

Helge Toutenburg  
Christian Heumann

# Induktive Statistik

mit Beiträgen von

Michael Schomaker und Malte Wißmann

Eine Einführung mit R und SPSS für  
Windows.

Vierte, aktualisierte und erweiterte Auflage

13. November 2007

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York

London Paris Tokyo

Hong Kong Barcelona

Budapest

# Inhaltsverzeichnis

---

## Teil I. Wahrscheinlichkeitstheorie

---

<b>1. Kombinatorik</b>	1
1.1 Einleitung	1
1.2 Grundbegriffe der Kombinatorik	1
1.3 Permutationen	2
1.3.1 Permutationen ohne Wiederholung	2
1.3.2 Permutationen mit Wiederholung	4
1.4 Kombinationen	5
1.4.1 Kombinationen ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	5
1.4.2 Kombinationen ohne Wiederholung, aber mit Berücksichtigung der Reihenfolge	7
1.4.3 Kombinationen mit Wiederholung, aber ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	8
1.4.4 Kombinationen mit Wiederholung und mit Berücksichtigung der Reihenfolge	8
1.5 Zusammenfassung	9
1.6 Aufgaben und Kontrollfragen	10
<b>2. Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	11
2.1 Einleitung	11
2.2 Zufällige Ereignisse	12
2.3 Relative Häufigkeit und Laplacesche Wahrscheinlichkeit	15
2.4 Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung	17
2.4.1 Folgerungen aus den Axiomen	17
2.4.2 Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten	19
2.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit	19
2.5.1 Motivation und Definition	19
2.5.2 Der Satz von Bayes	21
2.6 Unabhängigkeit	25
2.7 Aufgaben und Kontrollfragen	28

<b>3. Zufällige Variablen</b>	33
3.1 Einleitung	33
3.2 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen	35
3.3 Diskrete Zufallsvariablen und ihre Verteilungsfunktion	37
3.4 Stetige Zufallsvariablen und ihre Verteilungsfunktion	40
3.5 Erwartungswert und Varianz einer Zufallsvariablen	45
3.5.1 Erwartungswert	46
3.5.2 Rechenregeln für den Erwartungswert	46
3.5.3 Varianz	48
3.5.4 Rechenregeln für die Varianz	48
3.5.5 Standardisierte Zufallsvariablen	50
3.5.6 Erwartungswert und Varianz des arithmetischen Mittels	50
3.5.7 Ungleichung von Tschebyschev	51
3.5.8 $k\sigma$ -Bereiche	53
3.6 Die Quantile, der Median und der Modalwert einer Verteilung	54
3.7 Zweidimensionale Zufallsvariablen	55
3.7.1 Zweidimensionale diskrete Zufallsvariablen	55
3.7.2 Zweidimensionale stetige Zufallsvariablen	57
3.7.3 Momente von zweidimensionalen Zufallsvariablen	59
3.7.4 Korrelationskoeffizient	61
3.8 Aufgaben und Kontrollfragen	62
<b>4. Diskrete und stetige Standardverteilungen</b>	67
4.1 Einleitung	67
4.2 Spezielle diskrete Verteilungen	67
4.2.1 Die diskrete Gleichverteilung	67
4.2.2 Die Einpunktverteilung	68
4.2.3 Die Null-Eins-Verteilung	68
4.2.4 Die hypergeometrische Verteilung	70
4.2.5 Die Binomialverteilung	72
4.2.6 Die geometrische Verteilung	75
4.2.7 Die Poissonverteilung	77
4.2.8 Die Multinomialverteilung	78
4.3 Spezielle stetige Verteilungen	80
4.3.1 Die stetige Gleichverteilung	80
4.3.2 Die Exponentialverteilung	81
4.3.3 Die Normalverteilung	83
4.3.4 Die zweidimensionale Normalverteilung	87
4.4 Prüfverteilungen	89
4.4.1 Die $\chi^2$ -Verteilung	89
4.4.2 Die $t$ -Verteilung	90
4.4.3 Die $F$ -Verteilung	91
4.5 Aufgaben und Kontrollfragen	92

<b>5. Grenzwertsätze und Approximationen</b>	95
5.1 Die stochastische Konvergenz	95
5.2 Das Gesetz der großen Zahlen	96
5.3 Der zentrale Grenzwertsatz	97
5.4 Approximationen	98
5.4.1 Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung	99
5.4.2 Approximation der Binomialverteilung durch die Poissonverteilung	101
5.4.3 Approximation der Poissonverteilung durch die Normalverteilung	101
5.4.4 Approximation der hypergeometrischen Verteilung durch die Binomialverteilung	101
5.5 Aufgaben und Kontrollfragen	103

