Методы оптимизации

Нелинейное программирование

Д.В. Домашова

Общая задача НЛП

$$f(x) \to \min \qquad (1)$$

$$g_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,m} \qquad (2)$$

$$x \in X \subset R^n \qquad (3)$$

где $f(x),\ g_i(x),\ i = \overline{1,m}$ - нелинейные функции.

Решение: $x^* = \arg\min\limits_{x \in D} f(x)$

Графический метод решения задач нелинейного программирования для функций двух переменных

$$f(x_1, x_2) \to \min$$

$$g_i(x_1, x_2) \le 0, \quad i = \overline{1, m}$$

Функция f(x) называется целевой функцией, а неравенства gj(x)≤0, j =1,…,m называются ограничениями задачи. Множество точек, удовлетворяющих ограничениям задачи, называется допустимым множеством задачи.

Решить задачу нелинейного программирования графически — значит найти такую точку из допустимого множества, через которую проходит линия уровня f(x1,x2) = C, имеющая максимальное значение величины C из всех линий уровня, проходящих через допустимые точки задачи.

Этапы графического решения задач нелинейного программирования

Этап 1. Строится допустимое множество задачи. На плоскости наносятся геометрические места точек, соответствующих каждому уравнению из ограничений задачи $g_j(x_1,x_2) \leq 0$, $j = 1, \ldots, m$. Если допустимое множество задачи пусто, то задача не имеет решения.

Этапы графического решения задач нелинейного программирования

Этап 1. Строится допустимое множество задачи. На плоскости наносятся геометрические места точек, соответствующих каждому уравнению из ограничений задачи $gj(x1,x2) \le 0$, $j = 1, ..., m$. Если допустимое множество задачи пусто, то задача не имеет решения.

Этап 2. Строятся линии уровня целевой функции $f(x1,x2) = C$ при различных значениях параметра С.

Этапы графического решения задач нелинейного программирования

Этап 1. Строится допустимое множество задачи. На плоскости наносятся геометрические места точек, соответствующих каждому уравнению из ограничений задачи $g_j(x_1,x_2) \le 0$, $j = 1, \ldots, m$. Если допустимое множество задачи пусто, то задача не имеет решения.

Этап 2. Строятся линии уровня целевой функции $f(x_1,x_2) = C$ при различных значениях параметра С.

Этап 3. Определяется направление возрастания (для задачи максимизации) или убывания (для задачи минимизации) линий уровня целевой функции.

Этапы графического решения задач нелинейного программирования

Этап 1. Строится допустимое множество задачи. На плоскости наносятся геометрические места точек, соответствующих каждому уравнению из ограничений задачи $gj(x1,x2) \leq 0$, $j = 1, ..., m$. Если допустимое множество задачи пусто, то задача не имеет решения.

Этап 2. Строятся линии уровня целевой функции $f(x1,x2) = C$ при различных значениях параметра С.

Этап 3. Определяется направление возрастания (для задачи максимизации) или убывания (для задачи минимизации) линий уровня целевой функции.

Этап 4. Определяется точка допустимого множества, через которую проходит линия уровня с максимальным (для задачи максимизации) или минимальным (для задачи минимизации) значением параметра С. Если целевая функция не ограничена сверху (для задачи максимизации) или не ограничена снизу (для задачи минимизации) на допустимом множестве, то задача не имеет решения.

Этапы графического решения задач нелинейного программирования

Этап 1. Строится допустимое множество задачи. На плоскости наносятся геометрические места точек, соответствующих каждому уравнению из ограничений задачи $gj(x1,x2) \le 0$, $j = 1, \ldots, m$. Если допустимое множество задачи пусто, то задача не имеет решения.

Этап 2. Строятся линии уровня целевой функции $f(x1,x2) = C$ при различных значениях параметра С.

Этап 3. Определяется направление возрастания (для задачи максимизации) или убывания (для задачи минимизации) линий уровня целевой функции.

Этап 4. Определяется точка допустимого множества, через которую проходит линия уровня с максимальным (для задачи максимизации) или минимальным (для задачи минимизации) значением параметра С. Если целевая функция не ограничена сверху (для задачи максимизации) или не ограничена снизу (для задачи минимизации) на допустимом множестве, то задача не имеет решения.

Этап 5. Для найденной точки определяют ее координаты x=(x1,x2) и значение целевой функции в данной точке

Графический метод решения задач нелинейного программирования для функций двух переменных

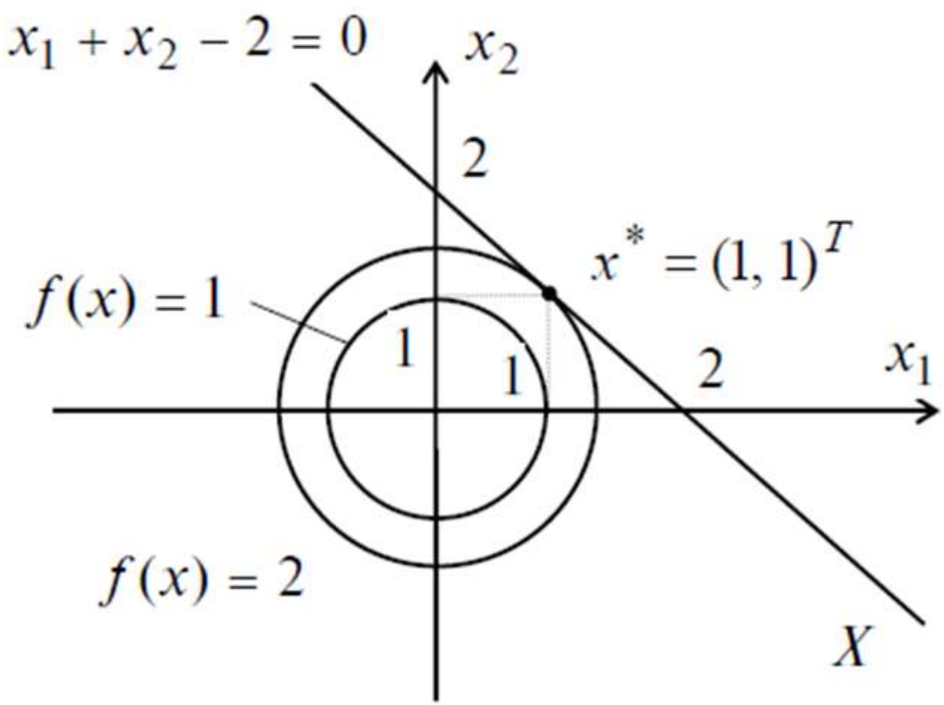
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 - 2 = 0$$

Графический метод решения задач нелинейного программирования для функций двух переменных

$$f\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 - 2 = 0$$



Графический метод решения задач нелинейного программирования для функций двух переменных

Пример. Найти оптимальное решение задачи

$$f = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \min/\max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ x_1 + x_2 \leqslant 9, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

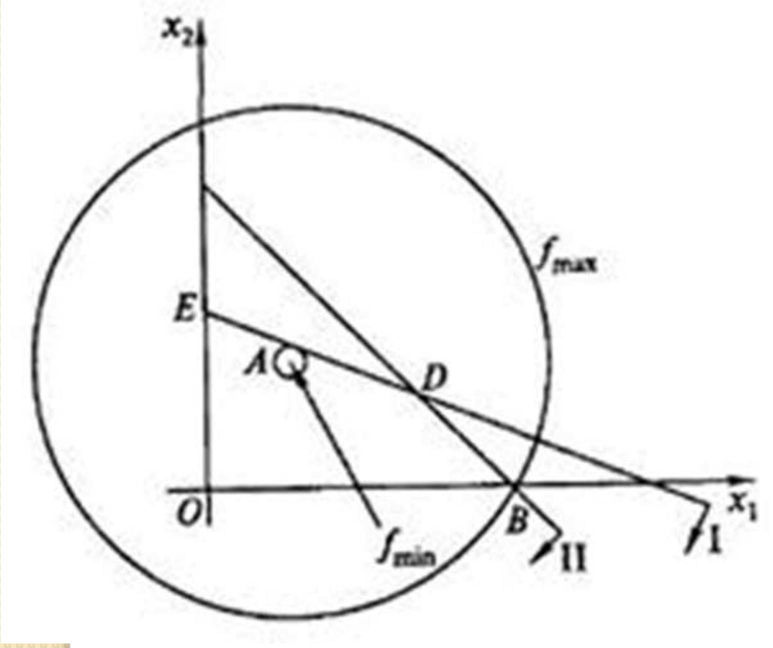
Графический метод решения задач нелинейного программирования для функций двух переменных

Пример. Найти оптимальное решение задачи

$$f=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2 \to \min/\max,$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \leq 12 \\ x_1+x_2 \leq 9, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$



Решение. Множество допустимых решений задачи — четырехугольник OEDB.
Линии одного уровня функции цели - концентрические окружности с центром в точке A(2, 3) - точка внутри области.
В этой же точке достигается минимум функции цели, равный fmin=0.
Максимальное значение функции достигается в точке B(9, 0): fmax=58.

Графический метод решения задач нелинейного программирования для функций двух переменных

- Вывод:
- Наиболее существенное отличие задачи нелинейного программирования от линейных задач заключается в том, что оптимальное решение может находиться как на границе допустимого множества, так и являться его внутренней точкой.

