Задача на Коши за линейни диференциални уравнения от първи ред

Текстовете са от: Т. Генчев, Обикновени диференциални уравнения, Университетско издателство „Св. Кл.имент Охридски“, София, 1991 г.

Уравненията от вида

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{1}$$

където a и b са функции, дефинирани и непрекъснати в някакъв интервал (α, β), се наричат линейни.

Теорема. През всяка точка на ивицата

$$D: \begin{array}{l} \alpha < x < \beta, \\ -\infty < y < +\infty \end{array}$$

минава точно едно решение на (1). Всички решения на (1) са дефинирани в целия интервал (α, β).

С други думи, ако $x_0 \in (\alpha, \beta)$, то задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = a(x)\, y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

има единствено решение и то е дефинирано в целия интервал (α, β).

Доказателство. Част 1.

За да докажем теоремата, ще напишем уравнението (1) във вида

(2) $$y' - a(x)y = b(x)$$

и ще забележим, че за всяко $y \in C^1(\alpha, \beta)$ имаме

(3) $$\left(e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} y(x)\right)' = e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}\left(y'(x) - a(x)y(x)\right).$$

Следователно, като умножим (2) с $e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$, след едно интегриране получаваме

$$e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} b(t) e^{-\int_{x_0}^{t} a(s)ds} dt$$

т.е.

(5) $$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t) e^{-\int_{x_0}^{t} a(s)ds} dt\right),$$

Част 2. Проверка, че (5) дава решение на задачата на Коши.

Уравнения на Бернули

6.1. Диференциални уравнения от вида

$$y' = a(x)y + b(x)y^m, \tag{1}$$

където a и b са функции, дефинирани и непрекъснати в някакъв интервал (α, β), а $m \neq 0, 1$, се наричат *уравнения на Бернули*. Ако $m = 0$, уравнението (1) се превръща в линейно, а при $m = 1$ се получава уравнение с разделящи се променливи. Оказва се, че решенията на (1), които не се анулират в (α, β), се намират просто. Наистина нека y е такова решение. Като разделим (1) с y^m, намираме

$$\frac{y'}{y^m} = a(x)y^{1-m} + b(x). \tag{2}$$

Да положим $z = y^{1-m}$. Понеже $z' = (1-m)y'y^{-m}$, замествайки в (2), получаваме линейното уравнение

$$\frac{z'}{1-m} = a(x)z + b(x), \tag{3}$$

което е вече изследвано. Остава ни да се върнем към старата променлива.

З а б е л е ж к а 1. Направените разисквания показват, че задачата на Коши за (1) с начално условие $y(x_0) = y_0 > 0$ винаги притежава единствено решение. Случаят $y_0 \leqq 0$ е по-деликатен и там възникват различни възможности. Например, ако m е ирационално число и $y_0 < 0$, тази задача очевидно няма решение, защото функцията $t \longrightarrow t^m$ е дефинирана само за положителни стойности на t.

Уравнения на Рикати

6.2. Уравненията от вида

$$(4) \qquad y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

където a, b и c са функции, дефинирани и непрекъснати в даден интервал (α, β), се наричат *уравнения на Рикати.*

Доказано е, че уравненията на Рикати (освен в специални случаи) не се интегрират с помощта на квадратури. Вярна е обаче следната елементарна

Теорема 1. Ако познаваме едно решение y_0 на (4), то в неговия дефиниционен интервал всички останали решения се намират с помощта на квадратури.

Доказателство. Нека y е друго решение на (4). Да положим $z = y - y_0$. Като извадим уравненията (4) и

$$(5) \qquad y_0' = a(x)y_0^2 + b(x)y_0 + c(x),$$

намираме

$$z' = a(x)(y^2 - y_0^2) + b(x)z = a(x)z(z + 2y_0) + b(x)z,$$

т.е.

$$z' = a(x)z^2 + (2y_0(x)a(x) + b(x))z,$$

което е уравнение на Бернули.

Уравнения, произхождащи от пълни диференциали

Ако f е непрекъсната в някаква област $D \subset \mathbf{R}^2$, диференциалното уравнение

$$y' = f(x, y)$$

отговаря на поле от прави, което не съдържа права, успоредна на оста y. Различни въпроси обаче водят до уравнения от вида

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{1}$$

в които знаменателят $Q(x, y)$ може да се анулира в отделни точки, т.е. полето, което съответствува на (1), съдържа прави, успоредни на оста y. Ако $Q(x_0, y_0) = 0$, а $P(x_0, y_0) \neq 0$, възникващото затруднение се преодолява моментално: в достатъчно малка околност на (x_0, y_0) заменяме (1) с еквивалентното му уравнение

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \tag{2}$$

(Ако $x = x(y)$ е решение на (2), обратната функция $y = y(x)$ (ако съществува) удовлетворява (1).) От тази гледна точка симетричното представяне

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{3}$$

е за предпочитане. Най-важната причина обаче, поради която уравненията (3) традиционно се разглеждат, е тяхната простота, когато $Pdx + Qdy$ е пълен диференциал.

Теорема 1. Нека P и Q са дефинирани и непрекъснати в някаква околност Ω на точката (x_0, y_0) и $P^2(x_0, y_0)+Q^2(x_0, y_0) \neq 0$. Нека освен това диференциалната форма $Pdx + Qdy$ е пълен диференциал, т.е. съществува функция F, дефинирана в Ω и такава, че

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q, \qquad (x, y) \in \Omega. \tag{4}$$

При тези предположения през точката (x_0, y_0) минава единствено решение на (3) и то се получава, като решим уравнението

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) \tag{5}$$

или спрямо x, или спрямо y в зависимост от това, коя от функциите P и Q е различна от нула.

Доказателство. Да предположим за определеност, че $Q(x_0, y_0) \neq 0$. Съгласно казаното по-горе ще интерпретираме (3) като

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0, \tag{6}$$

което заедно с (4) ни дава

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)y' = 0. \tag{7}$$