

Inhaltsverzeichnis

1	Modellbildung Würfelseite	2
2	Sensorik	5
2.1	Störgrößen	8
2.1.1	Untersuchung der statischen Störungen	9
2.1.2	Diskrete Fourier-Transformation (DFT)	9

1 Modellbildung Würfelseite

Die Untersuchung des Systems beginnt mit der Bestimmung eines mathematischen Modells, welches in diesem Abschnitt näher erläutert wird. Die Herleitung der Systemdynamik erfolgt mit Hilfe der Methoden nach Kane. Zunächst beschränkt sich die mechanische Untersuchung auf einen vereinfachten Prototypen, welcher aus einer Würfelseite besteht, die auf einer Achse gelagert ist. An der Würfelseite ist ein Motor befestigt, auf dessen Schaft wiederum eine Schwungmasse gelagert ist.

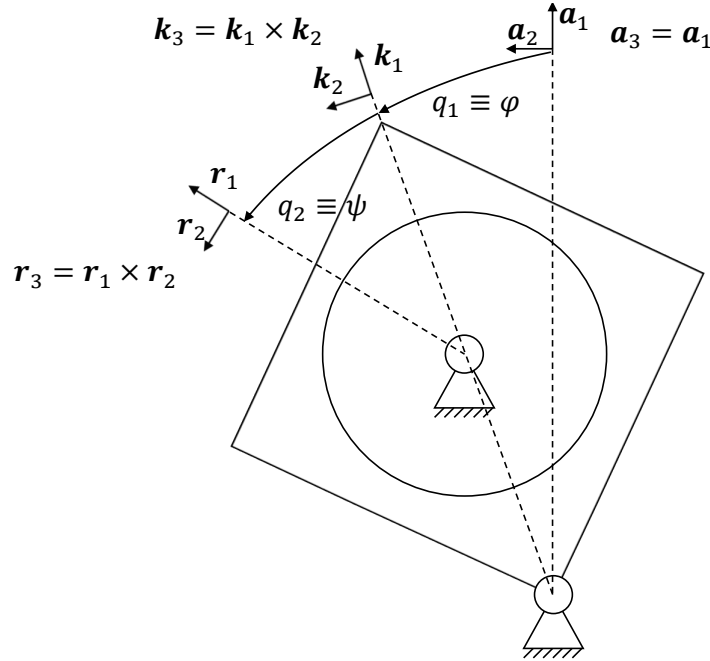


Abbildung 1: Mechanischer Aufbau der Würfelseite, Quelle: eigene Darstellung

Zu Beginn werden der Untersuchung werden die Bezugssysteme festgelegt, welche durch drei, paarweise orthogonale, Einheitsvektoren definiert sind. Die Vektorbasis eines Bezugssystems dient als eine Art Einheit um vektorielle Größen, wie z.B. Position oder Geschwindigkeit, darzustellen. Das untersuchte System verfügt über das raumfeste Bezugssystem A , welches durch die drei Einheitsvektoren \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 und \mathbf{a}_3 definiert wird. An der Würfelseite ist ein weiteres Bezugssystem K fixiert, dessen Vektorbasis aus \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 und \mathbf{k}_3 besteht. Zuletzt ist das, aus den Einheitsvektoren \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 und \mathbf{r}_3 bestehende, Bezugssystem R zu nennen, welches auf der Schwungmasse fixiert ist.

Das holonome System verfügt über zwei rotatorische Freiheitsgrade, welche mit Hilfe der generalisierten Koordinaten $q_1 = \varphi$ und $q_2 = \psi$ beschrieben werden. Der Winkel φ beschreibt die Rotation der Würfelseite um den Punkt O . Die Rotation der Schwungmasse R relativ zu der Würfelseite wird von dem Winkel ψ beschrieben. Mit Hilfe der generalisierten Koordinaten ist es möglich einen Vektor, welcher in einem Bezugssystem dargestellt ist, in ein zweites Bezugssystem zu projizieren. Als Beispiel soll die Position des Schwerpunktes von K dienen, welche von dem Vektor \mathbf{c}_K beschrieben wird. Mit Hilfe des Skalarproduktes eines Vektors mit einem Einheitsvektors, kann der Betrag des Vektors in Richtung des Einheitvektors ermittelt werden. Folglich können somit die Komponenten eines Vektors in einem beliebigen Bezugssystem dargestellt werden.

$$\mathbf{c}_K = \begin{pmatrix} {}^K l_{AC} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^A (\mathbf{c}_K \cdot \mathbf{a}_1) \\ \mathbf{c}_K \cdot \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{c}_K \cdot \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{k}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{k}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{k}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{k}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{k}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{k}_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{c}_K = {}^K \mathbf{P}^A \cdot \mathbf{c}_K \quad (1)$$

Die Projektion kann somit in Form einer Matrix ${}^K \mathbf{P}^A$ dargestellt werden, welche aus den Skalarprodukten der Einheitsvektoren besteht. Die umgekehrte Projektion kann mit Hilfe der Matrix ${}^A \mathbf{P}^K$ durchgeführt werden, welche die Transponierte von ${}^K \mathbf{P}^K$ ist. Die Projektionsmatrizen des ursprünglichen Systems sind die folgenden.

