# Несобствени интеграли

$\int_a^b f(x)dx$ е несобствен, ако някой от краищата на интервала ~~е ...~~ е $+\infty$ или $-\infty$; или ако $f$ е неограничена около някоя точка $c \in [a;b]$. Тези точки наричаме особени.

Най-често се интересуваме дали $\int_a^b f(x)dx$ е сходящ.

Особено полезна е граничната форма на сравнителния критерий:

Ако $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, $0 < c < \infty$ за особена точка $b$ ($b \in \mathbb{R}$ или $b = \infty$),

то $\int_a^b f(x)dx$ е сходящ едновременно с $\int_a^b g(x)dx$

(т.е. $\int_a^b f(x)dx$ е сходящ $\Leftrightarrow \int_a^b g(x)dx$,
записваме още $\int_a^b f(x)dx \sim \int_a^b g(x)dx$)

На практика това означава, че ако $f(x) = f_1(x)f_2(x)\dots f_k(x)$ е произведение от функции, можем да заменяме $f_i(x)$ с подходящо избрани $g_i(x)$, най-често $g_i(x) = x^{\alpha_i}$.

Всички въпроси за сходимост ще свеждаме към:

$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}$ – сходящ за $\lambda > 1$ и разходящ за $\lambda \le 1$.

$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ – сходящ за $\lambda < 1$ и разходящ за $\lambda \ge 1$.

Зад. 1. $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}dx$ да се изследва за сходимост.

Реш. Единствена особена точка $x=0$. Искаме да заменим $\ln$ и $\sin$ с подходящи степени на $x$.

За целта ползваме основните граници:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt[3]{x^2}} \to 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \to 1.$$

Това означава, че заменяйки $\ln(1+\sqrt[3]{x^2})$ с $\sqrt[3]{x^2}$ и $\sin\sqrt{x}$ с $\sqrt{x}$ запазваме сходимостта на интеграла, т.е.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}dx \sim \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}.\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}}, \ \frac{1}{3}<1 \Rightarrow \text{сходящ.}$$

<u>Зад.2.</u> $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^3+\sin x}$ да се изследва за сходимост.

<u>Реш.</u> $\infty$ е особена точка. Знаменателят се анулира за $x=0$. Имаме 2 особени точки: $0$ и $\infty$. Представяме интеграла като сума, като изолираме всяка особена точка:

$$\underbrace{\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^3+\sin x}}_{I} = \underbrace{\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^3+\sin x}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{x\,dx}{x^3+\sin x}}_{I_2}.$$

По дефиниция $I$ е сходящ $\Leftrightarrow$ сходящи са $I_1$ <u>и</u> $I_2$.

За $I_1$ отново ще ползваме, че $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, но тук $\sin x$ е събираемо, не множител.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x\,dx}{x^3+\sin x} = \int_0^1 \frac{x\,dx}{\underbrace{\cancel{x}\cdot\left(x^2+\frac{\sin x}{x}\right)}_{\text{знаменателят е произведение}}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+\frac{\sin x}{x}}.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2+\frac{\sin x}{x}\right) \to 0+1 = 1 \in (0;+\infty)$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+\frac{\sin x}{x}} \sim \int_0^1 \frac{dx}{1} \text{ е сходящ.}$$

(Ако $I_1$ - разходящ $\Rightarrow I$ - разходящ. Сега разглеждаме и $I_2$).

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\frac{\sin x}{x}} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2\underbrace{\left(1+\frac{\sin x}{x^3}\right)}_{\xrightarrow{x\to\infty} 1}} \sim \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} - \text{сходящ } (2>1).$$

Така $I_1$ и $I_2$ са сходящи, т.е. сходящ е и $I$.

Зад. 3. За кои $\alpha, \beta$ е сходящ $\int_3^\infty \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ ?

Реш. Единствената особеност е $\infty$.
Ако $\ln^\beta x$ липсваше, интегралът си мени поведението при $\alpha=1$.
При $x\to\infty$ полиномите растат по-бързо от логаритмите, т.че интуитивно сходимостта трябва да зависи най-вече от $\alpha$.
$\int_3^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ ни подсказва да разглеждаме случаи спрямо $\alpha \gtreqless 1$.

• $\alpha=1$: $\int_3^\infty \frac{dx}{x\ln^\beta x} = \int_3^\infty \frac{d\ln x}{\ln^\beta x} \underset{u=\ln x}{\overset{\text{смяна}}{=}} \int_{\ln 3}^\infty \frac{du}{u^\beta}$ – сходящ за $\beta>1$.

