Равномерна сходимост на редица от функции.

1. Да разгледаме редица от функции $f_n(x)$, дефинирани в множеството *D*. Нека за всяко фиксирано $x \in D$, числовата редица $f_n(x)$ е сходяща. Да означим границата с $f(x)$. Съгласно дефиницията на граница на редица за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число $\boldsymbol{N(x)}$, такова че за всяко $n > N(x)$ е изпълнено $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Да обърнем внимание, че за различни x числото $N(x)$ може да бъде различно.

При така дефинираната граница на редица от функции за свойствата на граничната функция не може да се каже нищо. Например всички функции $f_n(x)$ може да са непрекъснати, а граничната функция $f(x)$ да не е непрекъсната.

2. Равномерна сходимост. Ще казваме, че редицата $f_n(x)$ е **равномерно сходяща към** $f(x)$ в множеството *D***,** ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число $\boldsymbol{N}$ **(не зависещо от *x*)**, такова че за всяко $n > N$ е изпълнено $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ за всяко $x \in D$.

Да обърнем внимание, че равномерната сходимост зависи от множеството *D*.

3. Необходимо и достатъчно условия за равномерна сходимост. Редицата $f_n(x)$ клони равномерно към функцията $f(x)$ тогава и само тогава, когато

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in D}|f(x) - f_n(x)|\right) = 0.$$

Забележки.

- При търсене $\sup\limits_{x\in D}|f(x) - f_n(x)|$ на *n* е фиксирано число.
- Ако съществува $\max\limits_{x\in D}|f(x) - f_n(x)|$, то

$$\max_{x\in D}|f(x) - f_n(x)| = \sup_{x\in D}|f(x) - f_n(x)|.$$

4. Ако редицата $f_n(x)$ е равномерно сходяща към $f(x)$ и функциите $f_n(x)$ са непрекъснати в *D*, то и функцията $f(x)$ е непрекъсната.

Ясно е, че ако $f(x)$ не е непрекъсната, то редицата не е равномерно сходяща.

Задача 1. Да се изследва равномерната сходимост на редицата

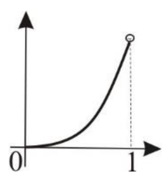
а) $f_n(x) = x^n$ в интервала $0 \le x \le 1$;

б) $f_n(x) = x^n$ в интервала $0 \le x < 1$;

в) $f_n(x) = x^n$ в интервала $0 \le x \le \frac{1}{2}$;

г) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ в интервала $0 \le x \le 1$.

Решение. а) При $0 \le x < 1$ (*x* е фиксирано) $x^n \to 0$, а $1^n \to 1$, т. е. граничната функция е $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [0;1) \\ 1 & \text{при } x = 1 \end{cases}$. Тази функция е прекъсната в т. 1 и следователно редицата не е равномерно сходяща.



б) Граничната функция е $f(x) = 0$ при $x \in [0;1)$. В този случай граничната функции е непрекъсната l в цялото множество, но това не дава никаква информация за сходимостта на редицата. Разглеждаме $\sup\limits_{x\in[0;1)}|f(x) - f_n(x)|$ (*n* е фиксирано):

$$\sup_{x\in[0;1)}|f(x)-f_n(x)|=\sup_{x\in[0;1)}|x^n|=\sup_{x\in[0;1)}x^n=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in D}|f(x)-f_n(x)|\right)=\lim_{n\to\infty}1=1.$$

Съгласно условието за равномерна сходимост, редицата не е равномерно сходяща.

в) Граничната функция е $f(x)=0$ при $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Разглеждаме $\sup\limits_{x\to[0;1)}|f(x)-f_n(x)|$ (n е фиксирано):

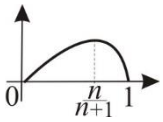
$$\sup_{x\in[0;\frac{1}{2}]}|f(x)-f_n(x)|=\max_{x\in[0;\frac{1}{2}]}|f(x)-f_n(x)|=\max_{x\in[0;\frac{1}{2}]}x^n=\frac{1}{2^n}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in D}|f(x)-f_n(x)|\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

Редицата е равномерно сходяща.

в) При $0\le x<1$имаме (x фиксирано) $\lim\limits_{n\to\infty}(x^n-x^{n+1})=0-0=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(1^n-1^{n+1})=1-1=0$.

