1 (Не)определимост

Задача 1 *Нека $\mathcal{S}$ е множеството от всички изброими редици от естествени числа, тоест:*

$$\mathcal{S} = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \,|\, x_i \in \mathbb{N}\}.$$

Разглеждаме структура $\mathcal{A}$ с носител $\mathcal{S} \cup \mathbb{N}$ за език с един триместен предикатен символ $shift$ с интерпретация:

$$shift^{\mathcal{S}}(x, n, y) \stackrel{def}{\longleftrightarrow} x, y \in \mathcal{S} \,\&\, n \in \mathbb{N} \,\&\, \forall i \in \mathbb{N}(y_i = x_{i+n}).$$

Да се докаже, че следните множества са определими в $\mathcal{A}$:

1. $\{0\}$,
2. $\{x \in \mathcal{S} \,|\,$ *всички елементи на x са равни*$\}$,
3. $$\{x \in \mathcal{S} \,|\, \text{ ако се премахнат първите няколко, но поне един, елемента на } x, \text{ ще се получи отново } x\}.$$

Кои от следните множества са определими в $\mathcal{A}$ и защо:

1. $\{(k, m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, n = k + m\}$,
2. $\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, m$ *дели без остатък* $n\}$,
3. $\{1\}$,
4. $\{x \in \mathcal{S} \,|\, x$ *е аритметична прогресия*$\}$?

Има ли автоморфизми h на $\mathcal{A}$, за които $h(n) \neq n$ за някое $n \in \mathbb{N}$? Има ли автоморфизми h на $\mathcal{A}$, за които $h(x) \neq x$ за някое $x \in \mathcal{S}$?

Задача 2 *Нека $\mathcal{S}$ е множеството от всички изброими редици от естествени числа, тоест:*

$$\mathcal{S} = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \,|\, x_i \in \mathbb{N}\}.$$

Разглеждаме структура $\mathcal{A}$ с носител $\mathcal{S} \cup \mathbb{N}$ за език с един триместен предикатен символ $dilate$ с интерпретация:

$$dilate^{\mathcal{S}}(x, d, y) \stackrel{def}{\longleftrightarrow} x, y \in \mathcal{S} \,\&\, d \in \mathbb{N} \,\&\, \forall k \in \mathbb{N}(y_k = x_{kd}).$$

Да се докаже, че следните множества са определими в $\mathcal{A}$:

1. $\{1\}$ и $\{0\}$

2. $\{x \in \mathcal{S} \mid$ всички елементи на x са равни$\}$,

3. $\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 \mid ab = c\}$

Определими ли са в $\mathcal{A}$:

1. $\{2\}$?

2. $\{x \in \mathcal{S} \mid$ никои два члена (с различни индекси) на x не са равни$\}$?

Задача 3 *Нека с $P = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ означим целочислените точки в първи квадрант на равнината.* Оцветяване *на P ще наричаме всяка тотална функция $x : P \to \{black, white\}$. Нека $\mathcal{C} = \{x \mid x$ е оцветяване$\}$.*

Разглеждаме структура $\mathcal{S}$ с носител $\mathcal{C} \cup P$ за език с единствен нелогически символ триместния предикатен символ achromatic с интерепретация:

$$achromatic^{\mathcal{S}}(a,x) \overset{def}{\leftrightarrow} x \in \mathcal{C} \,\&\, a \in P \text{ и има квадрат с долен ляв ъгъл } a, \text{ който не е едноцветен според } x.$$

Да се докаже, че в $\mathcal{S}$ са определими:

1. $\{x \in \mathcal{C} \mid \forall a, b \in P(x(a) = x(b))\}$.

2. $\{(a,b) \in P^2 \mid a = (a_1, a_2) \& b = (b_1, b_2) \& a_1 \leq b_1 \& a_2 \leq b_2\}$.

3. $\{(a,b,c,d) \in P^4 \mid abcd$ е правоъгълник$\}$.

4. $\{x \in \mathcal{C} \mid$ с изключение на една единствена точка, x е едноцветно$\}$.

5. (алтернативно на горното):
   $\{x \in \mathcal{C} \mid \exists a \in P \forall b \in P(x(a) = x(b) \Rightarrow a = b)\}$.

Определими ли са в $\mathcal{S}$:

1. $\{x \in \mathcal{C} \mid$ с изключение на краен брой точки, x е едноцветно$\}$,

2. (алтернативно на горното):
   $\{x \in \mathcal{C} \mid \exists F \subseteq P(F$ е крайно и $\forall a \in P \forall b \in P(x(a) \neq x(b) \Rightarrow (a \in F \Leftrightarrow b \notin F))\}$.

3. $\{x \in \mathcal{C} \mid x$ е шахматно оцветяване$\}$.

4. $\{(a,b,c,d) \in P^4 \mid abcd$ е квадрат$\}$.

