_i, d \in Z \qquad (2)$$

где $\gamma_{ij} = \{a_{ij}^*\}, \gamma_i = \{b_i^*\}$

Метод отсечений Гомори
1. Полностью целочисленная задача

$$\sum_{j\in S}\{a_{ij}^*\}x_j = d + \{b_i^*\}, d \in Z$$

Т.к. левая часть равенства (2) является неотрицательной

($\gamma_{ij} \geq 0,\ x_j \geq 0$), то d Є N_0 и

отсечение Гомори:

$$\sum_{j\in S}\{a_{ij}^*\}x_j \geq \{b_i^*\}$$

Метод отсечений Гомори
2. Частично-целочисленная задача

Из (1) следует, что

$$x_i + \sum_{j \in S} a_{ij}^* x_j = [b_i^*] + \{b_i^*\} \quad (3)$$

$$x_i - [b_i^*] = \{b_i^*\} - \sum_{j \in S} a_{ij}^* x_j$$

при этом для переменной x_i, удовлетворяющей требованию Є N_0 выполняется одно из условий:

а) $x_i \le [b_i^*]$ б) $x_i \ge [b_i^*] + 1$

Согласно (3) эти условия могут быть представлены в следующем виде:

$$\sum_{j \in S} a_{ij}^* x_j \ge \{b_i^*\} \quad (4) \qquad \sum_{j \in S} a_{ij}^* x_j \le \{b_i^*\} - 1 \quad (5)$$

Метод отсечений Гомори
2. Частично-целочисленная задача

Пусть S^+ - множество значений j: $a_{ij}^* \geq 0$

S^- - множество значений j: $a_{ij}^* < 0$ $\quad S = S^+ \cup S^-$

Из (4) следует, что $\sum\limits_{j \in S^+} a_{ij}^* x_j \geq \{b_i^*\}$ (6)

а (5) может быть преобразовано к следующему неравенству:

$\sum\limits_{j \in S^-} a_{ij}^* x_j \leq \{b_i^*\} - 1$ или $\dfrac{\{b_i^*\}}{\{b_i^*\} - 1} \sum\limits_{j \in S^-} a_{ij}^* x_j \geq \{b_i^*\}$ (7)

Метод отсечений Гомори

2. Частично-целочисленная задача

Неравенства (4), (5) и следствия из них (6), (7) не могут выполняться одновременно. Но независимо от того, какой случай имеет место, для каждого допустимого решения будет выполняться ограничение:

$$\sum_{j \in S^+} a_{ij}^* x_j + \frac{\{b_i^*\}}{\{b_i^*\} - 1} \sum_{j \in S^-} a_{ij}^* x_j \geq \{b_i^*\} \quad (8)$$

Неравенство (8) определяет новое дополнительное ограничение.
Это ограничение получено без учета требования целочисленности для некоторых переменных модели.

$$\sum_{j \in S^+} (a_{ij}^* - [a_{ij}^*]) x_j + \frac{\{b_i^*\}}{1 - \{b_i^*\}} \sum_{j \in S^-} (1 - \{a_{ij}^*\}) x_j \geq \{b_i^*\} - [a_{ij}^*]$$

Метод отсечений Гомори
2. Частично-целочисленная задача

$$\sum_{j\in S^+} a_{ij}^* x_j + \frac{\{b_i^*\}}{\{b_i^*\}-1}\sum_{j\in S^-} a_{ij}^* x_j \ge \{b_i^*\} \quad (8)$$

(8) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j\in S} \gamma_{ij} x_j \ge \{b_i^*\}$$

для переменных, которые могут быть нецелыми:

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\{b_i^*\}}{\{b_i^*\}-1} a_{ij}^*, \textit{ если } a_{ij}^* < 0 \\ a_{ij}^*, \textit{ если } a_{ij}^* \ge 0 \end{cases},$$

для переменных, которые могут быть только целыми:

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \{a_{ij}^*\}, \textit{ если } \{a_{ij}^*\} \le \{b_i^*\} \\ \dfrac{1-\{a_{ij}^*\}}{1-\{b_i^*\}}\{b_i^*\}, \textit{ если } \{a_{ij}^*\} > \{b_i^*\} \end{cases}$$

Метод отсечений Гомори
Пример

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 \le 2{,}5 \\ x_2 \le 2{,}5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N_0$$

Метод отсечений Гомори
Пример

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 \le 2{,}5 \\ x_2 \le 2{,}5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N_0$$

$$x_{max} = (2{,}5; 2{,}5)$$

Метод отсечений Гомори
Пример

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 \le 2{,}5 \\ x_2 \le 2{,}5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N_0$$

$$x_{max} = (2{,}5; 2{,}5)$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2{,}5 \\ x_2 + x_4 = 2{,}5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N_0, x_3, x_4 \ge 0$$

баз	Сб	B	1	1	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	2,5	1	0	1	0
A_2	1	2,5	0	1	0	1
			0	0	-1	-1

Метод отсечений Гомори
Пример

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 \le 2{,}5 \\ x_2 \le 2{,}5 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \in N_0$$

$$x_{max} = (2{,}5; 2{,}5)$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2{,}5 \\ x_2 + x_4 = 2{,}5 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \in N_0, x_3, x_4 \ge 0$$

баз	Сб	B	1	1	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	2,5	1	0	1	0
A_2	1	2,5	0	1	0	1
			0	0	-1	-1

$$\{1\} \cdot x_1 + \{0\} \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \ge \{2{,}5\}$$
$$x_3 \ge 0{,}5$$

Метод отсечений Гомори
Пример

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 \le 2{,}5 \\ x_2 \le 2{,}5 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \in N_0$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2{,}5 \\ x_2 + x_4 = 2{,}5 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \in N_0, x_3, x_4 \ge 0$$

$$x_{max} = (2{,}5; 2{,}5)$$

баз	Сб	B	1	1	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	2,5	1	0	1	0
A_2	1	2,5	0	1	0	1
			0	0	-1	-1

$$\{1\} \cdot x_1 + \{0\} \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \ge \{2{,}5\}$$
$$x_3 \ge 0{,}5$$
$$x_3 = 2{,}5 - x_1$$
$$2{,}5 - x_1 \ge 0{,}5$$
$$x_1 \le 2$$

Метод отсечений Гомори
Пример

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 2{,}5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N_0, x_3, x_4 \geq 0$$

баз	Сб	B	1	1	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	2	1	0	1	0
A_2	1	2,5	0	1	0	1
			0	0	-1	-1

$x_{max} = (2; 2{,}5)$

Метод отсечений Гомори
Пример

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 2{,}5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N_0, x_3, x_4 \geq 0$$

баз	Сб	B	1	1	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	2	1	0	1	0
A_2	1	2,5	0	1	0	1
			0	0	-1	-1

$$x_{max} = (2; 2{,}5)$$

$$\{0\} \cdot x_1 + \{1\} \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 \geq \{2{,}5\}$$

$$x_4 \geq 0{,}5$$

$$x_4 = 2{,}5 - x_2$$

$$2{,}5 - x_2 \geq 0{,}5$$

$$x_2 \leq 2$$

Метод отсечений Гомори
Пример

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N_0, x_3, x_4 \geq 0$$

баз	Сб	B	1	1	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	2	1	0	1	0
A_2	1	2	0	1	0	1
			0	0	-1	-1

$$x_{max} = (2; 2)$$

Ошибки в данной презентации искали Котовану и Павлов.

Ошибки:
Слайд 3 : добавить $x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$