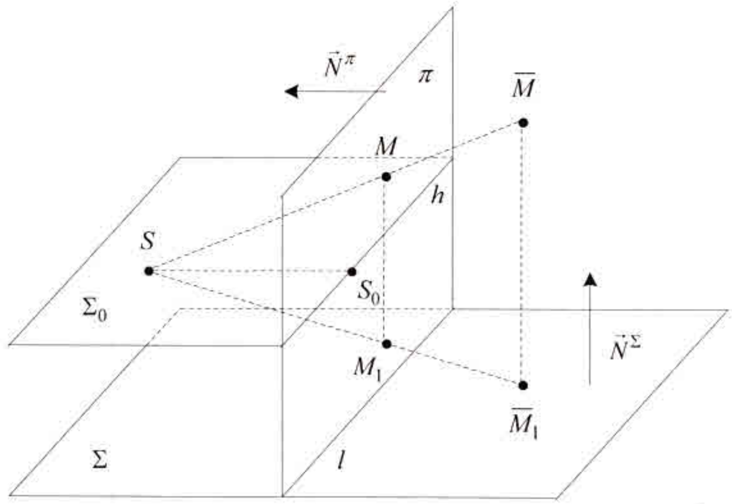
20. Аналитично задаване на перспектива

Нека спрямо ортонормирана координатна система $\overline{K} = \{\overline{O}, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ картинната равнина π има координати $\pi[A, B, C, D]$. Искаме $|\vec{N}^{\pi}| = 1$, т.е. $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. Нека предметната равнина Σ има координати $\Sigma[u, v, w, n]$, като $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, т.е. $|\vec{N}^{\Sigma}| = 1$. Тъй като $\Sigma \perp \pi$, то $\vec{N}^{\pi}\vec{N}^{\Sigma} = 0$ и $Au + Bv + Cw = 0$.

Нека проекционният център S има координати $S(a, b, c, 1)$. От $S \notin \pi$ следва, че $Aa + Bb + Cc + D \neq 0$.

Тъй като $|\vec{N}^{\pi}| = 1$, уравнението $Ax + By + Cz + D = 0$ е нормално уравнение на π (в нехомогенни координати). Тогава, ако означим $\rho = Aa + Bb + Cc + D$, то за дистанцията получаваме $d = |\rho|$, $d = |SS_0|$.



Сега ще намерим координатите на главната точка на картината S_0. Ще работим в нехомогенни координати, тъй като S и S_0 са крайни точки.

Нека $S_0(a_0, b_0, c_0, 1)$. Тъй като $\vec{N}^{\pi}(A, B, C) \parallel SS_0$, то правата SS_0 има параметрични уравнения:

$$SS_0 : \begin{cases} x = a + \lambda A \\ y = b + \lambda B \\ z = c + \lambda C \end{cases} \lambda \in (-\infty, +\infty).$$

Тогава от $S_0 \in \pi$ имаме

$Aa_0 + Bb_0 + Cc_0 + D = 0$ и следователно $Aa + Bb + Cc + D + \lambda\left(A^2 + B^2 + C^2\right) = 0$.

Но $\rho = Aa + Bb + Cc + D$ и $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, откъдето $\lambda = -\rho$. Като заместим $\lambda = -\rho$ в параметричните уравнения на SS_0 получаваме $a_0 = a - \rho A,\ \ b_0 = b - \rho B,\ \ c_0 = c - \rho C$.

Следователно, хомогенните координати на главната точка S_0 са $S_0(a - \rho A, b - \rho B, c - \rho C, 1)$.

I. Нека $\overline{M}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t})$ е произволна точка в пространството. Ще намерим координатите на ортогоналната проекция $\overline{M}_1$ на точката $\overline{M}$ в Σ. Тъй като $\vec{N}^{\Sigma}(u, v, w, n) \perp \Sigma$, то безкрайната точка $P^{\infty}(u, v, w, 0)$ е перпендикулярна на Σ, $(P^{\infty} \perp \Sigma)$.