Классическая задача на условный экстремум
Постановка задачи

$$f(x) \to \min \qquad (4)$$

$$g_i(x) = 0,\ i = \overline{1,m} \qquad (5)$$

Эта задача – частный случай задачи (1-3), т.к. каждое $g_i(x) = 0$ можно заменить двумя неравенствами:

$$g_i(x) \le 0,\ \ g_i(x) \ge 0,\ i = \overline{1,m}\ .$$

В свою очередь ограничения (2) можно представить

$$g_i(x) + Z_i^2 = 0,\ i = \overline{1,m}\ .$$

Классическая задача на условный экстремум
Метод множителей Лагранжа

Задача условной оптимизации сводится к задаче безусловной оптимизации функции Лагранжа, составленной для этой задачи.

Обобщенная функция Лагранжа для задачи (4-5):

$$L(x, y_0, y) = y_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x), \; y_i \in R, \; i = \overline{1, m+1}$$

y_i – множители Лагранжа.

Классическая функция Лагранжа для задачи (4-5):

$$L(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x), \; y_i \in R, \; i = \overline{1, m}$$

Классическая задача на условный экстремум

Метод множителей Лагранжа

Теорема 1 (Необходимое условие оптимальности)

Пусть функции f, $g_1,\dots,g_m$ – непрерывно дифференцируемые в некоторой окрестности т. $x^* \in R^n$. Если x^* - точка локального экстремума задачи (4-5), то $\exists$ числа $y_0^*, y_1^*, \dots, y_m^*$, не равные нулю одновременно и такие, что выполнены следующие условия:

1) условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}\left(x^*, y_0^*, y^*\right) = 0, \quad j = \overline{1,n}$$

2) условие допустимости решения:

$$g_i\left(x^*\right) = 0, \; i = \overline{1,m}$$

Если при этом градиенты $g_i'\left(x^*\right), \; i = \overline{1,m}$ в точке x^* линейно независимы (выполняется условие регулярности), то $y_0^* \neq 0$

Классическая задача на условный экстремум

Метод множителей Лагранжа

Замечания

1) При решении задач проверка условия регулярности затруднена, так как точка x_* заранее неизвестна.

Поэтому, как правило, рассматриваются два случая: $y_0^* \neq 0$; $y_0^* = 0$

Если выполняется условие регулярности, то берут

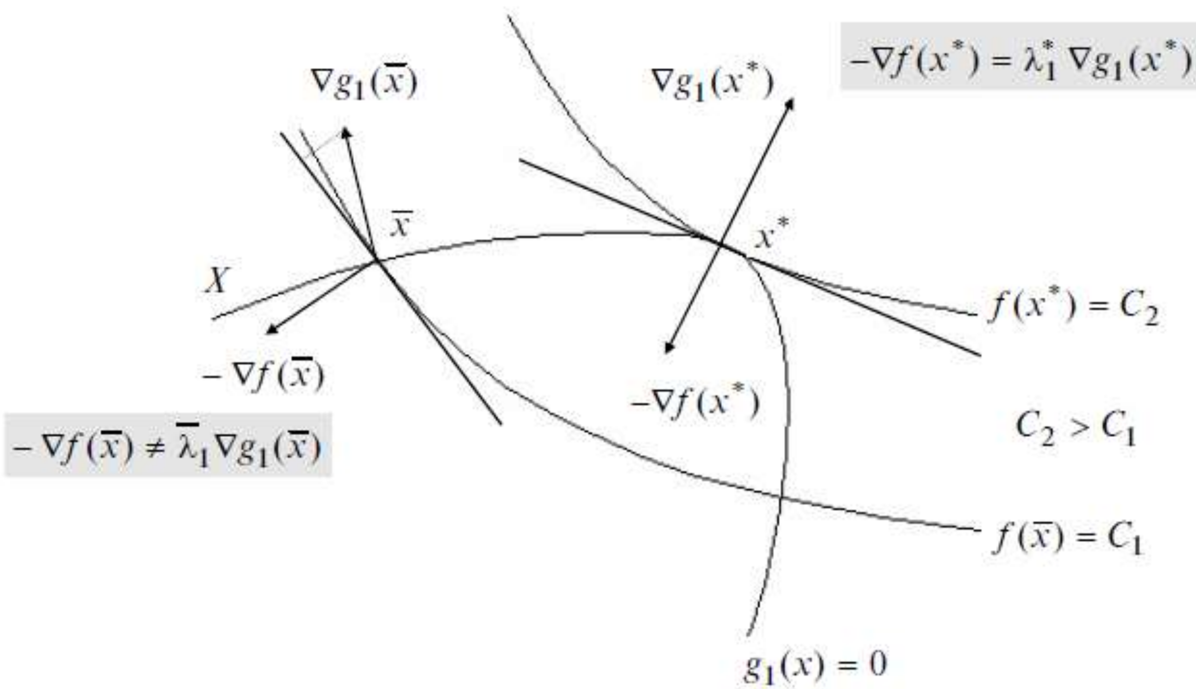
$$y_0^* = 1, \; y_i^* = \frac{y_i^*}{y_0^*}, \; i = \overline{1, m}$$

и точку x^* называют регулярной.

Классическая задача на условный экстремум
Метод множителей Лагранжа
Замечания

2) Необходимые условия оптимальности означают, что градиенты $f'(x^*),\ g_1'(x^*), \ldots, g_m'(x^*)$ - линейно зависимы.

Если m=1 $\Rightarrow$ $f'(x^*)$ и $g_1'(x^*)$ - коллинеарны.



Точка x∗ условного экстремума (максимума) является точкой касания линии уровня целевой функции и кривой, описывающей ограничение. В точке $\bar{x}$ возможно движение вдоль ограничения, связанное с увеличением функции.

Классическая задача на условный экстремум
Метод множителей Лагранжа
Замечания

3) условия $g_i\left(x^*\right)=0,\ i=\overline{1,m}$ эквивалентны условиям

$$\frac{\partial L\left(x^*, y_0^*, y^*\right)}{\partial y_i}=g_i\left(x^*\right)=0$$

Классическая задача на условный экстремум

Метод множителей Лагранжа

Теорема 2 (Необходимое условие экстремума 2-го порядка)

Пусть функции $f(x), g_1(x), \ldots, g_m(x)$ - дважды непрерывно дифференцируемы в точке $x^* \in R^n$ и непрерывно дифференцируемы в ее некоторой окрестности, причем градиенты $g_1'(x^*), \ldots, g_m'(x^*)$ - линейно независимы.

Если x^* - локальное решение задачи (4-5) (регулярная точка экстремума), то $< L''_{xx}(x^*, y^*)h,\ h >\geq 0 \quad \forall\ y^*$, удовлетворяющих

$$L'_x(x^*, y^*) = 0,\ g_i(x^*) = 0,\ i = \overline{1, m} \text{ и } \forall\ h \in R^n:$$

$$< g_i'(x^*), h >= 0,\ i = \overline{1, m}$$

Классическая задача на условный экстремум
Метод множителей Лагранжа

Теорема 3 (Достаточные условия экстремума)

Пусть функции $f, g_1, \ldots, g_m$ дважды дифференцируемы в точке $x^* \in R^n$, удовлетворяющей условиям допустимости $g_i(x^*) = 0,\ i = \overline{1, m}$ и $\exists\ y^*$:

1) $L'_x(x^*, y^*) = 0$

2) $< L''_{xx}(x^*, y^*)h,\ h >\ > 0$ при $\forall\ h \neq 0 \in R^n$ для которых

$< g'_i(x^*), h >= 0,\ i = \overline{1, m}$

то x^* - строгое локальное решение задачи (4-5).

Классическая задача на условный экстремум
Пример

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 - 2 = 0$$

Классическая задача на условный экстремум
Пример

$$f\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + x_2^2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 - 2 = 0$$

Проверим условие регулярности.

Так как $\nabla g1(1,1)^T \neq 0$, то условие выполняется

Поэтому будем пользоваться классической функцией Лагранжа

Классическая задача на условный экстремум
Пример

$$f\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + x_2^2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 - 2 = 0$$

$$L\left(x_1, x_2, y\right) = f\left(x_1, x_2\right) + y g_1\left(x_1, x_2\right)$$

Классическая задача на условный экстремум
Пример

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 - 2 = 0$$

$$L(x_1, x_2, y) = f(x_1, x_2) + yg_1(x_1, x_2)$$

$$L(x_1, x_2, y) = x_1^2 + x_2^2 + y(x_1 + x_2 - 2)$$

Классическая задача на условный экстремум
Пример

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 - 2 = 0$$

$$L(x_1, x_2, y) = f(x_1, x_2) + y g_1(x_1, x_2)$$

$$L(x_1, x_2, y) = x_1^2 + x_2^2 + y(x_1 + x_2 - 2)$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, y)}{\partial x_1} = 2x_1 + y = 0$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, y)}{\partial x_2} = 2x_2 + y = 0$$

Классическая задача на условный экстремум

Пример

$$f\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + x_2^2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 - 2 = 0$$

$$L\left(x_1, x_2, y\right) = f\left(x_1, x_2\right) + y g_1\left(x_1, x_2\right)$$

$$L\left(x_1, x_2, y\right) = x_1^2 + x_2^2 + y(x_1 + x_2 - 2)$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, y)}{\partial x_1} = 2x_1 + y = 0$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, y)}{\partial x_2} = 2x_2 + y = 0$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, y)}{\partial y} = x_1 + x_2 - 2 = 0$$