2 (Не)изпълнимост

Задача 4 *В език с един двуместен предикатен символ* p *и един едноместен функционален символ* f *са записани следните формули:*

$$\begin{aligned}
\phi_1 :&\quad \forall x(p(x,x) \leftrightarrow \neg\exists y(p(x,y)))\\
\phi_2 :&\quad \forall x\forall y(p(x,y) \leftrightarrow \exists z(p(x,z)\&p(z,y)))\\
\phi_3 :&\quad \forall x\forall y(p(x,y) \rightarrow p(f(y),f(x)))\\
\phi_4 :&\quad \forall x\exists y(p(x,y)\&p(y,f(y))\&p(f(y),f(x))).
\end{aligned}$$

Нека $\Gamma_1 = \{\phi_1,\phi_2,\phi_3\}$*, а* $\Gamma_2 = \{\phi_1,\phi_2,\phi_4\}$*. Да се определи с доказателство кои от множествата* Γ_1 *и* Γ_2 *са изпълними и кои – не.*

Задача 5 *В език с формално равенство, един двуместен предикатен символ* p *и един едноместен функционален символ* f *са записани следните формули:*

$$\begin{aligned}
\phi_1 :&\quad \forall x(\neg p(x,x))\\
\phi_2 :&\quad \neg\exists x\forall y\exists z(p(x,z)\&p(z,y) \rightarrow \neg p(x,y))\\
\phi_3 :&\quad \forall x\forall y(p(x,y) \rightarrow p(f(y),f(x)))\\
\phi_4 :&\quad \exists x\forall y(p(x,y) \vee x\doteq y)
\end{aligned}$$

.

Нека $\Gamma_1 = \{\phi_1,\phi_2,\phi_3\}$*, а* $\Gamma_2 = \{\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4\}$*. Да се определи с доказателство кои от множествата* Γ_1 *и* Γ_2 *са изпълними и кои – не.*

3 Задачи от "сезон" 20-21

Задача 6 *Нека* α,β,q *са две по две взаимнопрости естествени числа. Разглеждаме структура* $\mathcal{S}$ *с носител* $\mathbb{N}$ *за език с един триместен предикатен символ* p*, чиято интерепретация е:*

$$p^{\mathcal{S}}(a,b,c) \overset{def}{\iff} \alpha a + q\beta b = q^2 c.$$

Да се докаже, че в $\mathcal{S}$ *са определими:*

1. $\{0\}$.

2. [1] $q^2\mathbb{N}$, $q\mathbb{N}$, $\alpha\mathbb{N}$, $\beta\mathbb{N}$.

3. $\{(x, y) \in M \times P \,|\, x < y\}$, *където* $M = \alpha\beta\mathbb{N}$, *а* $P = \alpha\mathbb{N}$ *или* $P = \beta\mathbb{N}$.

4. *за всяко естествено число* n, $\{\alpha\beta n\}$, $\{\alpha q n\}$, $\{\beta q n\}$.

5. *за всяко естествено число* $a > \alpha^2\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2$, $\{a\}$.

6. *за всяко* $0 < i < \alpha^2$, $\{a > \beta^2\alpha \,|\, a \equiv i \pmod{\alpha^2}\}$.

Вярно ли е, че следните множества са определими:

1. *за всяко* $0 < i < \alpha$, $\{a \in \mathbb{N} \,|\, a \equiv i \pmod{\alpha}\}$*?*

2. $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, x < y\}$*?*

Доколко може да отслабим условието за взаимнапростота на α, β *и* q*, така че задачата да остане богата?*

Задача 7 *Нека* $\mathcal{B}$ *е множеството от всички биекции* $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*. За естествено число* $k \in \mathbb{N}$ *с* $\mathcal{B}_k$ *означаваме множеството от онези биекции* $b \in \mathcal{B}$*, за които има точно* k *различни естествени числа* n*, за които* $b(n) \neq n$.

Разглеждаме структура $\mathcal{S}$ *с носител* $\mathcal{B}$ *за език с формално равенство, един едноместен предикатен символ* p *и един двуместен функцинален символ* f*, в която:*

$$\begin{aligned} p^{\mathcal{S}}(b) \quad &\stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \quad b \in \mathcal{B}_2 \\ f^{\mathcal{S}}(b_1, b_2) = b \quad &\stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \quad \forall n \in \mathbb{N}(b(n) = b_1(b_2(n))). \end{aligned}$$

Да се докаже, че в $\mathcal{S}$ *са определими:*

1. $\mathcal{B}_0$,

2. $\mathcal{B}_3$,

3. $\mathcal{B}_k$ *за всяко естествено число* k.

Да се намерят с доказателство всички елементи на $\mathcal{B}$*, които са определими в* $\mathcal{S}$.

