

Kapitel 1

Reglerentwurf für das Balancieren auf einer Ecke

Nachdem im vorherigen Kapitel ein Modell des Systems entwickelt wurde muss nun für dieses ein Regler entworfen werden. Hierfür wird zunächst die kontinuierliche Zustandsraumdarstellung in eine diskrete überführt. Anschließend wird diese in eine Kalman-Dekomposition transformiert, um das System auf eine Minimalrealisierung zu reduzieren. Diese besteht lediglich aus steuer- und beobachtbaren Zuständen und kann somit als Ausgangspunkt für den Reglerentwurf genutzt werden. Für die Bestimmung des Reglers wird ebenfalls das LQR-Verfahren verwendet. Der Regler wird im nächsten Schritt an Hand einer Simulation überprüft, wobei der Verlauf der nicht steuerbar bzw. beobachtbaren Zustände untersucht wird. Des weiteren wird mittels der Simulation die Direktionalitätsproblematik des Mehrgrößensystems analysiert, welche durch die Stellgrößenbeschränkungen verursacht wird. Der resultierende Regler wird im Anschluss auf die reelle Strecke übertragen und dort empirisch optimiert.

1.1 Modell basierter Reglerentwurf

Aus dem letzten Kapitel ist die Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}^{3 \times 3} & \Delta\Phi & \mathbf{0}^{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_K^{-1} \cdot \Delta\mathbf{T}_G & -C_\psi \cdot \mathbf{I}_K^{-1} & C_\psi \cdot \mathbf{I}_K^{-1} \\ \mathbf{0}^{3 \times 3} & C_\psi \cdot \mathbf{I}_R^{-1} & -C_\psi \cdot \mathbf{I}_R^{-1} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}_c} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\varphi} \\ \mathbf{u}_K \\ \mathbf{u}_R \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}^{3 \times 3} \\ -\mathbf{I}_K^{-1} \\ \mathbf{I}_R^{-1} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}_c} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} T_{M1} \\ T_{M2} \\ T_{M3} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{u}} \quad (1.1)$$

hervorgegangen. Der Ausgangsvektor $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^8$ enthält alle Zustandsgrößen bis auf den Winkel φ_1 , da dieser nicht aus den Sensordaten ermittelt werden kann.

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}^8 & \mathbf{I}^{8 \times 8} \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{C}_c} \cdot \mathbf{x} \quad (1.2)$$

Im nächsten Schritt wird das kontinuierliche System $\mathfrak{S}(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$ in das diskrete System $\mathfrak{D}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ überführt. Hierfür wird die Abtastrate $f_a = 50\text{Hz}$ verwendet. Anschließend wird das System mittels der Kalmankriterien auf Steuer- und Beobachtbarkeit geprüft. Hieraus folgt, dass das System sowohl einen nicht steuerbaren als auch einen nicht beobachtbaren Zustand besitzt. Eine Voraussetzung für den Entwurf eines Zustandsreglers besteht darin, dass das System vollständig steuer- und beobachtbar ist. Deshalb kann das System $\mathfrak{D}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ nicht direkt für den Reglerentwurf verwendet werden. Zunächst muss eine Minimalrealisierung $\mathfrak{D}(\mathbf{A}_M, \mathbf{B}_M, \mathbf{C}_M)$ gefunden werden, welche nur den steuer- und beobachtbaren Unterraum des Systems enthält. Um eine Minimalrealisierung des Systems zu erhalten wird es in eine so genannte Kalman-Dekomposition $\mathfrak{D}(\mathbf{A}_K, \mathbf{B}_K, \mathbf{C}_K)$ überführt. Die hierfür nötige Transformationsmatrix \mathbf{T}_K wird mittels der Matlab-Funktion *minreal()* bestimmt.

$$\mathbf{x}_K = \mathbf{T}_K^{-1} \cdot \mathbf{x} \quad \mathbf{A}_K = \mathbf{T}_K^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_K \quad \mathbf{B}_K = \mathbf{T}_K^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad \mathbf{C}_K = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}_K \quad (1.3)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_M \\ x_{\bar{S}} \\ x_{\bar{B}} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}_K}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_M & \mathbf{a}_{M/\bar{S}} & 0 \\ \mathbf{0}^{1 \times 7} & a_{\bar{S}} & 0 \\ \mathbf{a}_{\bar{B}/M} & \mathbf{a}_{\bar{B}/\bar{S}} & a_{\bar{B}} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}_K} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_M \\ x_{\bar{S}} \\ x_{\bar{B}} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}_K}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_M \\ \mathbf{0}^{1 \times 3} \\ \mathbf{b}_{\bar{B}}^T \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}_K} \cdot \mathbf{u}(k) \quad (1.4)$$

$$\mathbf{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_M & c_{\bar{S}} & \mathbf{0}^8 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{C}_K} \cdot \mathbf{x}_K(k) \quad (1.5)$$

