

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ ФН «Фундаментальные науки» _____


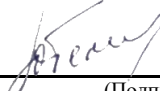
КАФЕДРА _____ ФН2 «Прикладная математика» _____

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

*«Учет разброса свойств материала в модели
аппроксимации петель циклического деформирования»*

Студент	ФН2-82 (Группа)	 29.06.2020 (Подпись, дата)	М.Р. Никуленков (И.О. Фамилия)
Руководитель ВКР		 29.06.2020 (Подпись, дата)	Ю. М. Темис (И.О. Фамилия)
Консультант		_____ (Подпись, дата)	_____ (И.О. Фамилия)
Консультант		_____ (Подпись, дата)	_____ (И.О. Фамилия)
Нормконтролер		_____ (Подпись, дата)	_____ (И.О. Фамилия)

2020 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой _____ ФН2
(Индекс)

_____ Г.Н. Кувыркин
(И.О. Фамилия)

« ____ » _____ 20 ____ г.

З А Д А Н И Е

на выполнение выпускной квалификационной работы бакалавра

Студент группы _____ ФН2-82

Никуленков Михаил Романович
(фамилия, имя, отчество)

Тема квалификационной работы _____ Учет разброса свойств материала в модели
аппроксимации петель циклического деформирования

Источник тематики (НИР кафедры, заказ организаций и т.п.)

НИР кафедры

Тема квалификационной работы утверждена распоряжением по факультету
№ _____ от « ____ » _____ 20 ____ г.

Часть 1. Реализация модели аппроксимации петель циклического деформирования и
модели малоциклового усталости. Описание методов определения параметров модели
циклического деформирования по экспериментальным данным. Реализация методов.

Часть 2. Получение распределения модуля упругости и напряжения текучести по набору экспериментов на циклическое деформирование идентичных образцов из никелевого сплава ЭИ698ВД. Описание методов подбора распределений для выборок. Сравнение распределений.

Часть 3. Получение выборок из распределений модуля упругости и напряжения текучести. Получение разбросов номеров полуциклов разрушения с помощью реализованных моделей аппроксимации петель циклического деформирования, малоциклового усталости и полученных выборок. Подбор распределений номеров полуциклов разрушения для каждого эксперимента в случаях использования выборок модуля упругости и напряжения текучести. Сравнение и анализ распределений. Аппроксимация зависимости параметров распределения от значения размаха деформаций эксперимента.

Оформление квалификационной работы:

Расчетно-пояснительная записка на 50 листах формата А4.

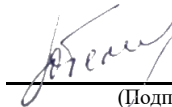
Перечень графического (иллюстративного) материала (чертежи, плакаты, слайды и т.п.)

Графики и рисунки. Слайды к выступлению. Презентация

Дата выдачи задания « 15 » марта 20 20 г.

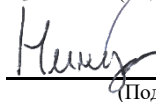
В соответствии с учебным планом выпускную квалификационную работу выполнить в полном объеме в срок до « 15 » мая 20 20 г.

Руководитель ВКР


(Подпись, дата) 29.06.2020

Ю. М. Темис
(И.О. Фамилия)

Студент


(Подпись, дата) 29.06.2020

М. Р. Никуленков
(И.О. Фамилия)

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

УТВЕРЖДАЮ

ФАКУЛЬТЕТ _____ **ФН**
КАФЕДРА _____ **ФН2**
ГРУППА _____ **ФН2-82**

Заведующий кафедрой _____ **ФН2**
(Индекс)

Г.Н. Кувыркин
(И.О. Фамилия)

« ____ » _____ 20__ г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН выполнения выпускной квалификационной работы

студента: _____ Никуленков Михаил Романович
(фамилия, имя, отчество)

Тема квалификационной работы Учет разброса свойств материала в модели аппроксимации
петель циклического деформирования

№ п/п	Наименование этапов выпускной квалификационной работы	Сроки выполнения этапов		Отметка о выполнении	
		план	факт	Должность	ФИО, подпись
1.	Задание на выполнение работы. Формулирование проблемы, цели и задач работы	15.03.2020 <i>дата</i>	10.03.2020 <i>дата</i>	Руководитель ВКР	Темис Ю.М.
2.	1 часть	15.05.2020 <i>дата</i>	23.03.2020 <i>дата</i>	Руководитель ВКР	Темис Ю.М.
3.	Утверждение окончательных формулировок решаемой проблемы, цели работы и перечня задач	15.04.2020 <i>дата</i>	02.04.2020 <i>дата</i>	Заведующий кафедрой	
4.	2 часть	20.05.2020 <i>дата</i>	16.04.2020 <i>дата</i>	Руководитель ВКР	Темис Ю.М.
5.	3 часть	25.05.2020 <i>дата</i>	17.05.2020 <i>дата</i>	Руководитель ВКР	Темис Ю.М.
6.	1-я редакция работы	30.05.2020 <i>дата</i>	20.05.2020 <i>дата</i>	Руководитель ВКР	Темис Ю.М.
7.	Подготовка доклада и презентации	15.06.2020 <i>дата</i>	22.05.2020 <i>дата</i>	Руководитель ВКР	Темис Ю.М.
8.	Заключение руководителя	20.06.2020 <i>дата</i>	10.06.2020 <i>дата</i>	Руководитель ВКР	Темис Ю.М.
9.	Допуск работы к защите на ГЭК (нормоконтроль)	<i>дата</i>	<i>дата</i>	Нормоконтролер	
10.	Внешняя рецензия	26.06.2020 <i>дата</i>	29.06.2020 <i>дата</i>	Рецензент	В.С. Бондарь
11.	Защита работы на ГЭК	30.06.2020 <i>дата</i>	30.06.2020 <i>дата</i>		

Студент: _____
29.06.2020
(подпись, дата)

Руководитель работы: _____
29.06.2020
(подпись, дата)

РЕФЕРАТ

Расчетно-пояснительная записка, 33 рис., 4 табл., 6 источников.

ЦИКЛИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ, МАЛОЦИКЛОВАЯ УСТАЛОСТЬ

Объектом работы является модель циклического деформирования.

Цель работы — исследование влияния параметров материала на разброс номеров полуциклов разрушения в модели циклического деформирования с использованием критерия малоциклового усталости.

Поставленная цель достигается за счет применения методов проверки гипотез о принадлежности анализируемой выборки к распределению к данным, полученным с помощью модели и экспериментальных данных о циклической деформации идентичных образцов из никелевого сплава ЭИ698ВД.

СОДЕРЖАНИЕ

РЕФЕРАТ	5
ВВЕДЕНИЕ	8
1 Модели изотермического циклического деформирования и малоцикловой усталости	9
1.1 Модель кривых циклического деформирования	9
1.2 Модель малоцикловой усталости.....	10
2 Способы определения параметров	12
2.1 Общие комментарии к определению параметров	12
2.2 Модуль упругости и предел пропорциональности	13
2.3 Предел текучести	16
2.4 Параметры модели циклического деформирования	17
2.4.1 Изменение модуля упругости	18
2.4.2 Изменение размера упругой области и масштаба преобразования нелинейного участка.	19
2.5 Параметры модели малоцикловой усталости	24
3 Пример работы модели.....	26
4 Методы подбора распределения.....	30
4.1 Тест Андерсона — Дарлинга.....	30
4.2 Р-значение статистики Андерсона — Дарлинга.....	32
4.3 Тест отношения правдоподобия.....	32
4.4 Вероятностный график.....	33
5 Анализ свойств материала.....	35
5.1 Модуль упругости.....	35

5.2. Напряжение текучести	38
6 Анализ разброса номеров полувциклов разрушения	41
6.1 Выборка по модулю упругости	42
6.2 Выборка по напряжению текучести	46
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	51
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	52
ПРИЛОЖЕНИЕ А	54

ВВЕДЕНИЕ

В работе проводится исследование влияния разброса свойств материала на результат работы математической модели, описывающей циклические деформации: рассматривается зависимость распределения номера полуцикла разрушения от размаха деформаций.

Сначала находятся распределения свойств материала по набору экспериментальных данных о циклической деформации идентичных образцов из никелевого сплава ЭИ698ВД. Затем, используя найденные распределения, с помощью модели и критерия разрушения вычисляются разбросы номеров полуциклов разрушения для каждого из свойств.

Для каждого полученного разброса номеров полуциклов разрушения определяется наиболее подходящее распределение вероятностей. Затем анализируются полученные распределения и строятся зависимости параметров распределений от значения размаха деформаций.

1 Модели изотермического циклического деформирования и малоциклового усталости

1.1 Модель кривых циклического деформирования

Моделирование осуществлялось с помощью экспериментально подтвержденной в [1-2] трехпараметрической модели для описания кривых циклического деформирования при постоянной температуре. Эта модель основана на предположении, что ее параметры, необходимые для построения петель кривых деформирования на каждом полуцикле зависят от величины накопленной пластической деформации — параметра Оджвиста $\chi = \sum_i^n |\varepsilon_i^p|$, где n — номер моделируемого полуцикла, ε_i^p — приращение накопленной деформаций на i полуцикле (рис. 1).

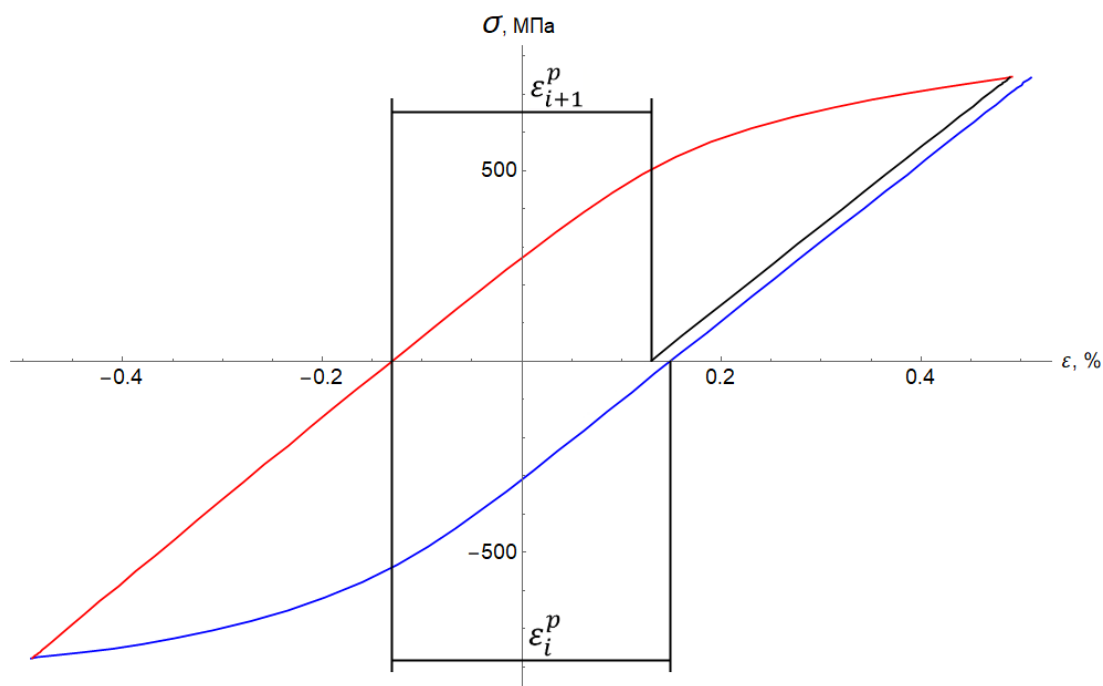


Рис. 1. Пример определения приращения накопленных деформаций.

Рассмотрим структуру модели [1,2]. Она позволяет строить петли кривой циклического деформирования в локальных координатах полуциклов.

$$\sigma^*(\chi, \varepsilon^*) = \begin{cases} E \cdot d(\chi) \varepsilon^*, & \varepsilon^* \leq \varepsilon_s^* \\ E \cdot d(\chi) \varepsilon_s^* + d(\chi) b(\chi) \left[f\left(\varepsilon_s + \frac{\varepsilon^* - \varepsilon_s^*}{b(\chi)}\right) - \sigma_s \right], & \varepsilon^* > \varepsilon_s^* \end{cases} \quad (1)$$

$$\varepsilon_s^* = \frac{a(\chi)}{d(\chi)} \varepsilon_s. \quad (2)$$

Здесь σ^* и ε^* — напряжения и деформации в локальных координатах полуцикла; E — первоначальный модуль упругости; $f(\varepsilon)$ — кривая деформирования первого полуцикла; $a(\chi)$ — размер упругой области; $b(\chi)$ — коэффициент преобразования нелинейного участка кривой первого полуцикла; $d(\chi)$ — коэффициент изменения модуля упругости; σ_s и ε_s — напряжения и деформации кривой первого полуцикла.

1.2 Модель малоциклового усталости

Вместе с моделью циклического деформирования необходимо также использовать модель малоциклового усталости. Для определения полуцикла разрушения была использована зависимость:

$$n_f = \left(\frac{\chi_{max}}{\delta} \right)^\gamma, \quad (3)$$

где δ и γ — постоянные материала для фиксированной температуры.

Эта зависимость связывает число полуциклов n_f до разрушения с величиной χ_{max} накопленной деформации. Зависимость была установлена экспериментально в работах [1-4].

2 Способы определения параметров

2.1 Общие комментарии к определению параметров

Рассматриваемая модель циклического деформирования использует параметры, полученные на основе экспериментов при постоянной температуре. Эти параметры описывают зависимость различных циклических свойств материала от накопленной пластической деформации, выраженной параметром Одквиста $\chi = \sum_i^n |\varepsilon_i^p|$, где n — номер моделируемого полуцикла, ε_i^p — приращение накопленных деформаций на i -м полуцикле.

Экспериментальные данные необходимо представить как облако точек в координатах “напряжения – относительные деформации”.

Также требуется разделить экспериментальные данные, представленные циклами деформаций, на полуциклы, так как модель позволяет получить именно полуциклы деформаций в локальных координатах. Для этого необходимо найти точки смены режима нагружения, так как по виду кривых как правило нельзя определить момент перехода от упругопластического деформирования к упругой разгрузке.

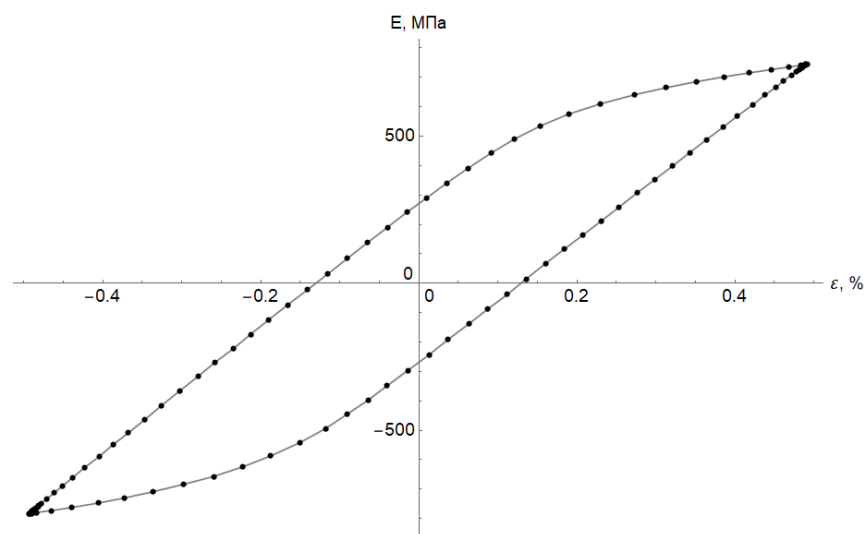


Рис. 2. Цикл деформации.

