

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Modellbildung Würfelseite</b>	<b>2</b>
1.1	Zustandsraumdarstellung . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Regelungstechnik</b>	<b>7</b>
2.1	Entwurf der Reglermatrix $\mathbf{F}$ . . . . .	7
2.2	Entwurf des Vorfilters $\mathbf{V}$ . . . . .	8
2.3	Entwurf eines kaskadierten Regelkreises . . . . .	9
2.4	Einfluss des digitalen Reglers . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Sensorik</b>	<b>14</b>
3.1	Untersuchung der Messsysteme für $\dot{\varphi}$ . . . . .	15
3.2	Ermittlung von $\varphi$ . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Herleitung/Interpretation Fourier-Spektren</b>	<b>18</b>

# 1 Modellbildung Würfelseite

Die Untersuchung des Systems beginnt mit der Bestimmung eines mathematischen Modells, welches in diesem Abschnitt näher erläutert wird. Die Herleitung der Systemdynamik erfolgt mit Hilfe der Methoden nach Kane. Zunächst beschränkt sich die mechanische Untersuchung auf einen vereinfachten Prototypen, welcher aus einer Würfelseite besteht, die auf einer Achse gelagert ist. An der Würfelseite ist ein Motor befestigt, auf dessen Schaft wiederum eine Schwungmasse gelagert ist.

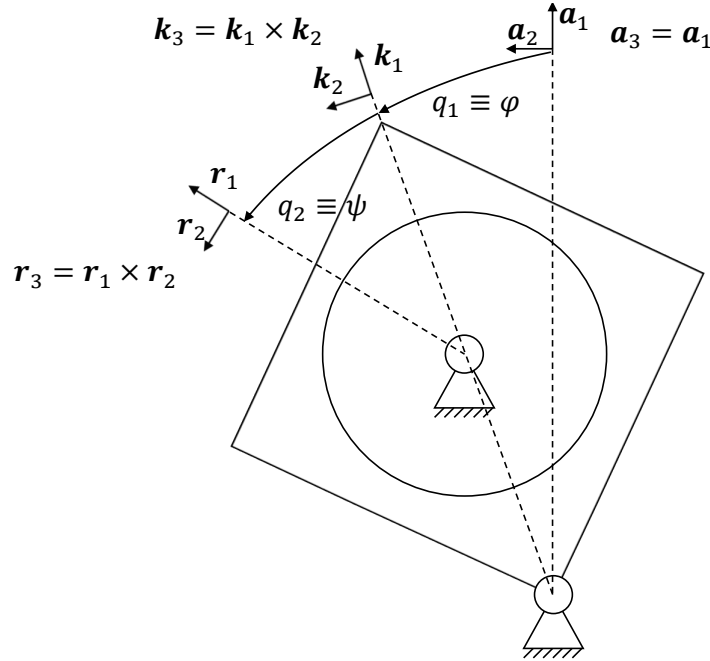


Abbildung 1: Mechanischer Aufbau der Würfelseite, Quelle: eigene Darstellung

Zu Beginn werden der Untersuchung werden die Bezugssysteme festgelegt, welche durch drei, paarweise orthogonale, Einheitsvektoren definiert sind. Die Vektorbasis eines Bezugssystems dient als eine Art Einheit um vektorielle Größen, wie z.B. Position oder Geschwindigkeit, darzustellen. Das untersuchte System verfügt über das raumfeste Bezugssystem  $A$ , welches durch die drei Einheitsvektoren  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  und  $\mathbf{a}_3$  definiert wird. An der Würfelseite ist ein weiteres Bezugssystem  $K$  fixiert, dessen Vektorbasis aus  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  und  $\mathbf{k}_3$  besteht. Zuletzt ist das, aus den Einheitsvektoren  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  und  $\mathbf{r}_3$  bestehende, Bezugssystem  $R$  zu nennen, welches auf der Schwungmasse fixiert ist.

Das holonome System verfügt über zwei rotatorische Freiheitsgrade, welche mit Hilfe der generalisierten Koordinaten  $q_1 = \varphi$  und  $q_2 = \psi$  beschrieben werden. Der Winkel  $\varphi$  beschreibt die Rotation der Würfelseite um den Punkt  $O$ . Die Rotation der Schwungmasse  $R$  relativ zu der Würfelseite wird von dem Winkel  $\psi$  beschrieben. Mit Hilfe der generalisierten Koordinaten ist es möglich einen Vektor, welcher in einem Bezugssystem dargestellt ist, in ein zweites Bezugssystem zu projizieren. Als Beispiel soll die Position des Schwerpunktes von  $K$  dienen, welche von dem Vektor  $\mathbf{c}_K$  beschrieben wird. Mit Hilfe des Skalarproduktes eines Vektors mit einem Einheitsvektors, kann der Betrag des Vektors in Richtung des Einheitvektors ermittelt werden. Folglich können somit die Komponenten eines Vektors in einem beliebigen Bezugssystem dargestellt werden.

$$\mathbf{c}_K = \begin{pmatrix} {}^K l_{AC} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^A (\mathbf{c}_K \cdot \mathbf{a}_1) \\ \mathbf{c}_K \cdot \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{c}_K \cdot \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{k}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{k}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{k}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{k}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{k}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{k}_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{c}_K = {}^K \mathbf{P}^A \cdot \mathbf{c}_K \quad (1)$$

Die Projektion kann somit in Form einer Matrix  ${}^K \mathbf{P}^A$  dargestellt werden, welche aus den Skalarprodukten der Einheitsvektoren besteht. Die umgekehrte Projektion kann mit Hilfe der Matrix  ${}^A \mathbf{P}^K$  durchgeführt werden, welche die Transponierte von  ${}^K \mathbf{P}^A$  ist. Die Projektionsmatrizen des ursprünglichen Systems sind die folgenden.

$${}^A \mathbf{P}^K = \begin{pmatrix} c_\varphi & s_\varphi & 0 \\ -s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^K \mathbf{P}^R = \begin{pmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Somit kann nun auch der Schwerpunkt der Würfelseite in dem raumfesten Bezugssystem  $A$  dargestellt werden.

$$\mathbf{C}_K = \begin{pmatrix} l_{AC} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ K \mathbf{P}^A \cdot \begin{pmatrix} l_{AC} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ c_\varphi \cdot l_{AC} \\ s_\varphi \cdot l_{AC} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

An diesem Beispiel ist bereits zu erkennen, von welcher Bedeutung Bezugssysteme bei der Darstellung von Vektoren sind. Die Position des Schwerpunktes ist aus Sicht der Würfelseite konstant, jedoch ist seine Position im raumfesten Bezugssystem  $A$  von dem Winkel  $\varphi$  abhängig. Im Kehrschluss ist die Darstellung eines Vektors nur unter Angabe eines Bezugssystem sinnvoll.

Nachdem die Position bzw. Orientierung der Körper mit Hilfe der generalisierten Koordinaten bestimmt wurde besteht der nächste Schritt darin, die Geschwindigkeiten der beiden Körper zu bestimmen. Die Geschwindigkeit eines Körpers ist abhängig von dem Bezugssystem in welchem er sich bewegt. Folglich muss das Bezugssystem in wessen Relation sich ein Körper bewegt, bei der Darstellung der Geschwindigkeit berücksichtigt werden. Als Beispiel dient die Geschwindigkeit der Schwungmasse relativ zu der Würfelseite  ${}^K\boldsymbol{\omega}^R$ , die Geschwindigkeit der Schwungmasse im raumfesten Bezugssystem  ${}^A\boldsymbol{\omega}^R$  und die Geschwindigkeit der Würfelseite in  $A$ ,  ${}^A\boldsymbol{\omega}^K$ .

$${}^K\boldsymbol{\omega}^R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad {}^A\boldsymbol{\omega}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad {}^A\boldsymbol{\omega}^R = {}^K\boldsymbol{\omega}^R + {}^A\boldsymbol{\omega}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Es sei vermerkt, dass eine Geschwindigkeit in einem beliebigen Bezugssystem dargestellt werden kann, es handelt sich allerdings nach wie vor um die Geschwindigkeit des Körpers in dem ursprünglichen Bezugssystem, lediglich die Darstellung wurde verändert.

Um die Darstellung der Geschwindigkeiten zu vereinfachen, werden die generalisierten Geschwindigkeiten  $u_1 \equiv \dot{\varphi}$  und  $u_2 \equiv \dot{\psi}$  definiert. Somit ist es möglich die Geschwindigkeiten der Schwungmasse  ${}^A\boldsymbol{\omega}^R$  und der Würfelseite  ${}^A\boldsymbol{\omega}^K$  als Summe der generalisierten Geschwindigkeiten  $u_i$  und der partiellen Geschwindigkeiten  ${}^A\boldsymbol{\omega}_i^R$  und  ${}^A\boldsymbol{\omega}_i^K$ .

$${}^A\boldsymbol{\omega}^K = \dot{\varphi} \cdot \mathbf{a}_3 + \dot{\psi} \cdot \mathbf{0} \rightarrow {}^A\boldsymbol{\omega}_1^K = \mathbf{a}_3 \quad {}^A\boldsymbol{\omega}_2^K = \mathbf{0} \quad (5)$$

$${}^A\boldsymbol{\omega}^R = \dot{\varphi} \cdot \mathbf{a}_3 + \dot{\psi} \cdot \mathbf{a}_3 \rightarrow {}^A\boldsymbol{\omega}_1^R = \mathbf{a}_3 \quad {}^A\boldsymbol{\omega}_2^R = \mathbf{a}_3 \quad (6)$$

Bei den generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{\varphi}$  und  $\dot{\psi}$  handelt es sich um Skalare. Sie beschreiben die komponentenweise Zusammensetzung der Geschwindigkeiten der beiden Körper. Die partiellen Geschwindigkeiten hingegen sind Vektoren, welche die Orientierung der generalisierten Geschwindigkeiten wiedergeben und somit deren Beitrag zu der Bewegung in Richtung der Freiheitsgrade darstellen.

