Лекция
Симплекс-метод

Домашова Д.В.

Идея симплекс-метода решения задачи ЛП

Свойства задачи линейного программирования наталкивают на следующую схему решения задачи линейного программирования, известную, как симплекс-метод.

Пусть рассматриваемая задача имеет непустое допустимое множество с вершинами.

Тогда:

- Тем или иным способом находим какую-нибудь вершину допустимого множества и по определенным критериям определяем, не является ли она оптимальной.

Если она оптимальна, то задача решена. Если нет, то

- используя определенные правила, проверяем, нельзя ли утверждать, что задача не имеет оптимального решения (целевая функция не ограничена сверху или, соответственно, снизу на допустимом множестве).

Если утверждать это можно, то задача неразрешима. Если нельзя, то

- по определенному правилу ищем новую, лучшую (в смысле значения целевой функции) вершину и переходим к пункту 1).

Идея симплекс-метода решения задачи ЛП

Для реализации предложенной схемы необходимо:

- указать способ нахождения вершины допустимого множества,
- критерии оптимальности, неразрешимости,
- способ перехода от одной вершины к другой, лучшей в смысле значения целевой функции.

Линейное программирование

Каноническая форма

Задачу линейного программирования представленную в виде:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to max(min)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (3)$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,n}$$

будем называть канонической задачей линейного программирования.

Линейное программирование
Приведение к канонической форме

Введем две дополнительные неотрицательные переменные x_4 и x_5 в первом и третьем ограничениях, так, чтобы получились ограничения-неравенства.

Переменную x_3 представим в виде: $x_3 = x_3' - x_3''$, где $x_3' \geq 0$, $x_3'' \geq 0$.

Получим: $F = x_1 - 2x_1 + x_3' - x_3'' \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4(x_3' - 3x_3'') = 3 \\ - x_1 + x_2 - (x_3' - x_3'') - x_5 = 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3' \geq 0,\ x_3'' \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0\ , \end{cases}$$

Получили задачу в канонической форме.

Линейное программирование

Задача ЛП в векторном виде

Введем в рассмотрение:

$$\overline{C} = (c_1, c_2, ..., c_n), \quad \overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Перепишем задачу (3) линейного программирования в векторной форме:

$$f = (c, x) \to \max$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Линейное программирование

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to max$$

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$
$$x_1 \geq 0, \ \ldots, \ x_m \geq 0$$

Введем в рассмотрение векторы

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,n}$$

$$f = (c, x) \to max$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = b$$

$$x \geq 0$$

Задачу ЛП можно трактовать следующим образом: из всех разложений вектора ***b*** по векторам ***A1...An*** с неотрицательными коэффициентами требуется выбрать хотя бы одно такое, коэффициенты ***xj, j=l,n***, которого доставляют целевой функции ***f*** оптимальное значение.

Не ограничивая общности, считаем ранг матрицы ***A*** равным *m* и *n>m* (случай *n=m* – тривиален).

Опорные точки допустимого множества

Определение. Ненулевое допустимое решение $x = (x_1 ,..., x_n)$ называется опорным, если векторы $\boldsymbol{A_j}$, соответствующие отличным от нуля координатам вектора x, линейно - независимы.

Определение. Ненулевое опорное решение назовем невырожденным, если оно имеет точно $\boldsymbol{m}$ положительных координат.

Определение. Если число положительных координат опорного решения меньше $\boldsymbol{m}$, то оно называется вырожденным.

Определение. Упорядоченный набор из $\boldsymbol{m}$ линейно-независимых векторов $\boldsymbol{A_j}$, соответствующих положительным координатам опорного решения назовем базисом.

Опорные точки допустимого множества

Пример. Дана система ограничений задачи:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$
$$x_1 - 2x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

Здесь ***m=2***;

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Классифицировать точки:

$$\overline{x}^{(1)} = (0,2,0,1),\quad \overline{x}^{(2)} = (1,0,0,0),\quad \overline{x}^{(3)} = (1/2, 1, 0, 1/2)$$

Опорные точки допустимого множества
Теорема о связи опорного решения и вершины допустимого множества

Теорема.

Вектор $X=(x_1,\ldots,x_n)$ тогда и только тогда является опорным решением задачи, когда точка $X=(x_1,\ldots,x_n)$ является вершиной допустимого множества.

