第一章 信号与系统基本概念

信号(signal)：表达、传递信息的符号

系统(system)：有输入、有输出

某事情概率越大，信息量越小、

信息熵：$= -\sum_{x \in X} p(x)\log[p(x)]$

表达同一信息的不同信号有优劣之分

优：成本低、简洁、传输速度快、传输可靠 (光和电)

产生信号 → 设计系统 → 输出新的信号

信号维度的分类

一维，二维，⋯，n维

这里，我们只讨论一维信号

一维信号两种形式

连续信号和离散信号

$x(t)$ $\quad$ $x[n]$

t：时间：$t \in R$ $\quad$ $n \in Z$

周期信号与非周期信号

① $x(t) = x(t+mT)$ $(m \in Z)$ T：最小正周期

② $x[n] = x[n+mN]$ $(m \in Z)$ N是一个自然数

奇信号与偶信号

任何信号都可以看成奇信号和偶信号的叠加。

$$x(t) = \underbrace{\left[\frac{x(t)+x(-t)}{2}\right]}_{x_e(t)} + \underbrace{\left[\frac{x(t)-x(-t)}{2}\right]}_{x_o(t)}$$

证明：将 $x(t)$ 拆为 $x_e(t)$ 和 $x_o(t)$ 方法唯一

假设不唯一，有

$$x(t)=x_e(t)+x_o(t)=x_e'(t)+x_o'(t)$$

$$y(t)=x_e(t)-x_e'(t)=x_o'(t)-x_o(t)$$

$y(t)$ 既是偶函数，也是奇函数

$\therefore y(t)=0$

$\therefore x_e(t)=x_e'(t)$

$x_o(t)=x_o'(t)$

功率信号和能量信号

$$E=\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2dt \qquad E=\sum_{n=n_1}^{n_2}|x[n]|^2$$

$$P=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2dt \qquad P=\frac{1}{n_2-n_1+1}\sum_{n=n_1}^{n_2}|x[n]|^2$$

无限区间上的信号总能量

$$E_\infty=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt$$

$$E_\infty=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2$$

无限区间上的信号平均功率

$$P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt$$

$$P_\infty=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2$$

单位阶跃信号

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

$t=0$ 处无定义，可以为任意值

冲激信号：$\delta(t)=\begin{cases}+\infty, & t=0\\ 0, & 其他\end{cases}$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

抽样函数 Sa(t)

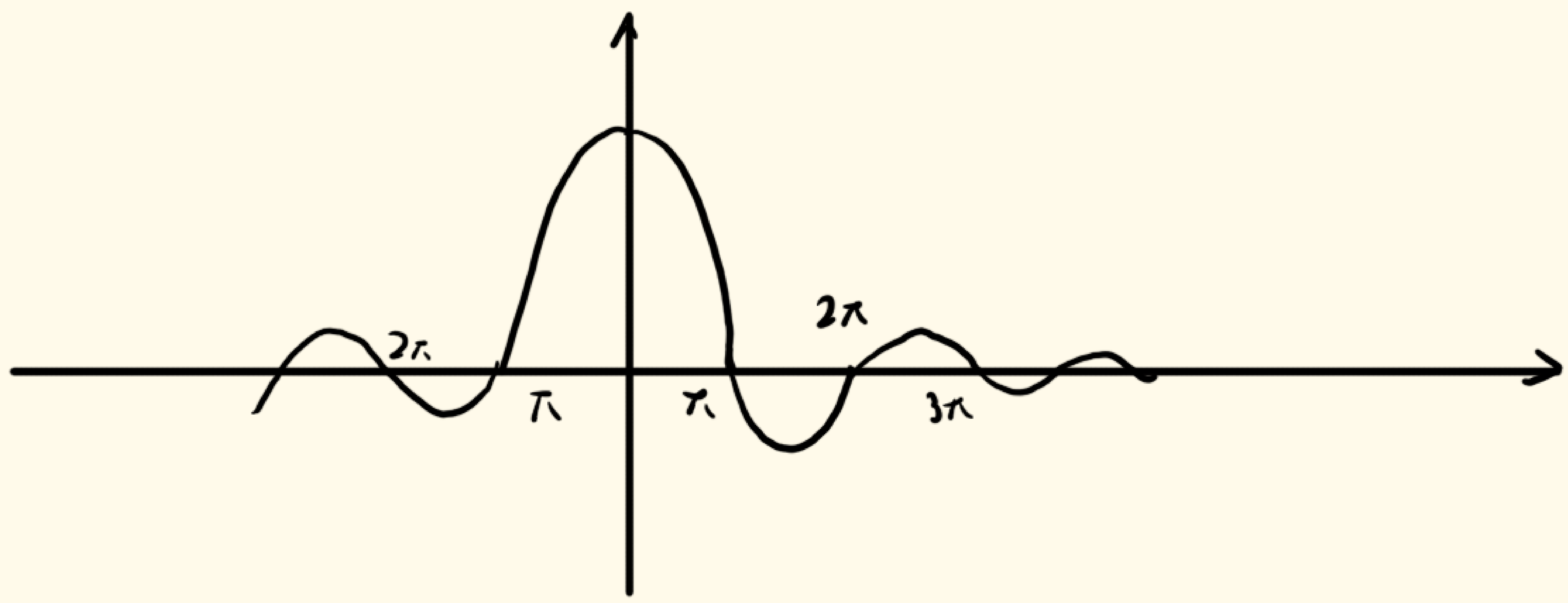
$$Sa(t)=\frac{\sin t}{t}=\begin{cases}1 & t=0\\ \frac{\sin t}{t} & t\neq 0\end{cases}$$

