$$\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_X(h(y))\,|h'(y)|dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_X(h(y))dh(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)dx.$$

□

4.5 По-важни непрекъснати разпределения

4.5.1 Равномерно разпределение - $X \in U(a,b)$

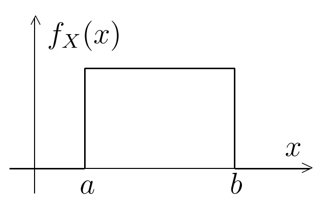
Нека $[a,b]$ е произволен интервал върху реалната права. Казваме, че случайната величина X е равномерно разпределена в $[a,b]$, ако вероятността да вземе коя да е стойност в този интервал е една и съща. Или казано по друг начин, ако X попада по случаен начин в този интервал. Равномерното разпределение се означава съкратено $X \in U(a,b)$, където $a < b$ са реални числа.

Плътността на равномерно разпределената случайна величина X е константа в $[a,b]$, т.е.

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , x \in [a,b], \\ 0 & , x \notin [a,b] \end{cases}$$

и е представена на Фигура 2.

Константата е определена от нормиращото условие (4.1.2), т.е. лицето под функцията вероятностна плътност да бъде единица.



Фигура 2. Вероятностна плътност на сл.в. $X \in U(a,b)$.

Ще намерим математическото очакване на X:

$$\mathrm{E}X = \int_a^b x\,\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x=a}^{b} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Както можеше да се предположи, математическото очакване е точно в средата на интервала $[a,b]$.

Ще пресметнем и дисперсията на X:

$$\mathrm{E}X^2 = \int_a^b x^2\,\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^3}{3}\Big|_{x=a}^{b} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Тогава за дисперсията по съкратената формула, получаваме

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

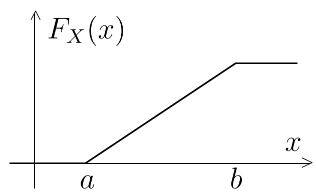
Ще използваме (4.1.5) за да определим функцията на разпределение (ф.р.) на X. Ясно е, че $F_X(x) = 0$ за $x < a$ и $F_X(x) = 1$ за $x \geq b$. Ще пресметнем съществения случай $a \leq x < b$

$$F_X(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}\, dt = \frac{t}{b-a}\Big|_{t=a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}.$$

Окончателно за ф.р. на $X \in U(a,b)$ получаваме

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , a \leq x < b, \\ 1 & , x \geq b, \end{cases}$$

чиято графика е представена на Фигура 3.



Фигура 3.

4.5.2 Експоненциално разпределение - $X \in \mathcal{E}x(\lambda)$

Определение 4.4 *Казваме, че случайна величина X е експоненциално разпределена, ако плътността ѝ има вида*

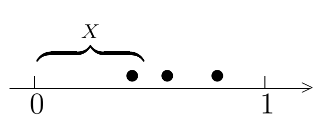
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0, \\ 0 & , x < 0, \end{cases}$$

където $\lambda > 0$ Символичното означаване на експоненциалното разпределение е следното $X \in \mathcal{E}x(\lambda)$.

Не е трудно да се провери, че разпределението е добре дефинирано, т.е. че плътноста му отговаря на условията (4.1.1) и (4.1.2). Ясно е, че $f_X(x) \geq 0$ и освен това

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{\infty} = 1.$$

Съществува връзка между Поасоновото и експоненциалното разпределение. Нека броят на събитията, сбъдващи се в някакъв интервал от време, да бъде Поасоново разпределена случайна величина с математическо очакване λ. Тогава времето X до първото сбъдване на събитие е експоненциално разпределена случайна виличина.



