1 Вводимая в базис переменная в ЗЛП. Вектор симп... разностей. Оптимальное базисное решение

Пусть есть задача ЛП в канонической форме. Пусть первые r переменных будут базисными, а остальные — свободными. Разрешим систему ограничений относительно базисных переменных, а также выразим целевую функцию через свободные переменные:

$$f(x) = \gamma_0 - (\gamma_{r+1}x_{r+1} + \cdots + \gamma_n x_n) \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - (\alpha_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha_{1n}x_n) \\ x_i = \beta_i - (\alpha_{ir+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha_{in}x_n) \\ x_r = \beta_r - (\alpha_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha_{rn}x_n) \end{cases}$$

Возьмём все свободные переменные равными нулю. Тогда получим базисное решение $x_i = \beta_i, \quad i = \overline{1,r}$, $\vec{x_b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, 0, \ldots, 0)^T$. Значение целевой функции, в свою очередь, равно $f(\vec{x_b}) = \gamma_0$.

Легко заметить, что значение целевой функции можно увеличить только в случае, если имеются $\gamma_j < 0$. Если же все $\gamma_j \geq 0$, то значение целевой функции увеличить нельзя. Поэтому признаком **оптимальности решения** поставленной задачи максимизации является неотрицательность всех коэффициентов при свободных переменных в выражении (1).

Пусть такой имеется, тогда за счёт увеличения x_j можно увеличить значение целевой функции. Возьмём все свободные переменные равными нулю, кроме x_j:

$$f(\vec{x}) = \gamma_0 - \gamma_j x_j$$

$$x_i = \beta_i - \alpha_{ij}x_j, \quad i = \overline{1,r}$$

Если все коэффициенты $\alpha_{ij} \leq 0$, то увеличение x_j может быть неограниченным, это приводит к неограниченному возрастанию целевой функции. В таком случае считается, что задача не имеет решения.

Если же $\alpha_{ij} > 0$, то увеличение x_j приводит к тому, что базисная переменная x_i будет уменьшаться, пока не станет равна нулю. Это определяется уравнением: $x_i = \beta_i - \alpha_{ij}x_j = 0$. Отсюда $x_j = \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$.

Если несколько $\alpha_{ij} > 0$, то первой в ноль обратится переменная x_l, для которой отношение $\frac{b_l}{a_{lj}}$ минимально. Таким образом, нужная переменная выбирается из соотношения

$$\frac{b_l}{a_{lj}} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\} = \rho$$

Элемент a_{lj} называется разрешающим: он указывает переменную x_l, которую выводят из базиса, и свободную переменную x_j, которую вводят в базис.

Теперь у нас есть новый базис. Выразим базисную переменную x_l через свободные переменные. Для этого возьмём одно из уравнений системы ограничений:

$$x_l = \beta_l - (\alpha_{lr+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha_{lj}x_j + \cdots + \alpha_{ln}x_n)$$

Из этого уравнения получим:

$$x_j = \frac{\beta_l}{\alpha_{lj}} - \left(\frac{\alpha_{lr+1}}{\alpha_{lj}}x_{r+1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{lj}}x_l + \cdots + \frac{\alpha_{ln}}{\alpha_{lj}}x_n\right)$$

Подставив полученное x_j во все остальные уравнения, получим выражения для нового базиса.

Вектор симплекс-разностей — это вектор $\vec{\gamma}$.