Вектори - обобщение
Упражнение

I Лице на триъгълник

1) ОКС $K = Oxy$ в равнината, $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$

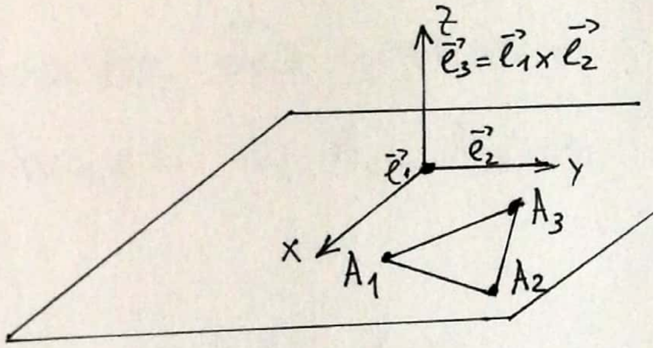
Дадени са точките:

$A_1(x_1, y_1)$

$A_2(x_2, y_2)$

$A_3(x_3, y_3)$. Да се намери лицето на $\triangle A_1A_2A_3$

$$S_{\triangle A_1A_2A_3} = \frac{|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}|}{2}$$



Векторно произведение може да се пресметне само в тримерна к.с., затова допълваме $O\vec{e_1}\vec{e_2}$ до ОКС $\overline{K} = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ като $\underline{\vec{e_3} = \vec{e_1} \times \vec{e_2}}$.

Спрямо $\overline{K} = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ имаме следните координати

$A_1(x_1, y_1, 0)$

$A_2(x_2, y_2, 0)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$, $\overrightarrow{A_1A_3}(\underset{\text{I}}{x_3 - x_1}, \underset{\text{II}}{y_3 - y_1}, \underset{\text{III}}{0})$ $\Rightarrow$

$A_3(x_3, y_3, 0)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} \left(\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & 0 \\ y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix}_{\text{II}\ \ \text{III}}, \begin{vmatrix} 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}_{\text{III}\ \ \text{I}}, \underbrace{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}_{\text{I}\ \ \text{II}}}_{\Delta} \right) \Rightarrow$$

$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\ (0, 0, \Delta) \Rightarrow |\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}| = \sqrt{0^2+0^2+\Delta^2}$

$|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}| = |\Delta|$

Разгл. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$

Извод:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\cdot \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

Формулата може да се използва без доказателство. Координатите на точките A_1, A_2 и A_3 са спрямо двумерна ОКС Oxy.

Важно: A_1, A_2 и A_3 лежат на една права $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Примери:

1) $A(2,1)$, $B(5,1)$, $C(4,3)$ спр. Oxy $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \right| =$

$= \frac{1}{2}\cdot|2+4+15-4-6-5| =$

$= 3$ кв. ед.

2) Спрямо ОКС $K = Oxyz$ в пространството са дадени точките: $A(3,2,1)$

$B(1,2,3)$

$C(2,1,3)$

Да се намери лицето на $\triangle ABC$.

Решение:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$\vec{AB}(-2,0,2)$

$\vec{AC}(-1,-1,2)$

$$\times \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AC}\left(\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC}(2, 2, 2)$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = 2.\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}.2.\sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ кв. ед.}$$

Важно: Три точки A, B и C са колинеарни $\Leftrightarrow$ $\vec{AB} \times \vec{AC} = \vec{0}$.

* * *

II Обем на тетраедър:

Спр. ОКС $K = Oxyz$ са дадени

$A_1(x_1, y_1, z_1)$

$A_2(x_2, y_2, z_2)$

$A_3(x_3, y_3, z_3)$

$A_4(x_4, y_4, z_4)$

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

Важно: Точките A_1, A_2, A_3, A_4 са компланарни

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Пример: Спрямо ОКС $K = Oxyz$ са дадени

точките: $A(3,1,2)$

$B(1,2,3)$

$C(2,3,1)$

$D(3,3,3)$. $\quad V_{ABCD} = ?$

Решение:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{DA}\ \vec{DB}\ \vec{DC})|$$

$\vec{DA}(0,2,1)$

$\vec{DB}(2,1,0) \Rightarrow (\vec{DA}\ \vec{DB}\ \vec{DC}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -9$

$\vec{DC}(1,0,2)$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |-9| = \frac{3}{2} \text{ куб. ед.}$$

Важно: Точките A, B, C, D са компланарни

$$\Longleftrightarrow (\vec{DA}\ \vec{DB}\ \vec{DC}) = 0.$$

Задачи

1 зад. ОКС $K = Oxy$

$A(2,5)$, $B(-1,-1)$, $C(3,1)$, $D(5,-1)$

Да се намерят координатите на пресечната точка M на правите AB и CD, ако такава съществува.

