③ Намерете обратната матрица на A, където $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$(A|E_n) \to (E_n|A^{-1})$$

Решение:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$R_3 + 3R_1$

$$\begin{array}{rrr|rrr} & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ + & 3 & 6 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ \hline & 6 & 7 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ - \; 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline -1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \;|\cdot(-1)$$

$$\begin{array}{rrr|rrr} 6 & 7 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ - \; 7 & 7 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 3 & -7 & 1 \end{array} \;|\cdot(-1)$$

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ - \; 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 3 & -6 & 1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} -3 & 7 & 1 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & -8 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

Матрични уравнения

I вид: $AX = B \;/ A^{-1}$ (ако $\exists$)

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

$$(A|B) \to (E_n|X)$$

II вид $XA = B \;/ \cdot A^{-1}$ (ако $\exists$)

1н. $X = BA^{-1}$; 2н. $\left(\frac{A}{B}\right) \to \left(\frac{E_n}{X}\right)$ // По стълбове

3н $XA = B \;/^{T}$

$$\underline{(XA)}^T = B^T \Leftrightarrow A^T X^T = B^T \to \text{1 вид}$$

$$(A^T|B^T) \to (E_n|X^T)$$

$\underline{\overline{\text{III}}}$ вид: $A X B = C$

1 начин: $XB = Y$ $\qquad$ $AY = C \rightarrow$ от $\overline{\text{I}}$ вид

$(A|C) \rightarrow (En|Y)$. Връщаме се в полагането

$XB = Y$ (от $\underline{\overline{\text{II}}}$ вид

$YB = C \rightarrow$ от $\underline{\overline{\text{II}}}$ вид

2 начин: $AX = Y$

$AX = Y$ - от $\overline{\underline{\text{I}}}$ вид

3 начин $\quad AXB = C \,/\, A^{-1}$ (отл.) $\Rightarrow XB = A^{-1}C \,/\, .B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

(само I) $\qquad$ (само I)

---

4) Решете матричното уравнение

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}}_{A} X \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}}_{C}$$

Решение: Да положим $Y = XB$. Получаваме $AY = C$

Това е от I вид $(A|C) \to (E|Y)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & -5 & 2 & 18 & 12 & 9 \\ 5 & -7 & 3 & 23 & 15 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 12 & 13 \\ -1 & 2 & 0 & 17 & 15 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 44 & 36 & 37 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 12 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 11 & 9 & 9 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rrr|rrr} & 4 & -5 & 2 & 18 & 12 & 9 \\ - & 4 & -6 & 2 & 4 & 0 & -4 \end{array} \quad \begin{array}{rrr|rrr} 5 & -7 & 3 & 23 & 15 & 11 \\ 6 & -9 & 3 & 6 & 0 & -6 \end{array} \quad \begin{array}{rrr|rrr} + \; 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 42 & 36 & 39 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 44 & 36 & 37 \end{array} \quad \begin{array}{rrr|rrr} 0 & 2 & 0 & 28 & 24 & 26 \\ -1 & 2 & 0 & 17 & 15 & 17 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 44 & 36 & 37 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 12 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 11 & 9 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 22 & 18 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 12 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 11 & 9 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 11 & 9 & 9 \\ 14 & 12 & 13 \\ 22 & 18 & 19 \end{matrix}}_{Y} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 44 & 36 & 37 \\ -\;2 & 0 & 0 & 22 & 18 & 18 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 22 & 18 & 19 \end{array}$$

$$XB = Y \;/^T$$

$$B^T X^T = Y^T \qquad (B^T | Y^T) \to (E_3 | X^T)$$

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 11 & 9 & 9 \\ 14 & 12 & 13 \\ 22 & 18 & 19 \end{bmatrix} \Rightarrow Y^T = \begin{bmatrix} 11 & 14 & 22 \\ 9 & 12 & 18 \\ 9 & 13 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 1 & 1 & 11 & 14 & 22 \\ 7 & 1 & 1 & 9 & 12 & 18 \\ \underbrace{6 \quad 2 \quad 1}_{En} & & & 9 & 13 & 15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{1 \quad 3 \quad 1}_{X^T} & & \end{array}\right]$$

$$(X^T)^T = X$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(5) $XA = A + (-4X)$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 7 & -5 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$XA - (-4X) = A$

$XA + 4X = A$

$\underbrace{X\underbrace{(A + 4E_3)}_{B} = A}$

I вид

$(B|A) \to (E_3|X)$

$XA + X\,4 \cdot E_3 = XA + 4 \cdot X \cdot E_3 = XA + 4X$

5) Да се реши матричното у-ние

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & 4 \end{pmatrix}_{3\times3}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}_{3\times2}}_{B}$$

Решение: $X_e \; 3\times2 \qquad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{l} a - c + 2e = 1 \\ b - d + 2f = 1 \\ 2a + c + 0\cdot e = 2 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} 2b + d + 0\cdot f = 3 \\ -4a - 5c + 4e = -4 \\ -4b - 5d + 4f = -7 \end{array}\right.$$

IV и $(A|B) \to (E|X)$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & 4 & -4 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$-\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 3 & -4 & 0 & 1 \end{array} \qquad -\begin{array}{ccc|cc} -4 & -5 & 4 & -4 & -7 \\ 4 & -4 & 8 & 4 & 4 \\ \hline 0 & -9 & 12 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 3 & -4 & 0 & 1 \end{array} \; :(-3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} \to & 1 & & p & q \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1-2p & 1-2q \\ 0 & 3 & 0 & 4p & 1+4q \\ 0 & 0 & 1 & p & q \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1+2p}{3} & \frac{2+2q}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3}p & \frac{1+4q}{3} \\ 0 & 0 & 1 & p & q \end{array}\right)$$

нулев рез — нулев

$$+\begin{array}{ccc|cc} 3 & -3 & 0 & 1-2p & 1-2q \\ 0 & 3 & 0 & 4p & 1+4q \end{array} \Big| \begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & 0 & 1+2p & 2+2q \end{array} \; :3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \text{няма решение}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \text{безбр много}$$

$$p \quad q \quad r$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

единствено решение