Комплексни числа

Люба Конова

Октомври 2021

1 Графично представяне

Задача 1: Да се представи графично множеството C* от комплексни числа z, такова че:

$$C^* = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 2\} \qquad C^* = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 \leq |z| \leq 4\}$$
$$C^* = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > 1,5\} \qquad C^* = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \arg z = \frac{\pi}{4}\}$$
$$C^* = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \frac{-\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}\} \qquad C^* = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z = 6\}$$
$$C^* = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z = -5,\} \qquad C^* = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - 1| = 2\}$$
$$C^* = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z + 6i| = 4\} \qquad C^* = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z + 2 - 2i| = 4\}$$

2 Алгебричен вид на комплексните числа

Задача 2: Опростете израза

$$(a + bi)^3 + i(a - bi)^2 + i^5(a + b)$$

Задача 3: Нека $z \in \mathbb{C}$ с Im $z = 164$ и нека n $\in \mathbb{N}$

$$\frac{z}{z + n} = 4i;$$

Намерете n и z.

Задача 4: Нека $z \in \mathbb{C}$. Намерете z, ако $z^2 = i$.

Задача 5: Да се реши уравнението:
a) $x^2 - (2 - 5i)x - (19 - 7i) = 0$
b) $x^2 - 2x + (13 - 16i) = 0$

3 Тригонометричен вид на комплексните числа

Задача 6: Превърнете в тригонометричен вид комплексното число:
a) $2 + \sqrt{3} + i$
b) $(1 + i)^{15}$
c) $(1 - i)^n + (1 + i)^n$
d) $\dfrac{(\sqrt{3} - i)^{15}}{(1 + i)^8}$
e) $1 + \cos\phi + i\sin\phi, \qquad \phi \in (-\pi, \pi]$
f) $(1 + \cos\phi + i\sin\phi)^n$
g) $\left(\dfrac{2\sqrt{3} - 10i}{-6\sqrt{3} + 2i}\right)^{501}$

Задача 7: Да се намерят всички решения на уравненията:
a) $x^{214} - i\sqrt{3} + 1 = 0$
b) $z^3 + 2 - 2i = 0$
c) $y^{2020} - 3\sqrt{3} - 3i = 0$

Задача 8:
а) Да се изведе формула за n -тите корени на единицата и да се илюстрират графично
в) Да се докаже, че $\omega_1^k = \omega_k, \qquad k = 0, 1, ..., n-1$
г) Да се докаже, че $\omega_0 + \omega_1 + ... + \omega_{n-1} = 0$