6. Комбинаторни конфигурации (структури)

Съдържание: основните комбинаторни структури, броят на елементите в тях, биномен коефициент свойства, Нютонов бином.

Дадено е опорно м-во $A = \{a_1 ... a_n\}$, от чиито елементи ще изграждаме комбинаторните конфигурации.

Конфигурациите (структурите) са с наредба или без наредба, с повторение или без повторение. Това дава общо 4 възможности. (наредба означава линейна наредба). С m ще означаваме броя на елементите от A в конфигурацията.

1. Конфигурации с наредба и с повторение:

М-вото от конфигурациите с наредба и с повторение с големина m над опорно м-во с мощност n означаваме с $K_{н,п}(n,m)$.

Т.е: $K_{н,п}(n,m) = \{(a_1, ..., a_m) \mid a_i \in A\}$

$$K_{н,п}(n,m) = \underbrace{A \times \dots \times A}_{m} = A^m$$

От принципа за умножението имаме: $|K_{н,п}(n,m)| = |A^m| = n^m$

Пр: $A = \{a, b, c\}$, $m = 2$, то $K_{н,п}(3,2) = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$

2. Конфигурации с наредба и без повторение:

$K_н(n,m)$ - м-во с елементи наредените m-торки с елементи от опорно м-во A без повторение

$$|K_н(n,m)| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1)) \quad (2)$$

Заб. Избираме един елемент от n елементното A за първа позиция.
За втора позиция не можем да изберем същия, защото остават
n-1 възможни елемента, от които да избираме.
За трета остават n-2 и т.н до n-(m-1).

Заб. Частен случай е n=m. Тогава в-рите се наричат пермутации и $|K_H(n,n)| = n!$

Заб. Равенството остава в сила и за m>n. Тогава дясната страна на (2) е нула и действително от принципа на Дирихле, не можем да изберем m елемента от n на брой и те да са различни за m>n.

Пр: $A=\{a,b,c\}$, $m=2$: $K_H(3,2)=\{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\}$.

Заб. $0!=1$ - по колко начина можем да наредим нула обекта в редица? Точно един: празният начин.

3. Конфигурации без наредба и без повторение!

$K(n,m)$ - м-во от m-елементните подм-ва на n елементно опорно м-во.

$$|K(n,m)| = \frac{n(n-1)\ldots(n-(m-1))}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

Заб. Малко по трудно се доказва горното равенство, затова не го пиша.

Пр: $A=\{a,b,c\}$, $m=2$; $K(n,m)=\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$

Дстр

4. Конфигурации без наредба и с повторение:

$Kn(n,m)$ – м-во с елементи мултимножества с големина m над n елементно опорно м-во.

$$|Kn(n,m)| = \binom{n+m-1}{n-1} = \binom{n+m-1}{m}$$

Заб. И това се извежда трудно.

Пр: $A = \{a,b,c\}$, $m = 2$: $Kn(3,2) = \{\{a,a\}_м, \{b,b\}_м, \{c,c\}_м, \{a,b\}_м, \{a,c\}_м, \{b,c\}_м\}$.

Деф: Биномен коефициент: $\binom{n}{m} := \dfrac{n(n-1)\cdots(n-(m-1))}{m!}$

(четем $\binom{n}{m}$ като: "n над m").

С-ва на биномния коеф:

1. $\binom{n}{m} = 0$ за $m > n$
2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
3. $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$ за $m \le n$
4. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

   Д-во: Дясната страна страна брой всички ~~n-елем~~ подм-ва на n-елементно м-во. Лявата страна брой подм-ва на n-елементно м-во по кардиналности. □

5. $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$ за $n, m \ge 1$.

Д-во: С комбинаторни съображения.

Лявата страна брои m елементните подм-ва на n-елементно

опорно м-во A. Дясната брои същото, но "по-подробно".

нека $a \in A$ - произволен:

- m-елементните подм-ва на A, които не съдържат a

са $\binom{n-1}{m}$ на бр., защото $|A \setminus \{a\}| = n-1$.

- m-ел. подм-ва на A, които съдържат a са

$\binom{n-1}{m-1}$ на бр., защото след като изберем a са останали

$m-1$, които тр. да изберем от $A \setminus \{a\}$.

От принципа на разбиването $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$. $\square$

T.1 Теорема на Нютон (Нютонов бином).

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Заб. На български "бином" е двучлен.

Д-во: Лесна индукция по n, като в стъпката ползваме с-во 5.