Die Kalman-Dekomposition $\mathfrak{D}_K(\mathbf{A}_K, \mathbf{B}_K, \mathbf{C}_K)$ setzt sich aus der Minimalrealisierung $\mathfrak{D}_M(\mathbf{A}_M, \mathbf{B}_M, \mathbf{C}_M)$, dem nicht steuerbaren Teilsystem $\mathfrak{D}_{\bar{S}}(a_{\bar{S}}, \mathbf{0}^{3 \times 1}, c_{\bar{S}})$ und dem nicht beobachtbaren Teilsystem $\mathfrak{D}_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}, \mathbf{b}_{\bar{B}}^T, \mathbf{0}^{8 \times 1})$ zusammen.¹ Prinzipiell kann nun für das System \mathfrak{D}_M ein Zustandsregler entwickelt werden, der zu einem asymptotischen System führt. Allerdings ist dabei zu beachten, dass die Teilsysteme \mathfrak{D}_M , $\mathfrak{D}_{\bar{S}}$ und $\mathfrak{D}_{\bar{B}}$ nicht voneinander entkoppelt sind. Die Abhängigkeiten zwischen den Teilsystemen werden von den Größen $\mathbf{a}_{M/\bar{S}}$, $\mathbf{a}_{\bar{B}/M}$ und $a_{\bar{B}/\bar{S}}$ beschrieben. Da der Zustandsregler lediglich die Eigenwerte des Teilsystem \mathfrak{D}_M beeinflussen kann, muss

¹Die hier gezeigte Dekomposition stellt nicht den allgemein gültigen Fall dar, der ein weiteres Teilsystem weder steuer- noch beobachtbaren Zustände enthält [Lunze RT2, S.108ff]

zusätzlich die Stabilität der Teilsysteme $\mathfrak{D}_{\bar{S}}$ und $\mathfrak{D}_{\bar{B}}$ geprüft werden. In diesem Kontext wird der Begriff der Stabilisierbarkeit verwendet, wobei ein System stabilisierbar heißt wenn all seine Eigenvorgänge, die nicht Teil seines vollständig steuer- und beobachtbaren Unterraums sind, asymptotisch stabil sind. In diesem Anwendungsfall handelt es sich bei $\mathfrak{D}_{\bar{S}}$ und $\mathfrak{D}_{\bar{B}}$ um Systeme erster Ordnung, deren Eigenwert $\lambda_{\bar{S}}$ bzw. $\lambda_{\bar{B}}$ auf dem Einheitskreis liegt.

$$\lambda_{\bar{S}} = \lambda_{\bar{B}} = 1 \quad (1.6)$$

Somit sind die beiden Teilsysteme grenzstabil. Um den Verlauf und Einfluss der Zustände $x_{\bar{S}}$ und $x_{\bar{B}}$ nachzuvollziehen wird zunächst ein Regler für die Minimalrealisierung \mathfrak{D}_M entworfen und in einer Simulation erprobt. Für die Bestimmung der Reglermatrix \mathbf{K}_M wird das LQR-Verfahren angewandt, wobei die Gewichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} in Diagonalf orm gewählt werden. Als Diagonalelemente werden die Kehrwerte der maximal zulässigen Zustandsgrößen im Quadrat verwendet. Hierbei ist zu beachten, dass der Reglerentwurf für das System \mathfrak{D}_M durchgeführt wird. Deshalb muss der maximale Zustandsvektor \mathbf{x}_{max} in dessen Darstellung transformiert werden. Hierfür wird mit der Transformationsmatrix \mathbf{T}_K^{-1} und einer nicht regulären Reduktionsmatrix multipliziert.

$$\mathbf{x}_{M,max} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{7 \times 7} & \mathbf{0}^{7 \times 2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}_K^{-1} \cdot \mathbf{x}_{max} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{x}_{M,max})^{-2} \quad \mathbf{R} = \text{diag}(\mathbf{u}_{max})^{-2} \quad (1.8)$$

In der Simulation wird für die Regelstrecke das kontinuierliche System $\mathfrak{S}_C(\mathbf{A}_C, \mathbf{B}_C, \mathbf{C}_C)$ verwendet. Für die Implementierung des Reglers ist ebenfalls in ([?]) beschriebene Transformation nötig.

