Kapitel 1

Erfassung der Zustandsgrößen

1.1 Winkelschätzung

Ein relevantes Problem stellt die Bestimmung der Winkel $\boldsymbol{\varphi}$ dar welche nur indirekt über die Beschleunigungssensoren ermittelt werden können. Die Messwerte $\boldsymbol{s}$ der Beschleunigungssensoren setzten sich aus der resultierenden Beschleunigung ${}^{A}\boldsymbol{a}^{S_i}$ und dem überlagerten Erdbeschleunigungsvektor $\boldsymbol{g}$ zusammen. Zunächst wird der Fall betrachtet, dass die Messachsen der Sensoren mit dem körperfesten Bezugssystem K zusammenfallen.

$$\boldsymbol{s}_i = {}^{A}\boldsymbol{a}^{S_i} + \boldsymbol{g} \tag{1.1}$$

Unter der Annahme, dass der Würfel nicht bewegt wird verschwindet der Einfluss der Beschleunigung ${}^{A}\boldsymbol{a}^{S_i}$.

$$\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{g} = \|\boldsymbol{g}\| \cdot {}^{K}\!\begin{pmatrix} -c_{\varphi_2} \cdot c_{\varphi_3} \\ c_{\varphi_2} \cdot s_{\varphi_3} \\ -s_{\varphi_2} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Nun können die Winkel φ_2 und φ_3 aus den Komponenten des Messvektor $\boldsymbol{s}$ ermittelt werden.

$$\varphi_2 = -asin(\frac{\langle \boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{k}_3 \rangle}{\|\boldsymbol{g}\|} \qquad \varphi_3 = -atan(\frac{\langle \boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{k}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{k}_3 \rangle} \tag{1.3}$$

Der Winkel φ_1 kann nicht aus dem Erdbeschleunigungsvektor ermittelt werden. Jedoch schränkt dieser Umstand das Gesamtsystem nicht ein, da die Größe φ_1 keinen Einfluss auf die Systemdynamik hat. Um die Winkelschätzung auf den Fall des bewegten Würfels zu erweitern wird im nächsten Schritt die Beschleunigung ${}^{A}\boldsymbol{a}^{S_i}$ betrachtet. Da der Würfel eine rein rotatorische Bewegung durchführt genügt die Untersuchung der Winkelbeschleunigung und -geschwindigkeit [Kane S. 30].

$$\begin{aligned} {}^{A}\boldsymbol{a}^{S_i} &= {}^{A}\boldsymbol{\alpha}^{K} \times \boldsymbol{r}_{S_i} + {}^{A}\boldsymbol{\omega}^{K} \times \left({}^{A}\boldsymbol{\omega}^{K} \times \boldsymbol{r}_{S_i}\right) \\ &= \left[{}^{A}\boldsymbol{\alpha}^{K}\right]_\times \cdot \boldsymbol{r}_{S_i} + \left[{}^{A}\boldsymbol{\omega}^{K}\right]_\times \cdot \left(\left[{}^{A}\boldsymbol{\omega}^{K}\right]_\times \cdot \boldsymbol{r}_{S_i}\right) \\ &= \left(\left[{}^{A}\boldsymbol{\alpha}^{K}\right]_\times + \left[{}^{A}\boldsymbol{\omega}^{K}\right]_\times^2\right) \cdot \boldsymbol{r}_{S_i} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Wird nun die Summe der Beschleunigungswerte $\boldsymbol{s}_i$ berechnet, welche mit dem frei wählbaren Faktor $b_i \in R$ gewichtet werden, ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{6} b_i \cdot \boldsymbol{s}_i &= \sum_{i=1}^{6} \left[b_i \cdot \left(\left[{}^{A}\boldsymbol{\alpha}^{K}\right]_\times + \left[{}^{A}\boldsymbol{\omega}^{K}\right]_\times^2\right) \cdot \boldsymbol{r}_{S_i} + b_i \cdot \boldsymbol{g}\right] \\ &= \left(\left[{}^{A}\boldsymbol{\alpha}^{K}\right]_\times + \left[{}^{A}\boldsymbol{\omega}^{K}\right]_\times^2\right) \cdot \sum_{i=1}^{6} b_i \cdot \boldsymbol{r}_{S_i} + \boldsymbol{g} \cdot \sum_{i=1}^{6} b_i \,. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Werden die Faktoren b_i so gewählt, dass

