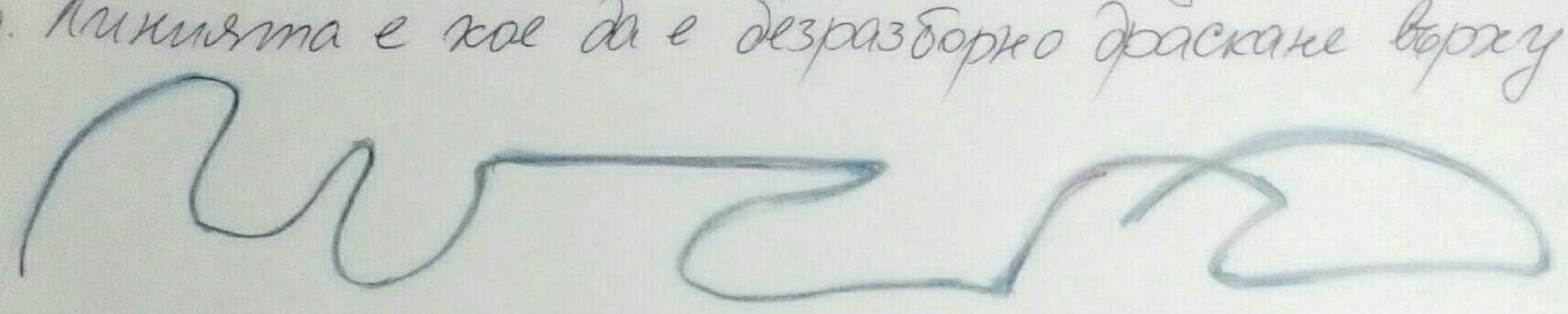
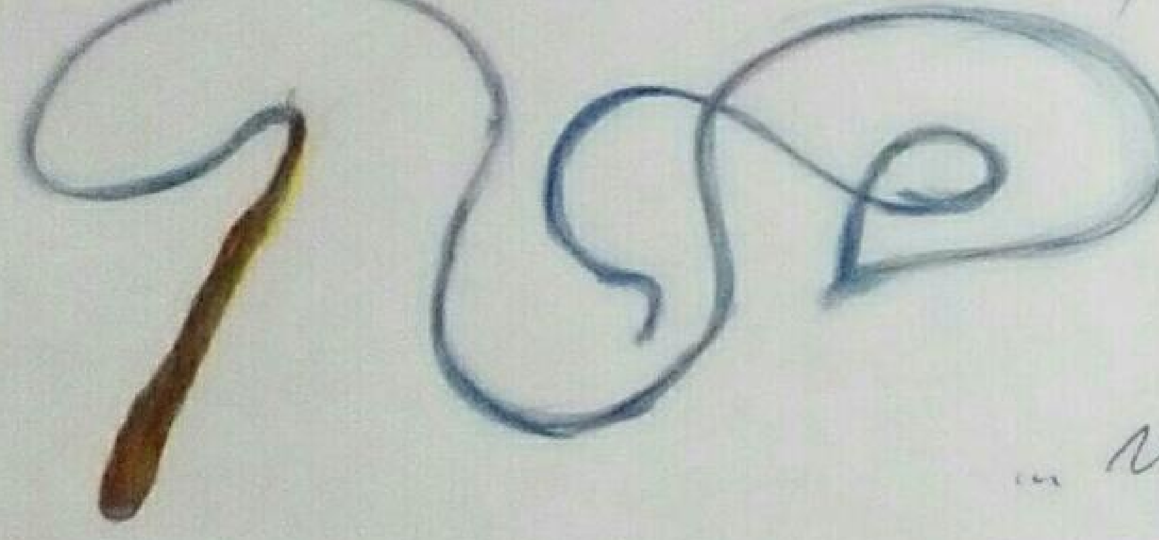
17. Аналитично определение на линия и повърхнина.

Интуитивно (от малки) имаме схващането за линия и повърхнина. Линията е кое да е безразборно драскане върху лист. Примерно:



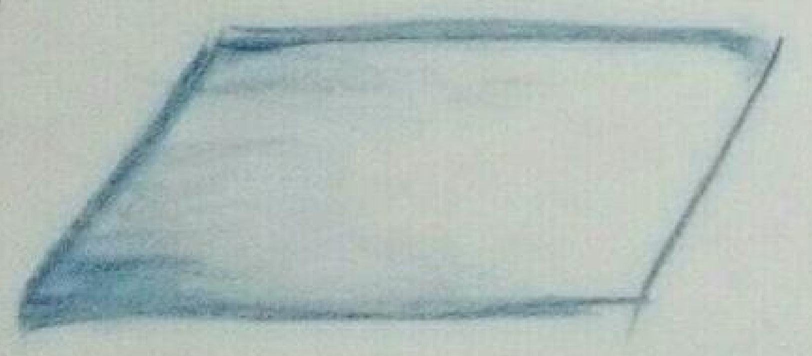
...а и краят, който се рисува от вълшебна пръчица...



