

# Kapitel 1

## Reglerentwurf für das Balancieren auf einer Ecke

Nachdem im vorherigen Kapitel ein Modell des Systems entwickelt wurde, muss für dieses ein Regler entworfen werden. Hierfür wird zunächst die kontinuierliche Zustandsraumdarstellung in eine diskrete überführt. Anschließend wird diese in eine Kalman-Dekomposition transformiert, um das System auf eine Minimalrealisierung zu reduzieren. Diese besteht lediglich aus steuer- und beobachtbaren Zuständen und kann somit als Ausgangspunkt für die Bestimmung des Reglers verwendet werden, wobei ebenfalls das LQR-Verfahren angewandt wird. Der Regler wird im nächsten Schritt anhand einer Simulation überprüft, wobei der Verlauf der nicht steuer- bzw. beobachtbaren Zustände untersucht wird. Des Weiteren wird mittels der Simulation die Direktionalitätsproblematik des Mehrgrößensystems analysiert, welche durch die Stellgrößenbeschränkungen verursacht wird. Der resultierende Regler wird im Anschluss an der Regelstrecke erprobt und empirisch optimiert.

## 1.1 Modellbasierter Reglerentwurf

Aus dem letzten Kapitel ist die Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}^{3 \times 3} & \Delta\Phi & \mathbf{0}^{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_K^{-1} \cdot \Delta T_G & -C_\psi \cdot \mathbf{I}_K^{-1} & C_\psi \cdot \mathbf{I}_K^{-1} \\ \mathbf{0}^{3 \times 3} & C_\psi \cdot \mathbf{I}_R^{-1} & -C_\psi \cdot \mathbf{I}_R^{-1} \end{bmatrix}}_{=A_c} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\varphi} \\ \mathbf{u}_K \\ \mathbf{u}_R \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}^{3 \times 3} \\ -\mathbf{I}_K^{-1} \\ \mathbf{I}_R^{-1} \end{bmatrix}}_{=B_c} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} T_{M1} \\ T_{M2} \\ T_{M3} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{u}} \quad (1.1)$$

hervorgegangen. Der Ausgangsvektor  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^8$  enthält alle Zustandsgrößen bis auf den Winkel  $\varphi_1$ , da dieser nicht aus den Sensordaten ermittelt werden kann.

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}^8 & \mathbf{I}^{8 \times 8} \end{bmatrix}}_{\equiv C_c} \cdot \mathbf{x} \quad (1.2)$$

Im nächsten Schritt wird das kontinuierliche System  $\mathfrak{S}(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$  in das diskrete System  $\mathfrak{D}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  überführt. Hierfür wird die Abtastrate  $f_a = 50$  Hz verwendet. Anschließend wird das System mittels der Kalmankriterien auf Steuer- und Beobachtbarkeit geprüft. Hieraus folgt, dass das System sowohl über einen nicht steuerbaren als auch einen nicht beobachtbaren Zustand verfügt. Eine Voraussetzung für den Entwurf eines Zustandsreglers besteht darin, dass das System vollständig steuer- und beobachtbar ist, weshalb das System  $\mathfrak{D}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  nicht direkt für den Reglerentwurf verwendet werden kann. Zunächst muss eine Minimalrealisierung  $\mathfrak{D}_M(\mathbf{A}_M, \mathbf{B}_M, \mathbf{C}_M)$  gefunden werden, welche nur den steuer- und beobachtbaren Unterraum des Systems enthält. Um eine Minimalrealisierung des Systems zu erhalten, wird es in eine so genannte Kalman-Dekomposition  $\mathfrak{D}_K(\mathbf{A}_K, \mathbf{B}_K, \mathbf{C}_K)$  überführt. Die hierfür nötige Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_K$  wird mittels der Matlab-Funktion *minreal()* bestimmt.

$$\mathbf{x}_K = \mathbf{T}_K^{-1} \cdot \mathbf{x} \quad \mathbf{A}_K = \mathbf{T}_K^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_K \quad \mathbf{B}_K = \mathbf{T}_K^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad \mathbf{C}_K = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}_K \quad (1.3)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_M \\ x_{\bar{S}} \\ x_{\bar{B}} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}_K} (k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_M & \mathbf{a}_{M/\bar{S}} & 0 \\ \mathbf{0}^{1 \times 7} & a_{\bar{S}} & 0 \\ \mathbf{a}_{\bar{B}/M} & a_{\bar{B}/\bar{S}} & a_{\bar{B}} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}_K} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_M \\ x_{\bar{S}} \\ x_{\bar{B}} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}_K} (k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_M \\ \mathbf{0}^{1 \times 3} \\ \mathbf{b}_{\bar{B}}^T \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}_K} \cdot \mathbf{u}(k) \quad (1.4)$$

$$\mathbf{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_M & c_{\bar{S}} & \mathbf{0}^8 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{C}_K} \cdot \mathbf{x}_K(k) \quad (1.5)$$