Классическая задача на условный экстремум
Пример

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 - 2 = 0$$

$$L(x_1, x_2, y) = f(x_1, x_2) + yg_1(x_1, x_2)$$

$$L(x_1, x_2, y) = x_1^2 + x_2^2 + y(x_1 + x_2 - 2)$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, y)}{\partial x_1} = 2x_1 + y = 0$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, y)}{\partial x_2} = 2x_2 + y = 0$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, y)}{\partial y} = x_1 + x_2 - 2 = 0$$

$$x^* = (1,1)$$

$$y^* = -1$$

Классическая задача на условный экстремум
Пример

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 - 2 = 0$$

$$L(x_1, x_2, y) = f(x_1, x_2) + y g_1(x_1, x_2)$$

$$L(x_1, x_2, y) = x_1^2 + x_2^2 + y(x_1 + x_2 - 2)$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, y)}{\partial x_1} = 2x_1 + y = 0$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, y)}{\partial x_2} = 2x_2 + y = 0$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, y)}{\partial y} = x_1 + x_2 - 2 = 0$$

$$x^* = (1,1)$$

$$y^* = -1$$

$$L''_{xx}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Классическая задача на условный экстремум
Пример

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 - 2 = 0$$

$$L(x_1, x_2, y) = f(x_1, x_2) + y g_1(x_1, x_2)$$

$$L(x_1, x_2, y) = x_1^2 + x_2^2 + y(x_1 + x_2 - 2)$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, y)}{\partial x_1} = 2x_1 + y = 0$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, y)}{\partial x_2} = 2x_2 + y = 0$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, y)}{\partial y} = x_1 + x_2 - 2 = 0$$

$$x^* = (1{,}1)$$

$$y^* = -1$$

$$L''_{xx}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 4$

Выполнено достаточное условие экстремума, следовательно, точка $x^* = (1{,}1)$ – точка минимума

Классическая задача на условный экстремум
Пример 2

Пример 3.6. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \text{extr},$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0.$$

□ Проверим условие регулярности. Так как $\nabla g_1(x) = (2x_1, 2x_2)^T \neq 0$ для всех $x \in X$, то условие выполняется (см. определение 3.6). Поэтому будем пользоваться классической функцией Лагранжа.

1. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_1) = x_1 + x_2 + \lambda_1 \left(x_1^2 + x_2^2 - 2 \right).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $$\frac{\partial L(x, \lambda_1)}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -\frac{1}{2\lambda_1},$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda_1)}{\partial x_2} = 1 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = -\frac{1}{2\lambda_1};$$

б) $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$.

3. Решением системы являются две условно-стационарные точки:

$$A\colon\; x_1^* = 1,\;\; x_2^* = 1,\;\; \lambda_1^* = -\frac{1}{2}; \qquad B\colon\; x_1^* = -1,\;\; x_2^* = -1,\;\; \lambda_1^* = \frac{1}{2}.$$

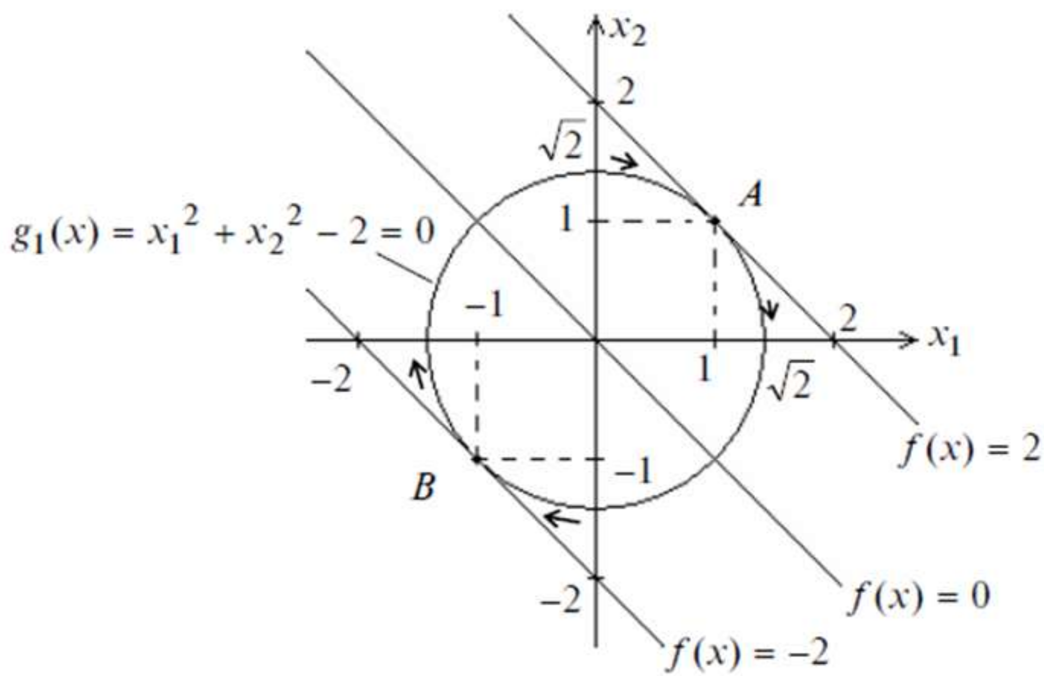
Классическая задача на условный экстремум
Пример 2

Проверим выполнение достаточных условий экстремума:

$$L''_{xx} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 \end{pmatrix}$$

$L''_{xx}(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\Delta_1 = -1 < 0,\ \Delta_2 = 1 > 0$ – матрица отрицательно определена, следовательно x_1=(1,1) – точка максимума

$L''_{xx}(-1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Delta_1 = 1 > 0,\ \Delta_2 = 1 > 0$ – матрица положительно определена, следовательно x_1=(-1,-1) – точка минимума



Общая задача НЛП

$$f(x) \to \min \qquad (1)$$

$$g_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,m} \qquad (2)$$

$$x \in X \subset R^n \qquad (3)$$

Общая задача НЛП

$$f(x) \to \min \qquad (1)$$

$$g_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,m} \qquad (2)$$

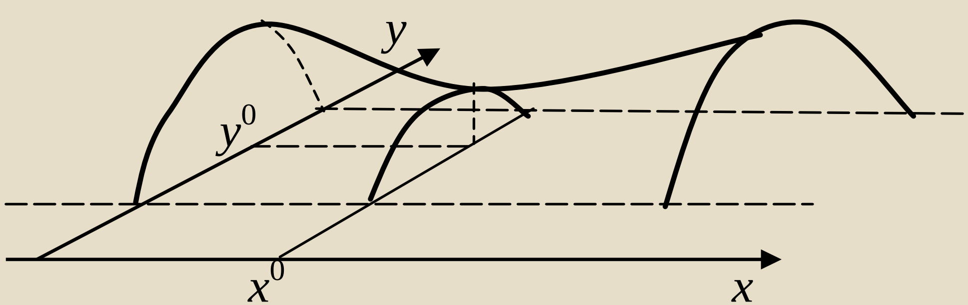
$$x \in X \subset R^n \qquad (3)$$

Классическая функция Лагранжа:

$$L(x,y) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x)$$

Определение. Пара векторов (x^0, y^0) является седловой точкой функции $L(x,y)$ в области $x \in X,\ \ y \ge 0$, если

$$L(x^0, y) \le L(x^0, y^0) \le L(x, y), \qquad \forall x \in X,\ \ y \ge 0$$



Общая задача НЛП

Теорема (достаточное условие локального экстремума). Пусть $\left(x^0, y^0\right)$ - седловая точка функции Лагранжа в области $x \in X$, $y \geq 0$, тогда x^0 – является решением задачи (1)-(3), причем, справедливо правило дополняющей нежесткости:

$\sum_{i=1}^{m} y_i^0 g_i\left(x^0\right) = 0$ (или $y_i^0 g_i\left(x^0\right) = 0, \quad i = \overline{1, m}$, т.к. $y_i^0 \geq 0, \ g_i(x) \leq 0$)

Общая задача НЛП

Теорема Куна-Таккера (необходимое и достаточное условия для задачи выпуклого НЛП)

Пусть $f(x),\ g_i(x),\ i=\overline{1,m}$ выпуклые функции, множество X – выпукло и выполняется условие регулярности Слейтера: $\exists \overline{x} \in X : g_i(\overline{x}) < 0,\ \forall i = \overline{1,m}$,то x^0 – решение задачи (1)-(3) тогда и только тогда, когда $\exists y^0 \geq 0 : (x^0, y^0)$ - седловая точка функции Лагранжа.

Общая задача НЛП

Теорема Куна-Таккера (обобщенное правило множителей Лагранжа).

Для того чтобы т.x^* была решением задачи (1)-(2) необходимо, а в том случае, когда (1)-(2) –задача выпуклого НЛП и область *D* удовлетворяет условию Слейтера $(\exists \tilde{x} : g_i(\tilde{x}) \le 0,\ i = \overline{1,m})$, то и достаточно, чтобы нашлись такие $y_i^* \ge 0,\ i = \overline{1,m}$, не равные нулю одновременно, что:

$$L'_x(x^*, y^*) = f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} y_i^* g'_i(x^*) = 0,$$

при этом выполняются условия дополняющей нежесткости:

$$y_i^* g_i(x^*) = 0,\ i = \overline{1,m}$$

Задача (1)-(2) называется задачей выпуклого НЛП, если

f(x) и g_i(x), $i = \overline{1,m}$ – выпуклые функции

Выпуклые множества

Пусть *L* – конечное линейное пространство. x^1, x^2 Є *L*.