Различаване „права" линия -

...и...„крива" линия

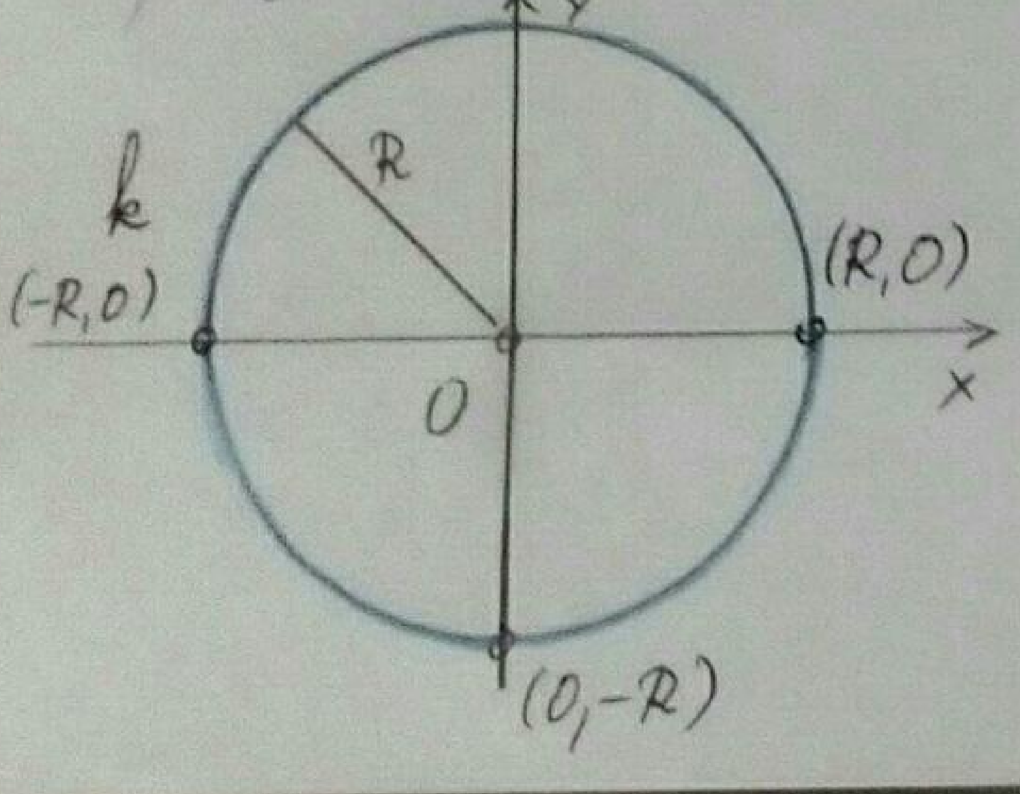
Така и за повърхнина: Различаваме „равнина"



и „огънатa „равнина" - повърхнина.

Тази ни интуитивна представа може да бъде обяснена математически. В смисъл – можем да дадем строги дефиниции на линия и повърхнина, за което е необходим сложен математически апарат, какъвто към настоящия момент считаме, че би бил затрудняващ. Ето защо, в това изложение се отказваме от въвеждането и използването на прецизен математически апарат, тъй като имаме достатъчно примери на линии и повърхнини в равнина и пространство – правите, елипсите, хиперболите, параболите, равнините, за които получихме съответното им уравнение, което напълно ги характеризира и с което можем да ги отъждествим.

Така окръжност k с център O и радиус R се дефинира като множеството от точки в една равнина, намиращи се на разстояние R от O. $k(O,R) := \{M : (OM) = R\}$. Тогава спрямо ортонормирана координатна система в равнината на k с начало O, то k има уравнение $k: x^2+y^2-R^2=0$.



Елипса има канонично уравнение спрямо подходяща координатна система
$\mathcal{E}: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; хипербола $\mathcal{X}: \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$,
парабола $\pi: y^2=2px$.

Така параболат може да наречем множеството от точки във фиксирана равнина, за която има число p, така че $M(x,y) \in \Pi \Leftrightarrow y^2 = 2px$.

Най-общо, не можем да твърдим че коя да е линия (или повърхнина) има уравнение и че всяко уравнение задава линия (или повърхнина). Така, понеже няма да се позоваваме на точни дефиниции на линия и повърхнина, то не ще изпаднем в логически противоречия, ако приведените от нас дефиниции, обхващащи основните разглеждани случаи търпят отклонения от представата ни за линия и повърхнина.