Ако означим с $\psi_{\Sigma}^{P^{\infty}}$ ортогоналното проектиране върху Σ, то

$\overline{M}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t}) \xrightarrow{\psi_{\Sigma}^{P^{\infty}}} \overline{M}_1(\overline{x}_1, \overline{y}_1, \overline{z}_1, \overline{t}_1)$, т.е. $\overline{M}_1 \in P^{\infty}\overline{M} \cap \Sigma$.

1) От $\overline{M}_1 = P^{\infty}\overline{M} \cap \Sigma$ следва, че $\begin{cases} \overline{x}_1 = \lambda\overline{x} + \mu u \\ \overline{y}_1 = \lambda\overline{y} + \mu v \\ \overline{z}_1 = \lambda\overline{z} + \mu w \\ \overline{t}_1 = \lambda\overline{t} \ \ + \mu.0 \end{cases}$ $\quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ (1);

2) От $\overline{M}_1 \in \Sigma$ имаме $u\overline{x}_1 + v\overline{y}_1 + w\overline{z}_1 + \overset{n}{\overline{t}_1} = 0$, т.е. $\lambda(u\overline{x} + v\overline{y} + w\overline{z} + n\overline{t}) + \mu(u^2 + v^2 + w^2) = 0$ и можем да изберем $\lambda = 1$, $\mu = -(u\overline{x} + v\overline{y} + w\overline{z} + n\overline{t})$. Заместваме в (1) и получаваме:

$\overline{x}_1 = \overline{x} - (u\overline{x} + v\overline{y} + w\overline{z} + n\overline{t})u = (1 - u^2)\overline{x} - uv\overline{y} - wu\overline{z} - nu\overline{t}$

$\overline{y}_1 = \overline{y} - (u\overline{x} + v\overline{y} + w\overline{z} + n\overline{t})v = -uv\overline{x} + (1 - v^2)\overline{y} - wv\overline{z} - nv\overline{t}$

$\overline{z}_1 = \overline{z} - (u\overline{x} + v\overline{y} + w\overline{z} + n\overline{t})w = -uw\overline{x} - uw\overline{y} + (1 - w^2)\overline{z} - nw\overline{t}$

$\overline{t}_1 = \overline{t}$

Следователно:

$$\psi_{\Sigma}^{p^{\infty}}:\begin{pmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{y}_1\\ \overline{z}_1\\ \overline{t}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-u^2 & -uv & -wu & -nu\\ -uv & +1-v^2 & -wv & -nv\\ -uw & -vw & 1-w^2 & -nw\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\\ \overline{z}\\ \overline{t}\end{pmatrix} \text{ или: } \psi_{\Sigma}^{p^{\infty}}:\begin{pmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{y}_1\\ \overline{z}_1\\ \overline{t}_1\end{pmatrix}=C_{\psi_{\Sigma}^{p^{\infty}}}\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\\ \overline{z}\\ \overline{t}\end{pmatrix}.$$

II. Сега ще намерим аналитично задаване на централното проектиране ψ_{π}^{S} от S в π. Нека $\overline{M}(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t})\xrightarrow{\psi_{\pi}^{S}}M(x',y',z',t')$ и $\overline{M}_1(\overline{x}_1,\overline{y}_1,\overline{z}_1,\overline{t}_1)\xrightarrow{\psi_{\pi}^{S}}M_1(x_1',y_1',z_1',t_1')$. Тогава $M=\overline{M}S\cap\pi$ е перспективата на $\overline{M}$, а точката M_1 е вторичната проекция на $\overline{M}$.

1) От $M\in S\overline{M}$ следва, че $\begin{cases}x'=\lambda\overline{x}+\mu a\\ y'=\lambda\overline{y}+\mu b\\ z'=\lambda\overline{z}+\mu c\\ t'=\lambda\overline{t}+\mu.1\end{cases}$ $\quad(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ (2)

2) От $M\in\pi$, получаваме $Ax'+By'+Cz'+Dt'=0$ т.е.
$\lambda(A\overline{x}+B\overline{y}+C\overline{z}+D\overline{t})+\mu(Aa+Bb+Cc+D.1)=0$ и можем да изберем
$\lambda=\rho,\ \mu=-(A\overline{x}+B\overline{y}+C\overline{z}+D\overline{t})$.