Die Kalman-Dekomposition  $\mathfrak{D}_K(\mathbf{A}_K, \mathbf{B}_K, \mathbf{C}_K)$  setzt sich aus der Minimalrealisierung  $\mathfrak{D}_M(\mathbf{A}_M, \mathbf{B}_M, \mathbf{C}_M)$ , dem nicht steuerbaren Teilsystem  $\mathfrak{D}_{\bar{S}}(a_{\bar{S}}, \mathbf{0}^{3 \times 1}, c_{\bar{S}})$  und dem nicht beobachtbaren Teilsystem  $\mathfrak{D}_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}, \mathbf{b}_{\bar{B}}^T, \mathbf{0}^{8 \times 1})$  zusammen.<sup>1</sup> Prinzipiell lässt sich nun für das System  $\mathfrak{D}_M$  ein Zustandsregler entwickeln, der zu einem asymptotischen System führt. Allerdings ist dabei zu beachten, dass die Teilsysteme  $\mathfrak{D}_M$ ,  $\mathfrak{D}_{\bar{S}}$  und  $\mathfrak{D}_{\bar{B}}$  nicht voneinander entkoppelt sind. Die Abhängigkeiten zwischen den Teilsystemen werden von den Größen  $\mathbf{a}_{M/\bar{S}}$ ,  $\mathbf{a}_{\bar{B}/M}$  und  $a_{\bar{B}/\bar{S}}$  beschrieben. Da der Zustandsregler lediglich die Eigenwerte des Teilsystem  $\mathfrak{D}_M$  beeinflussen

<sup>1</sup>Die hier gezeigte Dekomposition stellt nicht den allgemeingültigen Fall dar, der ein weiteres Teilsystem weder steuer- noch beobachtbaren Zustände enthält [?, S. 108 ff.].

kann, muss zusätzlich die Stabilität der Teilsysteme  $\mathfrak{D}_{\bar{S}}$  und  $\mathfrak{D}_{\bar{B}}$  geprüft werden. In diesem Kontext wird der Begriff der Stabilisierbarkeit verwendet, wobei ein System stabilisierbar heißt, wenn all seine Eigenvorgänge, die nicht zu seinem vollständig steuer- und beobachtbaren Unterraum gehören, asymptotisch stabil sind. In diesem Anwendungsfall handelt es sich bei  $\mathfrak{D}_{\bar{S}}$  und  $\mathfrak{D}_{\bar{B}}$  um Systeme erster Ordnung, deren Eigenwert  $\lambda_{\bar{S}}$  bzw.  $\lambda_{\bar{B}}$  auf dem Einheitskreis liegen.

$$\lambda_{\bar{S}} = \lambda_{\bar{B}} = 1 \quad (1.6)$$

Somit sind die beiden Teilsysteme grenzstabil. Um den Verlauf und Einfluss der Zustände  $x_{\bar{S}}$  und  $x_{\bar{B}}$  nachzuvollziehen, wird zunächst ein Regler für die Minimalrealisierung  $\mathfrak{D}_M$  entworfen und in einer Simulation erprobt. Für die Bestimmung der Reglermatrix  $\mathbf{K}_M$  wird das LQR-Verfahren angewandt, wobei die Gewichtungsmatrizen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$  in Diagonalform gewählt werden. Als Diagonalelemente werden die Kehrwerte der maximal zulässigen Zustandsgrößen im Quadrat verwendet. Hierbei ist zu beachten, dass der Reglerentwurf für das System  $\mathfrak{D}_M$  durchgeführt wird. Deshalb muss der maximale Zustandsvektor  $\mathbf{x}_{\max}$  in dessen Darstellung transformiert werden, wofür mit der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_K^{-1}$  und einer nicht regulären Reduktionsmatrix multipliziert wird

$$\mathbf{x}_{M,\max} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{7 \times 7} & \mathbf{0}^{7 \times 2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}_K^{-1} \cdot \mathbf{x}_{\max}. \quad (1.7)$$

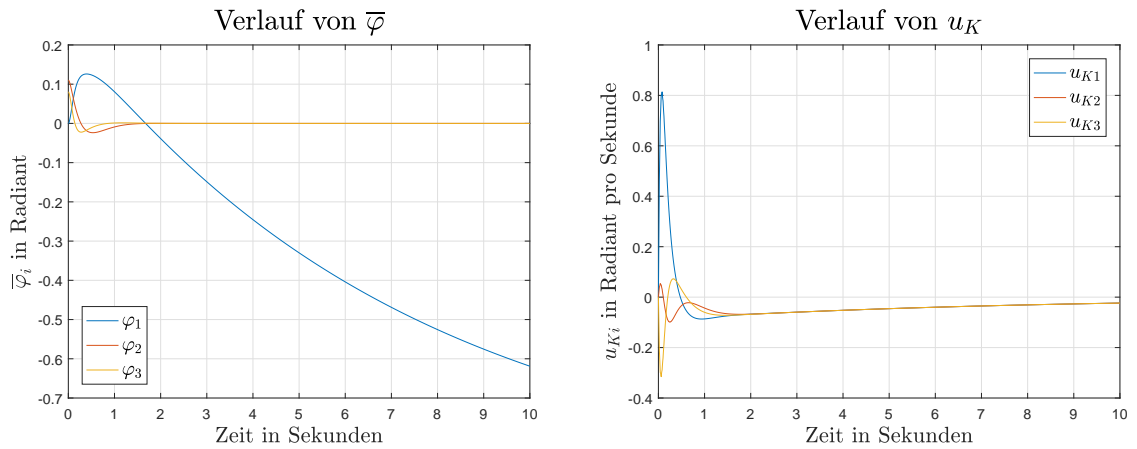
$$\mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{x}_{M,\max})^{-2} \quad \mathbf{R} = \text{diag}(\mathbf{u}_{\max})^{-2} \quad (1.8)$$