Der nächste Schritt besteht darin, die Drehmomente zu untersuchen, welche auf die Würfelseite und die Schwungmasse wirken. Mit Hilfe der wirkenden Kräfte können letzten Endes die Bewegungsgleichungen ermittelt werden.

Die Bewegung der Schwungmasse wird einerseits durch das Motormoment  $\mathbf{T}_M^{R/M}$  beeinflusst, andererseits wird sie von der Reibung in  $M$  durch das Drehmoment  $\mathbf{T}_R^{R/M}$  verzögert. Das Reibmoment wird als proportional zur Geschwindigkeit  $\dot{\psi}$  modelliert. Somit ergibt sich das resultierende Drehmoment  $\mathbf{T}_R$ .

$$\mathbf{T}^{R/M} = \mathbf{T}_M^{R/M} + \mathbf{T}_R^{R/M} = (T_M + C_\psi \cdot \dot{\psi}) \cdot \mathbf{a}_3 \quad (7)$$

Das Motormoment  $\mathbf{T}_M$  und das Reibmoment  $\mathbf{T}_R$  wirken in umgekehrter Richtung auf die Würfelseite. Zusätzlich wird diese von dem Gravitationsmoment  $\mathbf{T}_G^{K/O}$  und dem Reibmoment der Würfelseite  $\mathbf{T}_R^{K/O}$ . Aus der Summe dieser Komponenten ergibt sich das resultierende Drehmoment  $\mathbf{T}^{K/O}$ .

$$\mathbf{T}^{K/O} = \mathbf{T}_G^{K/O} - \mathbf{T}_R^{K/O} - \mathbf{T}_M^{R/M} + \mathbf{T}_R^{R/M} = (m_G \cdot g \cdot l_{AC} \cdot s_\varphi - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} - T_M + C_\psi \cdot \dot{\psi}) \cdot \mathbf{a}_3 \quad (8)$$

Über das Skalarprodukt der resultierenden Drehmomente und der partiellen Geschwindigkeiten können die generalisierten aktiven Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  berechnet werden. Diese stellen den Einfluss der wirkenden Kräfte und Momente auf die generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{\varphi}$  und  $\dot{\psi}$  dar.

$$F_1 = {}^A\boldsymbol{\omega}_1^K \cdot \mathbf{T}^{K/O} + {}^A\boldsymbol{\omega}_1^R \cdot \mathbf{T}^{R/M} = m_G \cdot g \cdot l_{AC} \cdot s_\varphi - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} \quad (9)$$

$$F_2 = {}^A\boldsymbol{\omega}_2^K \cdot \mathbf{T}^{K/O} + {}^A\boldsymbol{\omega}_2^R \cdot \mathbf{T}^{R/M} = T_M - C_\psi \cdot \dot{\psi} \quad (10)$$

Die letztendlichen Bewegungsgleichungen werden über das Gleichgewicht der generalisierten, aktiven Kräfte und der generalisierten Trägheitskräfte gewonnen. Folglich muss zuletzt das Trägheitsmoment der Schwungmasse  $\mathbf{T}_R^*$  und der Würfelseite  $\mathbf{T}_K^*$  bestimmt werden. Ersteres ergibt sich aus dem Massenträgheitsmoment  $I^{R/M}$  der Schwungmasse um den Punkt  $M$  und seiner Winkelbeschleunigung in  $A$ .

$$\mathbf{T}_R^* = -I^{R/M} \cdot {}^A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} + \ddot{\psi} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Das Trägheitsmoment der Würfelseite hängt von ihrer Winkelbeschleunigung in  $A$ , ihrem Massenträgheitsmoment  $I^{K/O}$  um  $O$  und der Position bzw. dem Gewicht der Schwungmasse ab.

$$\mathbf{T}_K^* = -(I^{K/O} + m_R \cdot l_{AB}^2) \cdot {}^A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Die generalisierten Trägheitskräfte  $F_1^*$  und  $F_2^*$  ergeben sich wiederum durch die Skalarmultiplikation mit den partiellen Geschwindigkeiten. Das heißt die Trägheitsmomente der beiden Körper werden in die Bewegungsrichtung der generalisierten Geschwindigkeiten, also der Freiheitsgrade, projiziert.

$$F_1^* = {}^A\boldsymbol{\omega}_1^K \cdot \mathbf{T}_K^* + {}^A\boldsymbol{\omega}_1^R \cdot \mathbf{T}_R^* = -(I^{K/O} + I^{R/M} + m_R \cdot l_{AB}^2) \cdot \ddot{\varphi} - I^{R/M} \cdot \ddot{\psi} \quad (13)$$

$$F_2^* = {}^A\boldsymbol{\omega}_2^K \cdot \mathbf{T}_K^* + {}^A\boldsymbol{\omega}_2^R \cdot \mathbf{T}_R^* = -I^{R/M} \cdot (\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}) \quad (14)$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich nun aus der Summe der generalisierten aktiven Kräfte  $F_i$  und der generalisierten Trägheitskräfte  $F_i^*$ . Die Aussage dieser Gleichungen besteht darin, dass die Projektion, der wirkenden Kräfte in Richtung der partiellen Geschwindigkeiten, gleich der Projektion der Impulsänderung in Richtung der partiellen Geschwindigkeiten ist.

$$F_1 + F_1^* = 0 \rightarrow (I^{K/O} + I^{R/M} + m_R \cdot l_{AB}^2) \cdot \ddot{\varphi} = m_G \cdot g \cdot l_{AC} \cdot s_\varphi - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} - I^{R/M} \cdot \ddot{\psi} \quad (15)$$

$$F_2 + F_2^* = 0 \rightarrow I^{R/M} \cdot \ddot{\psi} = T_M - C_\psi \cdot \dot{\psi} - I^{R/M} \cdot \ddot{\varphi} \quad (16)$$

## 1.1 Zustandsraumdarstellung

Ein beliebiges Differentialgleichungssystem kann in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung transformiert werden. Dadurch lässt sich die so genannte Zustandsraumdarstellung bestimmen, welche erhebliche Vorteile in der Systemanalyse und dem bei Reglerentwurf mit sich bringt. Ausgangspunkt zur Bestimmung dieser Darstellung ist die Definition des Zustandvektors  $\mathbf{x}$ . Für die Würfelseite wird folgende Definition verwendet.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Mit Hilfe der Zustände können die linearisierten Bewegungsgleichungen in ein System aus drei Differentialgleichungen erster Ordnung umgeschrieben werden. Zusätzlich muss hierfür der Eingangsvektor  $\mathbf{u}$  definiert werden, der in diesem Fall lediglich aus dem Motormoment  $T_M$  besteht.

$$\mathbf{u} \equiv T_M \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{m_G \cdot g \cdot l_M \cdot x_1 - C_\varphi \cdot x_2 + C_\psi - u}{I^{K/O} + m_r \cdot l_M^2} \\ \dot{x}_3 &= \frac{I^{G/O} \cdot (T_M - C_\psi \cdot x_3)}{I^{R/M}(I^{K/O} + m_R \cdot l_M^2)} - \frac{m_G \cdot g \cdot l_C \cdot x_1 - C_\varphi \cdot x_2}{I^{K/O} + m_r \cdot l_M^2} \end{aligned} \quad (19)$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich in die folgende, vektorielle Form umschreiben, welche die erste Gleichung der Zustandsraumdarstellung ist.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (20)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{m_G \cdot g \cdot l_C}{I^{K/O} + m_r \cdot l_M^2} & \frac{-C_\varphi}{I^{K/O} + m_r \cdot l_M^2} & \frac{C_\psi}{I^{K/O} + m_r \cdot l_M^2} \\ \frac{-m_G \cdot g \cdot l_C}{I^{K/O} + m_r \cdot l_M^2} & \frac{C_\varphi}{I^{K/O} + m_r \cdot l_M^2} & \frac{C_\psi}{I^{G/O} (I^{K/O} + m_r \cdot l_M^2)} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I^{K/O} + m_r \cdot l_M^2} \\ \frac{I^{G/O}}{I^{R/M} (I^{K/O} + m_r \cdot l_M^2)} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  heißen System- bzw. Eingangsmatrix und stellen den Zusammenhang zwischen des Zustand- und Eingangsvektors zu der zeitlichen Änderung des Zustandvektors dar. Im nächsten Schritt wird der Ausgangsvektor  $\mathbf{y}$  definiert. Hierfür werden die Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}$  und die Durchgangsmatrix  $\mathbf{D}$  bestimmt, welche den Einfluss des Zustands- und Eingangsvektors auf die Ausgangsgrößen wiedergeben. In dem Fall der Würfelseite primär der Ausfallwinkel  $\varphi$  geregelt werden, welcher somit als Ausgangsgröße aufgeführt wird. Zusätzlich soll die Geschwindigkeit der Schwungmasse  $\dot{\psi}$  minimiert werden, weshalb diese Größe ebenfalls im Ausgangsvektor enthalten ist. einzige Ausgangsgröße dar.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \quad (23)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = (0) \quad (24)$$

Als nächstes stellt sich die Frage, wie aus der Zustandsraumdarstellung die Lösung der Bewegungsgleichungen bestimmt werden können. Hierfür kann nach (RT2, S.6 ff.) der Exponentialansatz für einzelne Differentialgleichungen auf die vektorielle Zustandsraumdarstellung übertragen werden.

