

Kapitel 1

Modellbildung für den Würfel auf einer Kante

Dieses Kapitel widmet sich der Herleitung der Bewegungsgleichungen für den Fall, dass der Würfel auf einer seiner Kanten steht. Hierfür wird Kanes Methodik [?] angewandt, welche sich in die Untersuchung der kinematischen und kinetischen Gegebenheiten unterteilt. In der Kinematikanalyse werden zunächst generalisierte Koordinaten eingeführt, um die Konfiguration des Systems zu beschreiben. Des Weiteren werden Bezugssysteme verwendet, um einzelne Körper des Gesamtsystems in dem mathematischen Modell darzustellen. Die kinematische Untersuchung endet mit der Definition der generalisierten Geschwindigkeiten und der Bestimmung der partiellen Geschwindigkeiten, welche als Betrag und Richtung der Systembewegung interpretiert werden können. In dem zweiten Teil des Kapitels wird die Kinetik betrachtet. Zu Beginn werden die resultierenden Drehmomente formuliert, welche auf die verschiedenen Körper wirken. Diese werden verwendet, um mit Hilfe der partiellen Geschwindigkeiten die generalisierten aktiven Kräfte F_i zu ermitteln. Analog werden die Trägheitsmomente und daraus die generalisierten Trägheitskräfte F_i^* berechnet, welche mittels Kanes Gleichung $F_i + F_i^* = 0$ zu den gesuchten Bewegungsgleichungen führen. Zuletzt wird die Auswirkung der generalisierten Geschwindigkeiten auf die resultierenden Bewegungsgleichungen anhand eines einfachen Beispiels erörtert.

Skalarprodukt $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{c} \rangle$ berechnet werden. Wird dieser Ansatz auf alle drei Komponenten appliziert, ergibt sich der Zusammenhang²

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}_1 \rangle \cdot \mathbf{a}_1 + \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}_2 \rangle \cdot \mathbf{a}_2 + \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}_3 \rangle \cdot \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}_3 \rangle \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \beta_1 \cdot \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{k}_1 \rangle + \beta_2 \cdot \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{k}_2 \rangle + \beta_3 \cdot \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{k}_3 \rangle \\ \beta_1 \cdot \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{k}_1 \rangle + \beta_2 \cdot \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{k}_2 \rangle + \beta_3 \cdot \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{k}_3 \rangle \\ \beta_1 \cdot \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{k}_1 \rangle + \beta_2 \cdot \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{k}_2 \rangle + \beta_3 \cdot \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{k}_3 \rangle \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{k}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{k}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{k}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{k}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{k}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{k}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{k}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{k}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{k}_3 \rangle \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}}_{\equiv {}^K \mathbf{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^A \mathbf{c} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Somit handelt es sich bei der Projektion eines Vektors, welcher in einem beliebigen Bezugssystem A dargestellt ist, in ein weiteres Bezugssystem B um eine lineare Abbildung. Die Abbildungsvorschrift wird durch die Matrix ${}^B \mathbf{P}^A$ definiert. Zudem zeigt dieses Beispiel die perspektivische Bedeutung eines Bezugssystem. Wird der Vektor \mathbf{c} in K dargestellt, hängt er lediglich von der Länge l_C ab und ist folglich konstant. Aus der Perspektive von A ist der Vektor eine Funktion von φ und somit variabel. Die Begründung hierfür liegt darin, dass das Inertialsystem A die Bewegung des Würfels im Raum wahrnimmt, wodurch der Ortsvektor des Schwerpunktes variabel erscheint. Im Gegensatz dazu erfasst das körperfeste Bezugssystem K einen Vektor aus der Perspektive des Würfelkörpers, weshalb der in K dargestellte Ortsvektor ${}^K \mathbf{c}$ des Schwerpunktes konstant ist. Dieser Umstand kann genutzt werden, indem ein Vektor zunächst in einer einfachen Form dargestellt und anschließend in das gewünschte Bezugssystem projiziert wird. Als Beispiel dient die Berechnung des Gravitationsmoments $\mathbf{T}^{K/O}$. Der Erdbeschleunigungsvektor \mathbf{g} ist im Inertialsystem A konstant und wird von dort in das körperfeste System K transformiert.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}^{K/O} = \mathbf{c} \times m \cdot \mathbf{g} &= \begin{pmatrix} l_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -m \cdot g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} {}^A \mathbf{P}^K \cdot \begin{pmatrix} -m \cdot g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} l_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -c_\varphi \cdot m \cdot g \\ s_\varphi \cdot m \cdot g \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s_\varphi \cdot m \cdot g \cdot l_C \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Dieses Beispiel zeigt, dass die Einführung von Bezugssystemen eine eindeutige Notation und Vorgehensweise zur Berechnung von vektorwertigen Funktionen mit sich bringt. Man möge bei diesem Anwendungsfall argumentieren, dass die trigonometrischen Zusammenhänge des Gravitationsmomentes auch aus der Abbildung 1.1 ablesen lassen. Jedoch ist die hier betrachtete Vorgehensweise allgemeingültig und kann auf beliebig komplexe Systeme ange-