Таким образом, задача нахождения вершины допустимого множества свелась к задаче нахождения опорного решения, а, следовательно, к нахождению базиса.

Будем считать, что исходный базис $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_m}$ дан.
Отправляясь от него, покажем, как найти опорное решение.
Сформулируем условие оптимальности решения, условие отсутствия решения.
Покажем, как перейти к базису, дающему лучшее решение.

Симплекс-метод

$$f=(c,x)\to\max$$
$$Ax=b$$
$$x\geq 0$$
$$rg\ A=m$$

$A_1,\dots,A_m$ - базис, $\Rightarrow$

$$A_B=\left[A_1\dots A_m\right],\ A_s=\left[A_{m+1}\dots A_n\right]$$
$$A=\left[A_B,A_s\right]$$
$$x=\left[x_B,x_s\right],\ c=\left[c_B,c_s\right]$$

Симплекс-метод

$$A_x = b \Leftrightarrow$$

$$A_B x_B + A_s x_s = b$$

$$\Rightarrow$$

$$x_B + A_B^{-1} A_s x_s = A_B^{-1} b$$

$$x_B = A_B^{-1}(b - A_s x_s) \Rightarrow$$

$$x^0 = \left[A_B^{-1}(b - A_s x_s), 0\right] = \left[A_B^{-1} b, 0\right]$$

Симплекс-метод

$$f(x) = c_B x_B + c_s x_s =$$

Симплекс-метод

$$f(x) = c_B x_B + c_s x_s =$$

$$= c_B \left(A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_s x_s \right) + c_s x_s =$$

Симплекс-метод

$$f(x) = c_B x_B + c_s x_s =$$
$$= c_B \left(A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_s x_s \right) + c_s x_s =$$
$$= c_B A_B^{-1} b + \left(c_s - c_B A_B^{-1} A_s \right) x_s$$

Симплекс-метод

$$f(x) = c_B x_B + c_s x_s =$$
$$= c_B\left(A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_s x_s\right) + c_s x_s =$$
$$= c_B A_B^{-1} b + \left(c_s - c_B A_B^{-1} A_s\right) x_s$$

$$f\left(x^{on}\right) = c_B A_B^{-1} b, \qquad \text{т.к. } x_s = 0 \Rightarrow$$

$$f(x) = f\left(x^{on}\right) + \left(c_s - c_B A_B^{-1} A_s\right) x_s$$

$$\Delta_s = c_s - c_B A_B^{-1} A_s, \qquad s = \overline{m+1, n} \Rightarrow$$

$$f(x) = f\left(x^{on}\right) + \Delta_s x_s = f\left(x^{on}\right) + \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j$$

Симплекс-метод

Идея симплекс-метода состоит в том, чтобы исходя из начального опорного решения найти новое опорное решение, исключая для этого некоторый вектор A_s, $s \in \{1,\ldots,m\}$ из начального базиса и заменяя его одним из небазисных векторов A_r, $r \in \{m+1,\ldots n\}$ таким образом, чтобы новое опорное решение не ухудшало значения целевой функции.

Симплекс-метод

Выводы:

1) небазисный A_r имеет смысл вводить в новый базис, если $\Delta_r > 0$;

2) причем лучше всего такой A_r, у которого $\Delta_r > 0$ и самая большая из всех $r = \overline{m+1,n}$;

3) если все $\Delta_j \le 0,\ j = \overline{1,n}$, то значение целевой функции улучшить нельзя, следовательно, рассматриваемое опорное решение является оптимальным.

Симплекс-метод

Определим, какой вектор должен быть исключен из базиса.

Так как A_B – базис в R^m $\Rightarrow$ все столбцы матрицы A и b можно представить в виде линейных комбинаций данных столбцов

$$b = \sum_{j=1}^{m} A_j x_{j0} = [A_1, \ldots A_m] \begin{pmatrix} x_{10} \\ \ldots \\ x_{m0} \end{pmatrix} = A_B x^0$$

$$A_k = \sum_{j=1}^{m} A_j x_{jk} = [A_1, \ldots, A_m] \begin{pmatrix} x_{1k} \\ \ldots \\ x_{mk} \end{pmatrix} = A_B x^k \Rightarrow$$