$$\sum_{i=1}^{6} b_i \cdot \boldsymbol{r}_{S_i} \qquad | \qquad \sum_{i=1}^{6} b_i \neq 0 \tag{1.6}$$

gilt, folgt

$$\sum_{i=1}^{6} b_i \cdot \boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{g} \cdot \sum_{i=1}^{6} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{g} = \frac{\sum_{i=1}^{6} b_i \cdot \boldsymbol{s}_i}{\sum_{i=1}^{6} b_i} . \tag{1.7}$$

Somit kann der Einfluss der resultierenden Beschleunigung ${}^{A}\boldsymbol{a}^{S_i}$ mittels der Faktoren b_i eliminiert werden. Werden n Sensoren verwendet, so muss für die Bestimmung der Faktoren b_i das Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \boldsymbol{r}_{S_i} = 0 \tag{1.8}$$

gelöst werden, wobei die Nebenbedingung

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \neq 0 \tag{1.9}$$

zu beachten ist. Aus dieser Vorgehensweise können Rückschlüsse auf den Entwurf des Würfels gezogen werden. Sind die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_{S_i}$ linear abhängig genügen bereits zwei Sensoren um zwischen der resultierenden Beschleunigung ${}^{A}\boldsymbol{a}^{S_i}$ und der Erdbeschleunigung g zu unterscheiden. Allerdings schränkt die Forderung nach linearer Abhängigkeiten die konstruktiven Möglichkeiten ein. Werden mehr als zwei Sensoren verwendet entfällt die Notwendigkeit der linearen Abhängigkeiten. Prinzipiell genügen drei Sensoren um die Einflüsse der Beschleunigung ${}^{A}\boldsymbol{a}^{S_i}$ zu eliminieren. Die hier verwendeten Beschleunigungssensoren sind von zwei weiteren Einschränkungen betroffen. Zunächst ist die Empfindlichkeit der Messung in z-Richtung gegenüber den x- und y-Achsen geringer, weshalb lediglich die letzteren verwendet. Des weiteren stimmen die Messachsen der Sensoren nicht mit dem körperfesten Bezugssystem K überein. Um diese Umstände im Modell auszudrücken werden die drei Messachsen des Sensors als Bezugssystem S_i interpretiert. Unter der Annahme, dass die Messachsen und Vektoren $\boldsymbol{k}_i$ paarweise orthogonal zueinander stehen kann die Projektionsmatrix ${}^{S_i}\boldsymbol{P}^{K}$ aus dem Aufbau bestimmt werden. Zusätzlich wird die dritte Spalte ${}^{S_i}\boldsymbol{P}^{K}$ durch den Nullvektor ersetzt um die Vernachlässigung der z-Messwerte darzustellen.

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot {}^{S_1}\!\begin{pmatrix} s_{1x} \\ s_{1y} \\ s_{1z} \end{pmatrix} = {}^{K}\!\begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{k}_1 \rangle \\ \langle \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{k}_2 \rangle \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{s}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot {}^{S_2}\!\begin{pmatrix} s_{2x} \\ s_{2y} \\ s_{2z} \end{pmatrix} = {}^{K}\!\begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{k}_1 \rangle \\ \langle \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{k}_2 \rangle \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{s}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot {}^{S_3}\!\begin{pmatrix} s_{3x} \\ s_{3y} \\ s_{3z} \end{pmatrix} = {}^{K}\!\begin{pmatrix} 0 \\ \langle \boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{k}_2 \rangle \\ \langle \boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{k}_3 \rangle \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{s}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot {}^{S_4}\!\begin{pmatrix} s_{4x} \\ s_{4y} \\ s_{4z} \end{pmatrix} = {}^{K}\!\begin{pmatrix} 0 \\ \langle \boldsymbol{s}_4, \boldsymbol{k}_2 \rangle \\ \langle \boldsymbol{s}_4, \boldsymbol{k}_3 \rangle \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