Заместваме в (2) и получаваме:

$$x'=\rho\overline{x}-(A\overline{x}+B\overline{y}+C\overline{z}+D\overline{t})a=(\rho-Aa)\overline{x}-(Ba)\overline{y}-(Ca)\overline{z}-(Da)\overline{t}$$
$$y'=\rho\overline{y}-(A\overline{x}+B\overline{y}+C\overline{z}+D\overline{t})b=-(Ab)\overline{x}+(\rho-Bb)\overline{y}-(Cb)\overline{z}-(Db)\overline{t}$$
$$z'=\rho\overline{z}-(A\overline{x}+B\overline{y}+C\overline{z}+D\overline{t})c=-(Ac)\overline{x}-(Bc)\overline{y}+(\rho-Cc)\overline{z}-(Dc)\overline{t}$$
$$t'=\rho\overline{t}-(A\overline{x}+B\overline{y}+C\overline{z}+D\overline{t})=-A\overline{x}-B\overline{y}-C\overline{z}+(\rho-D)\overline{t}$$

Следователно:

$$(3)\qquad \psi_{\pi}^{S}:\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\\ t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho-Aa & -Ba & -Ca & -Da\\ -Ab & \rho-Bb & -Cb & -Db\\ -Ac & -Bc & \rho-Cc & -Dc\\ -A & -B & -C & \rho-D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\\ \overline{z}\\ \overline{t}\end{pmatrix}\qquad \text{или } \psi_{\pi}^{S}:\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\\ t'\end{pmatrix}=C_{\psi_{\pi}^{S}}\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\\ \overline{z}\\ \overline{t}\end{pmatrix}.$$

Вторичните проекции на точките получаваме чрез произведението

$$\psi_{\pi}^{S}.\psi_{\Sigma}^{p^{\infty}}:\begin{pmatrix}x_1'\\ y_1'\\ z_1'\\ t_1'\end{pmatrix}=C_{\psi_{\pi}^{S}}C_{\psi_{\Sigma}^{p^{\infty}}}\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\\ \overline{z}\\ \overline{t}\end{pmatrix}.$$

Желателно е да имаме координатите на перспективите на точките, спрямо ортонормирана координатна система в картинната равнина π. За да се получи изображение, което се възприема най-естествено, е най-добре ортонормираната координатна система $K^{*}=\{S_0,\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$ в π да е с начало S_0 – главната точка на картината и $\vec{e}_1'\parallel h$.

Нека $K'=\{S_0,\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$, където $\vec{e}_3'=\vec{N}^{\pi}(A,B,C)$. Тъй като $\Sigma\perp\pi$, то $\vec{N}^{\Sigma}\parallel\pi$. Ако изберем $\vec{e}_2'=\vec{N}^{\Sigma}(u,v,w)$, то $\vec{e}_2'\times\vec{e}_3'=\vec{e}_1'\parallel h$.

Тогава $\vec{e}_1'\left(\begin{vmatrix}v & w\\ B & C\end{vmatrix},\begin{vmatrix}w & u\\ C & A\end{vmatrix},\begin{vmatrix}u & v\\ A & B\end{vmatrix}\right)$ или $\vec{e}_1'(Cv-Bw,\,Aw-Cu,\,Bu-Av)$.

Означаваме за краткост $p=Cv-Bw,\ q=Aw-Cu,\ r=Bu-Av$.

Ортогоналната трансформация φ, която довежда $K'=\{S_0,\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$ в $\overline{K}=\{\overline{O},\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}$, ще довежда равнината $\pi\equiv(S_0\,\vec{e}_1'\,\vec{e}_2')$ в равнината $(\overline{O}\,\vec{e}_1\,\vec{e}_2)\equiv(\overline{O}\overline{x}\overline{y})$, т.е. $\varphi(\pi)=(\overline{O}\,\vec{e}_1\,\vec{e}_2)$.