偶函数

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\pi$$ $(\int_{-\infty}^{+\infty}Sa(t)dt=\pi$ （记住）

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(wt)}{t}dt=\pi \quad (w>0)$$



$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

证明: $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-at}\, dt$

则 $\frac{dI(a)}{da} = -\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-at}\, dt$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{j\theta}}{2}$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$= -\frac{1}{2j}\int_0^{+\infty} (e^{jt} - e^{-jt}) e^{-at}\, dt$$

$$= \frac{1}{2j}\int_0^{+\infty} e^{-(a+j)t} - e^{-(a-j)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{a+j} - \frac{1}{a-j}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2+1}$$

$I(a) = -\arctan(a) + C$

$a = +\infty$ 时, $I(a) = 0$

$I(+\infty) = -\arctan(+\infty) + C = -\frac{\pi}{2} + C = 0$

$C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I(0) = \frac{\pi}{2}$

1.3 基本的离散时间信号

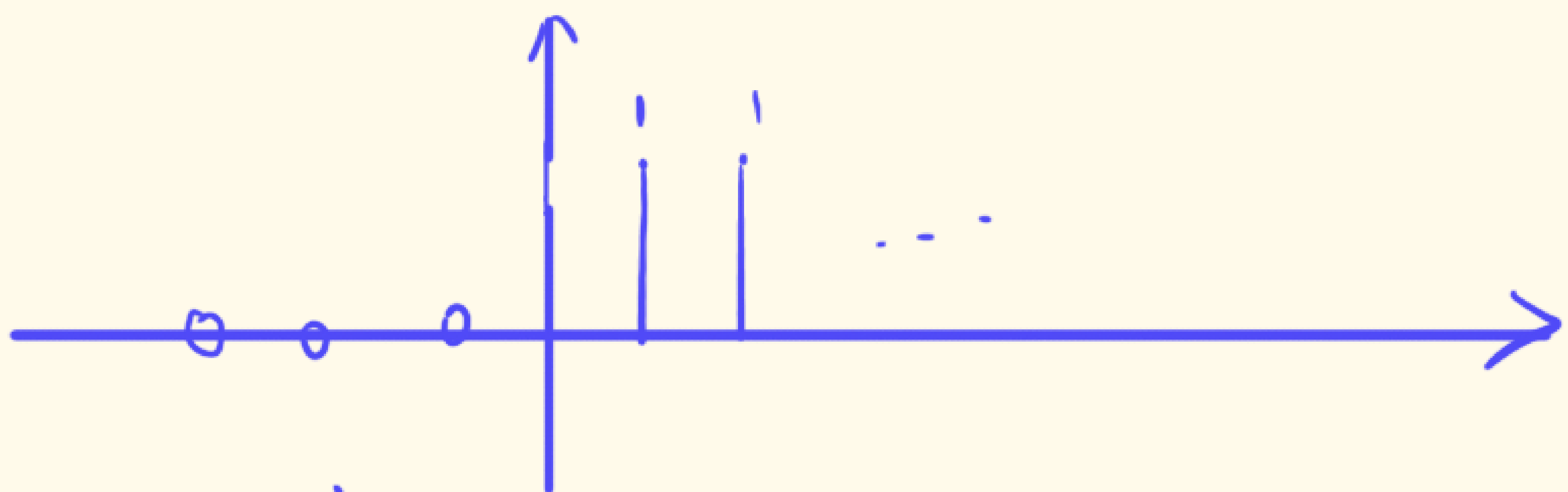
1.3.1 单位脉冲序列/阶跃序列及其相关序列

(1) 单位脉冲序列 $\delta[n]$

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

(2) 单位阶跃序列 $u[n]$

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



(3) 矩形序列 $G_N(n)$

$$G_N[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \geq N \end{cases}$$

$G_N(n) = u[n] - u[n-N]$

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

系统的基本性质

①线性系统

②时不变系统

③因果系统

④稳定系统

⑤无记忆系统

⑥可逆系统

①线性系统

$x(t) \to \boxed{\text{系统}} \to y(t)$

1) 假设 $\forall\, x(t) \xrightarrow{\text{系统}} y(t)$ （齐次性）

则有 $a\,x(t) \xrightarrow{\text{系统}} a\,y(t)$

2) 假设 $\forall\, x_1(t) \xrightarrow{\text{系统}} y_1(t)$ （叠加性）

$\forall\, x_2(t) \xrightarrow{\text{系统}} y_2(t)$

$x_1(t)+x_2(t) \xrightarrow{\text{系统}} y_1(t)+y_2(t)$

若一个系统同时满足①② 则是线性系统，否则非线性系统

线性系统判据 ①每一项都有x

②每一项的x都是一次

②时不变系统

若 $\forall\, x(t) \xrightarrow{\text{系统}} y(t)$

则 $\forall\, t_0 \in R$，有

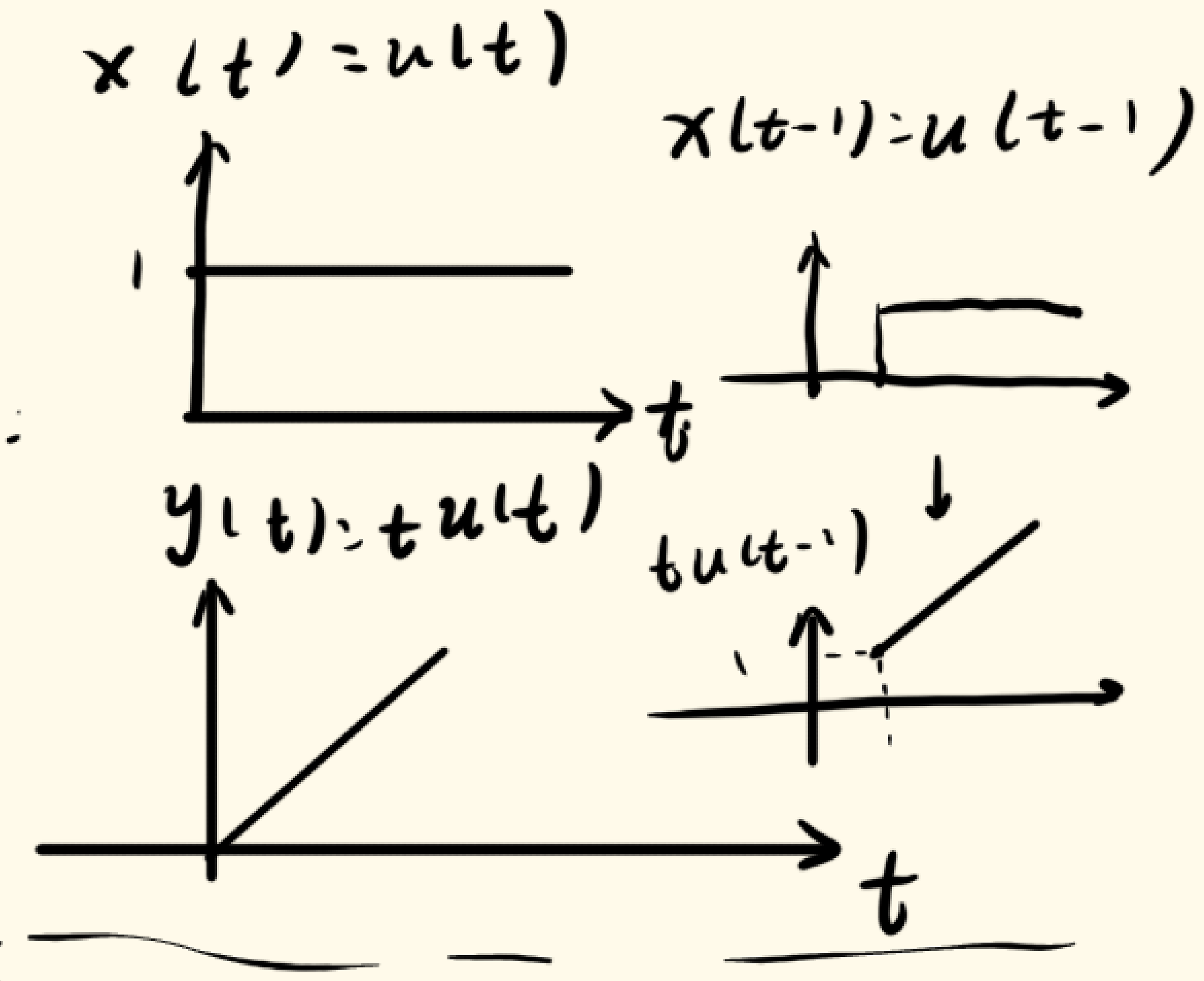
$x(t-t_0) \xrightarrow{\text{系统}} y(t-t_0)$

