1 Выводимая из базиса переменная в ЗЛП. Вырожденная ЗЛП

Пусть есть задача ЛП в канонической форме. Пусть первые r переменных будут базисными, а остальные — свободными. Разрешим систему ограничений относительно базисных переменных, а также выразим целевую функцию через свободные переменные:

$$f(x) = \gamma_0 - (\gamma_{r+1}x_{r+1} + \dots + \gamma_n x_n)$$

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - (\alpha_{1r+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{1n}x_n) \\ x_i = \beta_i - (\alpha_{ir+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{in}x_n) \\ x_r = \beta_r - (\alpha_{rr+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{rn}x_n) \end{cases}$$

Возьмём все свободные переменные равными нулю. Тогда получим базисное решение $x_i = \beta_i, \quad i = \overline{1, r}$, $\vec{x_b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, 0, \dots, 0)^T$. Значение целевой функции, в свою очередь, равно $f(\vec{x_b}) = \gamma_0$.

Легко заметить, что значение целевой функции можно увеличить только в случае, если имеются $\gamma_j < 0$. Пусть такой имеется, тогда за счёт увеличения x_j можно увеличить значение целевой функции. Возьмём все свободные переменные равными нулю, кроме x_j:

$$f(\vec{x}) = \gamma_0 - \gamma_j x_j$$

$$x_i = \beta_i - \alpha_{ij}x_j, \quad i = \overline{1, r}$$

Если все коэффициенты $\alpha_{ij} \leq 0$, то увеличение x_j может быть неограниченным, это приводит к неограниченному возрастанию целевой функции. В таком случае считается, что задача не имеет решения.

Если же $\alpha_{ij} > 0$, то увеличение x_j приведёт к тому, что базисная переменная x_i будет уменьшаться, пока не станет равна нулю. Это определяется уравнением: $x_i = \beta_i - \alpha_{ij}x_j = 0$. Отсюда $x_j = \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$.

Если несколько $\alpha_{ij} > 0$, то первой в ноль обратится переменная x_l, для которой отношение $\frac{\beta_l}{\alpha_{lj}}$ минимально. Таким образом, нужная переменная выбирается из соотношения

$$\frac{\beta_l}{\alpha_{lj}} = \min_i \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \right\} = \rho$$

Элемент α_{lj} называется разрешающим: он указывает переменную x_l, которую выводят из базиса.

Может оказаться, что $\rho = 0$, тогда целевая функция сохраняет предыдущее значение, хотя переменные меняются. Такой случай называют **вырожденным**.