Домашно № 1

Задача 1. Нека за $f\colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ е изпълнено:

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ f(x, y-x), & \text{ако } y \geq x > 0 \\ f(y,x), & \text{ако } y < x. \end{cases}$$

Докажете, че $f(x,y) = \text{НОД}(x,y)$ за всяко $(x,y) \in \mathbb{N}^2$.
(Приемаме, че $\text{НОД}(0,0) = 0$.)

Задача 2. Известно е, че функцията $g\colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ удовлетворява условията:

$$\begin{aligned} &g(0,y) = y \\ &g(x+1,0) = g(x,1) \\ &g(x+1,y+1) = g(x, g(x+1,y)). \end{aligned}$$

Докажете, че тогава g е следната функция:

$$g(x,y) \;=\; \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Задача 3. Нека за $f\colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ е изпълнено:

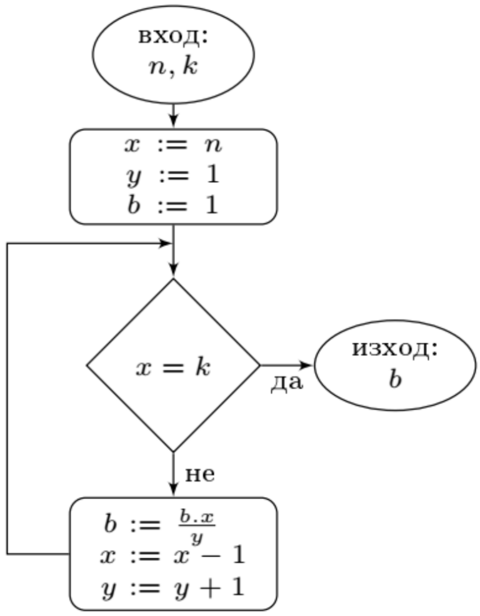
$$f(x,y) \simeq \begin{cases} x, & \text{ако } x < y \\ f(x-y, y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажете, че тогава $\forall x \forall y_{y>0}\ f(x,y) = \{\frac{x}{y}\}$, където $\{\frac{x}{y}\} \stackrel{\text{деф}}{=}$ остатъка от делението на x на y.

Задача 4. Докажете, че програмата вдясно е тотално коректна относно:

входно условие $I(k,n) \stackrel{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} k \in \mathbb{N} \;\&\; n \in \mathbb{N} \;\&\; n \geq k$;

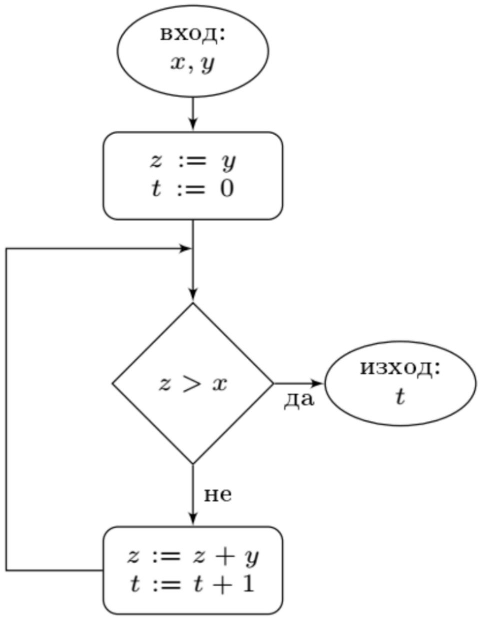
изходно условие $O(k,n,b) \stackrel{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} b = \binom{n}{k}$.