Эти точки можно найти следующим образом: данные необходимо разделить на подмножества, разграничить которые можно точками, наиболее соответствующими значениям средней деформации в цикле. В каждом подмножестве определялась точка с максимальным отклонением по модулю от средней деформации — это и будут точки смены режима нагружения. На рис. 3 изображена точка перегиба для цикла деформаций (рис. 2) одного из рассмотренных экспериментов.

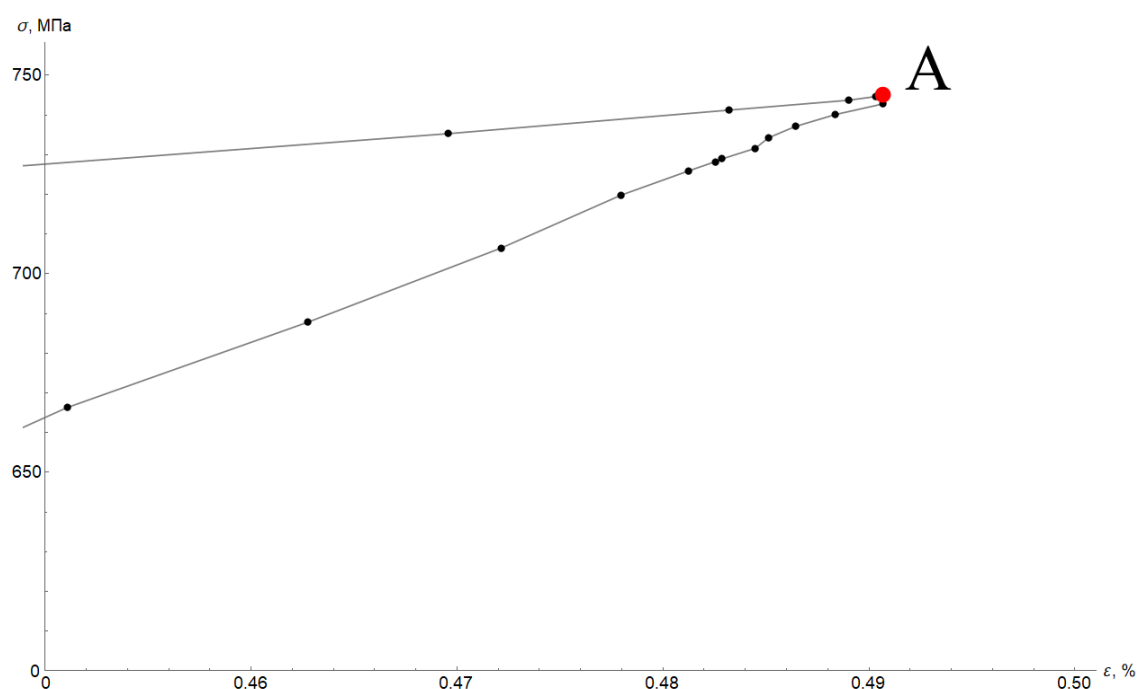


Рис. 3. Точка перегиба А.

2.2 Модуль упругости и предел пропорциональности

Для определения модуля упругости на полуцикле необходимо, используя метод наименьших квадратов, минимизировать сумму квадратов отклонений совокупности из m точек полуцикла в локальных координатах:

$$\sum_{i=1}^m (\sigma_i - E \varepsilon_i)^2 \rightarrow \min. \quad (4)$$

То есть, модуль для m точек можно определить таким образом:

$$E_m = \frac{\sum_{i=1}^m \sigma_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2}. \quad (5)$$

Таким образом, увеличивая множество, можно определить модули упругости для всех точек полуцикла начиная со значения $m = 2$. Пример зависимости модуля упругости от точки на полуцикле приведен на рисунке 4.

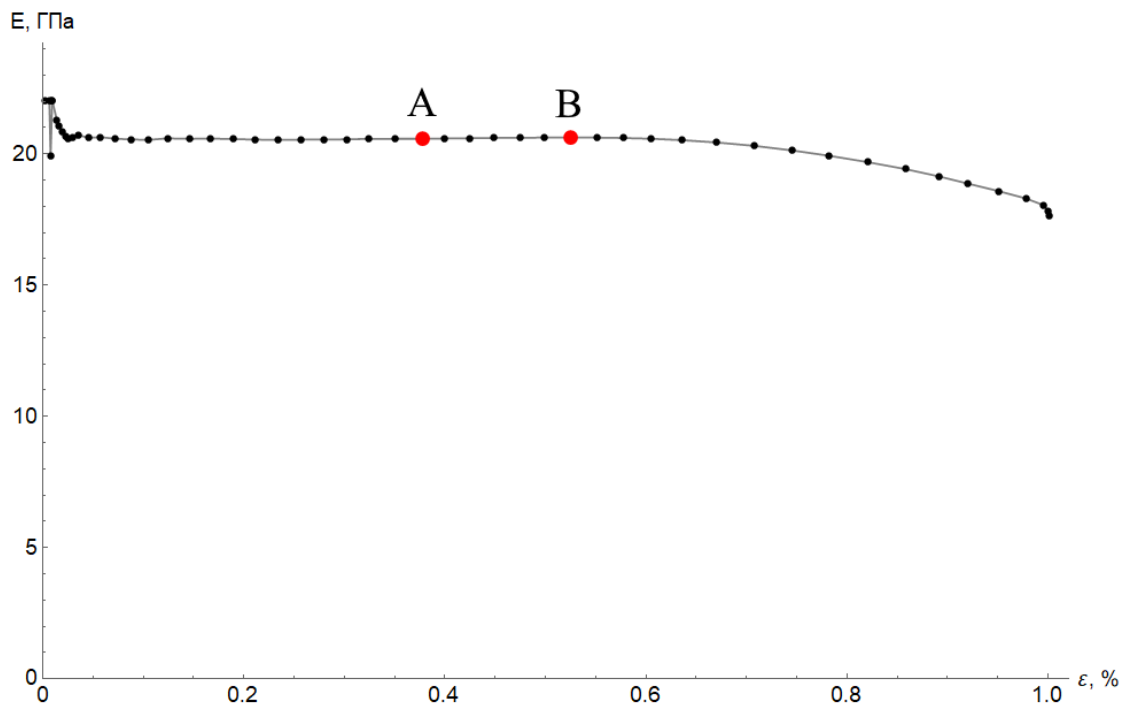


Рис. 4. Зависимость модуля упругости от множества точек и участок АВ постоянного модуля упругости.

Для того, чтобы найти предел пропорциональности и предел текучести, в [5] предлагается определить участок, на котором модуль упругости остается постоянным (см. участок АВ на рис. 4). Для определения точки начала

стабильного участка необходимо вычислить относительную погрешность модуля упругости на соседних точках:

$$\Delta_m = \frac{E_m - E_{m-1}}{E_m}. \quad (6)$$

В качестве точки А начала стабильного участка выбиралась первая точка, относительная погрешность модуля упругости которой меньше заданной точности (10^{-2}).

В качестве точки В окончания стабильного участка выбиралась точка, минимума функции E' , которая аппроксимировалась центральной разностной производной:

$$E'_m = \frac{E_{m+1} - E_{m-1}}{\varepsilon_{m+1} - \varepsilon_{m-1}}. \quad (7)$$

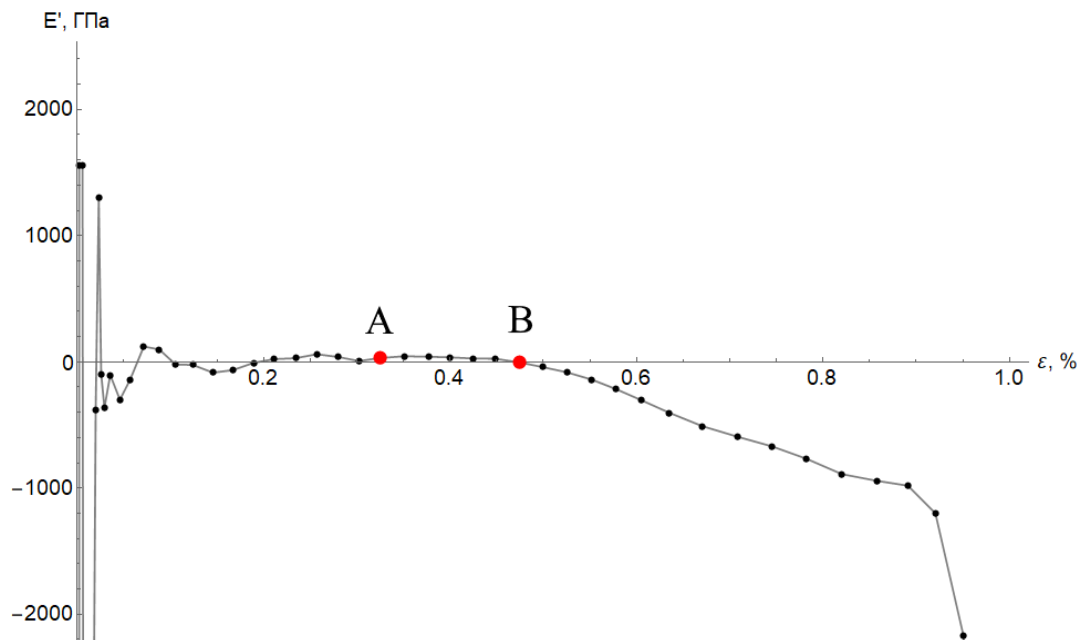


Рис. 5. Зависимость производной модуля упругости от множества точек и участок АВ постоянного модуля упругости.

Поиск точки В начинался с точки А начала стабильного участка. Точка В является пределом пропорциональности, а за модуль упругости на полуцикле бралось значение модуля упругости в точке В. На рис. 6 изображены экспериментальные данные полуцикла и найденный для него стабильный участок.

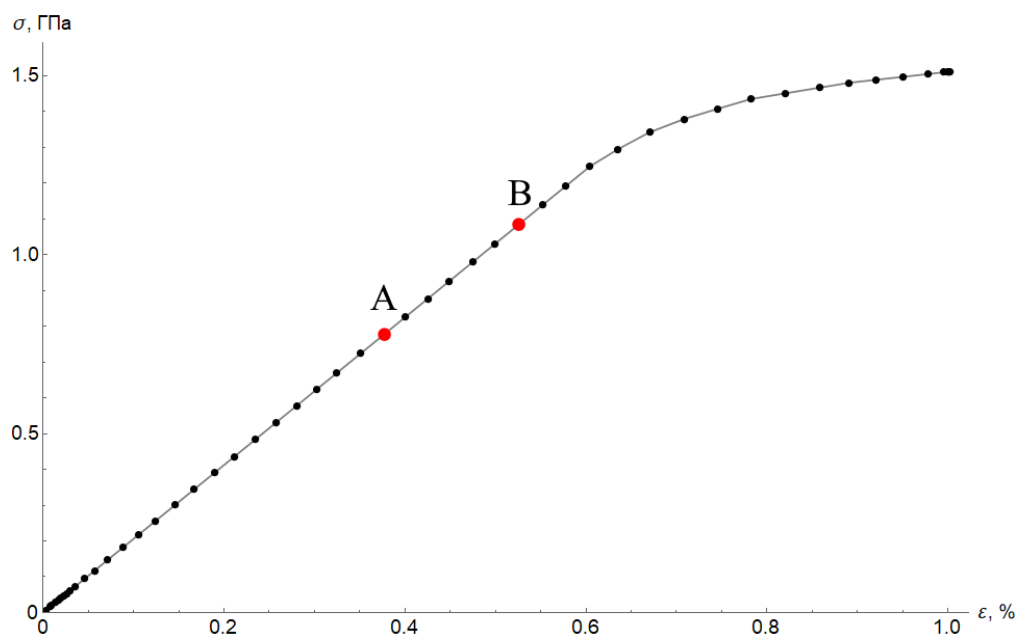


Рис. 6. Экспериментальные данные в локальных координатах полуцикла и множество АВ постоянного модуля упругости.

2.3 Предел текучести

Предел текучести определялся как пересечение продолжения упругого участка кривой деформирования и кривой текучести с допуском на деформацию в 0.02%. На рисунке 7 изображена схема определения предела текучести.

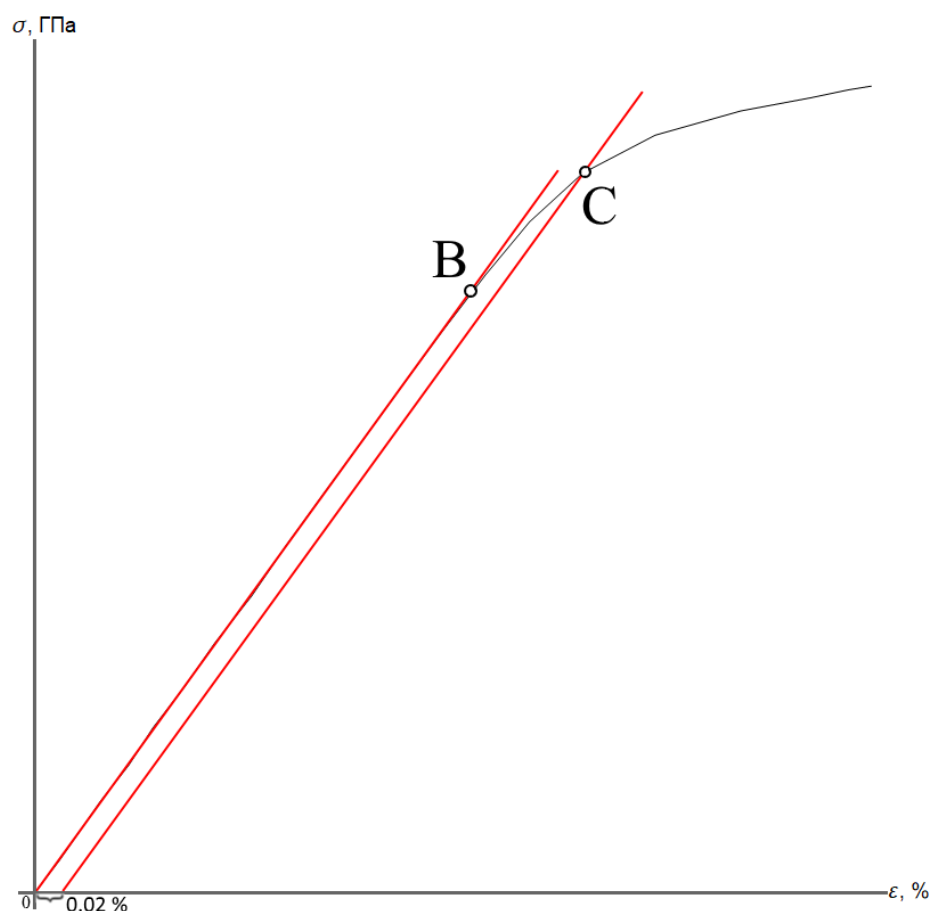


Рис. 7. Определение предела текучести С с допуском на деформацию в 0.02%.

2.4 Параметры модели циклического деформирования

Модель кривых циклического деформирования включает в себя параметры, описывающие зависимость циклических свойств материала от накопленных деформаций, выраженных параметром Одквиста. Значения параметров для полуциклов или для группы полуциклов определялись по экспериментальным данным. Таким образом, по результатам определения параметров получали набор значений параметров модели и соответствующие им значения накопленных деформаций, то есть набор точек.