Граничната функция е $f(x)=0$ при $x\in[0;1]$.



– При фиксирано n търсим най-голямата стойност на функцията

$$\varphi(x)=|f_n(x)-f(x)|=|x^n-x^{n+1}|=x^n-x^{n+1} \text{ при } x\in[0;1].$$

Производната $\varphi'(x)=nx^{n-1}-(n+1)x^n=(n+1)x^{n-1}(\frac{n}{n+1}-x)$ е

положителна при $0\le x<\frac{n}{n+1}$ – следователно $\varphi(x)$е растяща и

отрицателна при $\frac{n}{n+1}<x\le 1$ – следователно $\varphi(x)$ е намаляваща.

С това показахме, че

$$\left(\sup_{x\in[0;1]}|f(x)-f_n(x)|\right)=\max_{x\to[0;1)}\varphi(x)=\varphi(\frac{n}{n+1})=(\frac{n}{n+1})^n-(\frac{n}{n+1})^{n+1}=$$

$$=(\frac{n}{n+1})^n(1-\frac{n}{n+1})=\frac{1}{n+1}.(\frac{n}{n+1})^n.$$

– Оттук получаваме

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in D}|f(x)-f_n(x)|\right)=\lim_{n\to\infty}[\max_{x\in[0;1)}\varphi(x)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}.(\frac{n}{n+1})^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}.\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=0.\frac{1}{e}=0$$

Следователно редицата е равномерно сходяща.

Задача 2. Да се изследва сходимостта на редицата $f_n(x)=\frac{nx}{1+n+x}$ при $0\le x\le 1$.

Решение. При всяко фиксирано x имаме $f_n(x)=\frac{nx}{1+n+x}=\frac{x}{\frac{1}{n}+1+\frac{x}{n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}x$.

Граничната функция е $f(x)=x$ при $f(x)=x$.

Нека сега n е фиксирано.

$$\sup_{x\in[0;1]}|f(x)-f_n(x)|=\max_{x\in[0;1]}\left|x-\frac{nx}{1+n+x}\right|=\max_{x\in[0;1]}\left|\frac{x+x^2}{1+n+x}\right|=\max_{x\in[0;1]}\frac{x+x^2}{1+n+x}.$$

– Разглеждаме функцията $\varphi(x)=\dfrac{x+x^2}{1+n+x}$ в $x\in[0;1]$ (фиксирано n). Имаме

$$\varphi'(x)=\frac{(1+2x)(1+n+x)-(x+x^2)}{(1+n+x)^2}=\frac{x^2+(2n+2)x+n+1}{(1+n+x)^2}\geq 0.$$

Функцията $\varphi(x)=\dfrac{x+x^2}{1+n+x}$ е растяща в $x\in[0;1]$. Тогава

$$\sup_{x\in[0;1]}|f(x)-f_n(x)|=\max_{x\in[0;1]}\frac{x+x^2}{1+n+x}=\varphi(1)=\frac{2}{2+n}.$$

– Оттук

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in D}|f(x)-f_n(x)|\right)=\lim_{n\to\infty}[\max_{x\in[0;1)}\varphi(x)]=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2+n}=0.$$

Следователно редицата $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n+x}$ е равномерно сходяща при $0\leq x\leq 1$.

Задача 3. Да се изследва сходимостта на редицата

а) $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx$ в $(0;\infty)$;

б) $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx$ в $(1;\infty)$;

в) $f_n(x)=x\operatorname{arctg} nx$ в $(0;\infty)$.

Решение. а) При всяко фиксирано x от $(0;\infty)$ имаме $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx\to\dfrac{\pi}{2}$.

Граничната функция е $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ при $(0;\infty)$.

Разглеждаме $\varphi(x)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} nx$ при фиксирано n и $x\in(0;\infty)$.

От $\varphi'(x)=-\dfrac{n}{1+n^2x^2}<0$ следва, че $\varphi(x)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} nx$ е намаляваща в $x\in(0;\infty)$ и следователно $\sup\limits_{0<x<\infty}|f(x)-f_n(x)|=\sup\limits_{0<x<\infty}\left|\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} nx\right|=\varphi(0)=\dfrac{\pi}{2}$.

Оттук $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in D}|f(x)-f_n(x)|\right)=\lim\limits_{n\to\infty}[\sup\limits_{0<x<\infty}\left|\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} nx\right|]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}\neq 0$.