$${}^A \mathbf{P}^K = \begin{pmatrix} c_\varphi & s_\varphi & 0 \\ -s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^K \mathbf{P}^R = \begin{pmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Somit kann nun auch der Schwerpunkt der Würfelseite in dem raumfesten Bezugssystem A dargestellt werden.

$$\mathbf{C}_K = \begin{pmatrix} l_{AC} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ K \mathbf{P}^A \cdot \begin{pmatrix} l_{AC} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ c_\varphi \cdot l_{AC} \\ s_\varphi \cdot l_{AC} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

An diesem Beispiel ist bereits zu erkennen, von welcher Bedeutung Bezugssysteme bei der Darstellung von Vektoren sind. Die Position des Schwerpunktes ist aus Sicht der Würfelseite konstant, jedoch ist seine Position im raumfesten Bezugssystem A von dem Winkel φ abhängig. Im Kehrschluss ist die Darstellung eines Vektors nur unter Angabe eines Bezugssystem sinnvoll.

Nachdem die Position bzw. Orientierung der Körper mit Hilfe der generalisierten Koordinaten bestimmt wurde besteht der nächste Schritt darin, die Geschwindigkeiten der beiden Körper zu bestimmen. Die Geschwindigkeit eines Körpers ist abhängig von dem Bezugssystem in welchem er sich bewegt. Folglich muss das Bezugssystem in wessen Relation sich ein Körper bewegt, bei der Darstellung der Geschwindigkeit berücksichtigt werden. Als Beispiel dient die Geschwindigkeit der Schwungmasse relativ zu der Würfelseite ${}^K\boldsymbol{\omega}^R$, die Geschwindigkeit der Schwungmasse im raumfesten Bezugssystem ${}^A\boldsymbol{\omega}^R$ und die Geschwindigkeit der Würfelseite in A , ${}^A\boldsymbol{\omega}^K$.

$${}^K\boldsymbol{\omega}^R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad {}^A\boldsymbol{\omega}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad {}^A\boldsymbol{\omega}^R = {}^K\boldsymbol{\omega}^R + {}^A\boldsymbol{\omega}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Es sei vermerkt, dass eine Geschwindigkeit in einem beliebigen Bezugssystem dargestellt werden kann, es handelt sich allerdings nach wie vor um die Geschwindigkeit des Körpers in dem ursprünglichen Bezugssystem, lediglich die Darstellung wurde verändert.

Um die Darstellung der Geschwindigkeiten zu vereinfachen, werden die generalisierten Geschwindigkeiten $u_1 \equiv \dot{\varphi}$ und $u_2 \equiv \dot{\psi}$ definiert. Somit ist es möglich die Geschwindigkeiten der Schwungmasse ${}^A\boldsymbol{\omega}^R$ und der Würfelseite ${}^A\boldsymbol{\omega}^K$ als Summe der generalisierten Geschwindigkeiten u_i und der partiellen Geschwindigkeiten ${}^A\boldsymbol{\omega}_i^R$ und ${}^A\boldsymbol{\omega}_i^K$.

$${}^A\boldsymbol{\omega}^K = \dot{\varphi} \cdot \mathbf{a}_3 + \dot{\psi} \cdot \mathbf{0} \rightarrow {}^A\boldsymbol{\omega}_1^K = \mathbf{a}_3 \quad {}^A\boldsymbol{\omega}_2^K = \mathbf{0} \quad (5)$$

$${}^A\boldsymbol{\omega}^R = \dot{\varphi} \cdot \mathbf{a}_3 + \dot{\psi} \cdot \mathbf{a}_3 \rightarrow {}^A\boldsymbol{\omega}_1^R = \mathbf{a}_3 \quad {}^A\boldsymbol{\omega}_2^R = \mathbf{a}_3 \quad (6)$$

Bei den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ handelt es sich um Skalare. Sie beschreiben die komponentenweise Zusammensetzung der Geschwindigkeiten der beiden Körper. Die partiellen Geschwindigkeiten hingegen sind Vektoren, welche die Orientierung der generalisierten Geschwindigkeiten wiedergeben und somit deren Beitrag zu der Bewegung in Richtung der Freiheitsgrade darstellen.

Der nächste Schritt besteht darin, die Drehmomente zu untersuchen, welche auf die Würfelseite und die Schwungmasse wirken. Mit Hilfe der wirkenden Kräfte können letzten Endes die Bewegungsgleichungen ermittelt werden.

Die Bewegung der Schwungmasse wird einerseits durch das Motormoment $\mathbf{T}_M^{R/M}$ beeinflusst, andererseits wird sie von der Reibung in M durch das Drehmoment $\mathbf{T}_R^{R/M}$ verzögert. Das Reibmoment wird als proportional zur Geschwindigkeit $\dot{\psi}$ modelliert. Somit ergibt sich das resultierende Drehmoment \mathbf{T}_R .

$$\mathbf{T}^{R/M} = \mathbf{T}_M^{R/M} + \mathbf{T}_R^{R/M} = (T_M + C_\psi \cdot \dot{\psi}) \cdot \mathbf{a}_3 \quad (7)$$

Das Motormoment \mathbf{T}_M und das Reibmoment \mathbf{T}_R wirken in umgekehrter Richtung auf die Würfelseite. Zusätzlich wird diese von dem Gravitationsmoment $\mathbf{T}_G^{K/O}$ und dem Reibmoment der Würfelseite $\mathbf{T}_R^{K/O}$. Aus der Summe dieser Komponenten ergibt sich das resultierende Drehmoment $\mathbf{T}^{K/O}$.

