$A \in F_{m\times n}$; $\varphi_A : F^n \to F^m$ (по стълб.)

$v \longmapsto Av$

F^n - $e_1, \ldots, e_n$; F^m - $f_1, \ldots, f_m$ - станд. базиси

ЕП: 1) смяна на 2 р. $\to A_1$

A_1 - матр. на φ_A спрямо базиси, но какви!

$e \to e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, \underset{i}{f_j}, \ldots, \underset{j}{f_i}, \ldots, f_m \leftarrow f'$

$T_1 = T_f^{f'}$

$A_1 = T_1^{-1} A$

1') смяна на 2 ст. $\to A_1'$

$e' \to e_1, \ldots, \underset{i}{e_j}, \ldots, \underset{j}{e_i}, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_m \leftarrow f$

$T_1' = T_e^{e'}$

$A_1' = A T_1'$

$$A = \begin{pmatrix} & a_{1j} & \\ & \vdots & \\ & a_{mj} & \end{pmatrix} \qquad \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i, \quad j = 1, \dots, n$$

2) умнож. на $i^{ю}$ ред с $\lambda \neq 0$

$e \to e_1 \dots e_n$ и $f_1 \dots \frac{1}{\lambda} f_i \dots f_m \leftarrow f''$

$$T_2 = T_f^{f'} \qquad A_2 = T_2^{-1} A$$

2') умнож. на $i^{ю}$ ст. с $\lambda \neq 0$

$e'' \to e_1 \dots \lambda e_i \dots e_n$ и $f_1 \dots f_m \leftarrow f$

$$T_2' = T_e^{e''} \qquad A_2' = A T_2'$$

3/ приб. на $i^{ти}$ ред умн. с λ към $j^{ти}$ $(i \neq j)$

$$\varphi(e_k) = \sum_{s=1}^{m} a_{sk} f_s \; ; \quad A_3 = (b_{ij}) \quad \Big| \; e \to e_1 \ldots e_n$$

$$k = 1, \ldots, n \; ; \quad b_{sk} = \begin{cases} a_{sk} & s \neq j \\ a_{jk} + \lambda a_{ik} & s = j \end{cases} \quad \Big| \; f''' \to f_1''' \ldots f_m'''$$

$$\varphi(e_k) = \sum_s a_{sk} f_s = \sum_s b_{sk} f_s'''$$

Ако за $s \neq i, j$ $\quad f_s''' = f_s$

$$a_{ik} f_i + a_{jk} f_j = b_{ik} f_i''' + b_{jk} f_j'''$$

~~Ако~~ $\cancel{f_i''' = f_i}$

$$a_{ik} \underline{f_i} + a_{jk} \underline{f_j} = a_{ik} f_i''' + (a_{jk} + \lambda a_{ik}) f_j'''$$

$$= a_{ik} \underline{(f_i''' + \lambda f_j''')} + a_{jk} \boxed{f_j'''}$$

$$f_k''' = \begin{cases} f_k & k \neq i \\ f_i - \lambda f_j & k = i \end{cases}$$

$$T_3 = T_f^{f'''} \qquad\qquad A_3 = T_3^{-1} A$$

3') умн. i-ти ~~ред~~ ст. с λ и го прибавяме към j-ти

$e''' \to e_1''', \dots, e_n'''$; $f \to f_1, \dots, f_m$ $\qquad A_3' = (b_{ij})$

$k = 1, \dots, n \qquad \varphi_A(e_k''') = \sum_{s=1}^{m} b_{sk} f_s \qquad$ за $k \neq j$ $\; e_k''' = e_k$

$$\varphi_A(e_j''') = \sum_s b_{sj} f_s = \sum_s (a_{sj} + \lambda a_{si}) f_s =$$

$$= \sum_s a_{sj} f_s + \lambda \sum_s a_{si} f_s = \overbrace{\varphi_A(e_j) + \lambda \varphi_A(e_i)}^{\varphi(e_j + \lambda e_i)} =$$

$$e''_s = \begin{cases} e_s & s \neq j \\ e_j + \lambda e_i & s = j \end{cases}$$

$$T_3' = T_e^{e''} \qquad A_3' = A T_3'$$

<u>Зад.</u> Да добавим индекси към матр. T

$T_1(i,j)$ — разм. на $i^{\text{ти}}$ и $j^{\text{ти}}$ ред

$T_1'(i,j)$ — — — — ст.