²Um die allgemeine Gültigkeit der linearen Abbildung zu verdeutlichen, wird in dieser Gleichung die Definition $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}^T$ verwendet.

wendet werden. Beispielsweise kann das Gravitationsmoment in dem Fall, dass der Würfel auf einer Ecke steht, kaum mehr anhand einer Skizze bestimmt werden.

Zur vollständigen Beschreibung der Kinematik müssen die Geschwindigkeiten des Systems ermittelt werden, welche aus den Ableitungen der Winkel φ und ψ hervorgehen. Als Beispiel für die Ableitung eines Vektors dient wieder der Ortsvektor \mathbf{c} des Schwerpunktes. Dieser ist aus der Perspektive des Bezugssystem K konstant, so dass auch dessen Ableitung bzw. Geschwindigkeit verschwindet. Wird der Vektor aber in A abgebildet, hängt dieser von der Zeitfunktion $\varphi(t)$ ab. Deshalb muss bei der Ableitung eines Vektors das Bezugssystem angegeben werden, aus dessen Perspektive differenziert wird [?, S. 25 ff.]. Wenn \mathbf{c} in A differenziert werden soll, muss dieser zunächst in A dargestellt und anschließend komponentenweise nach der Zeit abgeleitet werden.

$$\frac{{}^A d\mathbf{c}}{dt} = \frac{d(c_\varphi \cdot l_C)}{dt} \cdot \mathbf{a}_1 + \frac{d(s_\varphi \cdot l_C)}{dt} \cdot \mathbf{a}_2 + \frac{d(0)}{dt} \cdot \mathbf{a}_3 = {}^A \begin{pmatrix} -s_\varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot l_C \\ c_\varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot l_C \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Hieraus folgt, dass auch die Geschwindigkeiten eines Körpers lediglich als relativ zu einem Bezugssystem angegeben werden können. Somit beschreibt ${}^B \mathbf{v}^P$ die Geschwindigkeit bzw. ${}^B \mathbf{a}^P$ die Beschleunigung eines Punktes oder Körpers P relativ zu einem Bezugssystem B . Diese werden wie folgt definiert [?, S. 28].

$${}^B \mathbf{v}^P = \frac{{}^B d\mathbf{p}}{dt} \quad {}^B \mathbf{a}^P = \frac{{}^B d{}^B \mathbf{v}^P}{dt} \quad (1.5)$$

Die selbe Notation wird für Winkelgeschwindigkeiten und -beschleunigungen eingeführt, wobei ${}^A \boldsymbol{\omega}^B$ die Winkelgeschwindigkeit und ${}^A \boldsymbol{\alpha}^B$ die Winkelbeschleunigung eines Punktes oder Bezugssystems B relativ zu A ist. Die Geschwindigkeit relativ zu einem Inertialsystem wird auch als absolute Geschwindigkeit bezeichnet. Für die Bezugssysteme K und R lassen sich mit Hilfe der Abbildung 1.1 die folgenden Winkelgeschwindigkeiten bestimmen, wobei die absolute Winkelgeschwindigkeit eines Bezugssystems die Summe seiner relativen Winkelgeschwindigkeiten ist [?, S. 24 f.].