例: $y(t)=x(t-1)$ 时不变

$y(t)=e^{x(t)}$ 时不变

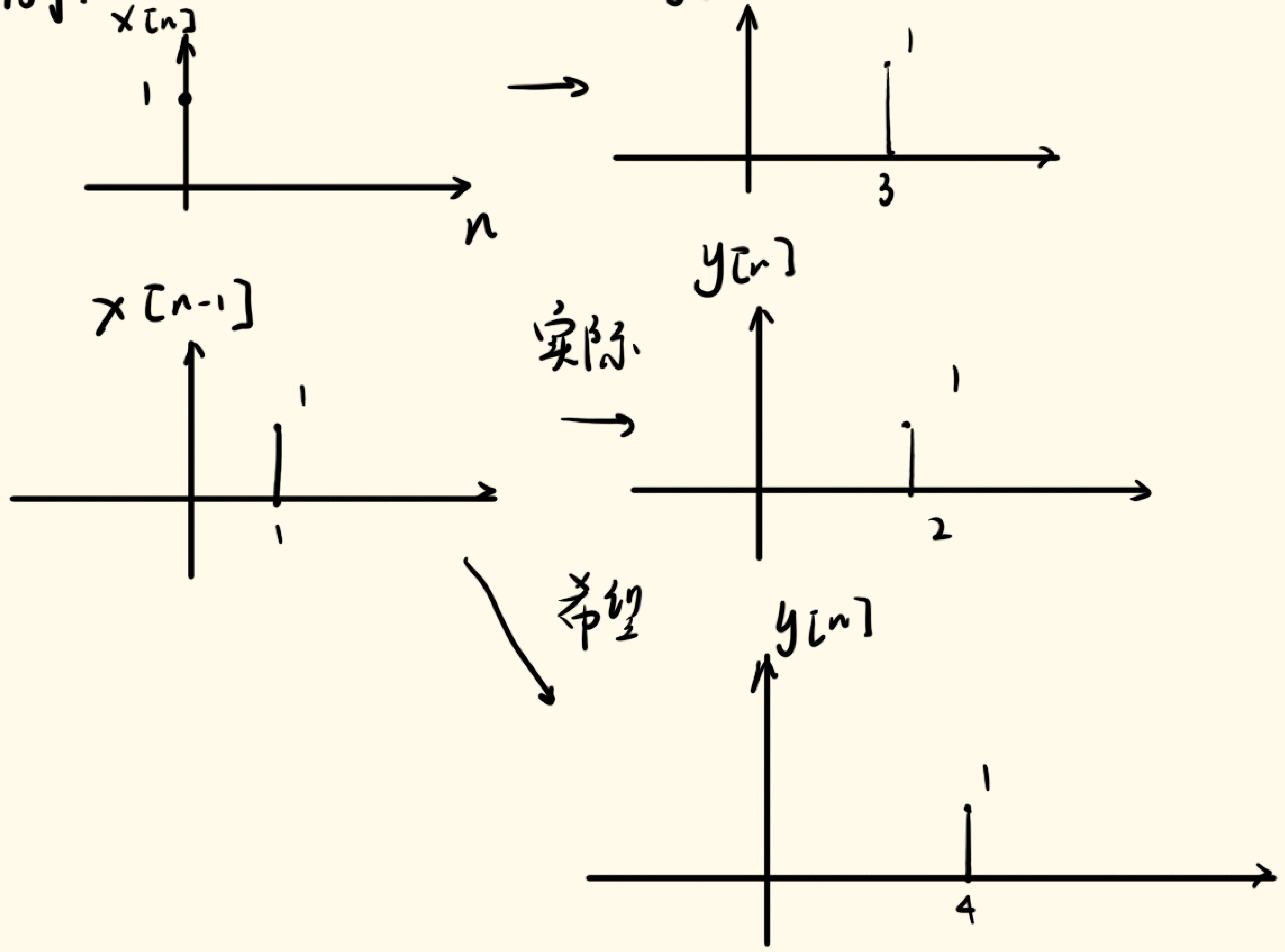
$y(t)=x(2t)$ 时变

$y(t)=tx(t)$ 时变 → 反例:



