

# Kapitel 1

## Reglerentwurf für das Balancieren auf einer Kante

Nachdem die Systemdynamik mit Hilfe von Bewegungsgleichungen beschrieben wurde, besteht der nächste Schritt darin, einen Regler zu entwerfen, welcher die Stabilisierung des Würfels auf einer Kante ermöglicht. Hierfür wird in diesem Abschnitt zunächst die Beschreibung eines Systems mit Hilfe der Zustandsraumdarstellung diskutiert. Anschließend wird der Zusammenhang zeitkontinuierlicher Systeme und deren zeitdiskreten Darstellungen ermittelt um den Entwurf von digitalen Reglern zu ermöglichen. Daraufhin werden die Vorteile von Zustandsregler gegenüber klassischen Regelungsalgorithmen erläutert und ein Regler für die Stabilisierung des Würfels auf einer Kante entworfen. Anschließend wird diese Regelungsvorschrift an der reellen Regelstrecke erprobt und validiert.

## 1.1 Zustandsraumdarstellung für zeitkontinuierliche Systeme

Aus dem vorherigen Kapitel sind die beiden Bewegungsgleichungen

$$I_K \cdot \dot{u}_K = m \cdot g \cdot l_C \cdot s_\varphi - C_\psi \cdot u_K + C_\psi \cdot u_R - T_M \quad (1.1)$$

$$I_R \cdot \dot{u}_R = C_\psi \cdot u_K - C_\psi \cdot u_R + T_M \quad (1.2)$$

hervorgegangen, welche die Systemdynamik vollständig beschreiben. Mit Hilfe der Definitionen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \varphi \\ u_K \\ u_R \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \varphi \\ u_K \\ u_R \end{bmatrix} \quad u = T_M \quad (1.3)$$

können die linearisierten Bewegungsgleichungen in die folgende Zustandsraumdarstellung überführt werden.

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{m \cdot g \cdot l_C}{I_K} & \frac{-C_\psi}{I_K} & \frac{C_\psi}{I_K} \\ 0 & \frac{C_\psi}{I_R} & \frac{-C_\psi}{I_R} \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{I_K} \\ \frac{1}{I_R} \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{b}} \cdot u \quad (1.4)$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{C}} \cdot \mathbf{x} \quad (1.5)$$

Prinzipiell lässt sich jedes lineare zeitinvariante System  $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  als Zustandsraumdarstellung mit der Form

$$\mathfrak{S}: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1.6)$$

beschreiben, wobei  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  Zustandsvektor,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$  Eingangsvektor und  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  Ausgangsvektor heißt. Im weiteren Verlauf wird die Zeitabhängigkeit dieser drei Vektoren nicht mehr explizit angegeben. Außerdem werden in dieser Arbeit lediglich nicht sprungfähige Systeme  $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  betrachtet, deren Eingangsvektor  $\mathbf{u}$  den Ausgangsvektor  $\mathbf{y}$  nicht direkt beeinflusst und bei denen somit  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$  gilt.

Ein großer Vorteil dieser Modellierung besteht darin, dass für jedes System unendlich viele Zustandsraumdarstellungen existieren [?, S. 54]. Dieser Umstand wird ersichtlich, wenn man für die Herleitung der Bewegungsgleichungen alternative generalisierte Geschwindigkeiten wählt und diese anschließend in eine Zustandsraumdarstellung transformiert.

$$\tilde{u}_K \equiv \dot{\varphi} \quad \tilde{u}_R \equiv \dot{\psi} \quad (1.7)$$

$$I_K \cdot \dot{\tilde{u}}_K = m \cdot g \cdot l_C \cdot \sin \varphi + C_\psi \cdot \tilde{u}_R - T_M \quad (1.8)$$

$$I_R \cdot \dot{\tilde{u}}_R = -\frac{I_R \cdot m \cdot g \cdot l_C \cdot \sin \varphi}{I_K} - \frac{(I_K + I_R) \cdot C_\psi}{I_K} + \frac{I_K + I_R}{I_K} \cdot T_M \quad (1.9)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{m \cdot g \cdot l_C}{I_K} & 0 & \frac{C_\psi}{I_K} \\ \frac{-I_R \cdot m \cdot g \cdot l_C}{I_R \cdot I_K} & 0 & \frac{-C_\psi(I_K + I_R)}{I_R \cdot I_K} \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{I_K} \\ \frac{I_K + I_R}{I_K \cdot I_R} \end{bmatrix} \cdot u \quad (1.10)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{x}} \quad (1.11)$$

Sowohl die verschiedenen Bewegungsgleichungen als auch die daraus resultierenden Zustandsraumdarstellungen sind gültige Beschreibungsformen des Systems. Allgemein kann eine Zustandsraumdarstellung mit Hilfe einer Transformationsmatrix  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  in eine äquivalente Darstellung überführt werden. Hierfür muss  $\mathbf{T}$  lediglich regulär sein. Die neue Darstellung ergibt sich aus den Transformationen

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{x} \quad \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\ &= \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \end{aligned} \right. \quad (1.13)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{T} \cdot \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{x}} \quad \left| \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{T} \right. \quad (1.14)$$

Mit Hilfe derartiger Transformationen kann ein beliebiges System in diverse Normalformen überführt werden, welche sich für die Systemanalyse und den Reglerentwurf besonders eignen. Als erstes Beispiel sei die Transformation in kanonische Normalform genannt. Hierfür sei ein System  $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  der Ordnung  $n$  gegeben, dessen Systemmatrix  $\mathbf{A}$   $n$  einfache Eigenwerte  $\lambda_i$  mit den zugehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$  besitzt. Sind die Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$  linear unabhängig, dann ist die Matrix

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n] \quad (1.15)$$

regulär und kann somit als Transformationsmatrix verwendet werden. Die resultierende Darstellung

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{V}^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (1.16)$$

heißt kanonische Normalform, wobei die Matrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  die Form