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (25)$$

Die Matrix-Exponentialfunktion  $e^{\mathbf{A} \cdot t}$  heißt Fundamentalmatrix  $\Phi(t)$ . Für die Herleitung der folgenden Definition sei ebenfalls auf (RT2, S.6 ff.) verwiesen.

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \cdot \frac{t^k}{k!} \quad (26)$$

Mit Hilfe der Fundamentalmatrix kann einerseits die homogene Lösung  $\mathbf{x}_h$  des Zustandsraums bestimmt werden.

$$\mathbf{x}_h(t) = \Phi(t) \cdot \mathbf{x}_0 \quad | \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t=0) \quad (27)$$

Diese die Eigenbewegung des Systems, welche von den Anfangswerten der Zustände abhängt. Andererseits kann die partikuläre Lösung  $\mathbf{x}_p$  berechnet werden, welche die, durch die Eingangsgrößen verursachte, Systembewegung wiedergibt.

$$\mathbf{x}_p(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (28)$$

Neben dem Verlauf der Zustandsvektors  $\mathbf{x}$  spielt der Zusammenhang der Eingangs- und Ausgangsgrößen eine zentrale Rolle. Dieser wird von der Übertragungsfunktion  $g(t)$  bzw., bei Mehrgrößensystemen, der Übertragungsmatrix  $\mathbf{G}(t)$  beschrieben. Die zweite Gleichung der Zustandsraumdarstellung führt zu dem Verlauf des Ausgangvektors  $\mathbf{y}(t)$ . Setzt man die Lösung für  $\mathbf{x}(t)$  ein ergibt sich:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C}\Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (29)$$

Durch die folgende Definition der Übertragungsmatrix  $\mathbf{G}(t)$  lässt sich diese Gleichung weiter vereinfachen.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{G}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad | \quad \mathbf{G}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t) \quad (30)$$

Die Lösung des Ausgangvektors setzt sich ebenfalls aus der homogenen Lösung

$$\mathbf{y}_h(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}_0 \quad (31)$$

und der partikulären Lösung, welche sich aus dem Faltungsintegral der Übertragungsmatrix und des Eingangsvektors ergibt.

$$\mathbf{y}_p(t) = \int_0^t \mathbf{G}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{G}(t) * \mathbf{u}(t) \quad (32)$$

Die obigen Darstellungen zeigen, dass mit Hilfe der Fundamental- und Übergangsmatrix sowohl die homogenen als auch partikulären Lösungen des Zustands- und Ausgangsvektors berechnet werden können. Das bedeutet, dass sie das vollständige Systemverhalten wiedergeben. Deshalb sollen im nächsten Schritt weitere Methoden untersucht werden um die beiden Matrizen zu ermitteln.

Durch die Laplace-Transformation der Zustandsraumdarstellung ergeben sich die folgenden Gleichungen im Bildbereich.

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (33)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (34)$$

Aus der ersten Gleichung lässt sich die Lösung des Zustandvektors im Bildbereich ermitteln.

$$\mathbf{X}(s) = (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (35)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Lösung im Zeitbereich so ergibt sich für die Laplace-Transformierte der Fundamentalmatrix:

$$\mathcal{L}(\Phi(t)) = \Phi(s) = (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (36)$$

Somit kann nun auch die Übertragungsmatrix im Bildbereich berechnet werden.

$$\mathcal{L}(\mathbf{G}(t)) = \mathbf{G}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (37)$$

Mit Hilfe der Berechnungsvorschriften im Bildbereich können nun auch die Fundamental- und Übertragungsmatrix der Würfelseite bestimmt werden. Es sei allerdings angemerkt, dass die Berechnung, welche im Vergleich zu den Vorschriften im Zeitbereich relativ einfach ist, nur mit Hilfe von Hilfsmitteln wie MATLAB durchzuführen ist. Auch die Darstellung der symbolischen Wert führt zu kaum interpretierbaren Ergebnissen, weshalb die ermittelten Werte für die Systemgrößen verwendet werden.

$$\Phi(s) \Rightarrow ( \quad (38)$$

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{17,0}{s+9,7} + \frac{-16,0}{s-7,9} + \frac{-1,0}{s+0,3} \\ \frac{169,8}{s+9,7} + \frac{122,1}{s-7,9} + \frac{8558,6}{s+0,3} \end{pmatrix} \quad (39)$$

In der Darstellung ist leicht zu erkennen, dass das System über Pole verfügt, welche in der rechten Halbebene liegen, und somit instabil ist.

## 2 Regelungstechnik

Der Aufbau der Würfelseite stellt ein inverses Pendel dar, folglich handelt es sich um ein instabiles System. Diese Aussage lässt sich leicht an Hand der Pole des Systems überprüfen. Da die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  die vollständige Information über das Eigenverhalten enthält, muss diese auch die Pole des Systems beinhalten, welche über die charakteristische Gleichung

$$P^*(s) = |s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (40)$$

berechnet werden können. Für das Modell der Würfelseite ergibt sich die folgende charakteristische Gleichung. Die Lösung dieser Gleichung führt wiederum auf die Pole des Systems.

$$P^*(s) = s^3 + 2,08s^2 - 76s - 20,4 = 0 \quad (41)$$

$$p_1 = 7,89 \quad p_2 = -0,27 \quad p_3 = -9,7 \quad (42)$$

Da der erste Pole einen positiven Realteil besitzt ist das System instabil. Folglich muss ein Regelungskonzept entworfen werden um das System zu stabilisieren. Die primäre Aufgabe des Reglers besteht darin, den Winkel  $\varphi$  möglichst rasch in den Sollwert zu überführen. Hierfür wird der Ansatz der Zustandsrückführung gewählt, welcher im folgenden Blockschaltbild dargestellt ist. In dem geschlos-

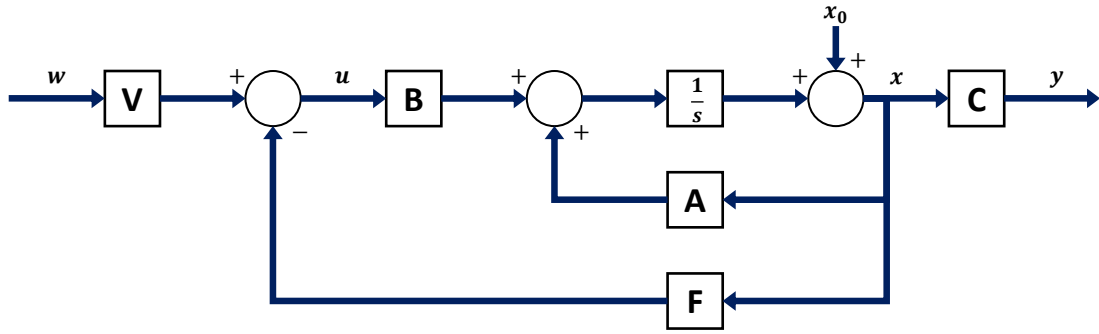


Abbildung 2: Geschlossener Regelkreis, Quelle: eigene Darstellung, Inhalt aus RT2

senen Regelkreis wurde einerseits der Führungsvektor  $\mathbf{w}$  eingeführt, der mit dem Vorfilter  $\mathbf{V}$  gewichtet wird. Die Funktion des Vorfilters wird später genauer betrachtet. Zusätzlich wird der Zustandsvektor über die Reglermatrix  $\mathbf{F}$  zurückgeführt. Dadurch ergibt sich eine neue Zustandsraumdarstellung. Die ursprüngliche Eingangsgröße  $u$  setzt sich nun aus dem gewichteten Führungsvektor  $\mathbf{V}\mathbf{w}$  und dem zurückgeführten Zustandsvektor  $\mathbf{F}\mathbf{x}$  zusammen.

$$u = \mathbf{V}\mathbf{w} - \mathbf{F}\mathbf{x} \quad (43)$$

Einsetzen in die erste Gleichung der Zustandsraumdarstellung führt auf das folgende Ergebnis.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{V}\mathbf{w} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{F}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{F})\mathbf{x} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{V}\mathbf{w} \quad (44)$$

Somit ergeben sich für den geschlossenen Regelkreis die neue Systemmatrix  $\mathbf{A}_g = \mathbf{A} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{F}$  und Eingangsmatrix  $\mathbf{B}_g = \mathbf{B} \otimes \mathbf{V}$ . Die zweite Gleichung der Zustandsraumdarstellung bleibt unverändert.

$$\mathbf{C}_g = \mathbf{C} \quad \mathbf{D}_g = \mathbf{D} \quad (45)$$

### 2.1 Entwurf der Reglermatrix $\mathbf{F}$

Das Eigenverhalten des neuen Systems wird nun von der Systemmatrix  $\mathbf{A}_g$  bestimmt. Deren Pole können ebenfalls über die charakteristische Gleichung

$$P^*(s) = |s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_g| = 0 \quad (46)$$

berechnet werden. Somit besteht die erste Aufgabe des Reglerentwurfes darin die Filtermatrix  $\mathbf{F}$  so zu entwerfen, dass alle Pole des geschlossenen Regelkreises in der linken Halbebene liegen, wodurch die Stabilität des Systems gegeben ist. Hierfür wird der Ansatz des optimalen Zustandreglers nach

dem quadratischen Gütekriterium gewählt. Das heißt, dass ein Gütekriterium  $I$  gewählt wird, welches durch die Wahl von  $\mathbf{F}$  minimiert werden muss.

$$I = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \stackrel{!}{=} \min \quad (47)$$

**Einschub wie dieses Optimierungsproblem gelöst werden kann**

Die positiven Matrizen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$  dienen zur Gewichtung des Zustand- und Eingangsvektors. Die Wahl der Gewichtungsmatrizen liegt bei dem Entwickler und bietet die Beeinflussung des dynamischen Verhaltens des Regelkreises. In diesem Anwendungsfall werden Diagonalmatrizen verwendet, deren Diagonalelemente über die maximal zulässigen Werte der Zustands- und Eingangsgrößen festgelegt werden.

