

Kapitel 1

Modellbildung Würfel auf Kante

1.1 Untersuchung der Kinematik

Der erste Schritt besteht darin die kinematischen Zusammenhänge des Systems zu analysieren. Im Fall, dass der Würfel auf einer Kante balanciert, verfügt dieser über zwei rotatorische Freiheitsgrade. Der erste wird von der generalisierten Koordinate φ beschrieben und gibt die Orientierung des Würfelgehäuses wieder. Die zweite generalisierte Koordinate ψ erfasst die Rotation der Schwungmasse relativ zu dem Würfelgehäuse.

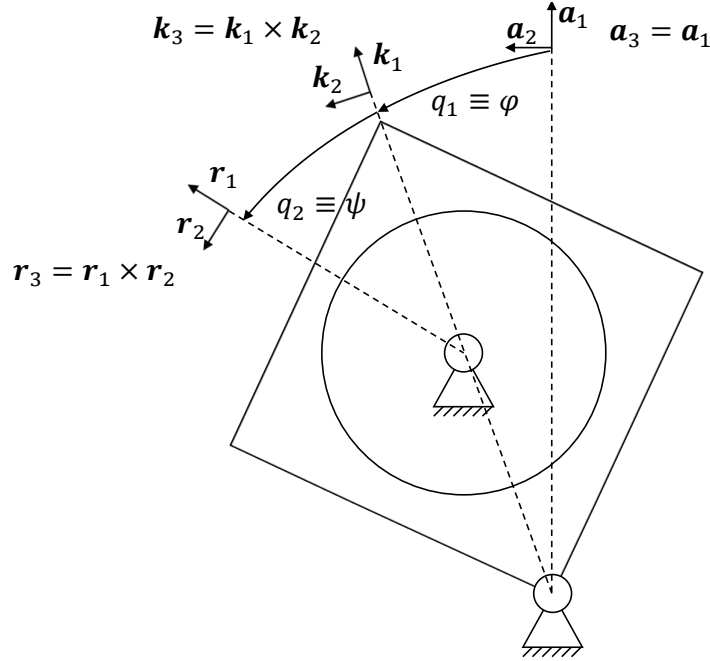


Abbildung 1.1: Kinematikplan des Würfels auf einer Kante, Quelle: eigene Darstellung

Um die Körper des Systems zu modellieren werden im nächsten Schritt die Bezugssysteme A , K und R eingeführt, wobei ein beliebiges Bezugssystem B durch drei Vektoren \mathbf{b}_i $i \in \{1, 2, 3\}$ definiert wird. Die Vektoren \mathbf{b}_i werden als Vektorbasis bezeichnet.¹ In diesem Fall ist A ein Inertialsystem, das heißt die Ausrichtung der Vektoren \mathbf{a}_i ist konstant. Deshalb wird A bzw. dessen Vektorbasis auch als raumfest bezeichnet. Bei K handelt es sich um ein körperfestes Bezugssystem, die Vektoren \mathbf{k}_i sind an dem Würfelgehäuse fixiert und ändern ihre Ausrichtung in Abhängigkeit von φ . Das Bezugssystem R ist ebenfalls körperfest, wobei die Vektorbasis an der Schwungmasse fixiert ist. Folglich beschreiben die Koordinaten φ und ψ die Rotation von K relativ zu A bzw. von R gegenüber K . Mittels eines Bezugssystems kann ein beliebiger Vektor als Linearkombination der Vektorbasis dargestellt werden. Als Beispiel sei der Ortsvektor \mathbf{c} des Würfelschwerpunktes genannt, wobei das verwendete Bezugssystem durch den vorangehenden Superskript gekennzeichnet wird.

$$\mathbf{c} = l_C \cdot \mathbf{k}_1 + 0 \cdot \mathbf{k}_2 + 0 \cdot \mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} l_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^K \quad (1.1)$$

¹Allgemein genügen drei linear unabhängige Vektoren als Vektorbasis, allerdings werden in dieser Arbeit ausschließlich paarweise orthogonale Einheitsvektoren verwendet, da diese eine einfachere Handhabung ermöglichen. Deshalb wird im weiteren Verlauf nicht explizit erwähnt, dass es sich bei den Vektorbasen um paarweise orthogonale Einheitsvektoren handelt.