За $\alpha\neq 1$ ще си послужим със сравнителния критерий (не граничната му форма):

Ако за всяко $x\in[a;+\infty)$, $|f(x)|\le g(x)$, то:

1) ако $\int_a^\infty g(x)\,dx$ е сходящ, то $\int_a^\infty f(x)\,dx$ е сходящ.

2) ако $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ е разходящ, то $\int_a^\infty g(x)\,dx$ е разходящ.

• $\alpha>1$. Избираме $t: \alpha>t>1$.

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x} = \int_3^\infty \frac{dx}{x^t}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-t}\ln^\beta x} = \int_3^\infty \frac{dx}{x^t}\cdot\frac{\ln^{-\beta} x}{x^{\alpha-t}}$$

$f(x)=\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$ и нека $g(x)=\frac{1}{x^t}$.

От $t>1 \Rightarrow \int_3^\infty g(x)\,dx$ е сходящ.

Още $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln^{-\beta} x}{x^{\alpha-t}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ ($\alpha-t>0$, полином расте по-бързо от логаритъм)

$\Rightarrow$ За всички достатъчно големи $x$, $f(x)=|f(x)|\le g(x)$.

По 1) $\int_3^\infty f(x)\,dx$ е сходящ (независимо от $\beta$).

• $\alpha < 1$. Тук идеята е аналогична – да изолираме логаритъма.



Избираме $t$: $\alpha < t < 1$.

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}\ln^{\beta}x} = \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^t} \cdot \frac{\ln^{-\beta}x}{x^{\alpha - t}} = \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^t} \cdot \frac{x^{t-\alpha}}{\ln^{\beta}x}.$$

От $t > \alpha \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{t-\alpha}}{\ln^{\beta}x} \longrightarrow +\infty$.

$\Rightarrow \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^t}$ е разходящ и $\frac{1/x^{\alpha}\ln^{\beta}x}{1/x^t} = \frac{x^{t-\alpha}}{\ln^{\beta}x} \geq 1$

за достатъчно големи $x$. По г), $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}\ln^{\beta}x}$ е разходящ.

Окончателно: $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}\ln^{\beta}x}$ е сходящ за $\begin{cases} \alpha > 1, \beta \in \mathbb{R} \\ \alpha = 1, \beta > 1 \end{cases}$

x и разходящ във всички други случаи.

Този резултат може да се ползва наготово.

<u>Зад. 4.</u> Сходящ ли е $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^3-4x}} \cdot \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$ ?

<u>Реш.</u> Особености има в $\infty$ и корените на знаменателя:

$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2-4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2, x = -2$.

$-2 \notin [0; +\infty)$. Така особените точки са $0, 2$ и $\infty$.

(Понеже $(x-1)^2 = x^2+1-2x \geq 0$, то $2x \leq 1+x^2$ и $\frac{2x}{1+x^2} \leq 1$, т.е. $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ е дефинирано за всяко $x \in [0; +\infty)$).

2 е вътрешна точка за $[0; +\infty)$. Тогава

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^3-4x}} \arcsin\frac{2x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \dots + \int_1^2 \dots + \int_2^5 \dots + \int_5^{\infty} \dots$$

Началният интеграл е сходящ когато всеки един от четирите интеграла вдясно е сходящ.

При $x \to 0$, $\frac{2x}{1+x^2} \to 0$ и стандартните граници:

$$\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \ ; \quad \frac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{2x}{1+x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \text{ ни дават:}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^3-4x}} \arcsin\frac{2x}{1+x^2}\,dx \sim \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x(x^2-4)}} \cdot \frac{2x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{x}{\underbrace{(1+x^2)\sqrt[3]{x^2-4}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} -\sqrt[3]{4}}}\,dx \sim \int_0^1 x\,dx \text{ е сходящ.}$$

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})\arcsin\frac{2x}{1+x^2}}{\sqrt[3]{(x-2)}\sqrt[3]{x^2+2x}}\,dx \sim \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)}} = \int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}},\ \frac{1}{3}<1 \text{ — сходящ.}$$

Тук $\ln(1+\sqrt[3]{x})$; $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ и $\sqrt[3]{x^2+2x}$ имат ненулеви граници при $x \to 2^-$.