Аппроксимация зависимостей проводилась с помощью кривой Безье — параметрической кривой, задаваемой выражением

$$B(t) = \sum_{k=0}^n P_k b_{k,n}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (8)$$

где P_k — значение параметра в k -й точке, $b_{k,n}(t)$ — базисные функции, представленные полиномами Бернштейна n -ой степени. Рассмотрим структуру базисных функций:

$$b_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad (9)$$

где $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k .

2.4.1 Изменение модуля упругости

Рассмотрим порядок определения параметра $d(\chi)$, характеризующего изменение модуля упругости при циклическом деформировании. На каждом полуцикле деформирования параметр определялся как отношение значения модуля упругости на данном полуцикле к первоначальному — модулю упругости первого полуцикла:

$$d_i = \frac{E_i}{E_1}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (10)$$

где n — номер полуцикла разрушения.

На рисунке 8 изображен набор точек, по которому определялась зависимость для одного из экспериментов. Полученные значения параметра можно разделить по значениям на две группы: параметры для полуциклов растяжения и для полуциклов сжатия. Поэтому, зависимости от модуля упругости для полуциклов сжатия и растяжения аппроксимировались отдельно.

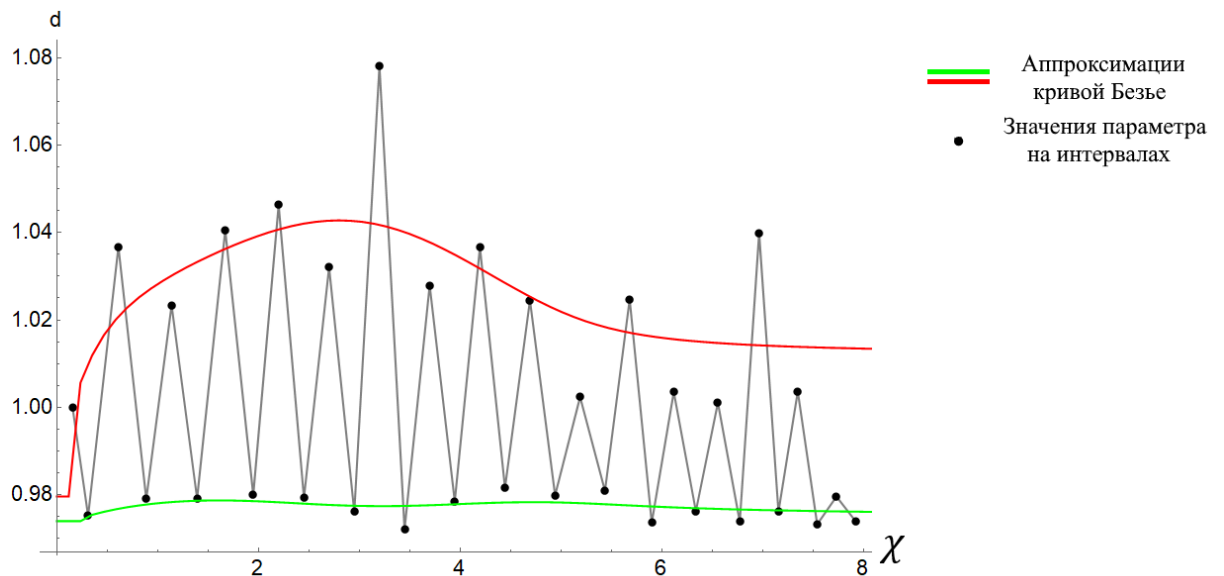


Рис. 8. Зависимость параметра d от накопленных деформаций и аппроксимации кривой Безье

2.4.2 Изменение размера упругой области и масштаба преобразования нелинейного участка.

В модель циклического деформирования входят параметры $a(\chi)$ и $b(\chi)$, описывающие изменение размера упругой области и масштаба преобразования нелинейного участка соответственно. Рассмотрим способ определения этих параметров, предложенный в [5].

Представим экспериментальные кривые в системе координат $\varepsilon - \sigma/E$, где в качестве E возьмем осредненный модуль упругости. Рассмотрим i -й полуцикл, для которого способами, описанными в пунктах 2.1-2.3, получены напряжение

σ_i^S и деформация ε_i^S текучести, значения параметра Оджвиста χ_i и параметра d_i и известны значения напряжения σ_i^0 и деформации ε_i^0 в начале полуцикла. При моделировании на i -м полуцикле модуль упругости определяется как $E_{i,c} = d_i E$.

Выделим две точки: точку A , соответствующую окончанию упругого участка в эксперименте, и точку B , соответствующую окончанию упругого участка при моделировании (считаем, что параметр a_i известен). На рисунке 9 изображены точки A и B .

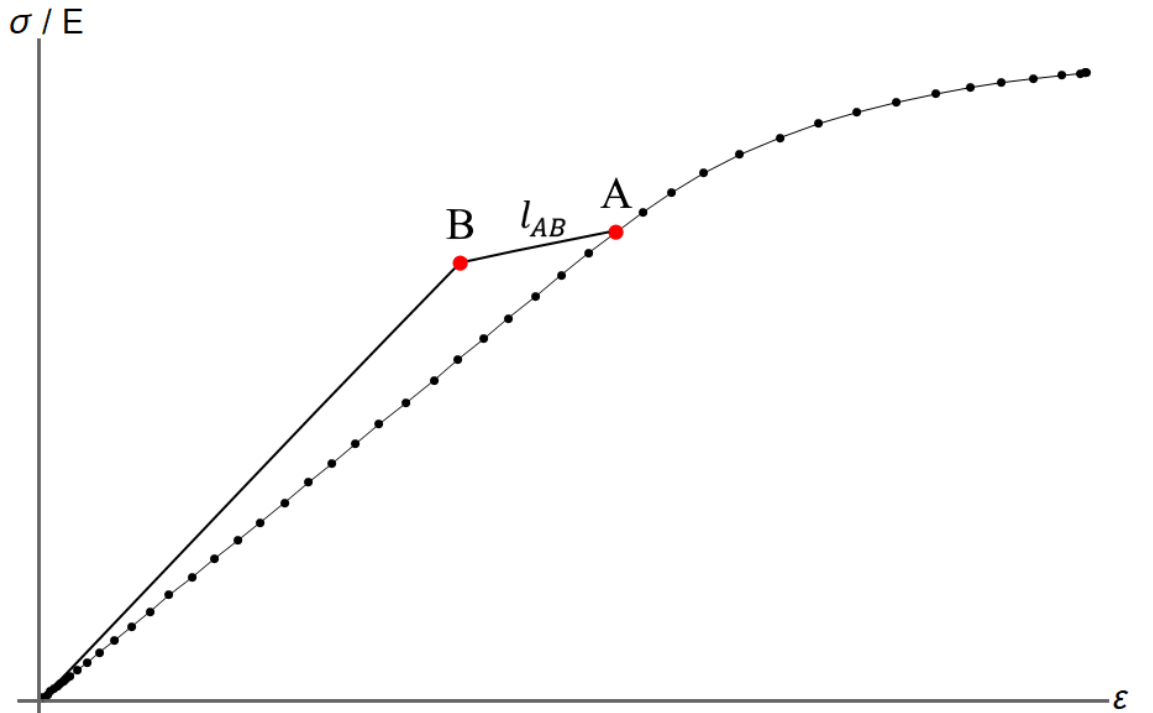


Рис. 9. Модельный и экспериментальный упругие участки.

Введем меру рассогласования окончания упругой области как длину отрезка AB в глобальной системе координат:

$$l_{AB}^i = \sqrt{(\varepsilon_{i,s}^* - \varepsilon_i')^2 + \left(\frac{\sigma_{i,s}^*}{E} - \frac{\sigma_i'}{E}\right)^2}, \quad (11)$$

где $\varepsilon_{i,s}^* = a_i \varepsilon_0^s / d_i$ и $\sigma_{i,s}^* = a_i \sigma_0^s$ — модельные значения деформации и напряжений текучести на i -м полуцикле в локальных координатах, ε_i' и σ_i' — экспериментальные значения деформаций и напряжений текучести в локальных координатах полуцикла. Имеем:

$$l_{AB}^i = \sqrt{(a_i \varepsilon_0^s / d_i - \varepsilon_i')^2 + \left(\frac{a_i \sigma_0^s}{E} - \frac{\sigma_i'}{E} \right)^2}. \quad (12)$$

Параметр a_i необходимо выбрать таким, чтобы расстояние l_{AB} было минимальным.

В [5] предлагается искать значения параметра a не для каждого полуцикла, а для групп полуциклов. Задаются равные промежутки значений параметра Одквиста вплоть до максимального значения накопленной деформации в эксперименте. Полуциклы делятся на группы в соответствии с тем, в какой промежуток по накопленной деформации они попадают. На каждом интервале выполняется минимизация функционала:

$$J_k^a(a_k) = \sum_{i=1}^{m_k} l_{AB}^i, \quad (13)$$

где k — номер интервала, m_k — число полуциклов в k -м интервале.

В качестве значения параметра Одквиста на k -м интервале берется значение на правой границе.

Параметр b характеризует масштаб преобразования нелинейного участка кривой. В [5] предложен способ определения параметра, основанный на рассогласовании между последними точками экспериментальной и модельной кривой. На рисунке 10 изображены экспериментальная и модельная кривые.

Мера рассогласования определяется как:

$$l_{CD}^i = \left| \frac{\sigma_{i,max}}{E} - \frac{\sigma_{i,max}^*}{E} \right|, \quad (14)$$

где $\sigma_{i,max}$ и $\sigma_{i,max}^*$ – экспериментальное и модельное значения напряжения и деформации в последней точке i -го полуцикла.

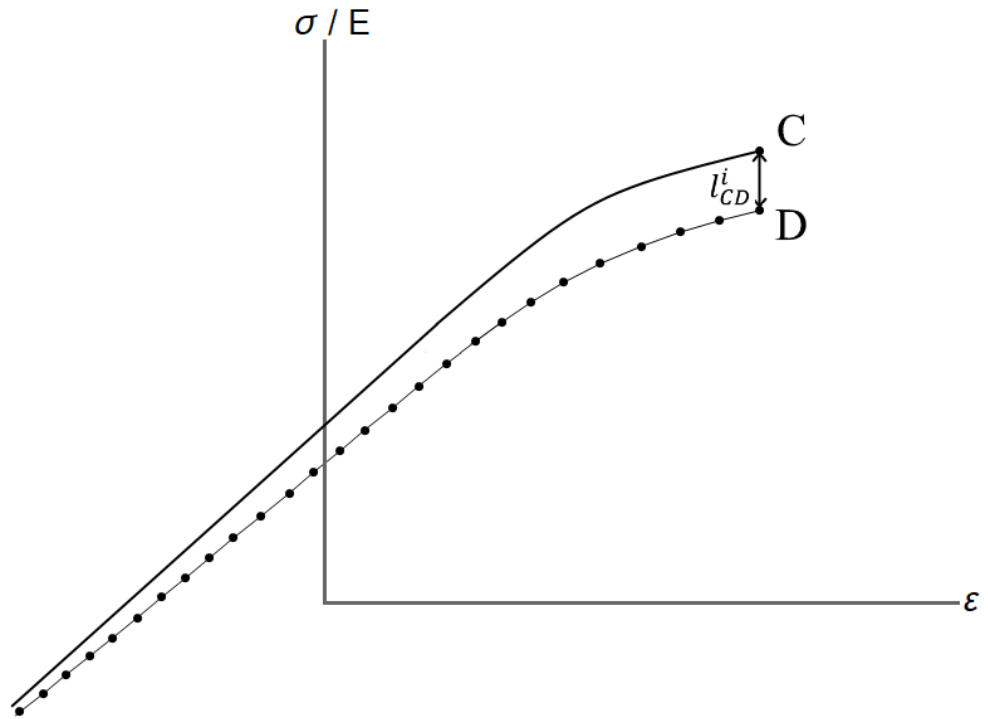


Рис. 10. Мера рассогласования между последними точками экспериментальной и модельной кривой.

Параметр b также предлагается определять на равных промежутках по значению Одквиста. Минимизируемый функционал:

$$J_k^b(b_k) = \sum_{i=1}^{m_k} l_{CD}^i, \quad (15)$$

где k – номер интервала, m_k – число полуциклов в k -м интервале.

В качестве значения параметра Одквиста на k -м интервале также берется значение на правой границе.

Необходимо учесть, что раздельное определение параметров a и b может привести к потере точности в связи с тем, что после определения b длина l_{CD}^i ненулевая. Поэтому в [5] предлагается определять параметры a и b совместно путем введения функционала:

$$J_k(a_k, b_k) = J_k^a(a_k) + J_k^b(b_k) = \sum_{i=1}^{m_k} (l_{AB}^i + l_{CD}^i). \quad (16)$$

Для определения параметров на k -м необходимо провести минимизацию функционала по параметрам a_k и b_k .

На рисунках 11-12 изображены примеры определенных указанным образом значений параметров на правых границах интервала и их аппроксимации кривыми Безье.

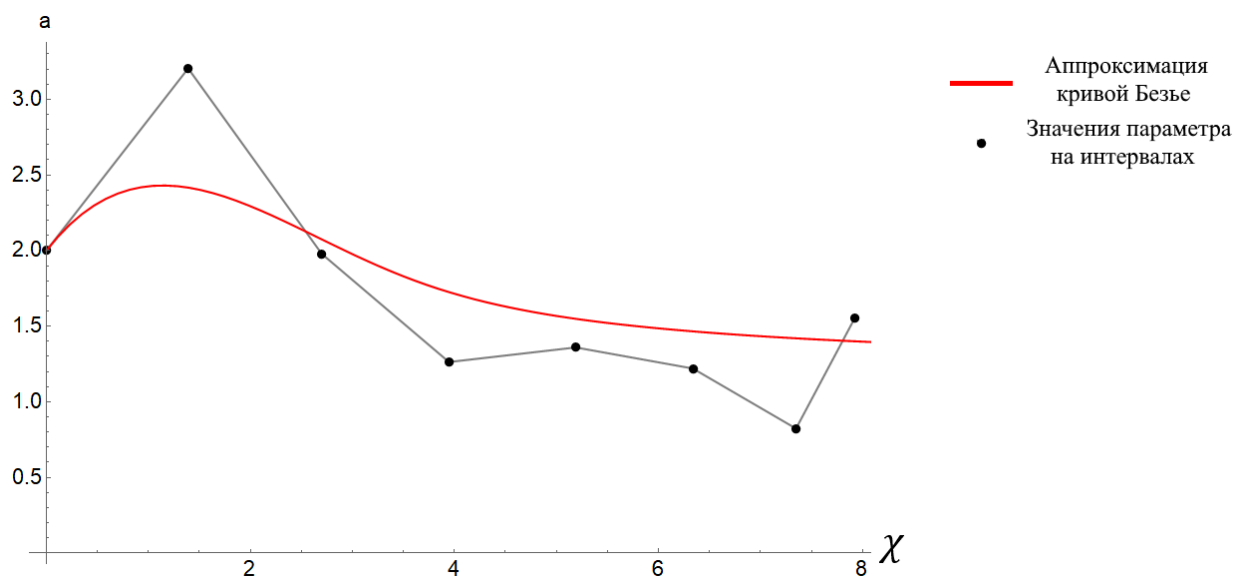


Рис. 11. Зависимость параметра a от накопленных деформаций и аппроксимация кривой Безье.