Симплекс-метод

$$b=\sum_{j=1}^{m}A_j x_{j0}=[A_1,\ldots A_m]\begin{pmatrix}x_{10}\\ \ldots\\ x_{m0}\end{pmatrix}=A_B x^0$$

$$A_k=\sum_{j=1}^{m}A_j x_{jk}=[A_1,\ldots,A_m]\begin{pmatrix}x_{1k}\\ \ldots\\ x_{mk}\end{pmatrix}=A_B x^k \Rightarrow$$

$$\begin{cases}x^0=A_B^{-1}b-\text{ненулевые координаты опорной точки}\\ x^k=A_B^{-1}A_k,\ k=\overline{1,n}-\text{координаты разложения вектора } A_k \text{ по базису}\end{cases}$$

$$\Delta_k=c_k-c_B A_B^{-1}A_k=c_k-c_B x^k=c_k-\sum_{j=1}^{m}c_{j+m}x_{jk}$$

Симплекс-метод

Новый базис получим из старого путем замены в нем некоторого базисного вектора A_s таким вектором A_r, который должен обеспечивать получение нового допустимого базисного решения, т.е. координаты вектора x_B должны быть ≥ 0.

$$x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_s x_s = A_B^{-1}b - A_B^{-1}\sum_{j=m+1}^{n} A_j x_j = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_r x_r,$$

т.к. только новая базисная переменная $x_r>0$, все остальные небазисные переменные $x_j = 0,\ j = \overline{m+1,n} \setminus r$

$$x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_r x_r$$

$A_B^{-1}b$ – ненулевые координаты опорной точки

$A_B^{-1}A_r$ – координаты разложения вектора A_{r} по базису

Симплекс-метод

правило выбора вектора, выводимого из базиса

Запишем в покоординатной форме.

$$x_{Bi} = x_{i0} - x_{ir} x_r \;, \; i = \overline{1,m}$$

Все $x_{Bi} \geq 0$, следовательно, $x_{i0} - x_{ir} x_r \geq 0 \; i = \overline{1,m}$.

Пусть $I \subset \{1,\ldots,m\}$ - множество индексов, для которых $x_{ir} > 0$

$$I = \{i : x_{ir} > 0\}$$

Найдем максимальное значение, до которого можно увеличивать значение переменной x_r:

$$x_r^{\max} = \min_{i \in I} \frac{x_{i0}}{x_{ir}}$$

Если $x_r := x_r^{\max}$, то, по крайней мере, одна базисная переменная x_s, где $s \in \{1,\ldots,m\}$ обратится в ноль и, следовательно, соответствующий ей столбец A_s матрицы A можно вывести из старого базиса.

Симплекс-метод

правило выбора вектора, выводимого из базиса

Выводится тот вектор As, для которого отношение координат опорного решения к положительным координатам разложения вектора Ar по базису является минимальным

$$\frac{x_{s0}}{x_{sr}} = \min_{i \in I} \frac{x_{i0}}{x_{ir}}$$

Симплекс-метод

Критерий отсутствия решения

Существует $\Delta_r > 0$, такая, что если все $x_{ir} \leq 0, i = \overline{1,m}$, то задача не имеет решения, т.е. существуют допустимые решения со сколь угодно большим значением целевой функции.

В этих случаях говорят, что целевая функция не ограничена сверху в допустимой области

Алгоритм Симплекс-метода

1. Для известного начального базиса находят координаты разложения векторов *b* и A_k $k=\overline{1,n}$ по базису:

$$\begin{cases} x^0 = A_B^{-1}b - \text{ненулевые координаты опорной точки} \\ x^k = A_B^{-1}A_k,\ k=\overline{1,n} - \text{координаты разложения вектора } A_k \text{ по базису} \end{cases}$$

2. Вычисляют симплекс-разности:

$$\Delta_k = c_k - c_B A_B^{-1} A_k,\ k=\overline{1,n}$$

3. Проверяют план на оптимальность:

Если все $\Delta_k \le 0,\ k=\overline{1,n},$

то решение оптимально.

4. Проверяется критерий отсутствия решения:

Если $\exists\,\Delta_r > 0: \text{все } x_{ir} \le 0,\ i=\overline{1,m}$, то целевая функция не ограничена сверху в допустимой области.