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

besitzt. Folglich sind die Elemente des Zustandvektors  $\tilde{\mathbf{x}}$ , welche kanonische Zustandsvariablen genannt werden, vollständig voneinander entkoppelt, weshalb sie auch als Eigenvorgänge bzw. Eigenbewegungen des Systems bezeichnet werden. Die vollständige Entkopplung der Zu-

standsgrößen ist nicht immer möglich, für eine ausführliche Diskussion der Thematik sei auf [?, S. 135 ff.] verwiesen. Die homogene Lösung der kanonischen Normalform lässt sich mit Hilfe des Exponentialansatzes ermitteln.

$$\tilde{x}_{i,h}(t) = e^{\lambda_i \cdot t} \cdot \tilde{x}_i(0) \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_h(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} & & & \\ & e^{\lambda_2 \cdot t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n \cdot t} \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(0) \quad (1.18)$$

Die Rücktransformation

$$\mathbf{x}_h = \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_h \quad (1.19)$$

zeigt, dass der Verlauf der ursprünglichen Zustandsgrößen eine Linearkombination der kanonischen Zustandsvariablen ist. Folglich wird die homogene Lösung eines Systems durch die Eigenwerte und -vektoren der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  vorgegeben. Formal kann dieser Zusammenhang durch die Erweiterung des Exponentialansatzes auf vektorwertige Differentialgleichungen ermittelt werden.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (1.20)$$

Die Matrix-Exponentialfunktion  $e^{\mathbf{A} \cdot t}$  heißt Fundamentalmatrix  $\Phi(t)$  und lässt sich über die folgende Reihenentwicklung bestimmen. Eine Herleitung kann [?, S. 6 ff.] entnommen werden.

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} \quad (1.21)$$

Um einen weiteren Weg zur Ermittlung der Fundamentalmatrix und den Zusammenhang zu der Übertragungsfunktion des Systems herzustellen, wird die Systemgleichung in den Bildbereich transformiert.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) & \circ \longrightarrow & s \cdot \mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(s) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(s) \\ & \leftrightarrow & & \mathbf{x}(s) = \underbrace{(s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(t=0)}_{\equiv \Phi(s)} + (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(s) \\ & \leftrightarrow & & \mathbf{x}(s) = \Phi(s) \cdot \mathbf{x}(t=0) + \Phi(s) \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(s) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Aus dem Vergleich von (1.22) mit (1.20) zeigt sich, dass die Fundamentalmatrix im Bildbereich durch die Invertierung der Matrix  $(s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})$  berechnet werden kann. Im nächsten Schritt wird lediglich das Übertragungsverhalten eines Systems betrachtet.

$$\mathbf{x}(s) = \Phi(s) \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(s) \quad | \quad \mathbf{x}(t=0) = 0 \quad (1.23)$$

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(s) = \underbrace{\mathbf{C} \Phi(s) \mathbf{B}}_{\equiv \mathbf{G}(s)} \cdot \mathbf{u}(s) = \mathbf{G}(s) \cdot \mathbf{u}(s) \quad (1.24)$$

Im Falle eines SISO-Systems reduzieren sich die Matrizen  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{B}$  auf die Vektoren  $\mathbf{c}^T$  und

**b.** Somit handelt es sich bei  $G(s)$  um die Übertragungsfunktion des Eingrößensystems. Bei MIMO-Systemen heißt  $\mathbf{G}(s)$  Übertragungsfunktionsmatrix, wobei die einzelnen Elemente  $G_{ij}(s)$  Teilübertragungsfunktionen genannt werden und das E/A-Verhalten der Eingangsgröße  $u_j$  auf die Ausgangsgröße  $y_i$  beschreiben. Bei der Berechnung der Übertragungsmatrix  $\mathbf{G}(s)$  stellt die Fundamentalmatrix  $\Phi(s)$  die einzige Größe dar, die von  $s$  abhängt, weshalb diese auch die Pole des Systems enthalten muss. Aus der Berechnung

$$\Phi(s) = (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (1.25)$$

folgt, dass das charakteristische Polynom

$$\det(s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (1.26)$$

den gemeinsamen Nenner der Teilübertragungsfunktionen darstellt. Die Nullstellen des Polynoms entsprechen den Eigenwerten der Systemmatrix  $\mathbf{A}$ . Hieraus folgt, dass die Eigenwerte  $\lambda_i$  eine Übermenge der Pole  $s_i$  des Systems bilden, da ggf. Eigenwerte gegen Zählernullstellen gekürzt werden können. Demnach bestimmt die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  nicht nur die Eigenbewegung des Systems, sondern kann auch zur Untersuchung der Stabilität verwendet werden. Allgemein gilt ein System als asymptotisch stabil, wenn die Realteile aller Eigenwerte  $\lambda_i$  der Matrix  $\mathbf{A}$  negativ sind.

$$\text{Re}\{\lambda_i\} < 0 \quad (1.27)$$

Dieses Stabilitätskriterium stellt einen weiteren Vorteil der Systembeschreibung mittels Zustandsraumdarstellung dar. Die Systemanalyse erfolgt durch die Untersuchung numerischer Matrizen, was mithilfe von Matlab effizient umgesetzt werden kann. Des Weiteren müssen bei MIMO-Systemen mit klassischen Stabilitätskriterien alle Elemente der Übertragungsfunktionsmatrix  $\mathbf{G}(s)$  untersucht werden. In der Zustandsraumdarstellung genügt allerdings die Analyse der Systemmatrix  $\mathbf{A}$ .

