Ще докажем по-важните свойства на дисперсията.

D1. $\mathrm{D}X \geq 0$.

Доказателство: Тъй като случайната величина $(X - \mathrm{E}X)^2 \geq 0$ то и математическото и очакване е неотрицателно, т.е. $\mathrm{D}X = \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 \geq 0$. □

D2. $\mathrm{D}c = 0$, т.е. разсейването на константите е 0.

Доказателство:

$$\mathrm{D}c = \mathrm{E}\,(c - \mathrm{E}c)^2 = \mathrm{E}\,(c - c)^2 = \mathrm{E}0 = 0.$$

□

D3. $\mathrm{D}(cX) = c^2\mathrm{D}X$.

Доказателство:

$$\mathrm{D}(cX) = \mathrm{E}\,(cX - \mathrm{E}(cX))^2 = \mathrm{E}\,(cX - c\mathrm{E}X)^2 =$$

$$= \mathrm{E}\left[c^2\,(X - \mathrm{E}X)^2\right] = c^2\mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 = c^2\mathrm{D}X$$

□

D4. Нека $X \perp\!\!\!\perp Y$, тогава $\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y$.

Доказателство: Ще използваме своиство **E3** на математическото очакване.

$$\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{E}\,[X + Y - \mathrm{E}(X + Y)]^2 = \mathrm{E}\,[(X - \mathrm{E}X) + (Y - \mathrm{E}Y)]^2 =$$

$$= \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 + \mathrm{E}\,(Y - \mathrm{E}Y)^2 + 2\mathrm{E}\,[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)] =$$
$$= \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y + 2\mathrm{E}\,[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)]$$

За да завършим доказателството е достатъчно да покажем, че последното събираемо е нула. Случайните величиниX и Y са независими и съгласно **E4** $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X\;\mathrm{E}Y$. Тогава:

$$\mathrm{E}\,[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)] = \mathrm{E}\,(XY - Y\mathrm{E}X - X\mathrm{E}Y + \mathrm{E}X\mathrm{E}Y) =$$
$$= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}Y\mathrm{E}X - \mathrm{E}X\mathrm{E}Y + \mathrm{E}(\mathrm{E}X\mathrm{E}Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}Y\mathrm{E}X = 0.$$

□

3.4 Пораждащи функции

Определение 3.5 *Нека X е случайна величина, чиито стойности са цели положителни числа. Пораждаща функция (п. ф.) на X наричаме:*

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k)\, s^k = \mathrm{E}(s^X), \quad |s| \leq 1. \tag{3.4.5}$$

Пораждаща функция на X е просто полином, в който пред k-тата степен на s стои вероятността $\mathrm{P}(X = k)$. Ако случайната величина взима само краен брой стойности, то сумата е крайна и пораждащата функция е дефинирана за всяко s. Ако стойностите на сл.в. X са изброим брой, то е сигурно, че $g_X(1) = 1$, тъй като сумата от вероятностите е равна на единица. От тук следва, че поне за $|s| \leq 1$ пораждащата функция със сигурност е сходяща, т.е. съществува. Това е достатъчно за нашите цели, така че понататък няма да разглеждаме въпроса за сходимостта на реда, чрез който се дефинират пораждащите функции.

Пример 3.6 *Ще пресметнем в.п.ф. на сл.в. от пример 1, т.е. сл.в. X означава броя на точките, паднали се при хвърлянето на зар с разпределение:*

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогава

$$g_X(s) = \frac{1}{6}s + \frac{1}{6}s^2 + \ldots + \frac{1}{6}s^6 = \frac{s}{6}\left(1 + s + \ldots + s^5\right) = \frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}.$$

Пораждащите функции улесняват пресмятането на вероятности, свързани с дискретните сл.в., както и на техните характеристиките. Ще изведем, някои по-често използвани свойства на пораждащите функции.

За пресмятане на математическото очакване чрез пораждаща функция се използва следната формула:

g1) $\mathrm{E}X = g'_X(1)$.

Доказателство: Ще диференцираме (3.4.5), след което ще положим $s = 1$.

$$g'_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X=k)\, k\, s^{k-1}\Big|_{s=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathrm{P}(X=k) = \mathrm{E}X.$$

$\square$

Дисперсията на сл.в. също може да бъде пресметната чрез п.ф.:

g2) $\mathrm{D}X = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2$.

Доказателство: Ще пресметнем втората производна на $g_X(s)$:

$$g''_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X=k)\, k(k-1)\, s^{k-2}\Big|_{s=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\, \mathrm{P}(X=k) = \mathrm{E}X(X-1).$$

В последното равенство използвахме формула (3.2.3). Сега като използваме

$$g''_X(1) = \mathrm{E}\left(X(X-1)\right) = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}X,$$

следва:

$$\mathrm{E}X^2 = g''_X(1) + \mathrm{E}X = g''_X(1) + g'_X(1).$$

$\square$

Пораждащите функциии могат да бъдат използвани за намирането на разпределението на суми от сл.в.

g3) Нека X и Y са независими случайни величини, тогава $g_{X+Y}(s) = g_X(s)g_Y(s)$.