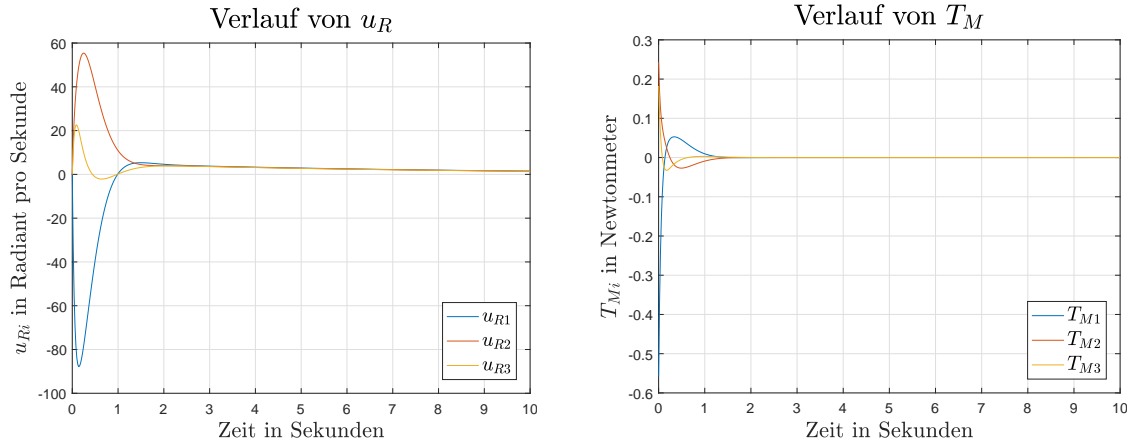
In der Simulation wird für die Regelstrecke das kontinuierliche System  $\mathfrak{S}_c(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$  verwendet. Für die Implementierung des Reglers ist ebenfalls die in (5.7) beschriebene Transformation nötig.

$$\mathbf{u}(k) = - \underbrace{\mathbf{K}_M \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{7 \times 7} & \mathbf{0}^{7 \times 2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}_K^{-1}}_{\equiv \mathbf{K}} \cdot \mathbf{x}(k) \quad (1.9)$$

Die folgenden Abbildungen zeigen den Verlauf des Systems mit dem Anfangszustand

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0,11 & 0,08 & \mathbf{0}^{6 \times 1} \end{bmatrix}^T. \quad (1.10)$$



Abbildung 1.0: Verlauf des Systems in der Simulation mit  $x_{\bar{s}} = 0$ 

Die Simulation zeigt, dass alle Zustandsgrößen bis auf den Winkel  $\varphi_1$  gegen null konvergieren. Daraus folgt, dass der Zustand  $\varphi_1$  nicht Teil der Minimalrealisierung  $\mathfrak{D}_M$  ist, was sich mittels der Matrizen  $\mathbf{C}_c$  und  $\mathbf{A}_c$  bestätigen lässt. Die erste Spalte der Matrix  $\mathbf{C}_c$  ist ein Nullvektor, woraus folgt, dass  $\varphi_1$  den Ausgangsvektor  $\mathbf{y}$  nicht beeinflusst. Eine solche Zustandsvariable wird auch als nicht ausgangsverbunden bezeichnet. Des Weiteren hat der Zustand  $\varphi_1$  keine Auswirkung auf die Systemdynamik. Dies ist auf die erste Spalte der Systemmatrix  $\mathbf{A}_c$

$$\mathbf{A}_c(:, 1) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{3 \times 1} \\ [\mathbf{I}_K^{-1} \cdot \Delta \mathbf{T}_G](:, 1) \\ \mathbf{0}^{3 \times 1} \end{bmatrix} = \mathbf{0}^{9 \times 1} \quad (1.11)$$

zurückzuführen, welche ebenfalls einen Nullvektor darstellt. Hieraus resultiert, dass es sich bei dem Winkel  $\varphi_1$  um den nicht beobachtbaren Zustand  $x_{\bar{B}}$  handelt. Dies wird auch von der Struktur der inversen Transformationsmatrix