5. Определяют вектор A_r, вводимый в базис: $\Delta_r > 0$ и максимальная среди всех положительных $\Delta_k,\ k=\overline{1,n}$

6. Определяют вектор A_s, выводимый из базиса.

$$A_s : \frac{x_{s0}}{x_{sr}} = \min_{i\in I} \frac{x_{i0}}{x_{ir}} \quad (x_{ir} > 0) \Rightarrow \text{строим новый базис и переходим в п.1}$$

Алгоритм Симплекс-метода

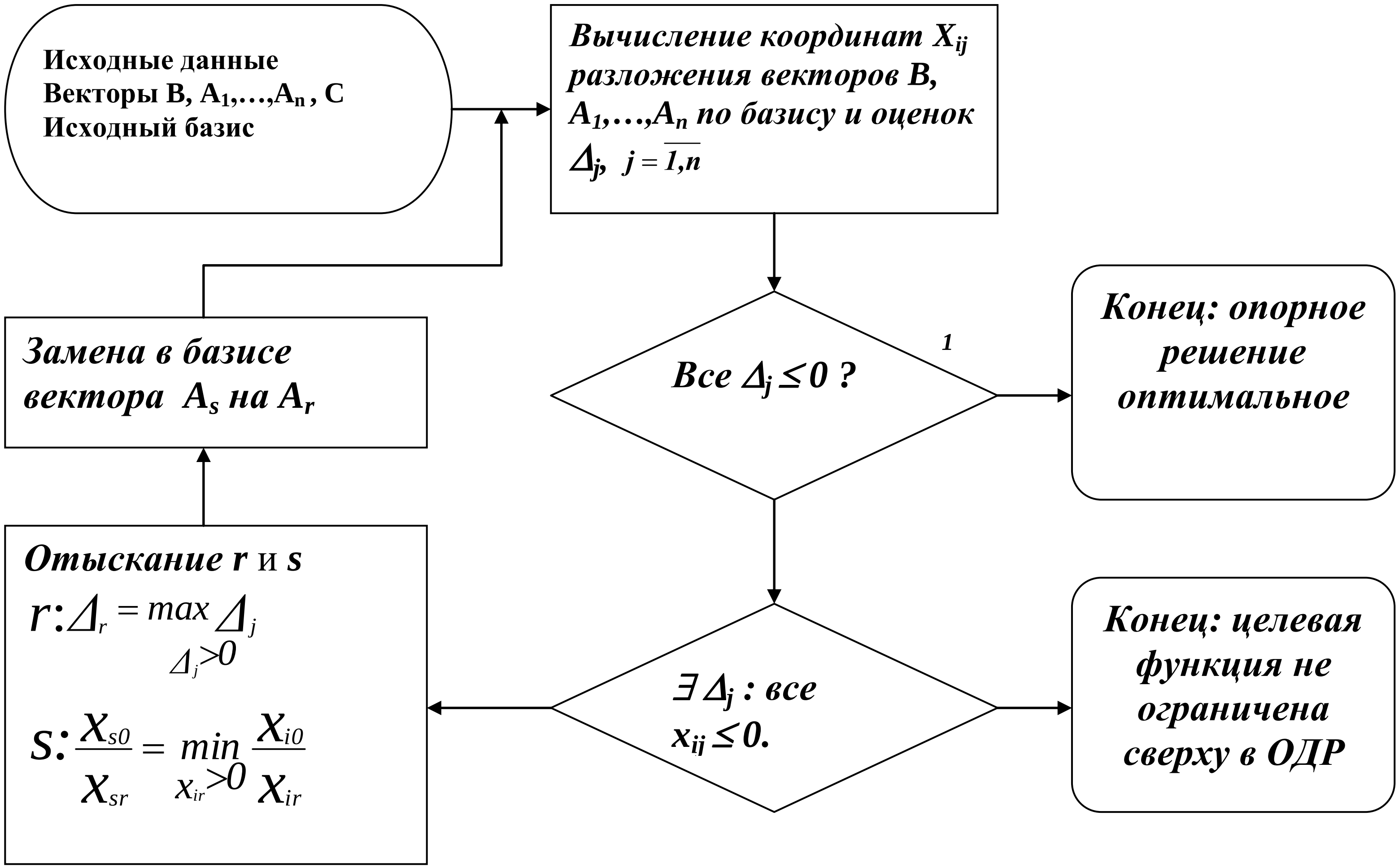


Рис. 3.