$y[n]=x[3-n]$ 时变

反例: $x[n]=\delta[n]$



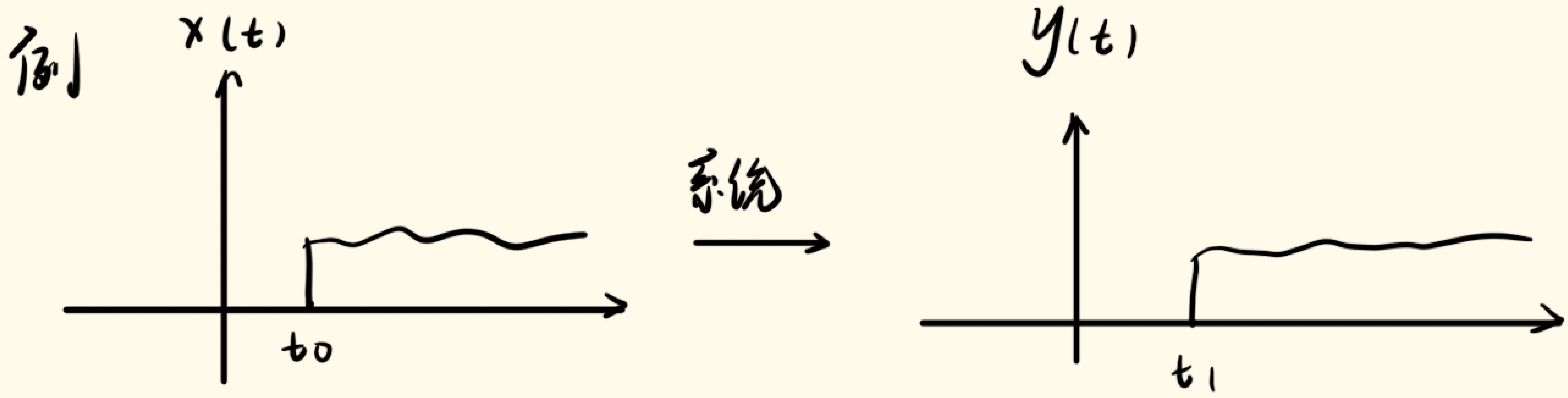
判据: ① t只在x的括号里

② t只能是t, 不能是2t、-2t、t^2等其他函数

③因果系统

定义: 如果一个系统任何时刻的输出只决定于现在及过去的输入, 而与系统以后的输入无关, 就称该系统为因果系统

例



当且仅当 $t_1 \geq t_0$ 时 为因果系统

非因果系统在物理上难以实现

例: $y(t)=x(3-t)$ 非因果

$y(t)=x(\frac{1}{2}t)$ 非因果

判据: x括号里的数恒小于y括号里的数

④ 无记忆系统

一个系统无记忆,是指 $y(t)$ 的值仅仅只依赖于 $x(t)$ 的值

例 $y(t)=x(t)^2+e^{x(t)}$ 无记忆

$y(t)=x(t-1)$ 记忆

判据: x与y括号里的数完全一样

无记忆系统一定是因果系统

⑤ 可逆系统

$x(t)$ 能唯一写成 $y(t)$ 的形式

⑥ 稳定系统

定义: $x(t) \longrightarrow y(t)$

若 $x(t)$ 有界 $\rightarrow y(t)$ 有界

例 $y(t)=e^{x(t)}$ 稳定

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$ 不稳定

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(t)dt$$ 不稳定

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]$$ 不稳定

$$y[n]=x[n]-x[n-1]$$ 稳定

	线性	时不变	无记忆	因果	稳定	
$y(t)=e^{x(t)}$	×	√	√	√	√	
$y[n]=x[n]x[n-1]$	×	√	×	√	√	
$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$	√	√	×	√	×	

①满足齐次性不满足叠加性系统

$$y(t)=\frac{[x'(t)]^2}{x(t)}$$

$$ax(t)\to\frac{a^2x'^2(t)}{ax(t)}=ay(t)$$

但是 $$\frac{x_1'^2(t)}{x_1(t)}+\frac{x_2'^2(t)}{x_2(t)}\neq\frac{[x_1'(t)+x_2'(t)]^2}{x_1(t)+x_2(t)}$$

②满足叠加性不满足齐次性系统

考虑复数

否则须要用到实变函数