Упражнение 11 - Теория, задачи, решения

ЕК, МС

21.04.2021

1 Нормално разпределение

Дефиниция 1.1. *Казваме, че $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е нормално разпределена случайна величина с параметри (μ, σ^2), което ще записваме чрез $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, ако функцията на разпределение F_X на X има вида*

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du.$$

Ако $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, получаваме: $EX = \mu,\ DX = \sigma^2$ В частност, при $\mu = 0,\ \sigma = 1$, функцията $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ се нарича стандартна нормална функция на разпределение. Ако $Y \in \mathcal{N}(0,1)$, то за $X = \sigma Y + \mu$ намираме: $EX = E(\sigma Y + \mu) = \sigma EY + E\mu = \mu$ и $DX = D(\sigma Y + \mu) = \sigma^2 DY + D\mu = \sigma^2$, следователно (може да се покаже, че X има нормално разпределение) $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Понеже плътността $f_\Phi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ е четна функция и $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 1$, то:

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Нека $k, l,\ 0 \le k < l$ са естествни числа и $p \in (0,1),\ q = 1 - p$.

Теорема 1.2. *Нека $X \in Bi(n,p)$. При големи стойности на n е в сила апроксимацията*

$$P(k \le X \le l) \approx \Phi\left(\frac{l - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

1.1 Условия на задачите от упражнение 14

Задача 1 Напрежението на пробив на диоди произвеждани от машина е нормално разпределена случайна величина с очакване 100 и дисперсия 49. Втора машина произвежда диоди с очакване 90 и дисперсия 25. Диод е годен, ако напрежението му на пробив е по-голямо от 85. Каква е вероятността случайно избран диод да бъде годен?

Задача 2 Височината на прилива е нормално разпределена случайна величина с очакване 6м и стандартно отклонение 1.5м. Дига предпазва от наводнение при височина на прилива до 8м.
а) Каква е вероятността за наводнение;
б) Колко висока трябва да е дигата, така че от 200 прилива най-много при един да има наводнение?

Задача 3 Неправилна монета (вероятността за падане на герб е 3/4) се хвърля 2000 пъти. Каква е вероятността броя на падналите се гербове да е между 1475 и 1535.

Задача 4 Каква трябва да бъде дължината на интервал, така че вероятността за едновременно попадане в него на две независими, нормално разпределени случайни величини да бъде 0.09, ако математическото им очакване съвпада със средата на интервала, а дисперсията им е 25.

1.2 Решения на задачите от упражнение 14

Задача 1 Нека $X_i,\ i = 1, 2$ са съответно случайните величини: напрежение на пробив на диод произведен на i-тата машина. По условие $X_1 \in \mathcal{N}(100, 7^2),\ X_2 \in \mathcal{N}(90, 5^2)$. Нека $A, H_i,\ i = 1, 2$ са съответно събитията: случайно избран диод е годен, избраният диод е произведен от i-тата машина. Ще считаме, че $P(H_1) = P(H_2) = 0.5;\ X \in \mathcal{N}(0, 1)$ и търсим $P(A)$. Следователно $X_1 = 7X + 100,\ X_2 = 5X + 90$. По формулата за пълната вероятност

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{1}{2}[P(X_1 > 85) + P(X_2 > 85)]$$

$$\approx \frac{1}{2}[P(X > -2.142) + P(X > -1)] = \frac{1}{2}[2 - P(X \le -2.142) - P(X \le -1)]$$
$$= \frac{1}{2}[2 - F_X(-2.142) - F_X(-1)] = \frac{1}{2}[F_X(2.142) + F_X(1)] \approx 0.91255$$

Задача 2 Ако X е случайната величина - височина на прилива, то по условие $X \in \mathcal{N}(6,\ 1.5^2)$. При $Y \in \mathcal{N}(0, 1)$, то $X = \frac{3}{2}Y + 6$.
a) Ако A е събитието: при един прилив да настъпи наводнение, то $P(A) = P(X > 8) = P(Y > 1.33) = 1 - P(Y \le 1.33) = 1 - F_Y(1.33) \approx 0.0918$
b) Нека α е най-малката (ако съществува) височина на дигата така, че $P(X > \alpha) \le \frac{1}{200}$. Получаваме $\min\{\alpha|\ 1 - P(X \le \alpha) \le \frac{1}{200}\} = \min\{\alpha|\ P(X \le \alpha) \ge 0.995\} =$

$$= \{\alpha|\ P(X < \alpha) \le 0.995 \le P(X \le \alpha)\} \Longleftrightarrow 0.995 = F_X(\alpha) = F_Y\left(\frac{2}{3}(\alpha - 6)\right).$$

Понеже F_X е непрекъсната и строго монотонна, то квантилът α съществува и е единствен. Получаваме $\frac{2}{3}(\alpha - 6) \approx 2.58 \Longrightarrow \alpha = 9.87$

Задача 3 Ако $X \in \mathrm{Bi}(2000, \frac{3}{4})$, то по теорема 1.2 получаваме $P(1475 \le X \le 1535) \approx \Phi(\frac{1535-1500}{\sqrt{375}}) - \Phi(\frac{1475-1500}{\sqrt{375}}) = \Phi(1.8073) - \Phi(-1.2909) = \Phi(1.8073) + \Phi(1.2909) - 1 = 0.8664$

Задача 4 Нека $X_1, X_2 \in \mathcal{N}(\mu, 5^2)$ са независими, а търсеният интервал е $I = [\mu - a, \mu + a]$. Ако $Y \in \mathcal{N}(0, 1)$, то $X_i = 5Y + \mu,\ i = 1, 2$ и пресмятаме:

$$0.09 = \mathbf{P}(X_1 \in I, X_2 \in I) = \mathbf{P}(X_1 \in I)\mathbf{P}(X_2 \in I)$$
$$= \mathbf{P}^2(5Y + \mu \in I) = \mathbf{P}^2\left(-\frac{a}{5} \le Y \le \frac{a}{5}\right)$$
$$= \left(\Phi\left(\frac{a}{5}\right) - \Phi\left(-\frac{a}{5}\right)\right)^2 = \left(2\Phi\left(\frac{a}{5}\right) - 1\right)^2$$

$$\Phi\left(\frac{a}{5}\right) = 0.65 \Rightarrow \frac{a}{5} \approx 0.4 \Rightarrow a = 2.$$

Дължината на I е равна на $2a = 4$.