1.4 Неподвижни точки на оператори

1.4.1 Неподвижни и най-малки неподвижни точки

Функцията f наричаме *неподвижна точка* на оператора Γ, ако

$$\Gamma(f) = f.$$

Ясно е, че за да говорим за неподвижни точки на Γ, трябва броят на аргументите на f и на $\Gamma(f)$ да е един и същ, т.е. трябва Γ да е оператор от специалния тип $(k \rightarrow k)$ за някое k.

Определение 1.12. Казваме, че f е *най-малка неподвижна точка (н.м.н.т.)* на оператора Γ, ако:

1) f е неподвижна точка на Γ;

2) за всяка неподвижна точка g на Γ е вярно, че $f \subseteq g$.

Ако съществува, най-малката неподвижна точка на Γ е единствена. Наистина, ако Γ има две най-малки неподвижни точки f и g, то от второто условие на дефиницията ще имаме, че $f \subseteq g$ и $g \subseteq f$, и следователно $f = g$. Тази единствена най-малка неподвижна точка на Γ ще означаваме с f_Γ. Друго често срещано означение е $lfp(\Gamma)$ (от ***l**east **f**ixed **p**oint*).

Основната мотивация за интереса ни към неподвижните точки на операторите са рекурсивните програми. Ще разгледаме няколко съвсем прости примера, илюстриращи връзките между рекурсивните програми, операторите и техните неподвижни точки. Да започнем с букварния пример за рекурсивна програма — тази, която пресмята функцията $\lambda x.x!$.

Пример 1.8. Нека R е следната рекурсивна програма:

$R: \quad F(X) \ = \texttt{if} \quad X \ = \ 0 \quad \texttt{then}\ 1 \quad \texttt{else} \quad X.F(X-1)$

На тялото на R можем да съпоставим оператор $\Gamma = \Gamma_R$, който се дефинира по следния начин:

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x \ = \ 0 \\ x.f(x-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно е, че функцията f, която R пресмята, удовлетворява условието

$$f(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x \ = \ 0 \\ x.f(x-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

С други думи
$$f(x) \simeq \Gamma(f)(x) \quad \text{за всяко} \quad x \in \mathbb{N},$$
или все едно, $f = \Gamma(f)$, т.е. f е неподвижна точка на оператора Γ.

Функцията *факториел* очевидно е неподвижна точка на Γ. Дали този оператор има и други неподвижни точки? Не. За да се убедим в това, вземаме произволна неподвижна точка f на Γ. Тогава за f е изпълнено:
$$f(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x \;=\; 0 \\ x.f(x-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$
С индукция относно $x \in \mathbb{N}$ проверяваме, че $\forall x \; f(x) = x!$.

При $x = 0$ имаме $f(0) \;= 1 \;\stackrel{\text{деф}}{=}\; 0!$, а ако допуснем, че $f(x) = x!$ за някое $x \geq 0$, то за $x+1$ получаваме последователно:
$$f(x+1) \simeq (x+1).f(x) = (x+1).x! = (x+1)!.$$

Да изследваме неподвижните точки на операторите, идващи от две по-особени програми:

Пример 1.9. $R:$ `F(X) = g(X)`, където g е фиксирана функция.

Очевидно програмата R (която всъщност не е рекурсивна, но няма пречка да се разглежда като такава), пресмята функцията g. Операторът, определен от нея, е константният оператор
$$\Gamma_c(f) \;\stackrel{\text{деф}}{=}\; g,$$
за всяка $f \in \mathcal{F}_1$. Този оператор очевидно има единствена н.т. и това е функцията g.

Пример 1.10. $R:$ `F(X) = F(X)`

Тази програма пресмята никъде недефинираната функция $\emptyset^{(1)}$. Операторът, който тя определя, е операторът идентитет
$$\Gamma_{id}(f) \;\stackrel{\text{деф}}{=}\; f.$$
на който очевидно *всяка* функция е неподвижна точка, а най-малката неподвижна точка ще е точно $\emptyset^{(1)}$.

