Смяна на базис

$\mathbb{V}$ - ЛП над $\mathbb{F}$

$e_1, \dots, e_n$ - базис на $\mathbb{V}$

$f_1, \dots, f_n$ - базис на $\mathbb{V}$

$$f_1 = T_{11} e_1 + T_{21} e_2 + \dots + T_{n1} e_n$$

$$f_2 = T_{12} e_1 + T_{22} e_2 + \dots + T_{n2} e_n$$

$$f_n = T_{1n} e_1 + T_{2n} e_2 + \dots + T_{nn} e_n$$

$$T_{e \to f} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{nn} \end{bmatrix}$$ - матрица на прехода от базиса e към базиса f

$\det T_{e \to f} \neq 0$ $\quad T^{-1}_{f \to e}$ - матрица на прехода от f към e

Тв. $v \in V$; $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$

$v = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots + \mu_n f_n$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}; \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

$$\lambda = T \cdot \mu \quad ; \quad \mu = T^{-1} \lambda$$

Деф. Нека $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Тогава $A \sim B$ (A е подобна на B), ако $\exists T \in M_n(\mathbb{F})$:

$B = T^{-1} A T$.

$\sim$ - релация на екв.

рефлексивност $A = E^{-1} A E$

симетричност $B = T^{-1} A T \rightarrow T B T^{-1} = A$

$(T^{-1})^{-1} B \underline{T^{-1}} = A$. тр. $B = T_1^{-1} A T_1$; $C = T_3^{-1} A T_3$

$C = T_2^{-1} B T_2$

$\underline{B = \underbrace{T_1^{-1} A T_1}}$; $\underline{C} = \underline{T_2^{-1} \underline{B} T_2} = T_2^{-1} \underbrace{T_1^{-1} A T_1}_{B} T_2 =$

$= \underbrace{(T_1 T_2)}_{T_3}^{-1} A \underbrace{(T_1 T_2)}_{T_3} \Rightarrow A \sim C \Rightarrow$ транзитивна

От 1), 2), 3) $\sim$ е релация на екв.

<u>Тв.</u> $A \sim B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$

<u>Тв.</u> Ако $A \sim B \Rightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$

$M_e^f(\varphi) = TBT^{-1}$

<u>Тв.</u> $\varphi \in \operatorname{Hom} V$

$M_e^f(\varphi)$; $T_{e \to f'}$; $B = M_{f'}^{f''}$; $\boxed{B = T_{e \to f'}^{-1} M_e^f(\varphi) T_{e \to f'}}$

1) Нека e_1, e_2 – базис на $\mathbb{V}$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}\,\mathbb{V}$:

$$\varphi((\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)) = \lambda_1 e_1 + (-\lambda_1 + 2\lambda_2) e_2$$

Да се намери матрицата на φ в базиса $\underline{e_1' = e_1 + e_2}$; $\underline{e_2' = -2e_1 - e_2}$ и координатите на образа на $v = 2e_1' + 3e_2'$ спрямо втория базис

<u>Решение:</u> Търсим $M_e(\varphi)$.

$$\varphi(1.e_1 + 0.e_2) = 1.e_1 + (-1 + 2.0)e_2 = e_1 - e_2$$

$$\varphi(0.e_1 + 1.e_2) = 0.e_1 + (0 + 2.1)e_2 = 0.e_1 + 2e_2$$

$$M_e(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad T_{e \to e'} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M_{e'}(\varphi) = T_{e \to e'}^{-1} \cdot M_e(\varphi)\, T_{e \to e'}$$

Лесен начин за намиране на обратна за 2x2

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

I н. $T^{-1}_{e\to e'}=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]\sim$

$\sim\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right];\ T^{-1}_{e\to e'}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

II н. $\det = 1.(-1)-1.(-2)=-1+2=1$

$$\frac{1}{1}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{e'}(\varphi) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$v = 2e_1' + 3e_2'$ спрямо втория базис

образа на

$$\underset{M_{e'}(\varphi)}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} \underset{v}{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(v) = 8e_1' + 6e_2'$$

② Нека e_1, e_2 обр. базис на $\mathbb{V}$, $\varphi \in \mathrm{Hom}\,\mathbb{V}$ има матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ в базиса $a_1 = -3e_1 + 7e_2$, $a_2 = e_1 - 2e_1$, $\psi \in \mathrm{Hom}\,\mathbb{V}$, който има матрица $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ в базиса $b_1 = -6e_1 - 7e_2$; $b_2 = -5e_1 + 6e_2$

Да се намери матрицата на $\varphi\psi$ в базиса e_1, e_2.

