

# Kapitel 1

## Regelungstechnik

Nachdem die Systemdynamik mit Hilfe von Bewegungsgleichungen beschrieben wurde, besteht der nächste Schritt darin ein Regler zu entwerfen, welcher die Stabilisierung des Würfels auf einer Kante ermöglicht. Hierfür wird in diesem Abschnitt zunächst die Beschreibung eines Systems mit Hilfe der Zustandsraumdarstellung diskutiert. Anschließend der Zusammenhang zeitkontinuierlicher Systeme und deren zeitdiskreten Darstellungen ermittelt um den Entwurf von digitalen Reglern zu ermöglichen. Daraufhin werden die Vorteile von Zustandsregler gegenüber klassischen Regelungsalgorithmen verglichen und ein Regler für die Stabilisierung des Würfels auf einer Kante entworfen. Anschließend wird diese Regelungsvorschrift an der realen Regelstrecke erprobt und validiert. Im letzten Teil werden Beobachter eingesetzt um die Auswirkungen von Messabweichungen zu kompensieren und die Anzahl der nötigen Sensoren zu reduzieren.

## 1.1 Zustandsraumdarstellung für kontinuierliche Systeme

Aus dem vorherigen Kapitel sind die beiden Bewegungsgleichungen

$$I_K \cdot \dot{u}_K = m \cdot g \cdot l \cdot s_\varphi - C_\psi \cdot u_K + C_\psi \cdot u_R - T_M \quad (1.1)$$

$$I_R \cdot \dot{u}_R = C_\psi \cdot u_K - C_\psi \cdot u_R + T_M \quad (1.2)$$

hervorgegangen, welche die Systemdynamik vollständig beschreiben. Mit Hilfe der Definitionen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \varphi \\ u_K \\ u_R \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \varphi \\ u_K \\ u_R \end{bmatrix} \quad u = T_M \quad (1.3)$$

können die linearisierten Bewegungsgleichungen in die folgende Zustandsraumdarstellung überführt werden.

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{m \cdot g \cdot l}{I_K} & \frac{-C_\psi}{I_K} & \frac{C_\psi}{I_K} \\ 0 & \frac{C_\psi}{I_R} & \frac{-C_\psi}{I_R} \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{I_K} \\ \frac{1}{I_R} \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{b}} \cdot u \quad (1.4)$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{C}} \cdot \mathbf{x} \quad (1.5)$$

Prinzipiell kann jedes lineare zeitinvariante System  $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  als Zustandsraumdarstellung beschreiben lassen, wobei folgendes gilt.

$$\mathfrak{S} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1.6)$$

Wobei  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  Zustandsvektor,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$  Eingangsvektor und  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  Ausgangsvektor heißt. Im weiteren Verlauf wird die Zeitabhängigkeit dieser drei Vektoren nicht mehr explizit angegeben. Des weiteren werden in dieser Arbeit lediglich nicht sprungfähige Systeme  $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  betrachtet, deren Eingangsvektor  $\mathbf{u}$  den Ausgangsvektor  $\mathbf{y}$  nicht direkt beeinflusst und somit  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$  gilt.

Ein großer Vorteil dieser Modellierungsform besteht darin, dass für jedes Systems unendlich viele Zustandsraumdarstellungen existieren. Dieser Umstand wird ersichtlich wenn man für die Herleitung der Bewegungsgleichungen alternative generalisierte Geschwindigkeiten wählt und diese anschließend in eine Zustandsraumdarstellung transformiert.

$$\tilde{u}_K \equiv \dot{\phi} \quad \tilde{u}_R \equiv \dot{\psi} \quad (1.7)$$

$$I_K \cdot \dot{\tilde{u}}_K = m \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi + C_\psi \cdot \tilde{u}_R - T_M \quad (1.8)$$

$$I_R \cdot \dot{\tilde{u}}_R = -\frac{I_R \cdot m \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi}{I_K} - \frac{(I_K + I_R) \cdot C_\psi}{I_K} + \frac{I_K + I_R}{I_K} \cdot T_M \quad (1.9)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{m \cdot g \cdot l}{I_K} & 0 & \frac{C_\psi}{I_K} \\ \frac{-I_R \cdot m \cdot g \cdot l}{I_R \cdot I_K} & 0 & \frac{-C_\psi(I_K + I_R)}{I_R \cdot I_K} \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{I_K} \\ \frac{I_K + I_R}{I_K \cdot I_R} \end{bmatrix} \cdot u \quad (1.10)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{x}} \quad (1.11)$$