$$\int_2^5 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})\arcsin\frac{2x}{1+x^2}}{\sqrt[3]{(x-2)}\ \sqrt[3]{x^2+2x}}\,dx \ \overset{\text{по същите}}{\underset{\text{причини}}{\sim}} \ \int_2^5 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} \text{ е сходящ.}$$

$\int_5^\infty \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^3-4x}}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\,dx$ остана да изследваме.

$$\frac{2x}{1+x^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \Rightarrow \frac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{2x}{1+x^2}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1.$$

$$\sqrt[3]{x^3-4x} = x\sqrt[3]{1-\frac{4}{x^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{x^3-4x}}{x} = \sqrt[3]{1-\frac{4}{x^2}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1.$$

Накрая $\ln(1+\sqrt[3]{x})$ не можем да заменим с $x^\alpha$ за никое $\alpha$.

Но 1 ~~можем~~ можем да пренебрегнем:

$$\cancel{\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\ln(\sqrt[3]{x})} = \ln\left(\frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\ln(\sqrt[3]{x})} \overset{\text{Л}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\cdot\cancel{\left(\frac{1}{3}\right)x^{-2/3}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\cancel{\left(\frac{1}{3}\right)x^{-2/3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} = 1.$$

Така $\int_5^\infty \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^3-1x}} \arcsin\frac{2x}{1+x^2}\,dx \sim \int_5^\infty \frac{\ln(\sqrt[3]{x})}{x}\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$= \int_5^\infty \frac{\frac{1}{3}\ln x\cdot 2}{1+x^2} \sim \int_5^\infty \frac{\ln x}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} \sim \int_5^\infty \frac{dx}{x^2\cdot\ln^{-1}x}$ е сходящ (от зад. 3).

$\downarrow_{x\to\infty} 1$

Извод: $\int_0^\infty \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^3-1x}} \arcsin\frac{2x}{1+x^2}\,dx$ е сходящ.

Зад. 5. Да се изследва за сходимост спрямо $\alpha$, $\int_0^1 \frac{(1-\cos x)^\alpha(1-x)^3}{\ln^2(1-x)}\,dx$.

Реш. Всъщност се пита за кои $\alpha$ интегралът е сходящ.

Особени точки са 0 заради $\ln^2 1=0$ в знаменател

и 1 заради $\ln^2 0=\infty$ в знаменател.

$$\int_0^1 \frac{(1-\cos x)^\alpha(1-x)^3}{\ln^2(1-x)} = \int_0^{1/2} \frac{(1-\cos x)^\alpha(1-x)^3}{\ln^2(1-x)}\,dx + \int_{1/2}^1 \frac{(1-\cos x)^\alpha(1-x)^3}{\ln^2(1-x)}\,dx.$$

В 0 основните граници дават: $\frac{\ln(1-x)}{(-x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \Rightarrow \frac{\ln^2(1-x)}{(-x)^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

$1-\cos x = 1-\cos(2\cdot\frac{x}{2}) = 1-\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2}$

$\Rightarrow \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$.

$(1-x)^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

$$\int_0^{1/2} \frac{(1-\cos x)^\alpha(1-x)^3}{\ln^2(1-x)}\,dx \sim \int_0^{1/2} \frac{(x^2)^\alpha\cdot 1}{x^2}\,dx = \int_0^{1/2}\frac{dx}{x^{2-2\alpha}}$$

последният е сходящ за $2-2\alpha<1$, т.е. $\alpha>1/2$.

В 1, $\cos 1<1 \Rightarrow (1-\cos x)^\alpha \xrightarrow[x\to 1]{} (1-\cos 1)^\alpha \neq 0,\infty$.

$$\Rightarrow \int_{1/2}^1 \frac{(1-\cos x)^\alpha(1-x)^3}{\ln^2(1-x)}\,dx \sim \int_{1/2}^1 \frac{(1-x)^3}{\ln^2(1-x)}\,dx =$$

Заместване с 1: $\left.\frac{(1-x)^3}{\ln^2(1-x)}\right|_{x=1} = \left[\frac{0}{\infty}\right] = 0$

По-формално $\lim_{x\to 1} \frac{(1-x)^3}{\ln^2(1-x)} = 0$, т.е. функцията е ограничена около 1 и 1 не е особена точка.

$\Rightarrow \int_{1/2}^{1} \frac{(1-\cos x)^{\alpha}(1-x)^3}{\ln^2(1-x)}\,dx$ е сходящ за всяко $\alpha$.