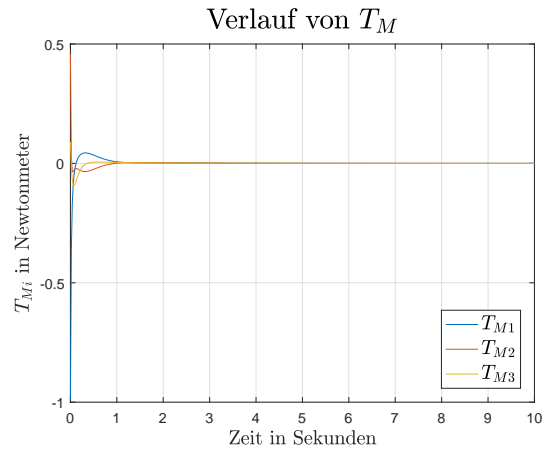
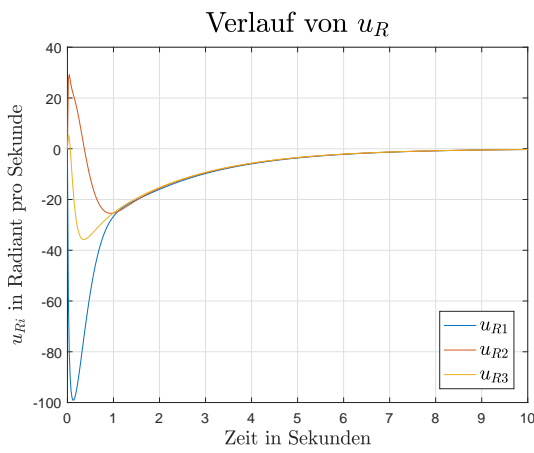
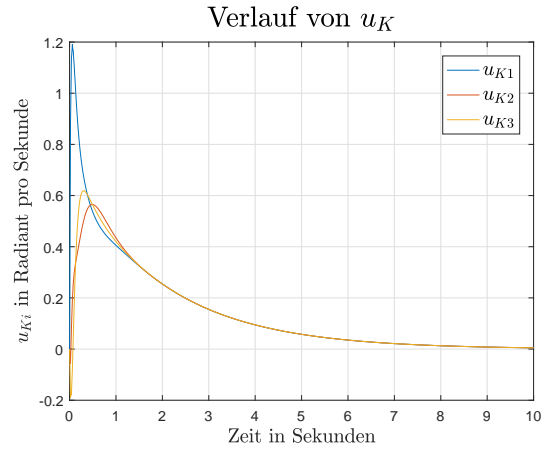
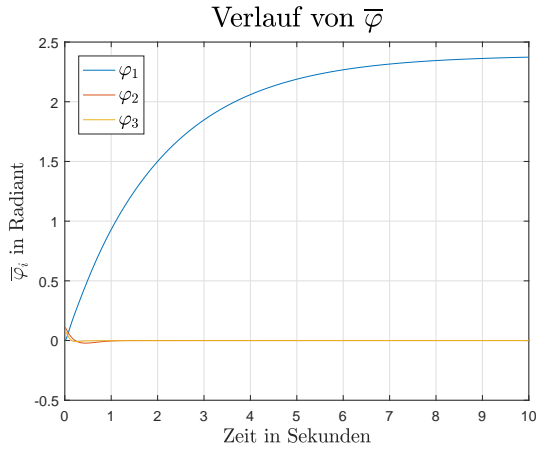
$$\mathbf{u}(k) = - \underbrace{\mathbf{K}_M \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{7 \times 7} & \mathbf{0}^{7 \times 2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}_K^{-1}}_{\equiv \mathbf{K}} \cdot \mathbf{x}(k) \quad (1.9)$$

Die folgenden Abbildungen zeigen den Verlauf der Zustandsgrößen $\bar{\varphi}$, \mathbf{u}_K und \mathbf{u}_R sowie der Stellgrößen \mathbf{T}_M bei dem Anfangszustand

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.11 \\ 0.08 \\ \mathbf{0}^{6 \times 1} \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Die Simulation zeigt, dass alle Zustandsgrößen bis auf den Winkel φ_1 gegen null konvergieren. Folglich ist anzunehmen, dass der Zustand φ_1 nicht teil der Minimalrealisierung \mathfrak{D}_M ist. Diese Vermutung lässt sich mittels der Matrizen \mathbf{C}_C und \mathbf{A}_C bestätigen. Die erste Spalte der Matrix \mathbf{C}_C ist ein Nullvektor und somit beeinflusst φ_1 den Ausgangsvektor \mathbf{y} nicht. Eine solche Zustandsvariable wird auch als nicht ausgangsverbunden bezeichnet. Des weiteren hat der Zustand φ_1 keine Auswirkung auf die Systemdynamik. Dies ist auf die erste Spalte der Systemmatrix \mathbf{A}_C

$$\mathbf{A}_C(:, 1) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{3 \times 1} \\ [\mathbf{I}_K^{-1} \cdot \Delta \mathbf{T}_G](:, 1) \\ \mathbf{0}^{3 \times 1} \end{bmatrix} = \mathbf{0}^{9 \times 1} \quad (1.11)$$



zurückzuführen, welche ebenfalls ein Nullvektor ist. Hieraus lässt sich schließen, dass es sich bei dem Winkel φ_1 um den nicht beobachtbaren Zustand $x_{\bar{B}}$ handelt. Dies wird auch von der Struktur der inversen Transformationsmatrix

