$$\varphi = \sum_{i,j} a_{ji}\varphi_{ij} \quad ; \quad \psi = \sum_{i,j} b_{ji}\psi_{ij} \quad ; \quad \theta = \sum_{i,j} c_{ji}\theta_{ij}$$

Тв. $\psi_{ij} \circ \varphi_{kl} = \delta_{il}\,\theta_{kj}$

Д-во $s = 1 \rightarrow n$

$$(\psi_{ij} \circ \varphi_{kl})(e_s) = \psi_{ij}(\varphi_{kl}(e_s)) = \psi_{ij}(\delta_{ks} f_l) =$$

$$= \delta_{ks}\,\psi_{ij}(f_l) = \underline{\delta_{ks}}\,\delta_{il}\,\underline{g_j} = \delta_{il}\,\theta_{kj}$$

$\theta_{pq}(e_s) = \delta_{ps}\,g_q$

$$\psi \circ \varphi = \Big(\sum_{i,j} b_{ji}\psi_{ij}\Big) \circ \Big(\sum_{k,l} a_{lk}\varphi_{kl}\Big) = \sum_{i,j,k,l} b_{ji}\,a_{lk}(\psi_{ij} \circ \varphi_{kl}) \overset{\text{Тв.}}{=}$$

$$= \sum_{i,j,k,l} b_{ji} a_{lk} \underline{\delta_{il}} \theta_{kj} = \sum_{i,j,k} b_{ji} a_{ik} \theta_{kj} =$$

$$= \sum_{k,j} \left(\sum_{i} b_{ji} a_{ik} \right) \theta_{kj} = \sum_{k,j} c_{jk} \theta_{kj}$$

$$\Rightarrow \quad c_{\underline{j}k} = \sum_{i=1}^{m} b_{\underline{j}i} a_{ik}$$

$\varphi \to A$; $\psi \to B$; $\psi \circ \varphi \to C$

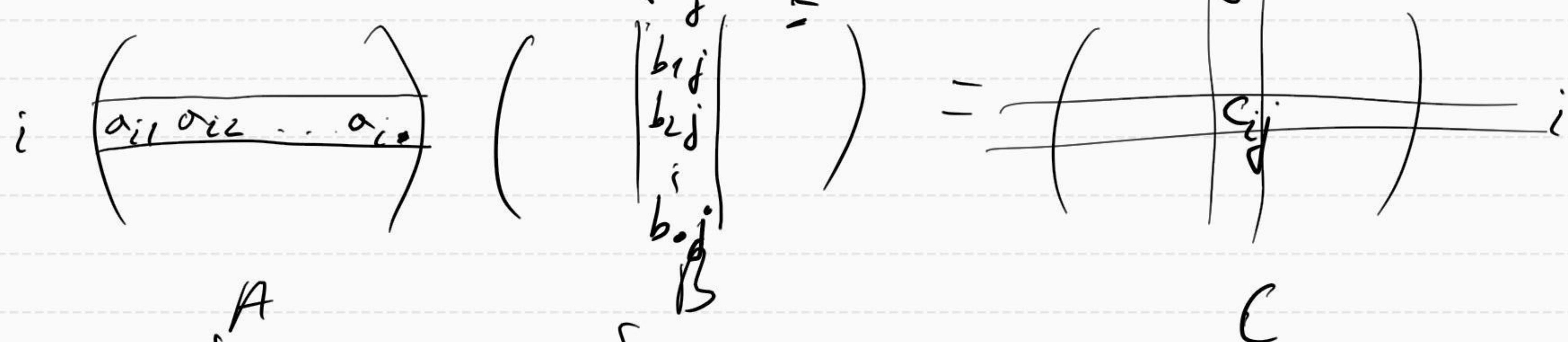
__Опр.__ $A \in F_{m \times n}$, $B \in F_{s \times m}$. Матр. $C \in F_{s \times n}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj} \quad \text{за } i = \overline{1,s};\ j = \overline{1,n}$$

Наричаме произв. на матр. B и A. Пишем

$C = BA$

Зад. $C = AB$ $\qquad c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$



– бр. ст. на A = бр. ред. на B

– правило ред по стълб – c_{ij} е произв. на i-ия ред на A с j-ия ст. на B

Тв. $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$

$e_1 \ldots e_n$ — базис на U; $f_1 \ldots f_m$ — базис на V

$g_1 \ldots g_s$ — базис на W. Тогда

$$M_e^g(\psi\circ\varphi) = M_f^g(\psi)\cdot M_e^f(\varphi)$$

Сл. $E_{ji}E_{lk} = \delta_{il}E_{jk}$

Свойства на операциите с ЛИ

1) $Hom(U,V)$ е ЛП $\to$ свойства на ЛП

2) $\varphi \in Hom(U,V)$, $\psi \in Hom(V,W)$, $\theta \in Hom(W,X)$

$\Rightarrow (\theta \circ \psi) \circ \varphi = \theta \circ (\psi \circ \varphi)$ (асоц. на произв. на ЛИ)

