1 Анализ устойчивости двойственных оценок

1.1 Максимальные значения целевой функции

Будем рассматривать максимальные значения целевой функции прямой задачи как функцию свободных членов системы ограничений:

$$F_{\max}(b_1, \ldots, b_m).$$

Утверждение 1. *В оптимальном плане двойственной задачи значение переменной y_i^* численно равно частной производной функции*

$$F_{\max}(b_1, \ldots, b_m)$$

по соответствующему аргументу:

$$\frac{\partial F_{\max}}{\partial b_i} = y_i^*, \quad i = \overline{1, m}.$$

Двойственные оценки ресурсов показывают, на сколько единиц изменяется доход (F) от реализации продукции при изменении запаса соответствующего ресурса на одну единицу.

Большей оценке соответствует наиболее дефицитный ресурс. Для недефицитного ресурса $y_i^* = 0$.

1.2 Интервалы устойчивости

Представляет интерес определить такие интервалы изменения b_i, в которых оптимальный план двойственной задачи не меняется.

$$x_b^* = A_B^{-1}(b + \Delta b) = A_B^{-1} b + A_B^{-1} \Delta b = x_b + A_B^{-1} \Delta b$$

Это имеет место для всех тех значений $b_i + \Delta b_i$, при которых x_b^* не содержит отрицательных (т.е. являются допустимым решением).

$$A_B^{-1} \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ \vdots \\ b_m + \Delta b_m \end{pmatrix} \geq 0$$

Определим интервалы устойчивости для нашей задачи:

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 180 \\ 210 \\ 800 \end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1}(b+\Delta b) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 180+\Delta b_1 \\ 210+\Delta b_2 \\ 800+\Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95-\frac{1}{2}\cdot\Delta b_2+\frac{1}{4}\cdot\Delta b_3 \\ 85+\Delta b_1+\frac{1}{2}\cdot\Delta b_2-\frac{1}{4}\cdot\Delta b_3 \\ 210+\Delta b_2 \end{pmatrix} \geq$$

Частные случаи

1) Если $\Delta b_2 = 0$, $\Delta b_3 = 0$:

$$85+\Delta b_1 \geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \geq -85$$

2) Если $\Delta b_1 = 0$, $\Delta b_3 = 0$:

$$\begin{cases} 95-\frac{1}{2}\cdot\Delta b_2 \geq 0 \\ 210+\Delta b_2 \geq 0 \\ 85+\frac{1}{2}\cdot\Delta b_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta b_2 \leq 190 \\ \Delta b_2 \geq -210 \\ \Delta b_2 \geq -170 \end{cases} \quad \Rightarrow -170 \leq \Delta b_2 \leq 190$$

3) Если $\Delta b_1 = 0$, $\Delta b_2 = 0$:

$$\begin{cases} 95+\frac{1}{4}\cdot\Delta b_3 \geq 0 \\ 85-\frac{1}{4}\cdot\Delta b_3 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta b_3 \geq -380 \\ \Delta b_3 \leq 340 \end{cases} \quad \Rightarrow -380 \leq \Delta b_3 \leq 340$$

$\Rightarrow$ Интервалы изменения ресурсов:

$$210-170 \leq b_2 \leq 210+190 \quad 800-380 \leq b_3 \leq 800+380$$

$$40 \leq b_2 \leq 400 \quad 420 \leq b_3 \leq 1140$$

Первый вид ресурса в оптимальном плане недоиспользован, является недефицитным. Увеличение данного ресурса приведёт лишь к росту его остатка. При этом изменений в оптимальном плане не будет, т.к. $y_1^* = 0$.

Предельные значения изменения всякого из ресурсов, для которого двойственные оценки остаются неизменными, определяются следующим образом:

$$\Delta b_i^- = \max_{x_{ji}>0} \begin{cases} -x_j^* \\ x_{ji} \end{cases} \leq \Delta b_i \leq \min_{x_{ji}<0} \begin{cases} -95 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$-85 \leq \Delta b_1$$

$$-170 \leq \Delta b_2 \leq 190$$

$$\max_{x_{ji}>0} \begin{cases} -95 \\ \frac{1}{4} \end{cases} \leq \Delta b_3 \leq \begin{cases} -85 \\ -\frac{1}{4} \end{cases} \qquad -380 \leq \Delta b_3 \leq 340$$

1.3 Интервалы устойчивости с точки зрения дохода изделия

Аналогично можно определить интервалы устойчивости с точки зрения дохода изделия.

$$\max_{x_{jk}<0}\left\{\frac{x_j^*}{x_{jk}}\right\} \le x_k \le \min_{x_{jk}>0}\left\{\frac{x_j^*}{x_{jk}}\right\}$$

Пример для x_3 и x_4:

$$\max\left\{\frac{95}{-\frac{3}{2}}\right\} \le x_3 \le \min\left\{\frac{85}{\frac{7}{2}}, \frac{210}{3}\right\} \quad -60 \le x_3 \le \left[\frac{170}{7}\right] = 24$$

$$\max\{Q\} \le x_4 \le \min\left\{\frac{85}{1}, \frac{210}{2}\right\} = 85 \quad x_4 \le 85$$

$\Rightarrow$ В производство можно вводить изделие C до 24 единиц или изделие D до 85 единиц.