Упражнение за комплексни числа

Йонко Йонков

9 октомври 2020 г.

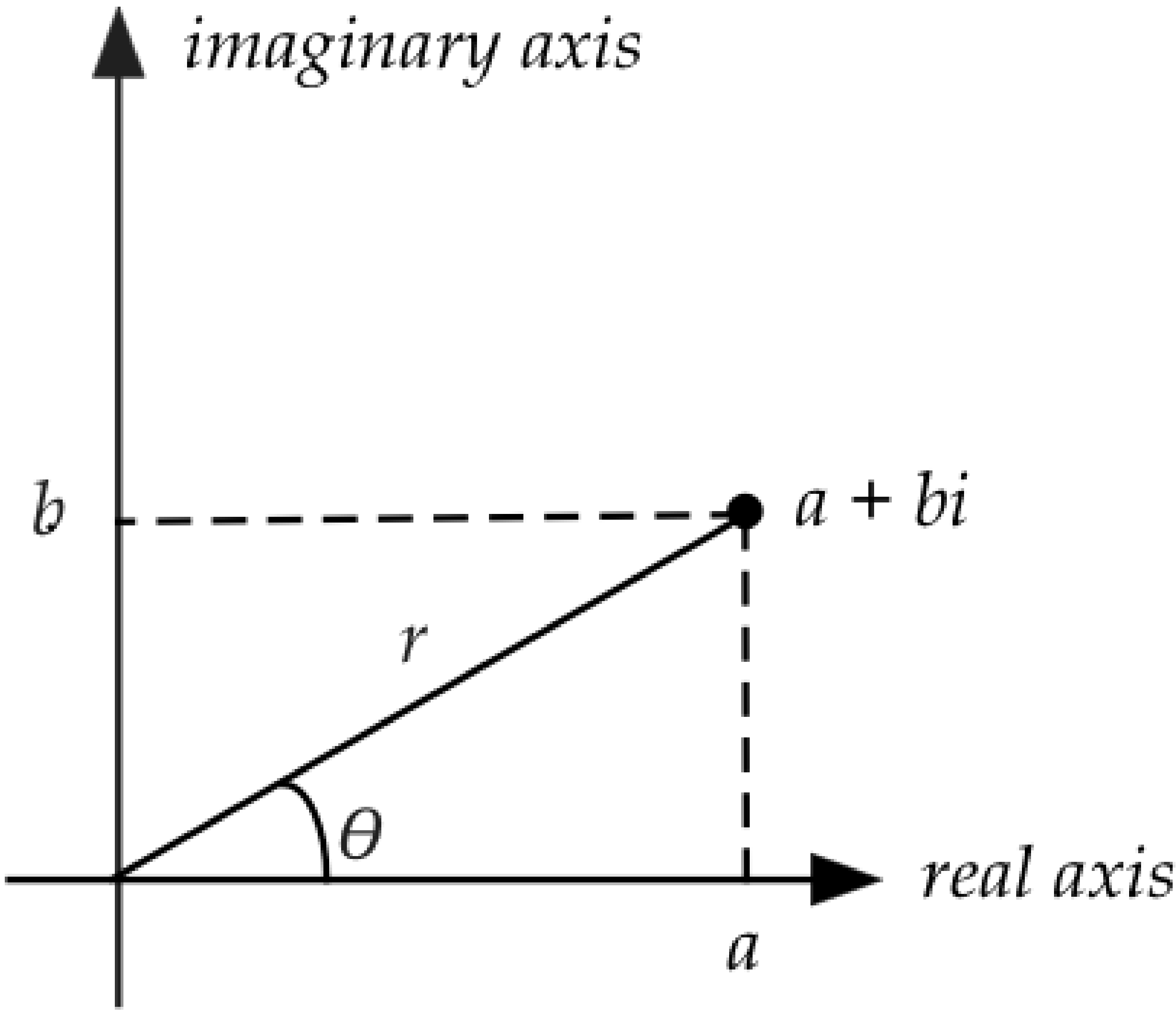
Как са измислени комплексните числа

Нека $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + an$, където $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$, а $\mathbb{Z}$ е множеството на целите числа. Основен въпрос в математиката е дали, коефициентите и корените на уравнението са от едно и също множество. Например $x - 2 = 0$ има корен 2, който също е цяло число, но $2x - 1 = 0$ има корен $\frac{1}{2}$, който не е цяло число. Поради тази причина сега разглеждаме множеството на рационалните числа $\mathbb{Q}$, което съдържа всички решения на уравнение от вида $ax+b = 0$. Искаме да имаме решение на уравнението $x^2 - 2 = 0$. Поради това е въведено означението $\sqrt{2}$, което има смисълът: $(\sqrt{2})^2 = 2$, тоест тук $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$ са решения и така можем да разширим $\mathbb{Q}$ до множеството $\mathbb{R}$, което съдържа всички решения на уравнение от вида $ax^2 - b = 0$, където $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ за $b \geq 0$. Дотук добре, обаче какво става при $b < 0$? Нека разгледаме уравнението $x^2 + 1 = 0$. Очевидно то няма реални корени и затова въвеждаме константата i, която има смисълът $i^2 = -1$. Така уравнението има корени i и $-i$. Така множеството $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ съдържа $\mathbb{R}$ и съдържа всички решения на уравнение от вида $ax^2 + b = 0$. По висша алгебра, ще докажете че всеки полином на една променлива от степен n, има точно n корена, които са комплексни.

Алгебричен вид на комплексно число

Нека $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Тогава $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$, където $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Коефициентът a ще наричаме реална част, коефициентът b - имагинерна част, а числото i - имагинерна единица. С $Re(z)$ ще означаваме реалната част, а с $Im(z)$ - имагинерната част. Въвеждаме операциите събиране и умножаваме на комплексни числа.
$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.