---

**Teil II. Induktive Statistik**

---

<b>6. Schätzung von Parametern</b>	107
6.1 Einleitung	107
6.2 Allgemeine Theorie der Punktschätzung	108
6.3 Maximum-Likelihood-Schätzung	110
6.3.1 Das Maximum-Likelihood-Prinzip	110
6.3.2 Herleitung der ML-Schätzungen für die Parameter der Normalverteilung	112
6.4 Konfidenzschätzungen von Parametern	115
6.4.1 Grundlagen	115
6.4.2 Konfidenzschätzung der Parameter einer Normalverteilung	116
6.5 Schätzen einer Binomialwahrscheinlichkeit	120
6.6 Aufgaben und Kontrollfragen	123
<b>7. Prüfen statistischer Hypothesen</b>	125
7.1 Einleitung	125
7.2 Testtheorie	125
7.3 Einstichprobenprobleme bei Normalverteilung	129
7.3.1 Prüfen des Mittelwertes bei bekannter Varianz (einfacher Gauss-Test)	129
7.3.2 Prüfung des Mittelwertes bei unbekannter Varianz (einfacher $t$ -Test)	133
7.3.3 Prüfen der Varianz; $\chi^2$ -Test für die Varianz	135
7.4 Zweistichprobenprobleme bei Normalverteilung	137
7.4.1 Prüfen der Gleichheit der Varianzen ( <b>F</b> -Test)	137
7.4.2 Prüfen der Gleichheit der Mittelwerte zweier unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen	140

7.4.3	Prüfen der Gleichheit der Mittelwerte aus einer verbundenen Stichprobe (paired $t$ -Test) . . . . .	143
7.5	Prüfen der Korrelation zweier Normalverteilungen . . . . .	145
7.6	Prüfen von Hypothesen über Binomialverteilungen . . . . .	147
7.6.1	Prüfen der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Ereignisses (Binomialtest für $p$ ) . . . . .	147
7.6.2	Prüfen der Gleichheit zweier Binomialwahrscheinlichkeiten . . . . .	150
7.6.3	Exakter Test von Fisher . . . . .	151
7.6.4	McNemar-Test für binären Response . . . . .	153
7.7	Testentscheidung mit Statistik Software . . . . .	155
7.8	Aufgaben und Kontrollfragen . . . . .	159
<b>8.</b>	<b>Nichtparametrische Tests</b> . . . . .	<b>163</b>
8.1	Einleitung . . . . .	163
8.2	Anpassungstests . . . . .	163
8.2.1	Chi-Quadrat-Anpassungstest . . . . .	164
8.2.2	Kolmogorov–Smirnov–Anpassungstest . . . . .	166
8.3	Homogenitätstests für zwei unabhängige Stichproben . . . . .	169
8.3.1	Kolmogorov–Smirnov-Test im Zweistichprobenproblem . . . . .	170
8.3.2	Mann–Whitney- $U$ -Test . . . . .	172
8.4	Homogenitätstests im matched-pair Design . . . . .	177
8.4.1	Vorzeichen-Test . . . . .	178
8.4.2	Wilcoxon-Test . . . . .	180
8.5	Matched-Pair Design: Prüfung der Rangkorrelation . . . . .	182
8.6	Aufgaben und Kontrollfragen . . . . .	185

---

### Teil III. Modellierung von Ursache–Wirkungsbeziehungen

---

<b>9.</b>	<b>Lineare Regression</b> . . . . .	<b>191</b>
9.1	Bivariate Ursache–Wirkungsbeziehungen . . . . .	191
9.2	Induktive univariate lineare Regression . . . . .	192
9.2.1	Eigenschaften der Schätzfunktion $b$ . . . . .	193
9.2.2	Hypothesentests für den Parameter $b$ . . . . .	195
9.3	Induktive multiple Regression . . . . .	195
9.3.1	Schätzung von $\beta^2$ . . . . .	196
9.3.2	Schätzung von $\sigma^2$ . . . . .	197
9.3.3	Klassische Normalregression . . . . .	198
9.3.4	Maximum-Likelihood-Schätzung . . . . .	198
9.3.5	Prüfen von linearen Hypothesen . . . . .	199
9.3.6	Prüfen der univariaten Regression . . . . .	204
9.3.7	Konfidenzbereiche . . . . .	206
9.3.8	Vergleich von Modellen . . . . .	210
9.3.9	Kriterien zur Modellwahl . . . . .	211