$$\mathbf{T}^{K/O} = \mathbf{T}_G^{K/O} - \mathbf{T}_R^{K/O} - \mathbf{T}_M^{R/M} + \mathbf{T}_R^{R/M} = (m_G \cdot g \cdot l_{AC} \cdot s_\varphi - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} - T_M + C_\psi \cdot \dot{\psi}) \cdot \mathbf{a}_3 \quad (8)$$

Über das Skalarprodukt der resultierenden Drehmomente und der partiellen Geschwindigkeiten können die generalisierten aktiven Kräfte F_1 und F_2 berechnet werden. Diese stellen den Einfluss der wirkenden Kräfte und Momente auf die generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ dar.

$$F_1 = {}^A\boldsymbol{\omega}_1^K \cdot \mathbf{T}^{K/O} + {}^A\boldsymbol{\omega}_1^R \cdot \mathbf{T}^{R/M} = m_G \cdot g \cdot l_{AC} \cdot s_\varphi - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} \quad (9)$$

$$F_2 = {}^A\boldsymbol{\omega}_2^K \cdot \mathbf{T}^{K/O} + {}^A\boldsymbol{\omega}_2^R \cdot \mathbf{T}^{R/M} = T_M - C_\psi \cdot \dot{\psi} \quad (10)$$

Die letztendlichen Bewegungsgleichungen werden über das Gleichgewicht der generalisierten, aktiven Kräfte und der generalisierten Trägheitskräfte gewonnen. Folglich muss zuletzt das Trägheitsmoment der Schwungmasse \mathbf{T}_R^* und der Würfelseite \mathbf{T}_K^* bestimmt werden. Ersteres ergibt sich aus dem Massenträgheitsmoment $I^{R/M}$ der Schwungmasse um den Punkt M und seiner Winkelbeschleunigung in A .

$$\mathbf{T}_R^* = -I^{R/M} \cdot {}^A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} + \ddot{\psi} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Das Trägheitsmoment der Würfelseite hängt von ihrer Winkelbeschleunigung in A , ihrem Massenträgheitsmoment $I^{K/O}$ um O und der Position bzw. dem Gewicht der Schwungmasse ab.

$$\mathbf{T}_K^* = -(I^{K/O} + m_R \cdot l_{AB}^2) \cdot {}^A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Die generalisierten Trägheitskräfte F_1^* und F_2^* ergeben sich wiederum durch die Skalarmultiplikation mit den partiellen Geschwindigkeiten. Das heißt die Trägheitsmomente der beiden Körper werden in die Bewegungsrichtung der generalisierten Geschwindigkeiten, also der Freiheitsgrade, projiziert.

$$F_1^* = {}^A\boldsymbol{\omega}_1^K \cdot \mathbf{T}_K^* + {}^A\boldsymbol{\omega}_1^R \cdot \mathbf{T}_R^* = -(I^{K/O} + I^{R/M} + m_R \cdot l_{AB}^2) \cdot \ddot{\varphi} - I^{R/M} \cdot \ddot{\psi} \quad (13)$$

$$F_2^* = {}^A\boldsymbol{\omega}_2^K \cdot \mathbf{T}_K^* + {}^A\boldsymbol{\omega}_2^R \cdot \mathbf{T}_R^* = -I^{R/M} \cdot (\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}) \quad (14)$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich nun aus der Summe der generalisierten aktiven Kräften F_i und der generalisierten Trägheitskräfte F_i^* . Die Aussage dieser Gleichungen besteht darin, dass die Projektion, der wirkenden Kräfte in Richtung der partiellen Geschwindigkeiten, gleich der Projektion der Impulsänderung in Richtung der partiellen Geschwindigkeiten ist.

$$F_1 + F_1^* = 0 \rightarrow (I^{K/O} + I^{R/M} + m_R \cdot l_{AB}^2) \cdot \ddot{\varphi} = m_G \cdot g \cdot l_{AC} \cdot s_\varphi - C_\varphi \cdot \dot{\varphi} - I^{R/M} \cdot \ddot{\psi} \quad (15)$$

$$F_2 + F_2^* = 0 \rightarrow I^{R/M} \cdot \ddot{\psi} = T_M - C_\psi \cdot \dot{\psi} - I^{R/M} \cdot \ddot{\varphi} \quad (16)$$

2 Sensorik

Eine zentrale Aufgabe besteht darin die Zustandsgrößen zu messen, um den geschlossenen Regelkreis berechnen zu können. Deshalb beschäftigt sich der folgende Abschnitt mit der verwendeten Sensorik und derer Auswertung. Hierfür müssen die Sensoren zuerst in das Modell eingebunden werden um Messkennlinien zu bestimmen. Daraufhin werden die Empfindlichkeiten untersucht und Rückschlüsse auf den Aufbau gezogen. Zusätzlich muss die Diskretisierung durch die Sensoren untersucht werden um ungewollte Abtasteffekte zu vermeiden. Zuletzt werden die Störeinflüsse analysiert und Ansätze präsentiert um diese zu verringern.