## 1.2 Zustandsraumdarstellung für zeitdiskrete Systeme

Bisher wurden ausschließlich zeitkontinuierliche Systeme betrachtet. Allerdings wird der Regler mit Hilfe eines Digitalrechners implementiert, weshalb dieser ein zeitdiskretes System darstellt. Derartige Systeme werden in Form von Differenzengleichungen beschrieben, die sich ebenfalls in eine Zustandsraumdarstellung überführen lassen. Hierbei wird lediglich der Integrator durch ein vektorielles Totzeitglied ersetzt, bei dem es sich um die Modellierung einer Abtastperiode handelt. Somit gilt für ein diskretes System

$$\mathfrak{D} : \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_d \cdot \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (1.28)$$

Die Ergebnisse aus dem vorherigen Abschnitt können auf diskrete Systeme übertragen werden, wofür zunächst die Z-Transformierte der Systemgleichung betrachtet wird.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{u}(k) \\ \circ \longrightarrow \bullet \quad z \cdot [\mathbf{x}(z) - \mathbf{x}(t=0)] &= \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{x}(z) + \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{u}(z) \\ \Leftrightarrow \quad (z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_d) \mathbf{x}(z) &= z \cdot \mathbf{x}(t=0) + \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{u}(z) \\ \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}(z) &= \underbrace{(z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1} \cdot z \cdot \mathbf{x}(t=0)}_{\equiv \Phi_d(z)} + (z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{u}(z) \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{C}_d \cdot \mathbf{x}(z) = \underbrace{\mathbf{C}_d \Phi_d(z) \mathbf{B}_d}_{\equiv \mathbf{G}_d(z)} \cdot \mathbf{u}(z) \quad (1.30)$$

Anhand der obigen Gleichungen zeigt sich leicht, dass sowohl die Fundamentalmatrix  $\Phi_d(z)$  als auch die Übertragungsfunktionsmatrix  $\mathbf{G}_d(z)$  analog zu zeitkontinuierlichen Systemen berechnet wird. Deshalb behalten die Eigenwerte und -vektoren der Systemmatrix  $\mathbf{A}_d$  ihre Bedeutung für die Systemanalyse. Lediglich deren Interpretation muss durch den Zusammenhang der Laplace- und Z-Transformation angepasst werden.

$$z = e^{T \cdot s} \quad s = \sigma + j \cdot \omega \quad (1.31)$$

$$|z| = e^{T \cdot \sigma} \quad \phi = \omega \cdot T \quad (1.32)$$

Die Stabilitätsbedingung für kontinuierliche Systeme besteht darin, dass alle Eigenwerte  $\lambda_i$  links der imaginären Achse liegen. Aus (1.32) folgt, dass der Betrag der diskreten Eigenwerte im Einheitskreis liegen muss, damit diese Forderung als erfüllt gilt. Des Weiteren führen diskrete Eigenwerte, die nahe am Ursprung liegen, zu einer schnelleren Systemdynamik. Somit bringt Zustandsraumdarstellung für diskrete Systeme die gleichen Vorteile mit sich wie bei zeitkontinuierlichen Systemen. Allerdings handelt es sich bei der Regelstrecke nach wie vor um ein kontinuierliches System, lediglich der Regler stellt ein diskretes System dar. Die Schnittstelle zwischen der kontinuierlichen Strecke und dem diskreten Regler ist einerseits ein Abtastglied, welches den Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t)$  in die Zahlenfolge  $\mathbf{x}(k)$  überführt. Andererseits wird die Folge der Stellgröße  $\mathbf{u}(k)$  mit Hilfe eines Halteglieds nullter Ordnung als eine kontinuierliche Treppenfunktion moduliert.

Um den geschlossenen Regelkreis einheitlich zu beschreiben, muss deshalb die kontinuier-

liche Zustandsraumdarstellung der Regelstrecke in eine diskrete transformiert werden. Hierzu wird zunächst die Lösung eines kontinuierlichen Systems  $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  betrachtet.<sup>1</sup>

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{x}(t_0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (1.33)$$

Der Verlauf zwischen zwei Abtastzeitpunkten  $(k+1)T$  und  $kT$  lässt sich berechnen, indem  $t_0 = kT$  und  $t = (k+1)T$  gesetzt wird.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((k+1)T) &= e^{\mathbf{A}(k+1)T} \cdot \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}([k+1]T-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}(k+1)T} \cdot \mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}(kT-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.34)$$

Um das Integral zu lösen, muss der Verlauf von  $\mathbf{u}$  zwischen den Abtastpunkten bekannt sein. Das Halteglied nullter Ordnung führt die diskrete Zahlenfolge der Stellgröße  $\mathbf{u}(k)$  in eine kontinuierliche Treppenfunktion über. Daraus folgt, dass  $\mathbf{u}$  über den Verlauf einer Abtastperiode konstant ist.

$$\mathbf{u}(kT + t) = \mathbf{u}(kT) \quad | \quad 0 \leq t < T \quad (1.35)$$

Die Lösung des Integrals führt auf

$$\mathbf{x}([k+1]T) = e^{\mathbf{A}T} \cdot \mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}T} (\mathbf{I} - e^{-\mathbf{A}T}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(kT). \quad (1.36)$$

Diese Lösung stellt den Zusammenhang zwischen der kontinuierlichen und diskreten Zustandsraumdarstellung dar. Wobei der Vergleich mit (1.28) folgende Werte für die Matrizen des diskreten Systems  $\mathfrak{D}(\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d)$  liefert.

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T} \quad \mathbf{B}_d = (e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad \mathbf{C}_d = \mathbf{C} \quad (1.37)$$

Mit der Definition

$$\mathbf{S} = T \sum_{v=0}^{\infty} \mathbf{A}^v \frac{T^v}{(v+1)!} \quad (1.38)$$

kann die Definition vereinfacht und die Berechnung der inversen Matrix vermieden werden.

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{I} + \mathbf{S} \mathbf{A} \quad \mathbf{B}_d = \mathbf{S} \mathbf{B} \quad (1.39)$$

Die Matrix  $\mathbf{S}$  beschreibt einerseits den Einfluss des Halteglieds auf den Regelkreis, andererseits ermöglicht sie die Überführung in eine diskrete Darstellung, welche benötigt wird, um die Regelstrecke und den Regler in einer einheitlichen Form zu beschreiben.