$$\boldsymbol{s}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot {}^{S_5}\begin{pmatrix} s_{5x} \\ s_{5y} \\ s_{5z} \end{pmatrix} = {}^{K}\begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{s}_5, \boldsymbol{k}_1 \rangle \\ 0 \\ \langle \boldsymbol{s}_5, \boldsymbol{k}_3 \rangle \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

$$\boldsymbol{s}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot {}^{S_6}\begin{pmatrix} s_{6x} \\ s_{6y} \\ s_{6z} \end{pmatrix} = {}^{K}\begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{s}_6, \boldsymbol{k}_1 \rangle \\ 0 \\ \langle \boldsymbol{s}_6, \boldsymbol{k}_3 \rangle \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Da die z-Messwerte nicht verwendet werden gibt jeder Sensor nur die Beschleunigung in Richtung zweier Vektoren $\boldsymbol{k}_i$ wieder. Um dieses Problem zu beheben werden die Messwerte jeweils zweier Sensoren zu einem abstrakten Messvektor $\tilde{\boldsymbol{s}}_i$ zusammengefasst. Um hierbei die Auswirkung der Beschleunigungen ${}^{A}\boldsymbol{a}^{S_i}$ darzustellen wird die Definition

$$\left[{}^{A}\boldsymbol{\alpha}^{K}\right]_{\times} + \left[{}^{A}\boldsymbol{\omega}^{K}\right]_{\times}^{2} \equiv \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_1^T \\ \boldsymbol{m}_2^T \\ \boldsymbol{m}_3^T \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

verwendet. Die Vektoren $\boldsymbol{m}_i^T$ werden mit dem Ortsvektor des zugehörigen Sensors multipliziert.

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{s}}_1 \equiv \begin{bmatrix} s_{1y} \\ s_{1x} \\ s_{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_1^T \cdot \boldsymbol{r}_{S_1} \\ \boldsymbol{m}_2^T \cdot \boldsymbol{r}_{S_1} \\ \boldsymbol{m}_3^T \cdot \boldsymbol{r}_{S_3} \end{bmatrix} + \boldsymbol{g} \qquad \tilde{\boldsymbol{s}}_2 \equiv \begin{bmatrix} s_{2y} \\ s_{2x} \\ s_{4x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_1^T \cdot \boldsymbol{r}_{S_2} \\ \boldsymbol{m}_2^T \cdot \boldsymbol{r}_{S_2} \\ \boldsymbol{m}_3^T \cdot \boldsymbol{r}_{S_4} \end{bmatrix} + \boldsymbol{g} \\ \tilde{\boldsymbol{s}}_3 \equiv \begin{bmatrix} s_{5x} \\ s_{3y} \\ s_{5y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_1^T \cdot \boldsymbol{r}_{S_5} \\ \boldsymbol{m}_2^T \cdot \boldsymbol{r}_{S_3} \\ \boldsymbol{m}_3^T \cdot \boldsymbol{r}_{S_5} \end{bmatrix} + \boldsymbol{g} \qquad \tilde{\boldsymbol{s}}_4 \equiv \begin{bmatrix} s_{6x} \\ s_{4y} \\ s_{6y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_1^T \cdot \boldsymbol{r}_{S_6} \\ \boldsymbol{m}_2^T \cdot \boldsymbol{r}_{S_4} \\ \boldsymbol{m}_3^T \cdot \boldsymbol{r}_{S_6} \end{bmatrix} + \boldsymbol{g} \end{aligned} \tag{1.17}$$