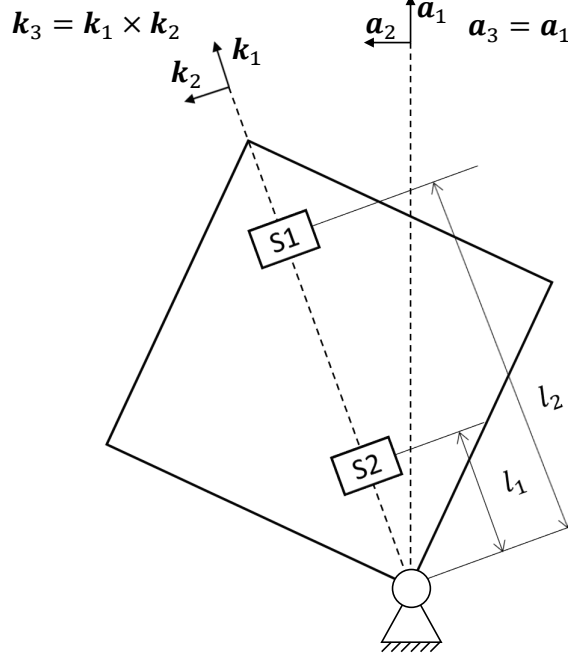


Abbildung 2: Anordnung der Sensoren an der Würfelseite, Quelle: eigene Darstellung

An der Würfelseite sind zwei MPU6050-ICs angebracht, um die Größen φ , $\dot{\varphi}$ und $\ddot{\varphi}$ zu messen. Die ICs verfügen über einen Beschleunigungs- und Drehratensensor, welche jeweils Messwerte in Richtung von drei Achsen liefern. Zuerst müssen Messkennlinien ermittelt werden. Das heißt die Messwerte der Sensoren werden mit Hilfe des mechanischen Modells in Zusammenhang mit den Messgrößen φ , $\dot{\varphi}$ und $\ddot{\varphi}$ gebracht.

Die Messwerte der Drehratensensoren entsprechen der Winkelgeschwindigkeit der Würfelseite im körperfesten Bezugssystem K .

$$\omega_{S_i} = \begin{pmatrix} \omega_x^{S_i} \\ \omega_y^{S_i} \\ \omega_z^{S_i} \end{pmatrix} = {}^K ({}^A \omega^K) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Somit sind nur die Komponenten in Richtung der Z-Achse von Bedeutung. Diese werden als Messwerte y_i definiert.

$$y_i \equiv \omega_z^{S_i} \quad y_i = \dot{\varphi} \quad (i = 1, 2) \quad (18)$$

Die Ausgabewerte \mathbf{a}_{S_i} der Beschleunigungssensoren setzt sich, nach dem idealisierten Modell, aus zwei Termen zusammen. Der erste Term entspricht der Beschleunigung der Sensoren im raumfesten Bezugssystem A , welche gleich der zweiten Ableitung des Ortsvektors \mathbf{s}_i der Sensoren mit Respekt zu A ist.

$$\begin{aligned}
{}^A\mathbf{a}^{S_i} &= \frac{{}^Ad{}^A\mathbf{v}^{S_i}}{dt} = \frac{{}^Ad}{dt}({}^A\boldsymbol{\omega}^K \times \mathbf{s}_i) = \frac{{}^Ad{}^A\boldsymbol{\omega}^K}{dt} \times \mathbf{s}_i + {}^K\boldsymbol{\omega}^{S_i} \times \frac{{}^Ad\mathbf{s}_i}{dt} \\
&= {}^K\boldsymbol{\alpha}^{S_i} \times \mathbf{s}_i + {}^A\boldsymbol{\omega}^K \times ({}^A\boldsymbol{\omega}^K \times \mathbf{s}_i) \\
&= {}^K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} \times {}^K \begin{pmatrix} l_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + {}^K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \times \left({}^K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \times {}^K \begin{pmatrix} l_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = {}^K \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}^2 \cdot l_i \\ \ddot{\varphi} \cdot l_i \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{19}$$

Der zweite Term wird von der Gravitation beeinflusst. Das heißt er entspricht der Darstellung des Erdbeschleunigungsvektors im körperfesten Bezugssystem K .

$$\mathbf{g} = {}^A\mathbf{P}^K \cdot \begin{pmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g \cdot c_\varphi \\ g \cdot s_\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Somit ergeben sich die folgenden Zusammenhänge für die Anzeigewerte \mathbf{a}_{S_i} der Beschleunigungssensoren, welche wiederum als Messwerte y_3, \dots, y_6 definiert werden.

$$\mathbf{a}_{S_i} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_{S_i} \\ \ddot{y}_{S_i} \\ \ddot{z}_{S_i} \end{pmatrix} = {}^K({}^A\mathbf{a}^{S_i} + \mathbf{g}) = {}^K \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}^2 \cdot l_i - g \cdot c_\varphi \\ \ddot{\varphi} \cdot l_i + g \cdot s_\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
y_3 &\equiv a_x^{S_1} & y_3 &= -\dot{\varphi}^2 \cdot l_1 - g \cdot c_\varphi \\
y_4 &\equiv a_x^{S_2} & y_4 &= -\dot{\varphi}^2 \cdot l_2 - g \cdot c_\varphi \\
y_5 &\equiv a_y^{S_1} & y_5 &= \ddot{\varphi} \cdot l_1 + g \cdot s_\varphi \\
y_6 &\equiv a_y^{S_2} & y_6 &= \ddot{\varphi} \cdot l_2 + g \cdot s_\varphi
\end{aligned} \tag{22}$$

