# Припомняне

Базис - Нека $\mathbb{V}$ е ЛП над полето $\mathbb{F}$.
Казваме, че $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{V}$ образуват базис на $\mathbb{V}$, ако:

1) $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ е ЛНЗ
2) $\ell(a_1, a_2, \dots, a_n) = \mathbb{V}$

<u>Пр:</u> $\mathbb{R}^3$ $\quad e_1 = (1, 0, 0);\ e_2 = (0, 1, 0);\ e_3 = (0, 0, 1)$

$v = (3, 4, 5) \quad v = 3 \cdot e_1 + 4 \cdot e_2 + 5 \cdot e_3$

$$\ell(a_1, a_2, \dots, a_n) = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n \mid \lambda_i \in \mathbb{F},\ a_i \in \mathbb{V}\}$$

Ранг на с-мата вектори $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ е $\dim(\ell(\underline{a_1, a_2, \dots, a_n}))$

# Сума и сечение на подпространства

Нека $\mathbb{V}$ е ЛП над $\mathbb{F}$. Нека $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ са подпространства на $\mathbb{V}$. Тогава дефинираме

$$\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in \mathbb{V}_1, v_2 \in \mathbb{V}_2\}$$

Пр: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$; $\mathbb{V}_1 = \{(a_1, 0, 0) \mid a_1 \in \mathbb{R}\}$; $\mathbb{V}_2 = \{(0, 0, a_3) \mid a_3 \in \mathbb{R}\}$

$$\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \{(a_1, 0, a_3) \mid a_1, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

Пр: $\mathbb{V}_1 = \{(a_1, \underline{a_2}, 0) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$; $\mathbb{V}_2 = \{(0, \underline{a_2}, a_3) \mid a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

$$\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

<u>Деф.</u> Казваме, че $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ обр. директна сума, ако $(\forall v \in \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2)(\exists! v_1 \in \mathbb{V}_1)(\exists! v_2 \in \mathbb{V}_2)$

$$[v = v_1 + v_2]$$

Пр. за горното ако вземем $v=(1,0,2)$

$v = \underbrace{(1,0,0)}_{\in W_1} + \underbrace{(0,0,2)}_{\in W_2}$ няма друг начин да го пол. (I пр.)

$v=(1,2,3)$; $v = \underbrace{(1,2,0)}_{\in W_1} + \underbrace{(0,0,3)}_{\in W_2}$; $v = \underbrace{(1,0,0)}_{\in W_1} + \underbrace{(0,2,3)}_{\in W_2}$

II пр.

<u>Тв:</u> $W_1 \oplus W_2 \iff \underline{W_1 \cap W_2 = \{0\}}$

директна сума

<u>Тв.</u> $\dim W_1 = n$; $\dim W_2 = k$; $\dim(W_1 \cap W_2) = r$

$\dim(W_1 + W_2) = n + k - r$

<u>Заб:</u> Ако $W_1, W_2$ са подпр-ва на $V$, то

$W_1 \cap W_2$ е подпр-во на $V$, $W_1$ и $W_2$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Като решавахме ХГ с-ма, ако имахме по-малко ЛНЗ редове от броя неизвестни въвеждахме параметри, които бяха $n-k$ на брой, където $k$ е ранга на матрицата на с-мата.

Ще представяме решенията като пр-во от решения. (фундаментална система от решения).

Алгоритъм за зад. за „+" и „∩"

1) За + искаме двете подпр-ва $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ да са зададени чрез линейни обвивки (още по-удобно, ако са линейни обвивки на техните базиси)

Ако $\mathbb{V}_1 = l(a_1,\dots,a_n)$ и $\mathbb{V}_2 = l(b_1,\dots,b_r)$. Намираме МЛНЗП на $\{a_1,\dots,a_n; b_1,\dots,b_r\}$ и тя ще обр. базис на $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$

2) Искаме и двете пространства като хг. системи. Сега ги, тез наредате ги в една система и правите ф.с.р. и решенията обр. базис на $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$.

ЛП като линейна обвивка $\underset{\text{ф.с.р.}}{\overset{\text{ф.с.в.}}{\rightleftarrows}}$ ХГ с-ма

---

(1) (4.9) подробно обяснена в сборника

а) Нека $U$ и $W$ са подпр-ва на $\mathbb{F}^4$, като $U$ е зададено като линейна обвивка на с-ма вектори, а $W$ - като пр-во от решения на ХГ с-ма. Да се намерят базиси на $U+W$ и $U\cap W$, където: $U=\ell(a_1, a_2)$; $a_1=(1,1,2,2)$; $a_2=(1,-1,2,-2)$

$$W: \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right.$$

1) Случая. Имаме че $U = l(a_1, a_2)$. Да се уверим, че са ЛНЗ, а ако са ще им вземем ЛМНЗП

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{R_1-R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

не паднаха редове значи $\{a_1, a_2\}$ е ЛМНЗП на $U$

$c_1 = (1, 0, 2, 0)$; $c_2 = (0, 1, 0, 2)$

$U = l(c_1, c_2)$

$$W: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 + x_2 = 0$

$x_3 + x_4 = 0$

Рангът на матр. е 2

$\dim \mathbb{F}^4 = 4$. Трябват ни

$4 - 2$ параметра

$x_1 + x_2 = 0$ и $x_3 + x_4 = 0$

$x_1 = -x_2$ и $x_3 = -x_4$

Изб. $x_1 = p$; $x_3 = q \Rightarrow x_2 = -p$; $x_4 = -q$

Общ вид: $(p, -p, q, -q)$ $p, q \in F$

1. Изб. $p = 0$, $q = 1$; 2. Изб. $p = 1$; $q = 0$

$d_1 = (0, 0, 1, -1)$ $d_2 = (1, -1, 0, 0)$

$W = \ell(d_1, d_2)$ [$d_1, d_2$ - базис на $W$]