И един последен пример — за рекурсивна програма, на която съответства оператор с изброимо много неподвижни точки:

Пример 1.11. Нека R е програмата

$R:$ `F( X ) = if X = 0 then 0 else F( X+1 )`

Да означим с Γ оператора, който се определя от R:
$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x \;=\; 0 \\ f(x+1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ако f е неподвижна точка на Γ, то за нея е вярно, че

$$f(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x \ = \ 0 \\ f(x+1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следователно $f(0) = 0$, а при всяко $x > 0$ би трябвало $f(x) \simeq f(x+1)$, което означава, че

$$f(1) \simeq f(2) \simeq f(3) \simeq \dots \ .$$

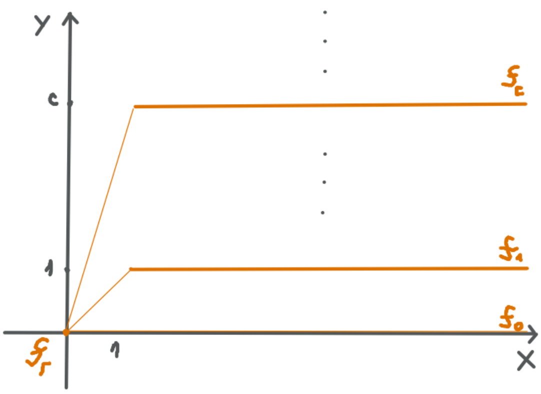
Следователно f трябва да има една и съща стойност при $x > 0$ или въобще да няма стойност. С други думи, f или е някоя от функциите f_c (за $c \in \mathbb{N}$), където f_c има вида

$$f_c(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ c, & \text{ако } x > 0, \end{cases}$$

или f е $f_{\neg!}$, където

$$f_{\neg!}(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \neg!, & \text{ако } x > 0, \end{cases}$$

Ясно е, че най-малката н.т. на Γ ще е функцията $f_{\neg!}$.



Видяхме, че разнообразието при неподвижните точки на операторите е голямо. Те могат да имат една, няколко или безброй много неподвижни точки. Обаче едно нещо се набиваше на очи — че всички те имат най-малка неподвижна точка.

Дали това винаги е така? Не. Ще завършим тази встъпителна част с още два примера — за оператор, който няма *най-малка* неподвижна точка (но има неподвижни точки) и за оператор, който въобще няма неподвижни точки. Особеното и при двата оператора е, че те, за разлика от вече разгледаните примери, "не идват" от рекурсивни програми.

Пример 1.12. Нека f_0 и f_1 са две различни тотални функции (бихме могли да си мислим отново за константните функции $\lambda x.0$ и $\lambda x.1$.) Да определим операторите Γ и Δ както следва:

$$\Gamma(f) = \begin{cases} f_0, & \text{ако } f = f_0 \\ f_1, & \text{ако } f \neq f_0, \end{cases}$$

$$\Delta(f) = \begin{cases} f_1, & \text{ако } f = f_0 \\ f_0, & \text{ако } f \neq f_0. \end{cases}$$

За да определим неподвижните точки на Γ, да приемем, че $\Gamma(f) = f$. Като разгледаме двете възможности за f — да е равна или да е различна от f_0, стигаме до извода, че $f = f_0$ или $f = f_1$. Следователно Γ има две неподвижни точки — f_0 и f_1, но няма най-малка неподвижна точка.

С подобни разсъждения се показва, че операторът Δ няма никакви неподвижни точки.

1.4.2 Теорема на Кнастер-Тарски

Примерите, които разгледахме дотук, показват, че на всяка рекурсивна програма R можем да съпоставим оператор Γ, като по смисъла на този оператор, функцията, която R пресмята, ще е една от неподвижните точки на Γ.

Да се опитаме да обобщим ситуацията: ако R е рекурсивна програма с n входни променливи, можем да си мислим, че тя изглежда най-общо така:

$\mathtt{R: F(X_1, \ldots, X_n) = \ldots F, X_1, \ldots, X_n \ldots}$

Тогава операторът Γ от тип $(n \to n)$, който R определя, ще изглежда така:

$\Gamma(f)(x_1, \ldots, x_n) \simeq \ldots\ f, x_1, ..., x_n\ \ldots$

Ясно е, че ако R пресмята функцията f_R, то тази функция е неподвижна точка на Γ. Но Γ може да има и много други неподвижни точки, какъвто беше операторът от *Пример* 1.11, да кажем. Възниква въпросът дали f_R има някакъв специален статут сред всички неподвижни точки на Γ?