(следва от асоц. на композиция)

3) $\varphi \in Hom(U,V)$ $\quad \varphi \circ id_U = id_V \circ \varphi = \varphi$

($id_U \in Hom(U)$, $id_V \in Hom(V)$)

4) $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(U,V)$, $\theta \in \mathrm{Hom}(V,W)$

$$\theta \circ (\varphi + \psi) = (\theta \circ \varphi) + (\theta \circ \psi)$$

$u \in U$

$$(\theta \circ (\varphi + \psi))(u) = \theta((\varphi + \psi)(u)) = \theta(\varphi(u) + \psi(u)) =$$
$$= \theta(\varphi(u)) + \theta(\psi(u)) = (\theta \circ \varphi)(u) + (\theta \circ \psi)(u) =$$
$$= ((\theta \circ \varphi) + (\theta \circ \psi))(u) \xrightarrow{\forall u} \theta \circ (\varphi + \psi) = (\theta \circ \varphi) + (\theta \circ \psi)$$

4') $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $\theta \in \mathrm{Hom}(U,V)$

$$(\varphi + \psi) \circ \theta = (\varphi \circ \theta) + (\psi \circ \theta)$$

5) $\lambda \in F$, $\varphi \in Hom(U, V)$, $\psi \in Hom(V, W)$

$\Rightarrow \lambda(\psi \circ \varphi) = (\lambda \psi) \circ \varphi = \psi \circ (\lambda \varphi)$

Асоциат. д-во — вземаме произволно $u \in U$ и проверяваме

<u>Сл.</u> (за операторите)

- $Hom(V)$ с ЛП
- $\forall \varphi, \theta, \psi \in Hom(V)$ $\quad (\varphi \circ \psi) \circ \theta = \varphi \circ (\psi \circ \theta)$
- $\forall \varphi \in Hom\, V$ $\quad \varphi \circ id_V = id_V \circ \varphi = \varphi$
- $\forall \varphi, \theta, \psi \in Hom\, V$ $\quad (\varphi + \psi)\theta = (\varphi\theta) + (\psi\theta)$

  $\varphi(\psi + \theta) = (\varphi\psi) + (\varphi\theta)$

— $\forall \varphi, \psi \in \mathrm{Hom}\, V$ и $\forall \lambda \in F$

$\lambda(\varphi\psi) = (\lambda\varphi)\psi = \varphi(\lambda\psi)$

Сл. (матр.)

— $F_{m\times n}$ — ЛП

— $A \in F_{m\times n}, B \in F_{n\times k}, C \in F_{k\times l}$

$(AB)C = A(BC)$

— $A \in F_{m\times n}$; $E_m \in M_m(F)$, $E_n \in M_n(F)$ — ед. матр.

$AE_n = E_m A = A$

- $A \in F_{m\times n}$; $B, C \in F_{n\times k}$

  $A(B+C) = AB + AC$

- $A, B \in F_{m\times n}$; $C \in F_{n\times k}$

  $(A+B)C = AC + BC$

- $A \in F_{m\times n}$; $B \in F_{n\times k}$; $\lambda \in F$

  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

<u>Заб.</u> Следва от $M_e^f : Hom(U,V) \to F_{m\times n}$ е изом на ЛП

<u>Заб</u> $E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}) \xleftrightarrow{\forall \text{базис}} id_V$

Тв. $M_n(F)$ – пръстен с единица; не е комутативен и има делители на 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Зад. $M_n(F) \cong Hom(V)$ ← зависи от базиса

Опр. $A \in M_n(F)$ е обратима, ако $A^* \in M_n(F)$:

$$AA^* = A^*A = E = E_n$$

Зад. Знаем, че ако $A^* \exists$, тя е единствена

$(\quad A^{**} = E A^{**} = (A^* A) A^{**} = A^* (A A^{**}) = A^* E = A^*)$

<u>Заб.</u> Ако A^*, близорним е с A^{-1} - обратна матрица

<u>Заб.</u> $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$ е обратим, ако

