1 Классическая задача нелинейного программирования. Метод множителей Лагранжа. Необходимые условия экстремума. Необходимые условия экстремума второго порядка. Достаточные условия экстремума.

Классическая задача на условный экстремум

Постановка задачи

$$f(x) \to \min \quad (4)$$

$$g_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, m} \quad (5)$$

Эта задача — частный случай задачи (1-3), т.к. каждое $g_i(x) = 0$ можно заменить двумя неравенствами:

$$g_i(x) \leq 0, \quad g_i(x) \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

В свою очередь ограничения (2) можно представить:

$$g_i(x) + Z_i^2 = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Метод множителей Лагранжа

Задача условной оптимизации сводится к задаче безусловной оптимизации функции Лагранжа, составленной для этой задачи.

Обобщенная функция Лагранжа для задачи (4-5):

$$L(x, y_0, y) = y_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x), \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, m+1}$$

y_i — множители Лагранжа.

Классическая функция Лагранжа для задачи (4-5):

$$L(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x), \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, m}$$

Теорема 1 (Теорема 1 (Необходимое условие оптимальности))**.** *Пусть функции $f, g_1, \ldots, g_m$ — непрерывно дифференцируемые в некоторой окрестности точки $x^* \in \mathbb{R}^n$. Если x^* — точка локального экстремума задачи (4-5), то $\exists$ числа $y_0^*, y_1^*, \ldots, y_m^*$, не равные нулю одновременно и такие, что выполнены следующие условия:*

1. *Условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x:*

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}\left(x^*, y_0^*, y^*\right) = 0, \quad j = 1, n$$

2. *Условие допустимости решения:* $g_i\left(x^*\right) = 0, \quad i = 1, m$

Если при этом градиенты $g_i'\left(x^*\right)$, $i = 1, m$ в точке x^* линейно независимы (выполняется условие регулярности), то $y_0^* \neq 0$.

Теорема 2 (Необходимое условие экстремума 2-го порядка)**.** *Пусть функции $f(x), g_1(x), \ldots, g_m(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемы в точке $x^* \in \mathbb{R}^n$ и непрерывно дифференцируемы в ее некоторой окрестности, причем градиенты $g_1'(x^*), \ldots, g_m'(x^*)$ - линейно независимы. Если x^* — локальное решение задачи (4-5) (регулярная точка экстремума), то*

$$L''_{xx}(x^*, y^*)h, \quad h > 0 \quad \forall \quad y^*, \quad \text{удовлетворяющих}$$

$$L'_x(x^*, y^*) = 0, \quad g_i'(x^*) = 0, \quad i = 1, m \quad \forall \quad h \in \mathbb{R}^n :$$

$$\langle g_i'(x^*), h\rangle = 0, \quad i = 1, m$$

Теорема 3 (Теорема 3 (Достаточные условия экстремума))**.** *Пусть функции $f, g_1, \ldots, g_m$ дважды дифференцируемы в точке $x^* \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям допустимости $g_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}$ & $\exists y^*$:*

1. $L'_x(x^*, y^*) = 0$

2. $\langle L''_{xx}(x^*, y^*)h, h\rangle > 0 \quad \forall h \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, *для которых* $\langle g_i'(x^*), h\rangle = 0, i = 1, m$

то x^* — строгое локальное решение задачи (4-5).