$T_3(i,j,\lambda)$ — прибав. на $i^{\text{ти}}$ ред към $j^{\text{ти}}$

$T_3'(i,j,\lambda)$ — — — — ст. — — —

$T_2(i,\lambda)$ — умнож. на $i^{\text{ти}}$ ред с λ

$T_2'(i, \lambda)$ - умн. на $i^{ю}$ ст. с λ

Св-ва

1) $T_1(i,j) = T_1'(i,j)$, если $m=n$

2) $(T_1(i,j))^{-1} = T_1(i,j)$, $(T_1'(i,j))^{-1} = T(i,j)$

3) $(T_2(i,j,\lambda))^{-1} = T_2(i,j,\frac{1}{\lambda})$, $(T_2'(i,j,\lambda))^{-1} = T_2(i,j,\frac{1}{\lambda})$

4) $(T_3(i,j,\lambda))^{-1} = T_3(i,j,-\lambda)$, $(T_3'(i,j,\lambda))^{-1} = T_3(i,j,-\lambda)$

$$
T_1 = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & \\
& & & 0 & & & 1 & & \\
& & & & 1 & & & & \\
& & & & & \ddots & & & \\
& & & & & & 1 & & \\
& & & 1 & & & 0 & & \\
& & & & & & & 1 & \\
& & & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
& \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & & i & < & j & \end{array} &
\end{array}
$$

T_1' – аналог.

$$
T_2 = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
& \ddots & & & \\
& & \frac{1}{\lambda} & & \\
& & & \ddots & \\
& & & & 1
\end{pmatrix}
& \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccc} & i & \end{array} &
\end{array}
, \quad
T_2' = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
& \ddots & & & \\
& & \lambda & & \\
& & & \ddots & \\
& & & & 1
\end{pmatrix}
& \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccc} & i & \end{array} &
\end{array}
$$

$$
T_3 = \begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
& \ddots & & & \\
& & 1 & & \\
& & \vdots & \ddots & \\
& & -\lambda & & \\
& & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \\
i
\end{array}
\qquad
T_3' = \begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
& \ddots & \lambda & & \\
& & 1 & & \\
& & & \ddots & \\
& & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
j
\end{array}
$$

$$T_1^{-1} = T_1$$

$$
T_2^{-1} = T_2\left(i, j, \frac{1}{\lambda}\right) = \begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & & & \\
& \ddots & & \\
& & \lambda & \\
& & & \ddots \\
& & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \\
i
\end{array}
$$

$$
T_3^{-1} = T_3(i, j, -\lambda) = \begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & & & \\
& \ddots & & \\
& & \ddots & \\
& \lambda & & \\
& & & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} \\
i
\end{array}
$$

Извод: ЕП по ред. (ст.) може да се реализира чрез умн. с обратими матр. отляво (отдясно) получени след извършване на ЕП$^{\text{то}}$ в/у единичната матр. – наричат се матр. на ЕП (МЕП)

Зад. 1) $A \in M_n(F)$ – обратима

φ_A – ИЗО; чрез ЕП само по редове (колон.) можем да получим E (защо?)