За да докажем този факт ще намерим функцията на разпределение X. За определеност ще приемем дължината на интервала за единица. Нека $x \geq 0$. Тогава

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X < x) = 1 - \mathrm{P}(X \geq x).$$

За да бъде изпълнено $\{X \geq x\}$ трябва в интервала $[0, x]$ да не се е сбъднало нито едно събитие. Нека с Y означим броя на събитията в този интервала. Трябва да намерим $\mathrm{P}(Y = 0)$. Средният брой събития сбъднали се в $[0, x]$ ще е пропорционален на дължината на този интервал. Тъй като в целия интервал събитията са средно λ, то в $[0, x]$ средният брой сбъднали се събития ще е λx. Следователно, Y е поасонова случайна величина с очакване $\mathrm{E}Y = \lambda x$, тогава $Y \in Po(\lambda x)$. По този начин за $F_X(x)$ получаваме:

$$F_X(x) = 1 - \mathrm{P}(X \geq x) = 1 - \mathrm{P}(Y = 0) = 1 - \frac{(\lambda x)^0 e^{-\lambda x}}{0!} = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Остава да намерим плътността на X. Съгласно (4.1.6) за $x \geq 0$ е изпълнено:

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \lambda e^{-\lambda x},$$

откъдето следва, че X е експоненциално разпределена. □

Ще пресметнем математическото очакване и дисперсията на $X \in \mathcal{E}x(\lambda)$. Прилагаме формулата за интегриране по части

$$\mathrm{E}X = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_0^\infty x\, de^{-\lambda x} = \tag{4.5.11}$$

$$= \quad -xe^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \quad -xe^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^\infty - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

В последното равенство използвахме известната от математическия анализ граница $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-\lambda x} = 0$ за всяко $n > 0$.

По аналогичен начин се пресмята

$$\mathrm{E}X^2 = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \quad -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx^2 =$$

$$= \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Тук приложихме равенство (4.5.11), за да не се налага отново да пресмятаме интегралът по части.

Сега, за дисперсията на X получаваме

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

4.5.3 Нормално разпределение - $X \in N(\mu, \sigma^2)$

Определение 4.5 *Казваме, че случайна величина X е нормално разпределена, $X \in N(\mu, \sigma^2)$, ако плътността и има вида*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{4.5.12}$$

Тук $\sigma > 0$, а μ е произволно реално число.

Нормално разпределените случайни величини са изключително често срещани, затова изучаването на техните свойства е важна задача в теория на вероятностите.

Както знаете функцията e^{-x^2} няма примитивна, т.е. не може да бъде интегрирана в общия случай. Затова вероятностите, свързани с нормално разпределена случайна величина, не могат да бъдат пресмятани по традиционния начин чрез интегриране, а се вадят от таблици.

Плътността на нормалното разпределение, както всяка плътност отговаря на условие (4.1.2). За всяко реално μ и $\sigma > 0$ е изпълнено

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = 1. \tag{4.5.13}$$

Няма да се спираме на доказателството на това равенство, ще го използваме наготово.

Забележка.(за по любознателните) Един начин за доказване е следния. Взима се интегралът на квадрат. Представя се като двоен интеграл и се извършва полярна смяна на променливите. □

Ще пресметнем математическото очакване на X.

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu+\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

Ще разделим този интеграл на две части. Първата с $x - \mu$, а втората с μ.

В първият интеграл ще извършим смяна на променливите $y = x - \mu$. При тази смяна границите на интеграла се запазват, а $dy = dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy = 0.$$

Този интеграл е равен на нула, тъй като функцията е нечетна, а границите на интегриране са симетрични.

Ще решим втория интеграл, като го сведем до (4.5.13):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \mu.$$

Следователно $\mathrm{E}X = \mu$.

Ще намерим дисперсията на X. Няма да използваме традиционния начин с намирането на $\mathrm{E}X^2$, защото това е трудоемка задача. Вместо това ще пресметнем дисперсията директно от нейната дефиниция. Като приложим Твърдение 4.3, получаваме

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X-\mathrm{E}X)^2 = \mathrm{E}(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

Ще интегрираме по части. Като ще вкараме експонентата под знака на диференциала. Предварително ще пресметнем производната на експонентата

$$\left(e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)' = -\frac{x-\mu}{\sigma^2}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Следователно

$$\mathrm{D}X = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = -\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)}{\sigma\sqrt{2\pi}} d\left(e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) =$$

$$= -\sigma^2\, \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sigma^2$$

Първото събираемо е равно на нула, тъй като $\lim\limits_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = 0$. Интегралът във второто събираемо е единица поради (4.5.13).