$${}^A \boldsymbol{\omega}^K = {}^K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad {}^K \boldsymbol{\omega}^R = {}^R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad {}^A \boldsymbol{\omega}^R = {}^A \boldsymbol{\omega}^K + {}^K \boldsymbol{\omega}^R = {}^A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Der letzte Schritt in der Kinematikanalyse besteht darin, die generalisierten Geschwindigkeiten zu definieren und daraus die partiellen Geschwindigkeiten zu berechnen. Bei den generalisierten Geschwindigkeiten u_i handelt es sich um skalare Größen, deren Anzahl gleich der Zahl der generalisierten Koordinaten ist. Die generalisierten Geschwindigkeiten sind für gewöhnlich abhängig von den Zeitableitungen der generalisierten Koordinaten \dot{q}_i , wobei sie so gewählt werden müssen, dass die Definitionen eindeutig nach den Ableitungen \dot{q}_i aufgelöst werden können [?, S. 61]. Die Einführung der generalisierten Geschwindigkeiten verfolgt das Ziel, sowohl möglichst einfache Ausdrücke für die absoluten Geschwindigkeiten ${}^A \boldsymbol{\omega}^K$ und ${}^A \boldsymbol{\omega}^R$ als auch für die später resultierenden Bewegungsgleichungen zu erhalten. Deshalb werden hier

die Definitionen

$$\begin{aligned} u_1 &= u_K \equiv \dot{\varphi} & u_2 &= u_R \equiv \dot{\varphi} + \dot{\psi} \\ {}^A\boldsymbol{\omega}^K &= \begin{matrix} K \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix} \end{matrix} & {}^A\boldsymbol{\omega}^R &= \begin{matrix} K \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{aligned} \quad (1.7)$$

gewählt. Diese Geschwindigkeitsausdrücke können auch in die Form

$${}^A\boldsymbol{\omega}^K = u_1 \cdot {}^A\boldsymbol{\omega}_1^K + u_2 \cdot {}^A\boldsymbol{\omega}_2^K \quad | \quad {}^A\boldsymbol{\omega}_1^K = \boldsymbol{k}_3, \quad {}^A\boldsymbol{\omega}_2^K = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

$${}^A\boldsymbol{\omega}^R = u_1 \cdot {}^A\boldsymbol{\omega}_1^R + u_2 \cdot {}^A\boldsymbol{\omega}_2^R \quad | \quad {}^A\boldsymbol{\omega}_1^R = \mathbf{0}, \quad {}^A\boldsymbol{\omega}_2^R = \boldsymbol{k}_3 \quad (1.9)$$

gebracht werden, wobei die Größen ${}^A\boldsymbol{\omega}_i^K$ und ${}^A\boldsymbol{\omega}_i^R$ partielle Geschwindigkeiten genannt werden. Diese Zerlegung kann so interpretiert werden, dass die generalisierten Geschwindigkeiten u_i als Skalare den Betrag der Bewegung und die entsprechenden partiellen Geschwindigkeit als Vektoren deren Richtung wiedergeben. Die Vorteile dieser Zerlegung in generalisierte und partielle Geschwindigkeiten werden sich im folgenden Abschnitt zeigen.

1.2 Untersuchung der Kinetik

Im nächsten Schritt wird die Kinematik des Systems untersucht, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten. Hierfür werden zunächst die Drehmomente analysiert, welche auf das Würfelgehäuse und die Schwungmasse wirken. Letztere wird einerseits von dem Motormoment $\mathbf{T}_M^{R/M}$ beschleunigt, andererseits wirkt ein verzögerndes Reibmoment $\mathbf{T}_R^{R/M}$, welches als proportional zu der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ modelliert wird.