$\exists \varphi^* \in \mathrm{Hom}\, V: \varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \varphi = id_V$

Ако $\exists \varphi^*$, е единствен $- \varphi^{-1}$

Ако $e_1, \dots, e_n$ - базис на V $\quad M_e^e(\varphi) = A$ —
(матрица на ЛО φ)

φ - обратим $\Leftrightarrow$ A е обратима

$A^{-1} = M_e^e(\varphi^{-1}) \quad (M_e^e : \mathrm{Hom}\, V \to M_n(F)$
е ИМИ

„запазва" произведението: $M_e^e(\varphi \circ \psi) = M_e^e(\varphi) \cdot M_e^e(\psi)$

$M_e^e(id_V) = E$

Също $\Phi_e^e : M_n(F) \to Hom\, V$ е ИЗ и запазва произв.

$\Phi_e^e = (M_e^e)^{-1}$

Смяна на базиса

<u>Опр.</u> V – ЛП над F; $\dim V = n$

$e_1, \dots, e_n$ (стар) и $f_1, \dots, f_n$ (нов) – базиси; за $i = 1, \dots, n$

$$\exists t_{ij} : f_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j \ ; \ T = (t_{ij}) \in M_n(F)$$

T – матрица на прехода от базиса $e_1 \dots e_n$ (старата) в базиса $f_1 \dots f_n$ (новата)

<u>Зад.</u> i-ия стълб на T са коорд. на f_i в базиса $e_1 \dots e_n$

<u>Зад.</u> $T = M_e^e(\varphi)$, където φ е единствения ЛО: $\forall i = 1 \dots n \quad \varphi(e_i) = f_i$

<u>Означение</u> $T = T_e^f$

<u>Зад.</u> $e_1 \dots e_n$ – базис на V; $i = 1 \dots n \quad f_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j$

$T = (t_{ij})$. Тогава T – обратима $\Leftrightarrow f_1 \dots f_n$ – базис

$T = M_e^e(\varphi)$ за $\varphi : i = 1 \to n \quad \varphi(e_i) = f_i$

T - обр. $\Leftrightarrow \varphi$ - обр. $\Leftrightarrow f_1 \to f_n$ - базис

- ($\Rightarrow$) ясно - $f_i = \varphi(e_i)$ и $e_1 \to e_n$ - базис
- ($\Leftarrow$) $\exists! \psi : \psi(f_i) = e_i$

$\forall i \quad (\varphi \circ \psi)(f_i) = f_i$ и $(\psi \circ \varphi)(e_i) = e_i$

$\Rightarrow \varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = id_V \Rightarrow \varphi$ - обратимо $(\varphi^{-1} = \psi)$

<u>Зад.</u> $v \in V$; $e_1 \to e_n$ - базис V ; $\exists! \lambda_i : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

$\exists! \varphi_v \in Hom(F, V) : \varphi_v(1) = v$

$$\underbrace{M_1^e(\varphi_v)}_{\text{коорд. на } v \text{ в базиса } e_1 \dots e_n} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \in F_{n\times 1}\ ;\ \varphi_v = \Phi_1^e\left(\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\right)$$

Тв. $v \in V$; $e_1 \dots e_n$ и $f_1 \dots f_n$ – базиси; $T = T_e^f$

$$\Rightarrow M_1^e(\varphi_v) = T \cdot M_1^f(\varphi_v)$$

Доб./Сл. $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i \Rightarrow \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}$

старите коорд. са произв. на T с новите коорд.

$$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

Доб. $\underline{A = TB} \xrightarrow{T^{-1}\cdot} \underline{T^{-1}A} = T^{-1}(TB) = (T^{-1}T)B = E.B = \underline{B}$

Зам. $id_V \in \mathrm{Hom}\, V = \mathrm{Hom}(V, V)$ | $id_V(b_i) = b_i$, $id_V(e_i) = e_i$

$$\mu_f^e(id_V) = T_e^f = T$$

Д - Свойство Т

$$T \cdot \mu_1^f(\varphi_V) = \mu_f^e(id_V)\,\mu_1^f(\varphi_V) = \mu_1^e(id_V \circ \varphi_V) = \mu_1^e(\varphi_V)$$

Зам. $(T_e^f)^{-1} = T_f^e$

$$T_e^f = \mu_f^e(id_V), \quad T_f^e = \mu_e^f(id_V)$$

$$T_e^f T_f^e = \mu_f^e(id_V)\,\mu_e^f(id_V) = \mu_e^e(\overbrace{id_V \circ id_V}^{id_V}) = E$$