Редове на Фурие II

Сега ще разгледаме периодични функции с произволен период

1. Нека функцията $f(x)$ е периодична функция с период $2l$. Нека $f(x)$ е интегруема в $[-l;l]$. Да разгледаме числата

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \text{ и } b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n=0,1,2,\dots .$$

Ред от вида

$$\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l})+(a_2\cos\frac{2\pi x}{l}+b_2\sin\frac{2\pi x}{l})+(a_3\cos\frac{3\pi x}{l}+b_3\sin\frac{3\pi x}{l})+\dots$$

се нарича **ред на Фурие на функцията $f(x)$.**

2. Функцията $f(x)$ се нарича **частично непрекъсната в $[a;b]$**, ако тя е непрекъсната във всяка точка от интервала **с изключение на краен брой точки** и в точките на прекъсване има лява и дясна граница.

Функцията $f(x)$ се нарича **частично гладка,** ако $f(x)$ и $f'(x)$ са частично непрекъснати.

3. **Теорема на Дирихле.** Ако функцията $f(x)$ е дефинирана и периодична с период $2l$ и частично гладка в $[-l;l]$, то редът на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ и в точките, в които $f(x)$ е непрекъсната, е в сила равенството:

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l})+(a_2\cos\frac{2\pi x}{l}+b_2\sin\frac{2\pi x}{l})+(a_3\cos\frac{3\pi x}{l}+b_3\sin\frac{3\pi x}{l})+\dots .$$

Ако в точката x_0 функцията е прекъсната, е в сила

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)+\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)\right)=\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos\frac{\pi x_0}{l}+b_1\sin\frac{\pi x_0}{l})+(a_2\cos\frac{2\pi x_0}{l}+b_2\sin\frac{2\pi x_0}{l})+\dots$$

4. (Равенство на Парсевал). Ако функцията $f^2(x)$ е интегруема в интервала $[-l;l]$, $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ и $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$, $n=0,1,2,\dots$. е в сила:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx .$$

5. Ще припомним някои прости задачи, които се използват при развиване на функции в редове на Фурие.

*Ако $f(x)$ е дефинирана в $\mathbb{R}$, периодична с период ω и интегруема във всеки краен и затворен интервал са в села равенствата:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a+\omega}^{b+\omega} f(x)dx \qquad \text{и} \qquad \int_{0}^{\omega} f(x)dx=\int_{a}^{a+\omega} f(x)dx .$$

** Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и интегруема в $[-a;a]$

– ако функцията е четна

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(x)dx \qquad \text{и} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

– ако функцията е нечетна

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx \text{ и } \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

*** Нека n и m са естествени числа. Тогава

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx = 0 \quad \text{при } n \neq m \quad \text{и} \quad \int_{-l}^{l} \sin^2\frac{n\pi x}{l}dx = l$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx = 0 \quad \text{при } n \neq m \quad \text{и} \quad \int_{-l}^{l} \cos^2\frac{n\pi x}{l}dx = l$$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx = 0.$$

Докажете сами тези равенства.

6. Ако функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $(0;l)$.

– Развитие на функцията по косинуси

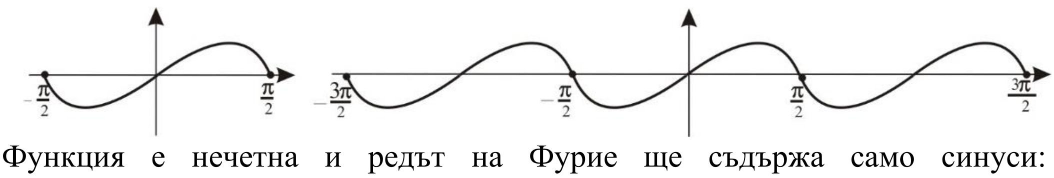
Можем да дефинираме $f(x)$ в интервала $(-l;0)$ с помощта на равенството $f(x) = f(-x)$ и след това да продължим тази функция като периодична функция с помощта на равенството $f(x) = f(x+2l)$. Така получената функция ще бъде четна и редът на Фурие ще съдържа само косинуси.

– Развитие на функцията по синуси

Можем да дефинираме $f(x)$ в интервала $(-l;0)$ с помощта на равенството $f(x) = -f(-x)$ и след това да продължим тази функция като периодична функция с помощта на равенството $f(x) = f(x+2l)$. Така получената функция ще бъде нечетна и редът на Фурие ще съдържа само синуси.