От формулите за смяна на ортонормирани координатни системи имаме следното представяне на φ (в нехомогенни) координати:

$$\varphi:\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Cv-Bw & Aw-Cu & Bu-Av\\ u & v & w\\ A & B & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix}$$

В хомогенни координати φ се представя чрез:

$$\varphi:\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&q&r&f_1\\u&v&w&f_2\\A&B&C&f_3\\0&0&0&f_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}.$$

Числата f_1, f_2, f_3, f_4 определяме от условието

$$S_o(a_0, b_0, c_0, 1)\xrightarrow{\varphi}\bar{O}(0,0,0,1),\text{ т.е. }\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&q&r&f_1\\u&v&w&f_2\\A&B&C&f_3\\0&0&0&f_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\\1\end{pmatrix}.$$

Оттук получаваме:

1). $0 = pa_0 + qb_0 + rc_0 + f_1$. Като заместим a_0, b_0, c_0 от (*), намираме

$f_1 = -(pa_0 + qb_0 + rc_0) = -p(a-\rho A) - q(b-\rho B) - r(c-\rho C) = -(pa+qb+rc) + \rho(pA+qB+rC)$.

Но векторите $\vec{e}_1'(p, q, r)$ и $\vec{e}_3'(A, B, C)$ са перпендикулярни, т.е. $\vec{e}_1'.\vec{e}_3' = pA + qB + rC = 0$;

Следователно $f_1 = -(pa + qb + rc)$.

2). $0 = ua_0 + vb_0 + wc_0 + f_2$. От тук:

$f_2 = -(ua_0 + vb_0 + wc_0) = -u(a-\rho A) - v(b-\rho B) - w(c-\rho C) = -(ua+vb+wc) + \rho(uA+vB+wC)$.

Но $uA + vB + wC = 0$. Следователно $f_2 = -(ua + vb + wc)$;

3). $0 = Aa_0 + Bb_0 + Cc_0 + f_3$. Пресмятаме:

$f_3 = -(Aa_0 + Bb_0 + Cc_0) = -A(a-\rho A) - B(b-\rho B) - C(c-\rho C) = -(Aa+Bb+Cc) + .\rho(A^2+B^2+C^2)$.

Но $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, $\rho = Aa + Bb + Cc + D$, т.е. $Aa + Bb + Cc = \rho - D$, откъдето

$f_3 = -(\rho - D) + \rho = D$.

4). $f_4 = 1$.

Следователно:

$$\varphi:\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&q&r&-(pa+qb+rc)\\u&v&w&-(ua+vb+wc)\\A&B&C&D\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\qquad\text{или }\varphi:\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}=C_\varphi\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix},$$

където $p = Cv - Bw,\ q = Aw - Cu,\ r = Bu - Av$.

Оттук получаваме окончателно, че с трансформацията $\theta = \varphi\psi_\pi^S$ намираме перспективите на точките в равнината $(\bar{O}\bar{x}\bar{y})$, $\bar{O} \equiv S_0$. Имаме:

$$\theta=\varphi\psi_\pi{}^S:\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&q&r&-(pa+qb+rc)\\u&v&w&-(ua+vb+wc)\\A&B&C&D\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho-Aa&-Ba&-Ca&-Da\\-Ab&\rho-Bb&-Cb&-Db\\-Ac&-Bc&\rho-Cc&-Dc\\-A&-B&-C&\rho-D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\quad\text{или}$$

$$\theta:\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho p&\rho q&\rho r&-\rho(pa+qb+rc)\\\rho u&\rho v&\rho w&-\rho(ua+vb+wc)\\0&0&0&0\\-A&-B&-C&\rho-D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\quad\text{или}$$

$$\theta:\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}=\rho\begin{pmatrix}p&q&r&-(pa+qb+rc)\\u&v&w&-(ua+vb+wc)\\0&0&0&0\\-\dfrac{A}{\rho}&-\dfrac{B}{\rho}&-\dfrac{C}{\rho}&1-\dfrac{D}{\rho}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}.$$

С трансформацията $\chi = \theta\psi_\Sigma^{p^\infty} = \varphi\psi_\pi^S\psi_\Sigma^{p^\infty}$ получаваме вторичните образи в картинната равнина $(\bar{O}\bar{x}\bar{y})$, $\bar{O} \equiv S_0$.

