22. Полярност спрямо крива от втора степен.

В разширената равнина спрямо афинна координатна система е дадена неизродената крива от втора степен k с уравнението си

$$k: f(x, y, t) = 0,$$

където

$$f(x, y, t) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2.$$

От условието, че k е неизродена, то за коя да е точка M от равнината поне една от полупроизводните $f_i, i = 1, 2, 3$ на полинома f не се анулира, т.е.

$$f_1^2(M) + f_2^2(M) + f_3^2(M) \neq 0 \quad \forall M.$$

Следователно за неизродена крива за всяка точка M еднозначно е определена правата

$$g: f_1(M)x + f_2(M)y + f_3(M)t = 0.$$

Тази права наричаме поляра на M спрямо кривата k.

Ясно е (тема 20.), че когато точката M е от k, то g е допирателната на k в M, т.е. M е инцидентна с поляра-та си.

Хомогенните координати на правата g се определят еднозначно. Ако $g[a, b, c]$, то

$$(1)\quad \begin{aligned} a &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}t_0 \\ b &= a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}t_0 \\ c &= a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}t_0 \end{aligned} \quad , \text{ при } M(x_0, y_0, t_0)$$

Обратно, дадена права $g[a, b, c]$ еднозначно определя точката M. Нехомогенната система линейни уравнения (1) има единствено решение (ясно ненулево) (x_0, y_0, t_0), тъй като детерминантата ѝ Δ_k не е нула. Всяко друго решение на (1) е пропорционално на (x_0, y_0, t_0), т.е. е от вида $(\rho x_0, \rho y_0, \rho t_0)$, $\rho \neq 0$.

Така, еднозначно определената точка M се нарича полюс на правата g спрямо кривата от втора степен k.

22. 3.

Следователно неизродената крива k поражда еднозначно обратимо съответствие ψ между точките и правите в разширената равнина, което се нарича полярност спрямо k или полярна корелация, зададена от k.

ψ се дефинира както следва:

$$\psi : M_0(x_0, y_0, t_0) \longrightarrow g_0[f_1(M_0), f_2(M_0), f_3(M_0)]$$

$$g_1[a, b, c] \longrightarrow M_1(x_1, y_1, t_1),$$

където $a = f_1(M_1)$, $b = f_2(M_1)$, $c = f_3(M_1)$.

От дефиницията непосредствено получаваме, че за всяка точка M_0 имаме $\psi(M_0) = g_0$, $\psi(g_0) = M_0$, т.е. $\psi(\psi(M_0)) = M_0$, което записваме $\psi^2(M_0) = M_0$. Следователно ψ^2 е идентитетът в равнината.

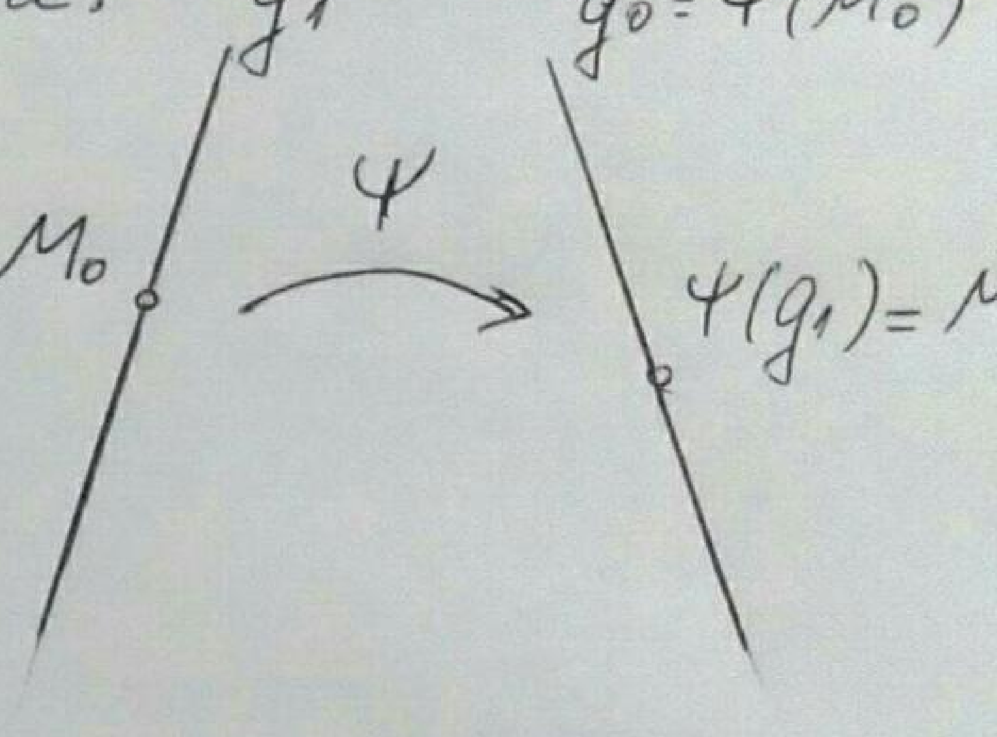
Записано подробно имаме

$$M_0 \xrightarrow{\psi} g_0 \rightarrow M_0 \quad \forall M_0$$

$$g_1 \xrightarrow{\psi} M_1 \rightarrow g_1 \quad \forall g_1.$$

Ясно е, че полярността ψ запазва инцидентността.

