

1 Метод динамического программирования решения задачи о рюкзаке. Постановка задачи. Рекуррентные соотношения Беллмана.

Задача о рюкзаке

Имеется рюкзак грузоподъемностью W . $weight_i$ – вес одного предмета i -ого типа, $cost_i$ – стоимость (ценность) одного предмета i -ого типа, x_i – число предметов i -ого типа, которые будут загружаться на транспортировочное средство. Требуется заполнить его грузом, состоящим из предметов N различных типов таким образом, чтобы стоимость (ценность) всего груза была максимальной.

$$W(x) = \sum_{i=1}^N x_i \cdot cost_i \rightarrow \max$$

$$\sum_{i=1}^N x_i \cdot weight_i \leq W, \quad x_i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

Решение задачи разбивается на N этапов. На каждом i -ом этапе определяется максимальная стоимость груза, состоящего из предметов типа $k = \overline{1, i}$

Рекуррентное уравнение Беллмана для задачи о рюкзаке

$W_i(weight)$ - максимальная стоимость груза, состоящего из предметов типа $k = \overline{1, i}$ с общим весом не более $weight$.

$$\forall weight: weight \in \overline{0, W}$$

$$W_i(weight) = \max_{x_i \in 0, \left[\frac{weight}{weight_i} \right]} \{x_i \cdot cost_i + W_{i-1}(weight - x_i \cdot weight_i)\}$$

$$\forall weight: weight \in \overline{0, W} \quad W_0(weight) = 0$$