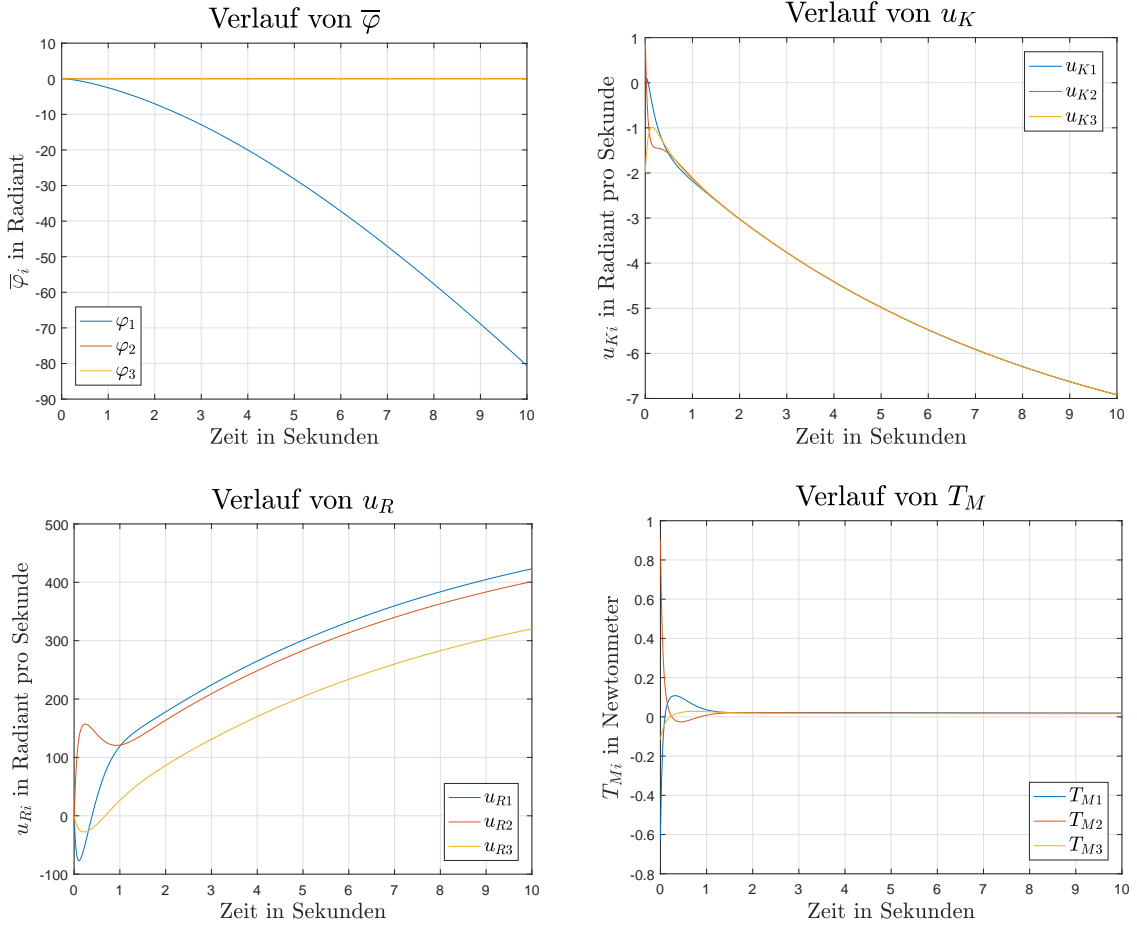
$$\mathbf{T}_K^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{8 \times 1} & \mathbf{T}_K^{-1}(2:9, 2:9) \\ 1 & \mathbf{0}^{1 \times 8} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

bestätigt, welche  $\varphi_1$  in  $x_{\bar{B}}$  abbildet.

Mithilfe der Matrix  $\mathbf{T}_K^{-1}$  kann auch der nicht steuerbare Zustand  $x_{\bar{s}}$  interpretiert werden. Die zugehörige Zeile

$$\mathbf{T}_K^{-1}(8, :) \approx [0 \ 0 \ 0 \ 0,5 \ 0,5 \ 0,7 \ 0,01 \ 0,01 \ 0,01] \quad (1.13)$$

bildet den Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  in die Variable  $x_{\bar{s}}$  ab. Diese ist somit eine Linearkombination der Geschwindigkeiten  $\mathbf{u}_K$  und  $\mathbf{u}_R$ , was ebenfalls das asymptotische Verhalten des Zustandsvektors in der vorherigen Simulation erklärt. Da  $\mathbf{u}_K(0) = \mathbf{u}_R(0) = \mathbf{0}$  und somit  $x_{\bar{s}}(0) = 0$  galt, spielte die Grenzstabilität des nicht steuerbaren Zustandes keine Rolle. Wird der Anfangszustand  $\mathbf{x}(0)$  so angepasst, dass  $x_{\bar{s}}(0) \neq \mathbf{0}$  gilt, ergibt sich das folgende Simulationsergebnis.