$z_1z_2 = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$.
Нека $z = a + bi$. Числото $\overline{z} = a - bi$ ще наричаме комлексно спрегнато на z. Директно се проверява, че: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ и $\overline{z_1z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$. Освен това $z + \overline{z} = 2Re(z)$ и $z\overline{z} = a^2 + b^2$.
С r или още $|z|$ ще бележим числото $\sqrt{a^2 + b^2}$. Числото $-z = -a - bi$ ще наричаме противоположното число на z, а ако $|z| \neq 0$, то $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ ще наричаме обратното число на z. Директно се проверява, че $z + (-z) = 0$ и $zz^{-1} = 1$. За нас изваждането на b от a, ще бъде събирането на a с противоположният елемент на b, а деленето на a на b, ще бъде произвдението на a с b^{-1}, ако $b \neq 0$.

Тригонометричен вид на комплексно число



Фигура 1: Тук с Θ е означен аргументът на числото

Нека в комплексната равнина сме нарисували векторът с реална част a и имагинерна част b. Тогава ъгълът, който този вектор сключва с реалната ос, ще наричаме аргумент на числото z и ще го бележим с $arg(z)$ или φ. Тогава $sin\varphi = \frac{b}{|z|}$ и $cos\varphi = \frac{a}{|z|}$. Тогава $a = |z|cos\varphi$ и $b = |z|sin\varphi$. Заместваме в алгебричния вид на z и получаваме $z = |z|(cos\varphi + isin\varphi) = r(cos\varphi + isin\varphi)$. Да припомним следните тригонометрични формули от 11 клас:
$sin(\alpha+\beta) = sin\alpha cos\beta + sin\beta cos\alpha$ и $cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta$.
Нека $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$. Тогава $z_1 z_2 = r_1 r_2(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)(cos\varphi_2 + isin\varphi_2) = r_1 r_2\big(cos\varphi_1\varphi_2 - sin\varphi_1 sin\varphi_2 + i(sin\varphi_1 cos\varphi_2 + sin\varphi_2 cos\varphi_1)\big) = r_1 r_2\big(cos(\varphi_1+\varphi_2) + isin(\varphi_1+\varphi_2)\big)$.

Формули на Моавър

От умножнеието на комплексни числа имаме, че $z^2 = r^2(cos2\varphi + isin2\varphi)$.
Така можем да предположим, че $z^n = r^n(cosn\varphi + sinn\varphi)$, което е едната формула на Моавър. Ще я докажем формално по метода на математическата индукция.