Um nun die Komponenten α_i des Vektors \mathbf{c} in dem Bezugssystem A zu erhalten, muss das Skalarprodukt $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{c} \rangle$ berechnet werden. Wird dieser Ansatz auf alle drei Komponenten appliziert ergibt sich der folgende Zusammenhang.²

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}^A = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}_1 \rangle \cdot \mathbf{a}_1 + \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}_2 \rangle \cdot \mathbf{a}_2 + \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}_3 \rangle \cdot \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}_3 \rangle \end{pmatrix}^A \\
 &= \begin{pmatrix} \beta_1 \cdot \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{k}_1 \rangle + \beta_2 \cdot \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{k}_2 \rangle + \beta_3 \cdot \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{k}_3 \rangle \\ \beta_1 \cdot \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{k}_1 \rangle + \beta_2 \cdot \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{k}_2 \rangle + \beta_3 \cdot \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{k}_3 \rangle \\ \beta_1 \cdot \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{k}_1 \rangle + \beta_2 \cdot \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{k}_2 \rangle + \beta_3 \cdot \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{k}_3 \rangle \end{pmatrix}^A = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{k}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{k}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{k}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{k}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{k}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{k}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{k}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{k}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{k}_3 \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \end{pmatrix}^K \\
 &= \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \end{pmatrix}^K \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

Somit handelt es sich bei der Projekt eines Vektors, der in einem Bezugssystem E dargestellt ist, in das Bezugssystem F um eine lineare Abbildung, welche durch die Abbildungsmatrix ${}^E\mathbf{P}^F$ definiert ist. Des weiteren zeigt dieses Beispiel die perspektivische Bedeutung eines Bezugssystem. Wird der Vektor \mathbf{c} in K dargestellt hängt er lediglich von der Länge l_C ab und ist deshalb konstant. Aus der Perspektive von A ist der Vektor eine Funktion von φ und somit variabel. Die Begründung hierfür ist, dass das Inertialsystem A die Bewegung des Würfels im Raum wahrnimmt, wodurch der Ortsvektor des Schwerpunktes variable erscheint. Im Gegensatz dazu bewegt sich das körperfeste Bezugssystem K mit dem Würfel und erfasst dessen Bewegung somit nicht. Dieser Umstand kann genutzt werden, indem ein Vektor zunächst in einer einfachen Form dargestellt und anschließend in das gewünschte Bezugssystem projiziert wird. Als Beispiel dient die Berechnung des Gravitationsmoments $\mathbf{T}^{K/O}$. Der Erdbeschleunigungsvektor \mathbf{g} ist im Inertialsystem A konstant und wird von dort in das körperfeste System K transformiert.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}^{K/O} = \mathbf{c} \times m \cdot \mathbf{g} &= \begin{pmatrix} l_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^K \times \begin{pmatrix} -m \cdot g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^A = \begin{pmatrix} l_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^K \times \begin{pmatrix} {}^A\mathbf{P}^K \cdot \begin{pmatrix} -m \cdot g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^A \\
 &= \begin{pmatrix} l_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^K \times \begin{pmatrix} -c_\varphi \cdot m \cdot g \\ s_\varphi \cdot m \cdot g \\ 0 \end{pmatrix}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s_\varphi \cdot m \cdot g \cdot l_C \end{pmatrix}^K \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

Dieses Beispiel zeigt, dass die Einführung von Bezugssystemen eine eindeutige Notation und Vorgehensweise zur Berechnung von vektorwertigen Funktionen mit sich bringt. Man möge bei diesem Anwendungsfall zwar argumentieren, dass die trigonometrischen Zusammenhänge

²Um die allgemeine Gültigkeit der linearen Abbildung zu verdeutlichen wird in dieser Gleichung die Definition $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} l_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^K \equiv \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}^K$ verwendet.

des Gravitationsmomentes auch aus der Abbildung [?] ablesen lassen. Allerdings ist die hier betrachtete Vorgehensweise allgemeingültig und kann auf beliebig komplexe Systeme angewendet werden. Beispielsweise kann das Gravitationsmoment in dem Fall, dass der Würfel auf einer Ecke steht, kaum mehr aus einer Skizze bestimmt werden.