Sowohl die verschiedenen Bewegungsgleichungen als auch die daraus resultierenden Zustandsraumdarstellungen sind gültige Beschreibungsformen des Systems. Allgemein kann ein Zustandsraumdarstellung mit Hilfe einer Transformationsmatrix  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  in eine äquivalente Darstellung überführt werden. Hierfür muss  $\mathbf{T}$  lediglich regulär sein. Die neue Darstellung ergibt sich aus den folgenden Transformationen.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{x} \quad \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{u} \\ &= \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{u} \quad | \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{T} \cdot \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{x}} \quad | \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{T} \quad (1.14)$$

Mit Hilfe derartiger Transformationen kann ein beliebiges System in diverse Normalformen überführt werden, welche für die Systemanalyse und den Reglerentwurf besonders geeignet sind. Als erstes Beispiel sei die Transformation in kanonische Normalform genannt. Hierfür sei ein System  $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  der Ordnung  $n$  gegeben, dessen Systemmatrix  $\mathbf{A}$   $n$  einfache Eigenwerte  $\lambda_i$  mit den zugehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$  besitzt. Sind die Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$  linear unabhängig dann ist die Matrix

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

regulär und kann somit als Transformationsmatrix verwendet werden. Die resultierende Darstellung

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{V}^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (1.16)$$

heißt kanonische Normalform, wobei die Matrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  die folgende Form besitzt.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Folglich sind die Elemente des Zustandvektors  $\tilde{\mathbf{x}}$  vollständig voneinander entkoppelt und werden deshalb auch als Eigenvorgänge bzw. Eigenbewegungen des Systems bezeichnet. Die vollständige Entkopplung der Zustandsgrößen ist nicht immer möglich, für eine ausführliche Diskussion Thematik sei auf [RT1, Lunze, S.135ff] verwiesen. Die homogene Lösung der

kanonischen Normalform lässt sich mit Hilfe des Exponentialansatzes ermitteln.

$$\tilde{x}_{i,h}(t) = e^{\lambda_i \cdot t} \cdot \tilde{x}_i(0) \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_h(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} & & & \\ & e^{\lambda_2 \cdot t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n \cdot t} \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(0) \quad (1.18)$$

Die Rücktransformation

$$\mathbf{x}_h = \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_h \quad (1.19)$$

zeigt, dass der Verlauf der ursprünglichen Zustandsgrößen eine Linearkombination der kanonischen Zustandsvariablen ist. Folglich wird die homogene Lösung eines Systems durch die Eigenwerte und -vektoren der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  vorgegeben. Formal kann dieser Zusammenhang durch die Erweiterung des Exponentialansatzes auf vektorwertige Differentialgleichungen ermittelt werden.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (1.20)$$

Die Matrix-Exponentialfunktion  $e^{\mathbf{A} \cdot t}$  heißt Fundamentalmatrix  $\Phi(t)$  und kann über die folgende Reihenentwicklung bestimmt werden. Eine Herleitung kann in [RT2, Unbehauen, S. 6. ff] gefunden werden.

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} \quad (1.21)$$

Um einen weiteren Weg zur Ermittlung der Fundamentalmatrix und den Zusammenhang zu der Übertragungsfunktion des Systems herzustellen wird die Systemgleichung in den Bildbereich transformiert.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) & \circ \bullet & \quad s \cdot \mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(s) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\ & \leftrightarrow & & \quad \mathbf{x}(s) = \underbrace{(s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(t=0)}_{\equiv \Phi(s)} + (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(s) \\ & \leftrightarrow & & \quad \mathbf{x}(s) = \Phi(s) \cdot \mathbf{x}(t=0) + \Phi(s) \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(s) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Aus dem Vergleich von ([?]) mit ([?]) wird ersichtlich, dass die Fundamentalmatrix im Bildbereich durch die Invertierung der Matrix  $s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}$  berechnet werden kann. Im nächsten Schritt wird lediglich das Übertragungsverhalten eines Systems betrachtet.