In dieser Darstellung werden die Vektoren $\tilde{\boldsymbol{s}}_i$ mit den Diagonalmatrizen

$$\boldsymbol{B}_i = \begin{bmatrix} b_{ix} & 0 & 0 \\ 0 & b_{iy} & 0 \\ 0 & 0 & b_{iz} \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

multipliziert um die Einflüsse der Beschleunigungen zu eliminieren. Für die Summe der Gewichteten Vektoren gilt

$$\sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{B}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{s}}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_1^T \cdot \sum_{i=1}^{4} b_{ix} \cdot \boldsymbol{r}_{\tilde{S}_{xi}} \\ \boldsymbol{m}_2^T \cdot \sum_{i=1}^{4} b_{iy} \cdot \boldsymbol{r}_{\tilde{S}_{yi}} \\ \boldsymbol{m}_3^T \cdot \sum_{i=1}^{4} b_{iz} \cdot \boldsymbol{r}_{\tilde{S}_{zi}} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{B}_i \cdot \boldsymbol{g} \tag{1.19}$$

Wenn nun die Matrizen $\boldsymbol{B}_i$ so gewählt werden, dass einerseits

$$\sum_{i=1}^{4} b_{ix} \cdot \boldsymbol{r}_{\tilde{S}_{xi}} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{4} b_{iy} \cdot \boldsymbol{r}_{\tilde{S}_{yi}} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{4} b_{iz} \cdot \boldsymbol{r}_{\tilde{S}_{zi}} = 0 \tag{1.20}$$

und andererseits

$$det\left(\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{B}_i\right) \neq 0 \tag{1.21}$$

gelten, ergibt sich für die Summe der Messvektoren $\tilde{\boldsymbol{s}}_i$

$$\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{B}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{s}}_i = \sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{B}_i \cdot \boldsymbol{g} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{g} = \left(\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{B}_i\right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{B}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{s}}_i\,. \tag{1.22}$$

Somit können die Einflüsse der Beschleunigungen ${}^{A}\boldsymbol{a}^{S_i}$ auf die Messwerte auch bei den Messvektoren $\tilde{\boldsymbol{s}}_i$ eliminiert werden.

1.2 Komplementärfilter für die Winkel φ

Im Rahmen der Vorarbeit hat sich gezeigt, dass die Messwerte der Beschleunigungssensoren von Störsignalen betroffen sind. Die Sensoren reagieren empfindlich auf hochfrequente Störsignale wie z.B. den Vibrationen des Würfelgehäuses, welche von den Motoren verursacht werden. Um den Einfluss dieser Störgrößen zu minimieren wurde ein Komplementärfilter verwendet. Hierfür wird das Signal φ aus zwei Quellen gewonnen, welche über das Komplementärfilter zusammengeführt werden. Einerseits kann eine Schätzung

$$\varphi_A = \varphi + v_A \tag{1.23}$$

aus den Beschleunigungssensoren gewonnen werden, wobei v_A das überlagerte Störsignal bezeichnet. Hierbei ist anzunehmen, dass es sich um ein hochfrequentes Signal handelt. Andererseits wird die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ mittels der Drehratensensoren bestimmt. Über das Integral der Messwerte kann der Winkel

$$\varphi_G = \int \dot{\varphi} + \hat{\dot{\varphi}} \; dt = \varphi + v_G \tag{1.24}$$

bestimmt werden. Das Störsignal v_G geht aus der Integration der systematischen Messabweichung $\hat{\dot{\varphi}}$ hervor. Da die Messabweichung $\hat{\dot{\varphi}}$ lediglich geringe Werte annimmt, handelt es sich bei v_G um ein niederfrequentes Störsignal.

In dem Komplementärfilter werden die beiden Signale φ_A und φ_G addiert. Wobei φ_A zuvor mit einem Tiefpass gefiltert wird um das hochfrequente Störsignale v_A zu eliminieren. Parallel wird φ_G mittels eines Hochpasses gefiltert um das niederfrequente Signal v_G zu dämpfen. Der Tief- und Hochpass werden jeweils als IIR-Filter erster Ordnung mit identischer Zeitkonstante τ entworfen.