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} (\varphi_{max})^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & (\dot{\varphi}_{max})^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (\dot{\psi}_{max})^{-2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = ((T_{Mmax})^{-2}) \quad (48)$$

Dadurch ergeben sich die folgenden Werte für die Reglermatrix  $\mathbf{F}$ .

$$\mathbf{F} = (-0,9120 \quad -0,0773 \quad -0,0001) \quad (49)$$

Mit Hilfe der Filtermatrix kann nun die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises gelöst werden, wodurch man die Pole des Systems erhält.

$$|s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_g| = 0 \quad \rightarrow \quad p_1 = -0.117 \quad p_{2,3} = -11.9 \pm 6.55j \quad (50)$$

Da alle Pole einen negativen Realteil besitzen ist die Stabilität des Systems nachgewiesen.

## 2.2 Entwurf des Vorfilters $\mathbf{V}$

Die zweite Aufgabe des Reglerentwurfs besteht darin das Vorfilter  $\mathbf{V}$  so zu entwerfen, dass im stationären Zustand  $\dot{\mathbf{x}} = 0$  der Führungs- und Ausgangsvektor übereinstimmen.

$$\mathbf{w} = \mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \quad (51)$$

Im stationären Zustand gilt für die erste Gleichung der Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{F})\mathbf{x} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{V}\mathbf{w} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{V})\mathbf{w} \quad (52)$$

Durch Einsetzen der Lösung in (51) erhält man das folgende Ergebnisse.

$$\mathbf{w} = \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{V})\mathbf{w} \quad (53)$$

Aus diesem Ausdruck ist leicht zu erkennen, dass die folgende Gleichung gelten muss.

$$\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{F})^{-1}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{V}) = \mathbf{I} \quad \rightarrow \quad \mathbf{V} = [\mathbf{C}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{F} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]^{-1} \quad (54)$$

Berechnet man  $\mathbf{V}$  nach der obigen Formel erhält man für das Vorfilter die folgenden Werte.

$$\mathbf{V} = (0 \quad 3,316 \cdot 10^{-5}) \quad (55)$$

Das Verschwinden des ersten Elements des Vorfilters lässt sich damit begründen, dass das System nur bei dem Führungswert  $\varphi = 0$  stabilisiert werden kann. Die erste Bewegungsgleichung

$$(I^{K/O} + I^{R/M} + m_R \cdot l_{AB}^2) \cdot \ddot{\varphi} = m_G \cdot g \cdot l_{AC} \cdot s_\varphi - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} - I^{R/M} \cdot \ddot{\psi} \quad (56)$$

zeigt, dass durch die Gravitation ein konstantes Moment entsteht falls  $\varphi \neq 0$  gilt. Somit muss der Motor eine konstante Beschleunigung der Schwungmasse erzeugen um  $\varphi$  auf dem Führungswert zu halten. Diese Beschleunigung bedeutet allerdings, dass der Zustand  $\dot{\psi}$  divergiert und das System somit nicht stabil sein kann.



### 2.3 Entwurf eines kaskadierten Regelkreises

Nach dem Entwurf des stabilen Systems, ist dessen Verhalten in Abhängigkeit von dem Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  von Interesse. Der Führungsvektor ist dabei konstant  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ . Das bedeutet, dass die Würfelseite in der aufrechten Position stehen soll und die Schwungmasse dabei zum Stillstand kommt. Um die Endwerte für diesen Führungsvektor zu bestimmen wird die Zustandsraumdarstellung des geschlossenen Regelkreises in den Bildbereich transformiert.

$$s \cdot \mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_g) \mathbf{X}(s) \quad \rightarrow \quad \mathbf{X}(s) = (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_g)^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (57)$$

Mit Hilfe des Endwertsatzes

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \mathbf{X}(s) \quad (58)$$

können die Endwerte des Zustandvektors berechnet werden. Voraussetzung hierfür ist, dass die Endwerte existieren. Dies ist allerdings durch die Stabilität des Systems gegeben. Für den Fall, dass der Führungsvektor  $\mathbf{w}$  verschwindet, konvergieren die Zustandsgrößen gegen null.

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (59)$$

Allerdings zeigt eine Simulation bei  $\mathbf{x}_0 = (5^\circ \ 0 \ 0)^T$ , dass lediglich der Winkel  $\varphi$  in kurzer Zeit gegen Null konvergiert. Die Geschwindigkeit  $\dot{\psi}$  benötigt einen verhältnismäßig großen Zeitraum um abzuklingen. Das sekundäre Regelungsziel besteht darin, die nötige Zeit für die Konvergenz von  $\dot{\psi}$  zu

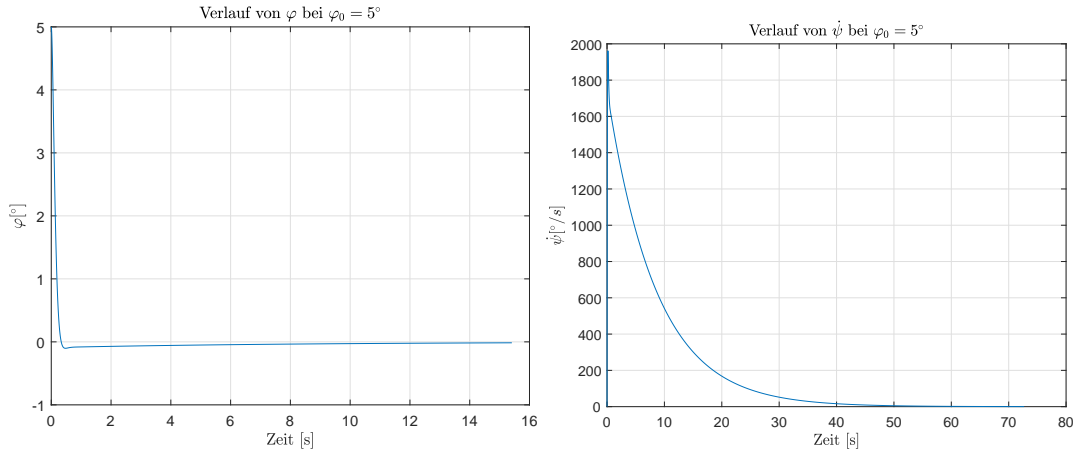


Abbildung 3: Verlauf von  $\varphi$  und  $\dot{\psi}$ , Quelle: eigene Darstellung

reduzieren. Da der Führungsvektor entfällt ist für das Verhalten des geschlossenen Regelkreises nur die Fundamentalmatrix von Bedeutung. Die Übertragungsmatrix beschreibt lediglich das Verhalten des Systems auf ein Eingangssignal und ist somit hier nicht relevant. Außerdem wird hier lediglich das Produkt der Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}$  und der Fundamentalmatrix  $\Phi$  betrachtet, da sich die Zustandsgröße  $\dot{\varphi}$  aus dem Verlauf von  $\varphi$  ergibt.

$$\mathbf{C} \cdot \Phi(s) = \begin{pmatrix} \frac{2,54s^2 + 60,9s - 1,3}{2,54s^3 + 60,9s^2 + 478s + 55,1} & \frac{6,87s - 2,02}{6,87s^3 + 165s^2 + 1300s + 149} & \frac{-0,53}{55s^3 + 1320s^2 + 10400s + 1190} \\ \frac{1720s + 13900}{0,22s^3 + 5,16s^2 + 40,5s} & \frac{147s + 1720}{0,22s^3 + 5,16s^2 + 40,5s + 4,66} & \frac{0,22s^2 + 5,22s + 40,6}{0,22s^3 + 5,16s^2 + 40,55s + 4,66} \end{pmatrix} \quad (60)$$

Das Zeitverhalten des geschlossenen Regelkreises wird durch die Pole vorgegeben. Diese sind in der Fundamentalmatrix enthalten. Hierbei gilt, dass ein Pol, der weit von der imaginären Achse entfernt ist zu einem schnelleren Systemverhalten führt. Bei Systemen mit mehreren Polen gibt das Dominanzmaß  $D_i$  den relativen Einfluss der Pole wieder. Hierfür werden die Teilübertragungsfunktionen bzw. Elemente der Fundamentalmatrix in Partialbrüche umgeformt.

$$G(s) = \sum_i \frac{A_i}{s - p_i} \quad (61)$$

$$D_i = \left| \frac{A_i}{p_i} \right| \quad (62)$$

	$\varphi_0$		$\dot{\varphi}_0$		$\dot{\psi}_0$	
$\varphi$	$D_{1,2} = 0.078$	$D_3 = 0.155$	$D_{1,2} = 0.006$	$D_3 = 0.019$	$D_{1,2} = 4 \cdot 10^{-6}$	$D_3 = 4.5 \cdot 10^{-6}$
$\dot{\varphi}$	$D_{1,2} = 24.6$	$D_3 = 2984$	$D_{1,2} = 1.86$	$D_3 = 371$	$D_{1,2} = 0.001$	$D_3 = 8.71$

Die folgende Tabelle zeigt die Dominanzmaße der drei Pole

$$p_{1,2} = -11.9 + 6.55j \quad p_3 = -0.117 \quad (63)$$

in den Elementen der Fundamentalmatrix. Diese geben wieder, wie stark Zusammenhang zwischen Ausgangsvektor und Anfangswert des Zustandsvektors von den verschiedenen Polen beeinflusst wird. Aus der Tabelle ergibt sich, dass der dominierende Pol des Systems  $p_3 = -0.117$  ist. Dessen kleiner Realteil führt zu einer langsamen Eigenbewegung. Allerdings fließen das komplex konjugierte Polpaar  $p_{1,2} = -11.9 \pm 6.55j$  nach wie vor in den Verlauf von  $\varphi$  ein. Dadurch lässt sich die relativ rasche Konvergenz von  $\varphi$  gegen den Endwert erklären. Der Verlauf der Zustandsgröße  $\psi$  wird allerdings von dem Pol  $p_3$  dominiert. Das Dominanzmaß der Polpaars  $p_{1,2}$  ist um mehrere Potenzen geringer und beeinflusst somit den Verlauf von  $\psi$  kaum. Dies erklärt wiederum das langsame Konvergenzverhalten von  $\psi$ .