[1] Използваме стандартни означения: $k\mathbb{N} = \{kn \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Задача 8 *За положителни цели числа n, m с $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ означаваме множеството от матрици с n реда и m стълба, чиито елементи са реални числа. Нека $\mathcal{M}^* = \bigcup_{n,m>0} \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ е множеството от всички матрици с реални елементи.*

$\mathcal{S}$ е структура за език без формално равество и с нелогически символи – триместните предикатни символи s и p и едноместния – vec. Универсумът на $\mathcal{S}$ е $\mathcal{M}^*$, а интерпретацията на предикатните символи е:

$$\begin{aligned}
p^{\mathcal{S}}(A,B,C) &\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \text{умножението на } A \text{ и } B \text{ е дефинирано и } AB = C\\
s^{\mathcal{S}}(A,B,C) &\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad A \text{ и } B \text{ са с еднакви размерности и } C = A + B\\
vec^{\mathcal{S}}(A) &\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad A \text{ е вектор-ред.}
\end{aligned}$$

Да се докаже, че в $\mathcal{S}$ са определими:

1. $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$.
2. *за всяко $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.*
3. *за всяко $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:*

$$\{(v_1, v_2, \dots, v_n) \,|\, (v_1, v_2, \dots, v_n) \text{ е базис от вектор-редове в } \mathbb{R}^n\}.$$

Определими ли са:

$$\{M \in \mathcal{M}^* \,|\, Ker(M) \text{ е 5-мерно линейно пространство}\}?$$
$$\{M \in \mathcal{M}^* \,|\, Im(M) \text{ е 7-мерно линейно пространство}\}?$$

4 Изпълнимост

Задача 9 *В език с индивидна константа a, дмувестен предикатен символ r и триместен предикатен символ p са дадени формулите:*

$$\begin{aligned}
\phi_1 &: \ \forall x \exists y (\neg r(x,x) \& r(x,y))\\
\phi_2 &: \ \forall x \forall z (\exists y (r(x,y) \& r(y,z)) \leftrightarrow r(x,z))\\
\phi_3 &: \ \forall y (r(a,y) \vee r(y,a) \to \exists z (p(y,a,z)))\\
\phi_4 &: \ \forall x \forall y \forall z (p(x,y,z) \to p(z,y,x) \& \neg p(y,x,z))\\
\phi_5 &: \ \forall x \exists y \exists z (r(x,y) \& r(y,z) \& \neg p(x,y,z) \& \neg p(y,x,z)).
\end{aligned}$$

Да се провери с обосновка дали множеството $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5\}$ *е изпълнимо.*

Задача 10 *В език с два двуместни предикатни символа* p *и* r *са дадени следните формули:*

$$\begin{aligned}
\phi_1 &: \ \forall x(r(x,x)\&\neg p(x,x)) \\
\phi_2 &: \ \forall x\exists y(r(x,y)\&p(x,y)) \\
\phi_3 &: \ \forall x\forall y((r(x,y)\leftrightarrow r(y,x))\&(r(x,y)\&p(x,y)\to\exists z(p(x,z)\&p(z,y)))) \\
\phi_4 &: \ \forall x\exists y(\neg r(x,y)\&p(x,y)\&\forall z(p(x,z)\leftrightarrow\neg p(z,y)) \\
\phi_5 &: \ \forall x\forall y\forall z((r(x,y)\&r(y,z)\to r(x,z))\&(p(x,y)\&p(y,z))\to p(x,z)).
\end{aligned}$$

Изпълнимо ли е множеството $\{\phi_i \,|\, 1\leq i\leq 5\}$*? Защо?*

Задача 11 *В език с един едноместен предикатен символ* p *и един двуместен предикатен символ* r *са дадени следните формули:*

$$\begin{aligned}
\phi_1 &: \ \forall x\neg r(x,x) \\
\phi_2 &: \ \forall x\forall y\forall z(\neg p(x)\to(p(x,y)\&p(y,z)\to p(x,z))) \\
\phi_3 &: \ \forall x\forall y(p(x)\to(r(x,y)\leftrightarrow\exists z(r(x,z)\&r(z,y))) \\
\phi_4 &: \ \forall x\exists y(\neg p(x)\to(r(x,y)\&\neg\exists z(r(x,z)\&r(z,y)))) \\
\phi_5 &: \ \forall x(\exists y(r(x,y)\&p(y))\&\exists y(r(x,y)\&\neg p(y))).
\end{aligned}$$

Ако $\Gamma_0 = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$*, а* $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{\phi_4\}$*,* $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\phi_5\}$*, да се докаже кои от множествата* Γ_0*,* Γ_1 *и* Γ_2 *са изпълними.*

Задача 12 *В език с два двуместни предикатни символа* p *и* r *са дадени следните формули:*

$$\begin{aligned}
\phi_1 &: \ \forall x(p(x,x)\&\neg r(x,x)) \\
\phi_2 &: \ \forall x\forall y(p(x,y)\&p(y,z)\to p(z,x)) \\
\phi_3 &: \ \forall x\forall y(p(x,y)\to(r(x,y)\leftrightarrow\exists z(r(x,z)\&r(z,y)))) \\
\phi_4 &: \ \forall x(\exists y(r(x,y)\&p(x,y))\&\exists y(r(x,y)\&\neg p(x,y))) \\
\phi_5 &: \ \forall x\exists y\exists z(r(x,y)\&r(x,z)\&\neg p(x,y)\&\neg p(x,z)\&\neg p(x,z)).
\end{aligned}$$

Нека $\Gamma_0 = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$*,* $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{\phi_4\}$ *и* $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\phi_5\}$*. Да се определи с доказателство кои от множестват* Γ_0*,* Γ_1 *и* Γ_2 *са изпълними и кои не.*