Abbildung 1.1: Blockschaltbild Komplementärfilter, Quelle: eigene Darstellung

Für das resultierende Signal $\Phi_C(s)$ folgt aus dem Blockschaltbild (1.2)

$$\begin{aligned}
\Phi_C(s) &= \frac{1}{\tau \cdot s + 1} \cdot \Phi_A(s) + \frac{\tau \cdot s}{\tau \cdot s + 1} \cdot \Phi_G(s) \\
&= \frac{1}{\tau \cdot s} \cdot [\Phi(s) + V_A(s)] + \frac{\tau \cdot s}{\tau \cdot s + 1} \cdot [\Phi(s) + V_G(s)] \\
&= \Phi(s) + \frac{1}{\tau \cdot s} \cdot V_A(s) + \frac{\tau \cdot s}{\tau \cdot s + 1} \cdot V_G(s)\,.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Wird die Zeitkonstante τ nun so gewählt werden, dass die Störsignale v_A und v_G durch das Tief- bzw. Hochpassfilter eliminiert werden, besteht das Ausgangssignal φ_C des Komplementärfilters lediglich aus dem Nutzsignal φ. Von besonderer Bedeutung für den Regelkreis ist hierbei, dass das Nutzsignal φ von keiner Phasenverschiebung betroffen ist.

Dieses Filterkonzept kann auf den Fall des auf einer Ecke stehenden Würfels übertragen werden. Hierbei sind die beiden Winkel φ_2 und φ_3 zu bestimmen. Die Ableitungen dieser Signale hängen von der Winkelgeschwindigkeit ${}^A\boldsymbol{\omega}^K$ ab, welche mittels der Drehratensensoren erfasst wird.

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s_{\varphi_3} & c_{\varphi_3} & 0 \\ \frac{-s_{\varphi_2} c_{\varphi_3}}{c_{\varphi_2}} & \frac{s_{\varphi_2} s_{\varphi_3}}{c_{\varphi_2}} & 1 \end{bmatrix}}_{\equiv \boldsymbol{\Delta \Phi}} \cdot \begin{bmatrix} u_{K1} \\ u_{K2} \\ u_{K3} \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

Wird die Matrix $\boldsymbol{\Delta \Phi}$ linearisiert können die Ableitung $\dot{\varphi}_2$ und $\dot{\varphi}_3$ aus den Winkelgeschwindigkeiten $\boldsymbol{u}_K$ berechnet werden. Die Ergebnisse aus dem vorherigen Abschnitt werden genutzt um die Winkel φ_2 und φ_3 auf den Beschleunigungsmessungen basierend zu schätzen. Mit Hilfe zweier Komplementärfilter werden diese jeweils mit den Ableitungen $\dot{\varphi}_i$ fusioniert. Diese Vorgehensweise führt zu einer ausreichenden Signalgüte um das in Abschnitt (**??**) dokumentierten Reglerverhalten zu erreichen. Allerdings zeigt dieser Anwendungsfall die Grenzen des Komplementärfilters auf. Einerseits ist das Filter auf Grund der Linearisierung auf einen lokalen Arbeitsbereich eingeschränkt. Die Linearisierung ist allerdings nötig, da die Ableitungen $\dot{\varphi}_i$ sowohl von den Winkeln φ_i als auch den Winkelgeschwindigkeiten u_{Ki} abhängen. Werden für die Berechnung der Matrix $\boldsymbol{\Delta \Phi}$ die Ausgangssignale des Filters verwendet, ergibt sich eine nichtlineare Filteroperation. Des weiteren können die Störsignale v_A und v_G durch die Filter nicht vollständig eliminiert werden und beeinflussen somit ebenfalls die Berechnung der Matrix $\boldsymbol{\Delta \Phi}$.

Abbildung 1.2: Blockschaltbild des Luenberger-Beobachters, Quelle: eigene Darstellung