В примерите, които разгледахме по-горе, наблюдавахме, че f_R винаги е *най-малката неподвижна точка* на съответния оператор Γ, с други думи, $f_R = f_\Gamma$. Всъщност една от най-важните цели на този курс е да покажем, че това е така за *всяка* рекурсивна програма R. За тази цел ще ни трябва вариант на теоремата за неподвижната точка (*fixed point theorem*), формулирана за подходяща структура с частична наредба. Сега ще докажем тази теорема в един частен случай на такава структура — множеството $\mathcal{F}_n$ с частичната наредба $\subseteq$. В следващата глава ще обобщим тази теорема за произволни структури с подходяща наредба, т. нар. области на Скот.

Нека Γ е оператор от тип $(k \to k)$, а f е произволна k-местна функция. За всяко естествено число n, с $\Gamma^n(f)$ ще означаваме функцията, която се дефинира с индукция по n както следва:

$$\Gamma^0(f) = f;$$
$$\Gamma^{n+1}(f) = \Gamma(\Gamma^n(f)).$$

Можем да запишем, че $\Gamma^n(f) = \underbrace{\Gamma(\dots\Gamma}_{n \text{ пъти}}(f)\dots)$, с други думи, $\Gamma^n(f)$ е функцията, която се получава след n-кратно прилагане на оператора Γ към f.

Следващата теорема играе централна роля при дефиниране на формална семантика на рекурсивните програми.

Теорема 1.1. Кнастер-Тарски Нека $\Gamma\colon \mathcal{F}_k \longrightarrow \mathcal{F}_k$ е непрекъснат оператор. Тогава Γ притежава най-малка неподвижна точка f_Γ и за нея е изпълнено:

$$f_\Gamma \;=\; \bigcup_n \Gamma^n(\emptyset^{(k)}).$$

Забележка. Тази теорема е известна още като *Теорема на Кнастер-Тарски-Клини*, защото Клини посочва начина, по който се *конструира* най-малката неподвижна точка f_Γ — като точна горна граница на редицата от функции $\{\Gamma^n(\emptyset^{(k)})\}_n$.

Доказателство. Да означим с f_n функцията $\Gamma^n(\emptyset^{(k)})$. Тогава очевидно

$$f_{n+1} = \Gamma^{n+1}(\emptyset^{(k)}) = \Gamma(\Gamma^n(\emptyset^{(k)})) = \Gamma(f_n),$$

и следователно редицата $\{f_n\}_n$ удовлетворява рекурентната схема

$$\left|\begin{array}{l} f_0 = \emptyset^{(k)} \\ f_{n+1} = \Gamma(f_n). \end{array}\right.$$

Да се убедим най-напред, че тази редица е монотонно растяща. С индукция относно n ще покажем, че за всяко естествено n

$$f_n \subseteq f_{n+1}.$$

База $n = 0$: по определение $f_0 = \emptyset^{(k)}$ и тогава очевидно $f_0 \subseteq f_1$.

Сега да приемем, че за някое $n \in \mathbb{N}$

$$f_n \subseteq f_{n+1}.$$

Операторът Γ е непрекъснат, и в частност — монотонен, съгласно *Твърдение* 1.5. Тогава от горното включване ще имаме

$$\Gamma(f_n) \subseteq \Gamma(f_{n+1}),$$

или $f_{n+1} \subseteq f_{n+2}$, с което индукцията е приключена.

Щом редицата $f_0, f_1, \ldots$ е монотонно растяща, според *Твърдение* 1.4 тя ще има точна горна граница — да я означим с g:

$$g = \bigcup_n f_n.$$

Нашата цел е да покажем, че g е най-малката неподвижна точка на Γ, т.е. $g = f_\Gamma$.

