

# 1 Modellbildung Würfelseite

Die Untersuchung des Systems beginnt mit der Bestimmung eines mathematischen Modells, welches in diesem Abschnitt näher erläutert wird. Die Herleitung der Systemdynamik erfolgt mit Hilfe der Methoden nach Kane. Zunächst beschränkt sich die mechanische Untersuchung auf einen vereinfachten Prototypen, welcher aus einer Würfelseite besteht, die auf einer Achse gelagert ist. An der Würfelseite ist ein Motor befestigt, auf dessen Schaft wiederum eine Schwungmasse gelagert ist.

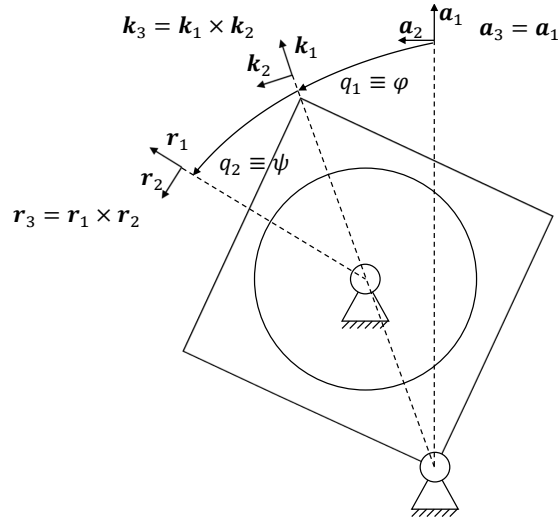


Abbildung 1: Mechanischer Aufbau der Würfelseite, Quelle: eigene Darstellung

Zu Beginn werden der Untersuchung werden die Bezugssysteme festgelegt, welche durch drei, paarweise orthogonale, Einheitsvektoren definiert sind. Die Vektorbasis eines Bezugssystems dient als eine Art Einheit um vektorielle Größen, wie z.B. Position oder Geschwindigkeit, darzustellen. Das untersuchte System verfügt über das raumfeste Bezugssystem  $A$ , welches durch die drei Einheitsvektoren  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  und  $\mathbf{a}_3$  definiert wird. An der Würfelseite ist ein weiteres Bezugssystem  $K$  fixiert, dessen Vektorbasis aus  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  und  $\mathbf{k}_3$  besteht. Zuletzt ist das, aus den Einheitsvektoren  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  und  $\mathbf{r}_3$  bestehende, Bezugssystem  $R$  zu nennen, welches auf der Schwungmasse fixiert ist.

Das holonome System verfügt über zwei rotatorische Freiheitsgrade, welche mit Hilfe der generalisierten Koordinaten  $q_1 = \varphi$  und  $q_2 = \psi$  beschrieben werden. Der Winkel  $\varphi$  beschreibt die Rotation der Würfelseite um den Punkt  $O$ . Die Rotation der Schwungmasse  $R$  relativ zu der Würfelseite wird von dem Winkel  $\psi$  beschrieben. Mit Hilfe der generalisierten Koordinaten ist es möglich einen Vektor, welcher in einem Bezugssystem dargestellt ist, in ein zweites Bezugssystem zu projizieren. Als Beispiel soll die Position des Schwerpunktes von  $K$  dienen, welche von dem Vektor  $\mathbf{c}_K$  beschrieben wird. Mit Hilfe des Skalarproduktes ei-

nes Vektors mit einem Einheitsvektors, kann der Betrag des Vektors in Richtung des Einheitsvektors ermittelt werden. Folglich können somit die Komponenten eines Vektors in einem beliebigen Bezugssystem dargestellt werden.

$$\mathbf{c}_K = \begin{pmatrix} {}^K l_{AC} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^A (\mathbf{c}_K \cdot \mathbf{a}_1) \\ {}^A (\mathbf{c}_K \cdot \mathbf{a}_2) \\ {}^A (\mathbf{c}_K \cdot \mathbf{a}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{k}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{k}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{k}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{k}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{k}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{k}_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{c}_K = {}^K \mathbf{P}^A \cdot \mathbf{c}_K \quad (1)$$

Die Projektion kann somit in Form einer Matrix  ${}^K \mathbf{P}^A$  dargestellt werden, welche aus den Skalarprodukten der Einheitsvektoren besteht. Die umgekehrte Projektion kann mit Hilfe der Matrix  ${}^A \mathbf{P}^K$  durchgeführt werden, welche die Transponierte von  ${}^A \mathbf{P}^K$  ist. Die Projektionsmatrizen des ursprünglichen Systems sind die folgenden.

$${}^A \mathbf{P}^K = \begin{pmatrix} c_\varphi & s_\varphi & 0 \\ -s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^K \mathbf{P}^R = \begin{pmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Somit kann nun auch der Schwerpunkt der Würfelseite in dem raumfesten Bezugssystem  $A$  dargestellt werden.

$$\mathbf{C}_K = \begin{pmatrix} {}^K l_{AC} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^A \left( {}^K \mathbf{P}^A \cdot \begin{pmatrix} {}^K l_{AC} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ {}^A \left( c_\varphi \cdot l_{AC} \right) \\ {}^A \left( s_\varphi \cdot l_{AC} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

An diesem Beispiel ist bereits zu erkennen, von welcher Bedeutung Bezugssysteme bei der Darstellung von Vektoren sind. Die Position des Schwerpunktes ist aus Sicht der Würfelseite konstant, jedoch ist seine Position im raumfesten Bezugssystem  $A$  von dem Winkel  $\varphi$  abhängig. Im Kehrschluss ist die Darstellung eines Vektors nur unter Angabe eines Bezugssystem sinnvoll.

Nachdem die Position bzw. Orientierung der Körper mit Hilfe der generalisierten Koordinaten bestimmt wurde besteht der nächste Schritt darin, die Geschwindigkeiten der beiden Körper zu bestimmen. Die Geschwindigkeit eines Körpers ist abhängig von dem Bezugssystem in welchem er sich bewegt. Folglich muss das Bezugssystem in wessen Relation sich ein Körper bewegt, bei der Darstellung der Geschwindigkeit berücksichtigt werden. Als Beispiel dient die Geschwindigkeit der Schwungmasse relativ zu der Würfelseite  ${}^K \boldsymbol{\omega}^R$ , die Geschwindigkeit der Schwungmasse im raumfesten Bezugssystem  ${}^A \boldsymbol{\omega}^R$  und die Geschwindigkeit der Würfelseite in  $A$ ,  ${}^A \boldsymbol{\omega}^K$ .

$${}^K \boldsymbol{\omega}^R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad {}^A \boldsymbol{\omega}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad {}^A \boldsymbol{\omega}^R = {}^K \boldsymbol{\omega}^R + {}^A \boldsymbol{\omega}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Es sei vermerkt, dass eine Geschwindigkeit in einem beliebigen Bezugssystem dargestellt werden kann, es handelt sich allerdings nach wie vor um die

Geschwindigkeit des Körpers in dem ursprünglichen Bezugssystem, lediglich die Darstellung wurde verändert.

Um die Darstellung der Geschwindigkeiten zu vereinfachen, werden die generalisierten Geschwindigkeiten  $u_1 \equiv \dot{\varphi}$  und  $u_2 \equiv \dot{\psi}$  definiert. Somit ist es möglich die Geschwindigkeiten der Schwungmasse  ${}^A\boldsymbol{\omega}^R$  und der Würfelseite  ${}^A\boldsymbol{\omega}^K$  als Summe der generalisierten Geschwindigkeiten  $u_i$  und der partiellen Geschwindigkeiten  ${}^A\boldsymbol{\omega}_i^R$  und  ${}^A\boldsymbol{\omega}_i^K$ .

$${}^A\boldsymbol{\omega}^K = \dot{\varphi} \cdot \mathbf{a}_3 + \dot{\psi} \cdot \mathbf{0} \rightarrow {}^A\boldsymbol{\omega}_1^K = \mathbf{a}_3 \quad {}^A\boldsymbol{\omega}_2^K = \mathbf{0} \quad (5)$$

$${}^A\boldsymbol{\omega}^R = \dot{\varphi} \cdot \mathbf{a}_3 + \dot{\psi} \cdot \mathbf{a}_3 \rightarrow {}^A\boldsymbol{\omega}_1^R = \mathbf{a}_3 \quad {}^A\boldsymbol{\omega}_2^R = \mathbf{a}_3 \quad (6)$$

Bei den generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{\varphi}$  und  $\dot{\psi}$  handelt es sich um Skalare. Sie beschreiben die komponentenweise Zusammensetzung der Geschwindigkeiten der beiden Körper. Die partiellen Geschwindigkeiten hingegen sind Vektoren, welche die Orientierung der generalisierten Geschwindigkeiten wiedergeben und somit deren Beitrag zu der Bewegung in Richtung der Freiheitsgrade darstellen.

Der nächste Schritt besteht darin, die Drehmomente zu untersuchen, welche auf die Würfelseite und die Schwungmasse wirken. Mit Hilfe der wirkenden Kräfte können letzten Endes die Bewegungsgleichungen ermittelt werden.

Die Bewegung der Schwungmasse wird einerseits durch das Motormoment  $\mathbf{T}_M^{R/M}$  beeinflusst, andererseits wird sie von der Reibung in  $M$  durch das Drehmoment  $\mathbf{T}_R^{R/M}$  verzögert. Das Reibmoment wird als proportional zur Geschwindigkeit  $\dot{\psi}$  modelliert. Somit ergibt sich das resultierende Drehmoment  $\mathbf{T}_R$ .

$$\mathbf{T}^{R/M} = \mathbf{T}_M^{R/M} + \mathbf{T}_R^{R/M} = (T_M + C_\psi \cdot \dot{\psi}) \cdot \mathbf{a}_3 \quad (7)$$

Das Motormoment  $\mathbf{T}_M$  und das Reibmoment  $\mathbf{T}_R$  wirken in umgekehrter Richtung auf die Würfelseite. Zusätzlich wird diese von dem Gravitationsmoment  $\mathbf{T}_G^{K/O}$  und dem Reibmoment der Würfelseite  $\mathbf{T}_R^{K/O}$ . Aus der Summe dieser Komponenten ergibt sich das resultierende Drehmoment  $\mathbf{T}^{K/O}$ .

$$\mathbf{T}^{K/O} = \mathbf{T}_G^{K/O} - \mathbf{T}_R^{K/O} - \mathbf{T}_M^{R/M} + \mathbf{T}_R^{R/M} = (m_G \cdot g \cdot l_{AC} \cdot s_\varphi - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} - T_M + C_\psi \cdot \dot{\psi}) \cdot \mathbf{a}_3 \quad (8)$$

Über das Skalarprodukt der resultierenden Drehmomente und der partiellen Geschwindigkeiten können die generalisierten aktiven Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  berechnet werden. Diese stellen den Einfluss der wirkenden Kräfte und Momente auf die generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{\varphi}$  und  $\dot{\psi}$  dar.

$$F_1 = {}^A\boldsymbol{\omega}_1^K \cdot \mathbf{T}^{K/O} + {}^A\boldsymbol{\omega}_1^R \cdot \mathbf{T}^{R/M} = m_G \cdot g \cdot l_{AC} \cdot s_\varphi - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} \quad (9)$$

$$F_2 = {}^A\boldsymbol{\omega}_2^K \cdot \mathbf{T}^{K/O} + {}^A\boldsymbol{\omega}_2^R \cdot \mathbf{T}^{R/M} = T_M - C_\psi \cdot \dot{\psi} \quad (10)$$

Die letztendlichen Bewegungsgleichungen werden über das Gleichgewicht der generalisierten, aktiven Kräfte und der generalisierten Trägheitskräfte gewonnen. Folglich muss zuletzt das Trägheitsmoment der Schwungmasse  $\mathbf{T}_R^*$  und

der Würfelseite  $\mathbf{T}_K^*$  bestimmt werden. Ersteres ergibt sich aus dem Massenträgheitsmoment  $I^{R/M}$  der Schwungmasse um den Punkt  $M$  und seiner Winkelbeschleunigung in  $A$ .

