第一章 信号与系统的基本概念

信号（signal）：表达、传递信息的符号

系统（system）：有输入、有输出

某件事情概率越大，信息量越小

基于信号维度的分类

一维、二维、n维…

这里只讨论一维信号

一维信号两种形式

连续信号 和 离散信号

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$x(t)$, $t \in \mathbb{R}$　　$x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$

周期信号与非周期信号

奇信号与偶信号

$$x(t) = \underbrace{\frac{x(t)+x(-t)}{2}}_{x_e(t)} + \underbrace{\frac{x(t)-x(-t)}{2}}_{x_o(t)}$$

证明：将 $x(t)$ 拆为 $x_e(t)$ 和 $x_o(t)$ 方法唯一

假设不唯一，有

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) = x_e'(t) + x_o'(t)$$

$$y(t) = x_e(t) - x_e'(t) = x_o'(t) - x_o(t)$$

$y(t)$ 既是偶函数，也是奇函数

$\therefore y(t) = 0$

$\therefore x_e(t) = x_e'(t)$

$x_o(t) = x_o'(t)$

功率信号和能量信号

$$E=\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2dt \qquad E=\sum_{n=n_1}^{n_2}|x[n]|^2$$

$$P=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2dt \qquad P=\frac{1}{n_2-n_1+1}\sum_{n=n_1}^{n_2}|x[n]|^2$$

无限区间上的信号总能量

$$E_\infty=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt$$

$$E_\infty=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2$$

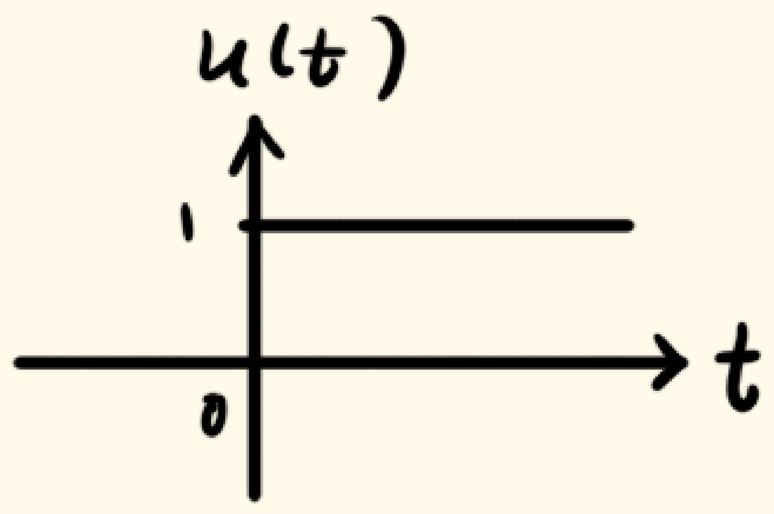
无限区间上的信号平均功率

$$P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt$$

$$P_\infty=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2$$

单位阶跃信号

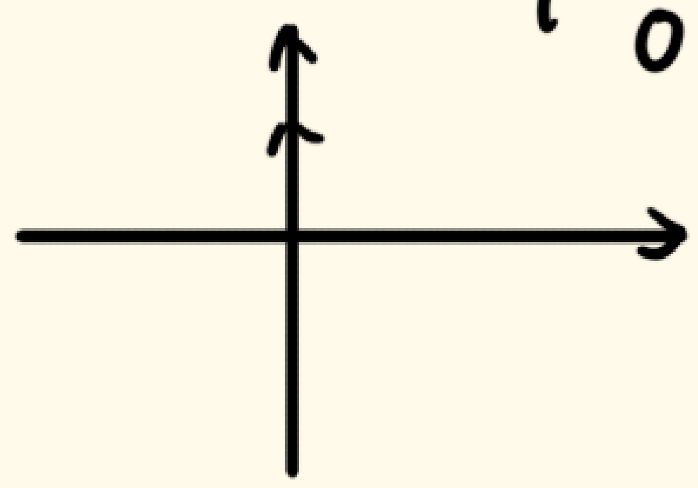
$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