Нека в равнината е фиксирана координатна система K и е дадено уравнение

$$(1) \quad f(x,y) = 0,$$

където x и y са независими променливи. Тогава множеството от точки $M(x,y)$, чиито координати удовлетворяват (1) се нарича равнинна линия с уравнение (1). Означаваме с ℓ. Освен „линия" използваме термина „крива линия" или просто — „крива".

Алгебрични криви.

Нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ са независими променливи.
Едночлен от степен n на $x_1, x_2, \dots, x_n$ наричаме израз от вида

$$a\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n},$$

където a е произволно число, а $m_1, m_2, \dots, m_n$ – цели неотрицателни числа. Сборът $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ се нарича степен на едночлена. Сбор от краен брой едночлени на едни и същи променливи наричаме полином на тези променливи, а най-високата степен на събираемите – степен на полинома.

Алгебрично уравнение на променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$ наричаме уравнението от вида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

където $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е полином на $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Нека е дадено алгебричното уравнение

$$(2) \quad f(x, y) = 0$$

на две променливи x и y.

Множеството от точки C в равнината с координати x и y, които (спрямо фиксирана координатна система) удовлетворяващи уравнението (2) се нарича равнинна алгебрична крива.

Тъй като формулите за смяна на една координатна система K с друга – K' са линейни функции на x и y, то полиномът $f'(x', y')$, получен при съответната смяна от K към K' ще е полином от същата степен, както $f(x, y)$.

! Да отбележим, че не винаги има безброй много точки в равнината, чиито координати да удовлетворяват уравнението $f(x,y) = 0$.

За пример може да служи

1. $x^2 + y^2 = 0$ има единствено решение $x = 0$, $y = 0$.
2. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$, $f(x,y) = 0$ няма решение при $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

– тази крива е пример за крива, чието уравнение е с реални коефициенти, но! няма реални точки.

17.6

Също така, права, окръжност, елипса... може да се отчитат параметрично - например елипса можем да отчитем като съвкупността от точки $M(x,y)$, за които $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$

Тази аналогия оправдава следната дефиниция:

Нека $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ са функции на независимата променлива t, $t \in (t_1, t_2)$

Множеството ℓ от точки $M(x,y)$, така че

$$(2) \quad \ell \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in (t_1, t_2),$$

когато t се мени в интервала (t_1, t_2) получаване точки от ℓ с координати, определени в (2).

Пример. Елипса (с център O и оси Ox, Oy има параметрично уравнение $\mathcal{E}: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \; t \in [0, 2\pi]$,

(при $a = b$ горното уравнение е параметрично уравнение на окръжност с радиус a.

Да отбележим, че ако разгледаме кривата, зададена с $\begin{cases} x = a\,ch\,t \\ y = b\,sh\,t \end{cases}$, то ще получим само десния клон на хиперболата $\left(ch\,t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}, \; sh\,t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right)$.

Повърхнини и линии в пространството

Нека K е фиксирана координатна система и спрямо нея е дадено уравнението

$$(3) \quad F(x, y, z) = 0,$$

където x, y и z са независими променливи. Тогава множеството от точки, чиито координати удовлетворяват уравнението (3) наричаме повърхнина S с уравнение (3).

Когато (3) е алгебрично уравнение, то S наричаме алгебрична повърхнина.

Често пъти е удобно повърхнина да се определи параметрично... и интуитивно е ясно, че това можем да реализираме като отчитаме равнина като двупараметрична съвкупност от точки. Аналитично това постигаме като зададем три функции $\varphi_1(u, v)$, $\varphi_2(u, v)$ и $\varphi_3(u, v)$ на променливите u и v, дефинирани в една и съща област.

Така съвкупността от точките $M(x, y, z)$, за които имаме

$$S: \begin{cases} x = \varphi_1(u,v) \\ y = \varphi_2(u,v) \\ z = \varphi_3(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

наричаме повърхнина.

Пример Повърхнината, зададена с $\begin{cases} x = R\cos u \cos v \\ y = R \cos u \sin v \\ z = R \sin v \end{cases}$,

е сфера с радиус R.

Алгебрично сферата се задава с уравнението $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Линия в пространството можем да зададем геометрично като пресечница на две повърхнини – $c = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

Аналитично – като множеството от точки удовлетворяващо както уравнението на $\mathcal{F}_1$, така и това на $\mathcal{F}_2$:

$$c: \begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases},$$

където $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_i: f_i = f_i(x,y,z)=0$

Също така, линия в пространството като еднопараметрична съвкупност от точки може да се зададе чрез следните уравнения.

$$c: \begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \\ z = \varphi_3(t) \end{cases}, \quad t \in J, \ J \subseteq \mathbb{R},$$

където функциите $\varphi_i = \varphi_i(t)$ имат общ дефиниционен интервал.

Като пример за линия в пространството можем да посочим винтовата линия

$$c: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$$