Симплекс-метод

Формулы пересчета координат разложения векторов по новому базису

$$x'_{jk} = \begin{cases} x_{jk} - \dfrac{x_{jr}}{x_{sr}} x_{sk}, \text{ если } j \in I \setminus s \\ \dfrac{x_{sk}}{x_{sr}}, \text{ если } j = r \end{cases}$$

Симплекс-метод

Формулы пересчета координат разложения векторов по новому базису

Доказательство

1) Вектор A_k через старый базис:

$$A_k = \sum_{j \in I} A_j x_{jk}, \quad k = \overline{1,n}$$

2) Вектор A_k через новый базис:

$$A_k = \sum_{j \in I \setminus s} A_j x'_{jk} = A_r x'_{rk}, \quad k = \overline{1,n}$$

Вектор

$$A_r = \sum_{j \in I} A_j x_{jr} = \sum_{j \in I \setminus s} A_j x_{jr} + A_s x_{sr} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_s = \frac{A_r}{x_{sr}} - \sum_{j \in I \setminus s} A_j \frac{x_{jr}}{x_{sr}}, \quad \text{т.к. } x_{sr} \neq 0$$

Симплекс-метод

Формулы пересчета координат разложения векторов по новому базису

Доказательство

3) Подставим A_s в (1) и получим

$$A_k = \sum_{j \in I \setminus s} A_j x_{jk} + A_s x_{sk} =$$

$$= \sum_{j \in I \setminus s} A_j x_{jk} + \left(A_r \frac{x_{sk}}{x_{sr}} - \sum_{j \in I \setminus s} A_j \frac{x_{jr} x_{sk}}{x_{sr}} \right) =$$

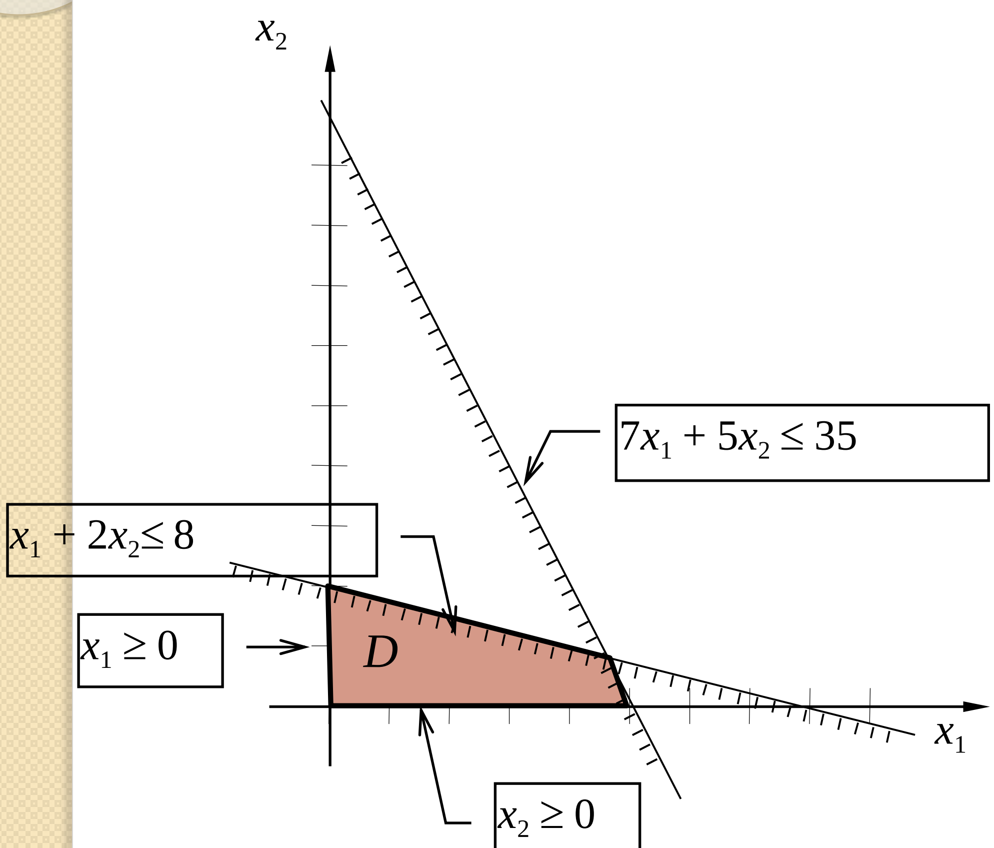
$$= \sum_{j \in I \setminus s} A_j \left(x_{jk} - \frac{x_{jr} x_{sk}}{x_{sr}} \right) + A_r \frac{x_{sk}}{x_{sr}}$$

$$x'_{jk} = \begin{cases} x_{jk} - \dfrac{x_{jr}}{x_{sr}} x_{sk}, & \text{если } j \in I \setminus s \\[2ex] \dfrac{x_{sk}}{x_{sr}}, & \text{если } j = r \end{cases}$$