---

<sup>1</sup>Die folgende Herleitung und Erklärung ist nach [?, S. 170 f.] paraphrasiert.

### 1.3 Entwurf von Zustandsreglern

Nachdem die Grundlagen der Zustandsraumdarstellung in den vorherigen Abschnitten diskutiert wurden, dient dieser Teil dem Entwurf des letztendlichen Reglers. Hierfür wird zunächst am Beispiel des Entwurfs durch Eigenwertvorgabe der Grundgedanke und die Vorteile der Zustandsregelung aufgezeigt. Anschließend wird ein Regler nach dem Prinzip der optimalen Regelung entworfen um den Würfel auf einer Kante zu stabilisieren. Diese Ergebnisse werden an der reellen Regelstrecke überprüft.

#### 1.3.1 Reglerentwurf durch Eigenwertvorgabe

Der Grundgedanke der Zustandsregelung besteht darin den vollständigen Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  zurückzuführen und durch die Multiplikation mit einer Reglermatrix  $\mathbf{K}$  den Stellgrößenvektor  $\mathbf{u}$  zu ermitteln. In dieser Arbeit werden lediglich Regelkreise ohne Führungsvektor ( $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ ) verwendet, weshalb auf dessen Einfluss und den Entwurf des nötigen Vorfilters  $\mathbf{V}$  nicht weiter eingegangen wird.

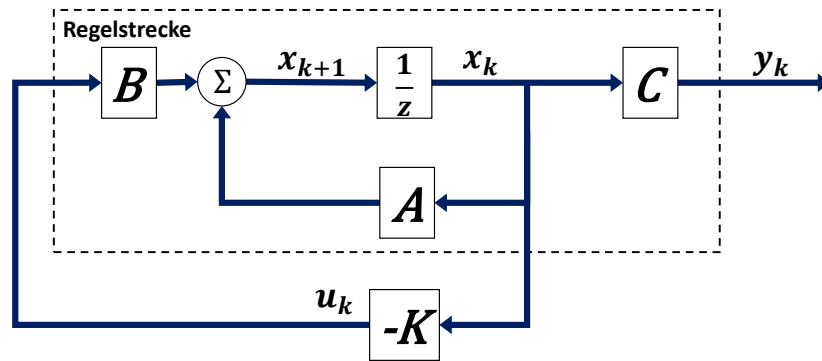


Abbildung 1.1: Signalfluss des geschlossenen Regelkreises

Aus der Abbildung gehen die Systemgleichungen des geschlossenen Regelkreises  $\overline{\mathfrak{D}}(\overline{\mathbf{A}}, \mathbf{0}, \overline{\mathbf{C}})$  hervor.

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{BK} \cdot \mathbf{x}(k) \quad (1.40)$$

$$\overline{\mathfrak{D}} : \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(k) - \mathbf{BK} \cdot \mathbf{x}(k) = \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{BK})}_{\equiv \overline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \underbrace{\mathbf{C}}_{\equiv \overline{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (1.41)$$

Die Reglermatrix  $\mathbf{K}$  ist nun so zu entwerfen, dass die gewünschten Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises erreicht werden. Hierfür wird zunächst das SISO-System  $\mathfrak{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$  betrachtet, dessen Systemmatrix  $\mathbf{A}$  und Eingangsvektor  $\mathbf{b}$  die folgende Form besitzt.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$



Diese Darstellung, welche mittels einer Zustandstransformation erreicht wird, heißt Regelungsnormalform. Diese Transformation wird hier nicht näher erläutert, da das Verfahren lediglich als Beispiel der Zustandsregelung dienen soll.<sup>2</sup> Der besondere Vorteil der Regelungsnormalform besteht darin, dass die Werte  $a_i$  die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda + a_0 \quad (1.43)$$

der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  sind. Wird der Regelkreis über den Reglervektor

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

geschlossen, ergibt sich die Systemmatrix  $\overline{\mathbf{A}}$  des geschlossenen Regelkreises

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\overline{a}_0 & -\overline{a}_1 & -\overline{a}_2 & \dots & -\overline{a}_{n-1} \end{bmatrix} \quad \left| \quad \overline{a}_i = a_i + k_{i+1} \right. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Die Systemmatrix  $\overline{\mathbf{A}}$  des geschlossenen Regelkreises liegt nun ebenfalls in Regelungsnormalform vor, weshalb wiederum für deren charakteristisches Polynom

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \overline{\lambda}_i) = \lambda^n + \overline{a}_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + \overline{a}_1 \cdot \lambda + \overline{a}_0 \quad (1.46)$$

gilt. Werden nun die Eigenwerte  $\overline{\lambda}_i$  des geschlossenen Regelkreises vorgegeben, können durch (1.46) die Koeffizienten  $\overline{a}_i$  berechnet werden. Die Koeffizienten  $a_i$  der Regelstrecke werden aus der Matrix  $\mathbf{A}$  abgelesen, sodass aus der Beziehung

$$\overline{a}_i = a_i + k_i \quad (1.47)$$

die einzelnen Reglerelemente  $k_i$  berechnet werden können. Diese führen in dem geschlossenen Regelkreis auf die vorgegebenen Eigenwerte  $\overline{\lambda}_i$ . Alternativ kann auch die folgende Vektorschreibweise verwendet werden.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \overline{a}_0 & \overline{a}_1 & \dots & \overline{a}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\equiv \overline{\mathbf{a}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{a}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{k}} \quad (1.48)$$

$$\mathbf{k} = \overline{\mathbf{a}} - \mathbf{a} \quad (1.49)$$

<sup>2</sup>Die Bestimmung der Transformationsmatrix und der Erweiterung des Entwurfsverfahren durch Eigenwertvorgabe kann in [?, S. 245] nachgelesen werden.