$u(0)$ 可为任意值

冲激信号

$$\delta(t)=\begin{cases}+\infty & t=0\text{时}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1$$

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

奇异信号

抽样函数 $Sa(t)$

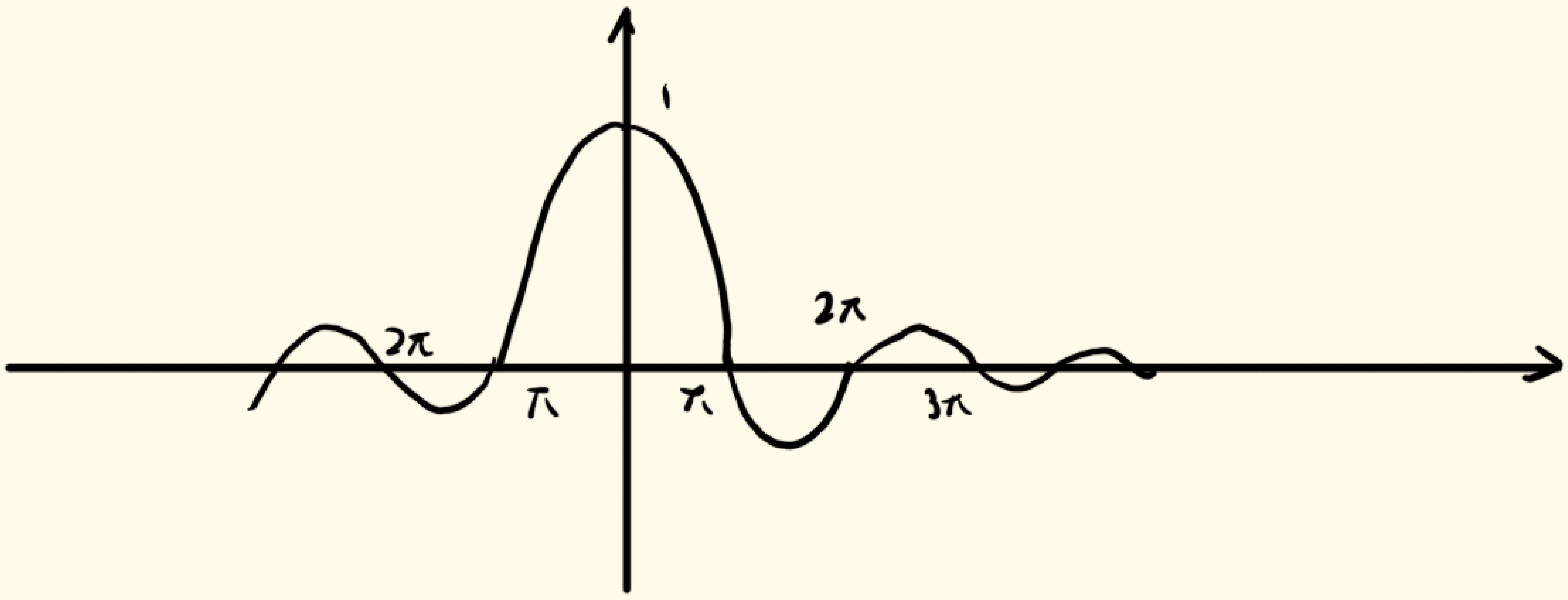
$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t} = \begin{cases} 1 & t=0 \\ \frac{\sin t}{t} & t\neq 0 \end{cases}$$

偶函数

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \pi \qquad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Sa(t)\,dt = \pi\right)$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(wt)}{t}\,dt = \pi \quad (w>0)$$



$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

证明：设 $I(a) = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-at}\,dt$，则 $\frac{dI(a)}{da} = -\int_{0}^{+\infty} \sin(t)\, e^{-at}\,dt$