Симплекс-метод
Симплекс-таблицы

базис	$c_{баз.}$	B	c_1		c_r		c_n
			A_1		A_r		A_n
A_{i1}	c_{i1}	x_{10}	x_{11}		x_{1r}		x_{1n}
…	…	…	…		…		…
A_{is}	c_{is}	x_{s0}	x_{s1}		x_{sr}		x_{sn}
…	…	…	…		…		…
A_{im}	c_{im}	x_{m0}	x_{mr}		x_{mr}		x_{mn}
		$f(x^{on})$	Δ_1		Δ_r		Δ_n

Симплекс-метод
Пример
Геометрическая интерпретация ЗЛП



$$f = 4x1 + 5x2 \to \max (\min)$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$x_{\max} = \left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

$$f_{\max} = 25$$

Симплекс-метод
Пример

Базис	В опор.	С(базис)	А1	А2	А3	А4
А3	35	0	7	5	1	0
А4	8	0	1	2	0	1

Симплекс-метод
Пример

Базис	В опор.	С(базис)	А1	А2	А3	А4
А3	35	0	7	5	1	0
А4	8	0	1	2	0	1
	F=0		d1=-4	d2=-5	d3=0	d4=0

Симплекс-метод
Пример

Базис	В опор.	С(базис)	A1	A2	A3	A4
A3	35	0	7	5	1	0
A4	8	0	1	2	0	1
	F=0		d1=-4	d2=-5	d3=0	d4=0

Базис	В опор.	С(базис)	A1	A2	A3	A4
A3	15	0	4,5	0	1	-2,5
A2	4	5	0,5	1	0	0,5

Симплекс-метод
Пример

Базис	B опор.	C(базис)	A1	A2	A3	A4
A3	35	0	7	5	1	0
A4	8	0	1	2	0	1
	F=0		d1=-4	d2=-5	d3=0	d4=0

Базис	B опор.	C(базис)	A1	A2	A3	A4
A3	15	0	4,5	0	1	-2,5
A2	4	5	0,5	1	0	0,5
	F=20		d1=-1,5	d2=0	d3=0	d4=2,5

Симплекс-метод
Пример

Базис	B опор.	C(базис)	A1	A2	A3	A4
A3	35	0	7	5	1	0
A4	8	0	1	2	0	1
	F=0		d1=-4	d2=-5	d3=0	d4=0

Базис	B опор.	C(базис)	A1	A2	A3	A4
A3	15	0	4,5	0	1	-2,5
A2	4	5	0,5	1	0	0,5
	F=20		d1=-1,5	d2=0	d3=0	d4=2,5

N	Базис	C(базис)	B опор.	A1	A2	A3	A4
1	A1	4	3,333333333	1	0	0,222222222	-0,55555555
2	A2	5	2,333333333	0	1	-0,11111111	0,777777777

Симплекс-метод
Пример

Базис	В опор.	С(базис)	А1	А2	А3	А4
А3	35	0	7	5	1	0
А4	8	0	1	2	0	1
	F=0		d1=-4	d2=-5	d3=0	d4=0

Базис	В опор.	С(базис)	А1	А2	А3	А4
А3	15	0	4,5	0	1	-2,5
А2	4	5	0,5	1	0	0,5
	F=20		d1=-1,5	d2=0	d3=0	d4=2,5

N	Базис	С(базис)	В опор.	А1	А2	А3	А4
1	А1	4	3,333333333	1	0	0,222222222	-0,55555555
2	А2	5	2,333333333	0	1	-0,11111111	0,77777777
				d1=0	d2=0	d3=0,333333	d4=1,666666

Симплекс-метод
Пример

Базис	В опор.	С(базис)	А1	А2	А3	А4
А3	35	0	7	5	1	0
А4	8	0	1	2	0	1
	F=0		d1=-4	d2=-5	d3=0	d4=0

