

# 1 Линейное программирование. Постановка задачи планирования производства, составление смеси (о диете).

## 1.1 Линейное программирование

**Определение 1.** Задача, состоящая в нахождении наибольшего (наименьшего) значения целевой функции  $f = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n \xrightarrow{?} \max(\min)$  на множестве точек  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , удовлетворяющих системе ограничений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n R_1 b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n R_2 b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n R_n b_m \end{cases}$$

называется **задачей линейного программирования общего вида**. Здесь:

- $R_i, i = \overline{1, m}$  — один из знаков  $=, \geq, \leq$ ;
- $C_j, j = \overline{1, n}$  и  $a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$  — заданные константы.

**Определение 2.** Всякую точку  $X = (x_1, \dots, x_n)$ , компоненты которой удовлетворяют системе ограничений, будем называть **допустимой точкой** или **допустимым решением задачи**, или **допустимым планом задачи**.

Задача линейного программирования состоит в нахождении такой допустимой точки  $x$  (такого допустимого плана) среди множества допустимых точек, при которой целевая функция принимает **max(min)** значение.

**Определение 3.** Допустимое решение  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ , доставляющее целевой функции оптимальное значение (оптимум), будем называть **оптимальным решением** или **оптимальным планом задачи**.

**Определение 4.** Задача об оптимальном плане производства продукции

- $n$  видов продукции,  $j = \overline{1, n}$
- $m$  видов ресурсов (сырья),  $i = \overline{1, m}$ ;
- $a_{ij}$  - количество ресурса вида  $i$ , требующегося для производства единицы продукции вида  $j$

- $b_i$  - запасы ресурса вида  $i$
- $c_j$  - доход (прибыль) от реализации единицы продукции вида  $j$

Необходимо найти такой план производства продукции, при котором достигается максимальная прибыль, для реализации которого достаточно имеющихся ресурсов. Задача  $f \rightarrow \max$ ,  $R_i \leq$ ,  $x_j \geq 0$

**Определение 5** (Задача о диете (исторически одна из самых первых)). Условия:

- $n$  — видов кормов,  $j = \overline{1, n}$ ;
- $m$  — видов питательных веществ,  $i = \overline{1, m}$ ;
- $a_{ij}$  — содержание  $i$ -го вида питательного вещества в единице  $j$ -го вида корма;
- $b_i$  — необходимый минимум  $i$ -го питательного вещества в день,  $i = \overline{1, m}$ ;
- $c_j$  — стоимость единицы  $j$ -го вида корма.

Необходимо составить рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.  $f \rightarrow \min$ ,  $x_j \geq 0$ ,  $R_i \geq$