9.3.10 Die bedingte KQ-Schätzung	213
9.4 Ein komplexes Beispiel	213
9.4.1 Normalverteilungsannahme	214
9.4.2 Schrittweise Einbeziehung von Variablen	215
9.4.3 Grafische Darstellung	219
9.5 Kategoriale Einflussgrößen	220
9.6 Aufgaben und Kontrollfragen	225
<b>10. Varianzanalyse</b>	229
10.1 Einleitung	229
10.2 Einfaktorielle Varianzanalyse	230
10.2.1 Darstellung als restriktives Modell	233
10.2.2 Zerlegung der Fehlerquadratsumme	235
10.2.3 Schätzung von $\sigma^2$	237
10.2.4 Prüfen des Modells	238
10.3 Multiple Vergleiche von einzelnen Mittelwerten	241
10.4 Rangvarianzanalyse – Kruskal-Wallis-Test	244
10.5 Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Wechselwirkung	248
10.5.1 Definitionen und Grundprinzipien	248
10.5.2 Modellannahmen	252
10.6 Aufgaben und Kontrollfragen	260
<b>11. Analyse von Kontingenztafeln</b>	263
11.1 Zweidimensionale kategoriale Zufallsvariablen	263
11.2 Unabhängigkeit	265
11.3 Inferenz in Kontingenztafeln	266
11.3.1 Stichprobenschemata für Kontingenztafeln	266
11.3.2 Maximum-Likelihood-Schätzung bei Multinomialschema	268
11.3.3 Exakter Test von Fisher für $2 \times 2$ -Tafeln	271
11.3.4 Maximum-Likelihood-Quotienten-Test auf Unabhängigkeit	271
11.4 Differenziertere Untersuchung von $I \times J$ -Tafeln	272
11.5 Die Vierfeldertafel	275
11.6 Zweifache Klassifikation und loglineare Modelle	278
11.7 Aufgaben und Kontrollfragen	284
<b>12. Lebensdaueranalyse</b>	287
12.1 Problemstellung	287
12.2 Survivorfunktion und Hazardrate	289
12.3 Kaplan-Meier-Schätzung	290
12.4 Log-Rank-Test zum Vergleich von Survivorfunktionen	294
12.5 Einbeziehung von Kovariablen in die Überlebensanalyse	298
12.5.1 Das Proportional-Hazard-Modell von Cox	299
12.5.2 Überprüfung der Proportionalitätsannahme	300
12.5.3 Schätzung des Cox-Modells	301

12.5.4	Schätzung der Überlebensfunktion unter dem Cox-Ansatz . . . . .	302
12.5.5	Einige Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Verweildauer . . . . .	302
12.5.6	Modellierung der Hazardrate . . . . .	304
12.6	Aufgaben und Kontrollfragen . . . . .	307
<b>13.</b>	<b>Fehlende Daten</b> . . . . .	309
13.1	Betrachtung eines einzelnen Merkmals . . . . .	312
13.1.1	Behandlung fehlender Daten für eine binäre Zufallsvariable . . . . .	312
13.1.2	Fehlende Daten bei einer univariat normalverteilten Zufallsvariable . . . . .	319
13.2	Betrachtung zweier Merkmale . . . . .	319
13.2.1	Zwei kategoriale Merkmale . . . . .	321

---

## Teil IV. Einführung in statistische Software

---

<b>14.</b>	<b>Einführung in SPSS</b> . . . . .	327
14.1	Grundaufbau des Programms . . . . .	327
14.1.1	Das Datenfenster . . . . .	328
14.1.2	Das Ausgabefenster . . . . .	329
14.1.3	Das Syntaxfenster . . . . .	330
14.2	Einige praktische Beispiele . . . . .	331
14.2.1	Wahrscheinlichkeitstheorie und die Erzeugung von Zufallszahlen . . . . .	331
14.2.2	Induktive Statistik - Verwendung von statistischen Tests . . . . .	335
14.2.3	Modellierung von Ursache-Wirkungsbeziehungen . . . . .	344
<b>15.</b>	<b>Einführung in R</b> . . . . .	351
15.1	Installation und Grundaufbau des Programmpakets R . . . . .	351
15.1.1	R als überdimensionierter Taschenrechner . . . . .	352
15.1.2	Programmiersprache R . . . . .	353
15.1.3	Grafische Fähigkeiten von R . . . . .	354
15.2	Einige praktische Beispiele . . . . .	358
15.2.1	Wahrscheinlichkeitstheorie und die Erzeugung von Zufallszahlen . . . . .	358
15.2.2	Induktive Statistik — Verwendung von statistischen Tests . . . . .	362
15.2.3	Modellierung von Ursache-Wirkungsbeziehungen . . . . .	376