$$\mathbf{T}_R^* = -I^{R/M} \cdot {}^A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} + \ddot{\psi} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Das Trägheitsmoment der Würfelseite hängt von ihrer Winkelbeschleunigung in  $A$ , ihrem Massenträgheitsmoment  $I^{K/O}$  um  $O$  und der Position bzw. dem Gewicht der Schwungmasse ab.

$$\mathbf{T}_K^* = -(I^{K/O} + m_R \cdot l_{AB}^2) \cdot {}^A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Die generalisierten Trägheitskräfte  $F_1^*$  und  $F_2^*$  ergeben sich wiederum durch die Skalarmultiplikation mit den partiellen Geschwindigkeiten. Das heißt die Trägheitsmomente der beiden Körper werden in die Bewegungsrichtung der generalisierten Geschwindigkeiten, also der Freiheitsgrade, projiziert.

$$F_1^* = {}^A \boldsymbol{\omega}_1^K \cdot \mathbf{T}_K^* + {}^A \boldsymbol{\omega}_1^R \cdot \mathbf{T}_R^* = -(I^{K/O} + I^{R/M} + m_R \cdot l_{AB}^2) \cdot \ddot{\varphi} - I^{R/M} \cdot \ddot{\psi} \quad (13)$$

$$F_2^* = {}^A \boldsymbol{\omega}_2^K \cdot \mathbf{T}_K^* + {}^A \boldsymbol{\omega}_2^R \cdot \mathbf{T}_R^* = -I^{R/M} \cdot (\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}) \quad (14)$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich nun aus der Summe der generalisierten aktiven Kräfte  $F_i$  und der generalisierten Trägheitskräfte  $F_i^*$ . Die Aussage dieser Gleichungen besteht darin, dass die Projektion, der wirkenden Kräfte in Richtung der partiellen Geschwindigkeiten, gleich der Projektion der Impulsänderung in Richtung der partiellen Geschwindigkeiten ist.

$$F_1 + F_1^* = 0 \rightarrow (I^{K/O} + I^{R/M} + m_R \cdot l_{AB}^2) \cdot \ddot{\varphi} = m_G \cdot g \cdot l_{AC} \cdot s_\varphi - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} - I^{R/M} \cdot \ddot{\psi} \quad (15)$$

$$F_2 + F_2^* = 0 \rightarrow I^{R/M} \cdot \ddot{\psi} = T_M - C_\psi \cdot \dot{\psi} - I^{R/M} \cdot \ddot{\varphi} \quad (16)$$

## 2 Sensorik

Eine zentrale Aufgabe besteht darin die Zustandsgrößen zu messen, um den geschlossenen Regelkreis berechnen zu können. Deshalb beschäftigt sich der folgende Abschnitt mit der verwendeten Sensorik und derer Auswertung. Hierfür müssen die Sensoren zuerst in das Modell eingebunden werden um Messkennlinien zu bestimmen. Daraufhin werden die Empfindlichkeiten untersucht und Rückschlüsse auf den Aufbau gezogen. Zusätzlich muss die Diskretisierung durch die Sensoren untersucht werden um ungewollte Abtasteffekte zu vermeiden. Zuletzt werden die Störeinflüsse analysiert und Ansätze präsentiert um diese zu verringern.

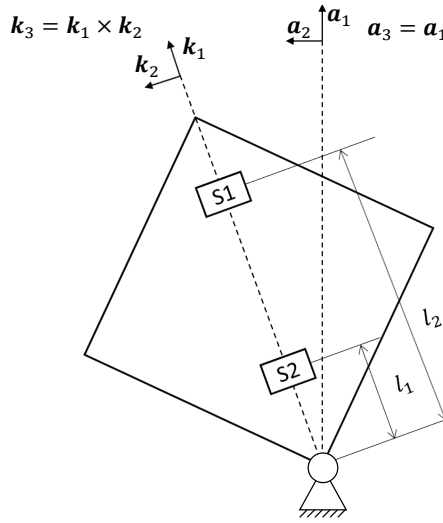


Abbildung 2: Anordnung der Sensoren an der Würfelseite, Quelle: eigene Darstellung