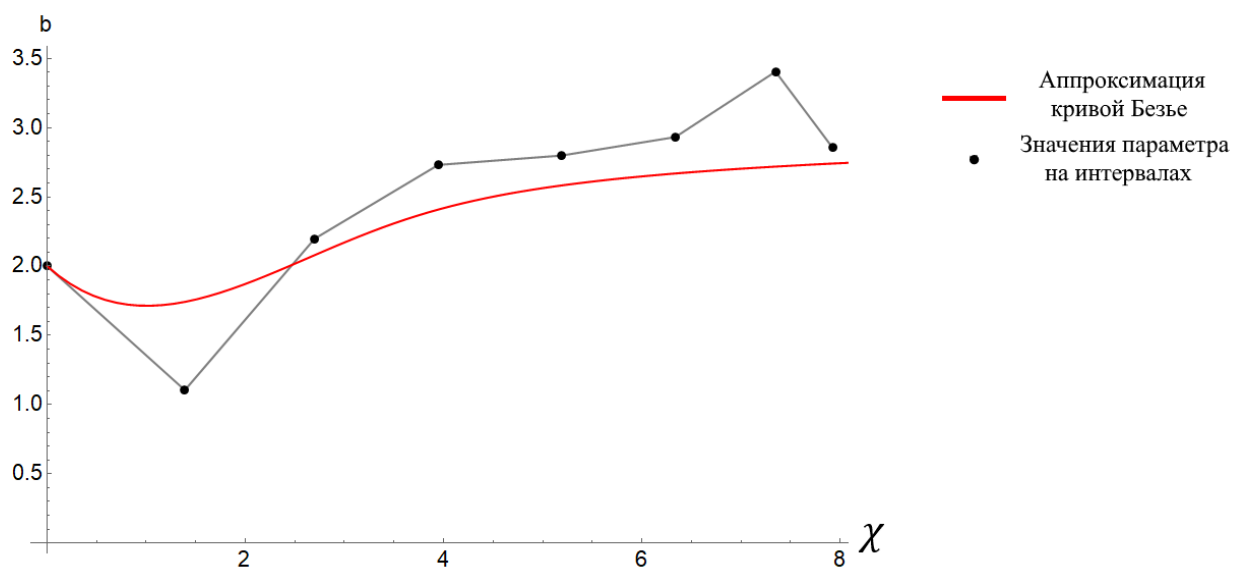


Рис. 12. Зависимость параметра b от накопленных деформаций и аппроксимация кривой Безье.

2.5 Параметры модели малоциклового усталости

Зависимость, связывающая число полуциклов n_f до разрушения с величиной χ_{max} накопленной деформации:

$$n_f = \left(\frac{\chi_{max}}{\delta} \right)^\gamma, \quad (17)$$

где δ и γ — постоянные материала для фиксированной температуры.

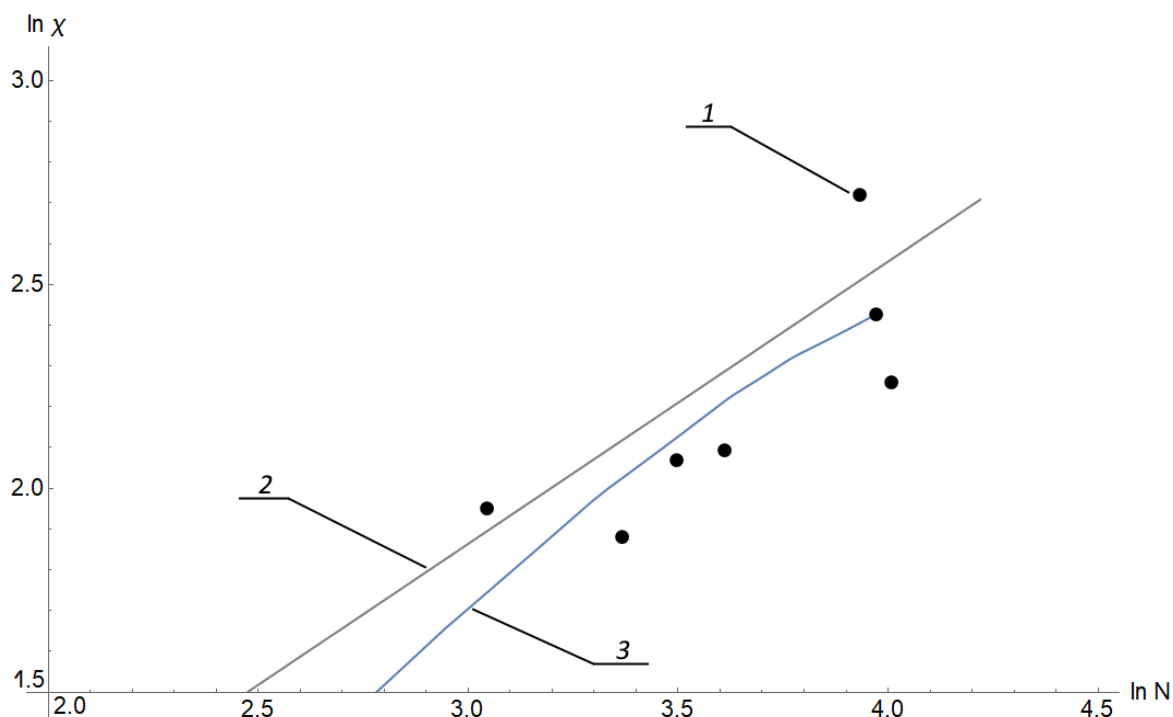


Рис. 13. Облако точек (1), кривая критерия (2) и изменение параметра Одквиста для одного эксперимента (3).

Рассмотрим процесс определения параметров δ и γ на основе экспериментальных данных, описанный в [5]. Необходимо по экспериментальным данным определить параметры модели, процесс получения которых описан в пунктах 2.2-2.4. Далее по результатам моделирования определяются зависимости амплитуд деформаций и напряжений от числа циклов до разрушения в логарифмических координатах. По полученным точкам методом наименьших квадратов определяются параметры δ и γ . На рисунке 13 изображен пример определения кривой критерия в логарифмических координатах: 1 – точки, 2 – полученная по ним кривая критерия, 3 – зависимость параметра Одквиста от номера полуцикла для одного из рассмотренных в данном примере экспериментов. В работе использовались значения $\gamma = 1.452$, $\delta = 0.785$.

3 Пример работы модели

В пункте 2 описаны способы, которыми можно получить параметры для модели циклического деформирования, позволяющей строить полуциклы деформаций в локальных координатах:

$$\sigma^*(\chi, \varepsilon^*) = \begin{cases} E \cdot d(\chi) \varepsilon^*, & \varepsilon^* \leq \varepsilon_s^* \\ E \cdot d(\chi) \varepsilon_s^* + d(\chi) b(\chi) \left[f\left(\varepsilon_s + \frac{\varepsilon^* - \varepsilon_s^*}{b(\chi)}\right) - \sigma_s \right], & \varepsilon^* > \varepsilon_s^* \end{cases} \quad (18)$$

$$\varepsilon_s^* = \frac{a(\chi)}{d(\chi)} \varepsilon_s, \quad (19)$$

где σ^* и ε^* — напряжения и деформации в локальных координатах полуцикла; E — изначальный модуль упругости; $f(\varepsilon)$ — кривая первого полуцикла; $a(\chi)$ — размер упругой области; $b(\chi)$ — коэффициент преобразования нелинейного участка кривой первого полуцикла; $d(\chi)$ — коэффициент изменения модуля упругости; σ_s и ε_s — напряжения и деформации кривой первого полуцикла.

Программа для определения параметров из экспериментальных данных и модель малоциклового усталости были реализованы с помощью языка программирования C++. Для решения задачи поиска минимума функционалов использовалась библиотека алгоритмов оптимизации для C++ NLOpt, а именно метод стохастической глобальной оптимизации (StoGO). Метод основан на систематическом разделении пространства на более мелкие гиперпрямоугольники (n -прямоугольники) и поиска среди них локального минимума с помощью градиентного метода Бройдена — Флетчера — Гольдфарба — Шанно (BFGS). BFGS — итерационный квазиньютоновский метод. Этот метод широко известен своей эффективностью и устойчивостью, поэтому часто применяется в задачах оптимизации.

На рисунках 14-15 изображен пример работы модели в сравнении с экспериментальными данными при моделировании нескольких полуциклов в локальных и глобальных координатах (первый полуцикл не рассматриваем, так как модель подразумевает использование его кривой для моделирования следующих полуциклов).

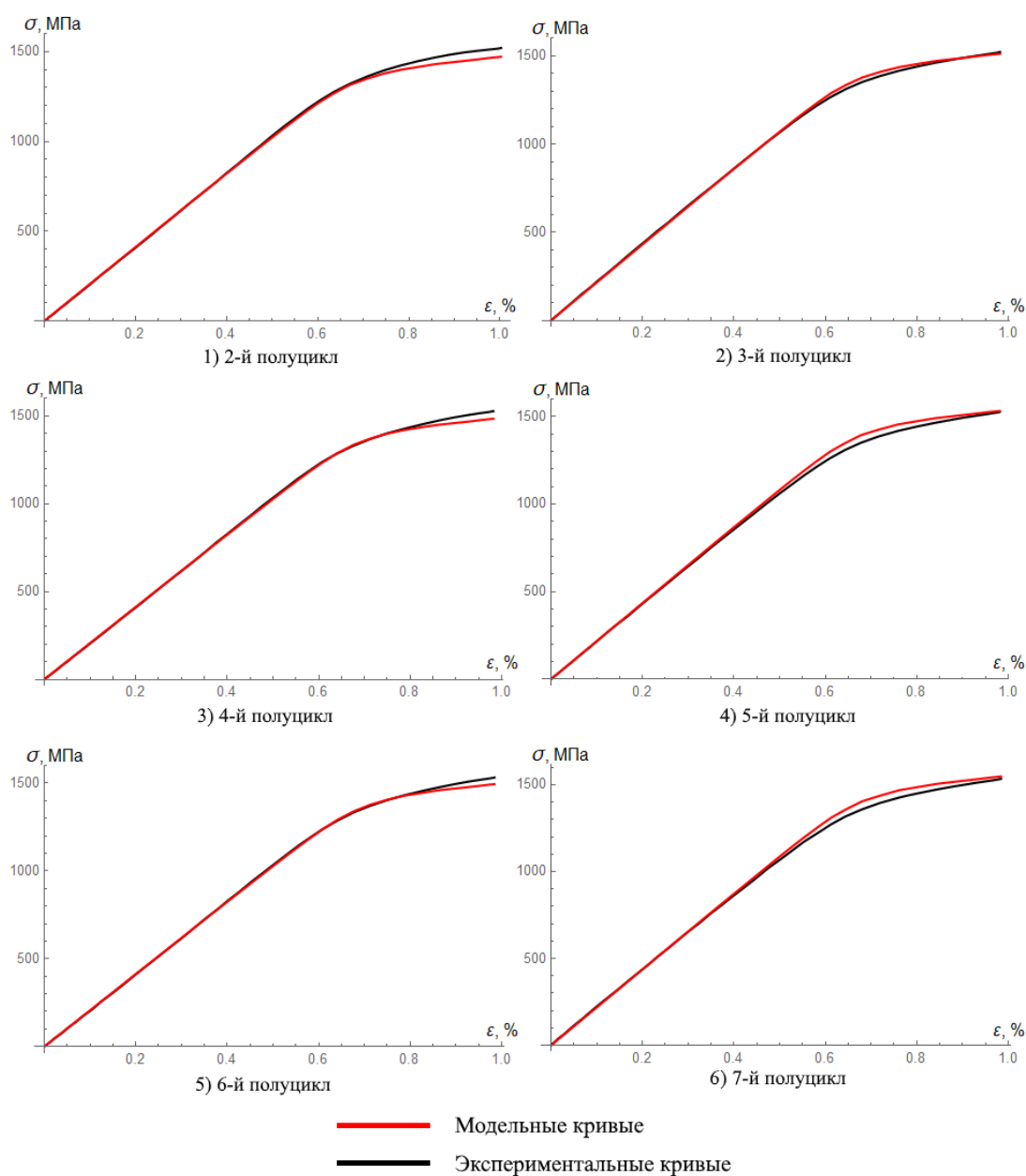


Рис. 14. Сравнение модельных и экспериментальных кривых в локальных координатах.

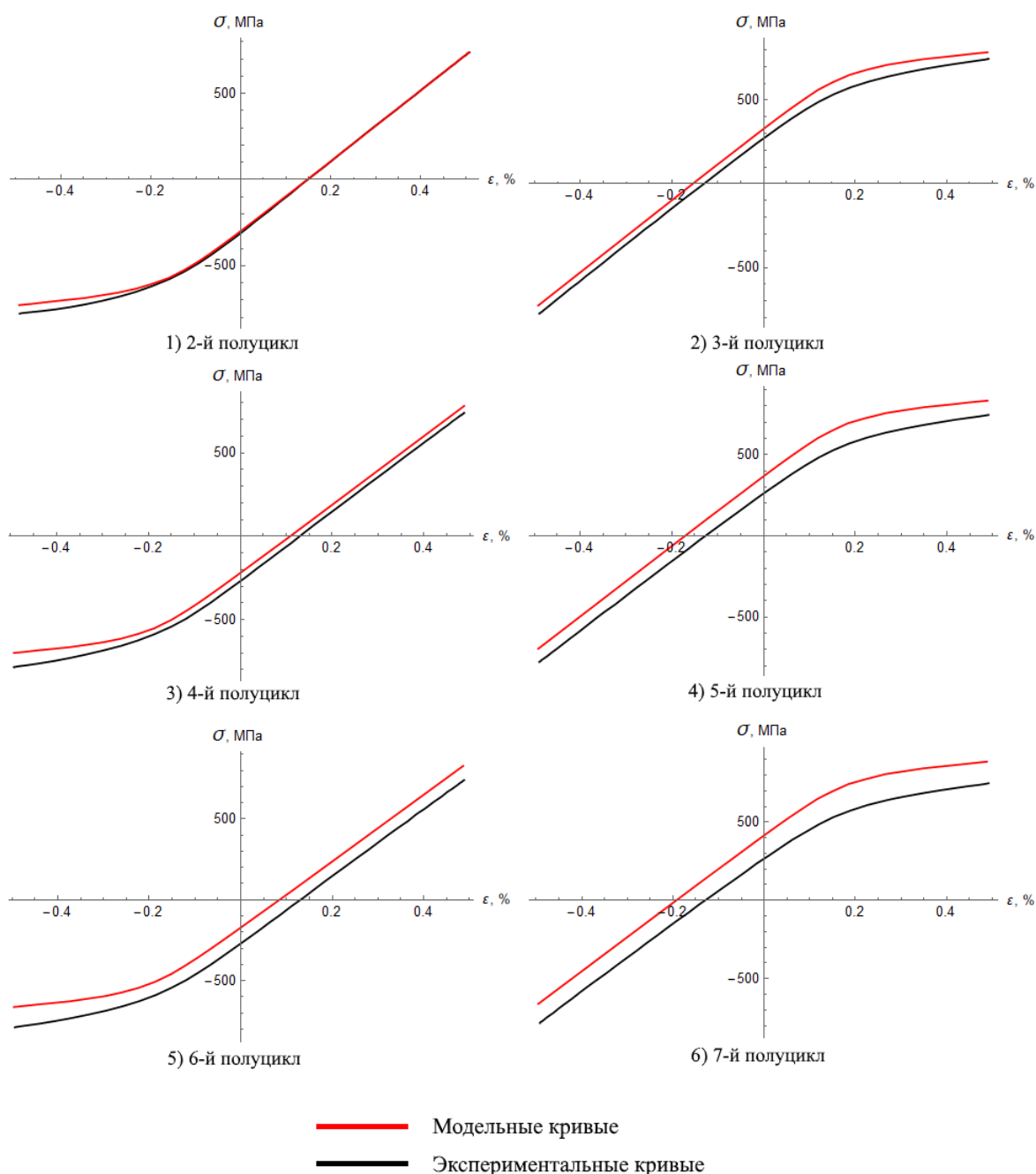


Рис. 15. Сравнение модельных и экспериментальных кривых в глобальных координатах.

