Cezary Wernik

Asystent, KAKiT, WI, ZUT

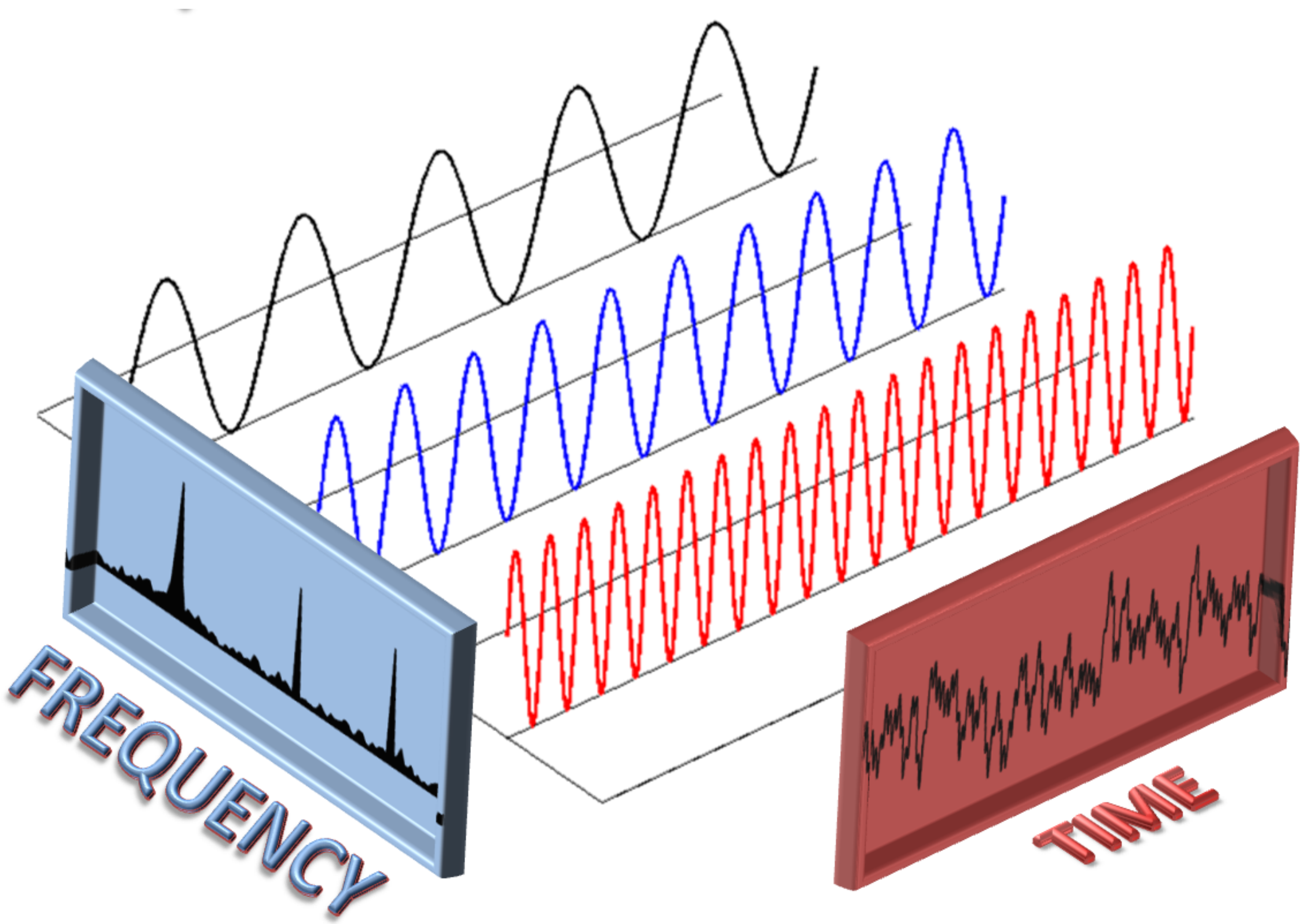
---

3. Dyskretna Transformata Fouriera

Uwaga: Studencie! – na koniec zajęć laboratoryjnych **bezwzględnie zaktualizuj** swoje repozytorium/e-dysk, zawierające prace z zajęć laboratoryjnych tego przedmiotu. Brak systematycznych aktualizacji repozytorium może zostać uznany za brak dokumentacji postępu w realizacji zadań laboratoryjnych, co może skutkować oceną niedostateczną.

