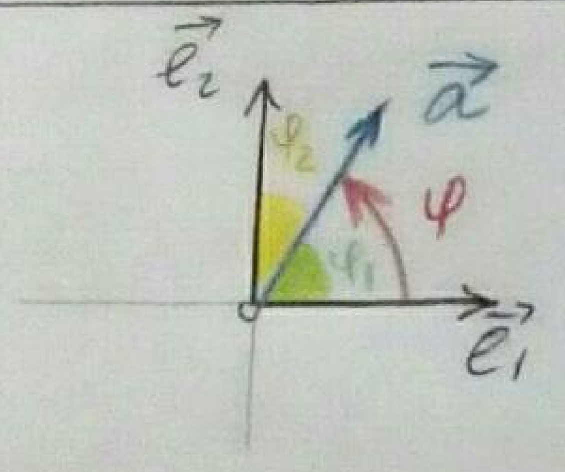
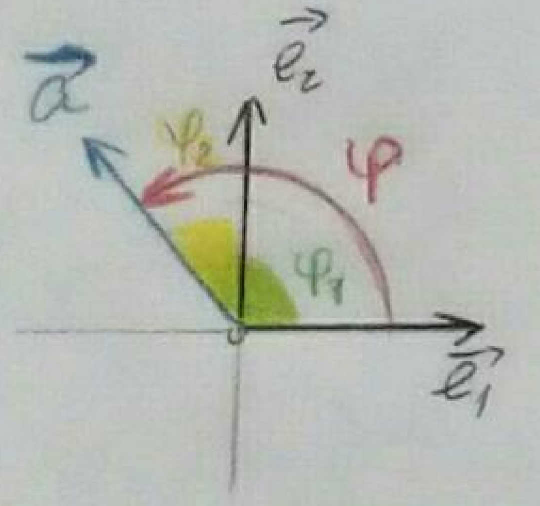
5.3. Смяна на ортонормирани координатни системи.

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ е ортонормирана координатна система и определената от нея посока е приета за положителна. Спрямо K произволен единичен вектор $\vec{a}$ - $|\vec{a}|=1$ има координати $\vec{a}(\cos\varphi_1, \cos\varphi_2)$, където $\cos\varphi_i$, $i=1,2$ са директорните косинуси на посоката, определена от вектора $\vec{a}$, т.е. $\varphi_1 = \measuredangle \vec{e}_1\vec{a}$ $\quad \varphi_2 = \measuredangle \vec{e}_2\vec{a}$.

Нека φ е ориентирания ъгъл - $\measuredangle(\vec{e}_1,\vec{a})_0$. Тогава $\vec{a}(\cos\varphi, \sin\varphi)$.

