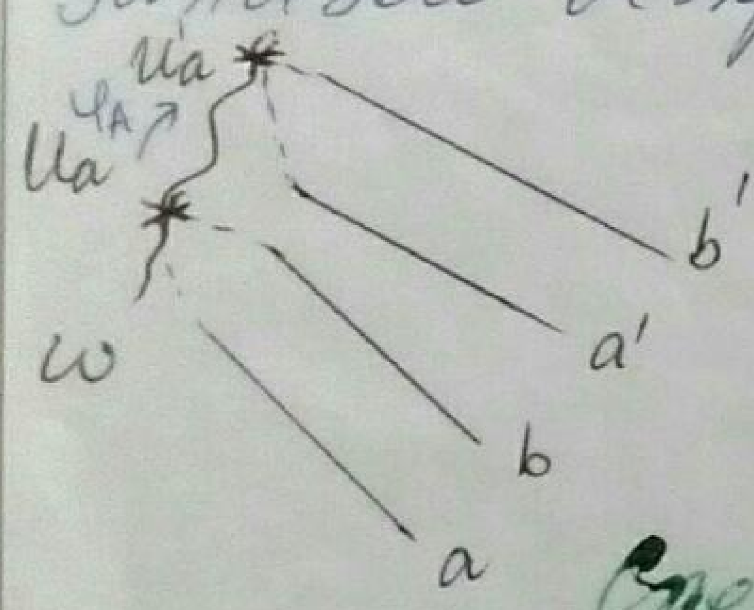
⑤ Афинни и ортогонални трансформации в равнината

деф.1 Нека φ_A е линейна трансформация на E_2^* (зададена с матр. A от ред 3 над $\mathbb{R}$). φ_A се нар. афинна тр-я, ако е неизродена и запазва безкр.-та права ω, т.е. ① $\det A \neq 0$ и ② $\varphi_A(\omega) = \omega$.



Нека a и b са 2 (кр.) прави, които се пресичат в/у ω, т.е. $U_a \equiv U_b \Leftrightarrow$ в $E_2 = E_2^* \setminus \omega$ a и b са успоредни.

$\varphi_A(a) = a'$, $\varphi_A(b) = b'$, $\varphi(\omega) = \omega \Rightarrow \varphi(U_a) = U_a' = U_b' = U_{a'} = U_{b'}$,

т.е. a' и b' се пресичат в/у $\omega \Rightarrow a' \parallel b'$

Следствие: φ_A запазва успоредността в E_2 (на правите).

Аналитично представяне на афинна тр-я:

Нека φ_A е афинна тр-я $\varphi_A : \rho \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\rho \neq 0$, $A = (a_{ij})$, $\det A \neq 0$.

За $\forall M \in \omega$ имаме $\varphi_A(M) = M' \in \omega \Rightarrow$

$M(x_1, x_2, 0) \longrightarrow M'(x_1', x_2', 0) \Rightarrow 0 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}.0 \quad \forall (x_1, x_2) \neq (0,0)$ ($\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$)

$\Rightarrow a_{31} = 0$ и $a_{32} = 0$. От $\det A \neq 0 \Rightarrow a_{33} \neq 0$.

$$\Rightarrow \varphi_A : \begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho x_3' = \qquad\qquad\qquad\quad a_{33}x_3 \end{cases}, \quad \rho \neq 0, \ a_{33} \neq 0$$

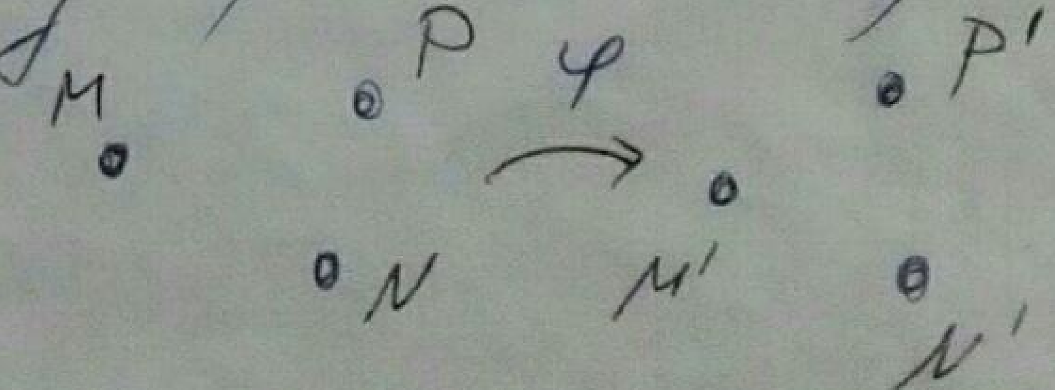
Тъй като крайна т-ка при φ_A се изобразява в крайна, то можем да намерим аналитичното представяне на φ_A в $E_2 \cdot - \varphi_A/_{E_2}$ => преминаваме в нехомогенни координати – за $x_3 \neq 0 \Rightarrow x_3' \neq 0 \rightarrow$ делим I-я и II-я ред на III-тия → означаваме

$$x' = \frac{x_1'}{x_3'}, \quad y' = \frac{x_2'}{x_3'}; \quad x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3} \quad \text{и} \quad c_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{33}} \Rightarrow$$

При афинната тр-я φ_A (произв.) кр. т-ка P с нехомог. коорд-ти $P(x,y)$ се изобразява в кр-та т-ка $P'(x',y')$:

$$(*) \quad \varphi_A : \begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13} \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23} \end{cases}, \quad C = (c_{ij}), \quad \det C = \frac{1}{a_{33}^2} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{33}^3} \det A \neq 0$$

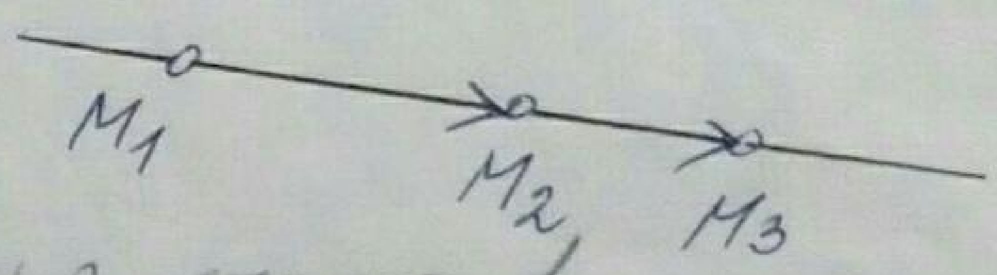
От представянето на φ_A следва, че за да се определи еднозначно φ_A (те да определим шестте коефициента c_{ij}) е необходимо и достатъчно да познаваме д-вието на $\varphi_A = \varphi_C$ в/у три неколинеарни т-ки $M, N, P \xrightarrow{\varphi} M', N', P'$

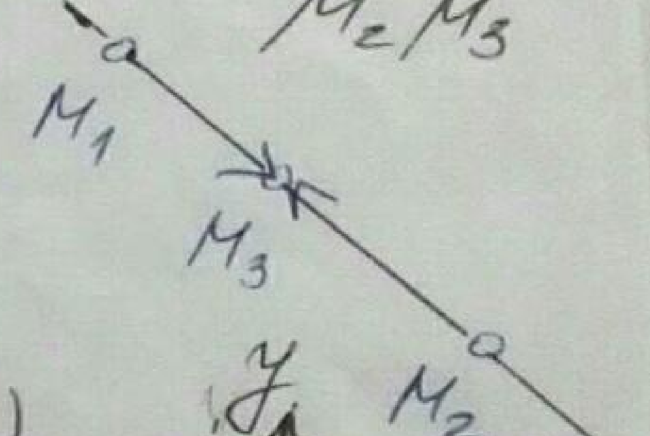


/ всяка 2-ка съотв. т-ки дава 2 у-ния...
за да са независими ... <=> M, N, P – неколин., както и M', N', P' /
ин $\exists!$ афинитет, такъв се ...

Деф2 Нека M_1, M_2, M_3 са три различни крайни колинеарни точки. Просто отношение на M_1, M_2, M_3, взети в този ред наричаме числото k, за което $\overrightarrow{M_1M_3} = k.\overrightarrow{M_2M_3}$, т.е. $k = \frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_2M_3}}$

Означаваме $k = (M_1 M_2 M_3)$

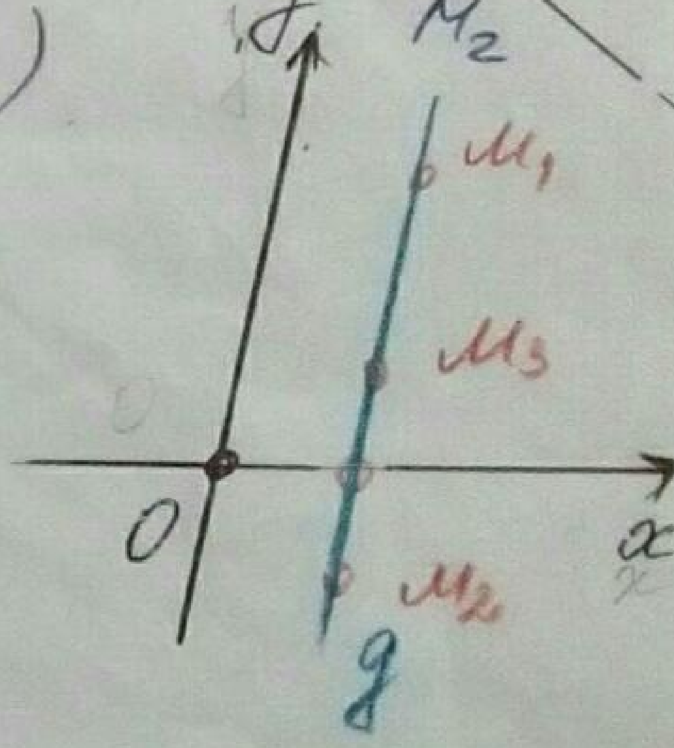




заб. 1) им на всяка наредена тройка колинеарни т-ки еднозначно съотв. k

2) дад. M_1, M_2 и $k \neq 0 \Rightarrow \exists!\, M_3 \in M_1M_2 : k = (M_1 M_2 M_3)$

Нека спрямо фикс. коорд. с-ма $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ в E_2 точките $M_i \in g$ имат нехомог. коорд.-ти $M_i(x_i, y_i)$, $i=1,2,3$. Тогава простото им отношение в общия случай се пресмята $k = (M_1, M_2, M_3) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}$



заб.: $x_1 = x_2 \iff g \parallel Oy \Rightarrow x_3 = x_1 \Rightarrow y_1 \neq y_2 \neq y_3 \neq y_1$. Аналог. $y_1 = y_2 \iff g \parallel Ox$ ...

Теорема: Афинните трансформации запазват простото отношение на три колинеарни точки.

– основен инвариант на афинната група ... отношението на [illegible]

Док. Нека φ е афинна тр-я с представяне (*), $M_i(x_i, y_i)$ – 3 колин. т-ки и $M_i \xrightarrow{\varphi} M_i'$, $M_i'(x_i', y_i')$, $i=1,2,3$. Нека $x_3 \neq x_2$, $y_3 \neq y_2$, т.е. $M_i \in g$, $g \nparallel Ox, Oy$. В общия случай $\varphi(g) = g' \nparallel Oy \Rightarrow x_3' \neq x_2' \neq x_1'$)...

$$\Rightarrow (M_1' M_2' M_3') = \frac{x_3' - x_1'}{x_3' - x_2'} = \frac{(c_1 x_3 + c_2 y_3 + c_3) - (c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3)}{(c_1 x_3 + c_2 y_3 + c_3) - (c_1 x_2 + c_2 y_2 + c_3)} =$$

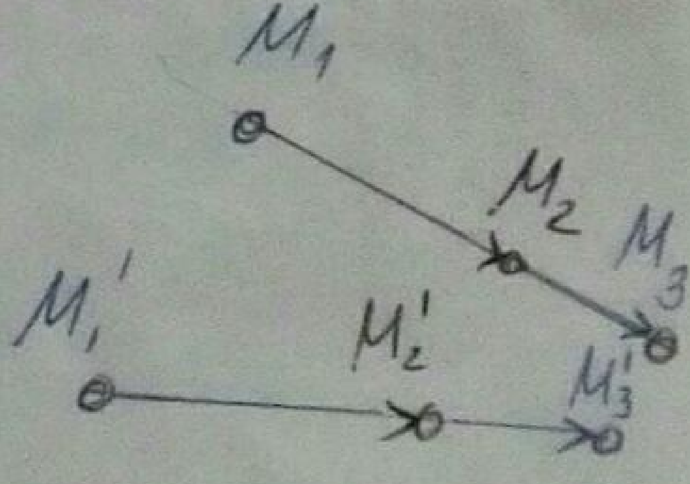
/ делим числителя с $y_3 - y_1$, знаменателя – с $y_3 - y_2$ /

$$= \frac{c_1(x_3 - x_1) + c_2(y_3 - y_1)}{c_1(x_3 - x_2) + c_2(y_3 - y_2)} = \cancel{\frac{c_{11}\frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} + c_{12}}{c_{11}\frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} + c_{12}}} \cdot \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}$$

$$\text{От } \frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} \overset{(**)}{=} \frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} \text{ имаме } (M_1' M_2' M_3') = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = (M_1 M_2 M_3). \quad \square$$

заб. Случаят $x_3 = x_2 \Rightarrow = x_1$ – тривиален...

Следствие. Афинните трансформации изобразяват отсечка в отсечка.



Док: Нека $M_2 \in (M_1 M_3)$, т.е. $M_2 / M_1 M_3 \Leftrightarrow (M_1 M_2 M_3) > 1$

$\overset{T1}{\Longrightarrow} (M_1' M_2' M_3') = (M_1 M_2 M_3) > 1 \Leftrightarrow M_2' \in (M_1' M_2')$

! В частност средата на отс-ка се изобр. в средата на образа.