Така за нормално разпределената случайна величина $X \in N(\mu, \sigma^2)$ получихме

$$\mathrm{E}X = \mu, \qquad \mathrm{D}X = \sigma^2,$$

т.е. параметрите μ и σ^2, с които се задава случайната величина, са математическото очакване и дисперсията ѝ.

Както отбелязахме, вероятностите свързани с нормално разпределени случайни величини се вадят от таблици. Таблиците се отнасят само за случайни величини с очакване нула и дисперсия едно, т.е.$N(0,1)$. Прието е, тези случайни величини да се наричат „стандартно нормално разпределени“, а процедурата, с която една случайна величина се привежда към този вид - „стандартизиране“. Начина за стандартизиране е даден в следващото твърдение.

Твърдение 4.4 *Нека $X \in N(\mu, \sigma^2)$ и нека*

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma},$$

тогава $Y \in N(0,1)$.

Доказателство: Ще използваме формулата за смяна на променливите (4.3.9). В условието е зададена правата трансформация

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$

Обратната трансформация е

$$x = \sigma y + \mu.$$

Пресмятаме якобиана

$$J = \sigma.$$

Сега, от (4.5.12) и (4.3.9) за плътността на Y, получаваме

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(\sigma y + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}}\, \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{y^2}{2}}. \tag{4.5.14}$$

Тази функция явно е плътност от типа $N(0,1)$. □

4.5.4 Гама разпределение - $X \in \Gamma(\alpha, \beta)$

Определение 4.6 *Казваме, че случайна величина X има гама разпределение, $X \in \Gamma(\alpha, \beta)$, с параметри $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, ако плътността и има вида*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{4.5.15}$$

където $\Gamma(\alpha)$ е Ойлеровата гама функция, т.е. $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

Експоненциалното разпределение може да се разглежда, като частен случай на гама разпределение.

Твърдение 4.5 *Нека случайните величини $X_1 \in \Gamma(\alpha_1, \beta)$ и $X_2 \in \Gamma(\alpha_2, \beta)$ са независими. Тогава $X_1 + X_2 \in \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.*

Доказателство: Първо ще намерим съвместната плътност на случайните величини X_1 и X_2. Знаем, че те са независими, следователно

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} e^{-\beta(x_1+x_2)}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}, \qquad \left| \begin{array}{l} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

Съвместната плътност е различна от нула само в първи квадрант.

Ще направим смяна на променливите. Първата случайна величина $Y_1 = X_1 + X_2$ е тази, която ни интересува. Втората случайна величина Y_2 въвеждаме изкуствено с цел да направим смяната обратима. Правата трансформация има вида

$$\left| \begin{array}{ll} Y_1 = & X_1 + X_2, \\ Y_2 = & X_2. \end{array} \right.$$

Съответно, обратната трансформация е

$$\left| \begin{array}{rl} X_1 = & Y_1 - Y_2, \\ X_2 = & Y_2. \end{array} \right.$$

Пресмятаме модула на якобиана на трансформацията

$$|J| = \left\| \begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| = 1.$$

За съвместната плътност на новите случайни величини Y_1 и Y_2 получаваме

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}(y_1-y_2)^{\alpha_1-1}y_2^{\alpha_2-1}e^{-\beta y_1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}, \qquad \left| \begin{array}{rl} y_1 - y_2 & \geq 0, \\ y_2 & \geq 0 \end{array} \right. .$$

За да завършим доказателството остава да намерим маргиналната плътност на Y_1. За целта трябва да интегрираме съвместната плътност по y_2 Съгласно първото неравенство $y_2 \leq y_1$. Тогава за всяко $y_1 > 0$ е изпълнено