Abbildung 1.1: Verlauf des Systems in der Simulation mit  $x_{\bar{S}} \neq 0$ 

Die Simulation zeigt, dass die Winkel  $\varphi_2$  und  $\varphi_3$  nach wie vor asymptotisch stabil sind. Allerdings konvergieren die Winkelgeschwindigkeiten  $\mathbf{u}_K$  gegen den gleichen Endwert  $u_{Ke} \neq 0$ . Mittels der Winkelgeschwindigkeit

$$\mathbf{A}_{\omega}^K = \begin{pmatrix} u_{K1} \\ u_{K2} \\ u_{K3} \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

bedeutet der Endwert  $u_{Ke}$ , dass der Würfel mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit um seine Raumdiagonale rotiert. Ebenso konvergieren die Geschwindigkeiten der Schwungmasse  $\mathbf{u}_R$  und die Stellgrößen gegen einen von Null verschiedenen Endwert. Dieser Umstand kann anhand des Systems  $\mathfrak{D}_K$  erklärt werden. Der Unterraum  $\mathfrak{D}_M$  ist im geschlossenen Regelkreis asymptotisch stabil. Allerdings wirkt der nicht steuerbare Zustand  $x_{\bar{S}}$  proportional zu dem Vektor  $\mathbf{a}_{M/\bar{S}}$  auf  $\mathbf{x}_M$  ein.

$$\mathbf{x}_M(k+1) = (\mathbf{A}_M - \mathbf{B}_M \cdot \mathbf{K}_M) \cdot \mathbf{x}_M(k) + \mathbf{a}_{M/\bar{S}} \cdot \sigma(t) \cdot x_{\bar{S}}(0) \quad (1.15)$$

Mit Hilfe des Endwertsatzes kann das Konvergenzverhalten bestimmt werden.

$$\begin{aligned} z \cdot \mathbf{X}_M(z) &= (\mathbf{A}_M - \mathbf{B}_M \cdot \mathbf{K}_M) \cdot \mathbf{X}_M(z) + \mathbf{a}_{M/\bar{S}} \cdot X_{\bar{S}}(z) \\ \Leftrightarrow \mathbf{X}_M(z) &= [z \cdot \mathbf{I} - (\mathbf{A}_M - \mathbf{B}_M \cdot \mathbf{K}_M)]^{-1} \cdot \mathbf{a}_{M/\bar{S}} \cdot X_{\bar{S}}(z) \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_M(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \mathbf{X}_M(z) \equiv \mathbf{x}_{M,\text{end}} \quad (1.17)$$

Wird der Zustandsvektor  $\mathbf{x}_{K,\text{end}}$  aus den Endwerten der Teilsysteme zusammengesetzt, kann dieser in den ursprünglichen Zustandsraum transformiert werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{end}} &= \mathbf{T}_K \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{M,\text{end}} \\ x_{\bar{S}} \\ x_{\bar{B}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & 5,4x_{\bar{S}} & 5,4x_{\bar{S}} & 5,4x_{\bar{S}} & -306,9x_{\bar{S}} & -298,2x_{\bar{S}} & -272,1x_{\bar{S}} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (1.18)$$

Dieses Ergebnis zeigt, dass das System des Würfels ein Ruhelagenkontinuum besitzt. Die Winkel  $\bar{\varphi}_2$  und  $\bar{\varphi}_3$  konvergieren stets gegen null, was der aufrechten Position des Würfels auf einer Ecke entspricht. Allerdings rotiert der Würfel dabei mit einer konstanten, von  $x_{\bar{S}}$  abhängigen Geschwindigkeit um seine Raumdiagonale. Zudem rotieren die drei Schwungmassen mit einer konstanten Endgeschwindigkeit, welche ebenfalls von  $x_{\bar{S}}$  abhängt. In diesem Zusammenhang kann auch die nicht Steuerbarkeit des Zustandes  $x_{\bar{S}}$  erklärt werden. Angenommen der Würfel rotiert in einer Ruhelage des Kontinuums mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit

$${}^A\boldsymbol{\omega}^K = \begin{pmatrix} u_{\text{end}} \\ u_{\text{end}} \\ u_{\text{end}} \end{pmatrix}^K. \quad (1.19)$$

Nun ist es zwar möglich diese Rotation durch ein parallel gerichtetes Motormoment

$$\mathbf{T}_M = \begin{pmatrix} T \\ T \\ T \end{pmatrix}^K \quad (1.20)$$

zu beeinflussen, allerdings werden dadurch zwangsläufig die Winkelgeschwindigkeiten  $\mathbf{u}_R$  der Schwungmassen beeinflusst. Somit ist es nicht möglich die Rotation des Würfels um seine Raumdiagonale unabhängig von der Bewegung der Schwungmassen zu beeinflussen, was wiederum gegen die Forderung der vollständigen Steuerbarkeit eines Systems verstößt. Dieses Ergebnis muss jedoch kritisch betrachtet werden, da es sich hierbei lediglich um die Untersuchung eines linearisierten Systems handelt. Um eine finale Aussage über die Steuerbarkeit des Systems zu treffen, müssen dessen nicht lineare Bewegungsgleichung geprüft werden. Da es sich bei diesem Würfel um ein eingangslineares System handelt, ist dessen Prüfung auf Steuerbarkeit analytisch möglich [?, S. 155 ff.]. Diese Untersuchung wird in dieser Arbeit allerdings nicht durchgeführt, da an der realen Regelstrecke lediglich Anfangszustände mit

$$\bar{\varphi} \neq \mathbf{0} \quad \mathbf{u}_K \approx \mathbf{0} \quad \mathbf{u}_R \approx \mathbf{0} \quad (1.21)$$

untersucht werden und der nicht steuerbare Zustand  $x_{\bar{S}}$  somit nicht weiter ins Gewicht fällt.

