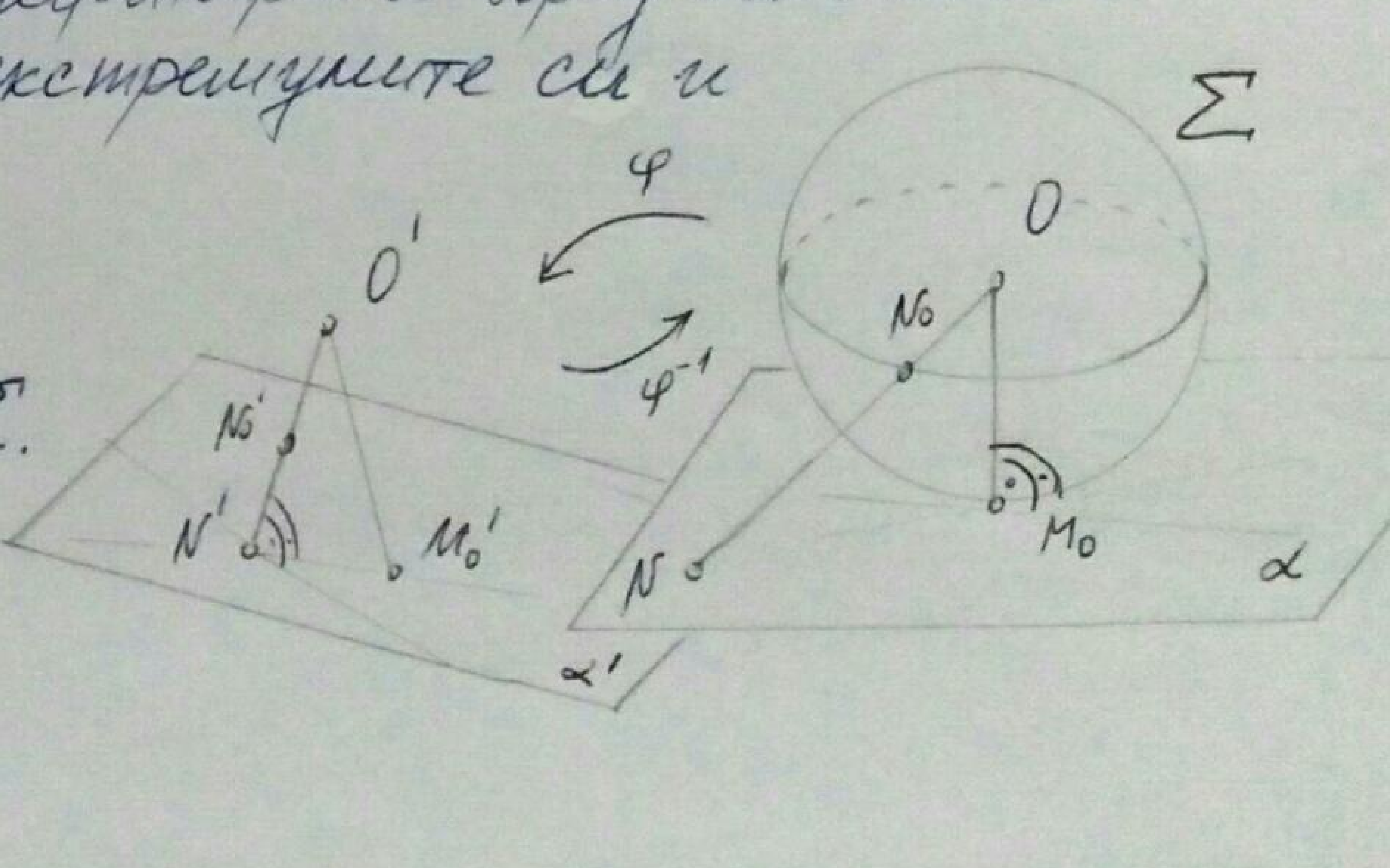
8. Представяне на афинните трансформации в пространството (чрез ортогонална и дилатации)

Лема Нека φ е афинна трансформация в E_3. Тогава съществуват три прави p, q, r такива, че $p \perp q$, $q \perp r$, $r \perp p$ и $\varphi(p) \perp \varphi(q)$, $\varphi(q) \perp \varphi(r)$ и $\varphi(r) = \varphi(p$.

Док. Нека φ е афинна трансформация, а O е произволна фиксирана точка. Означаваме със Σ сферата с център O и радиус $R = 1$. Нека $\varphi(O) = O'$. Дефинираме числовата функция на разстоянието f за множеството от точките на Σ $f: \begin{cases} \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ M \longrightarrow f(M) := |O'M'| \end{cases}$, където $M' = \varphi(M)$

Функцията f е непрекъсната, дефинирана върху компактно множество, следователно достига екстремумите си и в частност минимумите си.