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_2 = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}e^{-\beta y_1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^{y_1} (y_1-y_2)^{\alpha_1-1}y_2^{\alpha_2-1}dy_2. \tag{4.5.16}$$

За да решим този интеграл ще направим в него смяна на променливите $t = y_2/y_1$. Ще напомним, че от гледна точка на интегрирането y_1 е константа. Тогава

$$\int_0^{y_1} (y_1-y_2)^{\alpha_1-1}y_2^{\alpha_2-1}dy_2 = y_1^{\alpha_1+\alpha_2-1} \int_0^{y_1} \left(1 - \frac{y_2}{y_1}\right)^{\alpha_1-1} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\alpha_2-1} d\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \tag{4.5.17}$$

$$= y_1^{\alpha_1+\alpha_2-1} \int_0^1 (1-t)^{\alpha_1-1}t^{\alpha_2-1}dt = y_1^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathrm{B}(\alpha_2,\alpha_1).$$

В последното равенство $\mathrm{B}(\alpha_2,\alpha_1)$ е бета функция Ойлер, дефинирана с равенството

$$\mathrm{B}(n,k) = \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{k-1}dt.$$

Сега ще използваме известната връзка между бета и гама функция

$$\mathrm{B}(n,k) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(k)}{\Gamma(n+k)}.$$

Така за интеграла от равенство (4.5.17) получаваме:

$$\int_0^{y_1} (y_1-y_2)^{\alpha_1-1}y_2^{\alpha_2-1}dy_2 = y_1^{\alpha_1+\alpha_2-1}\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Окончателно, след заместване в (4.5.16) ще намерим плътността на $Y_1 = X_1 + X_2$

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}y_1^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\beta y_1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}, \qquad y_1 \geq 0.$$

Не е трудно да се съобрази, че това е гама плътност с параметри $\alpha_1 + \alpha_2$ и β. С което твърдението е доказано. $\square$

Този резултат се обобщава по индукция за повече от две случайни величини.

Твърдение 4.6 *Нека случайните величини $X_i \in \Gamma(\alpha_i, \beta)$ $i = 1, 2, \dots, n$ са независими в съвкупност. Тогава $X_1 + X_2 + \dots + X_n \in \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \beta)$.*

4.5.5 Хи-квадрат разпределение - $X \in \chi^2(n)$

Хи-квадрат разпределението е често използвано в статистиката. При решаването на редица статистически задачи се налага да се изследват суми от квадрати на гаусови случайни величини. Оказва се, че тези суми имат хи-квадрат разпределение. Броят на събираемите n е прието да се нарича „степени на свобода“.

Ние ще въведем хи-квадрат разпределението, като частен случай на гама разпределение

Определение 4.7 *Казваме, че случайната величина има хи-квадрат разпределение с n „степени на свобода“, $X \in \chi^2(n)$, ако $X \in \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$.*

От равенство (4.5.15) може да се изрази плътността на хи-квадрат разпределението в явен вид

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{4.5.18}$$

Основното свойство, поради което се използва е формулирано в следващото твърдение.

Твърдение 4.7 *Нека случайната величини X е стандартно нормално разпределена. Тогава X^2 има хи-квадрат разпределение с една степен на свобода, т.е.*

$$X \in N(0,1) \qquad \Rightarrow \qquad X^2 \in \chi^2(1)$$

Доказателство: Ще направим смяна на променливите $Y = X^2$. Тази смяна е по-сложна от разглежданите досега, тъй като функцията не е еднозначно обратима. На всяка стойност на Y съответстват две стойности на X.

За функцията на разпределение на Y е изпълнено

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(X < -\sqrt{y}) + \mathrm{P}(X > \sqrt{y})$$

Можем да разгледаме поотделно двата случая $X < 0$ и $X \geq 0$. Във всеки един от тях смяната е обратима.

Твърдение 4.8 *Нека случайните величини $X_i \in N(0,1)$ $i = 1, 2, \dots, n$ са независими в съвкупност. Тогава*

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \in \chi^2(n).$$