Доказателство: Ще образуваме произведението $g_X(s)g_Y(s)$ и ще пресметнем коефициента пред s^k :

$$g_X(s)g_Y(s) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X=i)s^i \sum_{j=0}^{\infty} P(Y=j)s^j =$$

$$= P(X=0)P(Y=0)s^0 + \left[P(X=0)P(Y=1) + P(X=1)P(Y=0)\right]s^1 + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i)s^k + \ldots$$

Ще запишем това равенство в затворен вид

$$g_X(s)g_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i) \right) s^k. \tag{3.4.6}$$

Тъй като X и Y са независими сл.в., то

$$P(X=i)P(Y=k-i) = P(X=i, Y=k-i) = P(X=i, X+Y=k).$$

Ще използваме формулата за пълната вероятност, за да оценим вътрешната сума в (3.4.6):

$$\sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i, X+Y=k) = P(X+Y=k).$$

Замествайки този резултат в (3.4.6) получаваме търсената пораждаща функция на случайната величина $X+Y$:

$$g_X(s)g_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X+Y=k)\, s^k = g_{X+Y}(s).$$

□

По индукция този резултат се обобщава за повече от две независими случайни величини:

$$g_{X_1+X_2+\ldots X_n}(s) = g_{X_1}(s)\, g_{X_2}(s) \ldots g_{X_n}(s). \tag{3.4.7}$$

Пример 3.7 *Хвърлят се 10 зара. Да се намери вероятността сумата от падналите се точки да бъде точно 19. Директното пресмятане на тази задача е твърде трудоемко. Това би означавало да се пресметнат всички начини числото 19 да се представи като сума на 10 цели числа в диапазона от 1 до 6. Затова ще използваме възможностите на апарата на пораждащите функции.*

С X_i, $i = 1 \ldots 10$ ще означим точките паднали се върху i-тия зар. В предишния пример изведохме пораждащата функция на тези случайни величини, а именно

$$g_{X_i}(s) = \frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}.$$

Нека Y е сумата от падналите се точки, т.е. $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$. Точките паднали се върху един зар по никакъв начин не влияят върху точките паднали се върху друг. Следователно, случайните величини X_i са независими. Тогава, съгласно равенство (3.4.7) пораждащата функция на Y е произведение от пораждащите функции на X_i, $i = 1 \ldots 10$:

$$g_Y(s) = \prod_{i=1}^{10} g_{X_i}(s) = \prod_{i=1}^{10} \left(\frac{s(1-s^6)}{6(1-s)} \right) = \frac{s^{10}(1-s^6)^{10}}{6^{10}(1-s)^{10}}.$$

Съгласно дефиницията на пораждащата функция търсената вероятност ще бъде коефициента пред 19-тата степен на s в тази функция.

За да пресметнем коефициента на s^{19} ще развием тази функция по степените на s. Ще използваме формулата за бином на Нютон

$$(1-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-a)^k$$

за да преобразуваме числителя. За знаменателя ще използваме формулата за отрицателен бином:

$$(1-a)^{-n} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{n+l-1}{l} a^l = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{n+l-1}{n-1} a^l.$$

По този начин за пораждащата функция на Y получаваме:

$$g_Y(s) = \frac{s^{10}}{6^{10}} \left[\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (s^6)^k \right] \sum_{l=0}^{\infty} \binom{9+l}{l} s^l =$$

$$g_Y(s) = \frac{s^{10}}{6^{10}} \left[1 - \binom{10}{1} s^6 + \binom{10}{2} s^{12} + \dots \right] \sum_{l=0}^{\infty} \binom{9+l}{l} s^l =$$

Пред сумите стои s^{10}, следователно от произведението на двете суми трябва да получим s^9. Това може да стане само по два начина. Да вземем единица от първата сума и да я умножим с s^9 от втората сума. Или да вземем s^6 от първата и s^3 от втората сума. Останалите събираеми в първата сума са със степен равна или по-голяма от 12, тъй че няма как да се използват.

Окончателно, за търсената вероятност получаваме

$$\mathrm{P}(Y=19) = coeff_{s^{19}} \{g_Y(s)\} = \frac{1}{6^{10}} \left[\binom{18}{9} - \binom{10}{1}\binom{12}{3} \right].$$

3.5 По-важни дискретни разпределения

В този раздел ще разгледаме свойствата на някои от най-често срещаните дискретни случайни величини.

3.5.1 Разпределение на Бернули - $X \in Be(p)$

Това разпределение е кръстено на името на швейцарския математик Якоб Бернули. „Опит на Бернули“ наричаме опит, при който има само две възможности, наречени „успех“ с вероятност p или “неуспех’"с вероятност $q = 1 - p$. Стандартният пример е хвърляне на една монета. Съответно, случайната величина с разпределение на Бернули може да взима само две стойности - „1“ при успех и „0“ при неуспех, т.е. разпределението и има вида:

X	0	1
P	q	p

Елементарно се пресмятат $\mathrm{E}X = p$ и $\mathrm{D}X = pq$.