An diesem Entwurfsverfahren zeigen sich bereits einige interessante Eigenschaften der Zustandsregelung. Zunächst können die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises beliebig gewählt werden, wodurch das dynamische Verhalten maßgeblich bestimmt wird. Zudem wird der Regler durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation realisiert. Somit werden dem Regelkreis, im Gegensatz zu PID-Reglern, keine weiteren Pole durch die Reglerdynamik hinzugefügt. Zuletzt sei die einfache Berechnung der Reglermatrix erwähnt. Sowohl die Transformation auf Regulationsnormalform als auch die Ermittlung der Reglerparameter sind numerische Operationen, die mithilfe von Matlab durchgeführt werden können.

Dennoch wird das Entwurfsverfahren in dieser Arbeit nicht verwendet. Als Gründe hierfür lässt sich anführen, dass das primäre Ziel im Entwurf einer robusten Regelung zur Stabilisierung des Systems besteht und nicht darin, eine spezielle Dynamik des geschlossenen Regelkreises zu erzielen. Des Weiteren können bei diesem Verfahren die Verläufe der physikalischen Größen  $\varphi$ ,  $u_K$  und  $u_R$  nicht direkt beeinflusst werden. Durch die Vorgabe der Eigenwerte werden lediglich die Trajektorien der kanonischen Zustandsvariablen bestimmt, welche jeweils eine Linearkombination der ursprünglichen Zustände darstellen. Außerdem fließt die Stellgröße  $u$  bei dieser Vorgehensweise nicht in die Bestimmung der Reglermatrix ein. Ist die Stellgröße, wie in den hier behandelten Anwendungsfällen, begrenzt, müssen diese Umstände bei dem Reglerentwurf beachtet werden.

### 1.3.2 Linear quadratisch optimale Regelung

Im vorherigen Abschnitt wurden die Nachteile der Eigenwertvorgabe aufgezeigt, weshalb hier der Entwurf eines linear quadratisch optimalen Reglers vorgestellt und an der realen Regelstrecke appliziert wird. Der Grundgedanke der optimalen Regelung ist es ein Regelgesetz zu entwerfen, welches zu einem geschlossenen Regelkreis führt, der im Sinne eines Gütekriteriums optimal ist. Hier wird das linear quadratische Gütekriterium

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(k) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}(k)] \quad (1.50)$$

verwendet. Die Matrizen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$  dienen der Gewichtung des Zustands- bzw. Stellvektors und müssen positiv semidefinit bzw. definit sein. Durch die Gewichtungsmatrizen ist es möglich Forderung an den ursprünglichen Zustands- und Stellvektor direkt in den Reglerentwurf einfließen zu lassen. Der letztendliche Regler ergibt sich aus der Lösung des Optimierungsproblems, dass  $J$  minimal wird. Nach [?, S. 177] gilt für die Reglermatrix

$$\mathbf{K} = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}, \quad (1.51)$$

wobei  $\mathbf{P}$  durch die Lösung der Matrix-Ricatti-Gleichung

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T [\mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}] \mathbf{A} \quad (1.52)$$

bestimmt wird. Ähnlich wie bei dem Entwurf durch Eigenwertvorgabe besteht ein Vorteil der linear quadratisch optimalen Regelung darin, dass das Optimierungsproblem mittels des Matlab-Befehls `dlqr()` gelöst werden kann. Somit fällt der Rechenaufwand für die Ermittlung

der Reglermatrix bei der Bewertung des Entwurfverfahrens nicht weiter ins Gewicht. Deshalb werden hier lediglich die Bedeutung der Gewichtsmatrizen und die Eigenschaften des resultierenden Regelkreises diskutiert.

Hierfür müssen zunächst die Begriffe der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit erklärt werden. Bei einem vollständig steuerbaren System kann, durch eine passende Wahl des Stellvektors  $\mathbf{u}$ , der Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  in einen beliebigen Wert überführt werden. Zum Beispiel ist ein SISO-System in kanonischer Normalform mit einfachen Eigenwerten steuerbar, wenn alle Elemente  $b_i$  des Eingangsvektors  $\tilde{\mathbf{b}}$  ungleich null sind. Ist eines der Elemente  $b_i$  gleich null, kann der zugehörige Zustand  $\tilde{x}_i$  nicht durch die Eingangsgröße beeinflusst werden und ist somit nicht steuerbar. Folglich lässt sich dieser Eigenwert auch nicht durch einen Regler beeinflussen. Die Definition der Steuerbarkeit lautet:

„Ein System  $\Sigma$  heißt vollständig steuerbar, wenn es in endlicher Zeit  $t_e$  von jedem beliebigen Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  durch eine geeignet gewählte Eingangsgröße  $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$  in einen beliebig vorgegebenen Endzustand  $\mathbf{x}(t_e)$  überführt werden kann.“

[?, S. 64]

Umgekehrt beschreibt die Beobachtbarkeit die Möglichkeit den Zustandsvektor eines Systems aus dem Verlauf des Eingangs- und Ausgangsvektors zu rekonstruieren.

„Ein System  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  heißt vollständig beobachtbar, wenn der Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  aus dem über einem endlichen Intervall  $[0, t_e]$  bekannten Verlauf der Eingangsgröße  $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$  und der Ausgangsgröße  $\mathbf{y}_{[0,t_e]}$  bestimmt werden kann.“ [?, S. 92]