Решение: 1) Намираме $M_e(\varphi)$

$M_a(\varphi) = A$; $T_{\underline{a} \to \underline{e}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$; $T_{e \to a} = (T_{a \to e})^{-1}$

$$M_e(\varphi) = T_{e \to a}^{-1} M_a(\varphi) T_{e \to a} = T_{a \to e} M_a(\varphi) T_{a \to e}^{-1}$$

$$M_e(\psi) = T_{b \to e} M_b(\psi) T_{b \to e}^{-1} ; \quad T_{b \to e} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$T_{a\to e} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}, \quad \det = (-3)\cdot(-2) - 1\cdot 7 = 6 - 7 = -1$$

$$T_{a\to e}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T_{b\to e} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}; \quad T_{b\to e}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}_e(\varphi) = T_{a\to e} A \, T_{a\to e}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}_e(\psi) = T_{b\to e} B \, T_{b\to e}^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \Big[$$

$$\begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -53 \\ 5 & 21 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 467 & -238 \\ -177 & 101 \end{bmatrix}$$

$$-16\cdot(-6)+(-53)\cdot(-7) = 96 + 371 = 467$$

$$-16\cdot(-5)+(-53)\cdot 6 = 80 - 318 = -238$$

$$5\cdot(-6)+21\cdot(-7) = -30 - 147 = -177$$

$$5\cdot(-5)+21\cdot 6 = -25 + 126 = 101$$

$$M_e^{(\psi\psi)} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 467 & -238 \\ -177 & 101 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 757 & 375 \\ 290 & -137 \end{bmatrix}$$

$$-2\cdot 467 + 177 = -934 + 177 = 757$$

$$-2\cdot(-238) - 101 = 476 - 101 = 375$$

$$467 - 177 = 290$$

$$\begin{array}{r} 934 \\ -\ 177 \\ \hline 757 \end{array}$$

③ Нека e_1, e_2, e_3 и f_1, f_2, f_3 са два базиса на V.
Да се док. че $\exists!\, \varphi \in \mathrm{Hom}\, V : \varphi(a_i) = b_i$ и да се намери матрицата на φ в базиса f_1, f_2, f_3, където

$$a_1 = e_1 + e_2 + e_3;\ a_2 = e_1 + 2e_2 + 2e_3,\ a_3 = e_1 + 2e_2 + 3e_3,$$
$$b_1 = e_1 + 2e_2 + e_3,\ b_2 = 2e_1 + e_2 + e_3;\ b_3 = e_1 + 3e_2 + e_3,$$
$$f_1 = e_1 - e_2 + e_3,\ f_2 = e_1 \quad + e_3;\ f_3 = -e_1 - e_2 + 2e_3.$$

Решение: Основна Th за ЛИ: $a_1, \dots, a_n$ - базис на V_n и $b_1, \dots, b_n \in V \Rightarrow \exists!\, \varphi \in \mathrm{Hom}\, V : \varphi(a_i) = b_i$. Ще док. че a_1, a_2, a_3 обр. базис. Щом e_1, e_2, e_3 - базис $\Rightarrow \dim V = 3$. Достатъчно е да док. че a_1, a_2, a_3 са ЛНЗ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \cancel{1.2.3 + 1.1.3 + 1.2.2 - 1.2.1}\ 1.2.3 + 1.2.1 + 1.2.1 - 1.2.1 - 2.2.1 - 1.1.3 = 10 - 9 = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$a_1 a_2 a_3$ обр. баз.