$\Rightarrow \exists\, T_1, \dots, T_k$ – МЕП : $T_k \dots T_2 T_1 A = E$

$$\Rightarrow A^{-1} = T_k \dots T_1$$

Можем да интерпретираме

$T_k \ldots T_1 = T_k \ldots T_1 E$, т.е. $T_k \ldots T_1$ е

матр. получена чрез ЕП, съотв. на $T_k, \ldots, T_1$,

на E. Схема:

$$(A \mid E) \sim (E \mid A^{-1})$$

2) $AX = B$; A - обратима $(X = A^{-1}B)$

$T_k \ldots T_1 \cdot A = E \to X = \underbrace{T_k \ldots T_1}_{A^{-1}} B$

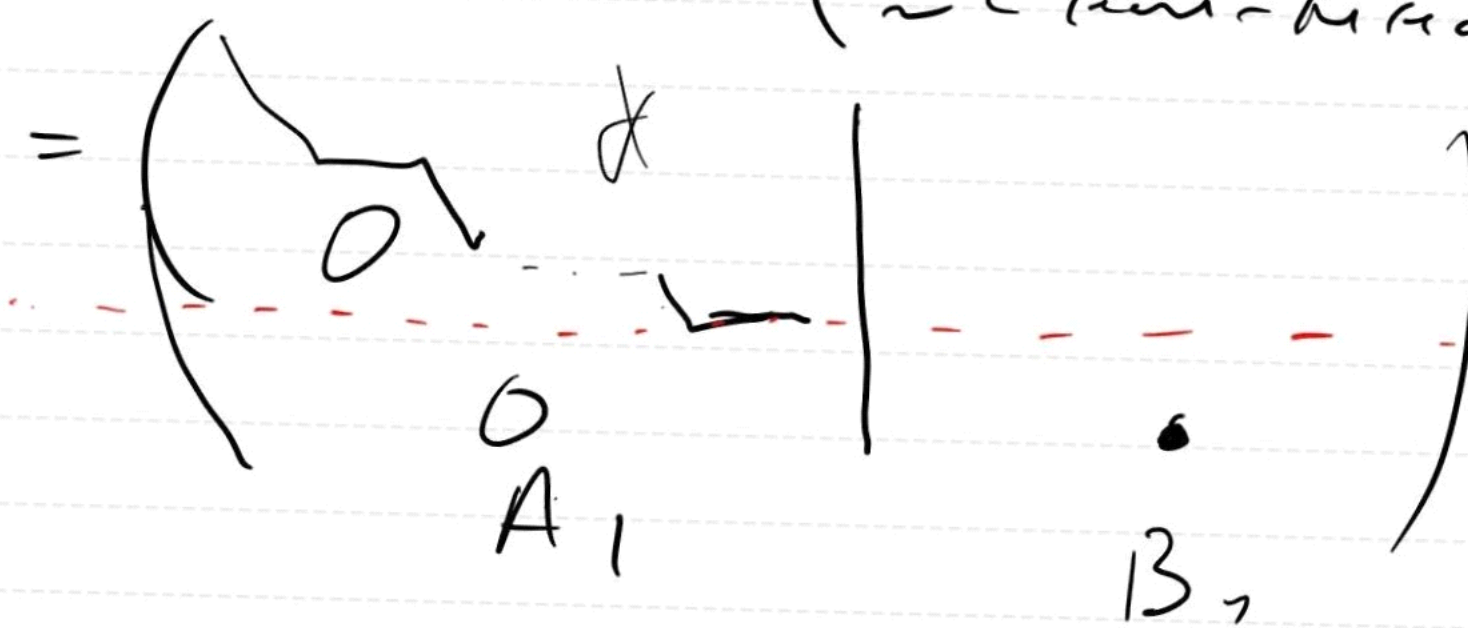
$$(A \mid B) \sim (E \mid A^{-1}B)$$

3) $AX = B$, A - прямоуг.