Die Messwerte der Beschleunigungssensoren hängen jeweils von zwei Messgrößen ab. Deshalb ist es nicht möglich aus einem einzelnen Messwert einen Rückschluss auf die Messgrößen zu ziehen. Allerdings ist der Einfluss des Winkels φ unabhängig von dem Abstand l_i des Sensors zum Drehpunkt. Folglich kann dieser Anteil durch die Differenz von zwei Messwerten eliminiert werden.

$$\begin{aligned}
y_7 &\equiv y_3 - y_4 & y_7 &= -\dot{\varphi}^2 \cdot (l_1 - l_2) \\
y_8 &\equiv y_5 - y_6 & y_8 &= \ddot{\varphi} \cdot (l_1 - l_2)
\end{aligned} \tag{23}$$

Analog können die Messwerte y_9 und y_{10} definiert werden um die Messgröße φ zu ermitteln. In diesem Fall wird der Subtrahend mit dem Verhältnis der Sensorabstände zum Drehpunkt gewichtet.

$$\begin{aligned}
y_9 &\equiv y_3 - \frac{l_1}{l_2} y_4 & y_9 &= -g \cdot c_\varphi \cdot \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \\
y_{10} &\equiv y_5 - \frac{l_1}{l_2} y_6 & y_{10} &= g \cdot s_\varphi \cdot \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \\
y_{11} &\equiv \frac{y_{10}}{y_9} & y_{11} &= -\tan(\varphi)
\end{aligned} \tag{24}$$

Die verschiedenen Kennlinien zeigen, dass mehrere Möglichkeiten bestehen um die Messgrößen φ , $\dot{\varphi}$ und $\ddot{\varphi}$ mit den Messwerten in Verbindung zu bringen. Folglich müssen nun Kriterien erarbeitet werden um die Messsysteme beurteilen zu können. Zuerst ist hier die Empfindlichkeit S zu nennen, welche wiedergibt wie stark sich eine Änderung der Messgröße auf den zugehörigen Messwert auswirkt. Die Berechnung der Empfindlichkeit erfolgt über die partielle Ableitung der Kennlinie nach der Messgröße. Somit ergeben sich für die Messwerte, welche von dem Winkel φ abhängen, die folgenden Empfindlichkeiten.

$$\begin{aligned}
S_9(\varphi) &= \frac{\partial y_9}{\partial \varphi} = g \cdot s_\varphi \cdot \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \\
S_{10}(\varphi) &= \frac{\partial y_{10}}{\partial \varphi} = g \cdot c_\varphi \cdot \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) \\
S_{11}(\varphi) &= \frac{\partial y_{11}}{\partial \varphi} = -\tan(\varphi)^2 - 1
\end{aligned} \tag{25}$$

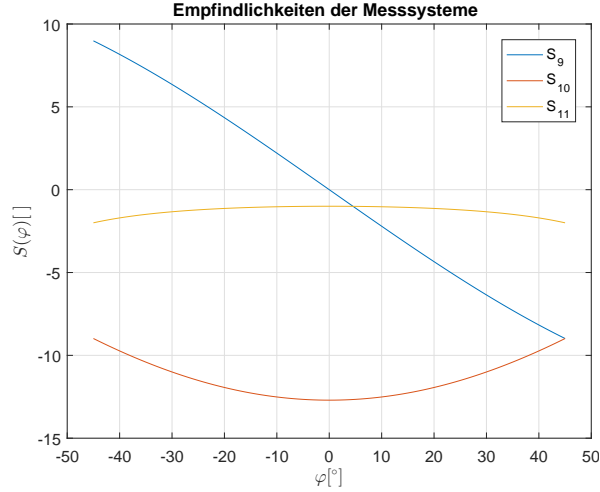


Abbildung 3: Empfindlichkeiten für φ , Quelle: eigene Darstellung

Aus der obigen Abbildungen ist leicht zu erkennen, dass der Messwert y_{10} die höchste Empfindlichkeit besitzt. Besonders im Arbeitsbereich der Regelung ($\varphi = 0$) liegt das Maximum der Empfindlichkeit. Das heißt bereits kleine Änderung des Winkels φ führen zu einer merkbaren Anpassung des Messwertes y_{10} . Die Empfindlichkeit S_{11} ist zwar deutlich geringer, weist allerdings nahezu konstante Werte im Arbeitsbereich der Regelung auf, was wiederum für eine lineare Messkennlinie in diesem Bereich spricht. Aus den Gleichung lässt sich zusätzlich erkenne, dass die Empfindlichkeiten S_9 und S_{10} von der Positionen der Sensoren abhängt. Hieraus folgt, dass die Empfindlichkeit der Messwerte y_9 und y_{10} , mit zunehmendem l_1 und abnehmendem l_2 , steigt.