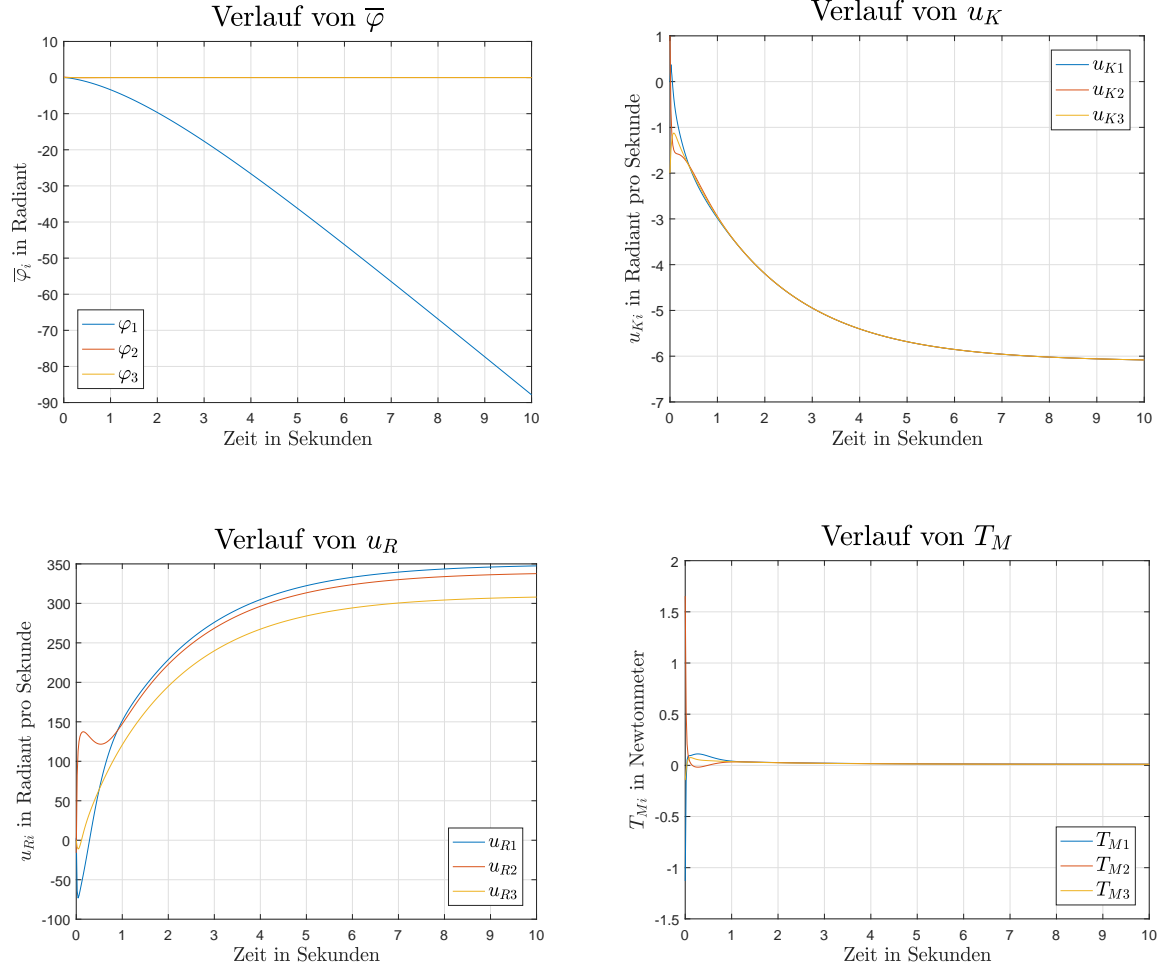
$$\mathbf{T}_K^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{8 \times 1} & \mathbf{T}_K^{-1}(2 : 9, 2 : 9) \\ 1 & \mathbf{0}^{1 \times 8} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

bestätigt, welche φ_1 in $x_{\bar{B}}$ abbildet.

Mit Hilfe der Matrix \mathbf{T}_K^{-1} kann auch der nicht steuerbare Zustand $x_{\bar{S}}$ interpretiert werden. Die zugehörige Zeile

$$\mathbf{T}_K^{-1}(8, :) \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,7 & 0,01 & 0,01 & 0,01 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

bildet den Zustandsvektor \mathbf{x} in die Variable $x_{\bar{S}}$ ab. Diese ist somit eine Linearkombination der Geschwindigkeiten \mathbf{u}_K und \mathbf{u}_R . Dieser Umstand erklärt auch das asymptotische Verhalten des Zustandsvektors in der vorherigen Simulation. Da $\mathbf{u}_K(0) = \mathbf{u}_R(0) = \mathbf{0}$ und somit $x_{\bar{S}}(0) = 0$ galt, kam die Grenzstabilität des nicht steuerbaren Zustandes nicht zum Tragen. Wird der Anfangszustand $\mathbf{x}(0)$ so angepasst, dass $x_{\bar{S}}(0) \neq \mathbf{0}$ gilt, ergibt sich das folgende Simulationsergebnis.



Die Simulation zeigt, dass die Winkel φ_2 und φ_3 nach wie vor asymptotisch stabil sind. Allerdings konvergieren die Winkelgeschwindigkeiten \mathbf{u}_K gegen den gleichen Endwert $u_{Ke} \neq 0$. Mittels der Winkelgeschwindigkeit

$${}^A\boldsymbol{\omega}^K = \begin{pmatrix} u_{K1} \\ u_{K2} \\ u_{K3} \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

bedeutet der Endwert u_{Ke} , dass der Würfel mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit um seine Hauptdiagonale rotiert. Ebenso konvergieren die Geschwindigkeiten der Schwungmasse \mathbf{u}_R und die Stellgrößen gegen einen von Null verschiedenen Endwert. Dieser Umstand kann an Hand des Systems \mathfrak{D}_K erklärt werden. Der Unterraum \mathfrak{D}_M ist im geschlossenen Regelkreis asymptotisch stabil. Allerdings wirkt der nicht steuerbare Zustand $x_{\bar{S}}$ proportional zu dem Vektor $\mathbf{a}_{M/\bar{S}}$ auf \mathbf{x}_M ein.

$$\mathbf{x}_M(k+1) = (\mathbf{A}_M - \mathbf{B}_M \cdot \mathbf{K}_M) \cdot \mathbf{x}_M(k) + \mathbf{a}_{M/\bar{S}} \cdot \sigma(t) \cdot x_{\bar{S}}(0) \quad (1.15)$$