На полуциклах растяжения наблюдается отклонение в последней точке. Это приводит к тому, что при моделировании в глобальных координатах петли начинают съезжать вверх. Предпринималась попытка введения весового коэффициента для полуциклов сжатия $w \in [0; 1]$ в минимизируемый функционал перед компонентами l_{CD}^i , отвечающими за минимизацию

отклонения в последней точке полуцикла. Также предпринималась попытка минимизации функционала по весовому коэффициенту наряду с параметрами модели. Данные меры не привели к уменьшению отклонений.

4 Методы подбора распределения

4.1 Тест Андерсона — Дарлингга

Тест Андерсона — Дарлингга используется для проверки простых гипотез о принадлежности выборки к закону распределения. Основным преимуществом теста Андерсона—Дарлингга является его применимость для проверки отклонения экспериментальных данных от различных теоретических распределений. Распределение статистики критерия Андерсона — Дарлингга не зависит от закона, на принадлежность к которому проверяется выборка, то есть критерий свободен от проверяемого распределения. Параметры для проверяемых распределений определялись методом максимального правдоподобия.

Тест Андерсона-Дарлингга гораздо более чувствителен к хвостам исследуемого распределения, чем, например, тест Колмогорова — Смирнова, который больше осведомлен о центре распределения. В он является более сильным, нежели тест Колмогорова — Смирнова. Сравнение этих тестов приведено в [8].

В тесте выдвигаются две гипотезы: H_0 — выборка соответствует проверяемому закону распределения, H_1 — нельзя сделать выводов о соответствии.

В качестве нулевой гипотезы выбирается то, что выборка соответствует закону.

В критерии Андерсона — Дарлингга используется статистика вида:

$$AD = \sqrt{-n - s}, \quad (20)$$

$$s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i - 1) [\ln F(X_i) + \ln(1 - F(X_{n-i+1}))], \quad (21)$$

где n — размер выборки, $F(X)$ — функция распределения проверяемого распределения, использующая оценки параметров, X_i — i -й элемент из выборки, отсортированной по возрастанию.

Рассмотрим структуру статистики Андерсона — Дарлинга: так как выборка отсортирована по возрастанию, то при $i = 1$ $X_i = X_1$, $X_{n-i+1} = X_n$ имеем наименьший и наибольший элементы выборки, при $i = 1$ имеем наибольший и наименьший элементы без учета X_1 и X_n соответственно и так далее. Таким образом, $F(X_{n-i+1})$ представляют собой значения, полученные из обратной функции распределения. s является взвешенной разницей по выборке между проверяемым распределением и обратным ему распределением.

Так как как используются оценки параметров, полученные методом максимального правдоподобия, такое распределение будет ближе к выборке, чем настоящее распределение. Критическое значение будет слишком большим, что приведет к уровню значимости ниже номинального. Поэтому статистика должна учитывать оценку параметров.

В [6] предлагается способ учета этого фактора с помощью корректировки статистики критерия:

$$AD^* = AD \left(1 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2} \right). \quad (22)$$

Меньшее значение статистики говорит о том, что рассматриваемое распределение лучше подходит для выборки. Однако, чтобы сравнить насколько хорошо подходят распределения различных типов, необходимо обратиться Р-значениям, соответствующим статистике Андерсона — Дарлинга.

4.2 Р-значение статистики Андерсона — Дарлинга

В [6] предлагается использовать различные формулы расчета Р-значения в зависимости от значения скорректированной статистики AD^* . Их уравнения не зависят от проверяемого распределения:

$$\begin{cases} p < \text{Exp}(1.2937 - 5.709 AD^* + 0.0186 (AD^*)^2), & AD^* \geq 0.6 \\ p = \text{Exp}(0.9177 - 4.279 AD^* - 1.38 (AD^*)^2), & 0.34 < AD^* < 0.6 \\ p = 1 - \text{Exp}(-8.318 + 42.796 AD^* - 59.938 (AD^*)^2), & 0.2 < AD^* < 0.34 \\ p > 1 - \text{Exp}(-13.436 + 101.14 AD^* - 223.73 (AD^*)^2), & AD^* \leq 0.2 \end{cases} \quad (23)$$

Данная зависимость справедлива для двухпараметрических распределений и трехпараметрического распределения Вейбулла.

В качестве нулевой гипотезы выдвигается соответствие выборки проверяемому распределению. Если p -значение больше номинального, нельзя отбросить нулевую гипотезу, поэтому в таком случае можно заключить, что данные следуют проверяемому распределению.

При сравнении нескольких распределений стоит выбрать распределение с наибольшим p -значением.

4.3 Тест отношения правдоподобия

Тест отношения правдоподобия использовался, чтобы определить, значительно ли дополнительный параметр улучшает соответствие распределению.

В качестве нулевой гипотезы выбирается то, что выборка больше соответствует распределению с двумя параметрами.

Сравнение основано на соотношении функции максимального правдоподобия с двумя параметрами к функции максимального правдоподобия модели с тремя параметрами. Если значение этого отношения относительно мало, то можно заключить, что модель с тремя параметрами лучше соответствует выборке.

Если λ является значением отношения правдоподобия, то для больших выборок значение $(-2 \ln \lambda)$ следует распределению хи-квадрат со степенями свободы, равными разнице между числом свободных параметров в моделях без ограничений и с ограничениями.

Поэтому использованный в работе программный комплекс Minitab часто предоставляет Р-значения, связанные с тестом отношения правдоподобия, из распределения хи-квадрат.

Рассмотрим выводы, которые можно сделать из анализа Р-значения теста отношения правдоподобия с учетом номинального уровня значимости α . Первый случай: $P \leq \alpha$ — трехпараметрическое распределение лучше подходит. Второй случай: $P > \alpha$ — трехпараметрическое распределение не улучшает ситуацию.

4.4 Вероятностный график

В вероятностных графиках функция распределения представляется в виде линейного графика с помощью выбора шкалы по оси ординат, и вместе с ней строится эмпирическая функция распределения.

Вероятностные графики могут быть полезны для определения выбросов. Точки, расположенные вдоль линии графика вероятности представляют соответствующие распределению значения. Точки, удаленные от линии — предполагаемые выбросы.

Большое количество выбросов может свидетельствовать о том, что рассматриваемое распределение не подходит для выборки. На рис. 16 изображены примеры вероятностных графиков для выборок, построенные в программном комплексе Minitab.

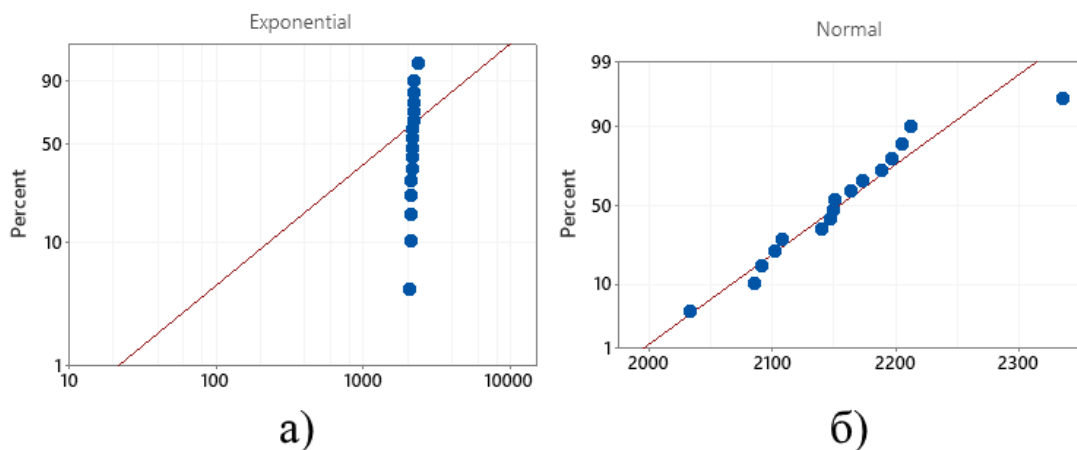


Рис. 16. а) точки не соответствуют прямой, б) точки около прямой.

5 Анализ свойств материала

Для каждого эксперимента были получены значения модуля упругости и напряжений текучести для первого полуцикла. Гистограммы полученных выборок изображены на рис. 17.

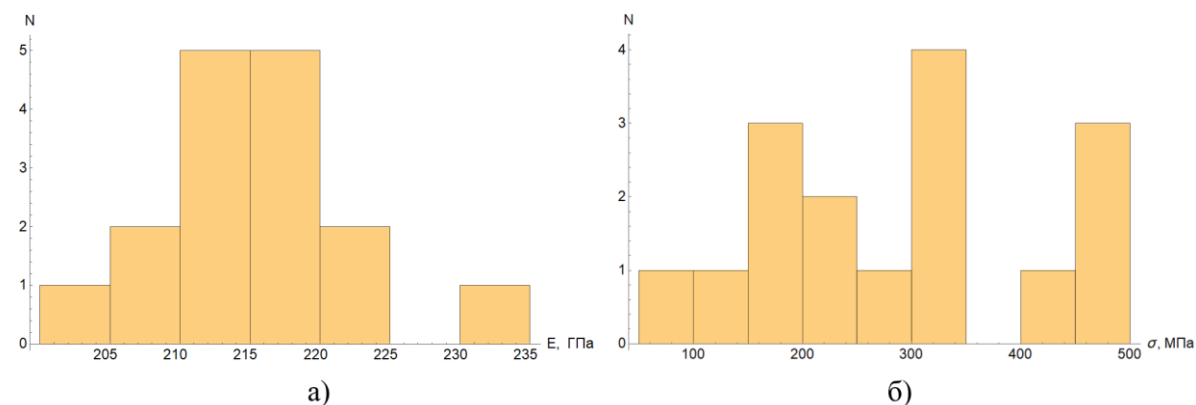


Рис. 17. а) разброс модулей упругости, б) разброс напряжений текучести.

Тесты Андерсона — Дарлинга и отношения правдоподобия для уровня значимости $\alpha = 0.05$ были проведены в программном комплексе Minitab. Для набора распределений были получены оценки параметров методом максимального правдоподобия, значения скорректированной статистики Андерсона — Дарлинга (AD), соответствующее ему Р-значение (P-value) и Р-значения для теста отношения правдоподобия (LRT P). Р-значения получены только для тех распределений, где это возможно (см. пункт 4.2).

5.1 Модуль упругости

Рассмотрим результаты для модуля упругости.

Таблица 1. Результаты тестов для разброса модуля упругости.

Distribution	AD	P	LRT P
Normal	0.372	0.377	-
Lognormal	0.343	0.444	-
3-Parameter Lognormal	0.279	-	0.373
Exponential	6.932	<0.003	-
2-Parameter Exponential	1.943	<0.010	0.000
Weibull	0.936	0.015	-
3-Parameter Weibull	0.357	0.454	0.011
Smallest Extreme Value	1.022	<0.010	-
Largest Extreme Value	0.345	>0.250	-
Gamma	0.336	>0.250	-
3-Parameter Gamma	0.849	-	1.000
Logistic	0.226	>0.250	-
Loglogistic	0.219	>0.250	-
3-Parameter Loglogistic	0.216	-	0.554

Наибольшее Р-значения у трехпараметрического распределения Вейбулла. Для логистического распределения, лог-логистического распределения, распределения наибольших экстремальных значений доступны нижние оценки Р-значения. Для трехпараметрического лог-логистического распределения доступно значение для теста отношения правдоподобия: $0.554 > \alpha$ — рассматриваем только двухпараметрическое распределение. Сравним их графики вероятности.

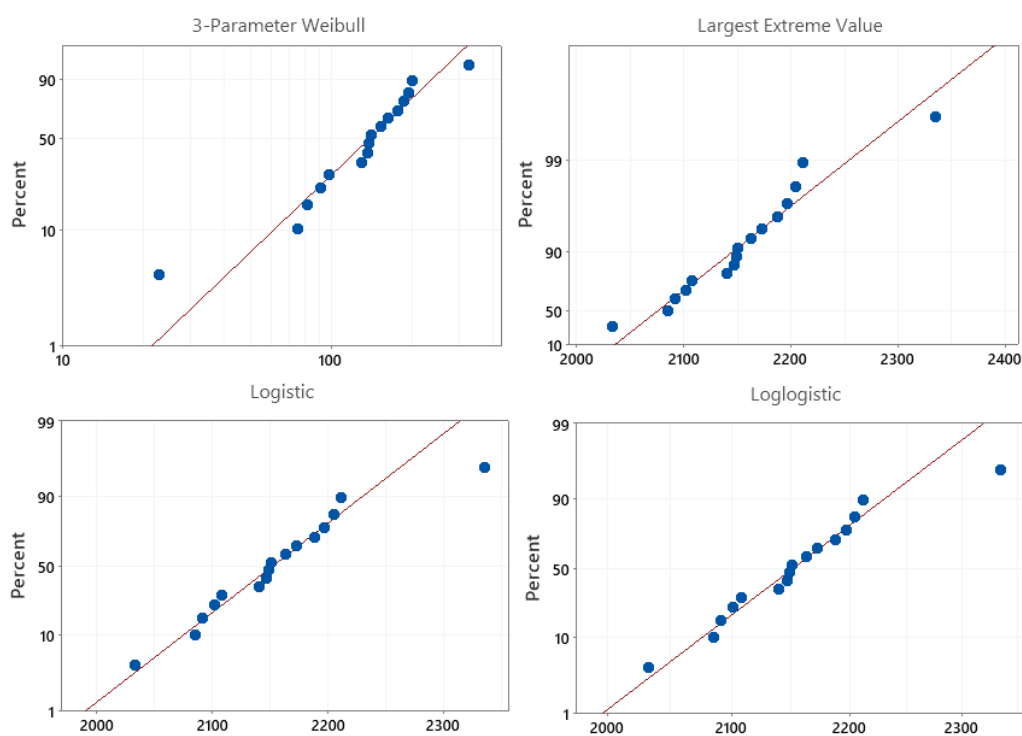


Рис. 18. Графики вероятности.

По графикам нельзя сказать, какое из распределений лучше подходит к выборке. Поэтому останавливаемся на трехпараметрическом распределении Вейбулла, для которого известно Р-значение.

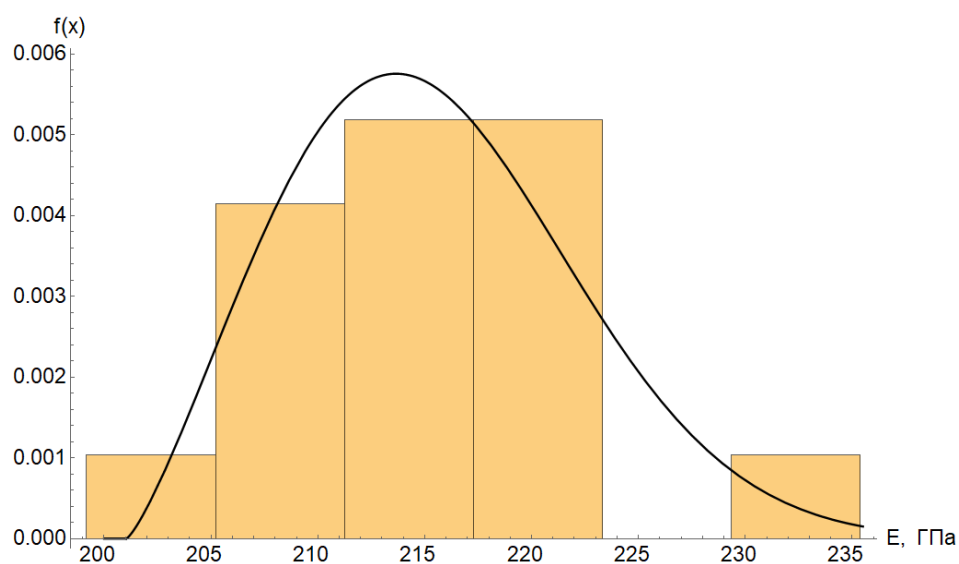


Рис. 19. Эмпирическая функция плотности (гистограмма) и функция плотности и полученного распределения.