Базис	В опор.	С(базис)	А1	А2	А3	А4
А3	15	0	4,5	0	1	-2,5
А2	4	5	0,5	1	0	0,5
	F=20		d1=-1,5	d2=0	d3=0	d4=2,5

N	Базис	С(базис)	В опор.	А1	А2	А3	А4
1	А1	4	3,333333333	1	0	0,222222222	-0,55555555
2	А2	5	2,333333333	0	1	-0,11111111	0,77777777
				d1=0	d2=0	d3=0,333333	d4=1,66666

Симплекс-метод
Пример

Базис	B опор.	C(базис)	A1	A2	A3	A4
A3	35	0	7	5	1	0
A4	8	0	1	2	0	1
	F=0		d1=-4	d2=-5	d3=0	d4=0

Базис	B опор.	C(базис)	A1	A2	A3	A4
A3	15	0	4,5	0	1	-2,5
A2	4	5	0,5	1	0	0,5
	F=20		d1=-1,5	d2=0	d3=0	d4=2,5

N	Базис	C(базис)	B опор.	A1	A2	A3	A4
1	A1	4	3,33333333	1	0	0,22222222	-0,5555555
2	A2	5	2,33333333	0	1	-0,1111111	0,77777777
				d1=0	d2=0	d3=0,33333	d4=1,66666

Симплекс-метод
Поиск начальной опорной точки методом искусственного базиса

Будем считать, что для задачи (1)

$$<c,x>\to \max$$
$$D: Ax=b,\ \ x\geq 0 \qquad (1)$$

выполнено условие $b\geq 0$

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$-\sum_{i=1}^{m} y_i \to \max \quad (2)$$
$$\widetilde{D}: Ax+y=b,\ \ x\geq 0,\ y\geq 0$$
$$\widetilde{D}=\left\{(x,y)\in R_{n+m}: \sum_{j=1}^{n} A_j x_j + \sum_{i=1}^{m} e_i y_i = b,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\} \Rightarrow$$

$(\overline{0},b)$ - опорная точка в $\overline{D}$.

Целевая функция вспомогательной задачи ограничена сверху нулем (0). Следовательно, эта задача имеет оптимальное решение.

Симплекс-метод

Поиск начальной опорной точки методом искусственного базиса

$$G = -y_1 - y_2 - \ldots - y_m \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + 0y_1 + y_2 = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + 0y_1 + \ldots + y_m = b_m \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \\ y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m} \end{array}$$

Переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ – называют искусственными переменными.

Очевидно, что векторы $A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; A_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, \; A_{n+m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

образуют базис для опорного решения $x = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, b_1, b_2, \ldots, b_m)$,

который называют искусственным базисом.

Симплекс-метод
Поиск начальной опорной точки методом искусственного базиса

Утверждение.

Пусть (x^*, y^*) – решение задачи (2) и $f^* = -\sum_{i=1}^{m} y_i^*$

Если $f^*=0$, то x^* - опорная точка множества D.
Если $f^*<0$, то задача (1) не имеет допустимых точек: множество D - *пусто*.

Доказательство:

1) Если $f^*=0$, $y^*=0$, то $(x^*,0)$ – опорная точка множества $\tilde{D}$ и D, следовательно, оптимальный базис вспомогательной задачи можно взять в качестве начального для задачи (1).

2) Если $f^*<0$, то, если $\exists x \in D \Rightarrow \exists (x,0) \in \tilde{D}$, что несовместимо с условием $f^*<0 \Rightarrow$ задача (1) не имеет область допустимых решений.

Симплекс-метод
Поиск начальной опорной точки методом искусственного базиса

Решая вспомогательную задачу симплекс-методом, мы найдем оптимальное решение $x^{(0)} = (x_1^{(0)},..., x_n^{(0)}, y_1^{(0)},..., y_m^{(0)})$.

Если в этом решении среди искусственных переменных есть положительные, то исходная задача линейного программирования неразрешима, так ее ОДР пуста.

Если же $y_i^{(0)} = 0,\ i = \overline{1,m}$, то базис, соответствующий оптимальному решению вспомогательной задачи, можно взять в качестве исходного базиса основной задачи.

