1 Двойственные задачи ЛП в общей форме. Основные теоремы теории двойственности.

Определение 1. *Рассмотрим задачу ЛП в общей форме:*

$$F = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \leq b_k \qquad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,l}, \quad l \leq n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Задача

$$F^* = b_1y_1 + \ldots + b_my_m \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ \vdots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \ldots + a_{ml}y_m \geq c_l \qquad y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,k}, \quad k \leq m \\ \vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m = c_n \end{cases}$$

называется двойственной к исходной задаче ЛП.

	Прямая задача	**Двойственная задача**
1	n — переменных	m — переменных
2	m — ограничений	n — ограничений
3	Ищется max	Ищется min
4	c — вектор коэффициентов целевой функции	b — вектор коэффициентов целевой функции
5	b — вектор свободных членов системы ограничений	c — вектор свободных членов системы ограничений
6	A — матрица коэффициентов системы ограничений	A^T — матрица коэффициентов системы ограничений
7	$x_i \geq 0, \quad j = \overline{1,k}$	j-ое ограничение $\geq$, $j = \overline{1,k}$
8	x_j — не ограничена в знаке, $j = \overline{k+1,n}$	j-ое ограничение $=$, $j = \overline{k+1,n}$
9	i-ое ограничение $\leq$, $i = \overline{1,l}$	$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,l}$
10	i-ое ограничение $=$, $i = \overline{l+1,m}$	y_i — не ограничена в знаке, $i = \overline{l+1,m}$

Теорема 1. *Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причём значения целевых функций задач при их оптимальных планах равны между собой: $F(x^*) = F^*(y^*)$. Если же целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена, то другая задача вообще не имеет планов (ОДР пуста).*

Теорема 2. $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ *и* $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ *– оптимальные решения прямой и двойственной задач* $\iff$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) y_i^* = 0, \quad i = \overline{1, m}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0, \quad j = \overline{1, n}$$

Теорема 3. $y^* = C_b A_B^{-1}$

Доказательство. Пусть прямая задача:

$$F = \langle c, x \rangle \to \max, \quad Ax = b,\ x \geq 0$$

Тогда двойственная:

$$F^* = \langle y, b \rangle \to \min, \quad A^T y \geq c$$

Пусть x^* — оптимальное решение прямой. Тогда:

$$A_B x_b^* = b, \quad A_B^{-1} A_B x_b^* = A_B^{-1} b, \quad x_b^* = A_B^{-1} b.$$

Подставим x^* в целевую функцию:

$$F = \langle c, x^* \rangle = c_b x_b^* = C_b A_B^{-1} b, \quad C_b A_B^{-1} b = y^* b \Rightarrow y^* = C_b A_B^{-1},$$

где:

- C_b — коэффициенты при базисных переменных;
- A_B^{-1} — обратная матрица к матрице, составленной из компонент векторов, вошедших в оптимальный базис (расположена в первых m строках последней (оптимальной) симплекс-таблицы, в столбцах векторов, представляющих начальный базис).

При этом $y^* = C_b A_B^{-1}$ находится в строке Δ. $\square$

Установим соответствие между переменными прямой и двойственной задач в симплекс-таблице:

- основные $X_1 \ldots X_n$
- дополнительные $X_{n+1} \ldots X_{n+m}$
- дополнительные $Y_{m+1} \ldots Y_{m+n}$
- основные $Y_1 \ldots Y_n$