Mit Hilfe des Endwertsatzes kann das Konvergenzverhalten bestimmt werden.

$$\begin{aligned} z \cdot \mathbf{X}_M(z) &= (\mathbf{A}_M - \mathbf{B}_M \cdot \mathbf{K}_M) \cdot \mathbf{X}_M(z) + \mathbf{a}_{M/\bar{S}} \cdot X_{\bar{S}}(z) \\ \Leftrightarrow \mathbf{X}_M(z) &= [z \cdot \mathbf{I} - (\mathbf{A}_M - \mathbf{B}_M \cdot \mathbf{K}_M)]^{-1} \cdot \mathbf{a}_{M/\bar{S}} \cdot \underbrace{X_{\bar{S}}(z)}_{=\frac{z}{z-1} \cdot x_{\bar{S}}(t=0)} \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_M(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \mathbf{X}_M(z) \equiv \mathbf{x}_{M,end} \quad (1.17)$$

Wird der Zustandsvektor $\mathbf{x}_{K,end}$ aus den Endwerten der Teilsysteme zusammengesetzt kann dieser in den ursprünglichen Zustandsraum transformiert werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{end} &= \mathbf{T}_K \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{M,end} \\ x_{\bar{S}} \\ x_{\bar{B}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & 5,4x_{\bar{S}} & 5,4x_{\bar{S}} & 5,4x_{\bar{S}} & -306,9x_{\bar{S}} & -298,2x_{\bar{S}} & -272,1x_{\bar{S}} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (1.18)$$

Dieses Ergebnis besagt, dass das System des Würfels ein Ruhelagenkontinuum besitzt. Die Winkel $\bar{\varphi}_2$ und $\bar{\varphi}_3$ konvergieren stets gegen null, was der aufrechten Position des Würfels auf einer Ecke entspricht. Allerdings rotiert der Würfel dabei mit einer konstanten, von $x_{\bar{S}}$ abhängigen Geschwindigkeit um seine Raumdiagonale. Des weiteren rotieren die drei Schwungmassen mit einer konstanten Endgeschwindigkeit, welche ebenfalls von $x_{\bar{S}}$ abhängt. In diesem Zusammenhang kann auch die nicht Steuerbarkeit des Zustandes $x_{\bar{S}}$ erklärt werden. Angenommen der Würfel rotiert in einer Ruhelage des Kontinuums mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit

$${}^A\boldsymbol{\omega}^K = \begin{pmatrix} u_{end} \\ u_{end} \\ u_{end} \end{pmatrix}^K. \quad (1.19)$$

Nun ist es zwar möglich diese Rotation durch ein parallel gerichtetes Motormoment

$$\mathbf{T}_M = \begin{pmatrix} T \\ T \\ T \end{pmatrix}^K \quad (1.20)$$

zu beeinflussen, allerdings werden dadurch zwangsläufig die Winkelgeschwindigkeiten \mathbf{u}_R der Schwungmassen beeinflusst. Somit ist es nicht möglich die Rotation des Würfels um seine Raumdiagonale unabhängig von der Bewegung der Schwungmassen zu beeinflussen, was wiederum gegen die Forderung der vollständigen Steuerbarkeit eines Systems verstößt. Dieses Ergebnis ist kritisch zu betrachten, da hier lediglich ein linearisiertes System untersucht wurde. Um eine finale Aussage über die Steuerbarkeit des Systems zu treffen, müssen dessen nicht lineare Bewegungsgleichung auf geprüft werden. Da es sich bei dem Würfel um ein eingangslineares System handelt ist dessen Prüfung auf Steuerbarkeit analytisch möglich [Adamy, S.155ff]. Diese Untersuchung wird in dieser Arbeit allerdings nicht durchgeführt, da an der realen Regelstrecke lediglich Anfangszustände mit

$$\bar{\varphi} \neq \mathbf{0} \quad \mathbf{u}_K \approx \mathbf{0} \quad \mathbf{u}_R \approx \mathbf{0} \quad (1.21)$$

untersucht werden und der nicht steuerbare Zustand $x_{\bar{S}}$ somit nicht besonders ins Gewicht fällt.

1.2 Untersuchung der Stellgrößenbeschränkung

Bisher wurde das System unter der Annahme betrachtet, dass die Stellgrößen \mathbf{u} unbegrenzt sind. Allerdings können die Motoren nur ein maximales Drehmoment $u_{max} = 0,11Nm$ aufbringen. Formal kann diese Begrenzung durch die Einführung der begrenzten Stellgröße

$$u_{i,sat} = \begin{cases} u_{max} & u_i > u_{max} \\ u & -u_{max} < u_i < u_{max} \\ -u_{max} & u_i < -u_{max} \end{cases} \quad (1.22)$$

ausgedrückt werden. Wird zunächst der Fall des auf einer Kante balancierenden Würfels betrachtet, so besitzt dieser lediglich eine Stellgröße. Tritt nun der Fall der Sättigung und die Stellgröße wird auf ihr Maximum beschränkt, so wird lediglich die Norm des Drehmomentvektors

$$\mathbf{T}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{i,sat} \end{pmatrix}^K \quad (1.23)$$

beeinflusst. Die Richtung des Drehmoments bleibt hingegen erhalten. Dies hat hinsichtlich der Stabilität die Folge, dass lediglich ein begrenztes Gebiet von Anfangszuständen in die Ruhelage überführt werden kann. Da in den restlichen Anfangszuständen z.B. das Gravitationsmoment so groß ist, dass es von dem begrenzten Motormoment nicht überwunden werden kann.