Имаме, че инцидентни точка и права при ψ се изобразяват съответно в инцидентни права и точка.



$M_0 \in g_1 \iff$

$f_1(M_1) x_0 + f_2(M_1) y_0 + f_3(M_1) t_0 = 0.$

От тъждествата на Ойлер имаме

$f_1(M_1) x_0 + f_2(M_1) y_0 + f_3(M_1) t_0 =$

$= f_1(M_0) x_1 + f_2(M_0) y_1 + f_3(M_0) t_1$

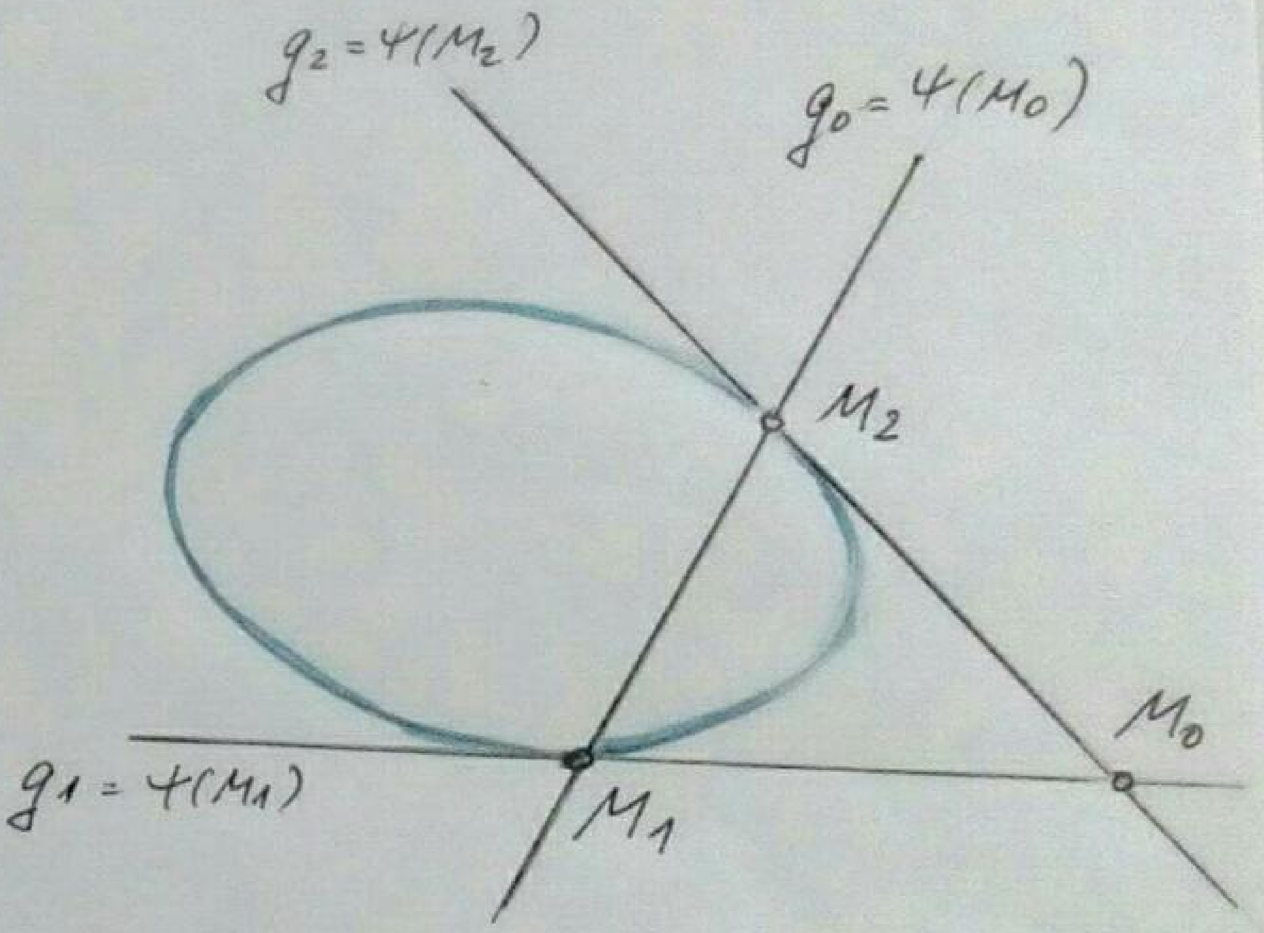
Следователно $M_0 \in g_1$ точно тогава, когато $M_1 \in g_0$. Казано с думи точката M_0 лежи на полярата на M_1, точно тогава, когато M_1 лежи на полярата на M_0.