An der Würfelseite sind zwei MPU6050-ICs angebracht, um die Größen  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  und  $\ddot{\varphi}$  zu messen. Die ICs verfügen über einen Beschleunigungs- und Drehratensensor, welche jeweils Messwerte in Richtung von drei Achsen liefern. Zuerst müssen Messkennlinien ermittelt werden. Das heißt die Messwerte der Sensoren werden mit Hilfe des mechanischen Modells in Zusammenhang mit den Messgrößen  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  und  $\ddot{\varphi}$  gebracht.

Die Messwerte der Drehratensensoren entsprechen der Winkelgeschwindigkeit der Würfelseite im körperfesten Bezugssystem  $K$ .

$$\omega_{S_i} = \begin{pmatrix} \omega_{x_{S_i}}^{S_i} \\ \omega_{y_{S_i}}^{S_i} \\ \omega_{z_{S_i}}^{S_i} \end{pmatrix} = {}^K ({}^A \omega^K) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Somit sind nur die Komponenten in Richtung der Z-Achse von Bedeutung. Diese werden als Messwerte  $y_i$  definiert.

$$y_i \equiv \omega_z^{S_i} \quad y_i = \dot{\varphi} \quad (i = 1, 2) \quad (18)$$

Die Ausgabewerte  $\mathbf{a}_{S_i}$  der Beschleunigungssensoren setzt sich, nach dem idealisierten Modell, aus zwei Termen zusammen. Der erste Term entspricht der Beschleunigung der Sensoren im raumfesten Bezugssystem  $A$ , welche gleich der zweiten Ableitung des Ortsvektors  $\mathbf{s}_i$  der Sensoren mit Respekt zu  $A$  ist.

$$\begin{aligned} {}^A\mathbf{a}_{S_i} &= \frac{{}^Ad({}^A\mathbf{v}^{S_i})}{dt} = \frac{{}^Ad({}^A\boldsymbol{\omega}^K \times \mathbf{s}_i)}{dt} = \frac{{}^Ad({}^A\boldsymbol{\omega}^K)}{dt} \times \mathbf{s}_i + {}^K\boldsymbol{\omega}^{S_i} \times \frac{{}^Ad\mathbf{s}_i}{dt} \\ &= {}^K\boldsymbol{\alpha}^{S_i} \times \mathbf{s}_i + {}^A\boldsymbol{\omega}^K \times ({}^A\boldsymbol{\omega}^K \times \mathbf{s}_i) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}^2 \cdot l_i \\ \ddot{\varphi} \cdot l_i \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

Der zweite Term wird von der Gravitation beeinflusst. Das heißt er entspricht der Darstellung des Erdbeschleunigungsvektors im körperfesten Bezugssystem  $K$ .

$$\mathbf{g} = {}^A\mathbf{P}^K \cdot \begin{pmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g \cdot c_\varphi \\ g \cdot s_\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Somit ergeben sich die folgenden Zusammenhänge für die Anzeigewerte  $\mathbf{a}_{S_i}$  der Beschleunigungssensoren, welche wiederum als Messwerte  $y_3, \dots, y_6$  definiert werden.

$$\mathbf{a}_{S_i} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_{S_i} \\ \ddot{y}_{S_i} \\ \ddot{z}_{S_i} \end{pmatrix} = {}^K({}^A\mathbf{a}_{S_i} + \mathbf{g}) = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}^2 \cdot l_i - g \cdot c_\varphi \\ \ddot{\varphi} \cdot l_i + g \cdot s_\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} y_3 &\equiv a_x^{S_1} & y_3 &= -\dot{\varphi}^2 \cdot l_1 - g \cdot c_\varphi \\ y_4 &\equiv a_x^{S_2} & y_4 &= -\dot{\varphi}^2 \cdot l_2 - g \cdot c_\varphi \\ y_5 &\equiv a_y^{S_1} & y_5 &= \ddot{\varphi} \cdot l_1 + g \cdot s_\varphi \\ y_6 &\equiv a_y^{S_2} & y_6 &= \ddot{\varphi} \cdot l_2 + g \cdot s_\varphi \end{aligned} \quad (22)$$