Задача 1. Да се разложи функцията $f(x) = x\cos x$ в интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Да продължим тази функция като периодична функция с период $2l = \pi$ с помощта на равенството $f(x+\pi) = f(x)$. Така получената функция е гладка навсякъде. (Покажете, че функцията е диференцуема в точките $(2k+1)\frac{\pi}{2}$.) Следователно можем да приложим теоремата на Дирихле.



Функция е нечетна и редът на Фурие ще съдържа само синуси: т.е. $a_n = \frac{1}{l}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 0$.

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\sin\left(2\frac{n\pi x}{\pi}\right)dx = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\sin 2nx dx =$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x[\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x]dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x[\sin(2n+1)x]dx+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x[\sin(2n-1)x]dx.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2n-1)xdx=-\frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\cos(2n-1)x=$$

$$=-\frac{1}{2n-1}x\cos(2n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2n-1)xdx= \qquad (\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}=0)$$

$$=\frac{1}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{(2n-1)^2}\sin[(2n-1)\frac{\pi}{2}]=\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$$

и $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2n+1)xdx=\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

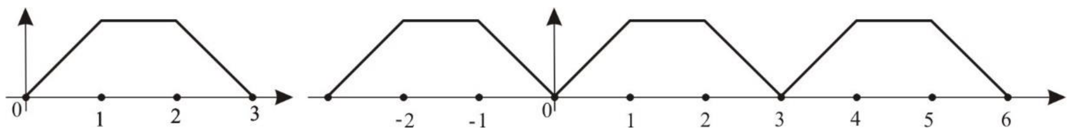
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x[\sin(2n+1)x]dx+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x[\sin(2n-1)x]dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+2}}{(2n+1)^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\right)=\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)^2}[(2n+1)^2-(2n-1)^2]=\frac{16(-1)^{n+1}n}{\pi(4n^2-1)^2}.$$

Така получихме $\displaystyle f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$.

Задача 2. Да се разложи в ред на Фурие функцията $f(x)=\begin{cases} x & \text{при } 0\le x\le 1 \\ 1 & \text{при } 1<x<2 \\ 3-x & \text{при } 2\le x\le 3 \end{cases}$.

Решение. Да продължим тази функция като периодична функция с период $2l=3$ с помощта на равенството $f(x+3)=f(x)$. Така получената функция е гладка навсякъде с изключение на целочислените точките. Следователно можем да приложим теоремата на Дирихле.



Тази функция е четна (вж. графиката) и следователно коефициентите $b_n=0$.

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\cos\frac{2}{3}\pi nxdx=\frac{4}{3}\int_0^1 x\cos\frac{2}{3}\pi nxdx+\frac{4}{3}\int_1^{\frac{3}{2}} 1.\cos\frac{2}{3}\pi nxdx$$

.

При $n=0$ имаме

$$a_0=\frac{4}{3}\int_0^1 x\cos\frac{2}{3}\pi 0xdx+\frac{4}{3}\int_1^{\frac{3}{2}} 1.\cos\frac{2}{3}\pi 0xdx=\frac{4}{3}.\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\frac{4}{3}.\frac{1}{2}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

При $n\in\mathbb{N}$ имаме

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{4}{3}\int_{0}^{\frac{3}{2}} f(x)\cos\frac{2\pi nx}{3}dx=\frac{4}{3}\left(\int_0^1 x\cos\frac{2\pi nx}{3}dx+\int_1^{\frac{3}{2}}1.\cos\frac{2\pi nx}{3}dx\right)$$

$$\int_0^1 x\cos\frac{2\pi nx}{3}dx=\frac{3}{2n\pi}\int_0^1 xd\sin\frac{2\pi nx}{3}=\frac{3}{2n\pi}x\sin\frac{2\pi nx}{3}\Big|_0^1-\frac{3}{2n\pi}\int_0^1\sin\frac{2\pi nx}{3}dx=$$

$$=\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2}{3}\pi n+\left(\frac{3}{2n\pi}\right)^2\cos\frac{2\pi nx}{3}\Big|_0^1=\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2}{3}\pi n+\left(\frac{3}{2n\pi}\right)^2\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{2\pi nx}{3}-1\right)$$

и $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}}\cos\frac{2\pi nx}{3}dx=\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2\pi nx}{3}\Big|_1^{\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2\pi n}{3}$.