$$\chi:\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}=\rho\begin{pmatrix}p & q & r & -(pa+qb+rc)\\ 0 & 0 & 0 & -n-(ua+vb+wc)\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -\dfrac{A}{\rho} & -\dfrac{B}{\rho} & -\dfrac{C}{\rho} & 1-\dfrac{D}{\rho}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$$

С трансформациите θ и χ получаваме хомогенните координати на изобразяваните точки:

$$\overline{M}(x,y,z,t)\xrightarrow{\theta}M(x',y',0,t') \text{ и } \overline{M}_1(x,y,z,t)\xrightarrow{\chi}M_1(x'_1,y'_1,0,t'_1).$$

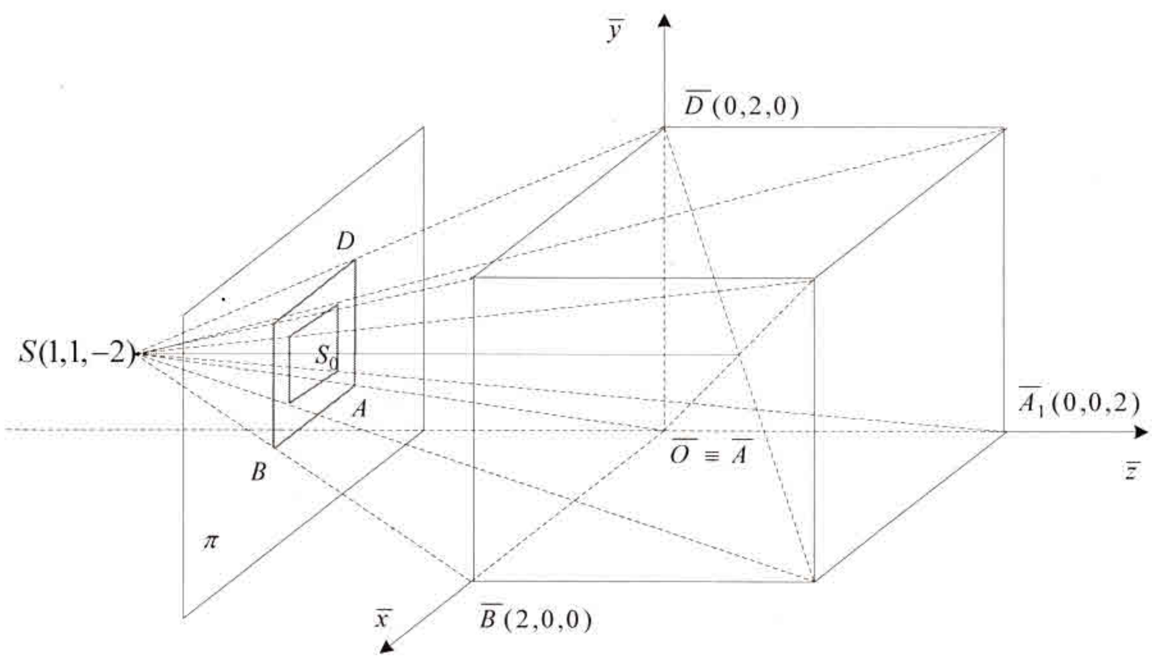
Тъй като изобразяванит обект е в полупространството, което не съдържа S, т.е. $S\overline{M}\not\parallel\pi$, то $t'\neq 0$. Тогава можем да зададем образите на точките с нехомогенни координати спрямо координатната система $K^*=\{S_0,\overline{e}_1,\overline{e}_2\}$ в равнината $\pi\equiv(\overline{O}\,\overline{x}\,\overline{y})$:

$$M(X',Y'),\ M_1(X'_1,Y'_1), \text{ където } \frac{x'}{t'}=X',\ \frac{y'}{t'}=Y' \text{ и } \frac{x'_1}{t'_1}=X'_1,\ \frac{y'_1}{t'_1}=Y'_1.$$