Zur vollständigen Beschreibung der Kinematik müssen die Geschwindigkeiten des Systems ermittelt werden. Als Beispiel für die Ableitung eines Vektors dient wieder der Ortsvektor \mathbf{c} des Schwerpunktes. Dieser ist aus der Perspektive des Bezugssystem K konstant, folglich verschwindet auch dessen Ableitung bzw. Geschwindigkeit. Wird der Vektor aber in A abgebildet hängt dieser von der Zeitfunktion $\varphi(t)$ ab. Deshalb muss bei der Ableitung eines Vektors das Bezugssystem angegeben werden, aus dessen Perspektive differenziert wird ([Kane], S.25ff). Wenn \mathbf{c} in A differenziert werden soll, so muss dieser zunächst in A dargestellt und anschließend komponentenweise nach der Zeit abgeleitet werden.

$$\frac{{}^A d\mathbf{c}}{dt} = \frac{d(c_\varphi \cdot l_C)}{dt} \cdot \mathbf{a}_1 + \frac{d(0)}{dt} \cdot \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -s_\varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot l_C \\ c_\varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot l_C \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Analog handelt es sich bei der Geschwindigkeit ${}^B \mathbf{v}^P$ bzw. Beschleunigung ${}^B \mathbf{a}^P$ eines Punktes oder Körpers P um eine Bewegung relativ zu einem Bezugssystem B . Diese werden wie folgt definiert ([Kane], S.28).

$${}^B \mathbf{v}^P = \frac{{}^B d\mathbf{p}}{dt} \quad {}^B \mathbf{a}^P \quad (1.5)$$

Die selbe Notation wird für Winkelgeschwindigkeiten und -beschleunigungen eingeführt, wobei ${}^A \boldsymbol{\omega}^B$ die Winkelgeschwindigkeit bzw. ${}^A \boldsymbol{\alpha}^B$ die Winkelbeschleunigung eines Punktes oder Bezugssystems B relativ zu A ist. Die Geschwindigkeit relativ zu einem Inertialsystem wird auch als absolute Geschwindigkeit bezeichnet. Für die Bezugssysteme K und R lassen sich mit Hilfe der Abbildung [?] die folgenden Winkelgeschwindigkeiten bestimmen, wobei die absolute Winkelgeschwindigkeit eines Bezugssystems die Summe seiner relativen Winkelgeschwindigkeiten ist ([Kane], S.24f).

$${}^A \boldsymbol{\omega}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad {}^K \boldsymbol{\omega}^R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad {}^A \boldsymbol{\omega}^R = {}^A \boldsymbol{\omega}^K + {}^K \boldsymbol{\omega}^R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Der letzte Schritt bei der Untersuchung der Kinematik besteht darin die generalisierten Geschwindigkeiten zu definieren und daraus die partiellen Geschwindigkeiten zu berechnen. Bei den generalisierten Geschwindigkeiten u_i handelt es sich um skalare Größen deren Anzahl gleich der Zahl der generalisierten Koordinaten ist. Die generalisierten Geschwindigkeiten sind für gewöhnlich abhängig von den Zeitableitungen der generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_i , wobei sie so gewählt werden müssen, dass die Definitionen eindeutig nach den Ableitungen \dot{q}_i aufgelöst werden können. Die Einführung der generalisierten Geschwindigkeiten verfolgt das Ziel, möglichst einfache Ausdrücke für die absoluten Geschwindigkeiten ${}^A \boldsymbol{\omega}^K$ und ${}^A \boldsymbol{\omega}^R$ und, wie sich im späteren Verlauf zeigen wird, einfachere Ausdrücke der Bewegungsgleichungen zu

erhalten. Deshalb werden hier die folgenden Definitionen gewählt.

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv \dot{\varphi} & u_2 &\equiv \dot{\varphi} + \dot{\psi} \\ {}^A\boldsymbol{\omega}^K &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix} & {}^A\boldsymbol{\omega}^R &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Diese Geschwindigkeitsausdrücke können auch in die Form

$$\begin{aligned} {}^A\boldsymbol{\omega}^K &= u_1 \cdot {}^A\boldsymbol{\omega}_1^K + u_2 \cdot {}^A\boldsymbol{\omega}_2^K & {}^A\boldsymbol{\omega}^R &= u_1 \cdot {}^A\boldsymbol{\omega}_1^R + u_2 \cdot {}^A\boldsymbol{\omega}_2^R \\ {}^A\boldsymbol{\omega}_1^K &= \mathbf{k}_3 & {}^A\boldsymbol{\omega}_2^K &= 0 & {}^A\boldsymbol{\omega}_1^R &= 0 & {}^A\boldsymbol{\omega}_2^R &= \mathbf{k}_3 \end{aligned} \quad (1.8)$$

gebracht werden, wobei die Größen ${}^A\boldsymbol{\omega}_i^K$ und ${}^A\boldsymbol{\omega}_i^R$ partielle Geschwindigkeiten genannt werden. Diese Zerlegung kann so interpretiert werden, dass die generalisierten Geschwindigkeiten u_i als skalare Größen den Betrag der Bewegung und die entsprechende partielle Geschwindigkeit, als vektorielle Größe, deren Richtung wiedergibt. Die Vorteile diese Zerlegung in generalisierte und partielle Geschwindigkeiten wird sich im folgenden Abschnitt zeigen.