## 1.2 Untersuchung der Stellgrößenbeschränkung

Bisher wurde das System unter der Annahme betrachtet, dass die Stellgrößen  $\mathbf{u}$  unbegrenzt sind. Allerdings können die Motoren nur ein maximales Drehmoment  $u_{\max} = 0,11 \text{ Nm}$  aufbringen. Formal kann diese Begrenzung durch die Einführung der begrenzten Stellgröße

$$u_{i,\text{sat}} = \begin{cases} u_{\max} & u_i > u_{\max} \\ u & -u_{\max} < u_i < u_{\max} \\ -u_{\max} & u_i < -u_{\max} \end{cases} \quad (1.22)$$

ausgedrückt werden. Wird zunächst der Fall des auf einer Kante balancierenden Würfels betrachtet, so besitzt dieser lediglich eine Stellgröße. Tritt nun der Fall der Sättigung ein und die Stellgröße wird auf ihr Maximum beschränkt, so wird lediglich die Norm des Drehmomentvektors

$$\mathbf{T}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{i,\text{sat}} \end{pmatrix}^K \quad (1.23)$$

beeinflusst. Die Richtung des Drehmoments bleibt hingegen erhalten. Dies hat hinsichtlich der Stabilität die Folge, dass nur ein begrenztes Gebiet von Anfangszuständen in die Ruhelage überführt werden kann, da in den restlichen Anfangszuständen z.B. das Gravitationsmoment so groß ist, dass es von dem begrenzten Motormoment nicht überwunden werden kann.

Der auf der Ecke balancierende Würfel besitzt allerdings mehrere Eingangsgrößen, was zur Folge hat, dass die Sättigung einer oder mehrerer Stellgrößen dazu führt, dass nicht nur die Norm sondern auch die Richtung des Drehmomentvektors

$$\mathbf{T}_M = \begin{pmatrix} u_{1,\text{sat}} \\ u_{2,\text{sat}} \\ u_{3,\text{sat}} \end{pmatrix}^K \quad (1.24)$$

verändert wird. Die Richtungsänderung des Stellvektors durch Beschränkungen wird als Direktionalitätsproblem bezeichnet und kann unerwünschte Auswirkungen auf die Stabilität des Systems mit sich bringen [?, S. 33]. Diese Problematik zeigt sich, wenn die Simulation um eine Stellgrößenbeschränkung erweitert wird. Nun wird das System bereits bei einem Anfangswinkel

$$\bar{\varphi}(0) \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 2^\circ \\ 2^\circ \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

instabil. Um das Einzugsgebiet der Ruhelage zu erweitern, wird die Gewichtungsmatrix  $\mathbf{Q}$  modifiziert. Da diese den Verlauf des Zustandsvektors gewichtet, führt eine Reduktion ihrer Elemente zu niedrigeren Reglerwerten. Dadurch wird das Gebiet der Zustandsvektoren, welche eine Beschränkung der Stellgrößen verursacht, erweitert. Die Gewichtungsmatrix  $\mathbf{Q}$  wird iterativ anhand der Simulation variiert, bis ein zufriedenstellendes Ergebnis erreicht ist. Hierbei können Anfangswinkel im Bereich

$$\bar{\varphi}(0) \approx \begin{bmatrix} 0 & 5^\circ & 5^\circ \end{bmatrix}^T \quad (1.26)$$

erreicht werden, bei denen sich das System stabil verhält. Jedoch ist es mit dieser Vorgehensweise nicht möglich das Einzugsgebiet der Zustände, welche in die Ruhelage überführt werden, in einem geschlossenen Ausdruck zu formulieren. Die Simulation ermöglicht lediglich eine Abschätzung des Stabilitätsverhaltens. Somit kann die Stabilität erst empirisch an der reellen Regelstrecke bewiesen werden. Um diese Problematik zu beseitigen müssen alternative Ansätze verfolgt werden. Mögliche Lösungen stellen der Entwurf eines Sättigungsreglers [?, S. 264 ff.] oder die Implementierung eines modellbasierten Anti-Windups [?] dar, welche im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht zum Einsatz kommen.



### 1.3 Eprobung des Reglers an der Regelstrecke

Der nächste Schritt besteht darin die Ergebnisse der letzten Abschnitte an der Regelstrecke zu erproben, wozu der in der Simulation optimierte Regler verwendet wird. Dieser führt zu den Eigenwerten

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 & \lambda_2 &= 0,7714 & \lambda_3 &= 0,7767 & \lambda_4 &= 0,8454 \\ \lambda_{5,6} &= 0,8524 \pm 0,0014j & \lambda_{7,8} &= 0,8543 & \lambda_9 &= 1. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Die folgenden Abbildung zeigen den Verlauf der Zustandsgrößen und der Stellgrößen.