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j} \\ \cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{2j}\int_{0}^{+\infty} (e^{jt}-e^{-jt})\, e^{-at}\,dt$$

$$= \frac{1}{2j}\int_{0}^{+\infty} (e^{-(a+j)t} - e^{-(a-j)t})\,dt$$

$$= -\frac{1}{a^2+1}$$

$I(a) = -\arctan(a) + C$

$a = +\infty$ 时

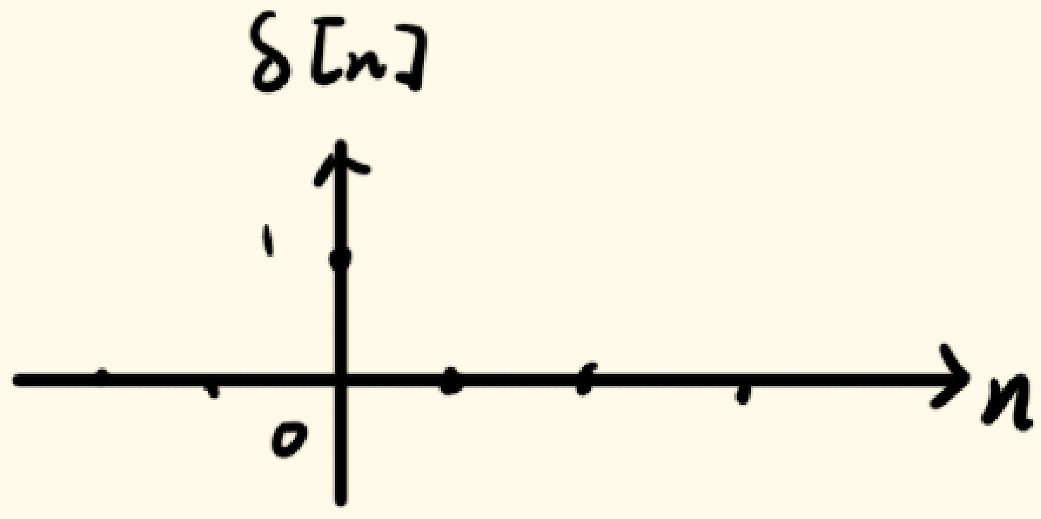
$I(a) = 0 = -\arctan(+\infty) + C = -\frac{\pi}{2} + C$

$\therefore C = \frac{\pi}{2}$

$I(0) = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = -\arctan(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