Поиск начальной опорной точки методом искусственного базиса
Пример

$$F = 5x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 \le 30 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 = 30 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ \end{cases}$$

$$\overline{n} = \overline{grad} F = (5,2)$$

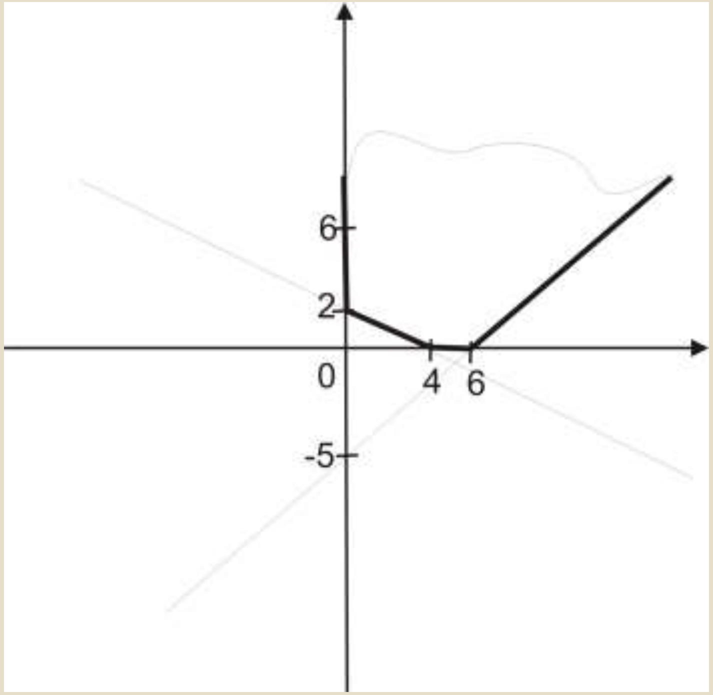
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

$$x\,(0;\,2)$$

$$F = 4$$

$$x_{\min} = (0,\,2)$$

$$F(x_{\min}) = 4$$



Поиск начальной опорной точки методом искусственного базиса
Пример

$$F = 5x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 = 30 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 x_3 \ge 0 x_4 \ge 0$$

$$G = -y_1 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 = 30 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + y_1 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 x_3 \ge 0 x_4 \ge 0 y_1 \ge 0$$

Базис	$С_{баз}$	$\overline{B}$ (опорное решение)	0	0	0	0	-1
			$\overline{A_1}$	$\overline{A_2}$	$\overline{A_3}$	$\overline{A_4}$	$\overline{A_5}$
$\overline{A_3}$	0	30	5	-6	1	0	0
$\overline{A5}$	-1	4	1	2	0	-1	1
Оценки		F=0	$\Delta_1 = 1$	$\Delta_2 = 2$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = -1$	$\Delta_5 = 0$

Замечания

- Проблема зацикливания.
  - Вырожденные планы могут привести к зацикливанию, т.е. к многократному повторению процесса вычислений, не позволяющему получить оптимальный план.
  - Можно использовать метод Крено: Элементы строк, имеющие одинаковые наименьшие симплексные отклонения, делятся на предполагаемые разрешающие элементы. За ведущую выбирается та сторона, в которой раньше встретится наименьшее частное при просмотре слева направо по столбцам.
- Бесчисленное множество решений
  - Если в строке Δ оптимального плана находится нуль, принадлежащий свободной переменной, вектор которой не входит в базис, а в столбце этого вектора имеется хотя бы один положительный элемент, то задача имеет бесчисленное множество решений.
  - Свободные переменные можно ввести в базис, в результате будет получен новый оптимальный план с другим набором базисных переменных.

<u>Проверяли</u>: Абаева Зарина и Бакшеева Татьяна (С18-702)

Список опечаток :

№ слайда	Ошибка	Исправление
5	Опечатка в целевой функции	$F = x_1 - 2x_2 + x'_3$ -x''_3
5	Не расписано x_3 в первом ограничении	$x_1 + 2x_2 + 3\left(x'_3 - x''_3\right) + x_4 = 5$
5	Опечатка во втором ограничении	$2x_1 + 3x_2 - 4\left(x'_3 - x''_3\right) = 3$
12	Опечатка в 1ой строчке	Ax=b
30	Опечатка в индексе последней координаты вектора A1	x_{m1}
45	Последняя строка таблицы, целевая функция	G=-4