Щом a_1, a_2, a_3 - базис и $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{V}$, то

$(\exists! \varphi \in \mathrm{Hom}\,\mathbb{V})(\varphi(a_i) = b_i)$. Да го намерим

(матрицата му в базиса e)

$\underline{\sigma(e_i)} = b_i$ за $i = 1, 2, 3$

(∃! такива, защото e_1, e_2, e_3 - базис)

$\underline{\tau(e_i)} = a_i$

$\varphi(\underline{a_i}) = \underline{b_i}$

$\varphi(\tau(e_i)) = \sigma(e_i) \quad / \tau^{-1}$

$(\varphi \circ \underbrace{\tau \circ \tau^{-1}}_{id})(e_i) = (\sigma \circ \tau^{-1})(e_i)$

$\varphi(e_i) = (\sigma \circ \tau^{-1})(e_i) \Rightarrow M_e(\varphi) = BA^{-1}$

$\sigma(e_i) = b_i \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tau(e_i) = a_i, \tau^{-1} \to A^{-1}$

Намерихме $\mathcal{M}_e(\varphi)$. Търсим $\mathcal{M}_f(\varphi)$.

$$\mathcal{M}_f(\varphi) = T_{e\to f}^{-1}\,\mathcal{M}_e(\varphi)\,T_{e\to f}$$

$$T_{e\to f} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4) Нека e_1, e_2, e_3, e_4 е базис на V и φ на V има матрица

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Да се намерят базиси на $\mathrm{Ker}\,\varphi$, $\mathrm{Im}\,\varphi$, $\mathrm{Ker}\,\varphi + \mathrm{Im}\,\varphi$, $\mathrm{Ker}\,\varphi \cap \mathrm{Im}\,\varphi$

Решение: $A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$c_1 = (-2,1,0,0)$

$c_2 = (-1,0,1,-1)$

$\mathrm{Ker}\,\varphi = l(c_1, c_2)$

$x_3 = p,\ x_2 = q$

$x_4 = -p$

$x_1 = -2q - p$

1) $p = 0,\ q = 1$

2) $p = 1,\ q = 0$

$c_1 = (-2,1,0,0);\ c_2 = (-1,0,1,-1)$

Базис на $\operatorname{Im}\varphi$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$d_1 = (-1, 0, 1, -1)$; $d_2 = (-1, 1, 0, 0)$ – базис на $\operatorname{Im}\varphi$

$\operatorname{Im}\varphi = l(d_1, d_2)$

$$\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \cancel{d_1} \\ d_2 \end{array} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi = l(c_1, c_2, d_2)$

c_1, c_2, d_2 – базис на $\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi$

За сечението

$$\begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = x_2$

$x_4 = -x_1 + x_3$

$x_2 = p$

$x_3 = q$

1) $p = 1, q = 0$

2) $p = 0, q = 1$

$x_1 + x_2 + -x_4 = 0$ $\operatorname{Im}\varphi$

$x_3 + x_4 = 0$

$$\left|\begin{array}{l} x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2-x_4=0 \\ x_3+x_4=0 \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$0\cdot x_1+\underline{1}\cdot x_2+0x_3+0x_4=0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_2=0$

$x_3=p$

$x_4=-p$

$x_1=-\underbrace{2x_2}_{0}+x_4$

$p=1$

$f=(-1,0,1,-1)$

базис на $\ker\varphi\cap\operatorname{Im}\varphi$

$\dim\ker\varphi+\dim\operatorname{Im}\varphi-\dim(\ker\varphi\cap\operatorname{Im}\varphi)=$

$=2+2-1=3=\dim(\ker\varphi+\operatorname{Im}\varphi)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$. Базис на $\ker\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$, $\ker\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$, $\ker\varphi + \operatorname{Im}\varphi$

1) $\ker\varphi$

$$\begin{bmatrix} 0 & -7 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -7 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \begin{array}{l} x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ x_1 = p \end{array}$$

1/ $p = 1$

$c = (1, 0, 0, 0)$

базис на $\ker\varphi$

2/ $\operatorname{Im}\varphi$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & -21 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & -21 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & -21 & 0 \end{bmatrix}$$

$(0, 1, 0, 0)$

$(1, 0, 0, 0)$

$(0, 0, 1, 0)$