Следователно $\exists$ точка $M_0 \in \Sigma$, за която $f(M_0) \leq f(M)$ за $\forall M \in \Sigma$.

Нека α е допирателната равнина към Σ в точката M_0. Следователно $OM_0 \perp \alpha$.

При афинитета φ равнината α се изобразява в равнина α'.
Нека $M_0' = \varphi(M_0)$. Ще докажем, че $O'M_0' \perp \alpha'$.
Да допуснем противното, т.е. $O'M_0' \not\perp \alpha'$ и нека N' е точката от α', за която $O'N' \perp \alpha'$ (петата на перпендикуляра през O' към α').
Да означим с N праобраза на N' при φ. От $(ON) > (OM_0)$ следва, че точката N е външна за сферата Σ, следователно отсечката (ON) пресича Σ в точка N_0. От факта, че при афинитет отсечка се изобразява в отсечка, то $N_0 \xrightarrow{\varphi} N_0'$, $N_0' \in (O'N_0')$.
Следователно $f(N_0) = |O'N_0'| < |O'N'| < |O'M_0'| = f(M_0) = f_{min}$ $\not{\;} \Rightarrow O'M_0' \perp \alpha'$
Нека $p = OM_0$ и $\Rightarrow p \perp \alpha \Rightarrow \varphi(p) \perp \varphi(\alpha) = \alpha' \Rightarrow p' = \varphi(p)$, $p' \perp x$ $\forall x \in \alpha$ права x
Тъй като φ е афинна, то φ изобразява безкрайната права на α в безкрайната права на α' — $\varphi(u_\alpha) = u_\alpha' = u_{\alpha'}$.
Следователно φ индуцира афинитет $\varphi|_\alpha$ между α и α' -(крайните точки от α се изобразяват в крайните точки на α' и обратно)
Тогава, както в двумерния случай (в E_2) се доказва, че съществуват прави q и r през точката M_0, $q \perp r$ такива, че $\varphi(q) \perp \varphi(r)$ като $\varphi(q)$ и $\varphi(r)$ се пресичат в M_0', с което доказателството е завършено □.

Забележка. Ясно е, че ако $q^* \begin{cases} \ni O \\ \parallel q \end{cases}$ и $r^* \begin{cases} \ni O \\ \perp r \end{cases}$, то трите взаимно перпендикулярни прави през O – p, q^*, r^* се изобразяват чрез φ съответно в три взаимно перпендикулярни прави.

Направленията, които задават p, q и r наричаме главни направления на афинитета φ.

Имаме, че през всяка точка в E_3 съществуват три взаимно перпендикулярни прави, които при афинитет се изобразяват отново в перпендикулярни. За удобство казваме, че има три „взаимно перпендикулярни безкрайни точки", които при φ: $\varphi(\Omega)=\Omega$ се изобразяват отново в перпендикулярни такива.

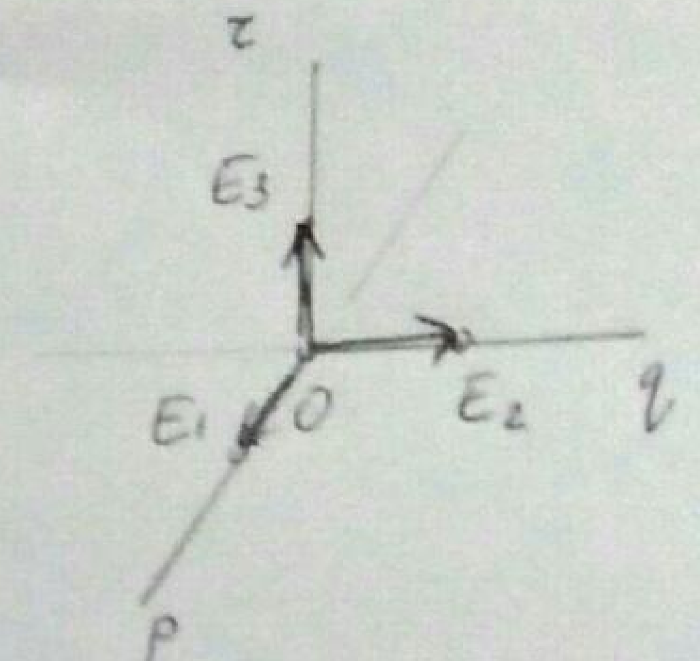
Аналог на теоремата в равнинния случай е следната теорема.

Теорема Всяка афинна трансформация в E_3 се представя като произведение от ортогонална трансформация и три дилатации по три взаимно перпендикулярни прави.