Така търсените $\alpha$ са $\alpha \in (\frac{1}{2}; +\infty)$.

Зад. 6 (от изпит) Сходящ ли е $\int_0^{\infty} \frac{\ln^3(1+\sqrt[4]{x})}{(\sqrt{x})^5+x^2} \cdot \operatorname{arctg} x\, dx$.

Реш. Особеностите са 0 и $\infty$.

$$\int_0^1 \frac{\ln^3(1+\sqrt[4]{x})}{(\sqrt{x^5}+x^2)} \cdot \operatorname{arctg} x\, dx \underset{\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1}{\sim} \int_0^1 \frac{\ln^3(1+\sqrt[4]{x})}{\sqrt{x^5}+x^2} \cdot x\, dx$$

$$\underset{\frac{\ln(1+\sqrt[4]{x})}{\sqrt[4]{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1}{\sim} \int_0^1 \frac{(\sqrt[4]{x})^3 \cdot x}{x^2+\sqrt{x^5}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{7/4}}{x^2+x^{5/2}}\,dx = \int_0^1 \frac{\cancel{x^{7/4}}\,dx}{\cancel{x^{7/4}}(x^{1/4}+x^{3/4})}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/4}\underbrace{(1+x^{1/2})}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1}} \sim \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/4}}$$ е сходящ ($\frac{1}{4} < 1$).

В $\infty$: $\operatorname{arctg} x \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$, т.е. можем да го пренебрегнем.

Както и по-рано, $\frac{\ln(1+\sqrt[4]{x})}{\ln\sqrt[4]{x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$ и следователно

$$\frac{\ln^3(1+\sqrt[4]{x})}{(\ln\sqrt[4]{x})^3} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1.$$

Така $\int_1^{\infty} \frac{\ln^3(1+\sqrt[4]{x})\operatorname{arctg} x}{x^2+\sqrt{x^5}}\,dx \sim \int_1^{\infty} \frac{\ln^3(x^{1/4})\,dx}{x^{5/2}\underbrace{\cancel{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 1}} \sim$

$$\sim \int_1^{\infty} \frac{(\ln x^{1/4})^3}{x^{5/2}}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{(\overset{\text{const}}{\cancel{\tfrac{1}{4}}}\ln x)^3\,dx}{x^{5/2}} \sim \int_1^{\infty} \frac{\ln^3 x}{x^{5/2}}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{5/2}\ln^{-3} x}$$

Последният интеграл е сходящ по задача 3.

$\Rightarrow$ Даденият интеграл е сходящ.

Зад. 7 (изпит) $I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{(1+x)\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}}$

а) Да се намери за кои $\alpha$, $I(\alpha)$ е сходящ.

б) Да се пресметне $I(-1/2)$.

Реш. а) Всъщност въпросът от б), подсказва че $I(-1/2)$ е сходящ.

Особеностите са $0$ и $\infty$.

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha dx}{\cancel{(1+x)}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}} \sim \int_0^1 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/6-\alpha}} \text{ е сходящ за}$$

$\frac{1}{6} - \alpha < 1$, т.е. $\alpha > -\frac{5}{6}$ (ползвахме, че $\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$).

$$\int_1^\infty \frac{x^\alpha dx}{(1+x)\underbrace{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}}_{\to \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}}} \sim \int_1^\infty \frac{x^\alpha}{x\underbrace{(1+\frac{1}{x})}_{\to 1}} dx \sim \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1-\alpha}}.$$

Последният е сходящ за $1-\alpha > 1$, т.е. $\alpha < 0$.

Окончателно, $I(\alpha)$ е сходящ за $0 > \alpha > -\frac{5}{6}$, т.е. $\alpha \in (-\frac{5}{6}; 0)$.

б) Както се очаква $-\frac{1}{2} \in (-\frac{5}{6}; 0)$.