Die Messwerte der Beschleunigungssensoren hängen jeweils von zwei Messgrößen ab. Deshalb ist es nicht möglich aus einem einzelnen Messwert einen Rückschluss auf die Messgrößen zu ziehen. Allerdings ist der Einfluss des Winkels  $\varphi$  unabhängig von dem Abstand  $l_i$  des Sensors zum Drehpunkt. Folglich kann dieser Anteil durch die Differenz von zwei Messwerten eliminiert werden.

$$\begin{aligned} y_7 &\equiv y_3 - y_4 & y_7 &= -\dot{\varphi}^2 \cdot (l_1 - l_2) \\ y_8 &\equiv y_5 - y_6 & y_8 &= \ddot{\varphi} \cdot (l_1 - l_2) \end{aligned} \quad (23)$$

Analog können die Messwerte  $y_9$  und  $y_{10}$  definiert werden um die Messgröße  $\varphi$  zu ermitteln. In diesem Fall wird der Subtrahend mit dem Verhältnis der Sensorabstände zum Drehpunkt gewichtet.

$$\begin{aligned} y_9 &\equiv y_3 - \frac{l_1}{l_2} y_4 & y_9 &= -g \cdot c_\varphi \cdot \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \\ y_{10} &\equiv y_5 - \frac{l_1}{l_2} y_6 & y_{10} &= g \cdot s_\varphi \cdot \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \\ y_{11} &\equiv \frac{y_{10}}{y_9} & y_{11} &= -\tan(\varphi) \end{aligned} \quad (24)$$

Die verschiedenen Kennlinien zeigen, dass mehrere Möglichkeiten bestehen um die Messgrößen  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  und  $\ddot{\varphi}$  mit den Messwerten in Verbindung zu bringen. Folglich müssen nun Kriterien erarbeitet werden um die Messsysteme beurteilen zu können. Zuerst ist hier die Empfindlichkeit  $S$  zu nennen, welche wiedergibt wie stark sich eine Änderung der Messgröße auf den zugehörigen Messwert auswirkt. Die Berechnung der Empfindlichkeit erfolgt über die partielle Ableitung der Kennlinie nach der Messgröße. Somit ergeben sich für die Messwerte, welche von dem Winkel  $\varphi$  abhängen, die folgenden Empfindlichkeiten.

$$\begin{aligned} S_9(\varphi) &= \frac{\partial y_9}{\partial \varphi} = g \cdot s_\varphi \cdot \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \\ S_{10}(\varphi) &= \frac{\partial y_{10}}{\partial \varphi} = g \cdot c_\varphi \cdot \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \\ S_{11}(\varphi) &= \frac{\partial y_{11}}{\partial \varphi} = -\tan(\varphi)^2 - 1 \end{aligned} \quad (25)$$

Aus der obigen Abbildungen ist leicht zu erkennen, dass der Messwert  $y_{10}$

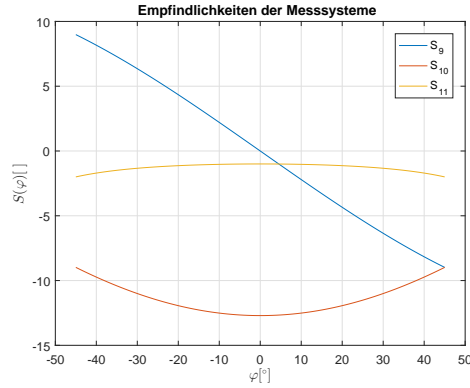


Abbildung 3: Empfindlichkeiten für  $\varphi$ , Quelle: eigene Darstellung

die höchste Empfindlichkeit besitzt. Besonders im Arbeitsbereich der Regelung ( $\varphi = 0$ ) liegt das Maximum der Empfindlichkeit. Das heißt bereits kleine Änderung des Winkels  $\varphi$  führen zu einer merkbaren Anpassung des Messwertes