Die Messgröße $\dot{\varphi}$ beeinflusst lediglich zwei Messwerte, nämlich y_1 und y_7 . Hierbei sei angemerkt, dass y_7 proportional zu dem Quadrat von $\dot{\varphi}$ ist und somit lediglich der Betrag der Messgröße aus dem Wert rekonstruiert werden kann. Die Information über die Richtung muss aus einer anderen Quelle gewonnen werden.

$$\begin{aligned} S_1 = S_2 &= \frac{\partial y_1}{\partial \dot{\varphi}} = 1 \\ S_7 &= \frac{\partial y_7}{\partial \dot{\varphi}} = -2 \cdot \dot{\varphi} \cdot (l_1 - l_2) \end{aligned} \quad (26)$$

Der Graph zeigt deutlich, dass die Empfindlichkeiten S_1 und S_2 der Drehratensensoren höher sind als

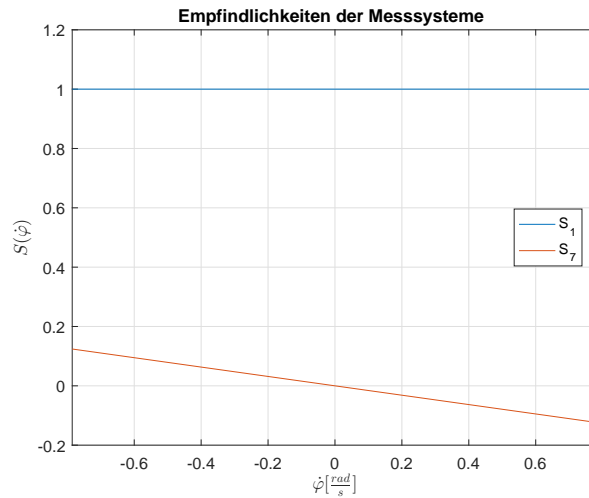


Abbildung 4: Empfindlichkeiten für $\dot{\varphi}$, Quelle: eigene Darstellung

die der Geschwindigkeitsschätzung mit Hilfe der Beschleunigungssensoren. Lediglich bei hohen Werten von $\dot{\varphi}$ erreicht man mit Hilfe von y_7 eine höhere Empfindlichkeit.

Zuletzt ist der Messwert y_8 zu untersuchen, welcher als einziger von der Messgröße $\ddot{\varphi}$ abhängt. Hierbei handelt es sich um eine konstante Kennlinie bzw. einer konstanten Empfindlichkeit, welche wiederum mit zunehmenden Abstand zwischen den beiden Sensoren steigt.

$$S_8 = \frac{\partial y_8}{\partial \ddot{\varphi}} = l_1 - l_2 \quad (27)$$

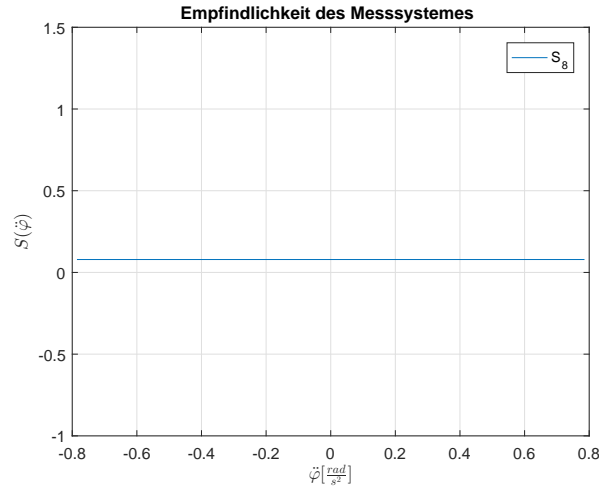


Abbildung 5: Empfindlichkeit für $\ddot{\varphi}$, Quelle: eigene Darstellung

Das erste Fazit aus der Untersuchung ist, dass alle Empfindlichkeiten, die von der Position der Sensoren abhängen, mit zunehmendem Abstand der Sensoren zueinander, wachsen. Folglich muss l_1 möglichst groß und l_2 möglichst klein gewählt werden.

Die folgende Tabelle zeigt die relevanten Messwerte, welche genutzt werden können um Rückschlüsse auf die Messgrößen zu ziehen. Der folgende Abschnitt stellt, neben der Empfindlichkeit, weitere Ansätze vor um die Messsysteme zu beurteilen.

Messgröße	Messwert	Kennlinie	Empfindlichkeit
φ	$y_9 = a_x^{S1} - \frac{l_1}{l_2} \cdot a_x^{S2}$	$y_9 = -g \cdot c_\varphi \cdot (1 - \frac{l_1}{l_2})$	$S_9 = g \cdot s_\varphi \cdot (1 - \frac{l_1}{l_2})$
	$y_{10} = a_y^{S1} - \frac{l_1}{l_2} \cdot a_y^{S2}$	$y_{10} = g \cdot s_\varphi \cdot (1 - \frac{l_1}{l_2})$	$S_{10} = -g \cdot c_\varphi \cdot (1 - \frac{l_1}{l_2})$
	$y_{11} = \frac{y_{10}}{y_9}$	$y_{11} = -\tan(\varphi)$	$S_{11} = -\tan(\varphi)^2 - 1$
$\dot{\varphi}$	$y_1 = \omega_z^{S1}$	$y_1 = \dot{\varphi}$	$S_1 = 1$
	$y_2 = \omega_z^{S2}$	$y_2 = \dot{\varphi}$	$S_2 = 1$
	$y_7 = a_x^{S1} - a_x^{S2}$	$y_7 = -\dot{\varphi}^2 \cdot (l_1 - l_2)$	$S_7 = -2 \cdot \dot{\varphi} \cdot (l_1 - l_2)$
$\ddot{\varphi}$	$y_8 = a_y^{S1} - a_y^{S2}$	$y_8 = \ddot{\varphi} \cdot (l_1 - l_2)$	$S_8 = l_1 - l_2$