Решение: Нека търсената т. $M(x,y)$ спр. K =>

1) M, A и B са колинеарни => $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ =>

=> $2x - y + 1 = 0$ (1)

2) M, C, D са колинеарни => $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ =>

=> $x + y - 4 = 0$ (2)

3) Координатите на M са решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} 2x - y + 1 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow M(1,3)$$

Въпрос: Докажете, че правите AC и BD се пресичат (без да намирате пресечна точка). Какви са правите AD и BC?

Упражнение: Намерете $S_{\triangle ACD}$.

2 зад. ОКС $K = Oxyz$

$A(3,4,-2)$, $M(0,2,1)$, $N(4,2,3)$

Да се намерят координатите на върховете B и C на $\triangle ABC$, така че: т. M да е средата на AB, т. N да е медицентърът на $\triangle ABC$.

Решение:

1) $A(3,4,-2)$ $\quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{3+x_B}{2} \\ y_M = \frac{4+y_B}{2} \\ z_M = \frac{-2+z_B}{2} \end{cases}$

$B(x_B, y_B, z_B)$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_B = 2.0-3 = -3 \\ y_B = 2.2-4 = 0 \\ z_B = 2.1+2 = 4 \end{matrix} \Rightarrow B(-3,0,4)$$

2) N е медицентърът $\Rightarrow \overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

$$\begin{cases} x_N = \frac{1}{3}\cdot(3+(-3)+x_C) \\ y_N = \frac{1}{3}\cdot(4+0+y_C) \\ z_N = \frac{1}{3}\cdot(-2+4+z_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_C = 12 \\ y_C = 2 \\ z_C = 7 \end{matrix}$$

$C(12,2,7)$

3) Упр. Намерете $S_{\triangle ABC} = ?$

3 зад. ОКС $K = Oxy$ (Упражнение)

$A(3,5,1)$, $B(3,-1,-2)$, $C(5,1,3)$, $D(5,7,6)$

1) Определете вида на четириъгълника $ABCD$; Намерете лицето му.

2) Ако точките P, Q и R са:

$P = AC \cap BD$

Q - медицентърът на $\triangle ADP$

R - медицентърът на $\triangle BCP$,

докажете, че P, Q и R лежат на една права.

* * *

4 зад. ОКС $K = Oxyz$

$A(6,0,1)$, $B(-1,3,2)$, $C(5,1,3)$, $D(6,1,3)$

1) Определете взаимното положение на правите AB и CD;

2) Съществува ли тетраедър $ABCD$?

Ако съществува, намерете V_{ABCD}.

* * *

5 зад. ОКС $K = Oxyz$

$A(1,0,-1)$, $B(6,2,4)$, $C(5,0,-3)$, $D(5,2,1)$, $E(-1,0,3)$

а) Да се определи взаимното положение на правата AB и равнината (CDE)

Решение:

1) Разгл. $\overrightarrow{CD}(0,2,4)$ и $\overrightarrow{CE}(-6,0,6)$ – те са ЛНЗ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ точките C, D и E образуват ! равнина

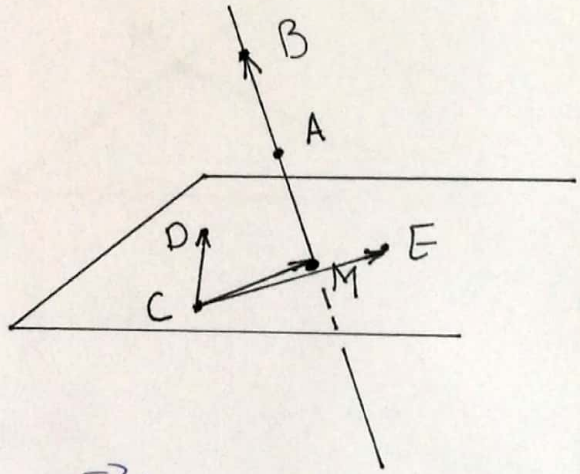
2) Разгл. $\overrightarrow{AB}(5,2,5)$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CE}$.

Ще проверим дали са ЛЗ или ЛНЗ

Пресмятаме: $(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD}\,\overrightarrow{CE}) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 72 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ правата AB не е компланарна с (CDE).