$$\mathbf{T}^{R/M} = \mathbf{T}_M^{R/M} + \mathbf{T}_R^{R/M} = [T_M - C_\psi(u_2 - u_1)] \cdot \mathbf{k}_3 \quad (1.10)$$

Das Motor- und Reibmoment wirkt an dem Verbindungspunkt zwischen Schwungmasse und Würfelgehäuse, weshalb die beiden den Würfelkörper in umgekehrter Richtung beeinflussen. Zusätzlich wird das Würfelgehäuse von dem Gravitationsmoment $\mathbf{T}_G^{K/O}$ beschleunigt. Die Summe der Komponenten ergibt das resultierende Drehmoment

$$\mathbf{T}^{K/O} = \mathbf{T}_G^{K/O} - \mathbf{T}_M^{R/M} - \mathbf{T}_R^{R/M} = [m \cdot g \cdot l_C \cdot s_\varphi - T_M + C_\psi(u_2 - u_1)] \cdot \mathbf{k}_3. \quad (1.11)$$

Um die Bewegungsgleichungen zu ermitteln, werden die generalisierten aktiven Kräfte F_i benötigt. Hierfür werden die Skalarprodukte der Drehmomente, welche auf die Körper wirken, und die partiellen Winkelgeschwindigkeiten des entsprechenden Körpers berechnet. Die Summe über alle Körper ergibt die generalisierte aktive Kraft F_i [?, S. 99 f.].

$$\begin{aligned} F_1 &= \langle \mathbf{T}^{K/O}, {}^A\boldsymbol{\omega}_1^K \rangle + \langle \mathbf{T}^{R/M}, {}^A\boldsymbol{\omega}_1^R \rangle = m \cdot g \cdot l_C \cdot s_\varphi - T_M + C_\psi(u_2 - u_1) \\ F_2 &= \langle \mathbf{T}^{K/O}, {}^A\boldsymbol{\omega}_2^K \rangle + \langle \mathbf{T}^{R/M}, {}^A\boldsymbol{\omega}_2^R \rangle = T_M - C_\psi(u_2 - u_1) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Die partiellen Geschwindigkeiten können als Bewegungsrichtungen der Körper verstanden werden. Somit geben die generalisierten Kräfte F_i den Beitrag der Drehmomente in die jeweilige Bewegungsrichtung wieder.

Als Gegenstück zu den generalisierten aktiven Kräften müssen nun die generalisierten Trägheitskräfte F_i^* ermittelt werden. Das resultierende Trägheitsmoment der Schwungmasse ergibt sich aus dem Produkt des Skalars I_R , welches das Massenträgheitsmoment des Körpers relativ zu M beschreibt, und der Winkelbeschleunigung ${}^A\boldsymbol{\alpha}^R$.³

$$\mathbf{T}_*^{R/M} = -I_R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix}^K \quad (1.13)$$

Das Trägheitsmoment des Würfelkörpers lässt sich aus dessen Trägheitsskalar I_K und der Winkelbeschleunigung ${}^A\boldsymbol{\alpha}^K$ berechnen. Die Größe I_K ist die Summe des Massenträgheitsmoments des Würfelgehäuses $I^{GH/O}$ und des Einflusses der Schwungmasse, welche dabei als

³Die hier verwendete Berechnung ist nur für die eindimensionale Bewegung gültig. Für die Berechnung der Trägheitsmomente wird im allgemeinen ein Trägheitstensor \mathbf{I} verwendet.

Punkt mit der Masse m_R und dem Abstand l_{MO} betrachtet wird.

$$\mathbf{T}_*^{K/O} = - \underbrace{(I^{GH/O} + m_R \cdot l_{MO}^2)}_{\equiv I_K} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{u}_1 \end{pmatrix} = -I_K \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{u}_1 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Die generalisierten Trägheitskräfte F_i^* werden wieder aus der folgenden Summe von Skalarprodukten berechnet [?, S. 124 ff.].

