Метод на Лагранж

Текстовете са от: Т. Генчев, Обикновени диференциални уравнения, Университетско издателство „Св. Кл.имент Охридски“, София, 1991 г.

Както видяхме , ако $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е фундаментална система на уравнението

$$L(x) \equiv a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0, \tag{1}$$

всички останали решения се дават от формулата

$$x(t) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu x_\nu(t), \tag{2}$$

ще покажем, следвайки Лагранж, че наличието на една фундаментална система от решения на (1) ни позволява да намерим всички решения и на нехомогенното уравнение

$$L(x) = f(x) \tag{3}$$

при предположение, че и f, както и коефициентите на (3) са дефинирани и непрекъснати в $\langle a, b\rangle$. Следващата лема описва структурата на общото решение на (3).

Лема 1. Нека $x_0 = x_0(t)$ е решение на (3) и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е фундаментална система на (1). В такъв случай всяко решение $x = x(t)$ на (3) има вида

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu x_\nu(t), \qquad t \in \langle a,\ b \rangle, \tag{4}$$

където $\{C_\nu\}_1^n$ са подходящи константи.

Доказателство. Нека $x = x(t)$ е решение на (3). Като извадим равенствата

$$L(x) = f(t) \quad \text{и} \quad L(x_0) = f(t),$$

получаваме $L(x - x_0) = 0$ и твърдението следва веднага от (2).

Тази лема показва, че е достатъчно да намерим едно единствено решение на (3). На Лагранж принадлежи щастливата мисъл да потърси решение на (3) от вида

$$x(t) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(t) x_\nu(t), \tag{5}$$

където $t \longrightarrow C_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, са неизвестни функции, които подлежат на определяне.

(5) $$x(t) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(t) x_\nu(t),$$

където $t \longrightarrow C_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, са неизвестни функции, които подлежат на определяне.

Да допуснем, че решение на (3) от вида (5) наистина съществува и предполагайки, че $C_\nu = C_\nu(t)$ са гладки, да диференцираме. Получаваме

(6) $$x'(t) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(t) x'_\nu(t) + \sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(t) x_\nu(t).$$

Старайки се да запази аналогията между (2) и (5), Лагранж налага условието

(7) $$\sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(t) x_\nu(t) = 0 \quad \text{в} \quad \langle a,\ b \rangle$$

и получава първото уравнение за неизвестните функции $\{C_\nu(t)\}_1^n$.

Щом като (7) е изпълнено, (6) взема вида

$$x'(t) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(t) x'_\nu(t) \tag{8}$$

и след още едно диференциране ни дава

$$x''(t) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(t) x''_\nu(t) + \sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(t) x'_\nu(t). \tag{9}$$

Да поискаме и равенството

$$\sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(t) x'_\nu(t) \equiv 0, \qquad t \in \langle a,\ b\rangle, \tag{10}$$

да бъде в сила. Сега (9) се редуцира до

$$x''(t) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(t) x''_\nu(t), \tag{11}$$

откъдето след диференциране намираме

$$x'''(t) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(t) x'''_\nu(t) + \sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(t) x''_\nu(t). \tag{12}$$

Продължавайки по същия начин, налагаме условието

$$(13) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(t)x''_\nu(t) \equiv 0, \qquad t \in \langle a,\ b\rangle,$$

получаваме $x'''(t) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(t)x'''_\nu(t)$ и т.н.

Така стигаме до равенствата

$$(14) \qquad x^{(k)}(t) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(t)x_\nu^{(k)}(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$(15) \qquad x^{(n)}(t) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(t)x_\nu^{(n)}(t) + \sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(t)x_\nu^{(n-1)}(t),$$

предполагайки, разбира се, че $\{C_\nu\}_1^n$ удовлетворява уравненията

$$(16) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(t)x_\nu^{(k)}(t) = 0, \qquad t \in \langle a,\ b\rangle,\ k = 0, 1, \ldots, n-2.$$

$$x^{(k)}(t) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(t) x_\nu^{(k)}(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{14}$$

$$x^{(n)}(t) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(t) x_\nu^{(n)}(t) + \sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(t) x_\nu^{(n-1)}(t), \tag{15}$$

След като разполагаме с простите зависимости (14) и (15), да си спомним, че по предположение (5) удовлетворява нехомогенното уравнение (5), и да заместим. След елементарно прегрупиране получаваме

$$a_0(t) \sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(t) x_\nu^{(n-1)}(t) + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(t) L(x_\nu) = f(t),$$

т.е.

$$\sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(t) x_\nu^{(n-1)}(t) = \frac{f(t)}{a_0(t)}, \tag{17}$$

защото по предположение $L(x_\nu) = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

$$(16) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(t) x_\nu^{(k)}(t) = 0, \qquad t \in \langle a,\ b\rangle,\ k = 0, 1, \ldots, n-2.$$

$$(17) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu(t) x_\nu^{(n-1)}(t) = \frac{f(t)}{a_0(t)},$$

Уравненията (16) и (17) ни дават система от n уравнения за неизвестните $C'_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, чиято детерминанта е тъкмо вронскианът за $\{x_\nu\}_1^n$, който, както вече видяхме, не се анулира. Като решим системата (16) и (17) по правилото на Крамер, намираме $C'_\nu(t)$, а оттам чрез формулата

$$C_\nu(t) = \int C'_\nu(s)ds + \alpha_\nu, \qquad \alpha_\nu = \text{const},$$

— и търсените функции C_ν, $1 \leq \nu \leq n$.

По този начин установихме, че уравненията (3) наистина допуска решения от вида (5). Ако оставим комплексните константи α_ν произволно да се менят, (5) очевидно ни дава всичките решения на $L(x) = f$.