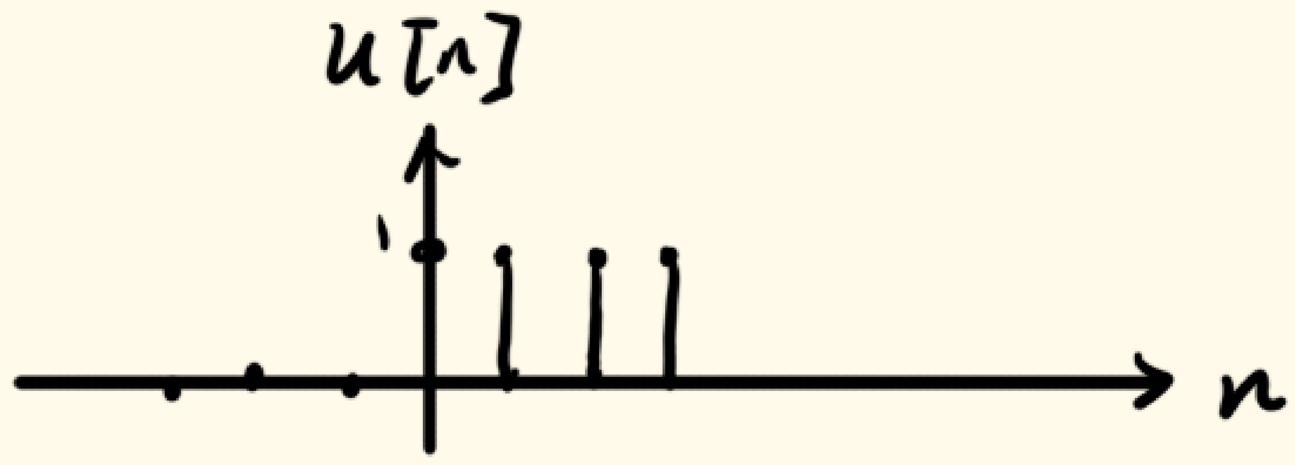
单位冲激序列 $\delta[n]$

$$\delta[n]=\begin{cases}0 & n\neq 0\\ 1 & n=0\end{cases}$$



单位阶跃序列 $u[n]$

$$u[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n\geq 0\end{cases}$$



根据 $x(t)$ 画出 $x(at+b)$ 的图像

公式：$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$

系统的基本性质

① 线性系统

② 时不变系统

③ 因果系统

④ 稳定系统

⑤ 无记忆系统

⑥ 可逆系统

① 线性系统

$x(t)\rightarrow$ 系统 $\rightarrow y(t)$

1) 假设 $\forall\, x(t)\xrightarrow{\text{系统}} y(t)$ （齐次性）

则有 $a x(t)\xrightarrow{\text{系统}} a y(t)$

2) 假设 $\forall\, x_1(t)\xrightarrow{\text{系统}} y_1(t)$

$\forall\, x_2(t)\xrightarrow{\text{系统}} y_2(t)$ （叠加性）

则 $x_1(t)+x_2(t)\xrightarrow{\text{系统}} y_1(t)+y_2(t)$

同时满足 1) 2) 则它是线性系统，否则非线性系统