Опр.: Множество *E* $\subset$ *L*: $E = \{x \in L : x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, \lambda \in [0,1] \in R\}$ называется выпуклым множеством, если для любых x^1, x^2 Є X => $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ є X, λ Є [0,1].

Выпуклые множества

Пусть L – конечное линейное пространство. x^1, x^2 Є L.

Опр.: Множество $E \subset L$: $E = \{x \in L : x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, \lambda \in [0,1] \in R\}$ называется выпуклым множеством, если для любых x^1, x^2 Є X => $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ є X, λ Є [0,1].

В пространстве R^n выпуклыми множествами являются: само пространство, любое его линейное подпространство, точка, шар, отрезок, а также

прямая, проходящая через т. x° в направлении вектора h:

$$l x^\circ h = \{x \in R^n : x = x^\circ + \alpha h, \alpha \in R\}$$

луч, выходящий из т. x° в направлении вектора h:

$$l^+ x^\circ h = \{ x \in R^n : x = x^\circ + \alpha h, \alpha \geq 0\}$$

гиперплоскость с нормалью p:

$$Hp\beta = \{ x \in R^n : \langle p_1 x \rangle = \beta\}$$

порождаемые гиперплоскостью полупространства:

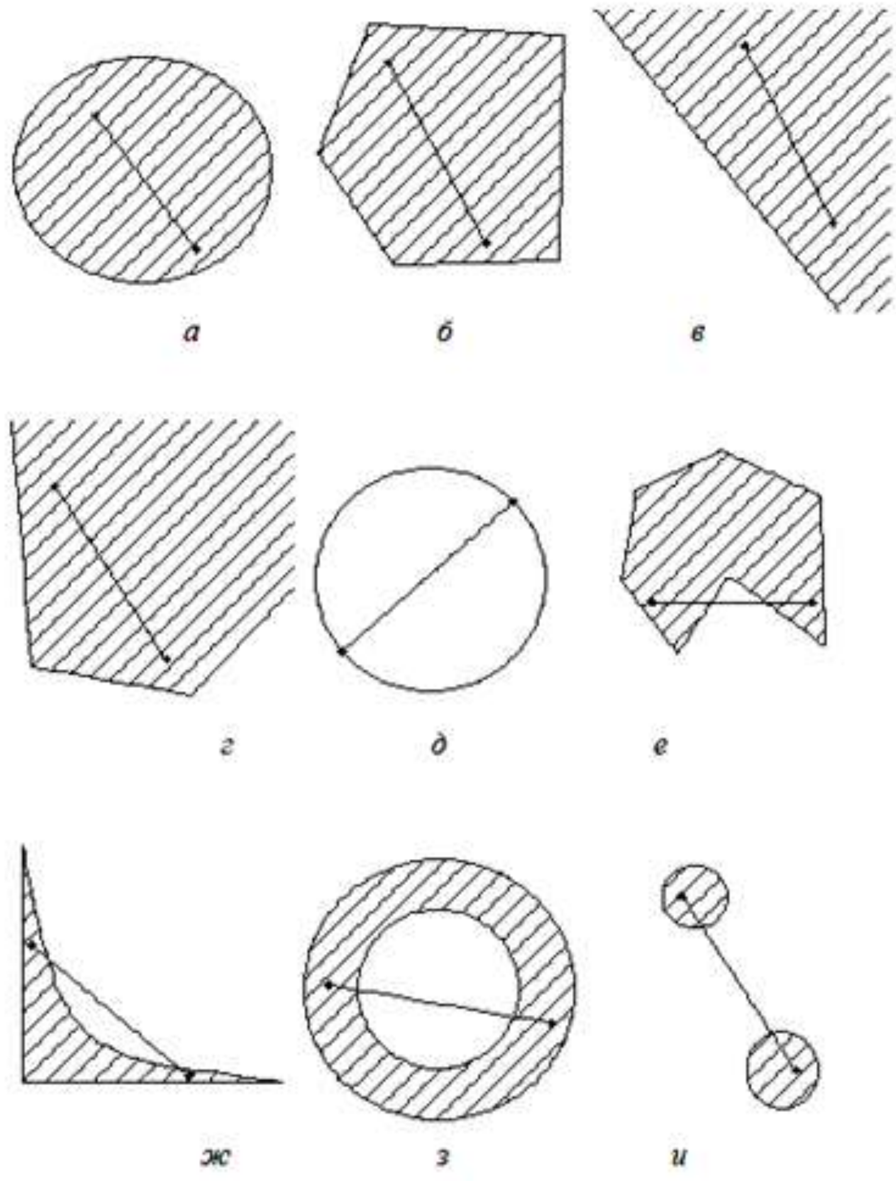
$$Hp\beta^+ = \{ x \in R^n : \langle p_1 x \rangle \geq \beta\}$$

$$Hp\beta^- = \{ x \in R^n : \langle p_1 x \rangle \leq \beta\}$$

Все перечисленные множества (кроме шара) являются частными случаями выпуклого множества вида:

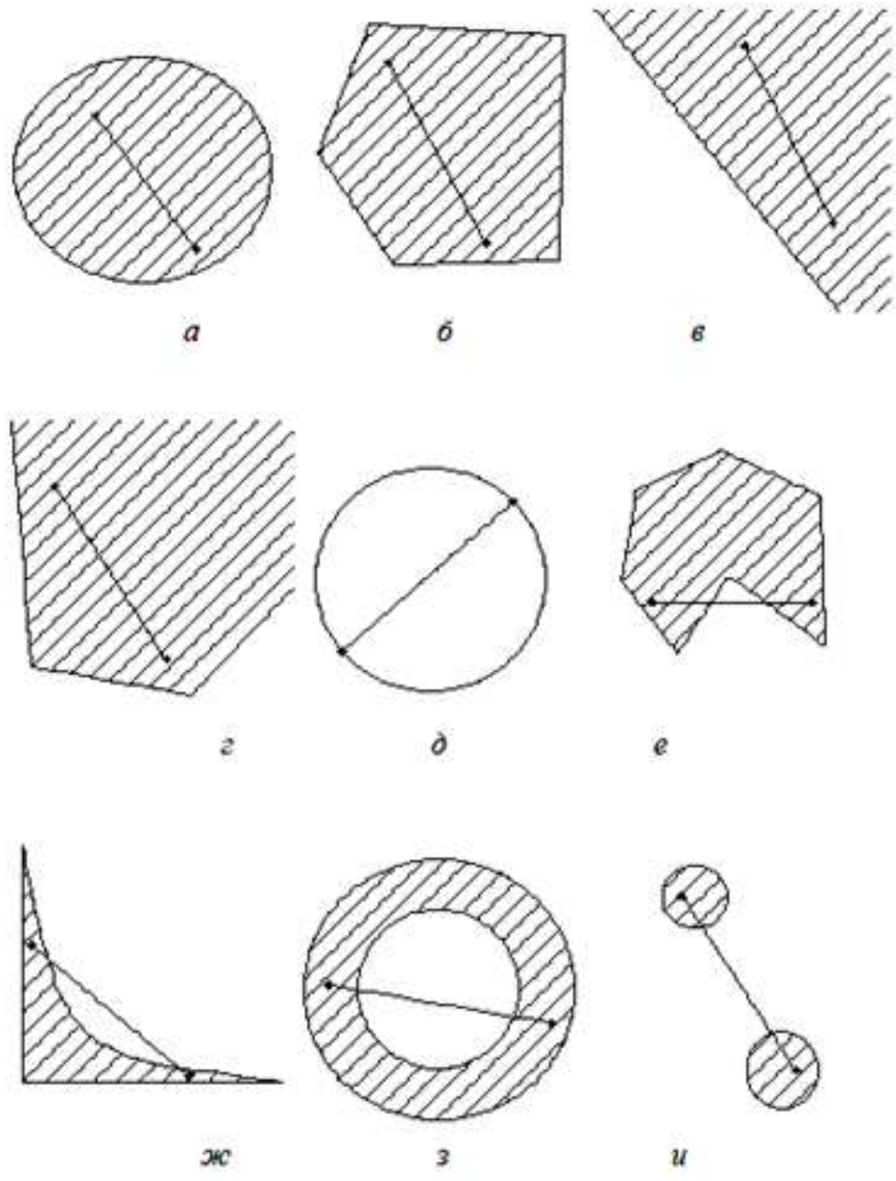
$$X = \{x \in R^n : Ax \leq b\} = \{ x \in R^n : \langle a_i, x \rangle \leq b_i\}, \ i = \overline{1, m}$$

Выпуклые множества



Какие множества выпуклые?

Выпуклые множества



Выпуклые множества: а, б, в, г

Выпуклые функции

Определение. Функция f (x) , определенная на выпуклом множестве X, называется выпуклой, если
$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \le \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)\ \forall x^1, x^2 \in X,\ 0 \le \lambda \le 1$.