Доказателство. Нека φ е афинна трансформация, а O – фиксирана по произволен начин точка и $\varphi(O) = O'$. Нека p, q и r са три взаимно перпендикулярни прави през O, чиито образи $p' = \varphi(p)$, $q' = \varphi(q)$ и $\varphi(r) = r'$ отново са взаимно перпендикулярни. Върху правите p, q и r избираме точки E_1, E_2 и E_3 (съответно) такива, че $|OE_i| = 1$, а върху p', q' и r' – точки E_1^*, E_2^*, E_3^* (съответно върху p', q', r'): $|O'E_i^*| = 1$

Означаване с $\vec{e_i} = \overrightarrow{OE_i}$ и с $\vec{e_i^*} = \overrightarrow{O'E_i^*}$, $i=1,2,3$

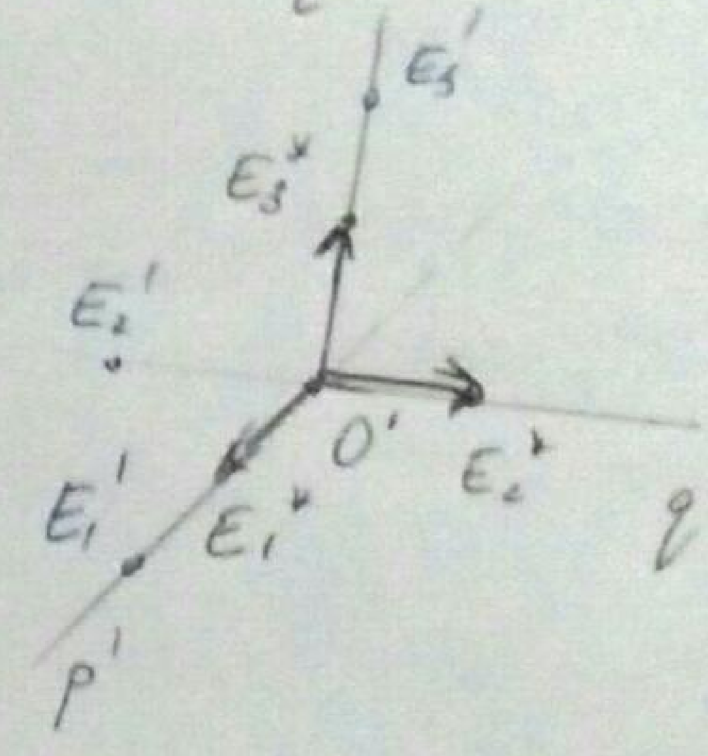
Нека $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ и $K^* = O'\vec{e_1^*}\vec{e_2^*}\vec{e_3^*}$ са ортонормираните координатни системи с начало съответно O и O' и единични вектори съответно $\vec{e_i}$ и $\vec{e_i^*}$ $(i=1,2,3)$.



Освен това, означаване с $E_i' = \varphi(E_i)$.

Нека τ е ортогоналната трансформация, при която $K \xrightarrow{\tau} K^*$, а δ_i са дилатациите, съответно по $O'\vec{e_i^*}$, определени от

$O' \xrightarrow{\delta_i} O'$, $E_i^* \xrightarrow{\delta_i} E_i'$, $E_j^* \xrightarrow{\delta_i} E_j^*$ за $j \neq i$



Тогава при афинната трансформация φ^*, където $\boxed{\varphi^* = \delta_3\delta_2\delta_1\tau}$ имаме

$O \xrightarrow{\tau} O' \xrightarrow{\delta_1} O' \xrightarrow{\delta_2} O' \xrightarrow{\delta_3} O'$,

$E_1 \xrightarrow{\tau} E_1^* \xrightarrow{\delta_1} E_1' \xrightarrow{\delta_2} E_1' \xrightarrow{\delta_3} E_1'$

$E_2 \xrightarrow{\tau} E_2^* \xrightarrow{\delta_1} E_2^* \xrightarrow{\delta_2} E_2' \xrightarrow{\delta_3} E_2'$

$E_3 \xrightarrow{\tau} E_3^* \rightarrow E_3^* \xrightarrow{\delta_2} E_3^* \xrightarrow{\delta_3} E_3'$

$\Rightarrow \varphi^*(O, E_1, E_2, E_3) = O', E_1', E_2', E_3' \Rightarrow$

$\varphi^* \equiv \varphi \Rightarrow \varphi = \delta_3\delta_2\delta_1\tau$. □

Забележка: Горното разлагане не е еднозначно. Най-малкото може K и K^* да не са еднакво ориентирани.

Най-общо – при афинитет сфера се изобразява в елипсоид, като при това има три взаимно перпендикулярни диаметъра, които се изобразяват в главните оси на елипсоида.