Тема 1: Формулирайте интерполационна задача на Лагранж. Док. единственост. Изведете интерполационната формула на Лагранж.

Интерполационна задача: Нека $x_0, \dots, x_n$ са различни точки и $y_0, \dots, y_n$ са дадени реални числа. Да се построи алгебричен полином $P(x)$ от степен $\le n$, който удовлетворява условията:

$$P(x_k) = y_k, \quad k = \overline{0,n}$$

Единственост:

Ако ∃ решение, то то е единствено. Да допуснем, че има два полинома P и Q от степен $\underline{n}$, които удовлетворяват зад. на Лагранж. Тогава

$R(x) := P(x) - Q(x)$ ще бъде полином от степен $\le n$

$R(x_k) = P(x_k) - Q(x_k) = y_k - y_k = 0$ за $k = 0, \dots, n$

R полином от $\underline{n}$-та степен с $\underline{n+1}$ нули ⇒ От основната теорема на алгебрата ⇒ $R(x) \equiv 0$ ⇒ $P(x) = Q(x)$ - единствен

Интерполационна формула на Лагранж:

Търсим полиноми $l_{n,k}(x) \in \Pi_n$. при фиксирано $\underline{k}$

$$l_{n,k}(x_i) = \begin{cases} 0 & i = 0, \dots, n;\ i \ne k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

⇒ $l_{n,k}(x)$ е полином от $\underline{n}$-та степен с $\underline{n}$ нули ⇒ $l_{n,k}(x) = A(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)$

$l_{n,k}(x_k) = 1 = A(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)$.

$$A = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \ne k}}^{n} (x_k - x_i)}$$

$$l_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \ne k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

→ $\{l_{n,k}(x)\}_{k=0}^{n}$ - базисни полиноми на Лагранж

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_{n,k}(x)$$

$$l_{n,k}(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \ne k \end{cases}$$

$P(x_i) = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k l_{n,k}(x_i) = y_i \cdot 1 = y_i \in \Pi_n$ - удов. интерполац. условия.

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{\substack{i=0 \\ i \ne k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

- Интерполационна формула на Лагранж за f в точки $x_0, \dots, x_n$