<b>A. Lösungen zu den Übungsaufgaben</b> .....	385
A.1 Kombinatorik .....	386
A.2 Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung .....	389
A.3 Zufällige Variablen .....	399
A.4 Diskrete und stetige Standardverteilungen .....	413
A.5 Grenzwertsätze und Approximationen .....	422
A.6 Schätzung von Parametern .....	427
A.7 Prüfen statistischer Hypothesen .....	432
A.8 Nichtparametrische Tests .....	439
A.9 Lineare Regression .....	448
A.10 Varianzanalyse .....	451
A.11 Analyse von Kontingenztafeln .....	454
A.12 Lebensdaueranalyse .....	458
<b>B. Tabellenanhang</b> .....	461
<b>Literatur</b> .....	475
<b>Sachverzeichnis</b> .....	477

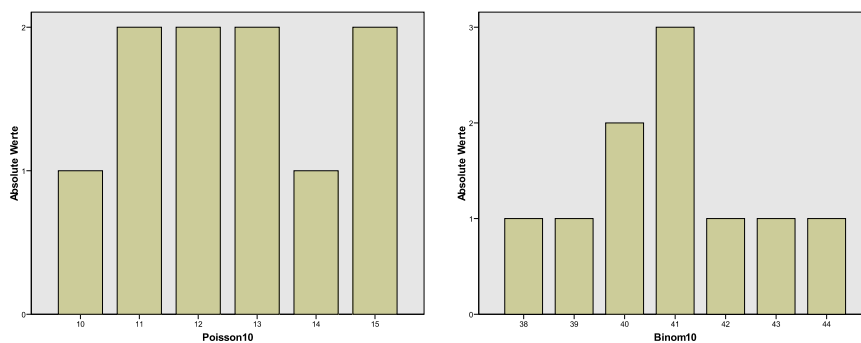


## 13. Fehlende Daten

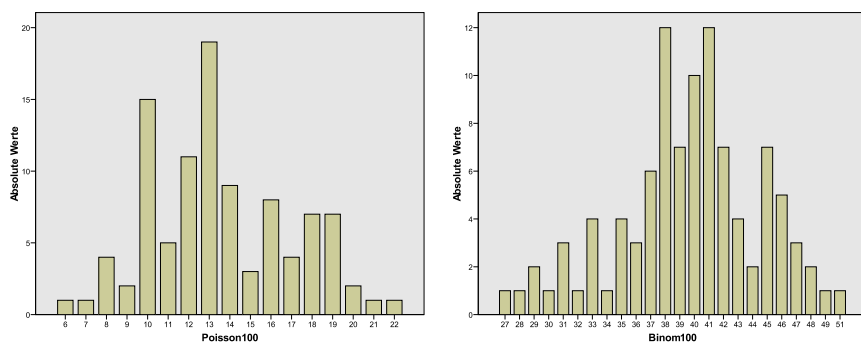
In der Praxis taucht häufig das Problem auf, dass trotz aller Bemühungen bei der Erhebung der Daten die Ausprägungen eines oder mehrerer Merkmale an einigen, oft auch an vielen Untersuchungseinheiten, nicht erhoben werden konnten. Wir sind also **nach Erhebung der Daten** in der Situation, die wahren Merkmalsausprägungen nicht immer beobachtet zu haben. Die folgenden Beispiele sollen die Problematik verdeutlichen:

- Nichtantworter in statistischen Befragungen: Sensible Fragen nach z.B. Einkommen, Sexualverhalten oder Alkohol- und Drogenkonsum werden oft nicht beantwortet. Auch bei anonymen Befragungen ist dies ein häufiges Problem.
- Drop-out in klinischen (Längsschnitt-)Studien. Patienten kommen nach gewisser Zeit nicht mehr zu den Kontrolluntersuchungen. Die Gründe können vielfältig sein, z.B. weil sie die Behandlung nicht gut vertragen oder weil es ihnen sehr gut geht oder weil sie weggezogen sind. Ab einem gewissen Zeitpunkt hat man also keine Kenntnis über die Ausprägungen der Variablen bei diesen Patienten (z.B. Blutdruck, Blutwerte).
- Zensierte Daten in der Lebensdaueranalyse sind unvollständige Daten, da die genaue Lebensdauer nicht bekannt ist.
- Experimentelle Versuche: Ergebnisse fehlen z.B. wegen fehlerhafter Messgeräte.
- Geplantes Fehlen: Bestimmte Merkmale werden nur in einer Teilstichprobe erhoben, z.B. weil die Erhebung sehr teuer ist (z.B. aufwendiger medizinischer Test). Ein weiteres Beispiel für geplantes Fehlen sind in Fragebögen eingebaute Verzweigungen, die dazu führen, dass bestimmte Fragen nur dann beantwortet werden können, wenn eine andere Frage zuvor mit einer bestimmten Merkmalsausprägung beantwortet wurde. Als einfaches Beispiel diene die Frage nach Anzahl und Alter der Kinder, die nur dann sinnvoll beantwortet werden kann, wenn die Frage „Haben Sie Kinder?“ zuvor mit „ja“ beantwortet wurde.
- Schlechtes Design in einer Meinungsumfrage: „Bevorzugen Sie Kandidat A oder Kandidat B?“ Die Antwort wird vermutlich fehlen, wenn die Person keinen der beiden Kandidaten bevorzugt (deshalb sollte man dies als weitere Kategorie zulassen).

