Полярни координати

Зад.1. Представете като (обединение от) криволинейни трапци множеството:

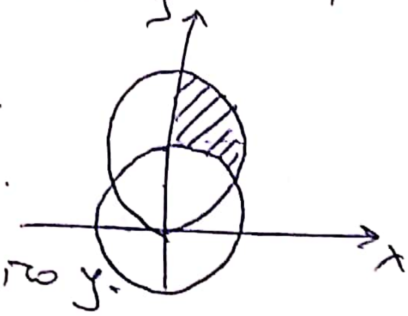
$$\begin{cases} 1 \le x^2+y^2 \le 2y \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Реш. За пълнота ще скицираме множеството $x^2+y^2 \ge 1$ е външността на единичната окръжност с център началото.

$x^2+y^2 \le 2y \iff x^2+y^2-2y+1 \le 1 \iff x^2+(y-1)^2 \le 1$ - вътрешността на единичната окръжност с център $(0;1)$.

Накрая $x \ge 0$ е надясно от ~~аб~~ ординатата.

Няма да ползваме чертежа в пресмятанията.



Ще представим множеството като трапци по y.

Решаваме неравенствата спрямо x:

$$\begin{cases} x^2 \ge 1-y^2 \\ x^2 \le 2y-y^2 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Тъй като $x \ge 0$ можем да коренуваме.

$2y-y^2 \ge x^2 \ge 1-y^2 \Rightarrow 2y \ge 1,\ y \ge 1/2 > 0.$

Ако $y > 1$, то $x^2 > 1-y^2$ е автоматично изпълнено за всяко x.

От $2y-y^2 \ge x^2 \ge 0 \Rightarrow y(2-y) \ge 0$ и $y>0 \Rightarrow 2-y \ge 0 \Rightarrow y \le 2$

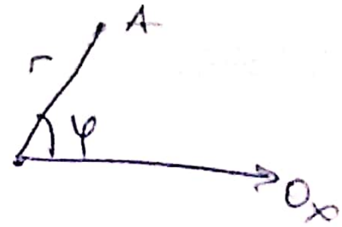
Така $y \in [1/2; 2]$.

$$\begin{cases} 1/2 \le y \le 1 \\ \sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{2y-y^2} \end{cases} \cup \begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ 0 \le x \le \sqrt{2y-y^2} \end{cases}.$$

($\sqrt{2y-y^2}$ е горната граница за x, долни граници имаме 0 и $\sqrt{1-y^2}$).
не винаги е дефинирана.

От чертежа се вижда, че и трапци по x да бяхме търсили, пак щеше да получим обединение на два трапеца.

Представянето като криволинейни трапци на части от окръжности е свързано с доста сметки. Затова може да разглеждаме други координатни системи.



Всяка точка в равнината се определя еднозначно от ~~[illegible]~~ разстоянието до началото и ъгъла, който сключва с оста Ox.
Така вместо (декартови) координати (x, y) можем да си мислим за координатите (r, φ). Те се наричат полярни координати, а координатната система – полярна координатна система.
Връзката между двата вида координати се задава с:

$$\begin{cases} x = r.\cos\varphi \\ y = r.\sin\varphi \end{cases}$$

В декартови координати, $x, y \in \mathbb{R}$.
В полярни координати, r е разстояние, т.че $r \geq 0$.
φ е ъгъл. За да има еднозначност избираме φ от фиксиран интервал с дължина 2π, напр. $\varphi \in [0; 2\pi]$.
При този избор ~~[illegible]~~ оста Ox има по две полярни координати: $(r, 0)$ и $(r, 2\pi)$. Извън Ox, всяка точка има единствени полярни координати.
Така $(x, y) \longleftrightarrow (r, \varphi)$ е биекция с изключение на оста Ox.
Това свойство ще бъде важно нататък.
Сега да видим някои области в полярни координати.

<u>Зад. 2.</u> Представете множеството от зад. 1 в полярни координати.