Um sowohl die Steuer- als auch Beobachtbarkeit eines Systems zu prüfen, können die Kalmankriterien angewandt werden [LunzeRT2, S.93ff]. Für den Entwurf eines Zustandsreglers muss ein System mindestens stabilisierbar sein. Dies bedeutet, dass alle instabilen Eingevorgänge des Systems sowohl steuer- als auch beobachtbar sind. Für diesen Fall lässt sich zeigen [Lunze RT2, S.301], dass der Entwurf nach dem linear quadratischen Gütekriterium zu einem asymptotisch stabilen Regelkreis führt. Hieraus folgt, dass alle Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises im Einheitskreis liegen. Ebenso lässt sich durch

$$|z| = e^{\sigma_i} \quad | \quad s_i = \sigma_i + \omega_i \cdot j \quad (1.53)$$

der Abstand der Eigenwerte zum Ursprung der komplexen Ebene interpretieren. Je näher ein Eigenwert am Ursprung liegt, desto schneller wird die zugehörige Eigenbewegung. Im geschlossenen Regelkreis wird eine schnelle Systemdynamik durch hohe Stellgrößen verursacht, welche durch die Reglermatrix  $\mathbf{K}$  bestimmt werden. Daraus folgt, dass die Erhöhung der Reglerfaktoren  $k_{ij}$  die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises näher an den Ursprung rückt. Umgekehrt kann die Bedeutung der Gewichtungsmatrix  $\mathbf{R}$  interpretiert werden. Je größer die Elemente von  $\mathbf{R}$  werden, desto stärker fließt der Verlauf des Stellvektors in das Gütekriterium ein. Da dieses minimiert werden soll, resultieren kleinere Elemente der Reglermatrix und somit eine langsamere Systemdynamik. Die Matrix  $\mathbf{Q}$  wirkt entgegengesetzt. Da das Gütekriterium den zeitlichen Verlauf des Zustandsvektors erfasst, führt eine Erhöhung der Matrix  $\mathbf{Q}$  auf eine schnellere Eigenbewegung, welche durch erhöhte Reglerelemente erreicht

wird. Hier zeigt sich ein Vorteil der linear quadratisch optimalen Regelung. Bei dem Entwurf durch Eigenwertvorgabe lässt sich der Verlauf einer Zustandsgröße nur indirekt durch die Definition der Eigenbewegung beeinflussen. Im Gegensatz dazu erfolgt durch die Diagonalelemente der Matrix  $\mathbf{Q}$  eine direkte Gewichtung der Zustandsgrößen.<sup>3</sup> Da das Zeitverhalten des geschlossenen Regelkreises in dem hier behandelten Anwendungsfall eine untergeordnete Rolle spielt, wird nun die Empfindlichkeit gegenüber Störungen betrachtet. Aus dem Reglergesetz

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} \quad (1.54)$$

geht hervor, dass sich ein beliebiges Messrauschen proportional zur Reglermatrix in der Stellgröße widerspiegelt. Folglich beeinflusst das Entwurfsverfahren nicht direkt die Störempfindlichkeit des Regelkreises. Vielmehr wird diese durch die Lage der Eigenwerte bestimmt. Je näher diese an dem Einheitskreis liegen, desto robuster wird das System gegenüber Messrauschen. Ein weiterer Vorteil der linear quadratisch optimalen Regelung besteht in der Robustheit gegenüber Parameteränderungen. Diese Eigenschaft beschreibt wie groß die Abweichungen einzelner Parameter sein können, um nach wie vor einen stabilen Regelkreis zu erhalten. In [?, S. 303 ff.] werden diese Eigenschaften mit Hilfe des Phasen- und Amplitudenrandes erläutert.

---

<sup>3</sup>Allerdings sei angemerkt, dass sich durch die Gewichtungsmatrix  $\mathbf{Q}$  keine Entkopplung der Zustandsgrößen erzwingen lässt. Für die Entkopplung der Zustandsgrößen müssen nicht nur die Eigenwerte sondern auch die Eigenvektoren durch den Regler beeinflusst werden. Dies ist nur möglich wenn die Reglermatrix mehr Elemente als zu regelnde Zustandsgrößen besitzt [?, S. 254 ff.]. Außerdem lassen sich solche System in der Realität oftmals nicht realisieren. Wären beispielsweise alle Eigenwerte und -vektoren des Würfels frei wählbar, könnten die Größen  $\varphi$  und  $\dot{\varphi}$  voneinander entkoppelt werden.

## 1.4 Erprobung des Reglers an der Regelstrecke

Damit der Würfel auf einer Kante balancieren kann, wird ein LQ-Regler entworfen, wobei die Gewichtsmatrizen

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \varphi_{\max}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & u_{K,\max}^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & u_{R,\max}^{-2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = [T_{M,\max}^{-2}] \quad (1.55)$$

verwendet werden. Daraus resultiert das Gütekriterium

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\varphi(k)^2}{\varphi_{\max}^2} + \frac{u_K(k)^2}{u_{K,\max}^2} + \frac{u_R(k)^2}{u_{R,\max}^2} + \frac{T_M(k)^2}{T_{M,\max}^2} \right). \quad (1.56)$$

Somit werden der Zustandsvektor und die Stellgröße quadratisch über ihren maximalen Wert minimiert. Der daraus resultierende Regelkreis besitzt die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0,7895 \quad \lambda_{2,3} = 0,8830 \pm 0,0087j, \quad (1.57)$$

weshalb er asymptotisch stabil ist. Im nächsten Schritt wird der Regler an der realen Regelstrecke validiert. Die folgende Abbildung zeigt den Verlauf der Zustands- und Stellgröße, wobei das System bei dem Zeitpunkt  $t \approx 1,7$  durch eine äußere Störung erregt wurde.

