$e_1, \dots, e_n$ — базис; $v_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j$; f — ПЛАФ

$$f(v_1, \dots, v_n) = \underbrace{\left[\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sign} \sigma)\, \lambda_{1\sigma(1)} \cdots \lambda_{n\sigma(n)}\right]}_{\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} f(e_1, \dots, e_n)$$

$\lambda_i = (\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{in})$

$\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — единственная ПЛАФ-я норм. ф.-я

$\Lambda = (\lambda_{ij})$ $\qquad \det \Lambda = \phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$\det \Lambda = \det \Lambda^t$

Свойства на детерминантите

<u>Зад.</u> Ще ги формулираме за редове на матр., но те ще бъдат верни и за стълбове ($\det A^t = \det A$)

$A = (a_{ij})$, $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $b_i = (b_{1i}, \dots, b_{ni})$

$\phi(a_1, \dots, a_n) = \det A = \det A^t = \phi(b_1, \dots, b_n)$

1) Ако ред на матрица е сума на 2 реда, то детерминантата на матр. е сума от детерм., които се получават, като заменим този ред със събираемите

$$\begin{vmatrix} 1+3 & 2+4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

2) Ако умн. с число ред на матр., то детерм. й се умножава с това число

$$\begin{vmatrix} 5.1 & 5.2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Зад. $5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.1 & 5.2 \\ 5.3 & 5.4 \end{pmatrix}$, $5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5.1 & 5.2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5.3 & 5.4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5.1 & 2 \\ 5.3 & 4 \end{vmatrix} = \ldots$$

<u>Док.</u> 1/ и 2/ следват от полилинейност

3) Ако разменим 2 реда на матр., то детерм. ѝ си сменя знака

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

4) Ако в една матр. има 2 еднакви реда, то детерм. ѝ е $\underline{0}$

<u>Док.</u> $\underline{3}$ и 4 следват от антисиметр.

5) Ако към ред на матр. добавим друг ред умножен с число, детерминантата не се променя

<u>Д-во</u> Нека към $i^{ти}$ ред сме добавили $j^{ти}$ умн. с λ

Има промяна в $i^{ти}$ ред и той е $a_i + \lambda a_j$

детерм. на новата матр. е

$$\varphi(a_1, \dots, \underset{i}{a_i + \lambda a_j}, \dots, a_n) \overset{\text{ПЛФ}}{=} \underbrace{\varphi(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}_{= \det A} + \lambda \underbrace{\varphi(a_1, \dots, \overset{i \neq j}{a_j}, \dots, a_n)}_{\overset{\text{АСФ}}{=} 0}$$

$$= \det A$$

6) Ако матр. има нулев, то детерм. ѝ е $\underline{\underline{0}}$

$$\det A = \phi(a_1, \ldots, \underset{\substack{\parallel \\ (0,0,\ldots,0) = 0.(0,\ldots,0) = 0.\theta}}{\theta}, \ldots a_n) \overset{\text{ПЛФ}}{=} 0.\phi(a_1, \ldots, \theta, \ldots a_n) = 0$$

(следва и от $2^{\text{ро}}$ св-во)

7) Ако матр. има 2 пропорционални реди, то детерм. ѝ е $\underline{\underline{0}}$

(Нека $a_i = \lambda a_j$ $(i \neq j)$)

$$\phi(a_1 \ldots \underbrace{\lambda a_j}_{\uparrow i}, \ldots a_n) \underset{2)}{\overset{\text{ПЛФ}}{=}} \lambda\,\phi(a_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i \neq j}}{a_j}, \ldots a_n) \underset{4)}{\overset{\text{АСФ}}{=}} \lambda . 0 = 0$$

8) Ако един ред е ЛК на останалите, то детерм. на матр. е 0 ($\Leftarrow$) ако редовете на матр. са ЛЗ, то детерм. ѝ е $\underline{\underline{0}}$)

<u>Д-во</u> б.о.о. $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i$

$$\det A = \varphi\left(a_1, \dots, a_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i\right) \overset{\text{ПЛФ}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot \varphi(a_1, \dots, a_{n-1}, a_i) \underset{4)}{\overset{\text{АСФ}}{=}} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot 0 = 0$$

9) $\det E_n = 1$ (от нормировки φ)

<u>ТВ.</u>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

<u>Д-во</u>

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sign} \sigma)\, a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \qquad \Bigg|\; \begin{matrix} a_{ij} = 0 \\ \forall i > j \end{matrix}$$

$a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$, ако $\exists i : i > \sigma(i)$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sign} \sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$\forall i \quad i \leq \sigma(i)$

$i = n \qquad n \leq \sigma(n) \Rightarrow \sigma(n) = n$

$i = n-1 \qquad n-1 \leq \sigma(n-1) \Rightarrow \sigma(n-1) = n-1, n \Rightarrow \sigma(n-1) = n-1$