2.1 Störgrößen

Das ausschlaggebende Kriterium für die Beurteilung der Messsysteme ist, wie stark diese von Störgrößen betroffen sind. Die Störungen der Systeme lassen sich in zwei Gruppen unterteilen. Einerseits besteht gewöhnliches Messrauschen, welches sich nicht auf eine konkrete Quelle zurückführen lässt und somit als stochastisch betrachtet wird. Diese Störform wird im weiteren als statisches Rauschen bezeichnet, da angenommen wird, dass es zeitinvariant und unabhängig von Systemgrößen wie Geschwindigkeit und Beschleunigung ist. Andererseits treten merkbare Störungen auf wenn der Motor ein impulsartiges Eingangssignal erzeugt, diese werden im weiteren Verlauf als dynamische Störungen bezeichnet. Im folgenden werden verschiedene Ansätze verfolgt um die Söreinflüsse zu beurteilen und die Messsysteme daran zu vergleichen.

2.1.1 Untersuchung der statischen Störungen

Die Annahme für die statischen Störungen ist, dass diese zeitinvariant und unabhängig von der Bewegung der Würfelseite sind. Folglich kann die Würfelseite fixiert und die Messwerte aufgenommen werden. Hierbei handelt es sich um einen stationären, ergodischen Prozess, dessen Nutzsignal bekannt ist. Somit kann das Signal-Rausch-Verhältnis der Messsysteme, welche φ messen, bestimmt werden. Der folgende Plot zeigt die Werte für φ der Messsysteme y_9 , y_{10} und y_{11} .

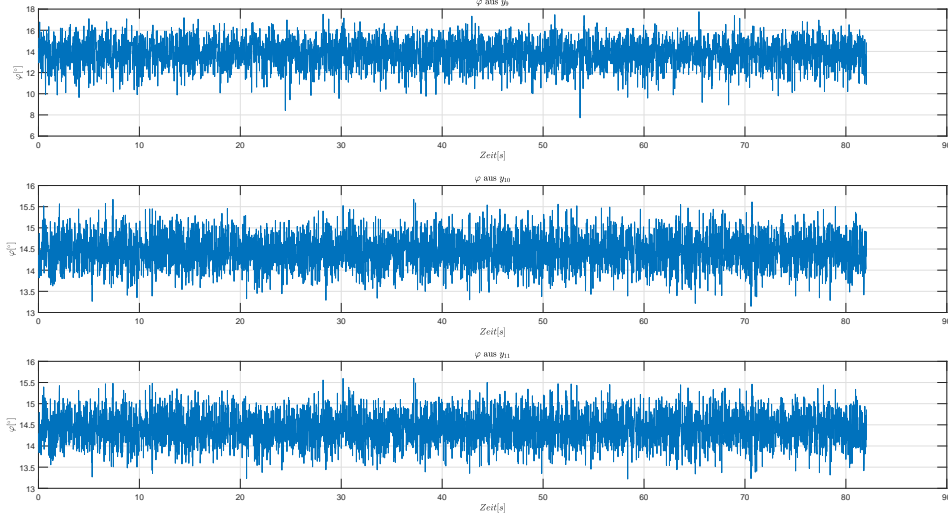


Abbildung 6: Signal-Rausch-Verhältnis der φ -Messsysteme, Quelle: eigene Darstellung

Da es sich um einen stationären Prozess handelt, kann angenommen werden, dass der Mittelwert der Signale dem Nutzsignal entspricht. Folglich kann mit Hilfe dieser Annahme das Signal-Rausch-Verhältnis berechnet werden.

$$SNR(y_9) = 20.57dB \quad SNR(y_{10}) = 31.21dB \quad SNR(y_{11}) = 31.50dB \quad (28)$$

2.1.2 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Die Beurteilung der dynamischen Störungen erfolgt über eine Spektralanalyse. Hierfür wird die DFT der Messgrößen berechnet. Um die Interpretation der DFT-Spektren zu ermöglichen, wird zuerst der Zusammenhang der DFT und der Fourier-Transformation des zu Grunde liegendem Signal hergeleitet. Die Fourier-Transformation basiert auf der Theorie, dass alle zeitkontinuierlichen Signale aus einer Summe von harmonischen Schwingungen synthetisiert werden können. Der Betrag der Fourier-Transformation gibt die Amplituden der beteiligten Schwingungen wieder. Nun ergibt sich die Frage wie das Spektrum eines zeitdiskreten Signals, das über einen begrenzten Zeitraum abgetastet wird, berechnet werden kann. Hierfür wird zunächst die komplexe harmonische Schwingung x_n mit der Frequenz f betrachtet, welche mit einer Frequenz f_a ($T_a = 1/f_a$) abgetastet wird. Mit Hilfe der normierten Kreisfrequenz $\Omega = 2 \cdot \pi \cdot f/f_a$, welche das Verhältnis der Schwingungsfrequenz und der Abtastrate darstellt, ergibt sich die folgende Funktion für x_n .