例：$y(t)=tx(t)$ 是线性系统吗？

是

例：微分器 $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$ 是线性系统吗？

是

例：积分器 $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$ 是线性系统吗？

是

例：$y(t)=x(t)+1$ 是非线性系统 （举反例）

$y(t)=x(t)^2$ 非线性系统

例：$y[n]=x[n]-x[n-1]$ 是线性系统 （离散微分器）

☆ 线性系统判据：①每一项都有 x

②每一项的 x 都是一次

例：$y[n]=e^{x[n]}$ 不是线性系统

②时不变系统

若 $\forall x(t)\xrightarrow{\text{系统}}y(t)$

则 $\forall t_0\in R$，有

$x(t-t_0)\xrightarrow{\text{系统}}y(t-t_0)$

则为时不变系统

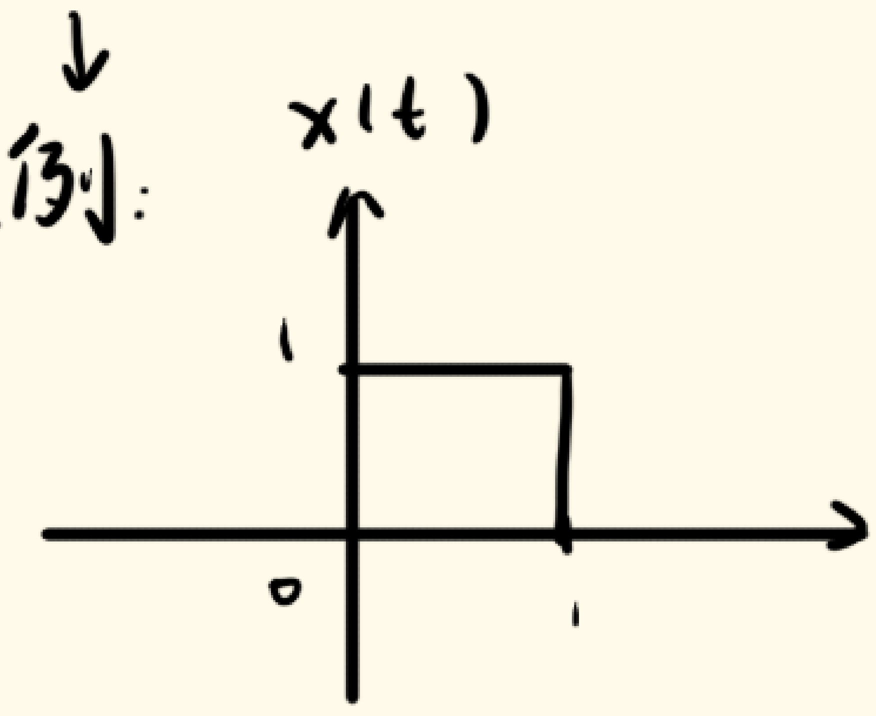
例：$y(t)=x(t-1)$ 时不变

$y(t)=e^{x(t+1)}$ 时不变

$y(t)=x(2t)$ 时变

↓

反例：



$y(t)=tx(t)$ 时变

$y[n]=x[3-n]$ 时变

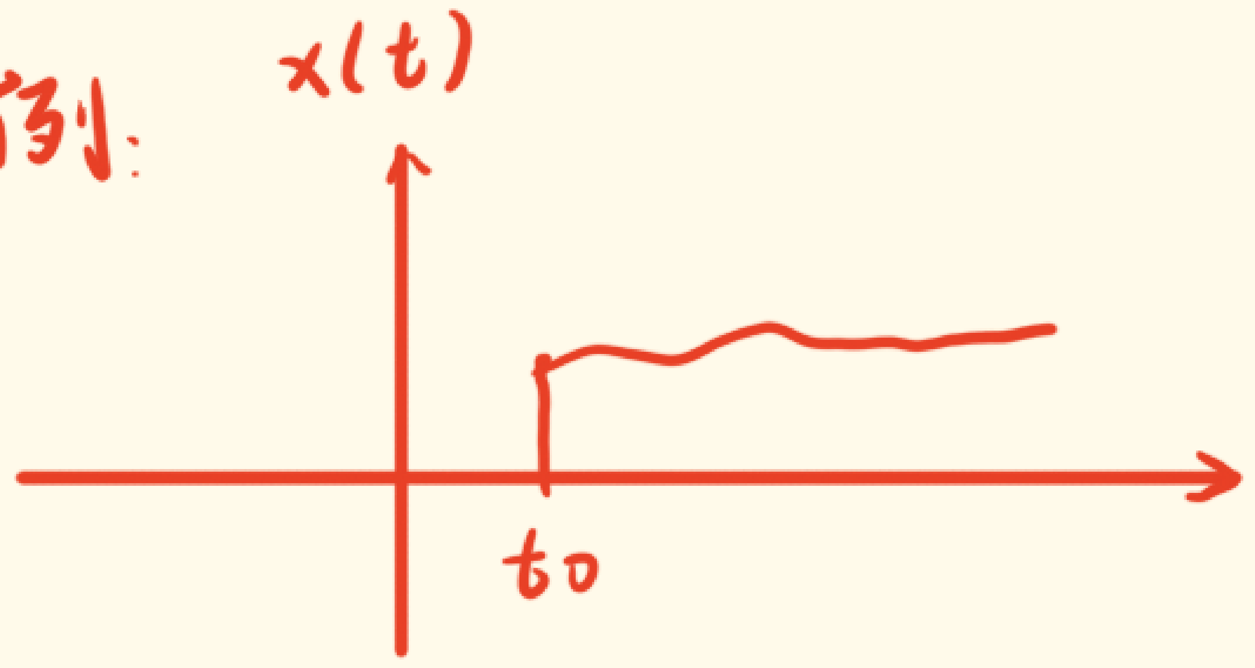
★ 判据：① t只在x的括号里

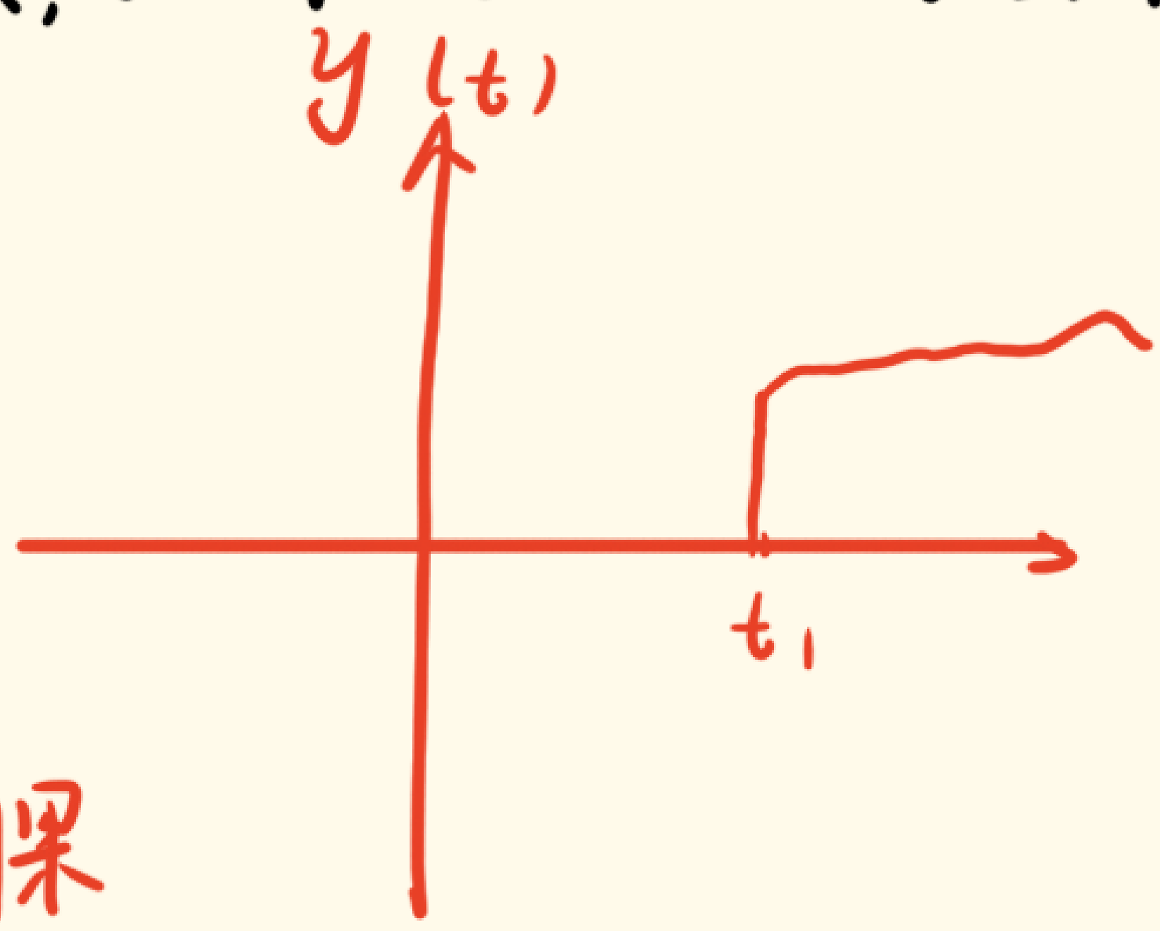
② t只能是t，不能是 $2t$，$-t$，t^2 等其他函数

③因果系统

定义：如果一个系统任何时刻的输出只决定于现在及过去的输入，而与系统以后的输入无关，就称该系统为因果系统

例：





当且仅当 $t_1 \ge t_0$ 时系统因果

★ 判据：x括号里的数恒小于y括号里的数

④无记忆系统

一个系统无记忆，是指 $y(t)$ 的值仅仅只依赖于 $x(t)$ 的值

★ 判据：x括号里的数恒等于y括号里的数

无记忆系统一定是因果系统

⑤可逆系统

$x(t)$ 能唯一写成 $y(t)$ 的形式

例：$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ 可逆

$x[n]=y[n]-y[n-1]$

积分器可逆，微分器不可逆

⑥稳定系统

定义: $x(t) \longrightarrow y(t)$

若 $x(t)$ 有界 $\rightarrow y(t)$ 有界

例: $y(t)=e^{x(t)}$ 稳定

$y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$ 不稳定

$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ 不稳定

	线性	时不变	无记忆	因果	稳定	
$y(t)=e^{x(t)}$	×	√	√	√	√	
$y[n]=x[n]x[n-1]$	×	√	×	√	√	
$y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$	√	√	×	√	×	