$$\mathbf{x}(s) = \Phi(s) \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(s) \quad | \quad \mathbf{x}(t=0) = 0 \quad (1.23)$$

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(s) = \underbrace{\mathbf{C} \Phi(s) \mathbf{B}}_{\equiv \mathbf{G}(s)} \cdot \mathbf{u}(s) = \mathbf{G}(s) \cdot \mathbf{u}(s) \quad (1.24)$$

Im Falle eines SISO-Systems reduzieren sich die Matrizen  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{B}$  auf die Vektoren  $\mathbf{c}^T$  und  $\mathbf{b}$ . Somit handelt es sich bei  $\mathbf{G}(s)$  um die Übertragungsfunktion des Eingrößensystems. Bei MIMO-Systemen heißt  $\mathbf{G}(s)$  Übertragungsfunktionmatrix, wobei die einzelnen Elemente

$G_{ij}(s)$  Teilübertragungsfunktionen heißen und das E/A-Verhalten der Eingangsgröße  $u_j$  auf die Ausgangsgröße  $y_i$  beschreiben. Bei der Berechnung der Übertragungsmatrix  $\mathbf{G}(s)$  stellt die Fundamentalmatrix  $\Phi(s)$  die einzige Größe dar, die von  $s$  abhängt, und muss somit auch die Pole des Systems enthalten. Aus der Berechnung

$$\Phi(s) = (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (1.25)$$

folgt, dass das charakteristische Polynom

$$\det(s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (1.26)$$

den gemeinsamen Nenner der Teilübertragungsfunktionen darstellt. Die Nullstellen des Polynoms entsprechen den Eigenwerten der Systemmatrix  $\mathbf{A}$ . Hieraus folgt, dass die Eigenwerte  $\lambda_i$  eine Übermenge der Pole  $s_i$  des Systems bilden, da ggf. Eigenwerte gegen Zählernullstellen gekürzt werden können. Dies bedeutet, dass die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  nicht nur die Eigenbewegung des Systems bestimmt sondern auch zur Untersuchung der Stabilität verwendet werden kann. Allgemein ist ein System asymptotisch stabil wenn die Realteile aller Eigenwerte  $\lambda_i$  der Matrix  $\mathbf{A}$  negativ sind.

$$\text{Re}\lambda_i < 0 \quad (1.27)$$

Dieses Stabilitätskriterium stellt einen weiteren Vorteil der Systembeschreibung mittels Zustandsraumdarstellung dar. Die Systemanalyse erfolgt durch die Untersuchung numerischer Matrizen, was mit Hilfe von Matlab effizient umgesetzt werden kann. Des weiteren müssen bei MIMO-Systemen mit klassischen Stabilitätskriterien alle Elemente der Übertragungsfunktionsmatrix  $\mathbf{G}(s)$  untersucht werden. In der Zustandsraumdarstellung genügt allerdings die Analyse der Systemmatrix  $\mathbf{A}$ .

## 1.2 Zustandsraumdarstellung für zeitdiskrete Systeme

Bisher wurden ausschließlich zeitkontinuierliche Systeme betrachtet. Allerdings wird der Regler mit Hilfe eines Digitalrechners implementiert und stellt somit ein zeitdiskretes System dar. Derartige Systeme werden in Form von Differenzengleichungen beschrieben, die ebenfalls in eine Zustandsraumdarstellung gebracht werden können. Hierbei wird lediglich der Integrierer durch ein vektorielles Totzeitglied ersetzt, welches eine Abtastperiode repräsentiert. Somit gilt für ein diskretes System  $\mathfrak{D}(\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d)$ :

$$\mathfrak{D} : \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (1.28)$$

Die Ergebnisse aus dem vorherigen Abschnitt können auf diskrete Systeme übertragen werden. Hierfür wird zunächst die Z-Transformierte der Systemgleichung gebildet.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{u}(k) & \quad \circ \longrightarrow \quad z \cdot \mathbf{x}(z) - z \cdot \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{x}(z) + \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{u}(z) \\ \Leftrightarrow & \quad (z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_d) \mathbf{x}(z) = z \cdot \mathbf{x}(t=0) + \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{u}(z) \\ \Leftrightarrow & \quad \mathbf{x}(z) = \underbrace{(z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1}}_{\equiv \Phi_d(z)} \cdot z \cdot \mathbf{x}(t=0) + (z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{u}(z) \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{C}_d \cdot \mathbf{x}(z) = \underbrace{\mathbf{C}_d \Phi_d(z) \mathbf{B}_d}_{\equiv \mathbf{G}_d(z)} \cdot \mathbf{u}(z) \quad (1.30)$$

An Hand der obigen Gleichungen ist leicht zu erkennen, dass sowohl die Fundamentalmatrix  $\Phi_d(z)$  als auch die Übertragungsfunktionmatrix  $\mathbf{G}_d(z)$  analog zu zeitkontinuierlichen Systemen berechnet wird. Deshalb behalten die Eigenwerte und -vektoren der Systemmatrix  $\mathbf{A}_d$  ihre Bedeutung bei der Systemanalyse. Lediglich die Interpretation muss durch den Zusammenhang der Laplace- und Z-Transformation angepasst werden.

$$z = e^{T \cdot s} \quad s = \sigma + j \cdot \omega \quad (1.31)$$

$$|z| = e^{T \cdot \sigma} \quad \phi = \omega \cdot T \quad (1.32)$$

Stabilitätsbedingung für kontinuierliche Systeme ist, dass die Realteile aller Eigenwerte  $\lambda_i$  negativ sind. Aus ([?]) folgt, dass der Betrag der diskreten Eigenwerte im Einheitskreis liegen muss, damit diese Forderung erfüllt ist. Des weiteren führen diskrete Eigenwerte, die nahe am Ursprung liegen, zu einer schnelleren Systemdynamik. Somit bringt Zustandsraumdarstellung für diskrete Systeme die gleichen Vorteile mit sich wie bei zeitkontinuierlichen Systemen. Allerdings handelt es sich bei der Regelstrecke nach wie vor um ein kontinuierliches System, lediglich der Regler stellt ein diskretes System dar. Durch die Abtastung werden kontinuierliche Zustandssignale in Zahlenfolgen überführt. Die Stellgröße wird in Form eines Halteglieds nullter Ordnung realisiert. Um den geschlossenen Regelkreis einheitlich zu beschreiben, muss deshalb die kontinuierliche Zustandsraumdarstellung der Regelstrecke in eine diskrete transformiert werden. Hierzu wird zunächst die Lösung eines kontinuierlichen Systems  $\mathfrak{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$

betrachtet. Herleitung aus [RT2, Unbehauen]

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{x}(t_0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (1.33)$$

Der Verlauf zwischen zwei Abtastzeitpunkten  $(k+1)T$  und  $kT$  wird berechnet indem  $t_0 = kT$  und  $t = (k+1)T$  gilt.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((k+1)T) &= e^{\mathbf{A}(k+1)T} \cdot \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}([k+1]T-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}(k+1)T} \cdot \mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}(kT-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.34)$$

Um das Integral zu lösen muss der Verlauf von  $\mathbf{u}$  zwischen den Abtastpunkten bekannt sein. Das Halteglied nullter Ordnung führt die diskrete Zahlenfolge der Stellgröße  $\mathbf{u}(k)$  in eine kontinuierliche Treppenfunktion über. Somit folgt, dass  $\mathbf{u}$  über den Verlauf einer Abtastperiode konstant ist.

$$\mathbf{u}(kT + t) = \mathbf{u}(kT) \quad | \quad 0 \leq t < T \quad (1.35)$$

Die Lösung des Integrals führt auf:

$$\mathbf{x}([k+1]T) = e^{\mathbf{A}T} \cdot \mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}T} (\mathbf{I} - e^{-\mathbf{A}T}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(kT) \quad (1.36)$$

Diese Lösung stellt den Zusammenhang zwischen der kontinuierlichen und diskreten Zustandsraumdarstellung dar. Wobei der Vergleich mit ([?]) folgenden Werte für die Matrizen des diskreten Systems  $\mathfrak{D}(\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d)$  liefert.

