Фигури от II степен

I Криви от II степен

ОКС $K = Oxy$

1. $k: F(x,y) = a_{11}.x^2 + 2a_{12}.x.y + a_{22}.y^2 + 2a_{13}.x + 2a_{23}.y + a_{33} = 0$

Примери:

1) $k_1: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ – елипса
2) $k_2: x^2 - y^2 = 1$ – хипербола
3) $k_3: y^2 - 2.x = 0$ – парабола
4) $k_4: x^2 - y^2 = 0$

   k_4 съдържа особена точка;
   k_4 е изродена крива;
   k_4 се разпада на две прави;
5) $k_5: x^2 - 2xy + y^2 = 0$

   $k_5: (x-y)^2 = 0$

   k_5 съдържа безброй много особени точки;
   k_5 е изродена крива;
   k_5 се разпада на две съвпадащи прави;

Кога една крива k от II степен съдържа особени точки (разпада се на две прави) и колко е техният брой?

$k: F(x,y) = a_{11}.x^2 + 2.a_{12}.xy + a_{22}.y^2 + 2a_{13}.x + 2a_{23}.y + a_{33} = 0$

$\bar{A} = \{a_{ij}\}_{3x3}$, $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\det \bar{A} = ?$

$\tau(\bar{A}) = ?$

1 сл. $\det \bar{A} \neq 0$, $\tau(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ к е неизродена крива, к не съдържа особени точки;

2 сл. $\det \bar{A} = 0$, $\tau(\bar{A}) = 2 \Rightarrow$ к съдържа единствена особена точка, к се разпада на две прави;

3 сл. $\det \bar{A} = 0$, $\tau(\bar{A}) = 1 \Rightarrow$ к съдържа безброй много особени точки, всяка точка на к е особена, к се разпада на две съвпадащи прави;

* * *

2. Разгл. $A = \{a_{ij}\}_{2x2}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$|A - s.E| = 0$ - характеристично уравнение

$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-s \end{vmatrix} = 0$ s_1 и s_2 - корени на характ. уравнение

1 сл. $s_1 . s_2 > 0 \Rightarrow$ к е от елиптичен тип;

2 сл. $s_1 . s_2 < 0 \Rightarrow$ к е от хиперболичен тип;

3 сл. $s_1 = 0, s_2 \neq 0 \Rightarrow$ к е от параболичен тип;

Теорема: Съществуват девет типа метрично нееквивалентни криви от II степен:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – елипса

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – имагинерна елипса

3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – хипербола

4. $y^2 = 2p.x$ – парабола

5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ – две комплексно спрегнати пресичащи се прави; една особена точка т. $O(0;0)$;

6. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ – две реални пресичащи се прави; една особена точка – т. $O(0;0)$;

7. $x^2 - d^2 = 0$ – две реални успоредни прави; една особена точка;

8. $x^2 + d^2 = 0$ – две комплексно спрегнати $\parallel$ прави; една особена точка;

9. $x^2 = 0$ – една двойна права; всяка точка е особена;

II Повърхнини от II степен

ОКС $K = Oxyz$

$$S: F(x,y,z) = a_{11}.x^2 + a_{22}.y^2 + a_{33}.z^2 + 2a_{12}.xy + 2a_{13}.xz + 2a_{23}.yz +$$
$$+ 2a_{14}.x + 2a_{24}.y + 2a_{34}.z + a_{44} = 0$$

Чрез подходяща смяна на ОКС това уравнение се свежда до едно от следните метрични канонични уравнения:

1. $S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ елипсоид

$$S \cap Oxy = \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \text{ - елипса}$$

$$S \cap Oxz = \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ - елипса}$$

$$S \cap Oyz = \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ - елипса}$$

2. $S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ - имагинерен елипсоид

3. $S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - прост хиперболоид

Сечения: $C\ Oxy: z=0$ - елипса

$C\ Oxz: y=0$ - хипербола

$C\ Oyz: x=0$ - хипербола

4. $S: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ – двоен хиперболоид

Сечения: с $O_{xy}: z=0$ – хипербола

с $O_{xz}: y=0$ – хипербола

с: $x=d$, $d>a$ – елипса

5. $S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ – конус

6. $S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ – имагинерен конус

7. $S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2.z$ – елиптичен параболоид

Сечения: с Oxz => парабола

с O_{yz} => парабола

с $z=d>0$ => елипса

8. $S: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2.z$ – хиперболичен параболоид

9. $S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – елиптичен цилиндър

10. $S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – имагинерен елиптичен цилиндър

11. $S: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – хиперболичен цилиндър

12. $S: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ – две реални пресичащи се равнини

13. $S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ – две комплексно спрегнати пресичащи се равнини

14. $S: y^2 = 2p.x$ – параболичен цилиндър

15. $S: x^2 = a^2$ – две реални успоредни равнини

16. $S: x^2 = -a^2$ – две комплексно спрегнати успоредни равнини

17. $S: x^2 = 0$ – една двойна равнина