1.3 Beobachter zur Ermittlung von φ

In dem letzten Abschnitt sind die Nachteile des Komplementärfilters aufgezeigt worden. Aus diesem Grund wird am Beispiel des auf einer Kante balancierenden Würfels ein Luenberger-Beobachter entworfen, um den Winkel φ zu bestimmen. Hierfür wird wieder das System

$$\mathfrak{D} \equiv \begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) & = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b} \cdot u(k) \\ \boldsymbol{y}(k) & = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{0}^{2\times 1} & \boldsymbol{I}^{2\times 2} \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{C}} \cdot \boldsymbol{x}(k) \end{cases}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \varphi \\ u_K \\ u_R \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

betrachtet, wobei lediglich die Zustandsgrößen u_K und u_R messbar seine. Aus dem Kalmankriterium ergibt sich, dass das System vollständig beobachtbar ist. D.h. der Verlauf der Zustandsgrößen kann aus dem Ausgangsvektor und der Eingangsgröße rekonstruiert werden. Hierfür wird ein Luenberger-Beobachter verwendet. Das Grundprinzip des Beobachters besteht darin einen Schätzwert $\hat{\boldsymbol{x}}$ aus dem Modell (1.27) zu berechnen. Bei diesem Ansatz führt bereits eine minimale Abweichung zwischen dem Modell und dem realen System zu einem kontinuierlich zunehmenden Schätzfehler. Um diesen Fehler zu eliminieren wird das in der Regelungstechnik bewährte Konzept der Fehlerrückführung verwendet. Da der Zustandsvektor nicht messbar ist wird die Differenz $\Delta\boldsymbol{y}$ der Ausgangsvektoren über die so genannte Beobachtermatrix $\boldsymbol{L}$ zurückgeführt. Um das Verhalten des Beobachters zu untersuchen wird der Schätzfehler $\boldsymbol{e}(k) = \boldsymbol{x}(k) - \hat{\boldsymbol{x}}(k)$ betrachtet.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}(k+1) = \boldsymbol{x}(k+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(k+1) \\ &= [\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u}(k)] - [\boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}(k) + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{L}\hat{\boldsymbol{y}}(k)] \\ &= [\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{x}(k) - \hat{\boldsymbol{x}}(k))] - \boldsymbol{LC} \cdot [\boldsymbol{x}(k) - \hat{\boldsymbol{x}}(k)] \\ &= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}(k) - \boldsymbol{LC} \cdot \boldsymbol{e}(k) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC}) \cdot \boldsymbol{e}(k) \end{aligned} \tag{1.28}$$

Hieraus folgt, dass der Verlauf des Schätzfehlers $\boldsymbol{e}(k)$ ein geschlossenen System darstellt. Wird die Beobachtermatrix $\boldsymbol{L}$ so gewählt, dass die Eigenwerte der Systemmatrix $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC}$ im Einheitskreis liegen konvergiert der Schätzfehler gegen null. Da die Eigenwerte durch die Transponierung einer Matrix nicht verändert werden, kann die Entwurfsaufgabe als

$$\left| \lambda_i \left\{ \boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{L}^T \right\} \right| \overset{!}{<} 1 \tag{1.29}$$

formuliert werden. Diese Problemstellung entspricht der Entwurfsaufgabe eines gewöhnlichen Zustandsreglers, weshalb die bereits vorgestellten Verfahren für den Reglerentwurf auch für die Bestimmung der Beobachtermatrix $\boldsymbol{L}$ verwendet werden können. Für diesen Anwendungsfall wird der Beobachter optimal im Sinne des quadratischen Gütekriteriums entworfen. Als Gewichtungsmatrix $\boldsymbol{R}$ wird die Kovarianzmatrix des Ausgangvektors $\boldsymbol{y}$ verwendet. Die Matrix $\boldsymbol{Q}$ wird empirisch ermittelt. Prinzipiell unterliegt der Beobachter keiner Stellgrößenbeschränkung, da die Rückführung von $\Delta\boldsymbol{y}$ digital berechnet wird. Allerdings wirkt ein Messrauschen proportional zu $\boldsymbol{L}$ auf den Schätzwert $\hat{\boldsymbol{x}}$ ein. Aus diesem Grund werden die Elemente der Gewichtungsmatrix $\boldsymbol{Q}$ möglichst klein gewählt. Die folgenden Abbildung zeigen den Verlauf des System, wobei der Regler mit Hilfe des geschätzten Zustandvektors $\hat{\boldsymbol{x}}$ berechnet wird.

Abbildung 1.3: Verlauf des geschätzten Zustandvektors und der Stellgröße, Quelle: eigene Darstellung