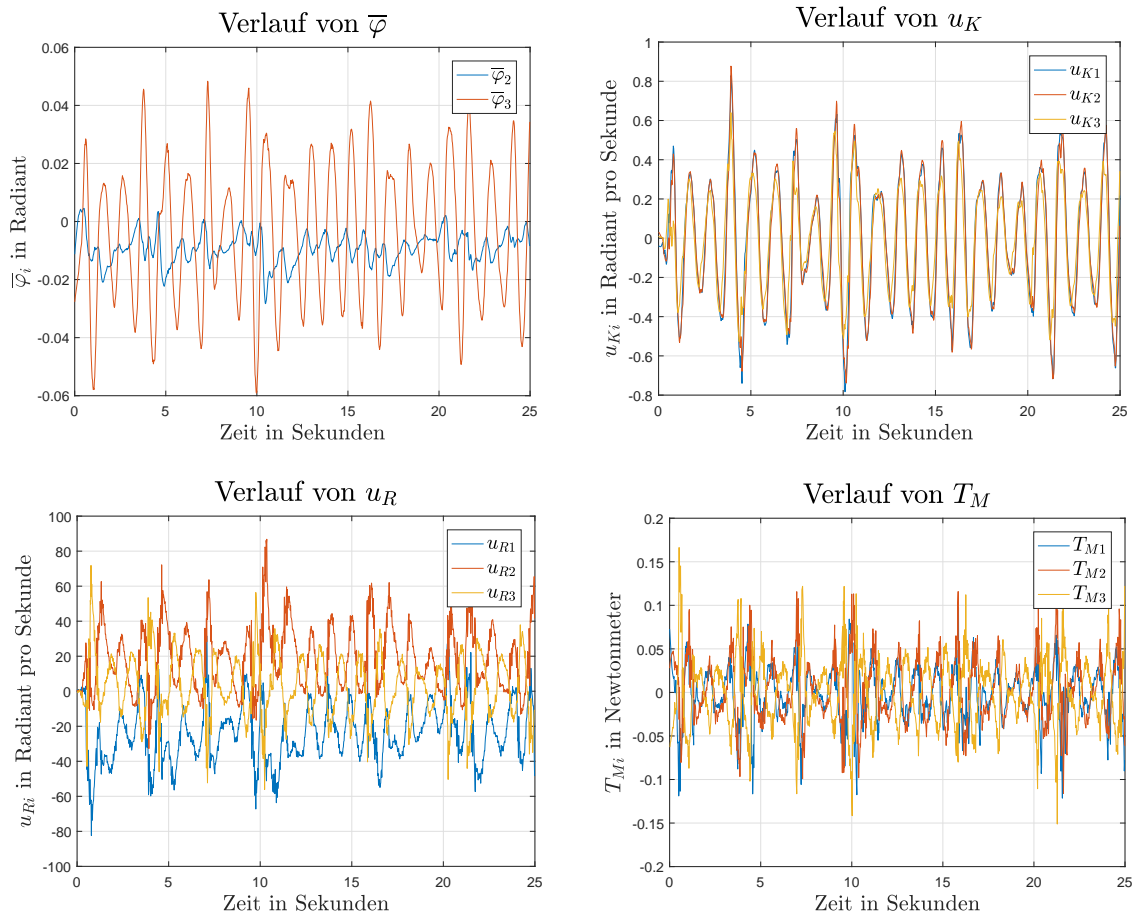


Abbildung 1.2: Systemverhalten des geschlossenen Regelkreises

Das Experiment zeigt, dass der Regler den Würfel auf einer Ecke stabilisiert. Allerdings ist das System nicht asymptotisch stabil, sondern oszilliert mit einer konstanten Amplitude. Eine mögliche Erklärung für dieses Verhalten liegt in der Modellgüte. Um die Richtungsproblematik zu lösen, wurde ein Regler gewählt, welcher die Eigenwerte des geschlossenen Kreises nahe an den Einheitskreis legt. Sind nun die Systemparameter des Modells fehlerbehaftet, ist es möglich, dass die Eigenwerte des realen Regelkreises weiter an den Einheitskreis rücken. In diesem Fall können bereits kleine Anregungen wie z.B. ein in dem Modell nicht erfasstes System- oder Messrauschen zu einer verbleibenden Schwingung führen. Des Weiteren ist der Einfluss der Nichtlinearitäten zu nennen, welche die Auswirkungen der Modellungenauigkeiten zusätzlich beeinflussen können.