База: $n = 1$, тогава имаме $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$, което тривиално е вярно.
Индукционно предположение: Да допуснем, че за произволно $k \in \mathbb{N}$ твърдението е в сила, тоест $z^k = r^k(cosk\varphi + isink\varphi)$
Индукционна стъпка: Ще докажем твърдението за $k+1$, като използваме, че е вярно за k. Тоест ще докажем, че $z^{k+1} = r^{k+1}\big(cos(k+1)\varphi + isin(k+1)\varphi\big)$.
$z^{k+1} = zz^k = r(cos\varphi + isin\varphi)r^k(cosk\varphi + isink\varphi) = rr^k(cos\varphi + isin\varphi)(cosk\varphi + isink\varphi) =$
$= r^{k+1}\Big(cos(\varphi + k\varphi) + isin\big(\varphi + k\varphi\big)\Big) = r^{k+1}\big(cos(k+1)\varphi + isin(k+1)\varphi\big)$.
Така от принципа на математическата индукция следва, че $(\forall n \in \mathbb{N})\big[z^n = r^n(cosn\varphi + sinn\varphi)\big]$ $\square$

Втората формула е за коренуване на комплексни числа. Тя изглежда по следния начин: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\big(cos(\frac{\varphi+2\kappa\pi}{n}) + isin(\frac{\varphi+2\kappa\pi}{n})\big)$ за $k = 0, 1, ..., n-1$. Сега да я докажем. Да разгледаме уравнението $w^n = z$. Представяме z и w в тригонометричен вид и получаваме $z = |z|(cos\varphi + isin\varphi)$ и $w = |w|(cos\psi + isin\psi)$. Тогава като заместим в уравнението имаме $|w|^n(cosn\psi + isinn\psi) = |z|(cos\varphi + isin\varphi)$. Приравняваме $|w|^n = |z|$ и $n\psi = \varphi + 2\kappa\pi$ за $\kappa \in \mathbb{Z}$. Така получаваме $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ и $\psi = \frac{\varphi+2\kappa\pi}{n}$. Така $w = \sqrt[n]{|z|}\big(cos(\frac{\varphi+2\kappa\pi}{n} + isin(\frac{\varphi+2\kappa\pi}{n})\big)$. Така формулата е доказана. $\square$

Корени на единицата

Нека имаме уравнението $z^n = 1$. Тогава съгласно формулата на моавър за коренуване, имаме че всичките корени са от вида $w_k = cos(\frac{\varphi+2\kappa\pi}{n}) + isin(\frac{\varphi+2\kappa\pi}{n})$ за $k = 0, ..., n-1$. Тоест това са n на брой корена. Тези корени ще наричаме корени на единицата. Ако ги разположим върху единичната окръжност, тези корени се явяват върховете на правилен n-ъгълник.

Задачи

Задача 1: Да се намерят реалните числа x и y, за които: $(1-i)x + (2-i)y = 5-3i$
Решение: Разкриваме скобите и получаваме: $x - ix + 2y - iy = 5 - 3i$. Привеждаме лявата страна до алгебричен вид на комплексно число и получаваме $x + 2y + (-x-y)i = 5-3i$. Сега приравняваме реалната и имагинерната част на двете страни и получаваме:

$$\left|\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 5 \\ -x & + & -y & = & -3 \end{array}\right.$$

Събираме двете уравнения и получаваме $y = 2$. Сега заместваме в първото уравнение с $y = 2$ и получаваме $x + 4 = 5$. Тоест $x = 1$.

Задача 2: Да се запише в алгебричен вид комплексното число z, където:
а) $z = (1+3i)(-7+2i)$
б) $z = (1-2i)^3$
в) $z = i^n$
г) $z = \frac{2i-3}{1+i}$
Решение:
а) Разкриваме скобите и получаваме: $-7 + 2i - 21i + 6i^2$. Знаем, че $i^2 = -1$. Тогава получаваме $-7 + 2i - 21i - 6 = -13 - 19i$
б) Прилагаме формулата за трета степен и получаваме: $1^3 - 3.1^2.2i + 3.1.(2i)^2 - (2i)^3 = 1 - 6i + 3.4i^2 - 8i^3 = 1 - 6i - 12 + 8i = -11 + 2i$

в)$i^n = \begin{cases} i & \text{if } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{if } n \equiv 2 \pmod 4 \\ -i & \text{if } n \equiv 3 \pmod 4 \\ 1 & \text{if } n \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$

г)Умножаваме по $1 = \frac{1-i}{1-i}$, като $1-i$ е комплексно спрегнатото на знаменателя. Така получаваме $\frac{(2i-3)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i-2i^2-3+3i}{1^2-i^2} = \frac{-1+5i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$