$(A|B) \rightsquigarrow (A_1|B_1)$

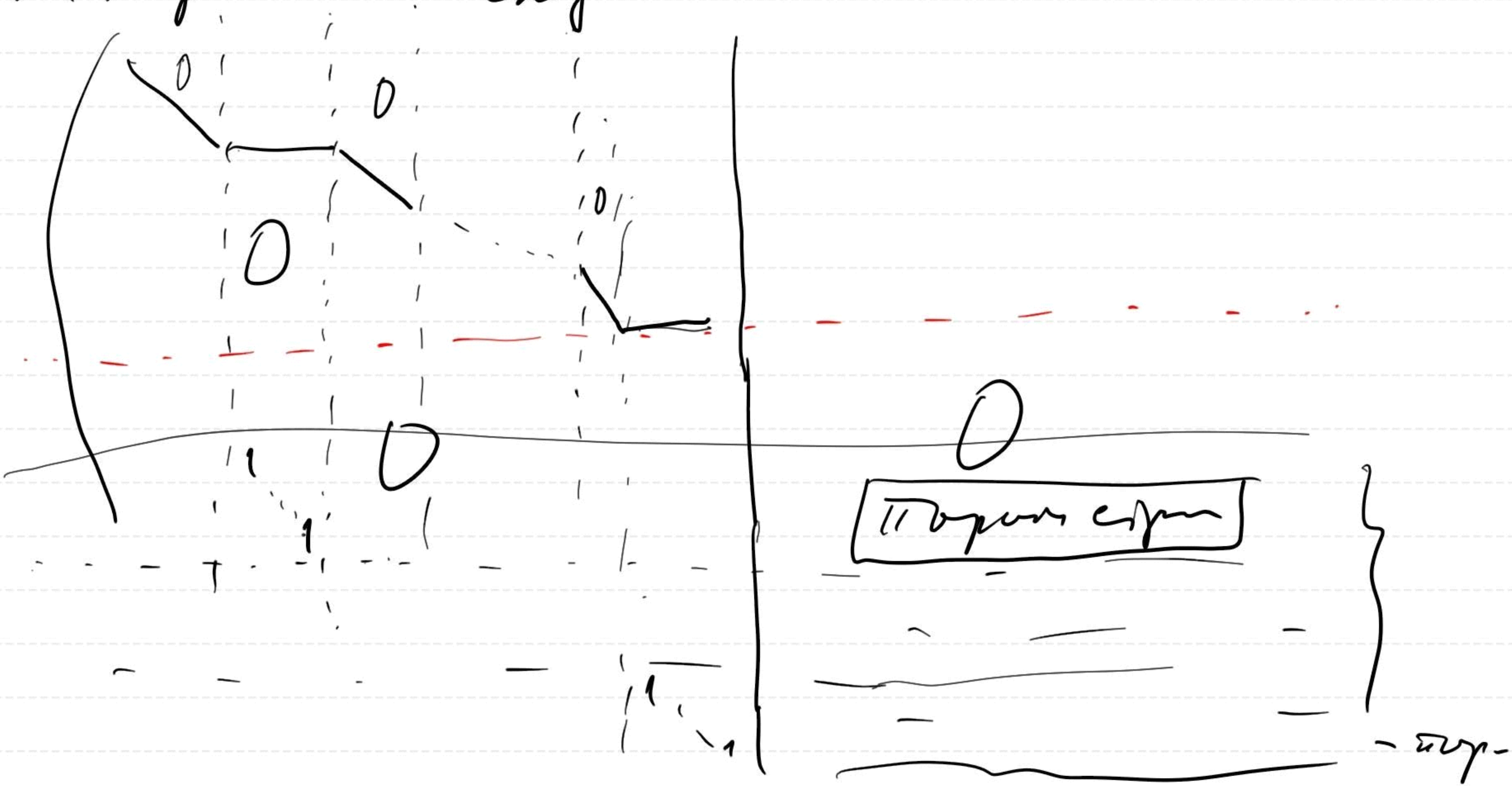
Тогда $AX = B \Leftrightarrow A_1 X = B_1$

Цель [illegible] A_1 где [illegible] возможно [illegible]
([illegible])

$(A_1|B_1) =$ 

• - ноль или $\neq 0$ сл. $\Rightarrow$ н.р.