Задача 5. Докажете, че програмата вдясно е тотално коректна относно:

входно условие $I(x,y) \overset{\text{деф}}{\iff} x \in \mathbb{N}$ & $y \in \mathbb{N}^+$ и

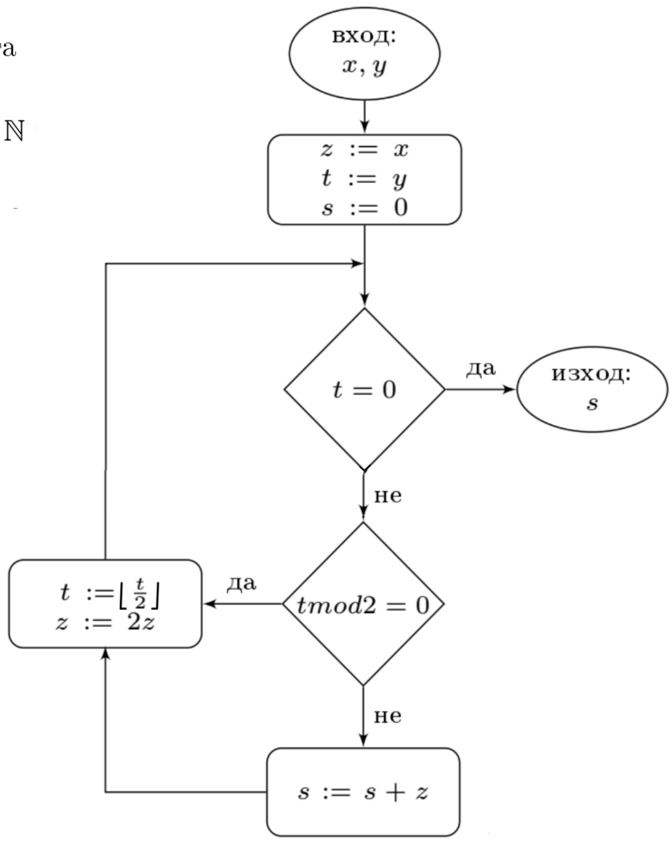
изходно условие $O(x,y,t) \overset{\text{деф}}{\iff} t = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$.



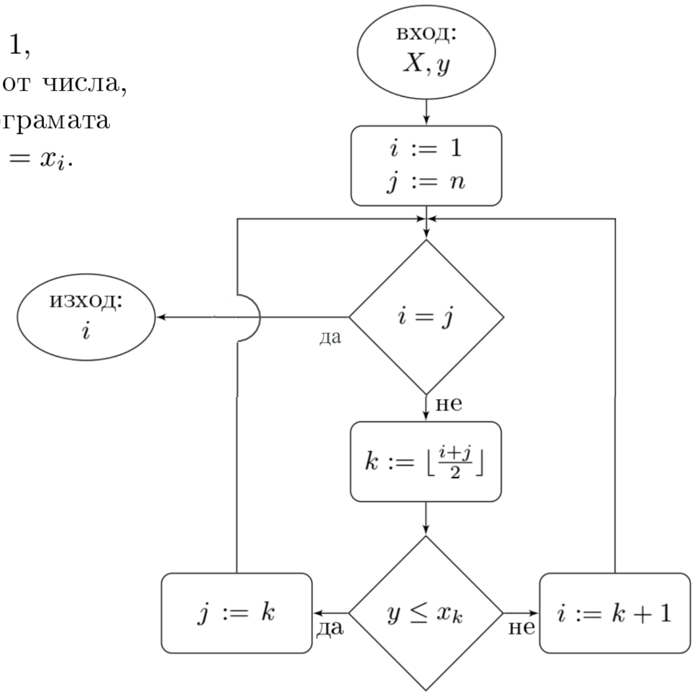
Задача 6. Докажете, че програмата вдясно е тотално коректна относно

входно условие $I(x,y)\colon x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N}$

изходно условие $O(x,y,s)\colon\ s = x.y$.



Задача 7. Нека $X = (x_1, \ldots, x_n), n \geq 1$, е сортиран във възходящ ред списък от числа, а y е елемент на X. Докажете, че програмата вдясно намира първото i, такова че $y = x_i$.



Задача 8. Докажете, че програмата вдясно е тотално коректна относно входно условие $I(x, y)$: $x \in \mathbb{N}$ & $y \in \mathbb{N}$ и изходно условие $O(x, y, z)$: $z = \text{НОД}(x, y)$.