Параметры трехпараметрического распределения Вейбулла, полученные методом максимального правдоподобия: коэффициент формы - 2.27165, коэффициент масштаба - 163.01462, коэффициент сдвига - 2010.341. На рис. 19. изображена эмпирическая функция плотности распределения в виде гистограммы и функция плотности полученного распределения Вейбулла.

5.2. Напряжение текучести

Рассмотрим результаты для напряжений текучести.

Таблица 2. Результаты тестов для разброса напряжения текучести.

Distribution	AD	P	LRT P
Normal	0.380	0.360	-
Lognormal	0.385	0.351	-
3-Parameter Lognormal	0.366	-	0.249
Exponential	2.263	0.004	-
2-Parameter Exponential	1.267	0.023	0.005
Weibull	0.356	>0.250	-
3-Parameter Weibull	0.348	0.476	0.769
Smallest Extreme Value	0.605	0.101	-
Largest Extreme Value	0.340	>0.250	-
Gamma	0.345	>0.250	
3-Parameter Gamma	0.553	-	1.000
Logistic	0.404	>0.250	-

Продолжение таблицы 2.

Distribution	AD	P	LRT P
Loglogistic	0.377	>0.250	-
3-Parameter Loglogistic	0.359	-	0.474

Наибольшее Р-значения у трехпараметрического распределения Вейбулла, а для двухпараметрического доступна только нижняя оценка. При этом у трехпараметрического распределения Вейбулла значение LRT P больше номинального уровня значимости — поэтому рассматриваем только двухпараметрическое распределение. Для логистического распределения, лог-логистического распределения, распределения наибольших экстремальных значений доступны нижние оценки Р-значения. Для трехпараметрического лог-логистического распределения доступно значение для теста отношения правдоподобия: $0.474 > \alpha$ — рассматриваем только двухпараметрическое распределение. Сравним их графики вероятности.

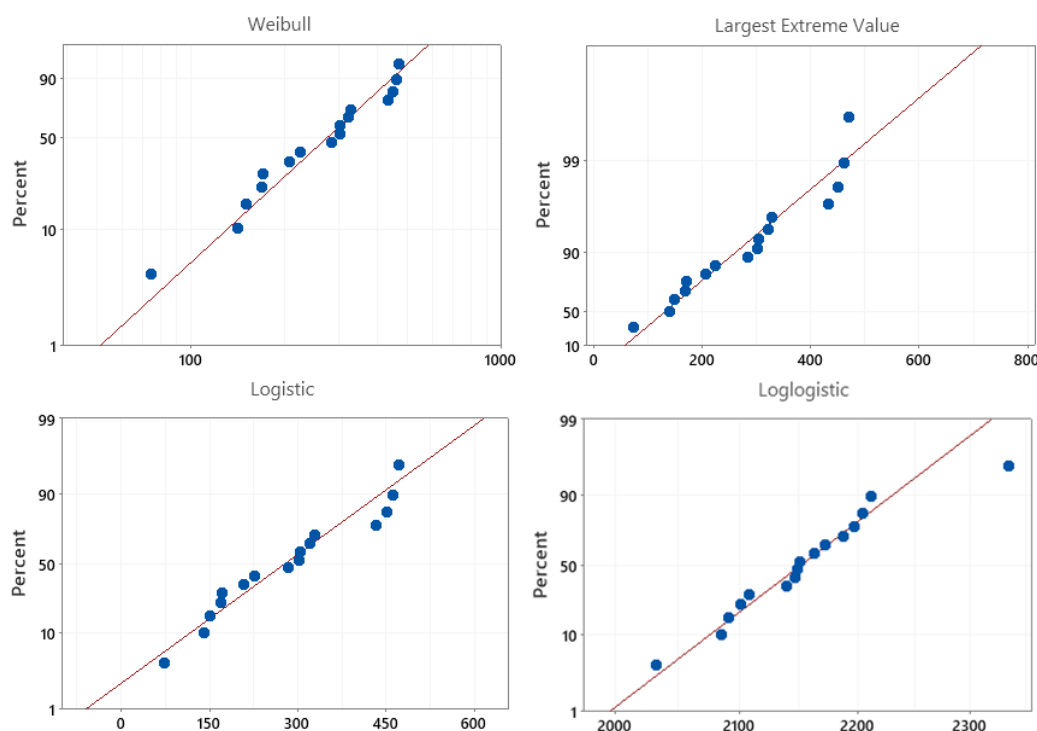


Рис. 20. Графики вероятности.

Точки ближе всего к прямой в распределении Вейбулла. Выбираем его.

Параметры двухпараметрического распределения Вейбулла, полученные методом максимального правдоподобия: коэффициент формы - 2.51339, коэффициент масштаба - 317.7284. На рис. 21. изображена эмпирическая функция плотности распределения в виде гистограммы и функция плотности полученного распределения Вейбулла.

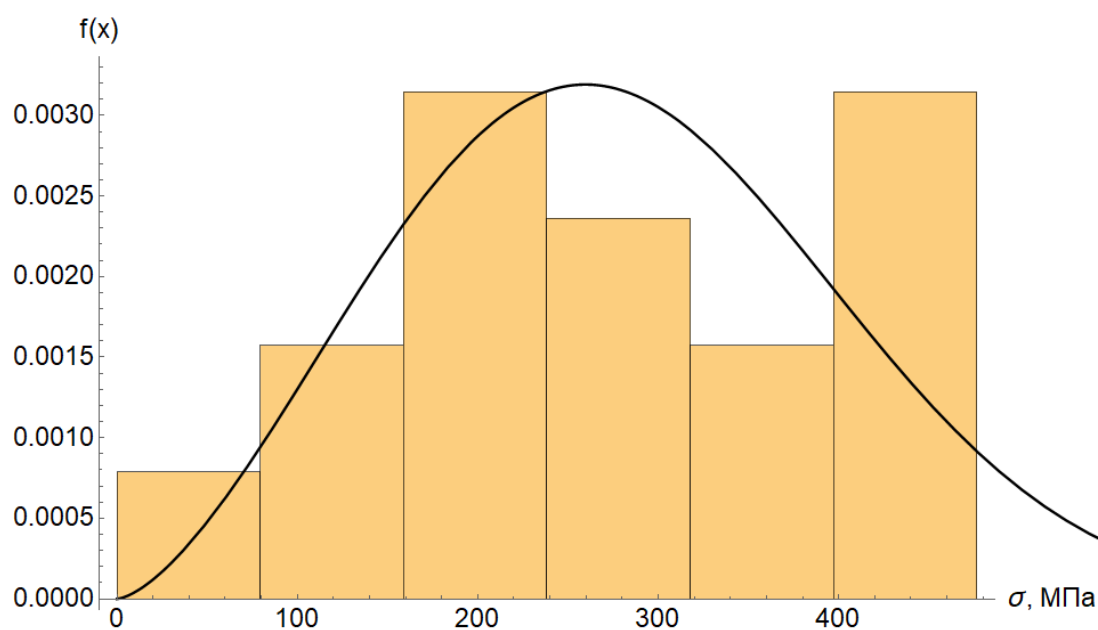


Рис. 21. Эмпирическая функция плотности (гистограмма) и функция плотности и полученного распределения.

6 Анализ разброса номеров полуциклов разрушения

Из распределений модуля упругости и напряжения текучести, параметры которых определены в пунктах 5.1-5.2, были получены 1000 случайных величин для каждого распределения. На рис. 22 изображены гистограммы полученных разбросов.

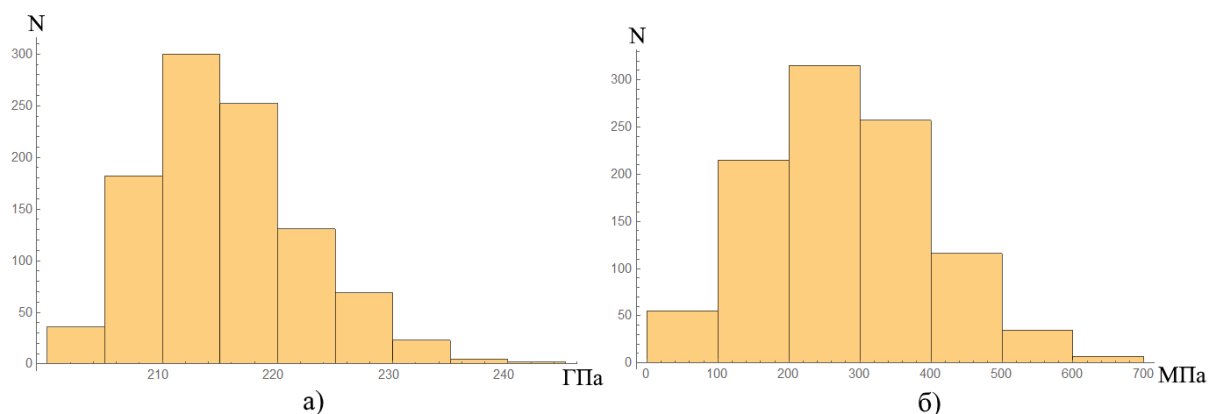


Рис. 22. а) разброс модулей упругости, б) разброс напряжений текучести.

Были получены параметры модели для каждого эксперимента. Затем, используя в модели значения начальных модуля упругости или напряжения текучести, с помощью критерия малоциклового усталости были получены “номера” полуциклов разрушения образца. На рис. 24 проиллюстрирован пример пересечения кривой критерия с кривыми, отражающими зависимость накопленных деформаций от номера моделируемого полуцикла. В качестве “номера” принималась координата на оси абсцисс точки пересечения с кривой критерия.

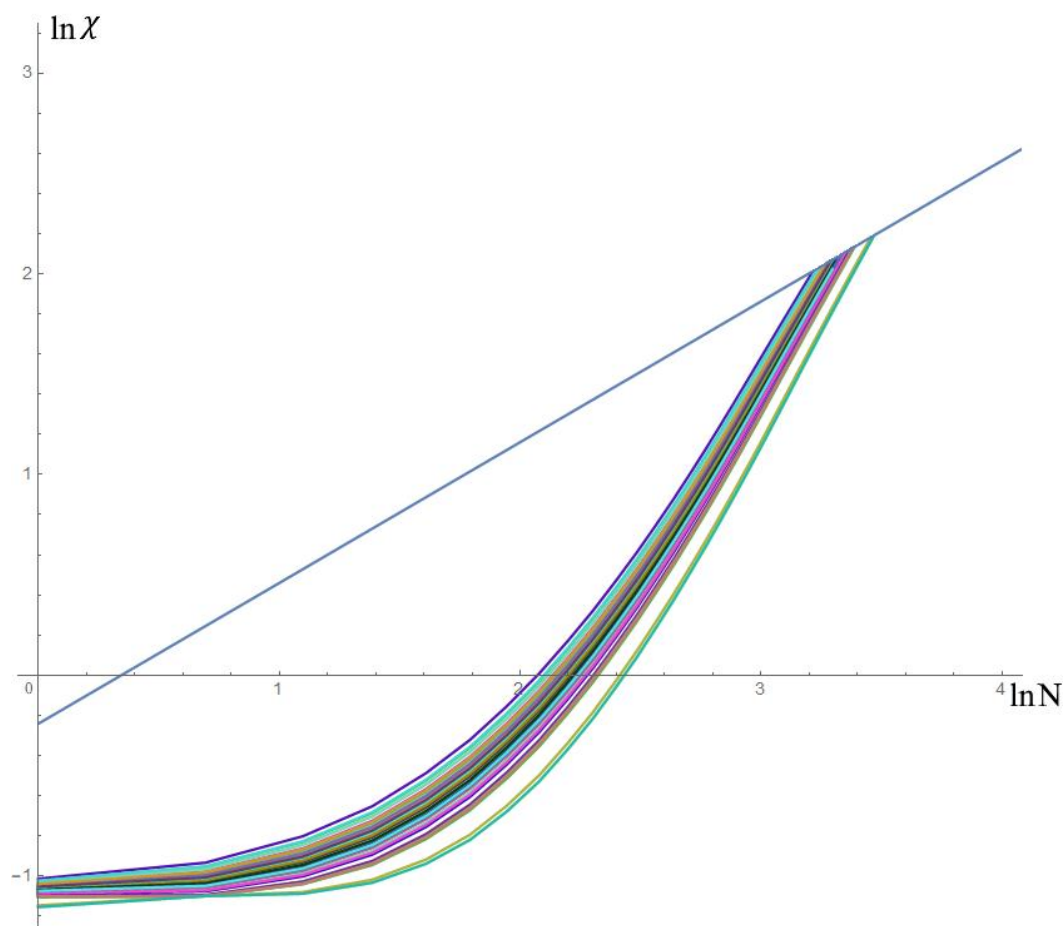


Рис. 23. Накопленные деформации и кривая критерия в логарифмических координатах.

Для каждого эксперимента были получены 2 выборки “номеров” полуциклов разрушения размером в 1000, соответствующие разбросам модуля упругости и напряжений текучести. Затем, эти выборки были проанализированы методами, описанными в пунктах 4.1-4.4, и для них были выбраны соответствующие распределения.

6.1 Выборка по модулю упругости

Тесты Андерсона — Дарлинга не дали результатов, позволяющих предположить подходящее распределение каждого эксперимента. Поэтому,

распределение выбиралось исходя из вероятностных графиков. Наиболее подходящими распределениями для всех случаев оказались 2-х параметрическое и 3-х параметрическое логнормальные распределения: точки на графиках вероятности для этих экспериментов в большинстве экспериментов походят на прямую. На рисунке 24 изображены вероятностные графики логнормальных распределений для каждого эксперимента.