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T} \quad \mathbf{B}_d = (e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad \mathbf{C}_d = \mathbf{C} \quad (1.37)$$

Mit der Definition

$$\mathbf{S} = T \sum_{v=0}^{\infty} \mathbf{A}^v \frac{T^v}{(v+1)!} \quad (1.38)$$

kann die Definition vereinfacht und die Berechnung der inversen Matrix vermieden werden.

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{I} + \mathbf{S} \mathbf{A} \quad \mathbf{B}_d = \mathbf{S} \mathbf{B} \quad (1.39)$$

Die Matrix  $\mathbf{S}$  beschreibt einerseits den Einfluss des Halteglieds auf den Regelkreis, andererseits ermöglicht sie die Überführung in eine diskrete Darstellung, welche nötig ist um die Regelstrecke und den Regler in einer einheitlichen Form zu beschreiben.

### 1.3 Entwurf von Zustandsregelungen

Nachdem die Grundlagen der Zustandsraumdarstellung in den vorherigen Abschnitten diskutiert wurden, dient dieser Teil dem Entwurf des letztendlichen Reglers. Hierfür wird zunächst am Beispiel des Entwurfs durch Eigenwertvorgabe der Grundgedanke und die Vorteile der Zustandsregelung aufgezeigt. Anschließend wird ein Regler nach dem Prinzip der optimalen Regelung entworfen um den Würfel auf einer Kante zu stabilisieren. Diese Ergebnisse werden an der reellen Regelstrecke überprüft.

#### 1.3.1 Reglerentwurf durch Eigenwertvorgabe

Der Grundgedanke der Zustandsregelung besteht darin den vollständigen Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  zurückzuführen und durch die Multiplikation mit einer Reglermatrix  $\mathbf{K}$  den Stellgrößenvektor  $\mathbf{u}$  zu ermitteln. In dieser Arbeit werden lediglich Regelkreise ohne Führungsvektor ( $\boldsymbol{\omega} = 0$ ) verwendet, weshalb auf dessen Einfluss und den Entwurf des nötigen Vorfilters  $\mathbf{V}$  nicht weiter eingegangen wird.

Aus der Abbildung gehen die Systemgleichungen des geschlossenen Regelkreises  $\mathfrak{D}(\mathbf{A}_g, \mathbf{0}, \mathbf{C}_g)$  hervor.

$$\mathbf{u} = -\mathbf{B}_d \mathbf{K} \quad (1.40)$$

$$\mathfrak{D}_g : \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(k) - \mathbf{BK} \cdot \mathbf{x}(k) = \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{BK})}_{\equiv \mathbf{A}_g} \cdot \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \underbrace{\mathbf{C}}_{\equiv \mathbf{C}_g} \cdot \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (1.41)$$

Die Reglermatrix  $\mathbf{K}$  ist nun so zu entwerfen, dass die gewünschten Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises erreicht werden. Hierfür wird zunächst das SISO-System  $\mathfrak{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$  betrachtet, wessen Systemmatrix  $\mathbf{A}$  und Eingangsvektor  $\mathbf{b}$  die folgende Form besitzt.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

Diese Darstellung heißt Regelungsnormalform und kann mittels einer Zustandstransformation erreicht werden. Diese Transformation wird erst in einem späteren Abschnitt erläutert, da das Verfahren lediglich als Beispiel der Zustandsregelung dienen soll. Der besondere Vorteil der Regelungsnormalform besteht darin, dass die Werte  $a_i$  die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda + a_0 \quad (1.43)$$

der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  sind. Wird der Regelkreis über den Reglervektor