<u>Реш.</u> $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \geq 0$, $\varphi \in [0; 2\pi]$.
Заместваме x и y с r и φ и решаваме неравенствата:

$x^2 + y^2 \geq 1 \Rightarrow r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \geq 1 \Rightarrow r^2 \geq 1 \Rightarrow$ от $r \geq 0 \Rightarrow \boxed{r \geq 1}$.

$x^2 + y^2 \leq 2y \Rightarrow r^2 \leq 2r\sin\varphi$.

При $r = 0$ е изпълнено. За $r \neq 0 \Rightarrow r > 0$ и съкращаваме на r:

$r \leq 2\sin\varphi$. $\Rightarrow 1 \leq r \leq 2\sin\varphi$. $\Rightarrow \sin\varphi \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi \in [\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]$.

$x \geq 0 \Rightarrow r\cos\varphi \geq 0$. За $r \neq 0$, $\cos\varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$.

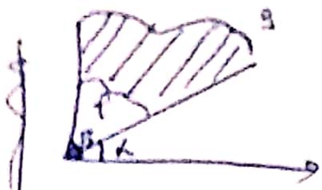
Пресичаме интервалите за φ и получаваме $\varphi \in [\pi/6; \pi/2]$.

Тогава за множеството имаме:

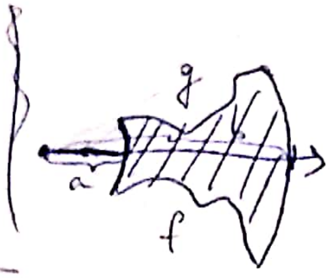
$$\begin{cases} \pi/2 \leq \varphi \leq \pi/6 \\ 1 \leq r \leq 2\sin\varphi. \end{cases}$$

Така представихме множеството като трапец "по φ" и сметките бяха по-прости от Декартовите координати.

Деф. Множество от вида $\left| \begin{array}{l} \alpha \le \varphi \le \beta \\ f(\varphi) \le r \le g(\varphi) \end{array} \right.$ наричаме криволинеен сектор (трапец по φ)



Деф. Множество от вида $\left| \begin{array}{l} a \le r \le b \\ f(r) \le \varphi \le g(r) \end{array} \right.$ наричаме криволинеен венец (трапец по r)



Точката $(0,0)$ декартово отговаря на $(0,\alpha)$ полярно.

При $r=0$ всеки ъгъл определя една точка. В разглежданията ни нататък една конкретна точка дали е от множеството или не, няма да има значение. Затова можем да считаме, че $r>0$ и свободно да съкращаваме на r.

В решението на зад. 2, видяхме, че $x \ge 0$ води до 2 интервала за φ: $\varphi \in [0; \pi/2] \cup [3\pi/2; 2\pi]$.

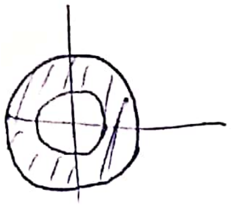
Може да се възползваме от периодичността на тригонометричните функции. Ако изберем полярният ъгъл да е между $-\pi$ и π, т.е. $\varphi \in [-\pi; \pi]$, то $x \ge 0$ е еквивалентно на $\varphi \in [-\pi/2; \pi/2]$.

Така можем да избираме интервал за φ, който ни е по-удобен. Единственото изискване е да е с дължина 2π.

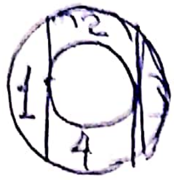
Следващите задачи показват някои типични случаи, в които полярните координати са по-удачни от Декартовите.

Зад.3. Представете в полярни координати: $\begin{cases} R_1^2 \le x^2+y^2 \le R_2^2 \\ \text{за } 0<R_1<R_2. \end{cases}$

Реш. Множеството е пръстенът между две концентрични окръжности.



Ако искаме да представим като обединение от криволинейни трапци (по x и по y), ни трябват поне 4 различни трапеца:



$\left(\begin{matrix} 1, 3 - \text{трапци по } y \\ 2, 4 - \text{трапци по } x \end{matrix}\right).$

В полярни координати, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $r\ge 0$, $\varphi\in[0;2\pi]$.
Заместваме: $R_1^2\le r^2\le R_2^2$ $\Rightarrow$ от положителност, $R_1\le r\le R_2$
Така в полярни координати, множеството е максимално прост правоъгълник: $\begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ R_1\le r\le R_2 \end{cases}$.