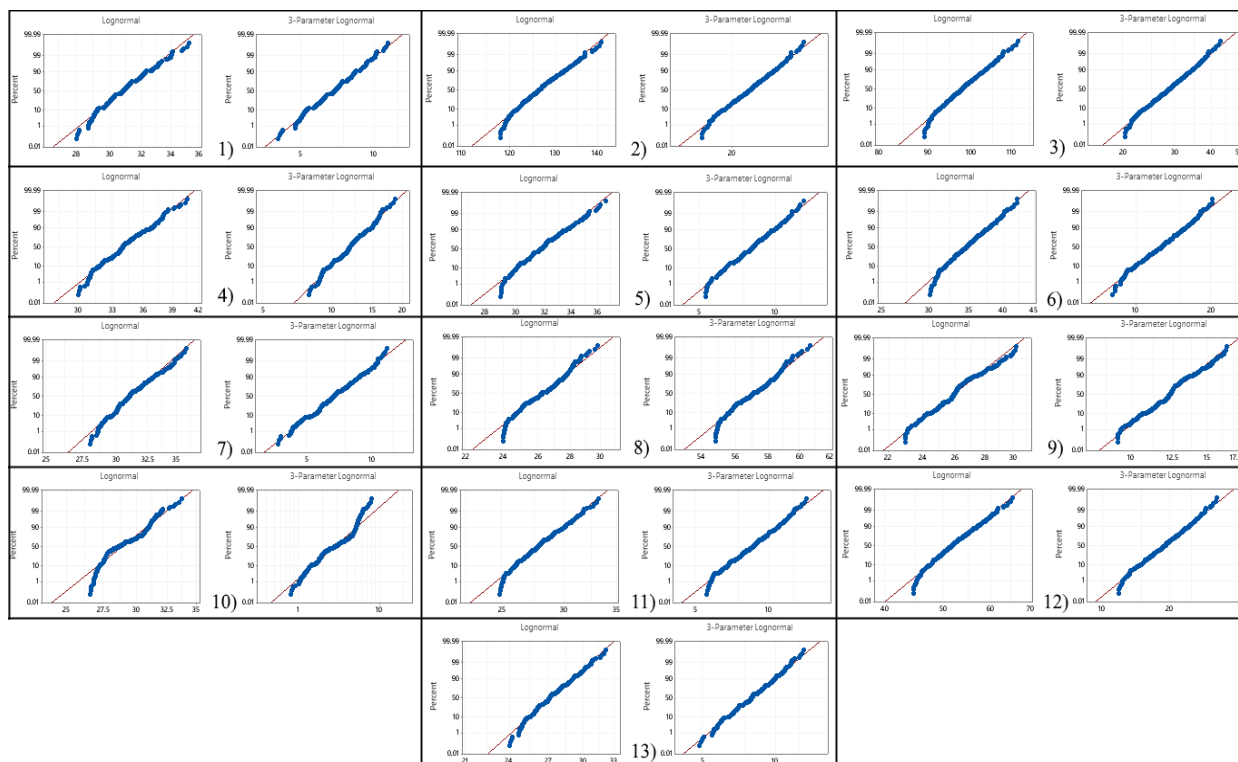


Рис. 24. Вероятностные графики 2-х и 3-х параметрического логнормального распределения для всех экспериментов.

В каждом случае из двух выбиралось то распределение, которое лучше подходит для эксперимента. Двухпараметрическое распределение представлялось как трехпараметрическое с нулевым параметром сдвига.

В таблице 3 показаны параметры распределений и соответствующие им значения размаха деформаций.

Таблица 3. Параметры распределений.

Размах	Мат. ожидание	Среднекв. откл.	Сдвиг
0.0236769	1.90565	0.19881	24.35314
0.0399231	1.03192	0.4839	25.82392
0.0451385	2.50282	0.09932	13.67529
0.0477231	4.04514	0.02	−30.81708
0.0496153	2.47871	0.14903	22.10981
0.129969	2.07741	0.16615	23.71951
0.239446	2.5344	0.17411	22.02646
0.242354	2.9464	0.19095	32.77316
0.245031	2.07809	0.17376	19.17162
0.278077	2.14334	0.17586	19.28003
0.287815	1.91499	0.17232	23.97817
0.381462	3.15836	0.17141	102.75806
0.399969	3.35812	0.13909	68.98383

На рисунке 25 изображены графики плотности вероятности для полученных распределений. Графики были распределены на группы в соответствии со значением размаха деформаций эксперимента.

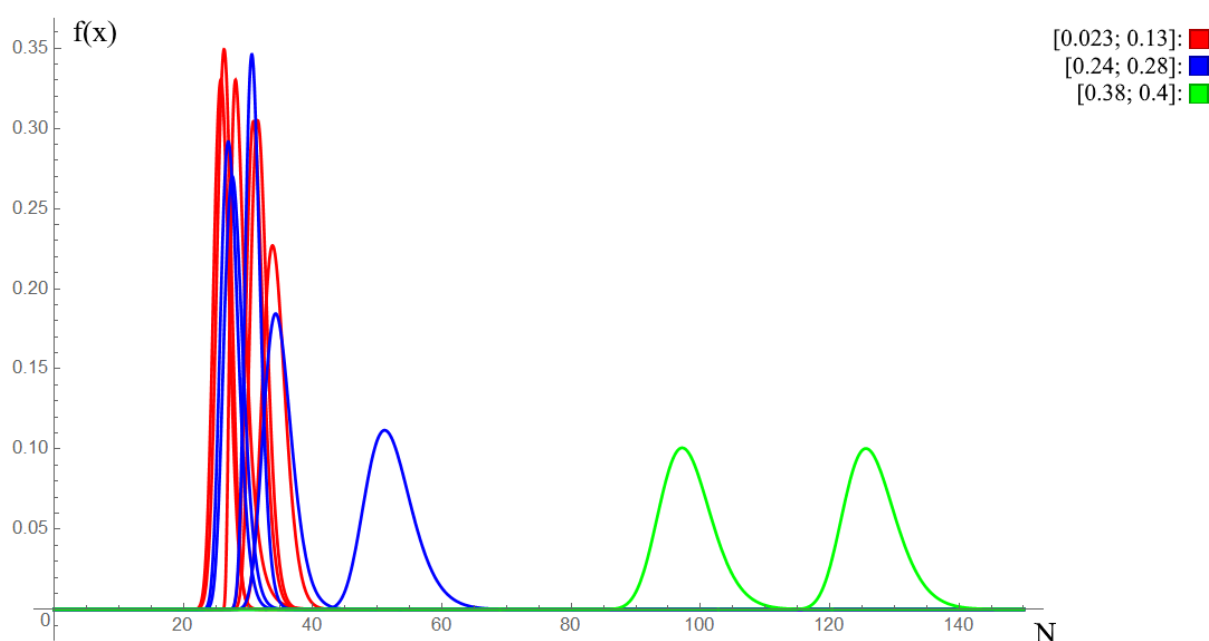


Рис. 25. Графики плотностей вероятностей распределений, разделенные цветами на группы в соответствии со значением размаха.

Из графиков плотности вероятности на рисунке 25 можно сделать следующий вывод: чем больше размах, тем шире разброс номера полуцикла разрушения (в среднем по группе).

Аппроксимируем зависимость параметров распределения от размаха деформаций с помощью кривых Безье. Аппроксимации изображены на рис. 26-28.

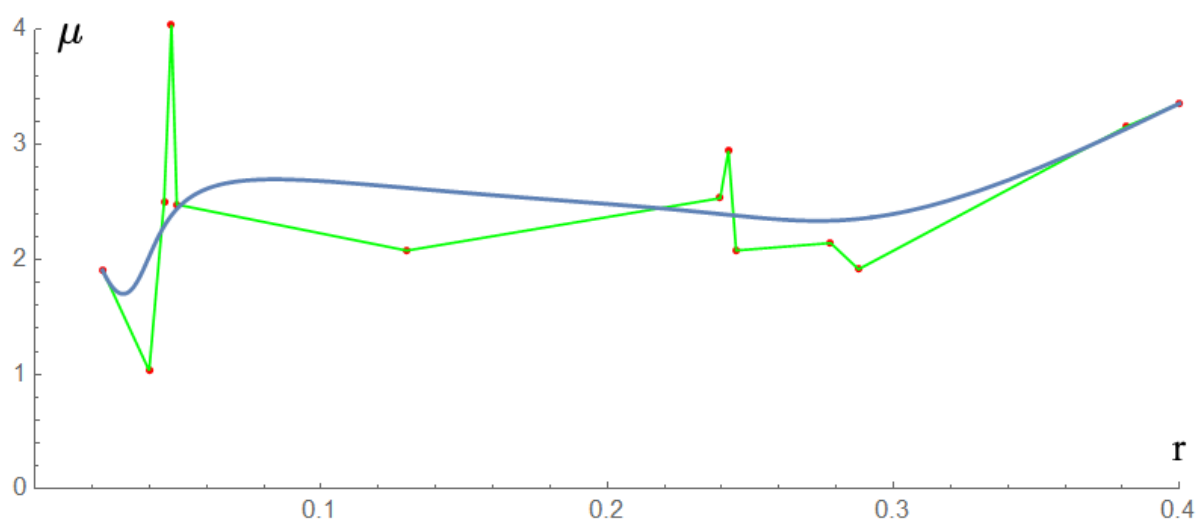


Рис. 26. Зависимость математического ожидания от размаха.

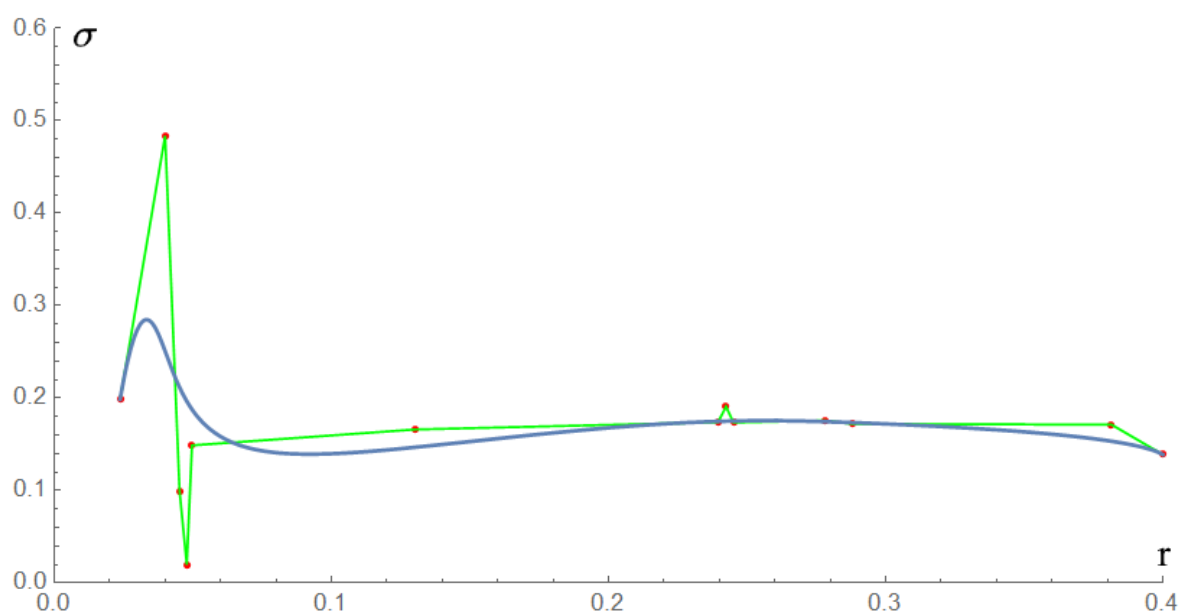


Рис. 27. Зависимость среднеквадратического отклонения от размаха.

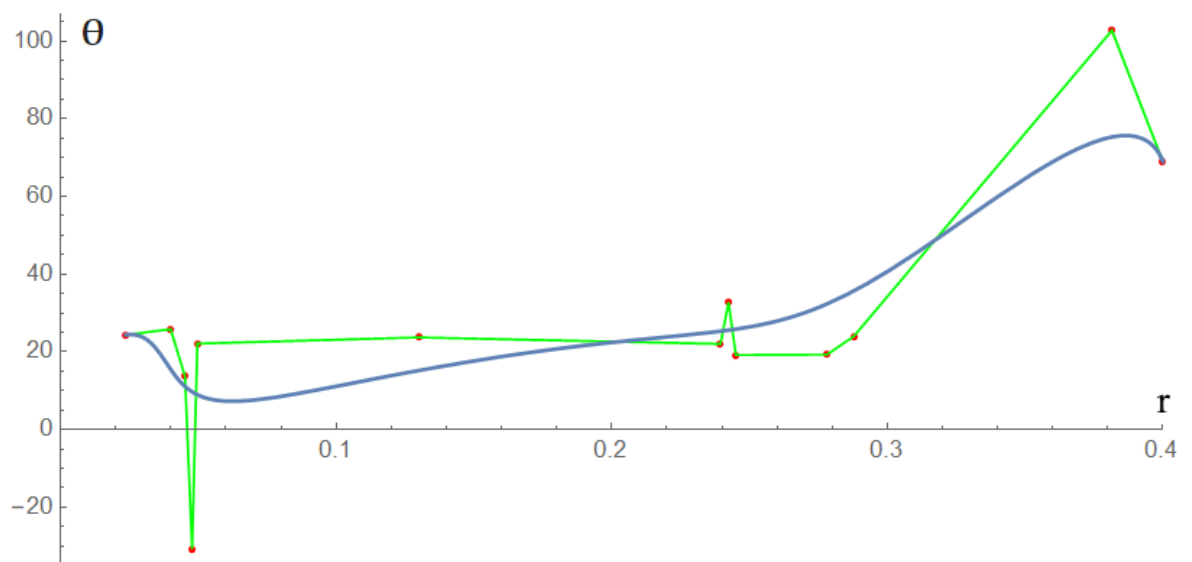


Рис. 28. Зависимость сдвига от размаха.

6.2 Выборка по напряжению текучести

Тесты Андерсона — Дарлинга также не дали результатов, поэтому рассматривались вероятностные графики. Наиболее подходящими распределениями для всех случаев также оказались 2-х параметрическое и 3-х параметрическое логнормальные распределения. На рисунке 29 изображены вероятностные графики логнормальных распределений для каждого эксперимента.

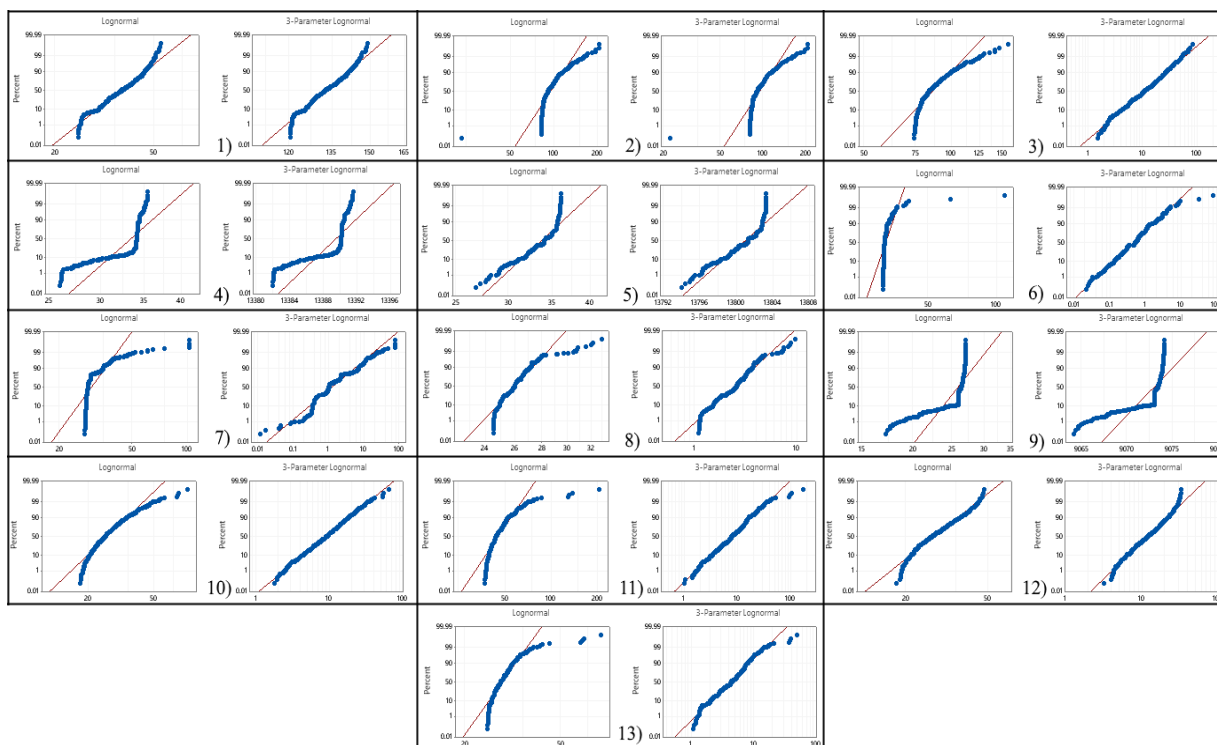


Рис. 29. Вероятностные графики 2-х и 3-х параметрического логнормального распределения для всех экспериментов.