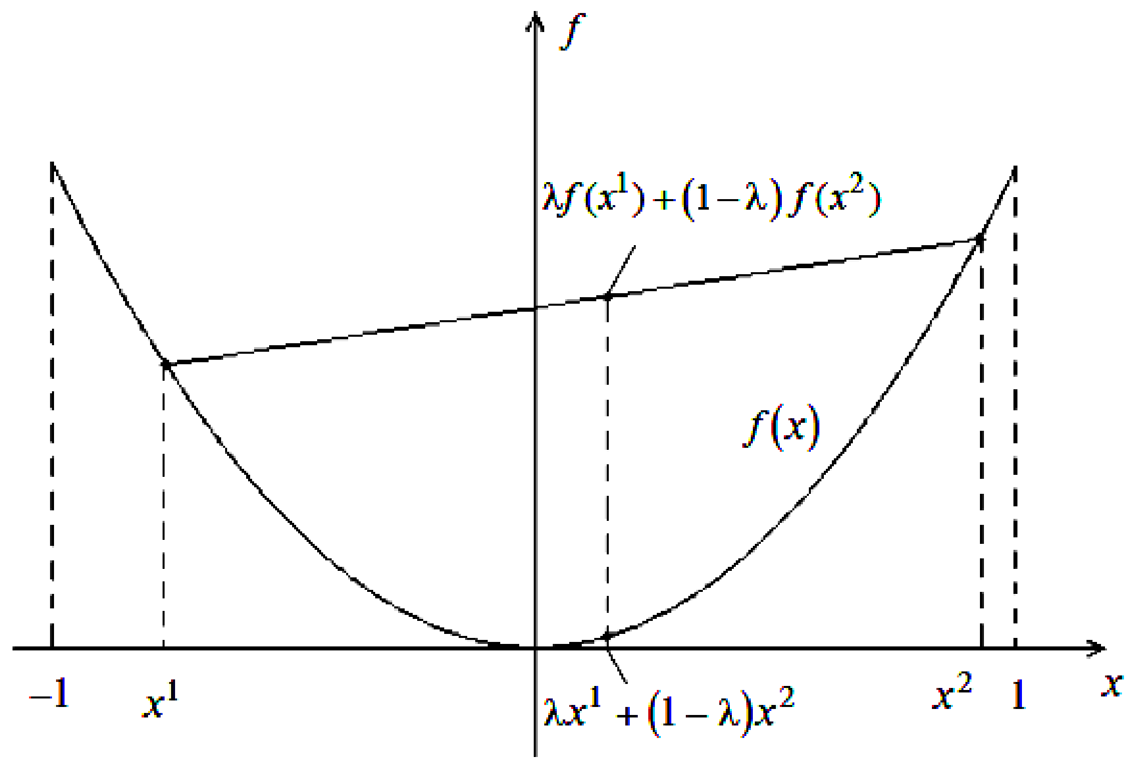
Определение. Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X, называется *строго выпуклой*, если
$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \le \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)\ \forall x^1, x^2 \in X,\ x1 \ne x2,\ 0 < \lambda < 1$.

Функцию $f(x)$ называют *выпуклой*, если ее график целиком лежит не выше отрезка, соединяющего две произвольные точки графика.
Функцию называют *строго выпуклой*, если ее график целиком лежит ниже отрезка, соединяющего две произвольные, но не совпадающие точки графика.

Выпуклость функции можно определить по матрице Гессе:
- если $H(x) \ge 0\ \forall x \in R^n$, то функция выпуклая;
- если $H(x) > 0\ \forall x \in R^n$, то функция строго выпуклая.

Выпуклые функции

Пример. Дана функция $f(x) = x^2$. Исследуем ее на выпуклость на отрезке $X = \{x: -1 \le x \le 1\}$
Функция является строго выпуклой, так как ее график целиком лежит ниже отрезка, соединяющего две произвольные, но не совпадающие точки графика.
Более того, функция одновременно является строго выпуклой, так как выполняется условие $H(x) = f''(x) = 2 > 0$.



Выпуклые функции

1. Если f (x) выпуклая функция на выпуклом множестве X, то всякая точка локального минимума является точкой ее глобального минимума на X.

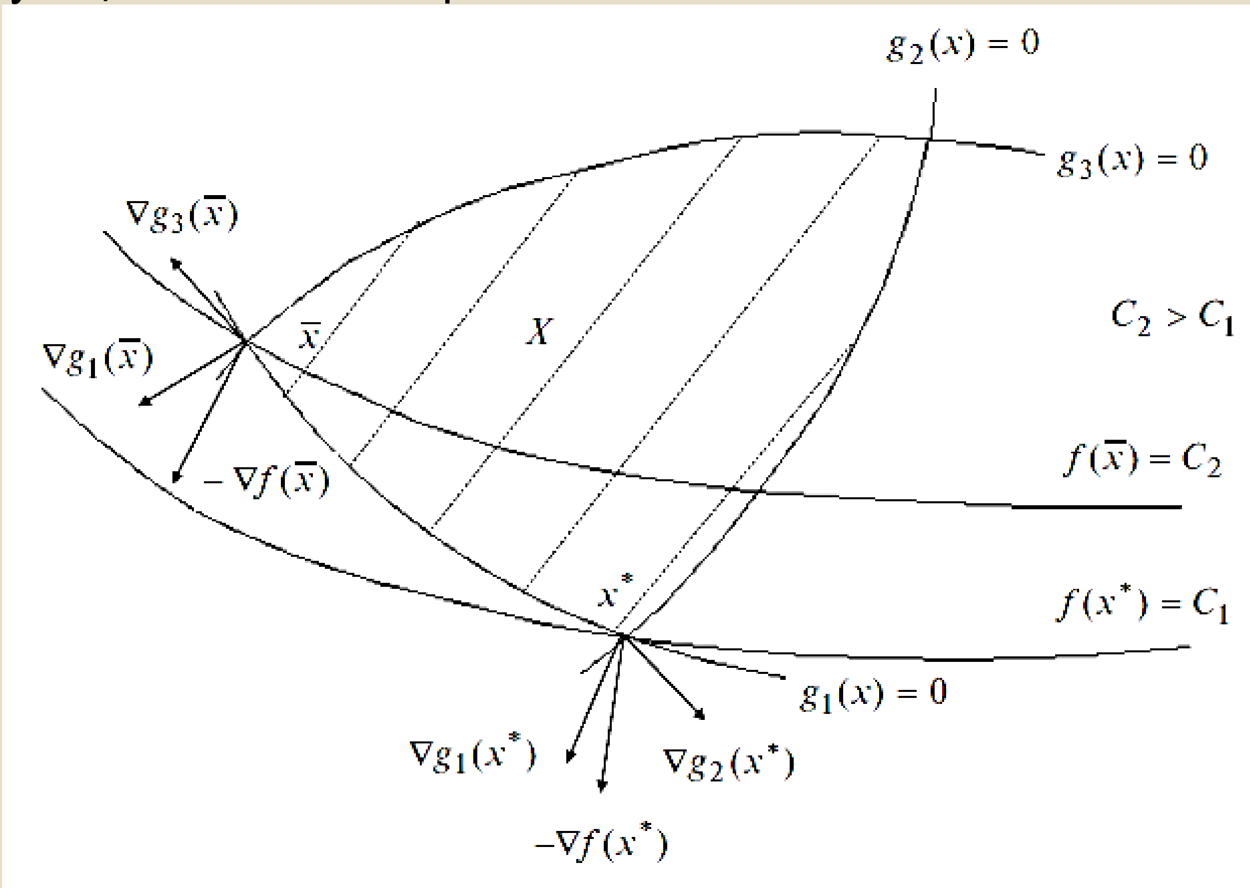
2. Если выпуклая функция достигает своего минимума в двух различных точках, то она достигает минимума во всех точках отрезка, соединяющего эти две точки.

3. Если f (x) строго выпуклая функция на выпуклом множестве X, то она может достигать своего глобального минимума на X не более чем в одной точке.

Общая задача НЛП

Замечание 1.

Геометрический смысл: антиградиент целевой функции в т.x^* является неотрицательной линейной комбинацией градиентов функций, образующих активные ограничения в т.x



Общая задача НЛП

Замечание 2.

$$y_i^* g_i\left(x^*\right) = 0,\ i = \overline{1,m}$$

Из условий дополняющей нежесткости следует,

что если ограничение в т.x^* - пассивное, т.е. $g_i\left(x^*\right) < 0$, то $y_i^* = 0$,

если ограничение в т.x^* - активное, т.е. $g_i\left(x^*\right) = 0$, то $y_i^* \geq 0$ (min) $y_i^* \leq 0$ (max) .

Общая задача НЛП

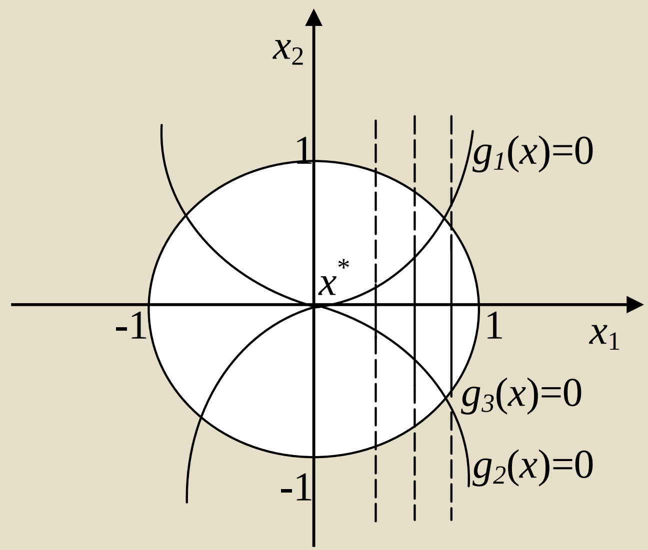
Замечание 3.

Случай нерегулярности $y_0^* = 0$ (отражает вырожденность ограничений).