Зад.4. Представете в полярни координати: $\begin{cases} 0\le x\le y \\ \pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2. \end{cases}$

Реш. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. $\pi^2\le r^2\le 4\pi^2=(2\pi)^2$ от предната задача дава $\pi\le r\le 2\pi$.
$x\ge 0$, $y\ge 0$ $\Rightarrow$ φ е в първи квадрант, $0\le\varphi\le\pi/2$.
Накрая $x\le y$ $\Rightarrow$ $r\cos\varphi\le r\sin\varphi$ $\Rightarrow$ $\sin\varphi\ge\cos\varphi$.
Предвид, че $0\le\varphi\le\pi/2$, последното е изпълнено при $\varphi\in[\pi/4;\pi/2]$.
Окончателно $\begin{cases} \pi\le r\le 2\pi \\ \pi/4\le\varphi\le\pi/2 \end{cases}$ - отново правоъгълник.

Зад.5. Представете множеството: $\begin{cases} 0\le y\le x \\ 1\le 2xy \\ x^2+y^2\le 2. \end{cases}$

Реш. След полярна смяна $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $r\ge 0$, $\varphi\in[0;2\pi]$, заместваме:
$x^2+y^2\le 2 \Rightarrow r^2\le 2 \Rightarrow r\le\sqrt{2}$.
$0\le y\le x \Rightarrow 0\le r\sin\varphi\le r\cos\varphi \Rightarrow \varphi$ в първи квадрант и $\sin\varphi\le\cos\varphi \Rightarrow \varphi\le\pi/4$, т.е. $0\le\varphi\le\pi/4$
Накрая $1\le 2xy = 2.r\sin\varphi.r\cos\varphi = 2r^2\sin\varphi\cos\varphi = r^2\sin 2\varphi$.
При $\varphi=0$, $\sin 2\varphi=0$ и $r^2\sin 2\varphi=0\not\ge 1$. $\Rightarrow \varphi\ne 0$.

При $\varphi \in [0; \pi/4]$, $2\varphi \in [0; \pi/2]$ и $\sin 2\varphi > 0$.

Тогава $r^2 \sin 2\varphi \ge 1 \iff r^2 \ge \dfrac{1}{\sin 2\varphi} \iff r \ge \dfrac{1}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$.

Така $\dfrac{1}{\sqrt{\sin 2\varphi}} \le r \le \sqrt{2}$.

В частност $\dfrac{1}{\sqrt{\sin 2\varphi}} \le \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\sin 2\varphi} \le 2 \Rightarrow \sin 2\varphi \ge \dfrac{1}{2}$.

$2\varphi \in [0; \pi/2]$ и $\sin 2\varphi \ge 1 \Rightarrow 2\varphi \in [\pi/3; \frac{\pi}{2}] \to \varphi \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}]$.

Така изразихме множеството като криволинеен сектор (трапец по φ):

$$\left| \begin{array}{l} \pi/6 \le \varphi \le \pi/4 \\ \dfrac{1}{\sqrt{\sin 2\varphi}} \le r \le \sqrt{2} \end{array} \right.$$

Зад.6. Представете множеството: $\left| \begin{array}{l} 1/4 \le x^2+y^2 \le 1 \\ x^2+y^2 \le 2x \\ y \ge 0 \end{array} \right.$.

Реш. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \ge 0$, $\varphi \in [0; 2\pi]$. Заместваме:

$(\frac{1}{2})^2 \le x^2+y^2 = r^2 \le 1^2 \Rightarrow 1/2 \le r \le 1$.

$y \ge 0 \Rightarrow r\sin\varphi \ge 0 \to \sin\varphi \ge 0 \to \varphi \in [0; \pi]$.