Der auf der Ecke balancierende Würfel besitzt allerdings mehrere Eingangsgrößen. Dies hat zur Folge, dass die Sättigung einer oder mehrerer Stellgrößen dazu führt, dass der Drehmomentvektor

$$\mathbf{T}_M = \begin{pmatrix} u_{1,sat} \\ u_{2,sat} \\ u_{3,sat} \end{pmatrix}^K \quad (1.24)$$

nicht nur in seiner Norm sondern auch der Richtung verändert wird. Die Richtungsänderung des Stellvektors durch Beschränkungen wird als Direktionalitätsproblem bezeichnet und kann unerwünschte Auswirkungen auf die Stabilität des Systems mit sich bringen [Ortseifen S.33]. Diese Problematik zeigt sich wenn die Simulation um eine Stellgrößenbeschränkung erweitert wird. Nun wird ist das Stabil bereits bei einem Anfangswinkel

$$\bar{\varphi}(0) \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 2^\circ \\ 2^\circ \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

instabil. Um das Einzugsgebiet der Ruhelage zu erweitern wird die Wichtungsmatrix \mathbf{Q} modifiziert. Da diese den Verlauf des Zustandsvektors gewichtet führt eine Reduktion ihrer Elemente zu niedrigeren Reglerwerten. Dadurch wird das Gebiet der Zustandsvektoren, welche eine Beschränkung der Stellgrößen verursacht, erweitert. Die Gewichtsmatrix \mathbf{Q} wird iterativ an Hand der Simulation variiert bis ein zufriedenstellendes Ergebnis erreicht ist. Hierbei

können Anfangswinkel von bis zu

$$\overline{\varphi}(0) \approx \begin{bmatrix} 0 & 5^\circ & 5^\circ \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

erreicht werden, bei denen sich das System stabil verhält. Jedoch ist es mit dieser Vorgehensweise nicht möglich das Einzugsgebiet der Zustände, welche in die Ruhelage überführt werden, in einem geschlossenen Ausdruck zu formulieren. Die Simulation ermöglicht lediglich eine Abschätzung des Stabilitätsverhaltens. Somit kann die Stabilität erst empirisch an der reellen Regelstrecke bewiesen werden. Um diese Problematik zu beseitigen müssen alternative Ansätze verfolgt werden. Mögliche Lösungen stellen der Entwurf eines Sättigungsreglers [Adamy, S.264 ff] oder die Implementierung eines modellbasierten Anti-Windups [Ortseifen] dar. Diese Methoden kommen im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht zum Einsatz.

1.3 Erprobung des Reglers an der Regelstrecke

Der nächste Schritt besteht darin die Ergebnisse der letzten Abschnitte an der Regelstrecke zu erproben. Hierfür wird der in der Simulation optimierte Regler verwendet. Dieser führt zu den Eigenwerten

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 0,7714 \quad \lambda_3 = 0,7767 \quad \lambda_4 = 0,8454 \\ \lambda_{5,6} = 0,8524 \pm 0,0014j \quad \lambda_{7,8} = 0,8543 \quad \lambda_9 = 1. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Die folgenden Abbildung zeigen den Verlauf der Zustandsgrößen und der Stellgrößen. Das