Рассмотрим пример.

$$f(x) = x_1 \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1^3 + x_2 \le 0 \\ -x_1^3 - x_2 \le 0 \\ x_1^2 + x_2^2 \le 1 \end{cases}$$



$x^*=(0,0)$

Активными в т. x^* являются $g_1(x)$ и $g_2(x)$, при этом $f'(x^*) = (1{,}0)$

$$g_1'(x^*) = (0{,}1),\ \ g_2'(x^*) = (0{,}-1),\ \ g_1'(x) = (-3x_1^2{,}1),\ \ g_2'(x) = (-3x_1^2{,}-1)$$

Видно, что $f'(x^*)$ нельзя представить в виде линейной комбинации векторов $g_1'(x^*)$ и $g_2'(x^*)$. Условия теоремы здесь может выполняться лишь при $y_0^* = 0,\ y_1^* = \lambda,\ y_2^* = -\lambda,$ где $\lambda > 0$.

Суть дела тут в том, что сами градиенты $g_1'(x^*)$ и $g_2'(x^*)$ линейно зависимы.

Общая задача НЛП

Теорема (достаточные условия экстремума второго порядка).

Пусть имеется точка (x^*,y^*), удовлетворяющая системе $\frac{\partial L\left(x^*, y_0^*, y^*\right)}{\partial x_j} = 0,\quad j = \overline{1,n}$ при $y_0^* \neq 0$.

Если в этой точке $< L''_{xx}\left(x^*, y^*\right)h,\ h >> 0$ ($< L''_{xx}\left(x^*, y^*\right)h,\ h >< 0$) для всех $\forall\ h \neq 0 \in R^n$ таких, что

$$< g_i'\left(x^*\right), h >= 0, i \in I(x^*) \quad y_i^* > 0\ (\ y_i^* < 0\ )$$

$$< g_i'\left(x^*\right), h >\leq 0, i \in I(x^*)\ ,\ \ y_i^* = 0$$

то точка x∗ является точкой локального минимума (максимума) в задаче (1-2).

Общая задача НЛП
Пример

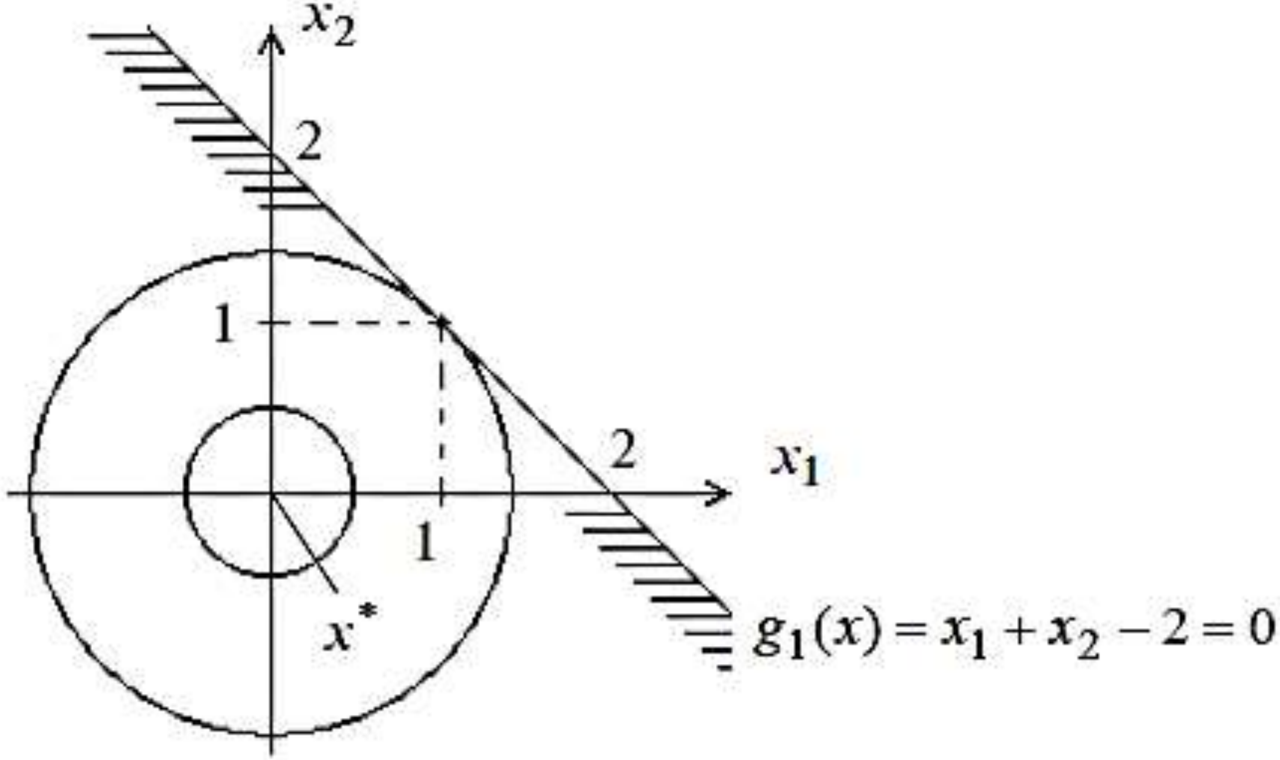
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 - 2 \le 0$$

Общая задача НЛП
Пример

$$f\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + x_2^2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 - 2 \le 0$$



Общая задача НЛП
Пример

$$L(x_1, x_2, y) = y_0 f(x_1, x_2) + y_1 g_1(x_1, x_2)$$

$$L(x_1, x_2, y) = y_0 x_1^2 + x_2^2 + y_1(x_1 + x_2 - 2)$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, y)}{\partial x_1} = 2y_0 x_1 + y_1 = 0$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, y)}{\partial x_2} = 2y_0 x_2 + y_1 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 2 \leq 0$$

$y_1 \geq 0$ - для минимума, $y_1 \leq 0$ - для максимума

$$y_1(x_1 + x_2 - 2) = 0$$

Общая задача НЛП
Пример

Решим систему для двух случаев.

Первый случай: $y_0 = 0$. Тогда $y_1 = 0$, что противоречит требованию теоремы о существовании ненулевого вектора y/

Общая задача НЛП
Пример

Решим систему для двух случаев.

Первый случай: $y_0 = 0$. Тогда $y_1 = 0$, что противоречит требованию теоремы о существовании ненулевого вектора у/

Второй случай: $y_0 \neq 0$. Тогда заменим обобщенную функцию Лагранжа классической.

$$L(x_1, x_2, y) = x_1^2 + x_2^2 + y_1(x_1 + x_2 - 2)$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, y)}{\partial x_1} = 2x_1 + y_1 = 0$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, y)}{\partial x_2} = 2x_2 + y_1 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 2 \le 0$$

$y_1 \ge 0$ - для минимума, $y_1 \le 0$ - для максимума

$$y_1(x_1 + x_2 - 2) = 0$$

Общая задача НЛП
Пример

Из условия дополняющей нежесткости:

1) $y_1 = 0$

Фактически решается задача поиска безусловного экстремума.

Решаем систему, получаем $x^* = (0{,}0)$.

Условие допустимости решения выполняется.

Выполняются необходимые условия и для минимума, и для максимума.

Общая задача НЛП
Пример

Из условия дополняющей нежесткости:

1) $y_1 = 0$

Фактически решается задача поиска безусловного экстремума.

Решаем систему, получаем $x^* = (0{,}0)$.

Условие допустимости решения выполняется.

Выполняются необходимые условия и для минимума, и для максимума.

2) $y_1 \neq 0$

Решаем систему, получаем $x^* = (1{,}1)$, $y^* = -2$.

Так как $y^* < 0$, то выполняется необходимое условие максимума. Таким образом, имеем две условно-стационарные точки.

Общая задача НЛП
Пример

Проверим достаточные условия экстремума.

$$L''_{xx}\left(x^*, y^*\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 4 > 0,\ y_1 = 0$

Выполнено достаточное условие экстремума, следовательно, точка $x^* = (0,0)$ – точка минимума.

Общая задача НЛП
Пример

Проверим достаточные условия экстремума.

$$L''_{xx}\left(x^*, y^*\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 4 > 0,\ y_1 = 0$

Выполнено достаточное условие экстремума, следовательно, точка $x^* = (0,0)$ – точка минимума.

Так как для точки $x^* = (1,1)$ $y^* = -2$, то достаточные условия для максимума не выполнены (матрица в стационарной точке не является отрицательно определенной).

Общая задача НЛП
Пример

Проверим достаточные условия экстремума.

$$L''_{xx}\left(x^*, y^*\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 4 > 0,\ y_1 = 0$

Выполнено достаточное условие экстремума, следовательно, точка $x^* = (0,0)$ – точка минимума.

Так как для точки $x^* = (1,1)$ $y^* = -2$, то достаточные условия для максимума не выполнены (матрица в стационарной точке не является отрицательно определенной).

С другой стороны, функция f (x) выпуклая и множество допустимых решений также выпуклое. Поэтому в точке $x^* = (0,0)$ достигается глобальный условный минимум, а достаточные условия можно было и не проверять. Вычислим значение функции в точке условного минимума: f (x*) = 0.