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix} \quad (1.44)$$



geschlossen, ergibt sich die folgende Systemmatrix  $\mathbf{A}_g$  des geschlossenen Regelkreises.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_g = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{a}_0 & -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 & \dots & -\bar{a}_{n-1} \end{bmatrix} \quad \left| \quad \bar{a}_i = a_i + k_{i+1} \right. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Die Systemmatrix  $\mathbf{A}_g$  des geschlossenen Regelkreises liegt nun ebenfalls in Regelungsnormform vor, weshalb wiederum für deren charakteristisches Polynom gilt:

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_g) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \bar{\lambda}_i) = \lambda^n + \bar{a}_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \cdot \lambda + \bar{a}_0 \quad (1.46)$$

Werden nun die Eigenwerte  $\bar{\lambda}_i$  des geschlossenen Regelkreises vorgegeben können durch ([?]) die Koeffizienten  $\bar{a}_i$  berechnet werden. Die Koeffizienten  $a_i$  der Regelstrecke können aus der Matrix  $\mathbf{A}$  abgelesen werden. Somit können aus der Beziehung

$$\bar{a}_i = a_i + k_i \quad (1.47)$$

die einzelnen Reglerfaktoren  $k_i$  berechnet bzw. die folgende Vektorschreibweise verwendet werden.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \dots & \bar{a}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\equiv \bar{\mathbf{a}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{a}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{k}} \quad (1.48)$$

$$\mathbf{k} = \bar{\mathbf{a}} - \mathbf{a} \quad (1.49)$$

An diesem Entwurfsverfahren werden bereits einige interessante Eigenschaften der Zustandsregelung deutlich. Zunächst können die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises beliebig gewählt werden wodurch das dynamische Verhalten maßgeblich bestimmt wird. Des weiteren wird der Regler durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation realisiert. Somit werden dem Regelkreis, im Gegensatz zu PID-Reglern, keine weiteren Pole durch die Reglerdynamik hinzugefügt. Zuletzt sei die einfache Berechnung der Reglermatrix erwähnt. Sowohl die Transformation auf Regelungsnormform als auch die Ermittlung der Reglerparameter sind numerische Operationen die mit Hilfe von Matlab durchgeführt werden können.

Nichtsdestotrotz wird das Entwurfsverfahren in dieser Arbeit nicht verwendet. Die Gründe hierfür sind, dass das primäre Ziel darin besteht eine robuste Regelung zur Stabilisierung des Systems zu entwerfen und nicht eine spezielle Dynamik des geschlossenen Regelkreises zu erzielen. Des weiteren können bei diesem Verfahren die Verläufe der physikalischen Größen  $\varphi$ ,  $u_K$  und  $u_R$  nicht direkt beeinflusst werden. Durch die Vorgabe der Eigenwerte werden lediglich die Trajektorien der kanonischen Zustandsvariablen bestimmt, welche jeweils eine Linearkombination der ursprünglichen Zustände sind. Zuletzt fließt die Stellgröße  $u$  bei dieser

Vorgehensweise nicht in die Bestimmung der Reglermatrix ein. Ist die Stellgröße, wie in den hier behandelten Anwendungsfällen, begrenzt müssen diese Umstände bei dem Reglerentwurf unter Umständen beachtet werden.

### 1.3.2 Linear quadratisch optimale Regelung

Im vorherigen Abschnitt wurden die Nachteile der Eigewertvorgabe aufgezeigt, weshalb in hier der Entwurf eines linear quadratisch optimalen Reglers vorgestellt und an der realen Regelstrecke appliziert wird. Der Grundgedanke der optimalen Regelung ist es ein Regelgesetz zu entwerfen, welches ein zu einem geschlossenen Regelkreis führt, der im Sinne eines Gütekriteriums optimal ist. Hier wird das linear quadratische Gütekriterium

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(k) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}(k)] \quad (1.50)$$

verwendet. Die Matrizen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$  dienen der Gewichtung des Zustands- bzw. Stellvektors und müssen positiv definit bzw. semidefinit sein. Durch die Gewichtungsmatrizen ist es möglich Forderung an den ursprünglichen Zustands- und Stellvektor direkt in den Reglerentwurf einfließen zu lassen. Der letztendliche Regler ergibt sich aus der Lösung des Optimierungsproblems, dass  $J$  minimal wird. Nach [Ludyk, S.177] gilt für die Reglermatrix

$$\mathbf{K} = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}, \quad (1.51)$$

wobei  $\mathbf{P}$  durch die Lösung der folgenden Matrix-Ricatti-Gleichung bestimmt wird.