$y_{10}$ . Die Empfindlichkeit  $S_{11}$  ist zwar deutlich geringer, weist allerdings nahezu konstante Werte im Arbeitsbereich der Regelung auf, was wiederum für eine lineare Messkennlinie in diesem Bereich spricht. Aus den Gleichung lässt sich zusätzlich erkenne, dass die Empfindlichkeiten  $S_9$  und  $S_{10}$  von der Positionen der Sensoren abhängt. Hieraus folgt, das die Empfindlichkeit der Messwerte  $y_9$  und  $y_{10}$ , mit zunehmendem  $l_1$  und abnehmendem  $l_2$ , steigt.

Die Messgröße  $\dot{\varphi}$  beeinflusst lediglich zwei Messwerte, nämlich  $y_1$  und  $y_7$ . Hierbei sei angemerkt, dass  $y_7$  proportional zu dem Quadrat von  $\dot{\varphi}$  ist und somit lediglich der Betrag der Messgröße aus dem Wert rekonstruiert werden kann. Die Information über die Richtung muss aus einer anderen Quelle gewonnen werden.

$$\begin{aligned} S_1 = S_2 &= \frac{\partial y_1}{\partial \dot{\varphi}} = 1 \\ S_7 &= \frac{\partial y_7}{\partial \dot{\varphi}} = -2 \cdot \dot{\varphi} \cdot (l_1 - l_2) \end{aligned} \tag{26}$$

Der Graph zeigt deutlich, dass die Empfindlichkeiten  $S_1$  und  $S_2$  der Dreh-

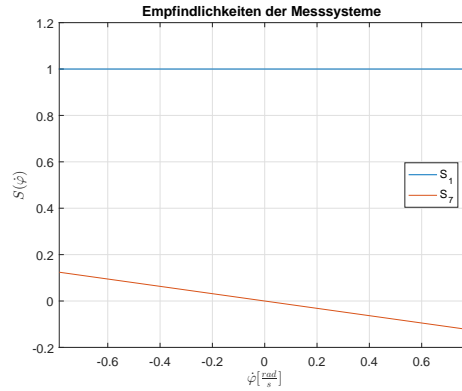


Abbildung 4: Empfindlichkeiten für  $\dot{\varphi}$ , Quelle: eigene Darstellung

atensoren höher sind als die der Geschwindigkeitsschätzung mit Hilfe der Beschleunigungssensoren. Lediglich bei hohen Werten von  $\dot{\varphi}$  erreicht man mit Hilfe von  $y_7$  eine höhere Empfindlichkeit.



Zuletzt ist der Messwert  $y_8$  zu untersuchen, welcher als einziger von der Messgröße  $\ddot{\varphi}$  abhängt. Hierbei handelt es sich um eine konstante Kennlinie bzw. einer konstanten Empfindlichkeit, welche wiederum mit zunehmenden Abstand zwischen den beiden Sensoren steigt.

$$S_8 = \frac{\partial y_8}{\partial \ddot{\varphi}} = l_1 - l_2 \quad (27)$$

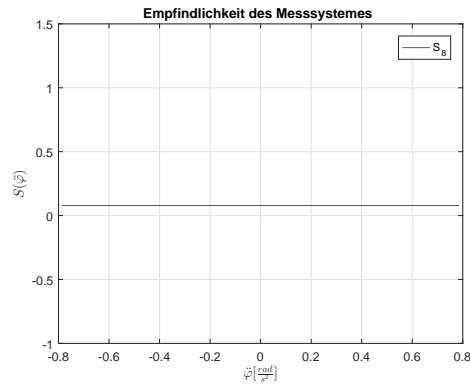


Abbildung 5: Empfindlichkeit für  $\ddot{\varphi}$ , Quelle: eigene Darstellung

Das erste Fazit aus der Untersuchung ist, dass alle Empfindlichkeiten, die von der Position der Sensoren abhängen, mit zunehmendem Abstand der Sensoren zueinander, wachsen. Folglich muss  $l_1$  möglichst groß und  $l_2$  möglichst klein gewählt werden.