Това специално отношение между M_0 и M_1 отразяваме в следната дефиниция: Точките M_0 и M_1 наричаме спрегнати спрямо k, ако $M_0 \in \psi(M_1)$ (следователно $\psi(M_0) \in M_1$), където ψ е полярността, породена от k.

Аналогично, правите g_0 и g_1 наричаме спрегнати спрямо k, ако коя да е от тях минава през полюса на другата – $g_0 \in 4(g_1)$ ($\Leftrightarrow g_1 \in 4(g_0)$).

Аналитично условие за спрегнати точки M_0 и M_1 е

$$f(M_0, M_1) = 0.$$



Нека $M_0 \notin k$ и $g_0 = 4(M_0)$ е полярата на M_0 спрямо k, като g_0 пресича k в различните точки M_1 и M_2. Тогава за полярите им $g_i = 4(M_i)$, $i=1,2$ имаме уравненията

$$g_i : f_1(M_i).x + f_2(M_i).y + f_3(M_i)t = 0$$

От това, че M_i са точки от k следва, че полярите им g_i са тангентите на k съответно в точките M_i

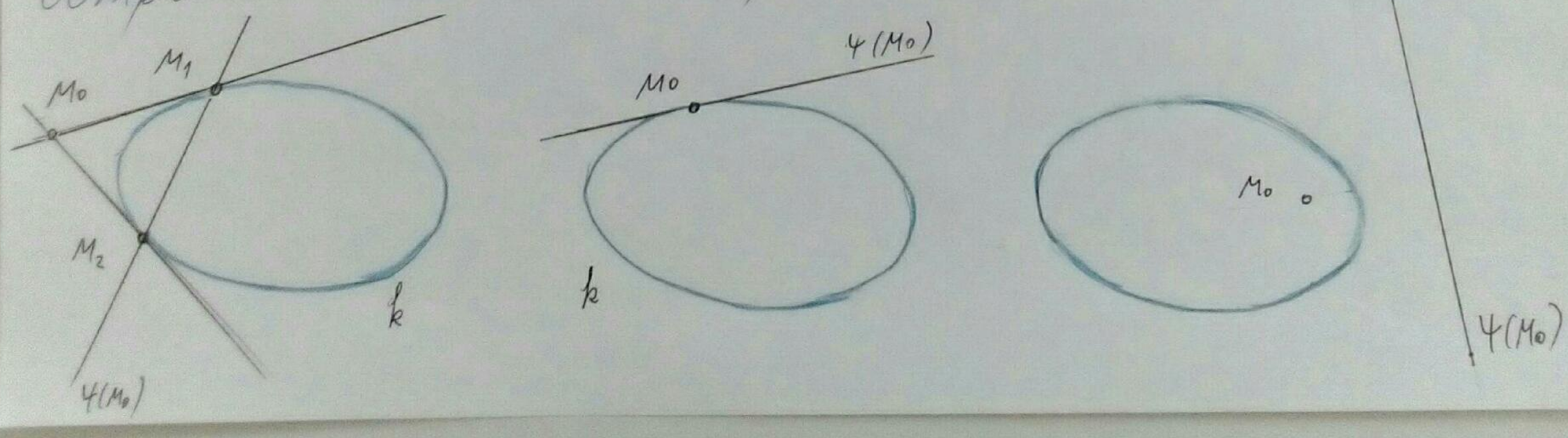
От $M_1 \in g_0$ следва, че M_1 и M_0 са спрегнати. Следователно M_1 лежи на полярата на M_0 спрямо k, т.е. $f(M_0, M_1) = 0$. Също така, от $M_2 \in g_0 \Rightarrow M_2$ и M_0 са спрегнати $\Rightarrow M_2 \in 4(M_0)$. и $f(M_0, M_2) = 0$

Следователно тангентите g_1 и g_2 към k, съответно в точките M_1 и M_2, се пресичат в точката M_0.

Обратно, ако M_1 и M_2 са две различни точки от k, то полярите им, които се явяват тангенти към k се пресичат в точка M_0, която е полюс на правата M_1M_2.