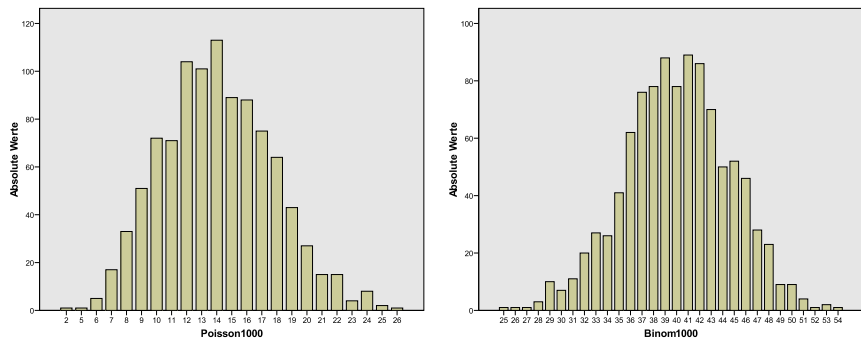
## Einführung in statistische Software



**Abb. 14.5.** Veranschaulichung von Zufallszahlen einer Poissonverteilung ( $\lambda = 14$ ) und einer Binomialverteilung ( $n = 100, p = 0.4$ ) bei einer  $N = 10$ -fachen Realisierung



**Abb. 14.6.** Veranschaulichung von Zufallszahlen einer Poissonverteilung ( $\lambda = 14$ ) und einer Binomialverteilung ( $n = 100, p = 0.4$ ) bei einer  $N = 100$ -fachen Realisierung



**Abb. 14.7.** Veranschaulichung von Zufallszahlen einer Poissonverteilung ( $\lambda = 14$ ) und einer Binomialverteilung ( $n = 100, p = 0.4$ ) bei einer  $N = 1000$ -fachen Realisierung

Es ist leicht zu sehen, dass sowohl bei der Binomial- als auch bei der Poissonverteilung für  $N = 1000$  die empirische Verteilung einer Normalverteilung ähnelt - im Gegensatz zu den geringeren Stichprobengrößen von  $N = 10$  bzw.  $N = 100$ . Man kann erahnen, dass sich für noch größere  $N$  die Verteilungen immer stärker einer Normalverteilung mit  $\mu = 14$ ,  $\sigma^2 = 14$  bzw.  $\mu = 40$ ,  $\sigma^2 = 24$  annähern.

In Kapitel 15.2.1 wollen wir den zentralen Grenzwertsatz mit Hilfe des statistischen Programmpakets *R* noch einmal direkt veranschaulichen. Das dortige Beispiel betrachtet die standardisierten Summen am Beispiel einer Poissonverteilung.

### 14.2.2 Induktive Statistik - Verwendung von statistischen Tests

In diesem Abschnitt wollen wir die Anwendung statistischer Tests mit SPSS demonstrieren. Dazu verwenden wir den von SPSS mitgelieferten Datensatz 'Employee.sav' (ehemals 'bank.sav'), der die Einkommensstruktur der Mitarbeiter einer Bank beschreibt. Tabelle 14.2 zeigt einen Auszug aus dem Datensatz. Interessierende Variablen sind v.a. 'gehalt' und 'agehalt', die das

**Tabelle 14.2.** Auszug des SPSS-Datensatzes 'Employee.sav'

id	geschl	ausbild	tätig	gehalt	agehalt	dauer	erfahr	mind
:	:	:	:	:	:	:	:	:
4	1	8	1	21900	13200	98	190	0
5	0	15	1	45000	21000	98	138	0
6	0	15	1	32100	13500	98	67	0
7	0	15	1	36000	18750	98	114	0
:	:	:	:	:	:	:	:	:

aktuelle Gehalt bzw. das Einstiegsgehalt (in US\$/Jahr) der Bankangestellten beschreiben. Potentielle Einflussfaktoren sind das Geschlecht ('geschl'), die Ausbildungslänge in Jahren ('ausbild'), die Art der Tätigkeit ('tätig'), das erste Arbeitsjahr ('dauer'), die Berufserfahrung in Monaten ('erfahr'), sowie die Zugehörigkeit zu einer Minderheit ('mind').