Folglich muss entweder die Lage der Pole oder deren Dominanzmaß verändert werden um die Systemdynamik zu beeinflussen. Hierfür wird eine kaskadierte Regelung verwendet, das heißt der Ausgangsvektor des geschlossenen Regelkreises wird auf den Führungsvektor zurückgeführt. Aus dem

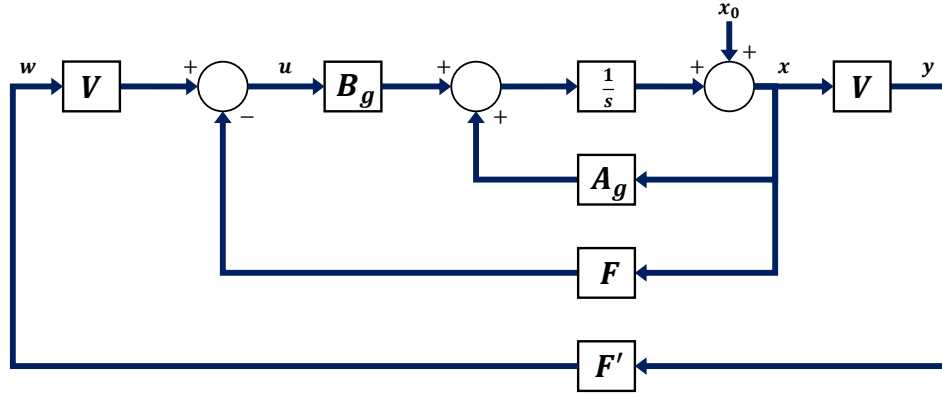


Abbildung 4: Kaskadierter Regelkreis, Quelle: eigene Darstellung

Blockschaltbild ist zu erkennen, dass für den Führungsvektor  $w$  der folgende Zusammenhang gilt.

$$w = F'y \quad (64)$$

Durch Einsetzen in die erste Gleichung der Zustandsraumdarstellung ergibt sich:

$$\dot{x} = A_g x + (B_g \otimes F')y = (A_g + B_g \otimes F' \otimes C)x = A_c x \quad (65)$$

**diadische Produkte beweisen, ist vlt nicht ganz richtig** Die zweite Reglermatrix  $F'$  setzt sich aus zwei wählbaren und zwei Nullelementen zusammen. Der Grund dafür, dass zwei Elemente der Matrix verschwinden liegt darin, dass der Wert für  $\varphi$  im Führungsvektor keinen Einfluss auf das System hat, da der Vorfilter diesen nicht gewichtet.

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_1 & F_2 \end{pmatrix} \quad (66)$$

Die charakteristische Gleichung des kaskadierten Regelkreises hängt von der Reglermatrix  $F'$  ab. Folglich können auch die Pole des Systems durch die Wahl der Matrixelemente beeinflusst werden.

$$P^*(s) = |s \cdot I - A_c| = s^3 + (24 + 0,29F_2)s^2 + (200 + 0,41F_2 - 0,01F_1)s + (22,0 - 22F_2 + 10^{-19}) = 0 \quad (67)$$

3Dplots zeigen, dass F1 praktisch irrelevant ist, optimales Erbenis sollte man erreichen indem man nur F2 betrachtet und den Betrag der Pole+Dominanzmaß mit dem Stabilitätsrand vergleicht, optimale Lösung ist die Kombination aus maximalen Betrag aller Pole die nach wie vor stabil sind, Frage ob das noch praktisch analysbar zu lösen ist oder man einfach das Optimum aus den Plots rausnimmt

Die folgenden Darstellung zeigen den Verlauf der Zustandsgrößen bei  $\mathbf{x}_0 = (5^\circ \ 0 \ 0)^T$  des kaskadierten Regelkreises. Für die zweite Reglermatrix wurden die Werte  $F_1 = 0$  und  $F_2 = -17$  verwendet.

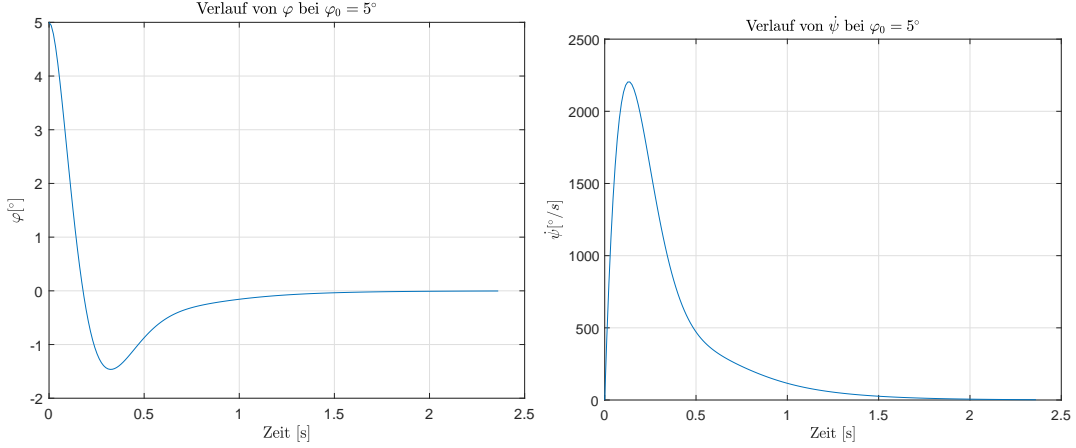


Abbildung 5: Verlauf von  $\varphi$  und  $\dot{\psi}$ , Quelle: eigene Darstellung

## 2.4 Einfluss des digitalen Reglers

Bisher wurde der Regelkreis als zeitkontinuierliches System betrachtet. Allerdings wird der Regler selbst mit Hilfe eines Digitalrechners implementiert. Deshalb werden in diesem Abschnitt die Einflüsse der diskreten Systeme auf den Regelkreis untersucht und anschließend Methoden erläutert um den diskreten Regelkreis zu analysieren.

Der Rechner erfasst den Verlauf des Zustandsvektors an äquidistanten Zeitpunkten  $k \cdot T$ . Dies entspricht einem  $\delta$ -Abtaster der die kontinuierliche Funktion des Zustandvektors in die Zahlenfolge  $\mathbf{x}(k)$  überführt. Auch der Verlauf des Eingangssignales  $u(t)$  wird durch den Rechner beeinflusst. Der Stellwert des Regelkreises wird an den Abtastzeitpunkten berechnet und ist somit eine Zahlenfolge. Um diese in eine kontinuierliche Funktion zu überführen wird ein Halteglied nullter Ordnung verwendet. Dadurch entsteht eine Treppenfunktion, deren Wert an den Abtastzeitpunkten aktualisiert wird. Das Verhalten des Haltegliedes wird von der folgenden Übertragungsfunktion beschrieben.

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{T \cdot s}}{s} \quad (68)$$

Die Analyse von kontinuierlichen Systemen wird durch die Laplace-Transformation stark erleichtert. Für diskrete Systeme stellt die z-Transformation das diskrete Analogon dar. Allerdings muss der vollständige Regelkreis als diskretes System dargestellt werden um die z-Transformation anwenden zu können. Das heißt, dass die Bewegung der Würfelseite, welche ein kontinuierliches System darstellt, mit Hilfe von Differenzengleichungen beschrieben werden muss. Dadurch besteht eine diskrete Beschreibung des gesamten Regelkreises, wodurch die z-Transformation zur Analyse genutzt werden kann.

Die Modellierung des kontinuierlichen Systems erfolgt mit Hilfe der Zustandsraumdarstellung. Diese kann auch für diskrete Systeme formuliert werden, welche sich aus Differenzengleichungen erster Gleichung zusammensetzt. Das heißt bei den Eingangs-, Zustands- und Ausgangsvektor handelt es sich nicht mehr um kontinuierliche Zeitfunktionen sondern um diskrete Zahlenfolgen.