$\ldots$

$\Rightarrow \forall i \quad \sigma(i) = i$, i.e. $\sigma = id$

$$\det A = (\operatorname{sign} id)\, a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Зад. елем. преобр. $\to 2, 3, 5$

$$A \xrightarrow[p \cdot n]{\text{ЕП}} \underbrace{\begin{pmatrix} \ddots & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}}_{n}$$

Ако има —, то ще има нулев ред накрая

$$= \begin{pmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ГТ}} \text{горен} \det \quad = A'$$

$$\begin{pmatrix} & & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \to \det = 0$$

$$\det A = \underset{\substack{\uparrow \\ 3}}{\pm} \left(\text{произв. на } \underset{\substack{\uparrow \\ 2}}{\text{числа}} \right) \cdot \det A'$$

Зад. В формулата за детерм. има $n!$ събираеми

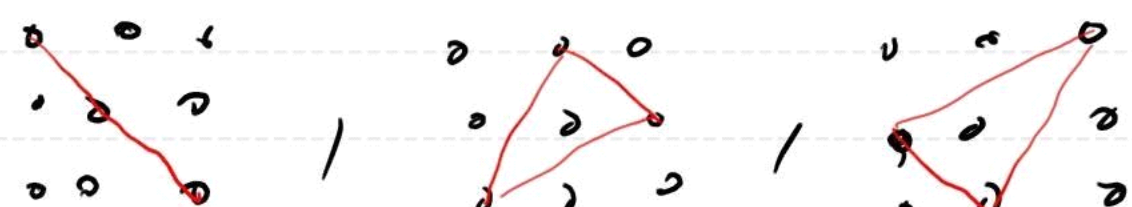
Зад. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \operatorname{sign}\sigma = -1$$

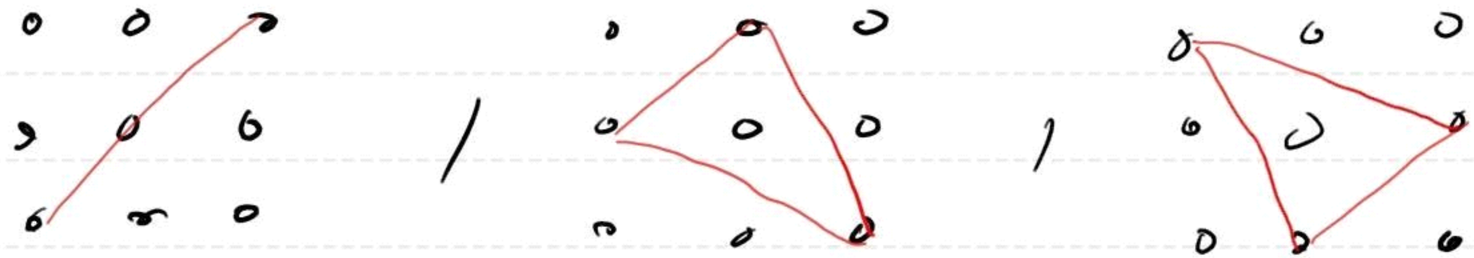
Зад. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

123	− 0	+
132	− 1	−
213	− 1	−
231	− 2	+
312	− 2	+
321	− 3	−

$+$



–



Зад. $n = 4 \rightarrow 24$ събираеми

ТВ $\det A = 0 \Leftrightarrow$ редовете (стълбовете) ѝ са ЛЗ

Д-во $(\Leftarrow)$ знаем – св-во 8

$(\Rightarrow)$ Нека ред. ѝ са ЛН $\Rightarrow$ те са базис на F^n $\quad (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$(e_1, \dots, e_n$ – станд. базис на $F^n)$

Нека $\quad e_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} a_j \quad$ за $i = 1, \dots, n$

$$\underset{\overset{\|}{\det E_n = 1}}{\Phi(e_1,\dots,e_n)} = \det \Lambda \cdot \Phi(a_1,\dots,a_n) =$$

$$= \det \Lambda \cdot \underbrace{\det A}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow 1 = 0 \text{ ⇒⇐}$$

$\Rightarrow a_1,\dots,a_n$ – ЛЗ

<u>Сл.</u> $\det A = 0 \Leftrightarrow$ един ред (стълб) е ЛК на останалите

<u>Сл.</u> $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ ред. (ст.) и са ЛН

$\Leftrightarrow$ ред. (ст.) и са базис на F^n

Адюнгирани количества и развитие на детерминанта по ред / стълб

Опр. $A \in M_n(F)$; $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$\Delta_{ij} := \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

поддетерминанта на A, съответстваща на a_{ij}

(получава се като детерм. на матрицата, получена от A след зачеркване на i-и ред и j-и стълб)

$A_{ij} := (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ — адюнгирано количество, съответстващо на a_{ij}

<u>Тв</u> $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$

$(\forall i = 1 \dots n)$ $\qquad$ $(\forall j = 1 \dots n)$

развитие по i-и ред $\qquad$ развитие по j-и стълб

<u>Заб.</u> • Може да се използва и за дефиниция на детерм.