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T [\mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}] \mathbf{A} \quad (1.52)$$

Ähnlich wie bei dem Entwurf durch Eigenwertvorgabe besteht ein Vorteil der linear quadratisch optimalen Regelung darin, dass das Optimierungsproblem mittels des Matlab-Befehls `dlqr()` gelöst werden kann. Somit fällt der Rechenaufwand für die Ermittlung der Reglermatrix bei der Bewertung des Entwurfverfahrens nicht weiter ins Gewicht. Deshalb werden hier lediglich die Bedeutung der Gewichtsmatrizen und die Eigenschaften des resultierenden Regelkreises diskutiert.

Zunächst lässt sich zeigen [Lunze RT2, S.301], dass der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist insofern das System stabilisierbar ist. Bei einem stabilisierbaren System können alle instabilen Eigenvorgänge durch die Stellgröße und somit durch den Regler beeinflusst werden.<sup>1</sup> Hieraus folgt, dass alle Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises im Einheitskreis liegen. Des weiteren lässt sich durch

$$|z| = e^{\sigma_i} \quad | \quad s_i = \sigma_i + \omega_i \cdot j \quad (1.53)$$

der Abstand der Eigenwerte zum Ursprung der komplexen Ebene interpretieren. Je näher ein Eigenwert am Ursprung liegt, desto schneller wird die zugehörige Eigenbewegung. Im geschlossenen Regelkreis wird eine schnelle Systemdynamik durch hohe Stellgrößen verursacht, welche durch die Reglermatrix  $\mathbf{K}$  bestimmt werden. Daraus kann geschlossen werden, dass

---

<sup>1</sup>Die Systemeigenschaft heißt Steuerbarkeit und wird in dem anschließenden Abschnitt erläutert.

die Erhöhung der Reglerfaktoren  $k_{ij}$  die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises näher an den Ursprung rückt. Umgekehrt kann die Bedeutung der Gewichtungsmatrix  $\mathbf{R}$  interpretiert werden. Je größer die Elemente von  $\mathbf{R}$  werden, desto stärker fließt der Verlauf des Stellvektors in das Gütekriterium ein. Da dieses minimiert werden soll, resultieren kleinere Elemente der Reglermatrix und somit eine langsamere Systemdynamik. Die Matrix  $\mathbf{Q}$  wirkt entgegengesetzt. Das das Gütekriterium den zeitlichen Verlauf des Zustandvektors erfasst, führt eine Erhöhung der Matrix  $\mathbf{Q}$  auf eine schnellere Eigenbewegung, welche durch erhöhte Reglerwerte erreicht wird. Hier zeigt sich ein Vorteil der linear quadratisch optimalen Regelung. Bei der Eigenwertvorgabe kann der Verlauf einer Zustandsgröße nur indirekt durch die Definition der Eigenbewegung beeinflusst werden. Im Gegensatz dazu erfolgt durch die Diagonalelemente der Matrix  $\mathbf{Q}$  eine direkte Gewichtung der Zustandsgrößen.<sup>2</sup> Da das Zeitverhalten des geschlossenen Regelkreises in dem hier behandelten Anwendungsfall eine untergeordnete Rolle spielt, wird nun die Empfindlichkeit gegenüber Störungen betrachtet. Aus dem Reglergesetz

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} \quad (1.54)$$

geht hervor, dass sich ein beliebiges Messrauschen proportional zur Reglermatrix in der Stellgröße widerspiegelt. Folglich beeinflusst das Entwurfsverfahren nicht direkt die Störimpfindlichkeit des Regelkreises. Vielmehr wird diese durch die Lage der Eigenwerte bestimmt. Je näher diese an dem Einheitskreis liegen, desto robuster wird das System gegenüber Messrauschen. Ein weiterer Vorteil der linear quadratisch optimalen Regelung besteht in derer Robustheit gegenüber Parameteränderungen. Diese Eigenschaft beschreibt wie groß die Abweichungen einzelner Parameter sein können um nach wie vor einen stabilen Regelkreis zu erhalten. In [Lunze RT2, S. 303ff] werden diese Eigenschaften mit Hilfe des Phasen- und Amplitudenrandes erläutert. Ludynk ergänzen