Die Matrizen  $\mathbf{A}_d$ ,  $\mathbf{B}_d$ ,  $\mathbf{C}_d$  und  $\mathbf{D}_d$  stellen die diskrete System-, Eingangs-, Ausgangs- und Durchgangsmatrix dar. Somit kann das kontinuierliche System in ein diskretes überführt werden, wenn der Zusammenhang der Matrizen der kontinuierlichen und diskreten Zustandsraumdarstellung hergestellt wurde. Hierfür soll zunächst die Lösung des kontinuierlichen Zustandvektors  $\mathbf{x}(t)$  betrachtet werden.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t_0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (69)$$

Der Verlauf zwischen zwei Abtastzeitpunkten  $(k+1)T$  und  $kT$  wird berechnet indem  $t_0 = kT$  und  $t = (k+1)T$  gilt.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}(k+1)T} \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}([k+1]T-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}(k+1)T} \mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}T} \int_0^T e^{\mathbf{A}(kT-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (70)$$

Für die Lösung des Integrals muss der Verlauf von  $\mathbf{u}$  bekannt sein. Das Halteglied nullter Ordnung führt die diskrete Zahlenfolge der Stellgröße in eine Treppenfunktion über. Das heißt  $\mathbf{u}$  ist im Verlauf einer Abtastperiode konstant.

$$\mathbf{u}(kT+t) = \mathbf{u}(kT) \quad | \quad 0 \leq t < T \quad (71)$$

Somit folgt für die Lösung der Gleichung:

$$\mathbf{x}([k+1]T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}T} (\mathbf{I} - e^{-\mathbf{A}T}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(kT) \quad (72)$$

Diese Lösung stellt den Zusammenhang zwischen den kontinuierlichen Differentialgleichungen und der diskreten Differenzengleichung dar. Vergleicht man die obige Lösung mit der der kontinuierlichen Form lassen sich die folgenden Zusammenhänge ablesen.

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T} \quad \mathbf{B}_d = (e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (73)$$

Mit der Definition

$$\mathbf{S} = T \sum_{v=0}^{\infty} \mathbf{A}^v \frac{T^v}{(v+1)!} \quad (74)$$

kann die Definition vereinfacht und die Berechnung der inversen Matrix vermieden werden.

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{I} + \mathbf{S} \mathbf{A} \quad \mathbf{B}_d = \mathbf{S} \mathbf{B} \quad (75)$$

Somit beschreibt die Matrix  $\mathbf{S}$  einerseits den Einfluss des Halteglieds auf den Regelkreis, andererseits ermöglicht sie die Überführung in eine diskrete Darstellung. Diese besteht aus einem System von Differenzengleichungen erster Ordnung. Die Lösung des Zustandsvektors ist somit eine Zahlenfolge.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(0) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}_d^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}_d^{k-j-1} \mathbf{B}_d \mathbf{u}(j)\end{aligned}\quad (76)$$

Diese setzt sich ebenfalls aus einer homogenen und partikulären Lösung zusammen. Der Vergleich mit der kontinuierlichen Lösung liefert die folgenden Definitionen für die diskrete Fundamentalmatrix  $\Phi$ .

$$\Phi(k) = \mathbf{A}_d^k \quad (77)$$

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k) \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Psi(k-j-1) \mathbf{B}_d \mathbf{u}(j) \quad (78)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \Phi(k) \mathbf{x}(0) + \mathbf{C}_d \sum_{j=0}^{k-1} [\Phi(k-j-1) \mathbf{B}_d \mathbf{u}(j)] + \mathbf{D}_d \mathbf{u}(k) \quad (79)$$

Die Berechnung der Fundamental- und Übertragungsmatrix kann ebenfalls im Bildbereich berechnet werden. Hierfür wird nun die z-Transformation angewandt.

$$\begin{aligned}z \mathbf{X}(z) - z \mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}_d \mathbf{X}(z) + \mathbf{B}_d \mathbf{U}(z) \\ \mathbf{X}(z)(z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_d) &= z \cdot \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}_d \mathbf{U}(z) \\ \mathbf{X}(z) &= (z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1} z \cdot \mathbf{x}(0) + (z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{B}_d \mathbf{U}(z)\end{aligned}\quad (80)$$

Der Vergleich mit den Laplace-Transformierten Lösungen der kontinuierlichen Funktionen liefert die folgenden Definitionen.

$$\Phi(z) = (z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1} \cdot z \quad (81)$$

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}_d(z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{B}_d + \mathbf{D}_d \quad (82)$$

Auch die charakteristische Gleichung und somit die Pole des Systems können mit Hilfe der z-Transformierten der Zustandsraumdarstellung bestimmt werden.

$$|z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_d| = 0 \quad (83)$$

Somit stehen nun äquivalente Methoden zur Untersuchung von diskreten Systemen bereit. Weshalb im nächsten Schritt der Zusammenhang zwischen den Polen  $z_i$  des diskreten Systems und dessen Stabilitäts- bzw. Zeitverhalten hergestellt werden soll.

Die Herleitung der z-Transformation basiert auf der folgenden Substitution.

$$z = e^{T \cdot s} \quad | \quad s = \sigma + \omega j \quad (84)$$

Wobei die Position von  $z$  in der imaginären Zahlenebene mit Hilfe von Polarkoordinaten beschrieben wird.  $|z|$  beschreibt dabei den Abstand des Punktes zum Ursprung und  $\psi$  beschreibt den Winkel zwischen dem Punkt und der reellen Achse entgegen des Uhrzeigersinnes. Die Koordinaten werden über den folgenden Zusammenhang berechnet.

$$|z| = e^{T \cdot \sigma} \quad \phi = \omega \cdot T \quad (85)$$

Die Stabilität eines kontinuierlichen Systems ist gegeben, wenn die Realteile  $\sigma_i$  seiner Pole  $s_i$  negativen sind. Daraus folgt, dass

$$|z_i| = e^{T \cdot \sigma_i} \stackrel{!}{<} 1 \quad | \quad \sigma_i \stackrel{!}{<} 0 \quad (86)$$

gelten muss. Das Zeitverhalten eines kontinuierlichen Systems wird von dem Abstand seiner Pole zu der imaginären Achse definiert. Hierbei gilt je kleiner der Realteil eines stabilen Pols ist, desto schneller konvergiert das System gegen seinen Endwert. Folglich führen diskrete Pole mit kleinen Beträgen zu einem schnellerem System.

Die zweite Koordinate der diskreten Pole wird durch den Imaginärteil der Variable  $s$  definiert. Bei einem komplex konjugierten Polpaar definieren diese die Eigenfrequenz des Systems. Allerdings lässt sich diese nicht eindeutig aus der Abbildung der diskreten Polen  $z_i$  in der Zahlenebene rekonstruieren, da nach

$$\psi = \omega \cdot T \quad (87)$$

unendliche viele Punkte in der s-Ebene der Position des diskreten Pols entsprechen.

### 3 Sensorik

Für die Berechnung des Regelkreises müssen die Zustandsgrößen erfasst werden, deshalb beschäftigt sich der folgende Abschnitt mit der verwendeten Sensorik und derer Auswertung. Hierfür müssen die Sensoren in das mechanische Modell eingebunden werden um Messkennlinien zu bestimmen. Hierbei zeigt sich, dass mehrere Möglichkeiten bestehen die verschiedenen Größen zu ermitteln. Eine Vorarbeit hat gezeigt, dass diese von unterschiedlichen Störungen betroffen sind, weshalb Methoden erarbeitet werden müssen um einen qualitativen Vergleich zu ermöglichen.

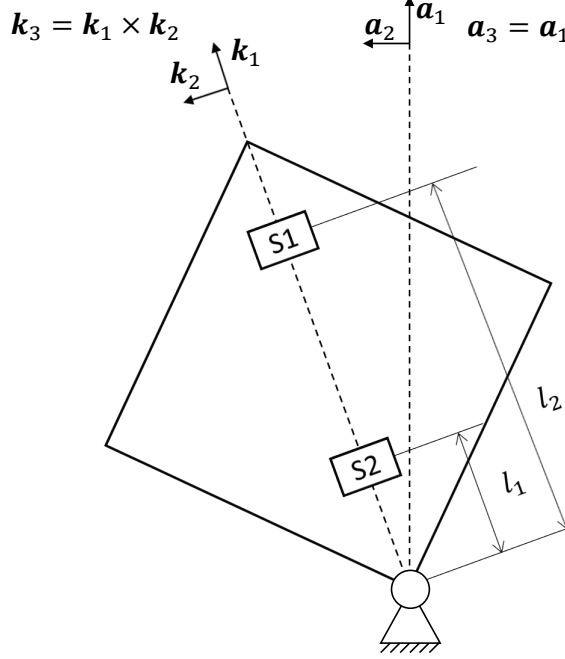


Abbildung 6: Anordnung der Sensoren an der Würfelseite, Quelle: eigene Darstellung

An der Würfelseite sind zwei MPU6050-ICs angebracht, um die Größen  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  und  $\ddot{\varphi}$  zu messen. Die ICs verfügen über einen Beschleunigungs- und Drehratensensor, welche jeweils Messwerte in Richtung von drei Achsen liefern. Zuerst müssen Messkennlinien ermittelt werden. Das heißt die Messwerte der Sensoren werden mit Hilfe des mechanischen Modells in Zusammenhang mit den Messgrößen  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  und  $\ddot{\varphi}$  gebracht.