1. Нека $0 < \varphi < \pi$

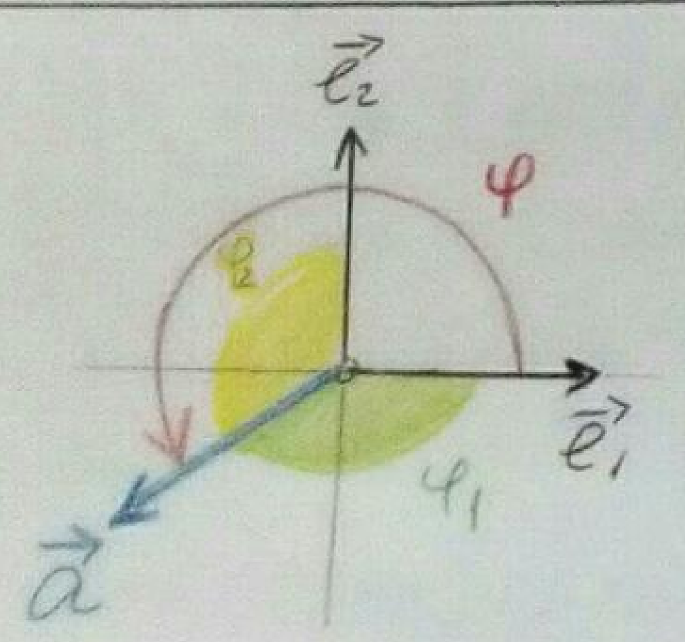


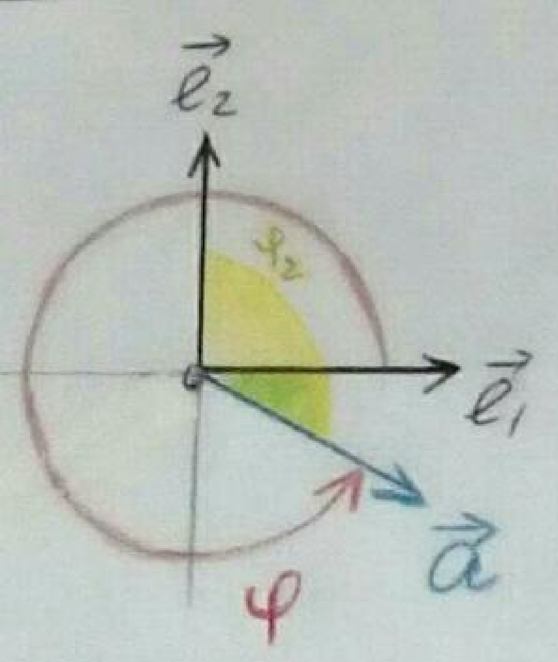


$\Rightarrow \varphi_1 = \varphi$, а $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$ или $\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos\varphi_1 = \cos\varphi$, а $\cos\varphi_2 = \sin\varphi$.

2. Нека $\pi < \varphi < 2\pi$





$\Rightarrow \varphi_1 = 2\pi - \varphi \Rightarrow \cos\varphi_1 = \cos\varphi$.

За φ_2 имаме $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2} - \varphi_1 = \varphi - \frac{\pi}{2}$

или $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1$.

И в двата случая $\cos\varphi_2 = \sin\varphi$ -

$\cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) = \sin\varphi$

$\cos\varphi_2 = -\sin\varphi_1 = -\sin(2\pi - \varphi) = \sin(\varphi - 2\pi) = \sin\varphi$

5.11

Нека сега $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ и $K' = O'\vec{e_1}'\vec{e_2}'$ са две ортонормирани координатни системи и координатите на $\vec{e_1}'$ и $\vec{e_2}'$ спрямо K са съответно $\vec{e_1}'(\cos\varphi, \sin\varphi)$ и $\vec{e_2}'(\cos\psi, \sin\psi)$, където φ и ψ са съответно ориентираните ъгли $\measuredangle(\vec{e_1}, \vec{e_1}')_0$ и $\measuredangle(\vec{e_1}, \vec{e_2}')$

От $\vec{e_1}' \perp \vec{e_2}'$ => скаларното им произведение е $\vec{e_1}'\vec{e_2}' = 0$ =>

$\cos\varphi . \cos\psi + \sin\varphi . \sin\psi = 0 \Rightarrow \cos(\varphi - \psi) = 0 \rightarrow \cos(\psi - \varphi) = 0 \Rightarrow$

$\psi = \varphi + (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\psi = -\varepsilon\sin\varphi$, $\sin\psi = \varepsilon\cos\varphi$, където $\varepsilon = \pm 1$

$\Rightarrow \vec{e_1}' = \cos\varphi . \vec{e_1} + \sin\varphi . \vec{e_2}$

$\vec{e_2}' = -\varepsilon\sin\varphi . \vec{e_1} + \varepsilon\cos\varphi . \vec{e_2}$

Следователно матрицата на прехода е
$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varepsilon\sin\varphi \\ \sin\varphi & \varepsilon\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Ако $O'_K(x_0, y_0)$, $M_K(x, y)$ и $M_{K'}(x', y')$, то за връзката между координатите на M спрямо K и K' имаме

$$\begin{cases} x = x_0 + \cos\varphi . x' - \varepsilon\sin\varphi \\ y = y_0 + \sin\varphi . x' + \varepsilon\cos\varphi \end{cases}$$

; За детерминантата на C имаме $\det C = \varepsilon\cos^2\varphi + \varepsilon\sin^2\varphi = \varepsilon$. Следователно K и K' са еднакво ориентирани <=> $\varepsilon = +1$ и противоположно ориентирани <=> $\varepsilon = -1$. (Всъщност ε е $\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})$)

Примери $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ $K' = O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ са ортонормирани координатни системи.