• може да сметнем рекурсивно детерм. — Пресмятането на $\det A$ (от n-и ред) се свежда до пресмятането на $\underline{n}$ детерм. от $(n-1)$-и ред

Д-во $f(A) = f(\underbrace{b_1 \ldots b_n}_{\text{ст. на } A}) = (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$

Ще пок., че f е ПЛА и кософ. ф-я. Ще следва, че $f = \Phi$ (Φ е единствена такава ф-я) и

$f(b_1 \ldots b_n) = \Phi(b_1 \ldots b_n) = \det A$

1) f е ПЛΦ; $k \in \{1 \ldots n\}$ $\quad b_k = \alpha b_k' + \beta b_k''$

A — със ст. $b_1 \ldots b_n$; a_{ij}, A_{ij}, Δ_{ij}

A' — със ст. $b_1 \ldots b_k' \ldots b_n$; a_{ij}', A_{ij}', Δ_{ij}'

A'' — със ст. $b_1 \ldots b_k'', \ldots, b_n$; a_{ij}'', A_{ij}'', Δ_{ij}''

- за $i = 1 \ldots n$
  - $j \neq k$ $\quad a_{ij} = a'_{ij} = a''_{ij}$
  - $a_{ik} = \alpha a'_{ik} + \beta a''_{ik}$

- за $i = 1 \ldots n$
  - $j \neq k$ $\quad \Delta_{ij} = \alpha \Delta'_{ij} + \beta \Delta''_{ij}$
  - $j = k$ $\quad \Delta_{ij} = \Delta'_{ik} = \Delta''_{ik}$

$$d(b_1, \ldots, b_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} =$$

$$= \sum_{j \neq k} (-1)^{i+j} a_{ij} \left(\alpha \Delta'_{ij} + \beta \Delta''_{ij} \right) + (-1)^{i+k} \left(\underbrace{\alpha a'_{ik} + \beta a''_{ik}}_{a_{ik}} \right) \underbrace{\Delta_{ik}}_{\Delta'_{ik}, \Delta''_{ik}}$$

$$= \alpha \sum_{j \neq k} (-1)^{i+k} a_{ij} \Delta'_{ij} + \alpha (-1)^{i+k} a'_{ik} \Delta'_{ik} +$$

$$\alpha \sum_{j \neq k} (-1)^{i+k} a_{ij} \Delta''_{ij} + \alpha (-1)^{i+k} a''_{ik} \Delta''_{ik} =$$

$$= \alpha f(b_1, \dots, b'_k, \dots, b_n) + \beta f(b_1, \dots, b''_k, \dots, b_n)$$

2/ f е $AC\Phi$

Ще докажем, че $\forall \underline{k} = 1, \dots, n-1$, ако $\underline{b_k = b_{k+1}}$, то $f(b_1, \dots, b_n) = 0$

$$f(b_1, \dots, b_n) = (-1)^{i+k} a_{ik} \Delta_{ik} + (-1)^{i+k+1} a_{i,k+1} \Delta_{i,k+1} = 0$$

$$(a_{ik} = a_{i,k+1} = 0 \text{ и } \Delta_{i,k} = \Delta_{i,k+1})$$

3) f е нормирана

$e_1, \dots, e_n$ - станд. базис ; $e_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{ni})$ $(i = \overline{1,n})$

$$f(e_1, \dots, e_n) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \Delta_{ij} \cdot (-1)^{i+j} =$$

$$= \underbrace{\delta_{ii}}_{=1} \Delta_{ii} \underbrace{(-1)^{i+i}}_{=1} = \Delta_{ii} = \det E_{n-1} = 1$$

<u>Зад.</u> $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ следва чрез транспониране

<u>Сл.</u> (Фалшиво развиване)

1) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \delta_{jk} \cdot \det A$; 2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \delta_{ik} \cdot \det A$

Д-во $j = k$ — ясно — развитие по ред/с.

$j \neq k$ $\quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik}$ — разложено по $k^{\text{и}}$

Стълб на детерм. на матр., която се получава от матр. A, като на място на $k^{\text{ш}}$ и стълб сме сложили $j^{\text{ш}}$ — матр. с 2 еднакви стълба
$\Rightarrow$ детерм. ѝ е 0

$$A' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & a_{1j} & \\ & \vdots & \\ & a_{nj} & \end{pmatrix} \\ k \end{array} \to \det = 0$$

$$\Delta_{ik} = \Delta'_{ik} \to A_{ik} = A'_{ik}$$