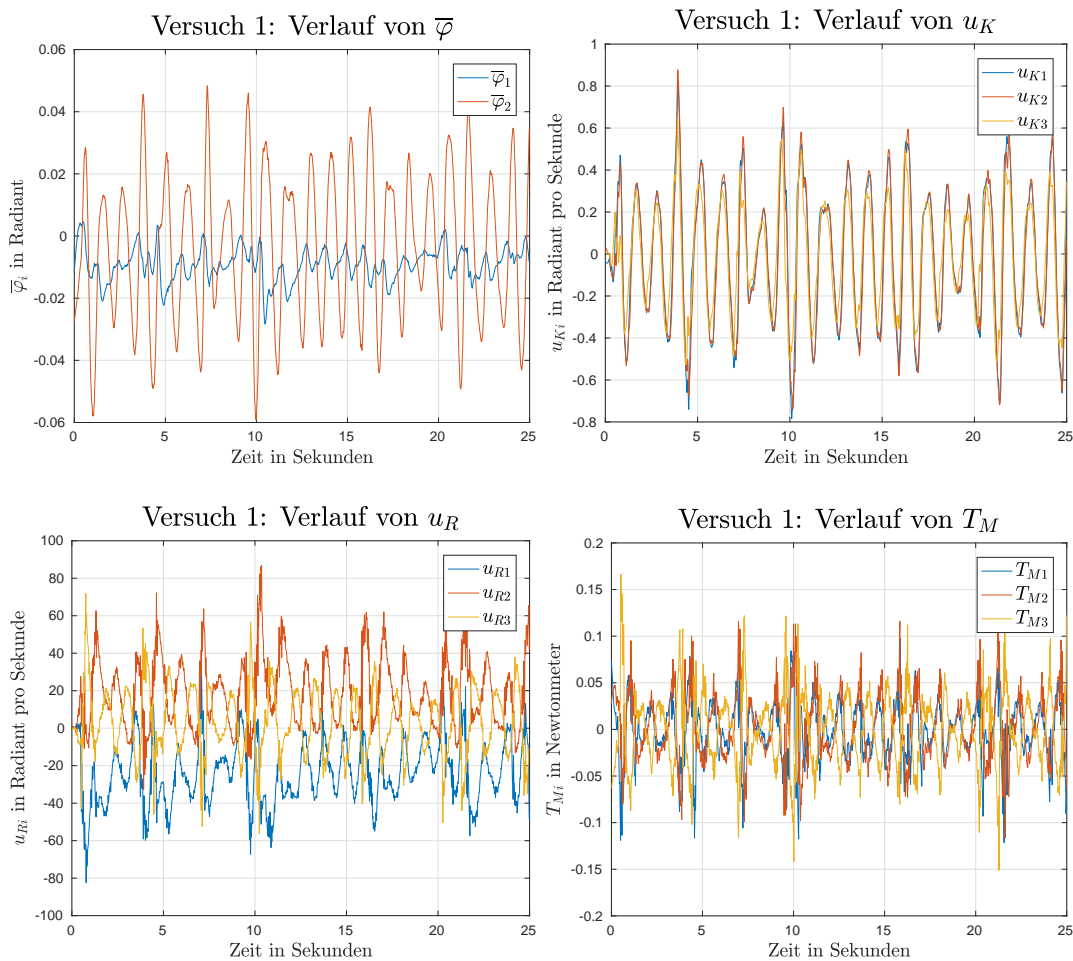


Abbildung 1.1: Systemverhalten des geschlossenen Regelkreises, Quelle: eigene Darstellung

Experiment zeigt, dass der Regler den Würfel auf einer Ecke stabilisiert. Allerdings ist das System nicht asymptotisch stabil sondern oszilliert mit einer konstanten Amplitude. Eine mögliche Erklärung für dieses Verhalten liegt in der Modellgüte. Um die Richtungsproblematik zu lösen wurde ein Regler gewählt, welcher die Eigenwerte des geschlossenen Kreises nahe an den Einheitskreis legt. Sind nun die Systemparameter des Modells fehlerbehaftet ist es möglich, dass die Eigenwerte des realen Regelkreises noch näher an dem Einheitskreis liegen. In diesem Fall können bereits kleinen Anregungen wie z.B. ein im Modell nicht erfasstes System- oder Messrauschen zu einer verbleibenden Schwingung führen. Des weiteren ist der Einfluss der Nichtlinearitäten zu nennen, welche die Auswirkungen der Modellungenauigkeiten zusätzlich beeinflussen können.

Um die Reglergüte zu verbessern werden zunächst die Versuchsergebnisse betrachtet. Besonders deutlich ist einerseits die Schwingung des Winkels φ_3 . Des weiteren sind die Signale $u_{K_i}(t)$ nahezu identisch. Dies entspricht einer Rotation des Würfels um seine Raumdiagonale. Um diese Oszillationen zu dämpfen werden einzelne Elemente der Reglermatrix schrittweise erhöht und die Veränderung empirisch überprüft. Die veränderten Elemente sind einerseits die Spalte $\mathbf{K}(:, 3)$, welche den Einfluss des Winkels φ_3 auf den Regler wiedergibt. Andererseits wurden die Elemente $\mathbf{K}(1, 4)$, $\mathbf{K}(2, 5)$ und $\mathbf{K}(3, 6)$ erhöht, welche den Einfluss der Winkelgeschwindigkeit in Richtung der Raumdiagonalen wiedergeben. Die Erhöhung dieser Elemente führt dazu, dass die Eigenwerte der zugehörigen Eigenbewegungen näher an den Ursprung gerückt werden. Die folgenden Abbildungen zeigen das Verhalten des geschlossenen Regelkreises, wobei die genannten Elemente der Reglermatrix um den Faktor zwei erhöht wurden. Aus den Versuchen geht hervor, dass die Anpassung des Reglers eine deutliche Verbesserung