$x^2+y^2 \le 2x \Rightarrow r^2 \le 2r\cos\varphi$, $r \le 2\cos\varphi$

Така $\frac{1}{2} \le r \le \min(1, 2\cos\varphi)$.

(r има две горни граници, r е по-малка от всяка от тях $\Rightarrow r$ е по-малка от техния минимум).

В частност, $2\cos\varphi \ge r \ge \frac{1}{2} \Rightarrow 2\cos\varphi \ge 1/2$, $\cos\varphi \ge \frac{1}{4}$.

$\Rightarrow \varphi \in [0; \arccos\frac{1}{4}]$.

Още $1 = 2\cos\varphi \iff \cos\varphi = 1/2 \iff \varphi = \frac{\pi}{3}$.

За $\varphi \le \pi/3$ по-силна горна граница е 1; за $\varphi \ge \frac{\pi}{3}$ – $2\cos\varphi$.

Така получаваме обединение от два криволинейни сектора:

$$\left| \begin{array}{l} 0 \le \varphi \le \pi/3 \\ \frac{1}{2} \le r \le 1 \end{array} \right. \cup \left| \begin{array}{l} \pi/3 \le \varphi \le \arccos 1/4 \\ \frac{1}{2} \le r \le 2\cos\varphi. \end{array} \right.$$

Добре е да заместваме първо в по-простите условия. Така тук $y \ge 0$ ни даде интервал за $\varphi \in [0; \pi]$, в който $\cos$ е обратима и лесно решихме $\cos\varphi \ge 1/4$.

Зад. 7. Представете в полярни координати: $\begin{cases} 2x^2+2y^2+2 \le 5y \\ x \ge 0. \end{cases}$

Реш. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. $x \ge 0 \Rightarrow \cos\varphi \ge 0$.
Интервалът $[0; 2\pi]$ не е удобен за φ, защото решенията на $\cos\varphi \ge 0$ се разделят на два интервала.
Затова $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \ge 0$, $\varphi \in [-\pi; \pi]$.
Тогава $r\cos\varphi \ge 0$ дава $\varphi \in [-\pi/2; \pi/2]$.

$2r^2 + 2 \le 5r\sin\varphi$ - решаваме като квадратно относно r.
$2r^2 - 5r\sin\varphi + 2 \le 0$. - квадратна функция със старши коефициент 2
$\Rightarrow$ Решенията за r са между двата корена $\Rightarrow D \ge 0$.
$D = (5\sin\varphi)^2 - 4.2.2 = 25\sin^2\varphi - 16 = (5\sin\varphi)^2 - 4^2 \ge 0$.
$\Rightarrow \sin^2\varphi \ge \frac{4}{5}$. $\Rightarrow \sin\varphi \ge \frac{4}{5}$ или $\sin\varphi \le -\frac{4}{5}$.
$\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ - това е точно интервалът, в който е дефиниран arcsin.
Така $D \ge 0$ дава $\varphi \ge \arcsin\frac{4}{5}$ или $\varphi \le \arcsin(-\frac{4}{5})$.
$\Rightarrow \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \arcsin(-\frac{4}{5})] \cup [\arcsin\frac{4}{5}; \frac{\pi}{2}]$.
Във всеки един от двата интервала за r имаме:

$$\frac{5\sin\varphi - \sqrt{25\sin^2\varphi - 16}}{4} \le r \le \frac{5\sin\varphi + \sqrt{25\sin^2\varphi - 16}}{4}.$$

Бел. Въпреки наличието на израза x^2+y^2, тук полярните координати не ни улесняват особено. Множеството е трапец по y:
$2x^2 \le -2y^2 + 5y - 2$. В частност $-(2y^2 - 5y + 2) \ge 2x^2 \ge 0$
$\Rightarrow 2y^2 - 5y + 2 \le 0 \Rightarrow y \in [\frac{1}{2}; 2]$.
Тогава от $x \ge 0$, коренуваме: $x \le \sqrt{-y^2 + \frac{5}{2}y - 1}$.
И заедно с $x \ge 0$ получаваме трапец:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \le y \le 2 \\ 0 \le x \le \sqrt{-y^2 + \frac{5}{2}y - 1} \end{cases}$$

Няма универсално правило кога каква координатна система да ползваме. В различни задачи - различна.