Die Messwerte der Drehratensensoren entsprechen der Winkelgeschwindigkeit der Würfelseite im körperfesten Bezugssystem  $K$ .

$$\omega_{S_i} = \begin{pmatrix} \omega_{x_i}^{S_i} \\ \omega_{y_i}^{S_i} \\ \omega_{z_i}^{S_i} \end{pmatrix} = {}^K ({}^A \omega^K) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (88)$$

Somit sind nur die Komponenten in Richtung der Z-Achse von Bedeutung. Diese werden als Messwerte  $y_i$  definiert.

$$y_i \equiv \omega_z^{S_i} \quad y_i = \dot{\varphi} \quad (i = 1, 2) \quad (89)$$

Die Ausgabewerte  $\mathbf{a}_{S_i}$  der Beschleunigungssensoren setzt sich, nach dem idealisierten Modell, aus zwei Termen zusammen. Der erste Term entspricht der Beschleunigung der Sensoren im raumfesten Bezugssystem  $A$ , welche gleich der zweiten Ableitung des Ortsvektors  $\mathbf{s}_i$  der Sensoren mit Respekt zu  $A$  ist.

$$\begin{aligned} {}^A \mathbf{a}_{S_i} &= \frac{{}^A d {}^A \mathbf{v}_{S_i}}{dt} = \frac{{}^A d ({}^A \omega^K \times \mathbf{s}_i)}{dt} = \frac{{}^A d {}^A \omega^K}{dt} \times \mathbf{s}_i + {}^K \omega^{S_i} \times \frac{{}^A d \mathbf{s}_i}{dt} \\ &= {}^K \boldsymbol{\alpha}^{S_i} \times \mathbf{s}_i + {}^A \omega^K \times ({}^A \omega^K \times \mathbf{s}_i) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}^2 \cdot l_i \\ \ddot{\varphi} \cdot l_i \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (90)$$

Der zweite Term wird von der Gravitation beeinflusst. Das heißt er entspricht der Darstellung des Erdbeschleunigungsvektors im körperfesten Bezugssystem  $K$ .

$$\mathbf{g} = {}^A\mathbf{P}^K \cdot \begin{pmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g \cdot c_\varphi \\ g \cdot s_\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (91)$$

Somit ergeben sich die folgenden Zusammenhänge für die Anzeigewerte  $\mathbf{a}_{S_i}$  der Beschleunigungssensoren, welche wiederum als Messwerte  $y_3, \dots, y_6$  definiert werden.

$$\mathbf{a}_{S_i} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_{S_i} \\ \ddot{y}_{S_i} \\ \ddot{z}_{S_i} \end{pmatrix} = {}^K({}^A\mathbf{a}^{S_i} + \mathbf{g}) = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}^2 \cdot l_i - g \cdot c_\varphi \\ \ddot{\varphi} \cdot l_i + g \cdot s_\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} y_3 &\equiv a_x^{S_1} & y_3 &= -\dot{\varphi}^2 \cdot l_1 - g \cdot c_\varphi \\ y_4 &\equiv a_x^{S_2} & y_4 &= -\dot{\varphi}^2 \cdot l_2 - g \cdot c_\varphi \\ y_5 &\equiv a_y^{S_1} & y_5 &= \ddot{\varphi} \cdot l_1 + g \cdot s_\varphi \\ y_6 &\equiv a_y^{S_2} & y_6 &= \ddot{\varphi} \cdot l_2 + g \cdot s_\varphi \end{aligned} \quad (93)$$

### 3.1 Untersuchung der Messsysteme für $\dot{\varphi}$

Die Winkelgeschwindigkeit der Würfelseite kann mit Hilfe der beiden Drehratensensoren gemessen werden. Da zwei dieser Sensoren verwendet werden kann ein dritter Messwert definiert werden, welcher der Mittlung der beiden Sensorwerte entspricht.

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv \omega_z^{S_1} y_1 = \dot{\varphi} \\ y_2 &\equiv \omega_z^{S_2} y_2 = \dot{\varphi} \\ y_3 &\equiv \frac{y_1 + y_2}{2} y_3 = \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (94)$$

Die drei Messsysteme besitzen die selbe Kennlinie und somit identische Empfindlichkeit, weshalb diese nicht als Bewertungskriterium verwendet werden kann. Allerdings können die Messwerte in der Ruhelage über einen Zeitraum  $T$  aufgenommen werden. In dieser Messreihe verschwindet der Wert der Messgröße  $\dot{\varphi} = 0$ . Deshalb handelt es sich bei den gemessenen Werten um reine Rauschsignale, deren Effektivwerte bestimmt werden können. Diese sollen als erstes Bewertungskriterium verwendet werden. Aus der Messreihe über  $n = 8096$  Werte bei einer Abtastfrequenz  $f_a = 50\text{Hz}$  ergeben sich die folgenden Effektivwerte.

$$\begin{aligned} R_1^{Eff} &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_1(k)^2} = 0.0010 \\ R_2^{Eff} &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_2(k)^2} = 0.0010 \\ R_3^{Eff} &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_3(k)^2} = 0.0007 \end{aligned} \quad (95)$$

Der Effektivwert des Rauschens wird durch die Mittlung der beiden Sensorwerte minimiert. Deshalb wird der Messwert  $y_3$  zur Bestimmung von  $\dot{\varphi}$  verwendet.

### 3.2 Ermittlung von $\varphi$

Zuerst sollen die Möglichkeiten zur Bestimmung von  $\varphi$  näher untersucht werden. Die Kennlinien der Beschleunigungssensoren zeigen, dass die momentane Ausrichtung der Würfelseite deren Anzeigewerte beeinflusst. Allerdings hängen die Beschleunigungswerte von weiteren Messgrößen ab, weshalb ein einzelner Wert nicht ausreicht um den Winkel  $\varphi$  zu berechnen. Allerdings kann durch die gewichtete

Differenz zweier Beschleunigungswerte der Einfluss der Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung eliminiert werden.

$$\begin{aligned}
y_9 &\equiv y_3 - \frac{l_1}{l_2} y_4 y_9 = -g \cdot c_\varphi \cdot \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \\
y_{10} &\equiv y_5 - \frac{l_1}{l_2} y_6 y_{10} = g \cdot s_\varphi \cdot \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \\
y_{11} &\equiv \frac{y_{10}}{y_{11}} y_{11} = -\tan(\varphi)
\end{aligned} \tag{96}$$

Als erstes Beurteilungskriterium werden die Empfindlichkeiten der Messsysteme verwendet, welche sich durch die partielle Ableitung der Kennlinien nach der Messgröße ergeben.

$$\begin{aligned}
S_9(\varphi) &= \frac{\partial y_9}{\partial \varphi} = g \cdot s_\varphi \cdot \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \\
S_{10}(\varphi) &= \frac{\partial y_{10}}{\partial \varphi} = g \cdot c_\varphi \cdot \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \\
S_{11}(\varphi) &= \frac{\partial y_{11}}{\partial \varphi} = -\tan(\varphi)^2 - 1
\end{aligned} \tag{97}$$

In der Abbildung ist deutlich zu erkennen, dass der Messwert  $y_{10}$  die höchste Empfindlichkeit besitzt.

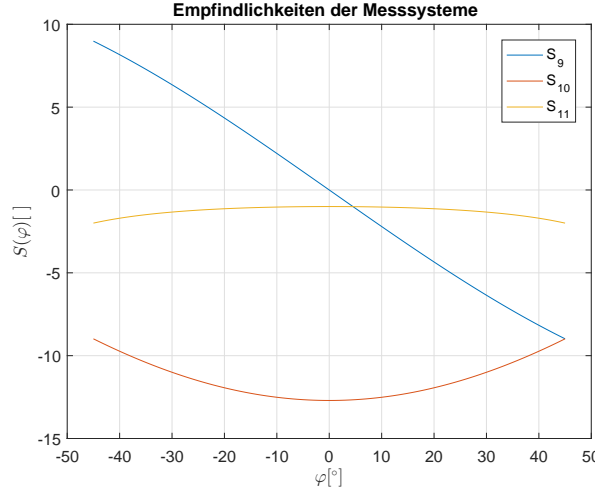


Abbildung 7: Empfindlichkeiten für  $\varphi$ , Quelle: eigene Darstellung

Hieraus folgt, dass bereits kleine Änderung der Messgröße zu einer deutlichen Änderung des Messwertes führen. Folglich ist zu erwarten, dass das Signal-Rausch-Verhältnis mit zunehmender Empfindlichkeit größer wird. Um die Signal-Rausch-Verhältnisse der Messsysteme zu bestimmen, wird die Würfelseite in einer bekannten Ausrichtung fixiert. Dadurch entsteht ein stationärer Prozess und es kann angenommen werden, dass der Mittelwert des Signales dem Nutzsignal entspricht. Die folgende Abbildung zeigt den Verlauf der Messgröße  $\varphi$  aus den drei Messsystemen.

Die resultierenden Signal-Rausch-Verhältnisse sind:

$$SNR(y_9) = 20.57dB \quad SNR(y_{10}) = 31.21dB \quad SNR(y_{11}) = 31.50dB \tag{98}$$

Hier zeigt sich, dass das SNR von  $y_{11}$  trotz niedriger Empfindlichkeit am höchsten ist. Einen mögliche Ursache hierfür ist, dass es sich bei dem Rauschen nicht um rein zufällige Signale handelt sondern diese von Störeinflüssen wie z.B. der Temperatur abhängen. Die Temperatur fließt nach Hersteller als weitere Proportionalität in die Kennlinie ein und wird somit durch die Division zweier mehrere Messwerte gekürzt. Weshalb die Division der beiden Messwerte zu einem verbesserten Signal-Rausch-Verhältnis führt. In einer Vorarbeit hat sich herausgestellt, dass die Winkelschätzung aus den Beschleunigungssensoren bei hochfrequenten Anregungen von starken Störungen betroffen sind. Deshalb wird neben den Beschleunigungssensoren kann der Winkel  $\varphi$  auch aus den integrierten Winkelgeschwindigkeiten berechnet werden. Somit ergeben sich die beiden Schätzungen für den Winkel  $\varphi$ .