1.2 Untersuchung der Kinetik

Im nächsten Schritt wird die Kinematik des Systems untersucht, um die Bewegungsgleichungen herzuleiten. Hierfür werden zunächst die Drehmomente analysiert, welche auf den Würfelgehäuse und die Schwungmasse wirken. Letztere wird einerseits von dem Motormoment $\mathbf{T}_M^{R/M}$ beschleunigt, andererseits wirkt ein verzögerndes Reibmoment $\mathbf{T}_M^{R/M}$. Das Reibmoment wird als proportional zu der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ modelliert.

$$\mathbf{T}^{R/M} = \mathbf{T}_M^{R/M} + \mathbf{T}_R^{R/M} = [T_M - C_\psi(u_2 - u_1)] \cdot \mathbf{k}_3 \quad (1.9)$$

Das Motor- und Reibmoment wirken an dem Verbindungspunkt zwischen Schwungmasse und Würfelgehäuse. Deshalb beeinflussen die beiden den Würfelkörper in umgekehrter Richtung. Des weiteren wird das Würfelgehäuse von dem Gravitationsmoment $\mathbf{T}_G^{K/O}$ beschleunigt. Die Summe der Komponenten ergibt das resultierende Drehmoment $\mathbf{T}^{K/O}$.

$$\mathbf{T}^{K/O} = \mathbf{T}_G^{K/O} - \mathbf{T}_M^{R/M} - \mathbf{T}_R^{R/M} = [m \cdot g \cdot l_C \cdot s_\varphi - T_M + C_\psi(u_2 - u_1)] \cdot \mathbf{k}_3 \quad (1.10)$$

Um die Bewegungsgleichungen zu ermitteln, werden die generalisierten aktiven Kräfte F_i benötigt. Hierfür werden die Skalarprodukte der Drehmomente, welche auf die Körper wirken, und die partiellen Winkelgeschwindigkeiten, des entsprechenden Körpers, berechnet. Die Summe über alle Körper ergibt die generalisierte aktive Kraft F_i .

$$\begin{aligned} F_1 &= \langle \mathbf{T}^{K/O}, {}^A\boldsymbol{\omega}_1^K \rangle + \langle \mathbf{T}^{R/M}, {}^A\boldsymbol{\omega}_1^R \rangle = m \cdot g \cdot l_C \cdot s_\varphi - T_M + C_\psi(u_2 - u_1) \\ F_2 &= \langle \mathbf{T}^{K/O}, {}^A\boldsymbol{\omega}_2^K \rangle + \langle \mathbf{T}^{R/M}, {}^A\boldsymbol{\omega}_2^R \rangle = T_M - C_\psi(u_2 - u_1) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Die partiellen Geschwindigkeiten können als Bewegungsrichtungen der Körper interpretiert werden. Somit stellen die generalisierten Kräfte F_i den Beitrag der Drehmomente in die jeweilige Bewegungsrichtung wieder.

Als Gegenstück zu den generalisierten aktiven Kräften müssen nun die generalisierten Trägheitskräfte F_i^* ermittelt werden. Das resultierende Trägheitsmoment der Schwungmasse ergibt sich aus dem Produkt des Skalars I_R , welcher das Massenträgheitsmoment des Körpers relativ zu M beschreibt, und der Winkelbeschleunigung ${}^A\boldsymbol{\alpha}^R$.³

$$\mathbf{T}_*^{R/M} = -I_R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix}^K \quad (1.12)$$

Das Trägheitsmoment des Würfelkörpers berechnet sich aus dessen Trägheitsskalar I_K und der Winkelbeschleunigung ${}^A\boldsymbol{\alpha}^K$. Die Größe I_K ist die Summe des Massenträgheitsmoments des Würfelgehäuses $I^{GH/O}$ und dem Einfluss der Schwungmasse, welche dabei als Punkt mit

³Die hier verwendete Berechnung ist nicht allgemeingültig. Für gewöhnlich wird zur Berechnung der Trägheitsmomente ein Trägheitstensor \mathbf{I} verwendet. Die in einem späteren Kapitel erläutert.