Ще го пресметнем като неопределен.

$$(\operatorname{arctg}\sqrt{x})' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-1/2}}{1+x}.$$

Това ни подсказва да внасяме зад диференциала:

$$\int \frac{x^{-1/2} dx}{(1+x)\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}} = \int \frac{d\frac{x^{1/2}}{1/2}}{(1+x)\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}} = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{(1+(\sqrt{x})^2)\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}}$$

$$= 2\int \frac{d \operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}} = 2 \cdot \int (\operatorname{arctg}\sqrt{x})^{-1/3} d \operatorname{arctg}\sqrt{x} =$$

$$= 2 \cdot \frac{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^{-1/3+1}}{-1/3+1} = 2(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^{2/3} \cdot \frac{3}{2} = 3(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^{2/3}.$$

Да означим $F(x) = 3(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^{2/3}$.

$$\int_0^\infty \frac{x^{-1/2}\,dx}{(1+x)\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}} \overset{\text{по дефиниция}}{=} \lim_{a\to 0}\left(\lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{x^{-1/2}\,dx}{(1+x)\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}}\right) =$$

$$= \lim_{a\to 0}\left(\lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)\right) = \lim_{b\to\infty} F(b) - \lim_{a\to 0} F(a)$$

$$= 3\Big[\lim_{b\to\infty}(\underbrace{\operatorname{arctg}\sqrt{b}}_{\to\pi/2})^{2/3} - \lim_{a\to 0}(\underbrace{\operatorname{arctg}\sqrt{a}}_{\to 0})^{2/3}\Big] =$$

$$= 3\cdot\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3} - 0^{2/3}\right] = 3\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}$$

Зад. 8. За кои $b$ интегралът $\int_0^\infty x^b e^{-x}\,dx = I(b)$ е сходящ.
Да се пресметне $I(b)$ за $b \in N_0 = \{0,1,2,\dots\}$.

Реш. Особеностите са двата края на интервала.

$$\int_0^1 x^b e^{-x}\,dx \underset{\substack{e^{-x}\to 1\\ x\to 0}}{\sim} \int_0^1 x^b\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{-b}} \Rightarrow -b<1,\ \boxed{b>-1}$$

$$\int_1^\infty x^b e^{-x}\,dx = \int_1^\infty \frac{x^b}{x^{b+2}}\cdot\frac{x^{b+2}}{e^x}\,dx = \int_1^\infty \frac{x^{b+2}}{e^x}\cdot\frac{dx}{x^2}.$$

Имаме, че $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{b+2}}{e^x} = 0$ и $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ е сходящ.

Тогава по сравнителния критерий (като в задача 3),
$\int_1^\infty x^b e^{-x}\,dx$ е сходящ. $\Rightarrow$ търсените $b$ са $b\in(-1;+\infty)$.

Ще пресметнем $I(b)$ като първо сметнем неопределения интеграл.
Подинтегралната функция е полином по експонента.
Интегриране по части, вкарвайки експонентата зад диференциала.

$$\int x^b e^{-x}\,dx = -\int x^b e^{-x}\,d(-x) = -\int x^b\,d(e^{-x}) = -\left(x^b e^{-x} - \int e^{-x}\,dx^b\right)$$

$$= -x^b e^{-x} + \int e^{-x}\cdot b\cdot x^{b-1}\,dx = -x^b e^{-x} + b\cdot\int x^{b-1}e^{-x}\,dx.$$

Заместваме с границите:

$$I(b) = \int_0^\infty x^b e^{-x}\,dx = -x^b e^{-x}\Big|_0^\infty + b\cdot\int_0^\infty x^{b-1}e^{-x}\,dx.$$

Първото събираемо трябва да се разбира като

$$\lim_{x\to\infty}(-x^b e^{-x}) - \lim_{x\to 0}(-x^b e^{-x})$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^b}{e^x}\right) = 0$$ (например след многократно прилагане на Лопитал)

$$\lim_{x\to 0}(x^b e^{-x}) = \lim_{x\to 0} x^b = 0,$$ стига $b > 0$.

(при $b = 0$, имаме $0^0$).

Така получихме, че за $b > 0$,

$$I(b) = 0 + b.\int_0^\infty x^{b-1} e^{-x} dx = b.I(b-1)$$ - рекурентна връзка.

(Забележете, че тя важи за всяко $b > 0$, не задължително естествено)

За да намерим $I(b)$ освен рекурентна връзка ни трябва и начално условие (или дъно на рекурсията):

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-x} dx = -\int_0^\infty e^{-x} d(-x) = -e^{-x}\Big|_0^\infty =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to\infty} -e^{-x}}_{0} - \Big(\lim_{x\to 0} -\underbrace{e^{-x}}_{1}\Big) = -(-1) = 1.$$

Така получихме, че $I(0) = 1$, $I(b) = bI(b-1)$ за $b > 0$.