Из вероятностных графиков для экспериментов 2, 4, 9 нельзя сделать выводы о том, что логнормальное распределение хоть сколько-нибудь подходит. Стоит отметить размахи, соответствующие этим экспериментам: 2 — 0.38, 4 — 0.049, 9 — 0.039. Соответственно, этим экспериментам соответствуют достаточно большие и маленькие размахи деформаций. Для других распределений наблюдалась аналогичная картина. Данные эксперименты были исключены из рассмотрения.

В таблице 4 показаны параметры распределений и соответствующие им значения размаха деформаций.

Таблица 4. Параметры распределений.

Размах	Мат. ожидание	Среднекв. откл.	Сдвиг
0.0236769	−0.75604	1.00849	31.97857
0.0451385	0.90179	0.35828	23.43223
0.0477231	0.22601	1.14623	27.79268
0.129969	3.52018	0.0559	0

Продолжение таблицы 4.

0.239446	1.46026	0.55498	23.83602
0.242354	2.06818	0.66764	36.15264
0.245031	2.48449	0.46216	14.83613
0.278077	2.20803	0.56798	16.17376
0.287815	3.61479	0.17133	0
0.399969	2.37749	0.7276	73.21622

На рисунке 30 изображены графики плотности вероятности для полученных распределений. Графики также были распределены на группы в соответствии со значением размаха деформаций эксперимента.

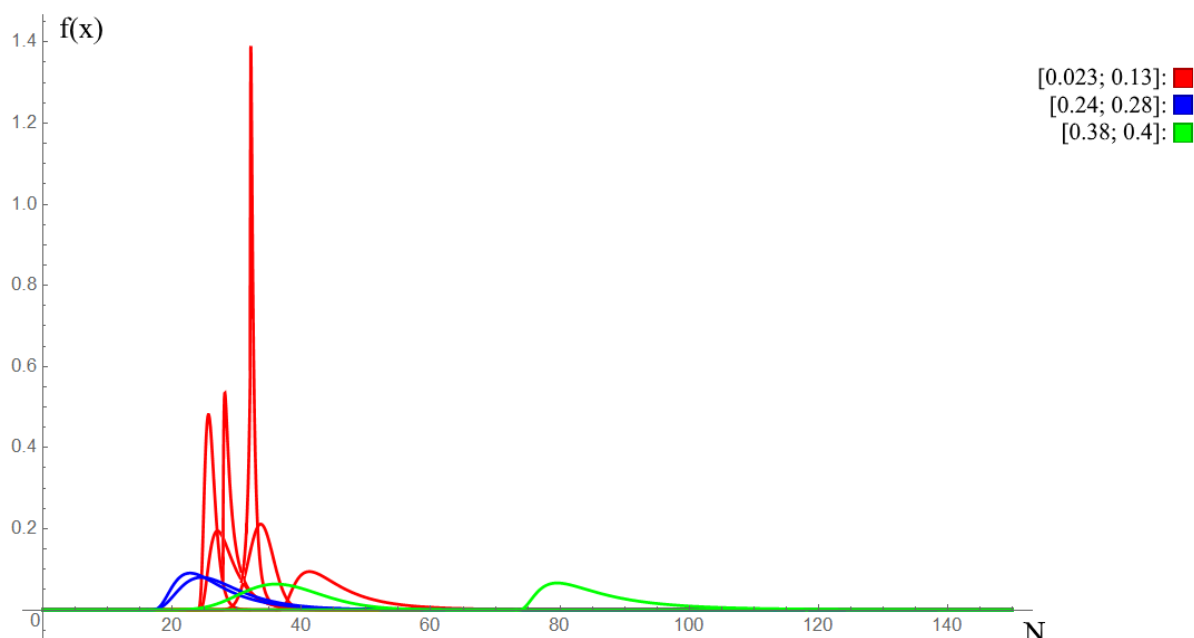


Рис. 30. Графики плотностей вероятностей распределений, разделенные цветами на группы в соответствии со значением размаха.

Из графиков плотности вероятности на рисунке 26 можно сделать следующий вывод: чем больше размах, тем шире разброс номера полуцикла разрушения (в среднем по группе).

Вывод такой же: чем больше размах, тем больше разброс номера полуцикла разрушения (в среднем по группе). Однако, если сравнивать с результатами для выборки модулей упругости, в данном случае замечен бóльший разброс при бóльших значениях размаха.

Аппроксимируем зависимость параметров распределения от размаха деформаций с помощью кривых Безье. Аппроксимации изображены на рис. 31-33.

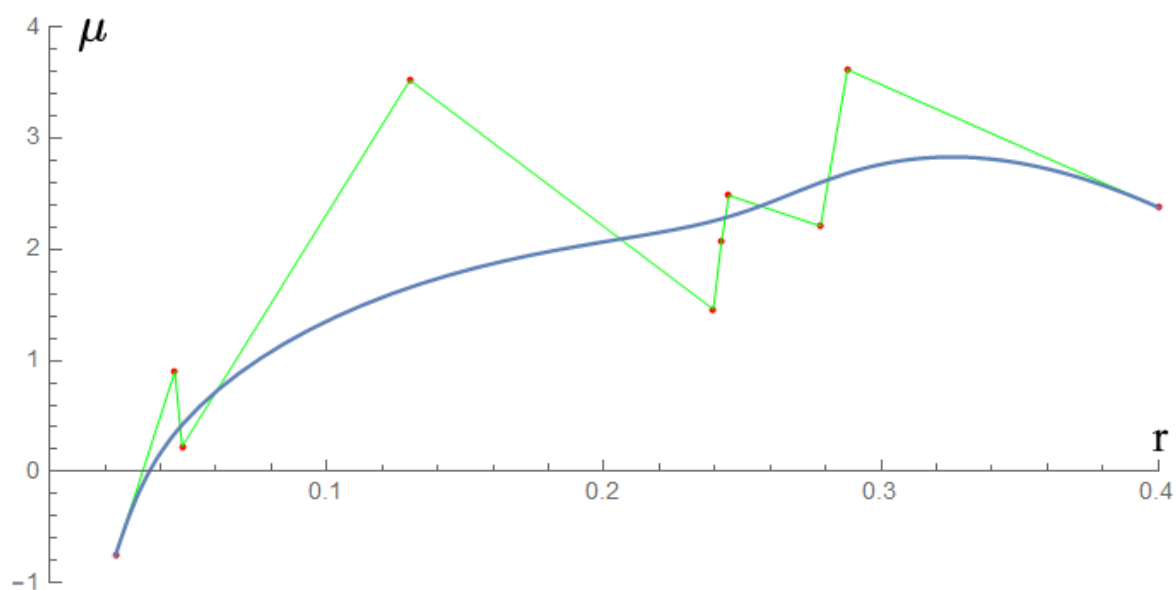


Рис. 31. Зависимость математического ожидания от размаха.

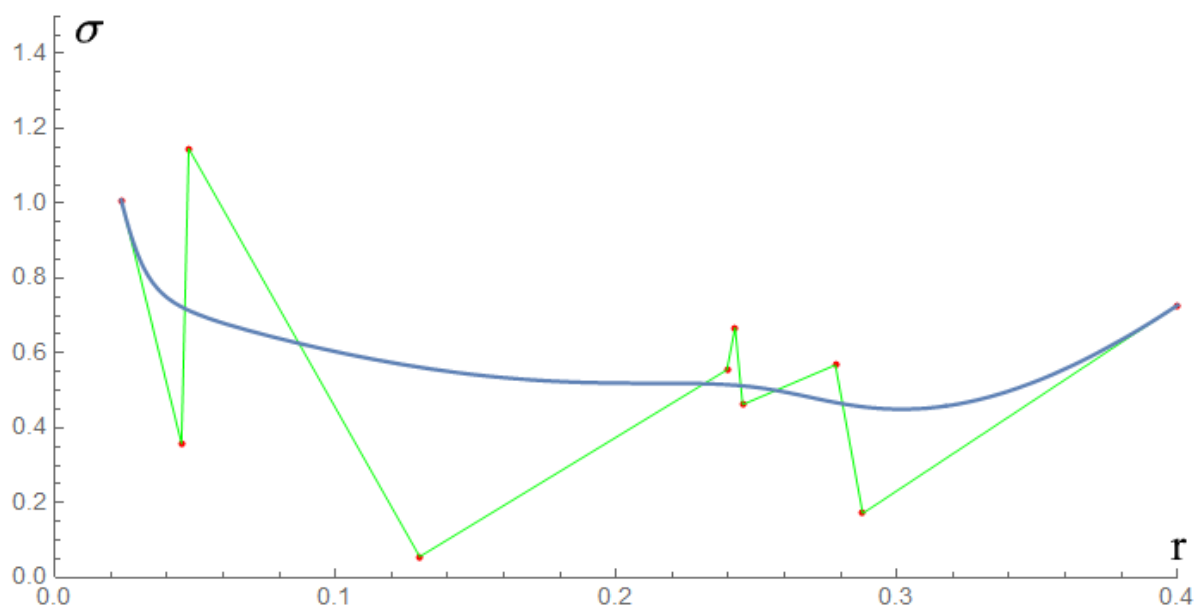


Рис. 32. Зависимость среднеквадратического отклонения от размаха.

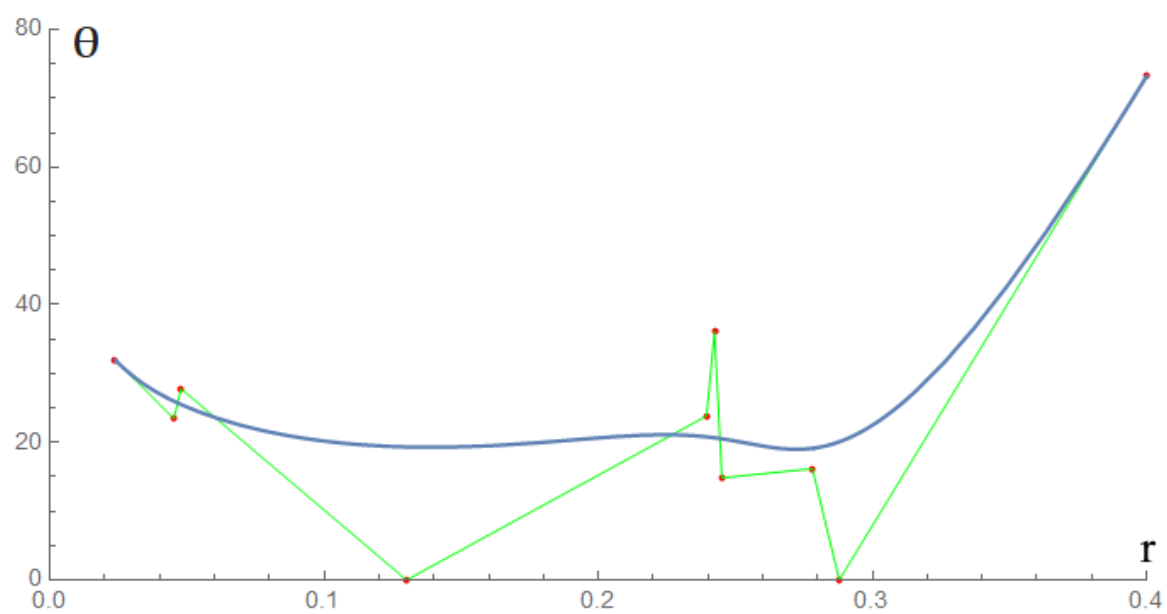


Рис. 33. Зависимость сдвига от размаха.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реализована модель циклического деформирования и малоцикловой усталости. По набору экспериментов на циклическое деформирование идентичных образцов из никелевого сплава ЭИ698ВД получены распределения для модуля упругости и напряжения текучести на первом полуцикле: модулю упругости соответствует трехпараметрическое распределение Вейбулла, напряжению текучести соответствует двухпараметрическое распределение Вейбулла. По распределениям модуля упругости и напряжения текучести с использованием реализованной модели получены разбросы номеров полуциклов разрушения: разбросам номеров полуциклов разрушения в обоих случаях соответствует трехпараметрическое логнормальное распределение. Распределения были разделены на группы в соответствии с размахом. Из анализа этих распределений был сделан следующий вывод: чем больше размах, тем больше разброс номера полуцикла разрушения. Однако, в случае напряжений текучести заметен бóльший разброс при бóльших значениях размаха. Получены аппроксимации зависимостей параметров логнормального распределения от размаха деформаций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Темис Ю. М., Пучков И. В. Аналитическое описание кривых циклического деформирования конструкционных материалов. Проблемы прочности, 1988. N 9. С. 18-22.
2. Темис Ю. М., Пучков И. В. Характеристики упругопластического деформирования и повреждаемости конструкционных материалов при циклическом нагружении. Межвуз. сборник «Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения». Изд-во Нижегородского университета, 1992. С. 82-89.
3. Темис Ю. М., Пучков И. В. Модель упругопластического деформирования и повреждаемости конструкционных материалов. - Материалы V Всесоюзного семинара «Малоцикловая усталость – критерий разрушения и структуры материалов». Тезисы докладов и сообщений. Волгоград, 1987.
4. Putchkov I. V., Temis Y. M., Dowson A. L., Damri D. Development of a Finite Element Based Strain Accumulation Model for the Prediction of Fatigue Lives in Highly Stressed Ti Components. Int. J. Fatigue, vol. 17, N 6, 1995. pp. 385-398.
5. Факеев А. И., Разработка моделей циклического деформирования и малоцикловой усталости конструкционных материалов при неизотермическом нагружении. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Москва, 2013.
6. 3. R.B. D'Augostino and M.A. Stephens, Eds., Goodness-of-Fit Techniques, Marcel Dekker, 1986.
7. Азметов Х. Х., Темис Ю. М. Математическое моделирование исчерпания ресурса малоцикловой усталости конструкций. Труды 4-ой Международной конференции «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения». СПб. Нестор, 2001. С. 15-19.

8. Nornadiah Mohd Razali, Yap Bee Wah. Power Comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling Tests. Universiti Teknologi MARA, 2011.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Графическая часть дипломного проекта

В графическую часть дипломного проекта входят:

- схема определения приращения накопленных деформаций;
- изображение облака точек полуцикла и точки перегиба;
- график зависимости модуля упругости от множества точек;
- график зависимости производной модуля упругости от множества точек;
- график экспериментальных данные в локальных координатах полуцикла с множеством постоянного модуля упругости;
- графики зависимости параметров модели от накопленных деформаций;
- графики мер рассогласования при определении параметров;
- графики сравнения модельных и экспериментальных кривых;
- вероятностные графики распределений;
- гистограммы разбросов свойств материала;
- графики функций плотности распределений свойств материала;
- графики функций плотности распределений номеров полуциклов разрушения;
- графики зависимости параметров распределений от размаха деформаций;
- графики накопленных деформаций модели.