**Tests auf Mittelwerte; 1-Stichproben t-Test.** Zur Durchführung des 1-Stichproben t-Tests folgt man dem Pfad

*Analysieren → Mittelwerte vergleichen → T-Test bei einer Stichprobe.*

Im Menüpunkt 'Testvariable' gibt man durch einfachen Mausklick die interessierende Variable ein, unter 'Testwert' kann  $\mu_0$  angegeben werden. Wir wollen nun testen, ob man von einem mittleren Gehalt von 35000 US\$/Jahr unter

den Mitarbeitern ausgehen kann. Dazu verwenden wir den 1-Stichproben t-Test und testen die Hypothese  $\mu = 35000$ . Abbildung 14.8 zeigt die Ergebnisse des Tests.

	N	Mittelwert	Standardabweichung	Standardfehler des Mittelwertes
Gehalt	474	34.419,57	17.075,661	784,311

Testwert = 35000					
	T	df	Sig. (2-seitig)	Mittlere Differenz	95% Konfidenzintervall der Differenz
					Untere Obere
Gehalt	-.740	473	.460	-580,432	-2.121,60 960,73

Abb. 14.8. SPSS-Ausgabe zum 1-Stichproben t-Test

Wir sehen, dass das mittlere Gehalt in der Bank bei 34419.57 US\$/Jahr liegt. Der t-Wert von  $-0.740$  bzw. der p-Wert von  $0.460$  zeigen, dass die Nullhypothese zum Niveau  $\alpha = 0.05$  nicht verworfen werden kann. Wir können also die Nullhypothese von  $\mu = 35000$  nicht verwerfen.

**Tests auf Mittelwerte; 2-Stichproben t-Test.** Zur Durchführung des 2-Stichproben t-Tests folgt man dem Pfad

*Analysieren  $\rightarrow$  Mittelwerte vergleichen  $\rightarrow$  T-Test bei unabhängigen Stichproben.*

Wir interessieren uns bei unserem Datensatz 'Employee.sav' dafür ob sich das mittlere Gehalt bei Männern und Frauen unterscheidet. Abbildung 14.9 zeigt die Ergebnisse von SPSS. Die deskriptiven Statistiken sprechen ein ein-

	Geschlecht	N	Mittelwert	Standardabweichung	Standardfehler des Mittelwertes
Gehalt	Männlich	258	41.441,78	19.499,214	1.213,968
	Weiblich	216	26.031,92	7.558,021	514,258

		Levene-Test der Varianzgleichheit		T-Test für die Mittelwertgleichheit		
		F	Signifikanz	T	df	Sig. (2-seitig)
Gehalt	Varianzen sind gleich	119,669	.000	10,945	472	.000
	Varianzen sind nicht gleich			11,688	344,262	.000

Abb. 14.9. SPSS-Ausgabe zum 2 Stichproben t-Test

deutiges Bild: Die männlichen Angestellten haben ein mittleres Gehalt von über 41000 US\$/Jahr, während dies bei den weiblichen Angestellten gerade mal 26331 US\$/Jahr beträgt. Die Varianzen sind nicht bekannt, deshalb

führt SPSS den 'Levene-Test auf Varianzgleichheit' durch, um festzustellen, ob von einer Gleichheit der Varianzen ausgegangen werden kann oder nicht. Entsprechend der Entscheidung wird dann ein 'doppelter t-Test' bzw. der 'Welch-Test' durchgeführt. In unserem Beispiel lehnt der Levene Test die Nullhypothese gleicher Varianzen ab ( $p\text{-Wert} = 0.000$ ), dementsprechend ist die untere Zeile in der Ausgabe zum t-Test relevant. Der dortige Wert der Teststatistik ( $T=11.688$ ) bzw. des  $p\text{-Wertes}$  ( $p=0.000$ ) lehnen die Nullhypothese eines gleichen mittleren Gehalts ab, Männer scheinen in dieser Bank also signifikant mehr zu verdienen.

Um eine endgültige Aussage bezüglich dieser Thematik zu treffen, sollten jedoch weitere Analysen zu Rate gezogen werden; möglicherweise liegt ein Schichtungseffekt vor, und Frauen sind vor allem in Segmenten tätig, die schlechter bezahlt werden, während Männer Führungspositionen besetzen.

**Tests auf Mittelwerte; paired t-Test.** Zur Durchführung des paired t-Testes folgt man dem Pfad

*Analysieren → Mittelwerte vergleichen → T-Test bei gepaarten Stichproben.*

Die einzigen abhängigen Variablen in unserem Datensatz sind die beiden Variablen 'Gehalt' und 'Anfangsgehalt'. Ein gepaarter t-Test soll nun die (möglicherweise triviale) Fragestellung klären, ob sich mittleres Gehalt und mittleres Anfangsgehalt unterscheiden, ob es also zu Gehaltserhöhungen gekommen ist oder nicht. Abbildung 14.10 zeigt die Ausgabe von SPSS.