В частност, при $b = 1$: $I(1) = 1.I(0) = 1$,

$b = 2$: $I(2) = 2.I(1) = 2$

$b = 3$: $I(3) = 3.I(2) = 6 = 3!$

Лесно се доказва по индукция, че $I(b) = b!$

---

Това не беше просто странен начин да дефинираме факториел. За разлика от $(2,5)!$, което няма смисъл, може да говорим за $I(2,5)$ - това е конкретно число, защото интегралът е сходящ. Всъщност така (с несобствен интеграл) се дефинира факториел и за не естествени числа.

Други функции също се дефинират като несобствени интеграли.

Зад. 9. Да се докаже, че $\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{1+x^2}$ е сходящ и да се пресметне.

Реш. Особеност в $\infty$: $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2(\frac{1}{x^2}+1)}\,dx \sim \int_1^\infty \frac{\ln x\,dx}{x^2} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2\ln^{-1}x}$

е сходящ по задача 3.

Особеност в 0: $\int_0^1 \frac{\ln x}{\underbrace{1+x^2}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1}}\,dx \sim \int_0^1 \ln x\,dx$.

Граничната форма е неприложима: $\nexists \alpha: \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^\alpha} = c \in (0;+\infty)$

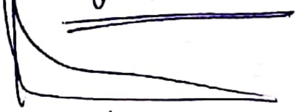
Затова, $\int_0^1 \ln x\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}\ln x)$, като $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ е сходящ

и $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-1/2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1/x}{-\frac{1}{2}\cdot 1/x^{3/2}} =$

$= -2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{3/2}}{x} = -2\lim\limits_{x\to 0} x^{1/2} = 0.$

От сходимостта на $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow$ сходимост на $\int_0^1 \ln x\,dx$.

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ е сх.



За да го сметнем, ще сменим променливата:

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$$

смяна $y = 1/x$

$x = 1/y$, $dx = -\frac{1}{y^2}\,dy$

$x\in[1;+\infty) \Rightarrow y\in(0;1]$

$$= \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} + \int_1^0 \frac{\ln(\frac{1}{y})}{1+(\frac{1}{y})^2}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{1+x^2} + \int_1^0 \frac{(-\ln y)\cdot(-1)}{y^2(1+\frac{1}{y^2})}\,dy = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} + \int_1^0 \frac{\ln y\,dy}{y^2+1}$$

преименуваме $y$ на $x$

$$= \int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{1+x^2} + \int_1^0 \frac{\ln x\,dx}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{1+x^2} = 0.$$

Функцията $\frac{\ln x}{1+x^2}$ не се интегрира като неопределен интеграл. Въпреки това като определен интеграл се смята за точно определени граници с хитри трикове като този.

Последните две задачи са значително по-трудни от задачи за изпит. ~~Те показват~~ При пресмятането на зад. 9. направихме смяна, която превърна безкраен интервал в краен. При смени на променливата може собствен интеграл да се превръща в несобствен и обратно. Ето още един пример:

**Зад. 10.** Да се сметне $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x}$.

**Реш.** Знаменателя не се анулира, няма особености.

При универсална субституция $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \varphi(x)$

$\varphi$ не е диференцируема за $x = \pi$.

Така $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\sin x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x}$ и правим смени в двата интеграла поотделно.

Когато $x$ се мени от $0$ до $\pi$, $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ се мени от $0$ до $+\infty$.

Когато $x$ се мени от $\pi$ до $2\pi$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ се мени от $-\infty$ до $0$.

$x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\frac{1}{2+\sin x} = \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{2+2t+2t^2}$.

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\sin x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x} = \int_0^{\infty} \frac{2dt}{\cancel{1+t^2}} \cdot \frac{\cancel{1+t^2}}{2+2t+2t^2} + \int_{-\infty}^{0} \frac{2dt}{\cancel{1+t^2}} \cdot \frac{\cancel{1+t^2}}{2+2t+2t^2}$$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^2}$ ~~и~~ ... като интеграл от рационална функция.

Първо сметнете $F(t) = \int \frac{dt}{1+t+t^2}$ - неопределения интеграл.

Тогава $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x} = F(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim\limits_{t\to+\infty} F(t) - \lim\limits_{t\to-\infty} F(t)$.

---

Поради неограничеността на $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, определените тригонометрични интеграли след универсална субституция често се свеждат до несобствени, както видяхме в горния пример.