---

<sup>2</sup>Allerdings sei angemerkt, dass sich durch die Gewichtungsmatrix  $\mathbf{Q}$  keine Entkopplung der Zustandsgrößen erzwingen lässt. Für die Entkopplung der Zustandsgrößen müssen nicht nur die Eigenwerte sondern auch die Eigenvektoren durch den Regler beeinflusst werden. Dies ist nur möglich wenn die Reglermatrix mehr Elemente als zu regelnde Zustandsgrößen besitzt [Lunze RT2, S.254 ff]. Des weiteren sind solche System in der Realität oftmals nicht realisierbar, wären beispielsweise alle Eigenwerte und -vektoren des Würfels frei wählbar könnten die Größen  $\varphi$  und  $\dot{\varphi}$  voneinander entkoppelt werden.

## 1.4 Verifizierung des Reglers an der Regelstrecke

Die letztendliche Aufgabe besteht darin einen Regler zu entwerfen, damit der Würfel auf einer Kante balanciert. Hierfür wird ein linear quadratisch optimaler Regler entworfen, wobei die Gewichtsmatrizen

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \varphi_{max}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & u_{K,max}^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & u_{R,max}^{-2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} T_{M,max}^{-2} \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

verwendet werden. Daraus resultiert das Gütekriterium

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\varphi^2}{\varphi_{max}^2} + \frac{u_K^2}{u_{K,max}^2} + \frac{u_R^2}{u_{R,max}^2} + \frac{T_M^2}{T_{M,max}^2} \right). \quad (1.56)$$

Somit werden der Zustandsvektor und die Stellgröße quadratisch über ihren maximalen Wert minimiert. Der daraus resultierende Regelkreis besitzt die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0,7895 \quad \lambda_{2,3} = 0,8830 \pm 0,0087j \quad (1.57)$$

und ist somit asymptotisch stabil. Im nächsten Schritt wird der Regler an der realen Regelstrecke validiert. Abbildung hier zeigt den Verlauf der Zustands- und Stellgröße, wobei das System bei dem Zeitpunkt yy durch eine äußere Störung erregt wurde.

placeholder plot

Die Abbildungen zeigen, dass der Regler das System nicht in die Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  überführt, sondern die Schwungmasse mit konstanter Geschwindigkeit rotiert. Dieser Umstand ist darauf zurückzuführen, dass der Zustandsvektor mit einem systematischen Messfehler erfasst wird. Im Modell wird diese Gegebenheit durch die Einführung der Zustandsgrößen

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{\varphi} \\ \hat{u}_K \\ \hat{u}_R \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

erfasst, welche die jeweiligen Messabweichungen darstellen. Der Ausgangsvektor  $\mathbf{y}$  stellt die Messwerte dar und wird durch die Summe des ursprünglichen Zustandvektors  $\mathbf{x}$  und der Messabweichungen  $\hat{\mathbf{x}}$  berechnet. Aus diesen Überlegungen ergibt sich für den offenen Regelkreis das System

$$\mathfrak{D}_0 \equiv \begin{cases} \mathbf{x}_o(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}^{3 \times 3} \\ \mathbf{0}^{3 \times 3} & \mathbf{I}^{3 \times 3} \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{A}_o} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{x}_0}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^3 \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{b}_o} \cdot u(k) \\ \mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{3 \times 3} & \mathbf{I}^{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_o(k) \end{cases} \quad (1.59)$$

Das Reglergesetz ergibt sich nun aus dem Produkt des Reglervektors  $\mathbf{k}^T$  und des Ausgangsvektors  $\mathbf{y}$ .

$$u = \mathbf{k}^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{k}^T \cdot (\mathbf{x} + \hat{\mathbf{x}}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{k}^T & \mathbf{k}^T \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{k}_o^T} \cdot \mathbf{x}_o \quad (1.60)$$