Сега имаме $U$ и $W$ като линейни обвивки и знаем можем да намерим базис на сумата

За сумата намираме МЛНЗП на $\{c_1, c_2, d_1, d_2\}$

$$\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 2\ 0 \\ -\ \ 1\ {-1}\ 0\ 0 \\ \hline 0\ 1\ 2\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0\ 1\ 2\ 0 \\ -\ \ 0\ 1\ 0\ 2 \\ \hline 0\ 0\ 2\ {-2} \\ \hline 0\ 0\ 1\ {-1} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаваме, че $\underline{\{c_1, d_1, d_2\}}$ обр. базис на $\underline{U + W}$

$\dim U + W = 3$

За сечението $W$ вече е; сега ни трябва $U$

4 - 2 парам

$$\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -2x_3$

$x_2 = -2x_4$

Нека $x_3 = p$, $x_4 = q$

Решенията: $(-2p, -2q, p, q)$

1) За $p = 1, q = 0$ $\quad f_1 = (-2, 0, 1, 0)$

За $p = 0, q = 1$ $\quad f_2 = (0, -2, 0, 1)$

$$U: \begin{cases} -2x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$W: \left| \begin{array}{rrrrr} x_1 & + x_2 & & & = 0 \\ & & x_3 & + x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{U}: \left| \begin{array}{rrrrr} -2x_1 & + & x_3 & & = 0 \\ & -2x_2 & & + x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

$\underline{\dim W = 2}$

$\underline{\dim \mathcal{U} = 2}$

$\underline{\dim(\mathcal{U}+W) = 3}$

$\underline{\dim(\mathcal{U}\cap W) = 2+2-3 = 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{rrrrr} & -2 & 0 & 1 & 0 \\ + & 2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$\underline{R_3 + R_4}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= -x_2 \\ x_3 &= -x_4 \\ x_4 &= 2x_2 \end{aligned} \qquad 4-3=1$$

Нека $x_1 = p \Rightarrow$ Решения: $(p, -p, 2p, -2p)$

Избираме $p = 1$ и получаваме

$h = (1, -1, 2, -2)$ е базис на $U \cap W$

$\dim U \cap W = 1$

Проверка, че сме работили вярно

$\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

$3 = 2 + 2 - 1$ ✓

② Да се проверите следните м-ва обр. ЛП над $\mathbb{R}$ относно обичайните операции

а) $\mathcal{U} = \{ \underline{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3} \mid \underline{x - y = y - 2z = 0} \}$

1) Знаем, че $\mathbb{R}^3$ е ЛП ; $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ очевидно

Ще док. че $\mathcal{U}$ е линейно подпространство

0) Дали $0_{\mathbb{R}^3} \in \mathcal{U}$? , т.е. ако $x = y = z = 0$

дали ще е в сила: $\left| \begin{array}{l} x - y = y - 2z = 0 \\ \text{Ясно} \end{array} \right.$

1) Нека $u_1, u_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$

и $\left| \begin{array}{l} x_1 - y_1 = y_1 - 2z_1 = 0 \\ x_2 - y_2 = y_2 - 2z_2 = 0 \end{array} \right.$

Искаме да докажем $u_1 + u_2 \in U$

$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in U \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underbrace{x_1 + x_2} - (\underbrace{y_1 + y_2}) = \underbrace{y_1 + y_2} - 2(\underbrace{z_1 + z_2}) = 0}$

Имаме $\begin{array}{|l} x_1 - y_1 = y_1 - 2z_1 = 0 \\ x_2 - y_2 = y_2 - 2z_2 = 0 \end{array} \Big) +$

$\underline{x_1 + x_2 - (y_1 + y_2) = y_1 + y_2 - 2(z_1 + z_2) = 0} \checkmark$

$\Rightarrow u_1 + u_2 \in U$

Нека $\lambda \in \mathbb{R}$ и $u \in U \Rightarrow u = (x, y, z)$

и $\underline{x - y = y - 2z = 0}$ (*)

$\lambda \cdot u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. Трябва да проверим

дали $\underline{\lambda x - \lambda y = \lambda y - \lambda \cdot 2z = 0}$ (#) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ в (*) да умножим с $\lambda$

$$\underline{\lambda(x - y) = \lambda(y - 2z) = 0}$$

(същото като изнесем $\lambda$ пред скоби

в (#)) $\Rightarrow \lambda u \in U$

$\xrightarrow{0, 1, 2}$ $U$ е подпр. на $\mathbb{R}^3$ и значи е ЛП

над $\mathbb{R}$.

③ Нека Aprog да означим м-вото от всички безкрайни редици от реални числа, които са аритметични прогр.
Да се докаже обр ЛП над $\mathbb{R}$.

Решение: Ползваме, че м-вото от всички безкрайни редици образува ЛП. Да го озн. с. Seq. Очевидно $Aprog \subseteq Seq$

о) Вярно ли е че $(0,0,\dots,0)$

$\underline{a_1=0,\ d=0}$

$$(a_1, a_1+d, a_1+2d, \dots)+(b_1, b_1+q, b_1+2q, \dots)=$$
$$=(\underbrace{a_1+b_1}_{a}, a_1+b_1+\underbrace{d+q}_{разл.}, a_1+b_1+2(d+q), \dots)$$

2) $\lambda(a_1, a_1+d, a_1+2d, \ldots) =$

$$= (\underbrace{\lambda a_1}_{a}, \lambda a_1 + \underbrace{\lambda d}_{\text{разл.}}, \lambda a_1 + 2\lambda d, \ldots)$$

$\xRightarrow{0,1,2}$ Aprog е подпр-во на Seq $\square$