Това, че g е неподвижна точка, се вижда от следната верига от равенства:

$$\Gamma(g) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma(\bigcup_n f_n) = \bigcup_n \Gamma(f_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_{n+1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_n \stackrel{\text{деф}}{=} g.$$

Нека сега h е друга неподвижна точка на Γ. Тъй като g е точна горна граница на $\{f_n\}_n$, за да покажем, че $g \subseteq h$, е достатъчно да видим, че h е горна граница на тази редица, с други думи, че $f_n \subseteq h$ за всяко $n \geq 0$. Това ще проверим отново с индукция относно n. За $n = 0$ имаме по определение

$$f_0 \stackrel{\text{деф}}{=} \emptyset^{(k)} \subseteq h.$$

Да предположим, че за някое n

$$f_n \subseteq h.$$

Прилагаме Γ към двете страни на неравенството и получаваме

$$\Gamma(f_n) \subseteq \Gamma(h) = h, \tag{1.4}$$

т.е. $f_{n+1} \subseteq h$. Сега вече можем да твърдим, че $f_n \subseteq h$ за всяко $n \geq 0$, с други думи, че h е мажоранта на редицата $\{f_n\}_n$. Следователно h мажорира и точната ѝ горна граница g, т.е. $g \subseteq h$. □

Всъщност непрекъснатостта на Γ е само достатъчно условие за съществуването на f_Γ. Вярно е, че всеки *монотонен* оператор също притежава най-малка неподвижна точка.

Както отбелязахме, теоремата на Кнастер-Тарски не само твърди, че всеки непрекъснат оператор има най-малка неподвижна точка, но ни дава и *начин* за нейното конструиране. Нека я приложим към оператора от *Пример* 1.8.

Задача 1.4. Като използвате теоремата на Кнастер-Тарски, намерете най-малката неподвижна точка на следния оператор:

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.f(x-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Нашата цел ще бъде да намерим *явния вид* на всяка функция от дефинираната по-горе редица $f_0, f_1, \dots$, чиято граница се явява f_Γ. Функциите $f_0, f_1, \dots$ имат смисъл на последователни *приближения* (*апроксимации*) на f_Γ.

Да напомним, че редицата $\{f_n\}_n$ удовлетворява условията:

$$\begin{aligned} f_0 &= \emptyset^{(1)} \\ f_{n+1} &= \Gamma(f_n). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Започваме с първата апроксимация f_1 на f_Γ:

$$f_1(x) \overset{(1.5)}{\simeq} \Gamma(\emptyset^{(1)})(x) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.\emptyset^{(1)}(x-1), & \text{ако } x > 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ \neg !, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

За следващата апроксимация f_2 ще имаме:

$$f_2(x) \overset{(1.5)}{\simeq} \Gamma(f_1)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.f_1(x-1), & \text{иначе} \end{cases} \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 1.1, & \text{ако } x = 1 \\ \neg !, & \text{ако } x > 1. \end{cases}$$

Функцията f_2 можем да препишем още по следния начин:

$$f_2(x) \simeq \begin{cases} x!, & \text{ако } x < 2 \\ \neg !, & \text{иначе,} \end{cases}$$

което ни дава идея какъв би могъл да е общият вид на f_n:

$$f_n(x) \simeq \begin{cases} x!, & \text{ако } x < n \\ \neg !, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ще използваме индукция относно $n \in \mathbb{N}$, за да се убедим, че това е така.

На практика вече проверихме случаите $n = 0, 1$ и 2. Да предположим сега, че f_n има горния вид. Тогава за f_{n+1} ще имаме последователно:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &\overset{(1.5)}{\simeq} \Gamma(f_n)(x) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.f_n(x-1), & \text{ако } x > 0 \end{cases} \\ &\overset{\text{и.х.}}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.(x-1)!, & \text{ако } x > 0 \ \& \ x-1 < n \\ \neg !, & \text{ако } x - 1 \geq n \end{cases} \simeq \begin{cases} x!, & \text{ако } x < n+1 \\ \neg !, & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned}$$

и значи индукционната хипотеза се потвърждава и за $n+1$. Остана да съобразим, че границата на редицата $\{f_n\}_n$ е функцията $x!$, но това следва директно от дефиницията за точна горна граница (1.3).