$$\varphi_A = -\tan(y_{11}) \quad \varphi_G = \int y_3 dt \tag{99}$$



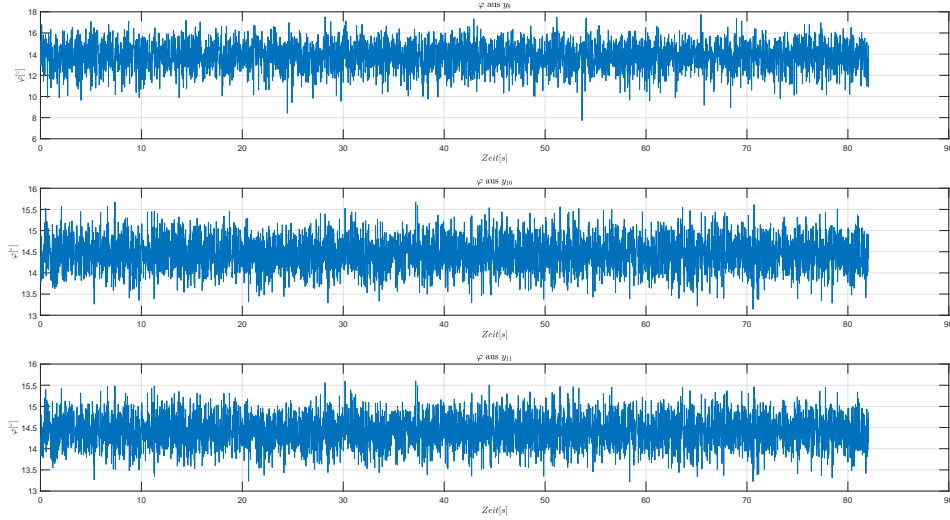


Abbildung 8: Signal-Rausch-Verhältnis der  $\varphi$ -Messsysteme, Quelle: eigene Darstellung

Um die bereits angesprochen Störungen der Beschleunigungssensoren bei hochfrequenter Anregung zu untersuchen werden im nächsten Schritt Schwingversuche durchgeführt. Hierfür wird die Würfelseite als gewöhnliches Pendel aufgehängt, wodurch sich das Vorzeichen des Gravitationsmomentes ändert. Somit ergibt sich die folgende Zustandsraumdarstellung.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (100)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-m_G \cdot g \cdot l_C}{I^{K/O} + m_r \cdot l_M^2} & \frac{-C_\varphi}{I^{K/O} + m_r \cdot l_M^2} & \frac{C_\psi}{I^{K/O} + m_r \cdot l_M^2} \\ \frac{m_G \cdot g \cdot l_C}{I^{K/O} + m_r \cdot l_M^2} & \frac{C_\varphi}{I^{K/O} + m_r \cdot l_M^2} & \frac{C_\psi}{I^{G/O} (I^{K/O} + m_r \cdot l_M^2)} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{I^{G/O}}{I^{R/M} (I^{K/O} + m_r \cdot l_M^2)} \end{pmatrix} \quad (101)$$

$$\mathbf{y} = (\varphi) \quad (102)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \quad (103)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \quad (104)$$

Mit Hilfe der Zustandsraumdarstellung kann die Übertragungsfunktion  $G(s)$  im Bildbereich berechnet werden.

## 4 Herleitung/Interpretation Fourier-Spektren

Die Beurteilung der dynamischen Störungen erfolgt über eine Spektralanalyse. Hierfür wird die DFT der Messgrößen berechnet. Um die Interpretation der DFT-Spektren zu ermöglichen, wird zuerst der Zusammenhang der DFT und der Fourier-Transformation des zu Grunde liegendem Signal hergeleitet. Die Fourier-Transformation basiert auf der Theorie, dass alle zeitkontinuierlichen Signale aus einer Summe von harmonischen Schwingungen synthetisiert werden können. Der Betrag der Fourier-Transformation gibt die Amplituden der beteiligten Schwingungen wieder. Nun ergibt sich die Frage wie das Spektrum eines zeitdiskreten Signals, das über einen begrenzten Zeitraum abgetastet wird, berechnet werden kann. Hierfür wird zunächst die komplexe harmonische Schwingung  $x_n$  mit der Frequenz  $f$  betrachtet, welche mit einer Frequenz  $f_a$  ( $T_a = 1/f_a$ ) abgetastet wird. Mit Hilfe der normierten Kreisfrequenz  $\Omega = 2 \cdot \pi \cdot f/f_a$ , welche das Verhältnis der Schwingungsfrequenz und der Abtastrate darstellt, ergibt sich die folgende Funktion für  $x_n$ .

$$x_n = e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{f}{f_a}} = e^{j \cdot n \cdot \Omega} \quad (105)$$

Wenn nun ein System, welches die diskrete Impulsantwort  $h_n$  besitzt, von dem Signal  $x_n$  angeregt wird, ergibt sich der folgende Zusammenhang für dessen Ausgangssignal  $y_n$ .

$$y_n = h_n * x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot (n-k)} = e^{j \cdot n \cdot \Omega} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \quad (106)$$

Hieraus folgt, dass die Antwort eines Systems auf eine diskrete harmonische Schwingung als Produkt der Schwingung mit dem Term  $\sum h_k \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k}$ . Dieser kann somit als Systemverstärkung einer komplexen Eingangsschwingung mit der normierten Frequenz  $\Omega$  interpretiert werden. Diese Systemeigenschaft entspricht der Aussage der gewöhnlichen Fourier-Transformierten einer zeitkontinuierlichen Übertragungsfunktion. Deshalb gilt für die DTFT (Discrete-Time-Fourier-Transform) eines Signals  $x_n$ :

$$X_{DTFT}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \quad (107)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die DTFT lediglich in Abhängigkeit der normierten Kreisfrequenz  $\Omega$  berechnet werden kann. Dies ist eine Folge der Abtastung, da das zeitdiskrete Signal  $x_n$  keine Information über den zeitlichen Abstand seiner Stützstellen enthält. Somit können auch die absoluten Frequenzen des Spektrums nur mit Hilfe der Abtastrate  $f_a$  rekonstruiert werden. Für den Zusammenhang zwischen dem FT-Spektrum  $X(j\omega)$  des ursprünglichen, zeitkontinuierlichen Signal und dem DTFT-Spektrum  $X_{DTFT}(\Omega)$  des zeitdiskreten Signales:

$$\frac{1}{f_a} X_{DTFT}\left(\frac{\omega}{f_a}\right) = X(j\omega) \quad (108)$$

Die Problematik der DTFT liegt darin, dass es sich zwar um ein zeitdiskretes Signal handelt, dieses aber nach wie vor über einen unendlichen Wertebereich definiert ist. D.h. es liegt eine geschlossene Funktion vor. Somit ermöglicht die DTFT nicht die Berechnung der Spektralanteile eines Signales, dessen Abtastwerte nur über einen begrenzten Zeitraum bekannt ist. Zusätzlich ist die DTFT selbst eine kontinuierliche Funktion und somit nur schwierig auf digitalen Rechnern umsetzbar. Deshalb soll nun erläutert werden wie ein diskretes Spektrum eines abgetasteten Signals, welches nur über einen begrenzten Zeitraum definiert ist, berechnet werden kann. Hierfür wird das Signal  $\hat{x}_n$  betrachtet, welches für die ersten  $N$  Abtastwerte der komplexen harmonischen Schwingung  $x_n$  entspricht und anschließend verschwindet.

$$\hat{x}_n = \begin{cases} x_n & n \in [0; N-1] \\ 0 & n \notin [0; N-1] \end{cases} \quad (109)$$

Somit ergibt sich für die DTFT von  $\hat{x}_n$ :

$$\hat{X}_{DTFT}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}_k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \Omega} = \sum_k^{N-1} x_k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \Omega} \quad (110)$$

Wird nun die DTFT wiederum über  $N$  Werte diskretisiert erhält man als Ergebnisse die diskrete Fourier-Transformation (DFT).

$$X_{DFT}(m) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \Omega_m} \quad \Omega_m = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{N} \quad (111)$$

Bei der Herleitung der DFT wird ersichtlich, dass das berechnete Spektrum nicht dem des zeitdiskreten Signales  $x_n$  entspricht, sondern dem Spektrum von  $x_n$  multipliziert mit einem Rechteckimpuls, dessen Breite dem Beobachtungszeitraum entspricht. Die Auswirkungen dieser Fensterung auf das DFT-Spektrum werden als Leakage-Effekte bezeichnet. Da für gewöhnlich Informationen über das Spektrum des ursprünglichen, zeitkontinuierlichen Signals gesucht sind müssen einerseits die Leakage-Effekte minimiert werden und der Zusammenhang zwischen FT-Spektrum und DFT-Spektrum hergestellt werden. Falls ein periodisches Signal  $x(t)$  wird über einen Zeitraum  $T$  beobachtet wird und  $T$  kein Vielfaches der Periodenlänge des Signales ist so entstehen Signalsprünge am Ende der Beobachtung. Diese Sprünge führen zu spektrale Überlappungen, welche wiederum das DFT-Spektrum verfälschen. Deshalb ist der Beobachtungszeitraum mit der Schwingung eines periodischen Signales zu synchronisieren. Des weiteren können Leakage-Effekte minimiert werden indem ein möglichst großer Beobachtungszeitraum gewählt wird. Ist dies der Fall gilt folgender Zusammenhang für Spektralanteile, welche keinen unendlichen Wert besitzen.

$$X_{DFT}(m) \approx f_a \cdot X(j \cdot m \cdot \Delta\omega) \quad \Delta\omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_a}{N} \quad (112)$$

Falls das Spektrum  $X(j \cdot \omega)$  an der Stelle  $m \cdot \Delta\omega$  einen Dirac-Impuls-Anteil besitzt so gilt für den komplexen Fourierkoeffizienten  $c_k$  des Signales an dieser Frequenz:

$$X_{DFT}(m) = N \cdot c_k \quad (113)$$