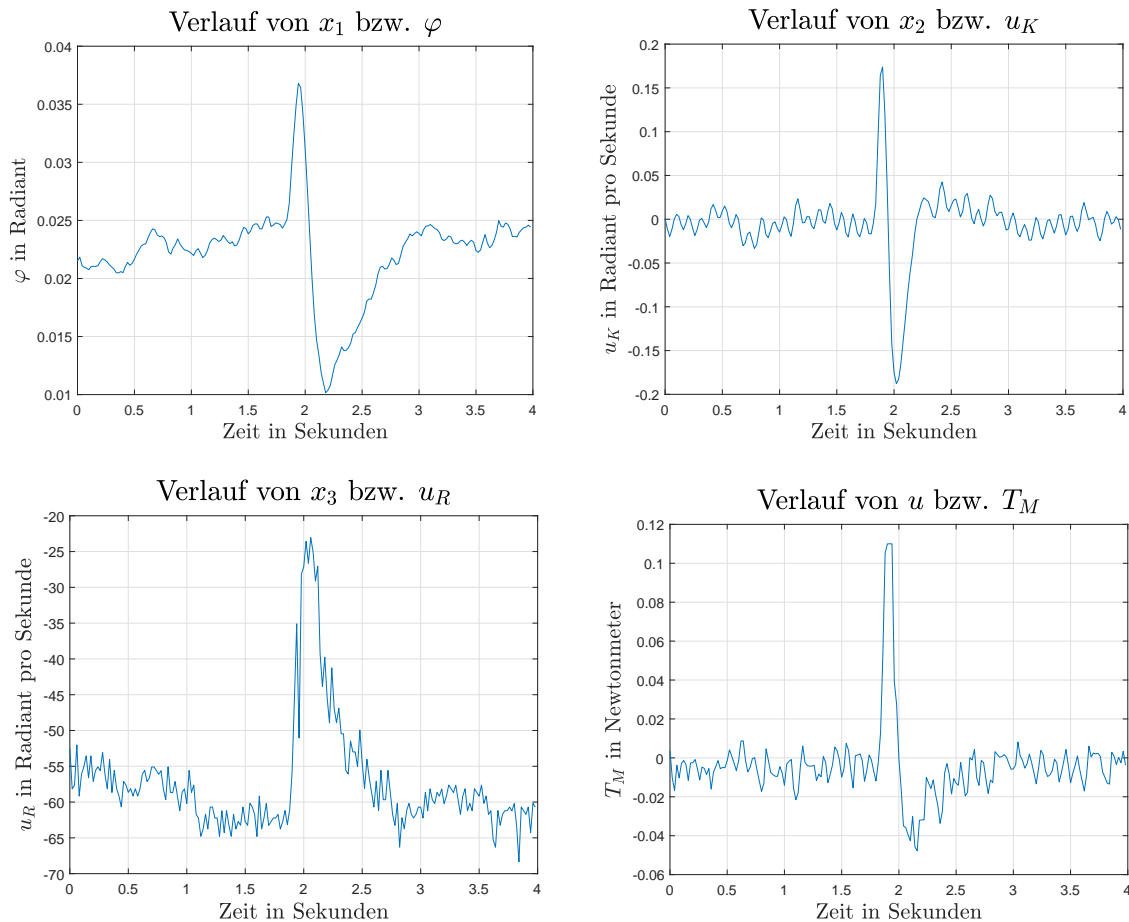


Abbildung 1.2: Verlauf der Zustands- und Stellgrößen bei dem Versuch an der Regelstrecke

Die Abbildungen zeigen, dass der Regler das System nicht in die Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  überführt, sondern die Schwungmasse mit konstanter Geschwindigkeit rotieren lässt. Dieser Umstand ist darauf zurückzuführen, dass die Erfassung des Zustandsvektors von einem systematischen Messfehler betroffen ist. Im Modell wird diese Gegebenheit durch die Einführung der Zustandsgrößen

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{\varphi} \\ \hat{u}_K \\ \hat{u}_R \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

erfasst, welche die jeweiligen Messabweichungen darstellen. Der Ausgangsvektor  $\mathbf{y}$  stellt die Messwerte dar und wird durch die Summe des ursprünglichen Zustandvektors  $\mathbf{x}$  und der Messabweichungen  $\hat{\mathbf{x}}$  berechnet. Aus diesen Überlegungen folgt für den offenen Regelkreis das System

$$\mathfrak{D}_o : \begin{cases} \mathbf{x}_o(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}^{3 \times 3} \\ \mathbf{0}^{3 \times 3} & \mathbf{I}^{3 \times 3} \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{A}_o} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{x}_o}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^3 \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{b}_o} \cdot u(k) \\ \mathbf{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}^{3 \times 3} & \mathbf{I}^{3 \times 3} \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{C}_o} \cdot \mathbf{x}_o(k) \end{cases} \quad (1.59)$$

Das Reglergesetz ergibt sich nun aus dem Produkt des Reglervektors  $\mathbf{k}^T$  und des Ausgangsvektors  $\mathbf{y}$

$$u = \mathbf{k}^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{k}^T \cdot (\mathbf{x} + \hat{\mathbf{x}}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{k}^T & \mathbf{k}^T \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbf{k}_o^T} \cdot \mathbf{x}_o. \quad (1.60)$$

Hiermit kann der Regelkreis geschlossen werden und es resultiert das System

$$\bar{\mathfrak{D}}_o = \begin{cases} \mathbf{x}_o(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}_o \mathbf{k}_o^T & -\mathbf{b}_o \mathbf{k}_o^T \\ \mathbf{0}^{3 \times 3} & \mathbf{I}^{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_o(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_o \cdot \mathbf{x}_o(k) \end{cases} \quad (1.61)$$

Für den geschlossenen Regelkreis ergeben sich die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0,7895 \quad \lambda_{2,3} = 0,8830 \pm 0,0087j \quad \lambda_{4,5,6} = 1. \quad (1.62)$$

Diese zeigen, dass die ursprünglichen Eigenwerte erhalten bleiben und somit die Eigenbewegung nach wie vor stabilisiert wird. Die zusätzlichen Eigenwerte  $\lambda_{4,5,6} = 1$  sind den Messabweichungen zuzuordnen, welche als konstant modelliert wurden. Hieraus lässt sich folgern, dass der geschlossene Regelkreis als lineares System für beliebige Messabweichungen stabil ist, insofern diese nicht durch einen instabilen Vorgang verursacht werden. Um den Einfluss der Messabweichungen auf die Trajektorie  $\mathbf{x}$  zu ermitteln wird das System  $\bar{\mathfrak{D}}_o$  in die kanonische Normalform transformiert.