Зад.8. Представете $\begin{cases} 1 \le 2x^2+y^2 \le 2-2y \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

Реш. Полярната смяна $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ води до
$2x^2+y^2 = 2r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2(1+\cos^2\varphi)$.
Вместо това, ни се иска $2x^2+y^2 = r^2$
Това може да постигнем с: $\begin{cases} x = \frac{r}{\sqrt{2}}\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Смяна от вида $\begin{cases} x = a r\cos\varphi \\ y = b r\sin\varphi \end{cases}$ се нарича обобщена полярна смяна.
Както и полярната, тя е еднозначна.

Така, нека $\begin{cases} x = \frac{r}{\sqrt{2}}\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, $r \ge 0$, $\varphi \in [0; 2\pi]$.

От $x, y \ge 0 \Rightarrow \varphi \in [0; \pi/2]$.
$2x^2+y^2 = 2\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\cos\varphi\right)^2 + (r\sin\varphi)^2 = \cancel{2}\cdot\frac{r^2}{\cancel{2}}\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 \ge 1$
$\Rightarrow r \ge 1$.
Накрая, $2x^2+y^2 \le 2-2y \Rightarrow r^2 \le 2 - 2r\sin\varphi$.
Това може да се мисли като квадратно уравнение относно r и да се реши като предишната задача:

I начин) $r^2 + 2r\sin\varphi - 2 \le 0$, $D' = \sin^2\varphi + 2 > 0$
$\Rightarrow$ винаги има корени.

$r_{1,2} = -\sin\varphi \pm \sqrt{\sin^2\varphi+2}$

Решенията на квадратното неравенство са
$r \in [-\sin\varphi - \sqrt{\sin^2\varphi+2}; -\sin\varphi + \sqrt{\sin^2\varphi+2}]$. Но $r \ge 1$.
$-\sin - \sqrt{\sin^2\varphi+2} < 0 < 1$.
$\Rightarrow$ по-добра долна граница за r е 1.

Така $\begin{cases} 1 \le r \le -\sin\varphi + \sqrt{\sin^2\varphi+2} \\ \varphi \in [0; \pi/2]. \end{cases}$ Но $1 \le -\sin\varphi + \sqrt{\sin^2\varphi+2}$.

$\Rightarrow 1 + \sin\varphi \le \sqrt{\sin^2\varphi+2}$,

$1 + 2\sin\varphi + \cancel{\sin^2\varphi} \le 2 + \cancel{\sin^2\varphi}$

$2\sin\varphi \le 1$, $\sin\varphi \le 1/2 \Rightarrow \varphi \in [0; \pi/6]$.

Окончателно,
$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi/6 \\ 1 \le r \le -\sin\varphi + \sqrt{\sin^2\varphi + 2}. \end{cases}$$
– криволинеен сектор

<u>II начин</u>) Решаване $r^2 \le 2 - 2r\sin\varphi$ спрямо $\sin\varphi$.

$2r\sin\varphi \le 2 - r^2$, $r \ge 1 \Rightarrow$ делим на $2r$:

$\sin\varphi \le \frac{2-r^2}{2r}$. От $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \frac{2-r^2}{2r} \ge 0 \Rightarrow 2 - r^2 \ge 0$

$r \le \sqrt{2}$.

От $r \ge 1 \Rightarrow 2 - r^2 \le 2 - 1 = 1 < 2 \le 2r. \Rightarrow \frac{2-r^2}{2r} \le 1$.

Тогава $\sin\varphi \le \frac{2-r^2}{2r}$ дава ограничение отгоре за φ:

$\varphi \le \arcsin\frac{2-r^2}{2r}$.

Така
$$\begin{cases} 1 \le r \le \sqrt{2} \\ 0 \le \varphi \le \arcsin\left(\frac{2-r^2}{2r}\right) \end{cases}$$
- криволинеен венец.