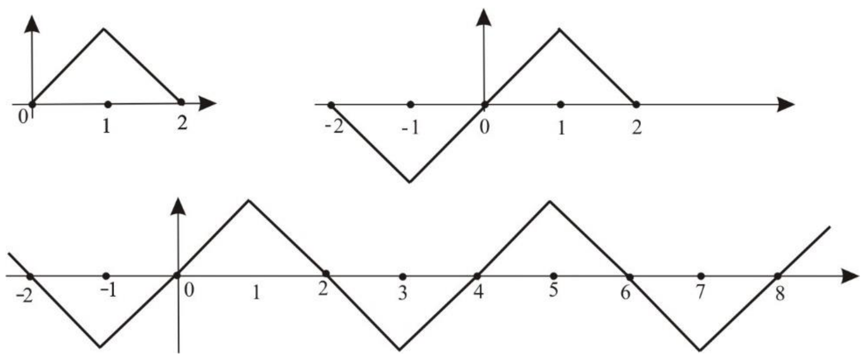
Така получихме

$$a_n=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2}{3}\pi n+\left(\frac{3}{2n\pi}\right)^2\left(\cos\frac{2\pi nx}{3}-1\right)-\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2}{3}\pi n\right)=\frac{3}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2\pi nx}{3}-1\right) \text{ и}$$

$$f(x)=\frac{2}{3}+\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{2\pi nx}{3}-1\right)\cos\frac{2\pi nx}{3}.$$

Задача 3. Да се разложи в ред на Фурие, съдържащ само синуси, функцията $f(x)=\begin{cases}x & \text{при } 0\le x\le 1\\ 2-x & \text{при } 1<x<2\end{cases}$.

Решение. Да продължим тази функция първо като нечетна функция в интервала $[-2;0]$ с помощта на равенството $f(x)=-f(-x)$, а след това като периодична функция с период $2l=4 \quad\Rightarrow\quad l=2$ (вж. графиката).



Така получената функция е частично гладка (производната ѝ е непрекъсната с изключение на нечетните числа). Следователно можем да приложим теоремата на Дирихле.

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\int_0^1 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx.$$

В интеграла $\displaystyle\int_1^2(2-x)\sin\frac{\pi nx}{2}dx$ да направим смяна на променливите $2-x=t$:

$$\int_1^2 (2-x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx = -\int_1^0 t\sin\frac{\pi n(2-t)}{2}dt = \int_0^1 t\sin\left(\pi n - \frac{\pi n t}{2}\right)dt = \int_0^1 x\sin\left(\pi n - \frac{\pi n x}{2}\right)dx =$$

$$= \int_0^1 x\sin\left(\pi n - \frac{\pi n x}{2}\right)dx = \begin{cases} \int_0^1 x\sin\left(\pi.2k - \frac{\pi 2kx}{2}\right)dx = \int_0^1 x\sin(-\pi kx)dx = -\int_0^1 x\sin\pi kx dx & \text{при } n=2k \\ \int_0^1 x\sin\left(\pi(2k+1)n - \frac{\pi(2k+1)x}{2}\right)dx = \int_0^1 x\sin\left(\frac{\pi(2k+1)x}{2}\right)dx & \text{при } n=2k+1 \end{cases}$$

Така при $n=2k$

$$b_{2k} = \int_0^1 x\sin\frac{2k\pi x}{2}dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{2k\pi x}{2}dx = \int_0^1 x\sin k\pi x dx - \int_0^1 x\sin k\pi x dx = 0$$

и при $n=2k+1$:

$$b_{2k+1} = \int_0^1 x\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}dx = 2\int_0^1 x\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}dx =$$

$$= \frac{-4}{(2k+1)\pi}x\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{4}{(2k+1)\pi}\int_0^1 \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2}dx =$$

$$= \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}\Big|_0^1 = \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}(-1)^k .$$

Тогава

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{8}{3^2\pi^2}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{8}{5^2\pi^2}\sin\frac{5\pi x}{2} + ... = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2} .$$

При $x=1$ отново получаваме равенството:

$$1 = f(1) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}(-1)^k \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} .$$

А равенството на Парсевал не дава равенството

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}(-1)^k\right)^2 = \frac{64}{\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f^2(x)dx = \int_0^2 f^2(x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 (2-x)^2dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ или}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{64}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^4}{96} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} .$$

Задача 3. (за самостоятелна работа) Да се разложи в ред на Фурие функцията

а) $f(x) = \arccos(\sin x)$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

б) $f(x) = \arccos(\sin x)$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ в ред по синуси;

в) $f(x) = \arccos(\sin x)$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ в ред по косинуси.