За неизродена крива от втора степен казваме, че точка M е външна за k, ако полярата ѝ $\varphi(M)$ пресича k в две различни точки. Казваме, че M е вътрешна за k, ако полярата ѝ $\varphi(M)$ е външна за k.

Следователно, през външна за k точка има точно две тангенти към k. През точка от k има единствена тангента, а през вътрешна за k точка няма реални тангенти.



22.[2] Афинни свойства на кривите от втора степен. 22.7.

Безкрайни точки на крива от втора степен.

Нека k в разширената равнина е с уравнение

(1) $f(x,y,t) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0$

Изследваме взаимното положение на безкрайната права ω с k.

$k \cap \omega = ?$. От уравнението на ω: $\omega: t=0$, то общите за k точки ще удовлетворяват уравнението на k и уравнението на ω

Ако в (1) коефициентите a_{11}, a_{12} и a_{22} са едновременно нули, т.е. $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, то k е с уравнение

$$k: t(a_{13}x + a_{23}y + a_{33}t) = 0,$$

където поне един от коефициентите a_{13}, a_{23}, a_{33} е различен от нула. От горното уравнение заключаваме, че безкрайната права е образуваща за кривата k.

Нека, оттук нататък считаме, че k не съдържа безкрайната права. Следователно поне един от коефициентите a_{11}, a_{12}, a_{22} е различен от нула.

Ако $\omega \cap k = U(\lambda, \mu, 0)$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, то имаме

$$(2) \quad a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda\mu + a_{22}\mu^2 = 0$$

Без ограничение на общността считаме, че $\mu \neq 0$. Тогава от (2) получаваме за $s = \frac{\lambda}{\mu}$ квадратното уравнение

$$(3) \quad a_{11}.s^2 + 2a_{12}s + a_{22} = 0,$$

Дискриминантата на това уравнение е

$$(4) \quad D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

Така, от това дали тази дискриминанта е положителна, отрицателна или нула, различаваме следните типове криви:

1. При $D > 0$ уравнението (3) има два различни реални корена s_1 и s_2, на които съответстват две различни безкрайни точки, инцидентни с k. В този случай кривата k се нарича крива от хиперболичен тип.

2. При $D < 0$ квадратното уравнение (3) няма реални корени (има два комплексно спрегнати корена). Така, k няма безкрайни точки и в този случай я наричаме крива от елиптичен тип.

3. При $D = 0$ уравнението (3) има единствен реален корен на който съответства единствена безкрайна точка от кривата k. В този случай кривата се нарича да е от параболичен тип

22.10.

Примери.

1. $\chi: b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$; $\omega \cap \chi = U(\lambda, \mu, 0)$, $t = 0 \Rightarrow$

$b^2x^2 - a^2y^2 = 0 \Rightarrow (bx - ay)(bx + ay) = 0 \Rightarrow$

$U_1(a, b, 0)$ и $U_2(a, -b, 0)$, както се очаква хиперболата χ има две безкрайни точки. За дискриминантата имаме

$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - (b^2 \cdot (-a^2b^2)) = a^2b^4 > 0$

2. $k_1: x^2 - y^2 = 0$. Кривата k_1 е изродена крива от втора степен. Разпада се на двойката пресичащи се прави $l_1: x - y = 0$ $l_2: x + y = 0$. Дискриминантата ѝ е

$D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0 - (1 \cdot (-1)) = 1 > 0$. Следователно k_1 е от хиперболичен тип. В случая лесно се забелязва, че безкрайните точки на k_1 са с координати - $U_1(1, 1, 0)$ и $U_2(1, -1, 0)$.

22.11

3. $\mathcal{E}: b^2x^2 + a^2x^2 - a^2b^2t^2 = 0$, $a > b > 0$

Дискриминантата на елипсата е $D = 0 - b^2 \cdot a^2 < 0$

така че... $\mathcal{E}$ е от елиптичен тип.

4. $k_2: \ a^2x^2 + y^2 = 0$ е с $\Delta_k = \begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^2 \cdot 1 \cdot 0 + \dots = 0$

т.е. разпадаща се, изродена крива от втора степен.

Дискриминантата D е $D = 0 - a \cdot 1 = -a < 0 \Rightarrow k_2$ е от елиптичен тип.

5. Параболата $y^2 - 2pxt = 0$ е с $D = 0 - 0 \cdot 1 = 0$ е... от параболичен тип.

6. $k_3: \ x^2 - c^2t^2 = 0$, $D = 0 - 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow k_3$ е от параболичен тип

Ако $c \neq 0$, то k_3 се разпада на две успоредни, в неразширената равнина прави и * При $c = 0$ имаме двойка съвпадащи прави * и