Общая задача НЛП

Рассмотрим задачу.

$$f(x) \to \min \qquad (1)$$

$$g_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,m} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,n} \qquad (3)$$

Теорема (Куна-Таккера)

Если $f(x),\ g_i(x)$ - выпуклы, множество *D* регулярно по Слейтеру, то $x^* \in D$ - оптимальное решение задачи тогда и только тогда, когда $\exists y_i^* \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ V_j^* \ge 0,\ \ j = \overline{1,n}$

$$f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} y_i^* g_i'(x^*) - \sum_{j=1}^{n} V_j^* l_j = 0,$$

при этом выполнены условия дополняющей нежесткости:

$$y_i^* g_i(x^*) = 0,\ i = \overline{1,m}, \qquad V_j^* x_j^* = 0,\ \ j = \overline{1,n},$$

где $l_j,\ \ j = \overline{1,n}$ - *j*-ый координатный вектор l_j=(0,…,1,…,0)

Общая задача НЛП
Условия существования седловой точки

Пусть $L(x, y)$ выпукла по *x* для $\forall x \geq 0$, вогнута по *y* $\forall y \geq 0$, непрерывно дифференцируема по *x* и *y*.

Теорема. Пара (x^*, y^*), $x^* \geq 0,\ y^* \geq 0$ - седловая точка функции Лагранжа $L(x, y)$ в области $x \geq 0,\ y \geq 0$, тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial L^*}{\partial x_j} \geq 0, \quad x_j^* \frac{\partial L^*}{\partial x_j} = 0, \quad x_j^* \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial y_i} \leq 0, \quad y_i^* \frac{\partial L^*}{\partial y_i} = 0, \quad y_i^* \geq 0, \ i = \overline{1, m}$$

$$L^* = L(x^*, y^*)$$

Общая задача НЛП

Условия существования седловой точки

Теорема Куна-Таккера и Условия существования седловой точки функции Лагранжа эквивалентны

$$V = \frac{\partial L^*}{\partial x} = f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} y_i^* g_i'(x^*), \qquad g_i(x^*) = \frac{\partial L^*}{\partial y_i}$$

1) $\frac{\partial L^*}{\partial x_j} \geq 0$ эквивалентно $V_j^* \geq 0, \; j = \overline{1,n}$

2) $x_j^* \frac{\partial L^*}{\partial x_j} = 0$ эквивалентно $V_j^* x_j^* = 0$

3) $y_i^* \frac{\partial L^*}{\partial y_i} = 0$ эквивалентно $y_i^* g_i(x^*) = 0$

4) $y_i^* \geq 0$ эквивалентно $y_i^* \geq 0$

5) $\frac{\partial L^*}{\partial y_i} \leq 0$ эквивалентно $g_i(x) \leq 0$ - условие допустимости

6) $x_j^* \geq 0$ эквивалентно $x_j^* \geq 0$ - условие допустимости

Общая задача НЛП

В случае, если задача имеет вид:

$$f(x) \to \max \qquad (1')$$

$$g_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,m} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,n} \qquad (3)$$

Теорема (Куна-Таккера) для задачи на максимум

Если $f(x)$- вогнутая, $g_i(x)$ - выпуклы, множество *D* регулярно по Слейтеру, то $x^* \in D$ - оптимальное решение задачи тогда и только тогда, когда $\exists y_i^* \ge 0,\ \ i = \overline{1,m},\ \ V_j^* \ge 0,\ \ j = \overline{1,n}$

$$-f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} y_i^* g_i'(x^*) - \sum_{j=1}^{n} V_j^* l_j = 0,$$

при этом выполнены условия дополняющей нежесткости:

$$y_i^* g_i(x^*) = 0,\ \ i = \overline{1,m}, \qquad V_j^* x_j^* = 0,\ \ j = \overline{1,n},$$

где $l_j,\ \ j = \overline{1,n}$ - *j*-ый координатный вектор l_j=(0,…,1,…,0)

Задача квадратичного программирования

Частным случаем задачи нелинейного программирования является **задача квадратичного программирования**, в которой целевая функция представляет собой сумму линейной и квадратичной функции (квадратичной формы):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_1 x_1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_k x_j =$$

$$= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + d_{11} x_1^2 + d_{22} x_2^2 + \ldots + d_{nn} x_n^2 +$$

$$+ d_{12} x_1 x_2 + d_{13} x_1 x_3 + \ldots + d_{n-1,n} x_{n-1} x_n$$

а ограничения являются линейными:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1 \\ \ldots \\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n \le b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,n}$$

Задача квадратичного программирования

- Как и в общем случае решения задач нелинейного программирования, для определения глобального экстремума задачи квадратичного программирования не существует эффективного вычислительного метода, если не известно, что любой локальный экстремум является одновременно и глобальным.
- Так как в задаче квадратичного программирования множество допустимых решений выпукло, то, если целевая функция вогнута, любой локальный максимум является глобальным; если же целевая функция - выпуклая, то любой локальный минимум также и глобальный.
- Целевая функция представляет собой сумму линейной функции (которая является и выпуклой, и вогнутой) и квадратичной формы.
- Если квадратичная форма является вогнутой (выпуклой), то задачи отыскания максимума (минимума) целевой функции могут быть успешно решены.
- Вопрос о том, будет ли квадратичная форма вогнутой или выпуклой, зависит от того, является ли она отрицательно-определенной, отрицательно-полуопределенной, положительно-определенной, положительно-полуопределенной или вообще неопределенной.

Задача квадратичного программирования

Для решения задачи воспользуемся условиями существования седловой точки функции Лагранжа.

1) $\frac{\partial L^*}{\partial x_j} \geq 0$ 2) $x_j^* \frac{\partial L^*}{\partial x_j} = 0$ 3) $x_j^* \geq 0$, $j = \overline{1, n}$

4) $\frac{\partial L^*}{\partial y_i} \leq 0$ 5) $y_i^* \frac{\partial L^*}{\partial y_i} = 0$ 6) $y_i^* \geq 0$, $i = \overline{1, m}$

Если область допустимых решений не пустая, то условие регулярности Слейтера выполнено.

Задача квадратичного программирования

Для решения задачи воспользуемся условиями существования седловой точки функции Лагранжа.

1) $\dfrac{\partial L^*}{\partial x_j} \geq 0$ 2) $x_j^* \dfrac{\partial L^*}{\partial x_j} = 0$ 3) $x_j^* \geq 0$, $j = \overline{1, n}$

4) $\dfrac{\partial L^*}{\partial y_i} \leq 0$ 5) $y_i^* \dfrac{\partial L^*}{\partial y_i} = 0$ 6) $y_i^* \geq 0$, $i = \overline{1, m}$

Если область допустимых решений не пустая, то условие регулярности Слейтера выполнено.

Функция Лагранжа для задачи квадратичного программирования на минимум:

$$L(x, y) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_k x_j + \sum_{i=1}^{m} y_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_j)$$

Задача квадратичного программирования

Функция Лагранжа для задачи квадратичного программирования на минимум:

$$L(x,y) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_k x_j + \sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_j\right)$$

Частные производные функции Лагранжа по переменным x будут линейными функциями.

Преобразуем неравенства (1) и (4) в равенства:

$$\frac{\partial L^*}{\partial x_j} - s_j = 0$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial y_i} + w_i = 0$$

Задача квадратичного программирования

Функция Лагранжа для задачи квадратичного программирования на минимум:

$$L(x,y)=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_{kj}x_k x_j+\sum_{i=1}^{m}y_i(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_j)$$

Частные производные функции Лагранжа по переменным x будут линейными функциями.

Преобразуем неравенства (1) и (4) в равенства:

$$\frac{\partial L^*}{\partial x_j}-s_j=0$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial y_i}+w_i=0$$

Тогда условия (3) и (5) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial L^*}{\partial x_j}-s_j=0 \qquad x_j^* s_j=0 \quad x_j^*\geq 0 \quad s_j\geq 0\,, \quad j=\overline{1,n}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial y_i}+w_i=0 \qquad y_i^* w_i=0 \quad y_i^*\geq 0 \quad w_i\geq 0\,, \quad i=\overline{1,m}$$

Задача квадратичного программирования

- Таким образом, чтобы найти решение задачи квадратичного программирования, нужно найти **неотрицательное** решение системы уравнений, удовлетворяющее условиям (3)(5).
- Данное решение можно найти, применив метод искусственного базиса для решения задачи максимизации функции:

$$-\sum z_j \to max,$$

где z_j – искусственные переменные, введенные в ограничения (1) с преобразованными ограничениями (1)(2),удовлетворяющее условиям (3)(5).

Задача квадратичного программирования

Пример

$$f(x_1, x_1) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача квадратичного программирования
Пример

Поставим задачу на минимум, возьмем противоположную функцию:

$$f(x_1, x_1) = -2x_1 - 4x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача квадратичного программирования
Пример

Поставим задачу на минимум, возьмем противоположную функцию:

$$f(x_1, x_1) = -2x_1 - 4x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$f''_{xx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ - положительно-определенная, следовательно, целевая функция – выпуклая функция, и любое локальное решение задачи будет являться ее глобальным решением.

Задача квадратичного программирования
Пример

Поставим задачу на минимум, возьмем противоположную функцию:

$$f(x_1, x_1) = -2x_1 - 4x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$f''_{xx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ - положительно-определенная, следовательно, целевая функция – выпуклая функция, и любое локальное решение задачи будет являться ее глобальным решением.