Интерфейсы в структурах:



$(E \mid B_2)$ в B_2 - има параметри

$\Rightarrow$ B_2 - $\forall$ реш. на $AX = B$ с параметри.

4) ЕП по редове $\underbrace{\hphantom{xx}}_{}$ (смяна на базиса на F^m)

$A \sim A_1$

(ст. — — — F^n)

$rr(A) = rr(A_1)$ $\quad (rc(A) = rc(A_1))$

5) $XA = B$; $\left(\dfrac{A}{B}\right) \stackrel{ст.}{\sim} \left(\dfrac{A_1}{B_1}\right)$

$\Updownarrow$

$XA_1 = B_1$ $\quad$ Но важно да правим само

ще го свеждаме ЕП по редове

Дуални пространства

Опр. V - ЛП над F ;

$V^* = Hom(V, F)$ – дуално простр. на V

Заб. $v^* \in V^*$ – функционали (линейни)

Заб. $\dim V = n \quad \dim Hom(V, F) = n \cdot 1 = n$,
$\dim F = 1$

т.е. V^* е ЛП и $\dim V^* = n$

Опр. V – КМЛП и $e_1 \dots e_n$ - базис на V

базиса e^i за $i = 1 \dots n$ на V^* се наричат дуален базис на $\overline{\text{базиса}}$ $e_1, \dots, e_n$, ако

$$e^i(e_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

<u>Зад.</u> $e^1, \dots, e^n$ $\overline{\exists \text{ и са}}$ са еднозначно определени

(координатен базис във вектори)

<u>Тв</u> $e^1, \dots, e^n$ – базис на V^*

<u>Зад.</u> $\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i e^i\right)}_{\in V^*}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right) = \sum_i \lambda^i \cdot e^i\left(\sum_j \lambda_j e_j\right) =$

$$= \sum_i \lambda^i \sum_j \lambda_j e^i(e_j) = \sum_{i,j} \lambda^i \lambda_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \lambda_i$$

Д-во что ТС. 1) ЛН

Пусть $\sum_{i=1}^{n} \lambda^i e^i = \theta^* = \theta_{V^*}$ $\left(\forall v \in V \ \theta^*(v) = 0 = \theta_F\right)$

Зам. (Св. об. зад.)

- $\left(\sum_i \lambda^i e^i\right)(e_j) = \lambda^j$
- $e^i\left(\sum_j \lambda_j e_j\right) = \lambda_i$

$0 = \theta^*(e_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i e^i\right)(e_j) = \lambda^j \Rightarrow \forall \lambda^j = 0$

$j = 1 \ldots n$

$\Rightarrow e^1 \ldots e^n$ ЛН

2) $V^* = \ell(e^1, \ldots, e^n)$

$\supseteq$ вярно

$v^* \in V^*$ $\qquad \lambda^i := v^*(e_i)$ за $i = 1, \ldots, n$

$$u^* := \sum_{i=1}^{n} \lambda^i e^i$$

за $j = 1, \ldots, n$

$$u^*(e_j) = \lambda^j = v^*(e_j) \Rightarrow u^* = v^*$$

(ЛН, като координати- [illegible] [illegible] ли едно- и [illegible] [illegible])

$$\Rightarrow v^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i e^i \in \ell(e^1, \ldots, e^n)$$

Сл. $v^* \in V^*$, $v \in V$, $e_1, \dots, e_n$ - базис на V

$e^1, \dots, e^n$ - дуален базис на $e_1, \dots, e_n$

$v^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i e^i$; $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^i$. Тогава

1) $v^*(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \lambda_i$

2) $e^i(v) = \lambda_i$

3) $v^*(e_i) = \lambda^i$

Зад (Сл.) $\dim V^* = \dim V$