Skrót z teorii:

Dowolna okresowa funkcja w czasie może być przedstawiona jako skończona lub nieskończona suma funkcji sinusoidalnych, będących harmonicznymi o odpowiedniej fazie i amplitudzie. Suma taka jest nazywana szeregiem Fouriera.



https://groups.csail.mit.edu/netmit/sFFT/algorithm.html

Zgodnie z tą ideą istnieje możliwość zamiany reprezentacji sygnału w dziedzinie czasu na sygnał w dziedzinie częstotliwości, nazywany widmem sygnału. Zamiana ta określana jest jako transformata Fouriera. W praktyce w m.in. cyfrowym przetwarzaniu sygnałów stosuje się Dyskretną Transformatę Fouriera – DFT (ang. Discrete Fourier Transform), wykonując obliczenia na sygnale dyskretnym. Nazwa Szybka transformata Fouriera – FFT (ang. Fast Fourier Transform) odnosi się do grupy algorytmów realizujących te same zadanie jednak ze znacznie mniejszą złożonością obliczeniową.

Dyskretna Transformata Fouriera (DFT) przekształca skończony ciąg próbek sygnału $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\},\ x(n) \in \mathbb{R}$ w ciąg harmonicznych $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{N-1}\},\ X(k) \in \mathbb{C}$ zgodnie ze wzorem:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w_N^{-kn},\ 0 \leqslant k \leqslant N-1$$

$$w_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

gdzie: n – numer próbki sygnału, k – numer harmonicznej, $x(n)$ – wartość próbki sygnału, $X(k)$ – wartość harmonicznej, N – liczba próbek, w_N – współczynnik skrętu.

Obliczone DFT będzie reprezentowane jako wektor liczb zespolonych.
Moduł z tych liczb będzie widmem amplituowym, funkcja arctan z ilorazu części urojonej przez część rzeczywistą będzie stanowiła widmo fazowe.

Odwrotna Dyskretna Transformata Fouriera (IDFT) danajest następującym wzorem:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) w_N^{kn},\ 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

Podpowiedź: Implementując powyższe iteracyjne przekształcenia, współczynnik skrętu można rozwiązać jako $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Zadanie:

Wykonaj w formie programistycznej implementacji poniżej przedstawione zadania.

1) Napisz funkcję realizującą Dyskretną Transformatę Fouriera.

2) Użyj funkcji z poprzednich zajęć i wyznacz dyskretny sygnał tonu prostego $x(n)$. Wygeneruj wykres dla $n \in \langle 0; \widehat{A}\widehat{B}\widehat{C} \rangle$, jako parametry inicjalizujące przyjmij: $A = 1.0$ [V], $f = \widehat{B}$ [Hz], $\varphi = \widehat{C} \cdot \pi$ [rad].

Użyj przekształcenia DFT z zadania pierwszego i dla uzyskanej reprezentacji sygnału $x(n)$ w dziedzinie czasu wyznacz sygnał w dziedzinie częstotliwości $X(k)$.

Oblicz widmo amplitudowe jako $M(k) = \sqrt{Re[X(k)]^2 + Im[X(k)]^2}$

Wartość amplitudy przedstawić w sakli decybelowej $M'(k) = 10 \cdot \log_{10} M(k)$

Wyznacz skalę częstotliwości $f_k = k \cdot \frac{f_s}{N}$.

Wykreślić wykres widma amplitudowego M' (k), (wartosci f_k oznaczają częstotliwości prążków widma.

3) Dla sygnałów uzyskanych na pierwszych laboratoriach obliczyćwidma amplitudowe . Należy tak dobrać skale (liniową lub logarytmiczną) osi pionowych i poziomych aby jak najwięcej prążków widma było widocznych na wykresie.

4) Napisz funkcję realizującą Odwrotną Dyskretną Transformatę Fouriera.

Zweryfikuj poprawność jej działania odwracając sygnał z dziedziny częstotliwości do dziedziny czasu (wykorzystaj sygnał użyty w zadaniu drugim).

Łącznie w wyniku działania twojego kodu powinno zostać wygenerowanych 11 wykresów z prawidłowo oznaczonymi osiami i wartościami.

Kody i wykresy spakuj w katalog i umieść na swoim repozytorium.

Literatura: