Упражнение II

Задача Нека $\mathcal{L} = (\{eq\}, \{p, s\}, \emptyset, I)$ и нека $S = (\mathbb{R}, \{eq^S\}, \{p^S, s^S\}, \emptyset)$ е структура за $\mathcal{L}$,

където

$eq^S(x,y) \overset{def}{\Longleftrightarrow} x = y$

$p^S(x,y) = z \overset{def}{\Longleftrightarrow} x * y = z$

$s^S(x,y) = z \overset{def}{\Longleftrightarrow} x + y = z$

Определими ли са:

1) $\{1\}, \{0\}, \{-1\}$;
2) за всяко $n \in \mathbb{N}$, $\{n\}$;
3) $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$;
4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$;
5) за вс. $q \in \mathbb{Q}$, $\{q\}$;
6) за вс. $r \in \mathbb{R}$, $\{r\}$;

Решение:

1) Нека $f_1(x) \leftrightharpoons \forall y(eq(p(x,y), y))$. Тогава $\{1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f_1^S(x)\}$, защото ако $x_0 = 1$, то $f_1^S(x_0)$ е истина т.с.т.к. за всяко $y \in \mathbb{R}$ е в сила, че $x_0 * y = y$, което $1 * y = y$ за вс. $y \in \mathbb{R}$.

Нека сега $x_0 \neq 1$ и да предположим, че $f_1^S(x_0)$ е истина, т.е. за вс. $y \in \mathbb{R}$ е вярно, че $x_0 * y = y$. Оттук получаваме в частност, за $y_0 = 1$, $x_0 * y_0 = y_0$, откъдето стигаме до абсурд, че $x_0 * 1 = 1$, но $x_0 \neq 1$.

Нека $f_0(x) \leftrightharpoons \forall y(eq(p(x,y), x))$. Ако $x_0 = 0$, то наистина за вс. $y \in \mathbb{R}$ е в сила, че $0 * y = 0$. Обратно, нека $x_0 \neq 0$ и нека $f_0^S(x_0)$ е истина. Тогава за вс. $y \in \mathbb{R}$, $x_0 * y = x_0$. В частност, това е вярно за $y_0 = 0$, т.е. $x_0 * 0 = x_0$ и $x_0 \neq 0$, което е абсурд.

Нека $f_{-1}(x) \leftrightharpoons \exists z \exists y (f_1(z) \,\&\, f_0(y) \,\&\, eq(s(x,z),y))$.
Ако $x_0 = -1$, то наистина $x_0 + 1 = 0$. Обратно, ако $x_0 \neq -1$, то $x_0 + 1 \neq 0$.

2) Ще определим $\{n\}$ за вс. $n \in \mathbb{N}$ чрез индукция.
База: $\{0\}$ и $\{1\}$ са определими чрез f_0 и f_1.
ИХ: нека $\{n\}$ е определимо за фиксирано $n \in \mathbb{N}$, произволно. Тоест $\{n\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f_n^s(x)\}$.
ИС: $\{n\} \mapsto \{n+1\}$. ~~Нека~~ Тогава
$$f_{n+1}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z (f_1(y) \,\&\, f_n(z) \,\&\, eq(s(y,z),x)).$$

3) За $\mathbb{R}^+$ ще използваме идеята, че ако $x_0 \geq 0$, то има $y_0 \in \mathbb{R}$ такова, че $y_0 * y_0 = x_0$.
$$f_{\geq 0}(x) \leftrightharpoons \exists y (eq(p(y,y),x))$$
Ако $x_0 < 0$, то съществува $y_0 \in \mathbb{R}$ такова, че $y_0 * y_0 = x_0$, което е противоречие.

4) За $x \geq y$ използваме, че ако $x_0 \geq y_0$, то има $z_0 \geq 0$ такова, че $y_0 + z_0 = x_0$. Тогава
$$f_{\geq}(x,y) \leftrightharpoons \exists z (f_{\geq 0}(z) \,\&\, eq(s(y,z),x))$$

5) Нека $q \in \mathbb{Q}$ е произволно. Тогава $q = \frac{z}{n}$, където $z \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$, тоест $n * q = z$ и $n \neq 0$.
Трябва да определим $\{z\}$ за вс. $z \in \mathbb{Z}$.
Ако $z \in \mathbb{N}$, то $\{z\}$ е определимо. Нека $z \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.
Тогава имаме, че $x = z$ т.с.т.к. $x + (-z) = 0$, т.е.
$$f_z(x) \leftrightharpoons \exists t \exists y (f_{-z}(y) \,\&\, eq(s(x,y),t) \,\&\, f_0(t))$$

|| Забележка: тук гарантирано $-z \in \mathbb{N}$!!!

Определяме $\{q\}$ за вс. $q \in \mathbb{Q}$ със следната предикатна формула:

$$f_q(x) \leftrightharpoons \exists t \exists y (f_n(t) \& f_z(y) \& \neg f_0(t) \& eq(p(t,x), y)).$$

6) Определимо ли е $\{r\}$ за вс. $r \in \mathbb{R}$?

$\boxed{\text{Задача}}$

Нека $\mathcal{L} = (cat, cup; \doteq)$
$S = (\mathcal{P}(\{1..9\}^*), cat^S, cup^S)$, където

$cat^S(L_1, L_2) = L_3 \overset{def}{\iff} L_1 \circ L_2 = L_3$

$cup^S(L_1, L_2) = L_3 \overset{def}{\iff} L_1 \cap L_2 = L_3$

Определими ли са:

1) $\{\emptyset\}$, $\{\{1-9\}^*\}$, $\{\{\varepsilon\}\}$
2) $\{(L_1, L_2, L_3) \mid L_1 \cup L_2 = L_3\}$
3) $\{\{a\} \mid a \in \{1..9\}\}$

Решение:

1) $\{\emptyset\}$:
$L_0 = \emptyset$, то $L_0 \cap L = L_0$ за вс. $L \in \mathcal{P}(\{1-9\}^*)$
Обратно, ако $L_0 \neq \emptyset$, то $L_0 \cap \emptyset = \emptyset \neq L_0$. Тогава

$$\varphi_\emptyset(x) \leftrightharpoons \forall y (cup(x,y) \doteq x)$$

$\{1, \dots, 9\}^*$:

$\{1, \dots, 9\}^* \cap L = L$ за вс. $L \in P(\{1..9\}^*)$, тъй като $L \subseteq \{1..9\}^*$. Обратно, ако $L_0 \neq \{1..9\}^*$, то $L_0 \subsetneq \{1..9\}^*$ и значи $L_0 \cap \{1..9\}^* = L_0$ и $L_0 \neq \{1..9\}^*$. Толкова

$$\varphi_{\{1..9\}^*}(x) \leftrightharpoons \forall y (cup(x, y) \doteq y)$$

$\{\varepsilon\}$:

$\{\varepsilon\} \circ L = L$ за вс. $L \in P(\{1..9\}^*)$. Обратно, ако $L_0 \neq \{\varepsilon\}$, то $L_0 \circ \{\varepsilon\} = L_0 \neq \{\varepsilon\}$, т.е.

$$\varphi_{\varepsilon}(x) \leftrightharpoons \forall y (cat(y, x) \doteq y)$$