$$x_n = e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{f}{f_a}} = e^{j \cdot n \cdot \Omega} \quad (29)$$

Wenn nun ein System, welches die diskrete Impulsantwort h_n besitzt, von dem Signal x_n angeregt wird, ergibt sich der folgende Zusammenhang für dessen Ausgangssignal y_n .

$$y_n = h_n * x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot (n-k)} = e^{j \cdot n \cdot \Omega} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \quad (30)$$

Hieraus folgt, dass die Antwort eines Systems auf eine diskrete harmonische Schwingung als Produkt der Schwingung mit dem Term $\sum h_k \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k}$. Dieser kann somit als Systemverstärkung einer

komplexen Eingangsschwingung mit der normierten Frequenz Ω interpretiert werden. Diese Systemeigenschaft entspricht der Aussage der gewöhnlichen Fourier-Transformierten einer zeitkontinuierlichen Übertragungsfunktion. Deshalb gilt für die DTFT (Discrete-Time-Fourier-Transform) eines Signals x_n :

$$X_{DTFT}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \quad (31)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die DTFT lediglich in Abhängigkeit der normierten Kreisfrequenz Ω berechnet werden kann. Dies ist eine Folge der Abtastung, da das zeitdiskrete Signal x_n keine Information über den zeitlichen Abstand seiner Stützstellen enthält. Somit können auch die absoluten Frequenzen des Spektrums nur mit Hilfe der Abtastrate f_a rekonstruiert werden. Für den Zusammenhang zwischen dem FT-Spektrum $X(j\omega)$ des ursprünglichen, zeitkontinuierlichen Signal und dem DTFT-Spektrum $X_{DTFT}(\Omega)$ des zeitdiskreten Signales:

$$\frac{1}{f_a} X_{DTFT}\left(\frac{\omega}{f_a}\right) = X(j\omega) \quad (32)$$

Die Problematik der DTFT liegt darin, dass es sich zwar um ein zeitdiskretes Signal handelt, dieses aber nach wie vor über einen unendlichen Wertebereich definiert ist. D.h. es liegt eine geschlossene Funktion vor. Somit ermöglicht die DTFT nicht die Berechnung der Spektralanteile eines Signales, wessen Abtastwerte nur über einen begrenzten Zeitraum bekannt ist. Zusätzlich ist die DTFT selbst eine kontinuierliche Funktion und somit nur schwierig auf digitalen Rechnern umsetzbar. Deshalb soll nun erläutert werden wie ein diskretes Spektrum eines abgetasteten Signals, welches nur über einen begrenzten Zeitraum definiert ist, berechnet werden kann. Hierfür wird das Signal \hat{x}_n betrachtet, welches für die ersten N Abtastwerte der komplexen harmonischen Schwingung x_n entspricht und anschließend verschwindet.

$$\hat{x}_n = \begin{cases} x_n & n \in [0; N-1] \\ 0 & n \notin [0; N-1] \end{cases} \quad (33)$$

Somit ergibt sich für die DTFT von \hat{x}_n :

$$\hat{X}_{DTFT}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}_k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \Omega} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \Omega} \quad (34)$$

Wird nun die DTFT wiederum über N Werte diskretisiert erhält man als Ergebnisse die diskrete Fourier-Transformation (DFT).

$$X_{DFT}(m) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \Omega_m} \quad \Omega_m = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{N} \quad (35)$$

Bei der Herleitung der DFT wird ersichtlich, dass das berechnete Spektrum nicht dem des zeitdiskreten Signales x_n entspricht, sondern dem Spektrum von x_n multipliziert mit einem Rechteckimpuls, wessen Breite dem Beobachtungszeitraum entspricht. Die Auswirkungen dieser Fensterung auf das DFT-Spektrum werden als Leakage-Effekte bezeichnet. Da für gewöhnlich Informationen über das Spektrum des ursprünglichen, zeitkontinuierlichen Signals gesucht sind müssen einerseits die Leakage-Effekte minimiert werden und der Zusammenhang zwischen FT-Spektrum und DFT-Spektrum hergestellt werden. Falls ein periodisches Signal $x(t)$ wird über einen Zeitraum T beobachtet wird und T kein Vielfaches der Periodenlänge des Signales ist so entstehen Signalsprünge am Ende der Beobachtung. Diese Sprünge führen zu spektrale Überlappungen, welche wiederum das DFT-Spektrum verfälschen. Deshalb ist der Beobachtungszeitraum mit der Schwingung eines periodischen Signales zu synchronisieren. Des weiteren können Leakage-Effekte minimiert werden indem ein möglichst großer Beobachtungszeitraum gewählt wird. Ist dies der Fall gilt folgender Zusammenhang für Spektralanteile, welche keinen unendlichen Wert besitzen.

$$X_{DFT}(m) \approx f_a \cdot X(j \cdot m \cdot \Delta\omega) \quad \Delta\omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_a}{N} \quad (36)$$

Falls das Spektrum $X(j \cdot \omega)$ an der Stelle $m \cdot \Delta\omega$ einen Dirac-Impuls-Anteil besitzt so gilt für den komplexen Fourierkoeffizienten c_k des Signales an dieser Frequenz:

$$X_{DFT}(m) = N \cdot c_k \quad (37)$$