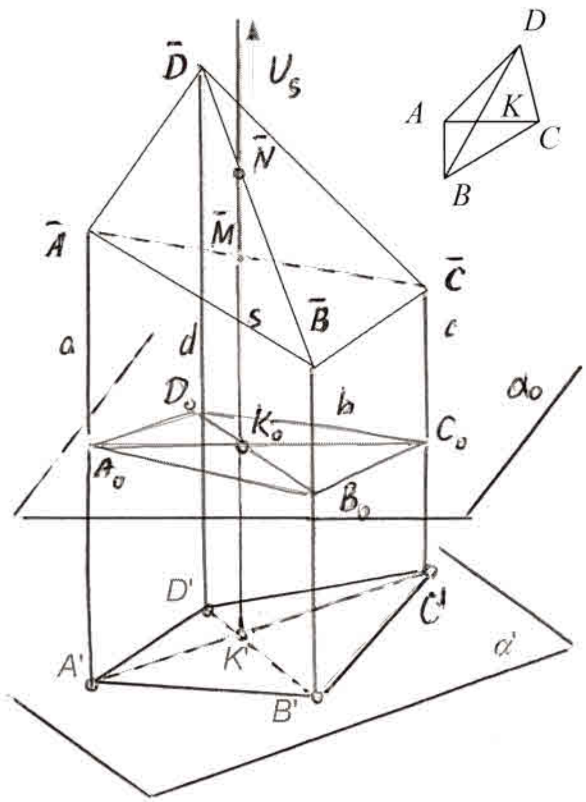
14. Теорема на Полке-Шварц

Теорема на Полке-Шварц: За всеки равнинен четириъгълник $ABCD$ и всеки тетраедър $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ съществува равнина π и безкрайна точка Us, таква че проекцията на тетраедъра $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ в π от центъра Us е четириъгълник подобен на $ABCD$.

Доказателство: Означаваме:

$K = AC \cap BD$, $\eta = (ACK)$, $\mu = (BDK)$.

Нека точките $\overline{M} \in \overline{A}\overline{C}$ и $\overline{N} \in \overline{B}\overline{D}$ са такива, че $(\overline{A}\overline{C}\overline{M}) = \eta$ и $(\overline{B}\overline{D}\overline{N}) = \mu$. Тъй като $\overline{A}\overline{C}$ и $\overline{B}\overline{D}$ са кръстосани прави, то $\overline{M} \neq \overline{N}$ и е определена правата $s = \overline{M}\overline{N}$. Нека a, b, c, d са правите през $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$, успоредни на s.



Нека α_0 е равнина, $\alpha_0 \perp s$ и $\alpha_0 \cap a = A_0$,

$\alpha_0 \cap b = B_0$, $\alpha_0 \cap c = C_0$, $\alpha_0 \cap d = D_0$, $\alpha_0 \cap s = K_0$.

От теоремата на Талес имаме, че $(\overline{A}\overline{C}\overline{M}) = (A_0C_0K_0)$. Но $(\overline{A}\overline{C}\overline{M}) = (ACK)$ и следователно $(ACK) = (A_0C_0K_0)$.

Аналогично получаваме

$(B_0D_0K_0) = (BDK)$.

Оттук следва, че четириъгълниците $ABCD$ и $A_0B_0C_0D_0$ са афинно еквивалентни.

Съгласно следствието от теоремата за представяне на афинитет между две равнини чрез подобност ортогонално проектиране, съществува равнина π такава че, ако

$a \cap \pi = A'$, $b \cap \pi = B'$, $c \cap \pi = C'$, $d \cap \pi = D'$, то $ABCD \sim A'B'C'D'$.