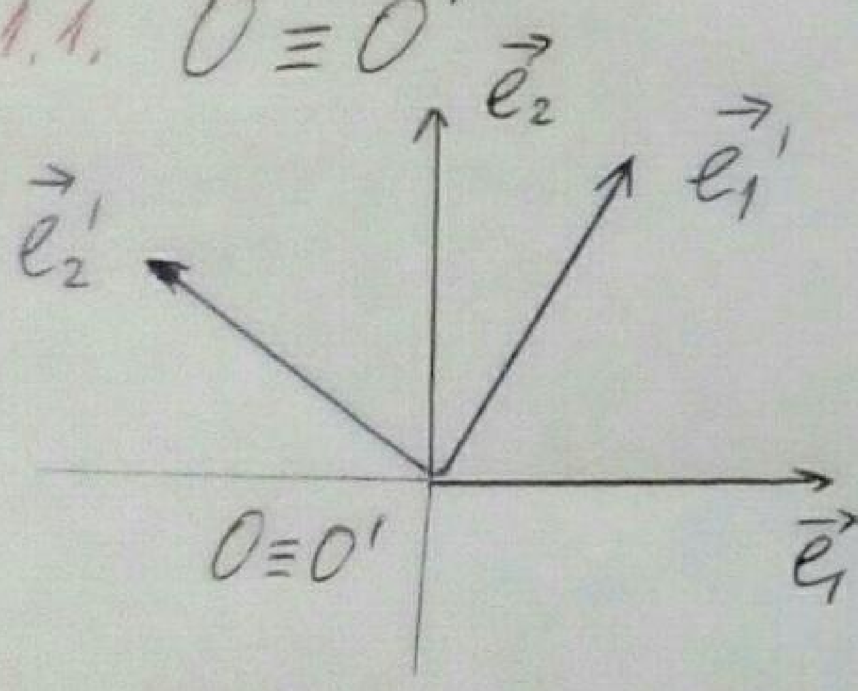
1. $\vec{e}_1{}'\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{e}_2{}'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\Rightarrow C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$

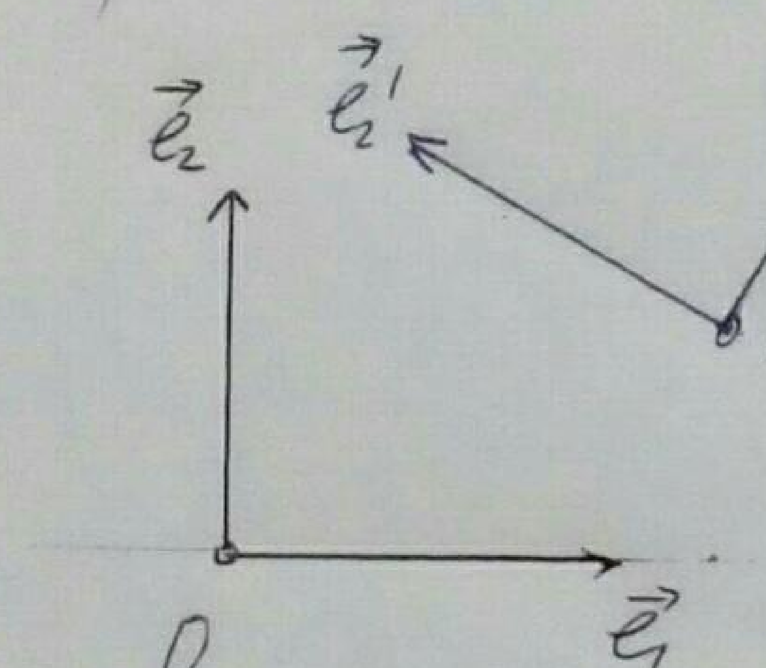
т.е. $\vec{e}_1{}'\left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$, $\vec{e}_2{}'\left(-\sin\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{3}\right)$

$$\det C = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{(-\sqrt{3})}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$\Rightarrow$ K и K' са еднакво ориентирани.

1.1. $O \equiv O'$





1.2. $O'(4,2)$ – тук за връзката между координатите на точка M спрямо K и K' имаме

1.2 $$\begin{cases} x = 4 + \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'. \end{cases}$$

1.1. $$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \end{cases}$$

2. $\vec{e}_1{}'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\vec{e}_2{}'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\Rightarrow C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$\det C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow K'$ е с отрицателна ориентация.