Извод: $\exists!$ т. $M = AB \cap (CDE)$



б) Да се намерят координатите на т. M

1) $\overrightarrow{MA} = x \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CA} - x \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CA}(4,0,-2)$
$\overrightarrow{AB}(5,2,5)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM}(4-5.x,\ 0-2.x,\ -2-5.x)$

2) $M \in (CDE) \Rightarrow \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}$ са Л.З. $\Rightarrow$

$(\overrightarrow{CM}\,\overrightarrow{CD}\,\overrightarrow{CE}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-5x & -2x & -2-5x \\ 0 & 2 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = +\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow M\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

/6 зад. Дадени са $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

$\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi \in (0;\pi)$

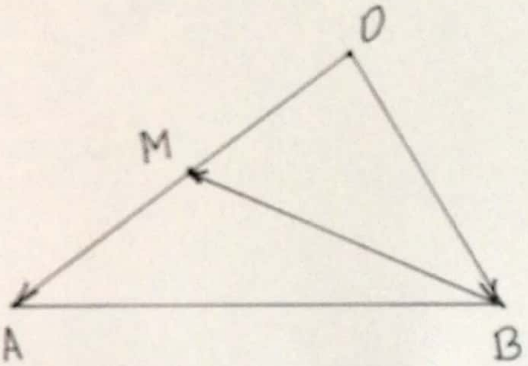
Нека $\vec{OA} = \vec{b}$ и $\vec{OB} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times (a + b)$.

а) Да се намери $\varphi = ?$ така, че медианата BM на $\triangle ABO$ да е колинеарна на $\vec{a}$.

1) Опростяване $\vec{OB}$

$$\vec{OB} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b} = (\vec{a}^2).\vec{b} - (\vec{b}\vec{a}).\vec{a} + (\vec{a}\vec{b}).\vec{b} - \vec{b}^2.\vec{a} = 1.\vec{b} - \cos\varphi.\vec{a} + \cos\varphi.\vec{b} - 1.\vec{a}$$

$$\underline{\vec{OB} = (1 - \cos\varphi).(\vec{b} - \vec{a})}$$



В условието се иска

$\vec{BM} = k.\vec{a}$

От $\triangle ABO \Rightarrow \vec{BM} = \vec{OM} - \vec{OB} = \frac{1}{2}.\vec{OA} - \vec{OB}$

$$\vec{BM} = \frac{1}{2}.\vec{b} - (1 - \cos\varphi).(\vec{b} - \vec{a}) = k.\vec{a}$$

$$\left| \begin{array}{l} (1 - \cos\varphi).\vec{a} + \left(-\frac{1}{2} + \cos\varphi\right).\vec{b} = k.\vec{a} + 0.\vec{b} \\ \vec{a}, \vec{b} \text{ - ЛНЗ по условие} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{2} + \cos\varphi = 0 \\ 1 - \cos\varphi = k \end{array} \right. \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2}, \ \varphi \in (0;\pi) \Rightarrow \varphi = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

б) При $\varphi = 60^\circ$, ако $\vec{OC} = [(\vec a\times\vec b)\times\vec a]\times[(\vec a\times\vec b)\times\vec b]$, да се намери V_{OABC}.

За $\varphi = 60^\circ$ пресмятаме: $(\vec a.\vec b) = \frac{1}{2}$

$\vec{OA} = \vec b$

$\vec{OB} = \frac{1}{2}\cdot(\vec b - \vec a)$

$$\vec{OC} = [\vec a^2.\vec b - (\vec b\vec a).\vec a]\times[(\vec a\vec b).\vec b - \vec b^2.\vec a] =$$

$$= \left(\vec b - \frac{1}{2}\cdot\vec a\right)\times\left(\frac{1}{2}\cdot\vec b - \vec a\right) = \frac{1}{2}\underbrace{(\vec b\times\vec b)}_{\vec 0} - \vec b\times\vec a - \frac{1}{4}\vec a\times\vec b + \overset{\vec 0}{\frac{\vec a\times\vec a}{2}}$$

$$\vec{OC} = \vec a\times\vec b - \frac{1}{4}\cdot\vec a\times\vec b = \frac{3}{4}\cdot\vec a\times\vec b$$

$$V_{OABC} = \frac{1}{6}\cdot|(\vec{OA}\ \vec{OB}\ \vec{OC})|$$

$$(\vec{OA}\ \vec{OB}\ \vec{OC}) = (\vec{OA}\times\vec{OB}).\vec{OC} = \left[\vec b\times\left(\frac{\vec b - \vec a}{2}\right)\right]\cdot\vec{OC} =$$

$$= \left(-\frac{\vec a\times\vec b}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\vec a\times\vec b\right) = -\frac{3}{8}\cdot(\vec a\times\vec b)^2 =$$

$$= -\frac{3}{8}\cdot\left(\vec a^2.\vec b^2 - (\vec a.\vec b)^2\right) = -\frac{3}{8}\cdot\left(1.1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{32}$$

$$V_{OABC} = \frac{1}{6}\cdot\left|-\frac{9}{32}\right| = \frac{3}{64} \text{ куб. ед.}$$

Scanned with CamScanner