Функция Лагранжа:

$$L(x, y) = -2x_1 - 4x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 + y_1(x_1 + 2x_2 - 8) + y_2(2x_1 - x_2 - 12)$$

Задача квадратичного программирования
Пример

Функция Лагранжа:

$$L(x,y) = -2x_1 - 4x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 + y_1(x_1 + 2x_2 - 8) + y_2(2x_1 - x_2 - 12)$$

Запишем условия существования седловой точки:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2 + 2x_1 + y_1 + 2y_2 \geq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -4 + 4x_2 + 2y_1 - y_2 \geq 0$$

Задача квадратичного программирования
Пример

Функция Лагранжа:

$$L(x, y) = -2x_1 - 4x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 + y_1(x_1 + 2x_2 - 8) + y_2(2x_1 - x_2 - 12)$$

Запишем условия существования седловой точки:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2 + 2x_1 + y_1 + 2y_2 \geq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -4 + 4x_2 + 2y_1 - y_2 \geq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = x_1 + 2x_2 - 8 \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = 2x_1 - x_2 - 12 \leq 0$$

Задача квадратичного программирования
Пример

Условия дополняющей нежесткости:

$$x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(-2 + 2x_1 + y_1 + 2y_2) = 0$$

$$x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(-4 + 4x_2 + 2y_1 - y_2) = 0$$

$$y_1 \frac{\partial L}{\partial y_1} = y_1(x_1 + 2x_2 - 8) = 0$$

$$y_2 \frac{\partial L}{\partial y_2} = y_2(2x_1 - x_2 - 12) = 0$$

Требования неотрицательности:

$$x_1, x_2 \geq 0, y_1, y_2 \geq 0$$

Задача квадратичного программирования
Пример

Перепишем неравенства в следующем виде:

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ 4x_2 + 2y_1 - y_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \end{cases}$$

Задача квадратичного программирования
Пример

Перепишем неравенства в следующем виде:
Преобразуем неравенства в равенства:

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ 4x_2 + 2y_1 - y_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + y_1 + 2y_2 - w_1 = 2 \\ 4x_2 + 2y_1 - y_2 - w_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + w_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + w_4 = 12 \end{cases}$$

Задача квадратичного программирования
Пример

Поставим задачу линейного программирования для решения методом искусственного базиса:

$$g = -z_1 - z_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 + 2y_2 - w_1 + z_1 = 2 \\ 4x_1 + 2y_1 - y_2 - w_2 + z_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + w_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + w_4 = 12 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, y_1, y_2 \geq 0, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0, z_1, z_2 \geq 0$$

Задача квадратичного программирования
Пример

Поставим задачу линейного программирования для решения методом искусственного базиса:

$$g = -z_1 - z_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 + 2y_2 - w_1 + z_1 = 2 \\ 4x_1 + 2y_1 - y_2 - w_2 + z_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + w_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + w_4 = 12 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, y_1, y_2 \geq 0, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0, z_1, z_2 \geq 0$$

Условия дополняющей нежесткости:

$$x_1 w_1 = 0,\ x_2 w_2 = 0,\ y_1 w_3 = 0,\ y_2 w_4 = 0$$

Задача квадратичного программирования
Пример

Решим задачу линейного программирования симплекс-методом.

Полученный ответ:
$x_1 = 1, x_2 = 1, w_3 = 5, w_4 = 11$, все остальные переменные равны 0.

Задача квадратичного программирования
Пример

Решим задачу линейного программирования симплекс-методом.

Полученный ответ:
$x_1 = 1, x_2 = 1, w_3 = 5, w_4 = 11$, все остальные переменные равны 0.

Проверим условия дополняющей нежесткости:
$x_1 w_1 = 1 \cdot 0 = 0$, $x_2 w_2 = 1 \cdot 0 = 0$,
$y_1 w_3 = 0 \cdot 5 = 0$, $y_2 w_4 = 0 \cdot 11 = 0$

Таким образом, условия дополняющей нежесткости выполнены.

Задача квадратичного программирования
Пример

Решим задачу линейного программирования симплекс-методом.

Полученный ответ:
$x_1 = 1, x_2 = 1, w_3 = 5, w_4 = 11$, все остальные переменные равны 0.

Проверим условия дополняющей нежесткости:
$x_1 w_1 = 1 \cdot 0 = 0,\ x_2 w_2 = 1 \cdot 0 = 0,$
$y_1 w_3 = 0 \cdot 5 = 0,\ y_2 w_4 = 0 \cdot 11 = 0$

Таким образом, условия дополняющей нежесткости выполнены.

Так как решаемая задача – задача выпуклого нелинейного программирования, то необходимые условия экстремума являются и достаточными, следовательно, полученное решение является глобальным минимумом:

$$x_{min} = (1,1),\ \ f_{min} = -3 \ \Rightarrow \ f_{max} = 3$$

Общая задача НЛП

Условный экстремум при смешанных ограничениях

$$f(x) \to \min$$

$$D \begin{cases} g_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad k < n \\ g_i(x) \le 0, \quad i = \overline{k+1, m} \end{cases}$$

$f(x), g_i(x)$ - дважды непрерывно дифференцируемы.

Общая задача НЛП
Условный экстремум при смешанных ограничениях

Теорема (Необходимые условия экстремума 1-го порядка)

Пусть x^* - точка локального минимума, следовательно $\exists y_0^*$ и $y^* = \left(y_1^*,\dots,y_m^*\right)$ не равные нулю одновременно, что выполняются следующие условия:

1) $\dfrac{\partial L\left(x^*,y_0^*,y^*\right)}{\partial x_j}=0,\ \ j=\overline{1,n}$ - условия стационарности обобщенной функции Лагранжа

2) $g_i\left(x^*\right)=0,\ i=\overline{1,k},\ g_i\left(x^*\right)\le 0,\ i=\overline{k+1,m}$ - условия допустимости решения

3) $y_i^* \ge 0,\ i=\overline{k+1,m}$ - условия неотрицательности в случае минимума ($y_i^* \le 0,\ i=\overline{k+1,m}$ в случае максимума).

4) $y_i^* g_i\left(x^*\right)=0,\ i=\overline{k+1,m}$ - условия дополняющей нежесткости.

Если при этом градиенты активных ограничений-неравенств и ограничений-равенств в точке x* линейно независимы (выполняется условие регулярности), то $y_0^* \ne 0$

Общая задача НЛП

Условный экстремум при смешанных ограничениях

Теорема (достаточные условия минимума (максимума) первого порядка).

Пусть имеется точка (x^*,y^*), удовлетворяющая системе

$$\frac{\partial L\left(x^*, y_0^*, y^*\right)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,n} \text{ при } y_0^* \neq 0,$$

суммарное число активных ограничений-неравенств в точке x^* и ограничений-равенств совпадает с числом n переменных (при этом условие регулярности выполняется).

Если $y_i^* \geq 0, \ \forall i \in I\left(x^*\right)$, то x^* – точка условного локального минимума в задаче (1-3).

Если $y_i^* \leq 0, \ \forall i \in I\left(x^*\right)$, то x^* – точка условного локального максимума в задаче (1-3).

Общая задача НЛП
Условный экстремум при смешанных ограничениях

Теорема (необходимые условия минимума (максимума) второго порядка).

Пусть x^* – регулярная точка минимума (максимума) в задаче (1-3) и имеется решение (x^*, y^*) системы $\dfrac{\partial L(x^*, y_0^*, y^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}$.

Тогда $< L''_{xx}(x^*, y^*)h, \ h > \geq 0$ ($< L''_{xx}(x^*, y^*)h, \ h > \leq 0$) для $\forall \ h \neq 0 \in R^n$, при которых

$$< g_i'(x^*), \ h >= 0, \ i = \overline{1, k}, \quad y_i^* > 0 \ (y_i^* < 0)$$

$$< g_i'(x^*), \ h > \leq 0, \ i = \overline{k+1, m}, i \in I(x^*), \ y_i^* = 0$$

Общая задача НЛП
Условный экстремум при смешанных ограничениях

Теорема (достаточные условия экстремума второго порядка).

Пусть имеется точка (x^*,y^*), удовлетворяющая системе $\dfrac{\partial L(x^*, y_0^*, y^*)}{\partial x_j} = 0, \ \ j = \overline{1,n}$ при $y_0^* \neq 0$.

Если в этой точке $< L''_{xx}(x^*, y^*)h, \ h >> 0$ ($< L''_{xx}(x^*, y^*)h, \ h >< 0$) для всех $\forall \ h \neq 0 \in R^n$ таких, что

$$< g_i'(x^*), \ h >= 0, \ \ i = \overline{1,k}, \quad y_i^* > 0 \ (\ y_i^* < 0 \ )$$

$$< g_i'(x^*), \ h >\leq 0, \ \ i = \overline{k+1,m}, i \in I(x^*) \ , \ \ y_i^* = 0$$

то точка x* является точкой локального минимума (максимума) в задаче (1-3).

Страница с ошибкой и исправление

1. Страницы 28-30: $y^* = -2$
2. Страница 34: $L(x^0, y) \leq L(x^0, y^0) \leq L(x, y^0)$
3. Страница 37: $\exists \tilde{x}$: $g_i(\tilde{x}) < 0, i = \overline{1, m}$
4. Страница 42: Определение строго выпуклой функции –
$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) < \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$$
5. Страница 51: $L(x_1, x_2, y) = y_0(x_1^2 + x_2^2) + y_1(x_1 + x_2 - 2)$
6. Страница 59:

Если $f(x)$, $g_i(x)$ - выпуклы, множество D регулярно по Слейтеру, то $x^* \in D$ - оптимальное решение задачи тогда и только тогда, когда $\exists y_i^* \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ V_j^* \geq 0,\ j = \overline{1,n}$

Надо дописать, что при этом y_i^* и V_j^* одновременно не равны нулю

7. Страница 63: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_1 x_1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_k x_j =$

Надо написать: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j +$ то что в лекции

8. Страницы 70-73: $f(x_1, x_2)$
9. Страница 72-73: $f''_{xx} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Выполнили: Титов, Кубалов, Петрищев