		Mittelwert	N	Standardabweichung	Standardfehler des Mittelwertes
Paaren 1	Gehalt	34.419,57	474	17.075,661	784,311
	Anfangsgehalt	17.016,09	474	7.870,638	361,510

		Gepaarte Differenzen				
		Mittelwert	Standardabweichung	Standardfehler des Mittelwertes	95% Konfidenzintervall der Differenz	
					Untere	Obere
Paaren 1	Gehalt - Anfangsgehalt	17.403,481	10.814,620	496,732	16.427,407	18.379,555

		T	df	Sig. (2-seitig)
Paaren 1	Gehalt - Anfangsgehalt	35,036	473	,000

**Abb. 14.10.** SPSS-Ausgabe zum gepaarten t-Test

Die deskriptiven Statistiken zeigen ein mittleres Anfangsgehalt von etwas über 17000 US\$/Jahr, sowie ein aktuelles Gehalt von über 34000 US\$/Jahr. Es ist nicht verwunderlich, dass der gepaarte t-Test die Nullhypothese gleicher mittlerer Gehälter verwirft ( $p=0.000$ ).

**Tests auf Varianz.** Der von uns vorgestellte  $\chi^2$ -Test auf Varianz sowie der F-Test zum Vergleich zweier Varianzen sind in SPSS leider nicht enthalten. Zur Durchführung dieser Tests können andere Programmpakete wie z.B. R (siehe auch Kapitel 15.2.2) oder MINITAB verwendet werden. Der Test von Levene, der die Varianz von zwei Stichproben vergleicht, wird dagegen in entsprechendem Zusammenhang ausgegeben: so z.B. beim 2-Stichproben t-Test bzw. bei der ANOVA.

**Tests auf Korrelation.** Zur Durchführung des Tests auf Korrelation folgt man dem Pfad

*Analysieren → Korrelation → Bivariat.*

Uns interessiert nun der Zusammenhang zwischen der 'Berufserfahrung in Monaten' und dem 'Gehalt'. Abbildung 14.11 enthält die Ergebnisse von SPSS. Der Korrelationskoeffizient von Bravais-Pearson beträgt  $r_{BP} = -0.097$

		Berufserfahrun g in Monaten	Gehalt
Berufserfahrung in Monaten	Korrelation nach Pearson	1	-.097*
	Signifikanz (2-seitig)		.034
	N	474	474
Gehalt	Korrelation nach Pearson	-.097*	1
	Signifikanz (2-seitig)	.034	
	N	474	474

\*, Die Korrelation ist auf dem Niveau von 0,05 (2-seitig) signifikant.

**Abb. 14.11.** SPSS-Ausgabe zum Test auf Korrelation

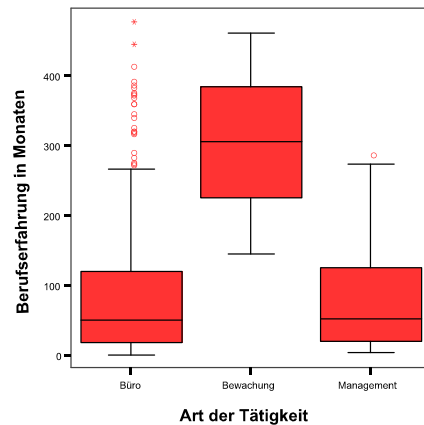
und deutet auf einen leicht negativen Zusammenhang hin. Der p-Wert von 0.034 zeigt, dass die Korrelation zum Niveau  $\alpha = 0.05$  signifikant von Null verschieden ist.

Dass die Berufserfahrung einen negativen Effekt auf das Gehalt haben soll, ist auf den ersten Blick verwunderlich. Ein Blick auf Abbildung 14.12 liefert hierfür jedoch eine Erklärung. Eine lange Berufserfahrung haben im Wesentlichen Mitarbeiter des Sicherheitsbereiches, die jedoch im unteren Gehaltsgefüge der Bank anzutreffen sind.

**Tests auf Binomialwahrscheinlichkeiten.** Zur Durchführung des Binomialtests für  $p$  folgt man dem Pfad

*Analysieren → Nichtparametrische Tests → Binomial.*

Uns interessiert, ob der Anteil der Männer und der Frauen in der Bank gleich groß ist, oder anders formuliert, ob der Anteil der Männer bei  $p = 0.5$  liegt oder nicht. SPSS liefert uns folgende Ausgabe (Abbildung 14.13):



**Abb. 14.12.** Boxplot der Berufserfahrung (in Monaten) in Abhängigkeit der 'Art der Tätigkeit'

		Kategorie	N	Beobachteter Anteil	Testanteil	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)
Geschlecht	Gruppe 1	männlich	258	.54	.50	.060 <sup>a</sup>
	Gruppe 2	weiblich	216	.46		
	Gesamt		474	1.00		

a. Basiert auf der Z-Approximation.