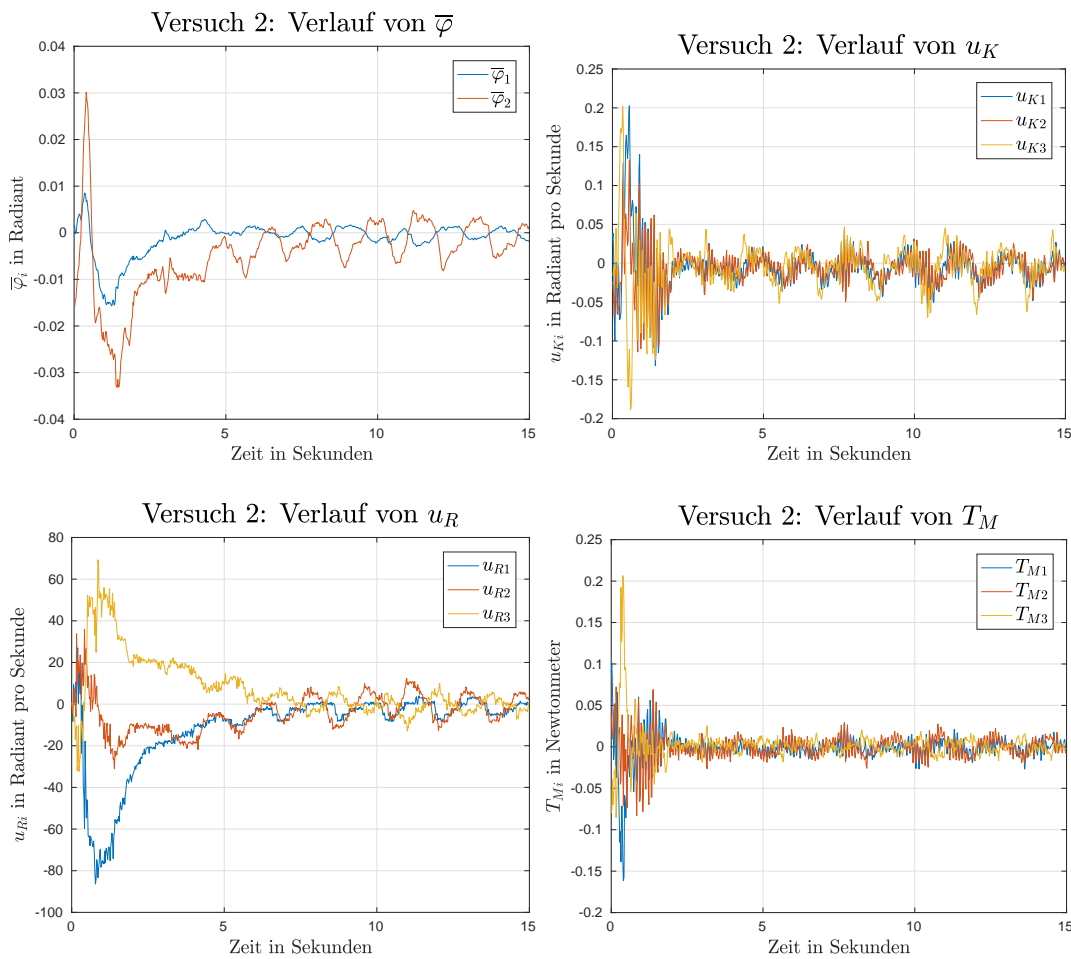


Abbildung 1.2: Verhalten des geschlossenen Regelkreises mit angepasstem Regler, Quelle: eigene Darstellung

des geschlossenen Regelkreises mit sich bringt. Jedoch ist diese Vorgehensweise kritisch zu beurteilen. Einerseits verbleibt eine Schwingung, welche ähnlich zu dem Verhalten aus dem vorherigen Versuch ist. Lediglich die Amplitude der Schwingung wurde die Änderung der Reglermatrix reduziert. Andererseits führt der Eingriff in die Reglermatrix dazu, dass die Reglereigenschaften, welche aus dem LQR-Verfahren resultieren, nicht mehr garantiert werden. Insbesondere die guten Robustheitseigenschaften können verloren gehen. Dies zeigt sich

wenn die Reglerelemente weiter verändert werden um die verbleibenden Schwingungen zu eliminieren. Derartige Änderungen führen zu einem instabilen Regelkreis.

Der erste Schritt um diese Probleme zu beseitigen besteht darin eine Systemidentifikation durchzuführen. Der Grund wieso dies bisher nicht erfolgt ist liegt darin, dass kein Versuchsaufbau vorliegt an dem die Identifikation durchgeführt werden kann. Da hier lediglich diskretisierte Systeme der Regelstrecke betrachtet werden, entsprechen die Elemente der System- und Eingangsmatrix keinen physikalischen Größen wie z.B. einem Trägheitsmoment. Somit ist es beispielsweise schwierig eine Systemidentifikation des auf einer Kante balancierenden Würfels durchzuführen und die Ergebnisse auf diesen Anwendungsfall zu übertragen. Es existieren zwar Methoden für die Parameterschätzung kontinuierlicher Regelstrecken [Unbi], allerdings sind diese mit weiteren Problemen verbunden. Des weiteren ist es schwierig einen Versuchsaufbau zu entwickeln mit dem sämtliche Parameter des auf der Ecke stehenden Würfels identifiziert werden können.

Jedoch ermöglicht der hier präsentierte Regler eine Systemidentifikation. Hierfür können Parameterschätzverfahren für geschlossene Regelkreise angewandt werden [Unbi]. Diese basieren darauf das Modell des offenen Regelkreises zu betrachten und dessen Eingangssignal aus der Summe des Reglergesetzes und eines Testsignals zu berechnen. Durch den Regler ist das System stabil, wodurch die Identifikation möglich wird. Als Testsignal kann beispielsweise eine harmonische Schwingung verwendet werden, deren Frequenz variiert wird um das vollständige Übertragungsverhalten des Systems abzudecken [Unbi]. Mit diesem Versuchsaufbau kann zunächst die diskrete Übertragungsfunktionmatrix der Regelstrecke bestimmt werden, welche dem Unterraum der Minimalrealisierung \mathfrak{D}_M entspricht. Des weiteren können die Amplituden der Testsignale variiert werden um die Auswirkungen der Nichtlinearitäten abzuschätzen [Unbi]. An Hand der Ergebnisse der Systemidentifikation können anschließend weitere Verbesserungen an dem Regler durchgeführt werden.