Следователно редицата $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx$ не е равномерно сходяща в $(0;\infty)$.

б) При всяко фиксирано x от $(1;\infty)$ имаме $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx\to\dfrac{\pi}{2}$.

Граничната функция е $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ при $(1;\infty)$.

Разглеждаме $\varphi(x)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} nx$ при фиксирано n и $x\in(0;\infty)$.

От $\varphi'(x)=-\dfrac{n}{1+n^2x^2}<0$ следва, че $\varphi(x)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} nx$ е намаляваща в $x\in(1;\infty)$ и следователно

$$\sup_{1<x<\infty}|f(x)-f_n(x)|=\sup_{1<x<\infty}\left|\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} nx\right|=\max_{1<x<\infty}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} nx)=\varphi(1)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n.$$

Оттук $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in D}|f(x)-f_n(x)|\right)=\lim\limits_{n\to\infty}[\sup\limits_{1<x<\infty]}\left|\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} nx\right|]=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}=0$.

Следователно редицата $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx$ е равномерно сходяща в $(1;\infty)$.

в) При всяко фиксирано x от $(0;\infty)$ имаме $f_n(x)=x\operatorname{arctg} nx \to \frac{\pi x}{2}$.

Граничната функция е $f(x)=\frac{\pi x}{2}$ при $(0;\infty)$.

Разглеждаме $\varphi(x)=\frac{\pi x}{2}-x\operatorname{arctg} nx$ при фиксирано n и $x\in(0;\infty)$.

Нека $\varphi(x)=\frac{x\pi}{2}-x\operatorname{arctg} nx=(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} nx)x=\frac{1}{n}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} nx)nx=\frac{1}{n}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} t)t$
при фиксирано n и $x\in(0;\infty)$. (Положихме за по лесни пресмятания $nx=t$). Ще разгледаме функцията $\psi(t)=(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} t)t$ при $t\in[0;\infty)$. Имаме

$\psi'(t)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} t-\frac{t}{1+t^2}$ и

$$\psi''(t)=-\frac{1}{1+t^2}-\frac{1+t^2-t.2t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{-1-t^2-1+t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{-2}{(1+t^2)^2}.$$

Тъй като $\psi''(t)<0$, то функцията $\psi'(t)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} t-\frac{t}{1+t^2}$ е намаляваща в $t\in[0;\infty)$ или

$$\psi'(0)\ge\psi'(t)\ge\lim_{t\to\infty}\psi'(t)=\lim_{t\to\infty}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} t-\frac{t}{1+t^2})=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+0=0.$$

Функцията $\psi'(t)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} t-\frac{t}{1+t^2}$ приема само положителни стойности. Следователно функцията $\psi(t)=(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} t)t$ е растяща. Оттук

$$0\le\psi(t)=(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} t)t<\lim_{t\to\infty}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} t)=\sup_{0\le t<\infty}\psi(t).$$

За да намери границата $\lim_{t\to\infty}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} t)t=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} t}{\frac{1}{t}}$ ще приложим теоремата на Лопитал за $\frac{0}{0}$ (проверете): От $\frac{-\frac{1}{1+t^2}}{-\frac{1}{t^2}}=\frac{t^2}{t^2+1}\underset{t\to\infty}{\to}1$ следва $\lim_{t\to\infty}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} t)t=1$ или

$$\lim_{t\to\infty}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} t)=\sup_{0\le t<\infty}\psi(t)=1$$

И така

$$\sup_{0<x<\infty}|f(x)-f_n(x)|=\sup_{0<x<\infty}\left|\frac{x\pi}{2}-x\operatorname{arctg} nx\right|=\frac{1}{n}\sup_{0<x<\infty}\left|\frac{\pi nx}{2}-nx\operatorname{arctg} nx\right|=\frac{1}{n}\sup_{0<x<\infty}\left|(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} t)t\right|=\frac{1}{n}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{0\le x<1}|f(x)-f_n(x)|\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Редицата $f_n(x)=x\operatorname{arctg} nx\to\frac{\pi x}{2}$ равномерно.

Задача 3. (За домашна работа) Изследвайте за равномерна сходимост редиците а) $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x}$ в $[0;1]$;

б) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$ $x\in R$;

в) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$, $x\in R$;

г) $f_n(x)=x^n-x^{2n}$ в $[0;1]$.