$$\tilde{\bar{\mathbf{A}}}_o = \mathbf{V}_o^{-1} \bar{\mathbf{A}}_o \mathbf{V}_o = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_o = \mathbf{V}_o \cdot \tilde{\mathbf{x}}_o \quad (1.63)$$

Interessant ist hierbei die Form der Transformationsmatrix

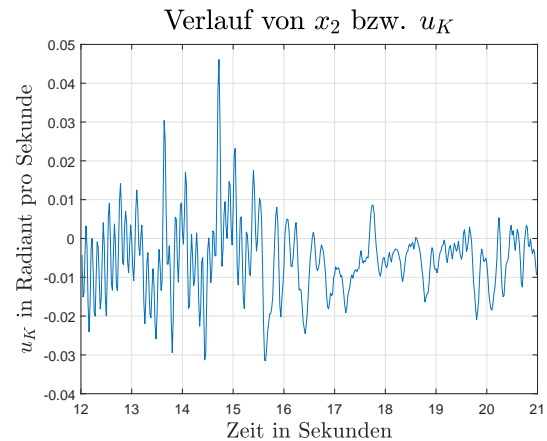
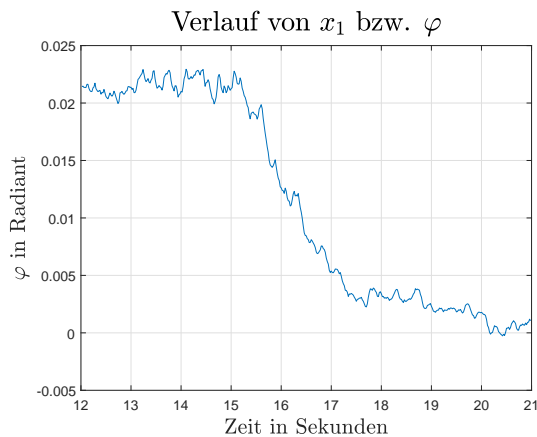
$$\mathbf{V}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{V} & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \mathbf{0}^{3 \times 3} & \mathbf{I}^{3 \times 3} \end{bmatrix}. \quad (1.64)$$

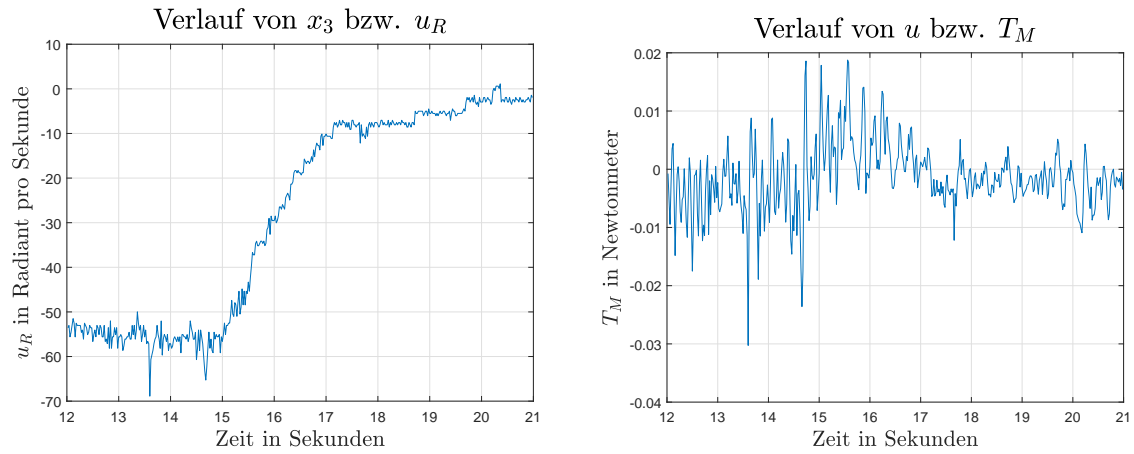
Zunächst geht aus den unteren drei Zeilen hervor, dass es sich bei den Messabweichungen  $\hat{\mathbf{x}}$  um kanonische Zustandsvariablen handelt. Des Weiteren bleiben die Eigenvektoren  $\mathbf{V}$  des ursprünglichen Systems  $\bar{\mathfrak{D}}$  und somit auch dessen Eigenbewegung erhalten. Die Messabweichungen wirken lediglich über die Faktoren  $\gamma_i$  auf die Geschwindigkeit  $u_R$  der Schwungmasse ein. Unter der Annahme, dass die Messabweichungen konstant sind, führen diese zu einer verbleibenden Bewegung der Schwungmasse. Aus diesem Grund muss die vorherige Stabilitätsaussage auf das Gebiet der Zustands- und Stellgrößen begrenzt werden, für welche die Stellgröße nicht begrenzt ist. Beispielsweise kann das System nicht mehr stabilisiert werden, wenn durch einen Messfehler die maximale Drehzahl des Motors überschritten wird.

Da der Winkel  $\varphi$  nach wie vor asymptotisch stabil ist, entspricht der Endwert der gemessenen Größe  $\mathbf{y}(1)$  der Messabweichung.

$$\mathbf{y}(1) = \varphi + \hat{\varphi} \quad \rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}(1) = \hat{\varphi} \quad (1.65)$$

Deshalb wird zunächst die Messabweichung  $\hat{\varphi}$  bestimmt und in einem anschließenden Versuch korrigiert. Nach dem Modell ist zu erwarten, dass die Schwungmasse beinahe zum Stillstand kommt, da lediglich die Messabweichung  $\varphi$  korrigiert wird, welche allerdings den größten Einfluss auf den Endwert des Systems hat.



Abbildung 1.2: Verlauf von  $u_R$  und  $T_M$  bei korrigierten Messabweichungen

Die Abbildung (1.2) zeigt den Verlauf des Systems, wobei zu dem Zeitpunkt  $t = 15$  die Messabweichung korrigiert wurde. Daraufhin nimmt die Geschwindigkeit  $u_R$  der Schwungmasse wie erwartet ab.