Um die Reglergüte zu verbessern, werden zunächst die Versuchsergebnisse betrachtet. Be-

sonders deutlich ist einerseits die Schwingung des Winkels  $\varphi_3$ . Zudem sind die Signale  $u_{K_i}(t)$  nahezu identisch, was einer Rotation des Würfels um seine Raumdiagonale entspricht. Um diese Oszillationen zu dämpfen, werden einzelne Elemente der Reglermatrix schrittweise erhöht und die Veränderung empirisch überprüft. Die veränderten Elemente sind einerseits die Spalte  $\mathbf{K}(:, 3)$ , welche den Einfluss des Winkels  $\varphi_3$  auf den Regler wiedergibt, andererseits die Diagonale  $\mathbf{K}(1, 4)$ ,  $\mathbf{K}(2, 5)$  und  $\mathbf{K}(3, 6)$ , welche den Einfluss der Winkelgeschwindigkeit in Richtung der Raumdiagonale wiedergibt. Die Erhöhung dieser Elemente führt dazu, dass die Eigenwerte der zugehörigen Eigenbewegungen näher an den Ursprung gerückt werden. Die folgenden Abbildungen zeigen das Verhalten des geschlossenen Regelkreises, wobei die genannten Elemente der Reglermatrix um den Faktor zwei erhöht wurden. Daraus geht hervor,

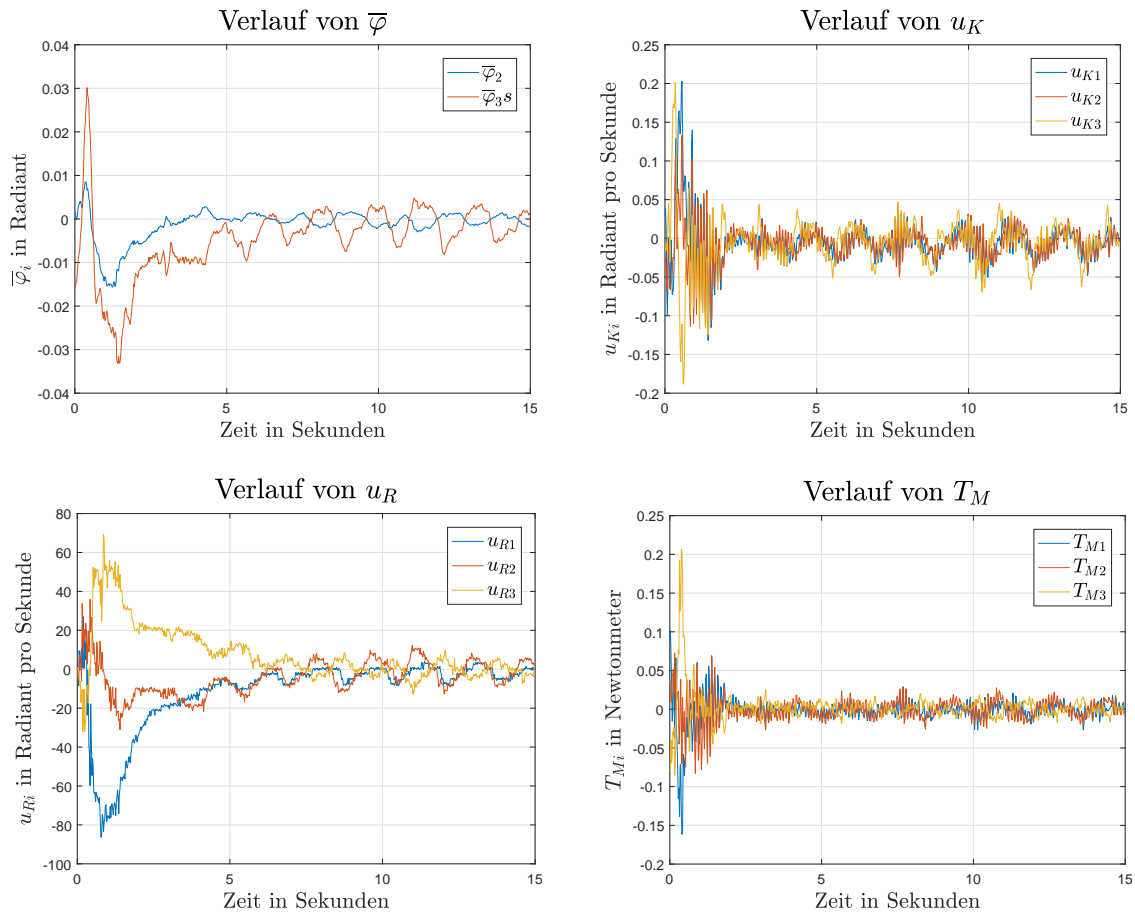


Abbildung 1.3: Verhalten des geschlossenen Regelkreises mit angepasstem Regler

dass die Anpassung des Reglers eine deutliche Verbesserung des geschlossenen Regelkreises erzielt. Jedoch ist diese Vorgehensweise kritisch zu beurteilen. Zunächst verbleibt eine Schwingung, welche dem Verhalten im letzten Versuch gleicht. Lediglich die Amplitude der Schwingung wurde durch die Änderung der Reglermatrix reduziert. Außerdem führt der Eingriff in die Reglermatrix dazu, dass die Reglereigenschaften, welche aus dem LQR-Verfahren resultieren, nicht mehr garantiert werden. Insbesondere die Robustheitseigenschaften können verloren gehen. Dies zeigt sich, wenn die Reglerelemente weiter verändert werden, um die verbleibenden Schwingungen zu eliminieren. Derartige Änderungen führen zu einem instabilen Regelkreis.