der Masse m_R und dem Abstand l_{MO} betrachtet wird.

$$\mathbf{T}_*^{K/O} = -(I^{GH/O} + m_R \cdot l_{MO}^2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{u}_1 \end{pmatrix} = -I_K \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{u}_1 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Die generalisierten Trägheitskräfte F_i^* werden wieder aus der folgenden Summe von Skalarprodukten berechnet.

$$\begin{aligned} F_1^* &= \langle \mathbf{T}_*^{K/O}, {}^A\boldsymbol{\omega}_1^K \rangle + \langle \mathbf{T}_*^{R/M}, {}^A\boldsymbol{\omega}_1^R \rangle = -I_K \cdot \dot{u}_1 \\ F_2^* &= \langle \mathbf{T}_*^{K/O}, {}^A\boldsymbol{\omega}_2^K \rangle + \langle \mathbf{T}_*^{R/M}, {}^A\boldsymbol{\omega}_2^R \rangle = -I_R \cdot \dot{u}_2 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Die Bewegungsgleichungen resultieren nun aus Kanes Gleichung $F_i + F_i^* = 0$.

$$\begin{aligned} F_1 + F_1^* &= 0 \quad \leftrightarrow \quad I_K \cdot \dot{u}_1 = m \cdot g \cdot l_C \cdot s_\varphi - T_M + C_\psi(u_2 - u_1) \\ F_2 + F_2^* &= 0 \quad \leftrightarrow \quad I_R \cdot \dot{u}_2 = T_M - C_\psi(u_2 - u_1) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Rückblickend kann Kanes Methodik in die folgenden Schritte unterteilt werden. Zunächst wird die Kinematik des Systems analysiert, wobei die Körper mit Hilfe von Bezugssystemen modelliert werden. Die Definition von generalisierten Geschwindigkeiten ermöglicht die Bestimmung der partiellen Geschwindigkeiten, wodurch die Bewegung des Systems in eine Art Betrag und Richtung unterteilt wird. Anschließend werden die partiellen Geschwindigkeiten genutzt um die wirkenden Kräfte und Trägheitskräfte in die Bewegungsrichtungen zu projizieren. Hieraus resultieren die generalisierten aktiven Kräfte und generalisierten Trägheitskräfte, welche mittels Kanes Gleichung auf die gesuchten Bewegungsgleichungen führen.

Um die Bedeutung der generalisierten Geschwindigkeiten zu verdeutlichen wird der Fall betrachtet, dass die folgende Definition gewählt wird.

$$\tilde{u}_1 \equiv \dot{\varphi} \quad \tilde{u}_2 \equiv \dot{\psi} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} {}^A\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^K &= \mathbf{k}_3 & {}^A\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2^K &= 0 \\ {}^A\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^R &= 0 & {}^A\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2^R &= \mathbf{k}_3 \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1 &= m \cdot g \cdot l_C \cdot s_\varphi & \tilde{F}_2 &= T_M - C_\psi(u_2 - u_1) \\ \tilde{F}_1^* &= -I_R \cdot (\dot{\tilde{u}}_1 + \dot{\tilde{u}}_2) - I_K \cdot \dot{\tilde{u}}_1 & \tilde{F}_2^* &= -I_R \cdot (\dot{\tilde{u}}_1 + \dot{\tilde{u}}_2) \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1 + \tilde{F}_1^* &= 0 \quad \leftrightarrow \quad I_K \cdot \dot{\tilde{u}}_1 + I_R \cdot (\dot{\tilde{u}}_1 + \dot{\tilde{u}}_2) = m \cdot g \cdot l_C \cdot s_\varphi \\ \tilde{F}_2 + \tilde{F}_2^* &= 0 \quad \leftrightarrow \quad I_R \cdot (\dot{\tilde{u}}_1 + \dot{\tilde{u}}_2) = T_M - C_\psi(\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Dieses Beispiel zeigt, dass die Wahl der generalisierten Geschwindigkeiten eine direkte Auswirkung auf die Form der resultierenden Bewegungsgleichungen hat. Zwar kann die letztere mittels $u_1 = \tilde{u}_1$, $u_2 = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2$ und dem Einsetzen der zweiten in die erste Gleichung in die ursprüngliche Form überführt werden. Allerdings stellt die Modellierung des Würfels auf einer Ecke einen Anwendungsfall dar, bei dem der Berechnungsaufwand durch eine geschickte Wahl der generalisierten Geschwindigkeiten drastisch reduziert werden kann.