Тъй като изобразяваното тяло се разполага върху предметната равнина Σ, то може да приемем, че $\Sigma\parallel(\overline{O}\,\overline{x}\,\overline{z})$. Тогава $\Sigma[0,1,0,n]$ и понеже $\Sigma\perp\pi$ – $\pi[A,0,C,D]$. В този случай $\vec{e}'_1(Cv-Bw,\ Aw-Cu,\ Bu-Av)=e_1(C,0,-A)$, $\vec{e}'_2=\vec{N}^{\Sigma}(u,v,w)=(0,1,0)$ откъдето:

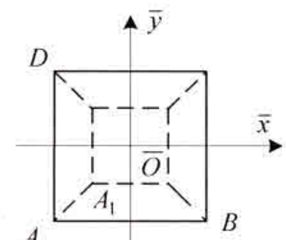
$$\theta:\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}=\rho\begin{pmatrix}C & 0 & -A & Ac-Ca\\ 0 & 1 & 0 & -b\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -\dfrac{A}{\rho} & 0 & -\dfrac{C}{\rho} & 1-\dfrac{D}{\rho}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \text{ и } \chi:\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}=\rho\begin{pmatrix}C & 0 & -A & Ac-Ca\\ 0 & 0 & 0 & -n-b\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -\dfrac{A}{\rho} & 0 & -\dfrac{C}{\rho} & 1-\dfrac{D}{\rho}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}.$$

Пример: Спрямо ортонормирана координатна система в пространството $\overline{K}=\overline{O}\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3$ е даден куб $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1\overline{D}_1$ с върхове $\overline{A}(0;0;0;1)$, $\overline{B}(2;0;0;1)$, $\overline{D}(0;2;0;1)$, $\overline{A}_1(0;0;2;1)$.

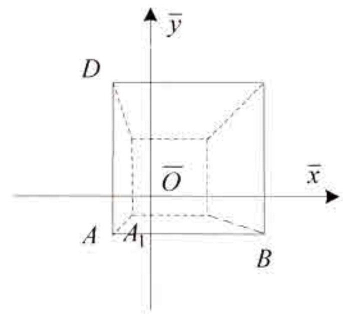


А) В перспектива с проекционна равнина $\pi[0;0;1;1]$, център $S(1;1;-2;1)$ и матрица

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$ образът на куба е:

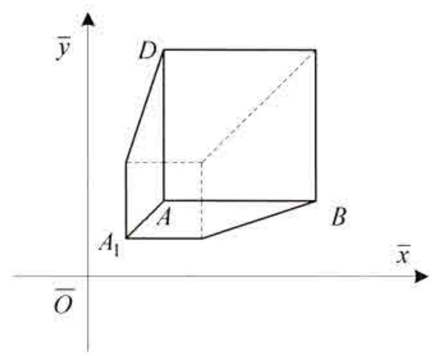


Б) В перспектива с проекционна равнина $\pi[0;0;1;1]$, център $S(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-2;1)$ и матрица



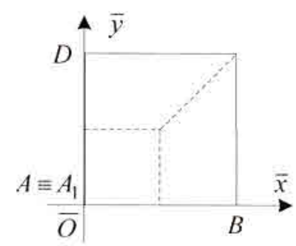
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ образът на куба е:

В) В перспектива с проекционна равнина $\pi[0;0;1;1]$, център $S(-1;-1;-2;1)$ и матрица



$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ образът на куба е:

Г) В перспектива с проекционна равнина $\pi[0;0;1;1]$, център $S(0;0;-2;1)$ и матрица



$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ образът на куба е:

Ако центърът е $S(1;1;-2;1)$ и въртим проекционната равнина около правата $g:\begin{cases} x=1 \\ z=-1 \end{cases}$, то $\pi: \sin\theta x + \cos\theta z + \cos\theta - \sin\theta = 0$ или $\pi[\sin\theta, 0, \cos\theta, \cos\theta - \sin\theta]$. Тогава матрицата е

$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & -2\sin\theta - \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ tg\theta & 0 & 1 & 2 + tg\theta \end{pmatrix}$ като $\theta \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.