$$\begin{aligned} F_1^* &= \langle \mathbf{T}_*^{K/O}, {}^A\boldsymbol{\omega}_1^K \rangle + \langle \mathbf{T}_*^{R/M}, {}^A\boldsymbol{\omega}_1^R \rangle = -I_K \cdot \dot{u}_1 \\ F_2^* &= \langle \mathbf{T}_*^{K/O}, {}^A\boldsymbol{\omega}_2^K \rangle + \langle \mathbf{T}_*^{R/M}, {}^A\boldsymbol{\omega}_2^R \rangle = -I_R \cdot \dot{u}_2 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Die Bewegungsgleichungen resultieren nun aus Kanes Gleichung $F_i + F_i^* = 0$ [?, S. 158 ff.].

$$\begin{aligned} F_1 + F_1^* &= 0 \quad \leftrightarrow \quad I_K \cdot \dot{u}_1 = m \cdot g \cdot l_C \cdot s_\varphi - T_M + C_\psi(u_2 - u_1) \\ F_2 + F_2^* &= 0 \quad \leftrightarrow \quad I_R \cdot \dot{u}_2 = T_M - C_\psi(u_2 - u_1) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Rückblickend kann Kanes Methodik in die folgenden Schritte unterteilt werden. Zunächst wird die Kinematik des Systems analysiert, wobei die Körper mit Hilfe von Bezugssystemen modelliert werden. Die Definition von generalisierten Geschwindigkeiten ermöglicht die Bestimmung der partiellen Geschwindigkeiten, wodurch die Bewegung des Systems in Betrag und Richtung unterteilt wird. Anschließend werden die partiellen Geschwindigkeiten genutzt um die wirkenden Kräfte und Trägheitskräfte in die Bewegungsrichtungen zu projizieren. Hieraus resultieren die generalisierten aktiven Kräfte und generalisierten Trägheitskräfte, welche mittels Kanes Gleichung auf die gesuchten Bewegungsgleichungen führen.

Um die Bedeutung der generalisierten Geschwindigkeiten zu verdeutlichen, wird eine alternative Definition gewählt und die zugehörigen Bewegungsgleichungen ermittelt.

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_K \equiv \dot{\varphi} \quad \tilde{u}_2 = \tilde{u}_R \equiv \dot{\psi} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} {}^A\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^K &= \mathbf{k}_3 & {}^A\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2^K &= 0 \\ {}^A\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^R &= 0 & {}^A\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2^R &= \mathbf{k}_3 \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1 &= m \cdot g \cdot l_C \cdot s_\varphi & \tilde{F}_2 &= T_M - C_\psi(u_2 - u_1) \\ \tilde{F}_1^* &= -I_R \cdot (\dot{\tilde{u}}_1 + \dot{\tilde{u}}_2) - I_K \cdot \dot{\tilde{u}}_1 & \tilde{F}_2^* &= -I_R \cdot (\dot{\tilde{u}}_1 + \dot{\tilde{u}}_2) \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\tilde{F}_1 + \tilde{F}_1^* = 0 \quad \leftrightarrow \quad I_K \cdot \dot{\tilde{u}}_1 + I_R \cdot (\dot{\tilde{u}}_1 + \dot{\tilde{u}}_2) = m \cdot g \cdot l_C \cdot s_\varphi \quad (1.20)$$

$$\tilde{F}_2 + \tilde{F}_2^* = 0 \quad \leftrightarrow \quad I_R \cdot (\dot{\tilde{u}}_1 + \dot{\tilde{u}}_2) = T_M - C_\psi(\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1) \quad (1.21)$$

Dieses Beispiel zeigt, dass die Wahl der generalisierten Geschwindigkeiten eine direkte Auswirkung auf die Form der resultierenden Bewegungsgleichungen hat. Zwar kann die Letztere mittels $u_1 = \tilde{u}_1$, $u_2 = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2$ und dem Einsetzen der Gleichung (1.21) in die Gleichung (1.20) in die ursprüngliche Form überführt werden, allerdings stellt die Modellierung des Würfels auf einer Ecke einen Anwendungsfall dar, bei dem der Berechnungsaufwand durch eine geschickte Wahl der generalisierten Geschwindigkeiten deutlich reduziert werden kann.