**Abb. 14.13.** SPSS-Ausgabe zum Test auf Binomialwahrscheinlichkeiten

Der Männeranteil in der Stichprobe beträgt 54%. Da der p-Wert 0.06 beträgt, können wir die Nullhypothese von einem Anteil von 50% zum Niveau  $\alpha = 0.05$  jedoch nicht verwerfen.

Zum Vergleich zweier Binomialwahrscheinlichkeiten haben wir den (approximativen) Binomialtest, den Test von Fisher, sowie den Test von McNemar kennengelernt. Die Durchführung des Binomialtests ist in SPSS nicht möglich, wohl aber die der Tests von Fisher und McNemar. Zur Durchführung des Tests von Fisher folgt man dem Pfad

*Analysieren → Deskriptive Statistiken → Kreuztabellen*

und wählt im Menüpunkt 'Statistik' den Button 'Chi-Quadrat' aus. Der Test von Fisher wird dann automatisch mitausgegeben.

In unserem Datensatz *'Employee.sav'* definieren wir uns zuerst eine neue Variable 'Gehaltkat', die angibt, ob ein Gehalt niedrig ( $< 28880$  US\$/Jahr) oder hoch ( $\geq 28880$  US\$/Jahr) ist. Wir wollen nun die beiden Binomialwahrscheinlichkeiten für ein niedriges Gehalt in den beiden Gruppen 'männlich' und 'weiblich' gegeneinander testen. Wir haben schon bei der Durchführung



des 2-Stichproben t-Tests bereits gesehen, dass sich das Gehalt geschlechtsspezifisch unterscheidet und erwarten bei dieser Analyse ein ähnliches Ergebnis. Abbildung 14.14 zeigt die Ergebnisse von SPSS.

In der Kreuztabelle erkennen wir bereits, dass der Anteil weiblicher Beschäftig-

		Geschlecht		Gesamt
		männlich	weiblich	
Gehalt_kat	niedrig	73	164	237
	hoch	185	52	237
Gesamt		258	216	474

	Wert	df	Asymptotische Signifikanz (2-seitig)	Exakte Signifikanz (2-seitig)	Exakte Signifikanz (1-seitig)
Chi-Quadrat nach Pearson	106.694 <sup>b</sup>	1	.000		
Kontinuitätskorrektur <sup>a</sup>	104.797	1	.000		
Likelihood-Quotient	111.280	1	.000		
Exakter Test nach Fisher				.000	.000
Zusammenhang linear-mit-linear	106.469	1	.000		
Anzahl der gültigen Fälle	474				

a. Wird nur für eine 2x2-Tabelle berechnet

b. 0 Zellen (.0%) haben eine erwartete Häufigkeit kleiner 5. Die minimale erwartete Häufigkeit ist 108.00.

**Abb. 14.14.** SPSS-Ausgabe zum Test von Fisher

ter mit niedrigem Gehalt deutlich höher ist als der der männlichen Angestellten. Der p-Wert von 0.000 in der unteren Ausgabe bestätigt dies noch einmal und zeigt, dass Frauen in dieser Bank weitaus weniger im Mittel verdienen als Männer.

Zur Durchführung des Tests von McNemar folgt man dem Pfad

*Analysieren → Nichtparametrische Tests → Tests bei zwei verbundenen Stichproben*

und wählt im unteren Bereich des sich öffnenden Fensters den Test von McNemar aus. Analog zur Vorgehensweise beim Test von Fisher definieren wir eine neue Variable 'Agehaltkat', die angibt, ob das Anfangsgehalt niedrig ( $< 15000$  US\$/Jahr) oder hoch ( $\geq 15000$  US\$/Jahr) war. Die beiden Variablen 'Gehaltkat' und 'Agehaltkat' bilden nun eine verbundene Stichprobe. Wir wollen nun den Anteil eines hohen Gehaltes in den beiden Gruppen 'niedriges Anfangsgehalt' und 'hohes Anfangsgehalt' miteinander vergleichen. Es stellt sich also die Frage, ob ein hohes Anfangsgehalt auch ein hohes Gehalt zum aktuellen Zeitpunkt garantiert und analog, ob ein niedriges Anfangsgehalt auch ein niedriges aktuelles Gehalt bedeutet. Die SPSS-Ausgabe zum Test von McNemar ist in Abbildung 14.15 dargestellt.