$\square$

1.4.3 Преднеподвижни точки на оператори

За някои приложения на теоремата на Кнастер-Тарски се оказва удобно да разполагаме с едно нейно уточнение. То се отнася за понятието преднеподвижна (или още квазинеподвижна точка, prefixed point) на даден оператор. По определение, f е *преднеподвижна точка* на оператора Γ, ако $\Gamma(f) \subseteq f$ и съответно f е *най-малка преднеподвижна точка* на Γ, ако тя е най-малката функция със свойството

$$\Gamma(f) \subseteq f.$$

Отново е ясно, че ако съществува, най-малката преднеподвижна точка е единствена.
На преднеподвижните точки на оператора Γ можем да гледаме като на решения на *неравенството*

$$\Gamma(X) \subseteq X,$$

докато неподвижните му точки са решения на *уравнението*

$$\Gamma(X) = X.$$

Тъй като неравенството е нестрого, очевидно всяко решение на уравнението е решение и на неравенството, с други думи, всяка неподвижна точка на Γ е и нейна преднеподвижна точка. Дали вярно и обратното? Невинаги — вижте например *Задача* 1.5 по-долу. Оказва се, обаче, че за *най-малката* преднеподвижна точка това е така, по-точно, най-малката преднеподвижна точка на всеки *непрекъснат* оператор е точно f_Γ.

Твърдение 1.9. Нека Γ е непрекъснат оператор от тип $(k \to k)$. Тогава f_Γ се явява и най-малка преднеподвижна точка на Γ.

Доказателство. Това твърдение следва съвсем непосредствено от доказателството на теоремата на Кнастер-Тарски. Две неща трябва да съобразим:

Първо, че f_Γ е преднеподвижна точка на Γ, което, както вече отбелязахме, е очевидно.

Второ, да вземем друга преднеподвижна точка h, т.е. функция, за която $\Gamma(h) \subseteq h$, и да покажем, че $f_\Gamma \subseteq h$. За целта следваме съвсем пунктуално доказателството на *Теорема* 1.1, като единствената разлика е в условието (1.4), където вместо $\Gamma(h) = h$ трябва да напишем $\Gamma(h) \subseteq h$. $\square$

Всъщност горният факт е в сила и за операторите, които са само *монотонни*, и е известен като Лема на Тарски. Доказателството ѝ е съвсем кратко, да се убедим:

Твърдение 1.10. (Лема на Тарски) Нека Γ е монотонен оператор от тип $(k \to k)$, а f е неговата най-малка преднеподвижна точка. Тогава f е и най-малката неподвижна точка на Γ.

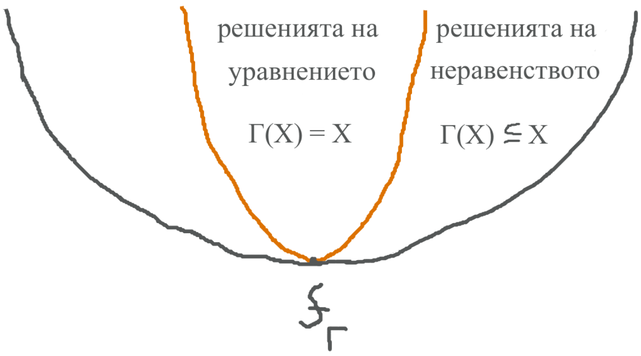
Доказателство. Имаме $\Gamma(f) \subseteq f$ и след почленно прилагане на Γ към двете страни на неравенството получаваме

$$\Gamma(\Gamma(f)) \subseteq \Gamma(f).$$

Излезе, че $\Gamma(f)$ също е преднеподвижна точка на Γ, и тъй като f е най-малката, то

$$f \subseteq \Gamma(f).$$

Но обратното включване $\Gamma(f) \subseteq f$ също е вярно, и значи общо $\Gamma(f) = f$, т.е. f е неподвижна точка на Γ. Дали е най-малката — да, защото ако g е друга н.т. на Γ, то тя ще е и негова преднеподвижна точка, което означава, че $f \subseteq g$. □



Задача 1.5. (Задача за ЕК) Опишете всички преднеподвижни точки на оператора Γ, дефиниран като:

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ f(x+1), & \text{иначе.} \end{cases}$$