Тв. R - пр. с 1, $R^* = \{a \in R \mid b \in R : ab = ba = e\}$
(множ. от обратимите ел.). Тогава
$(R^*, \cdot)$ е група

Опр. R^* - мултипликативна гр. на R

Пр. $(M_n(F))^* = GL_n(F)$

Д-во като за $GL_n(F)$

- $a_1, a_2 \in R^* \Rightarrow \exists b_1, b_2 \in R : a_1 b_1 = b_1 a_1 = a_2 b_2 = b_2 a_2 = e$

  $(a_1 a_2)(b_2 b_1) = (b_2 b_1)(a_1 a_2) = e \overset{b_2 b_1 \in R}{\Longrightarrow} a_1 a_2 \in R^*$
- асоц. $\Leftarrow$ R - пр.
- $ee = e \Rightarrow e \in R^*$; $\forall a \in R^*$ $ae = ea = a \Leftarrow R$ пр. с 1

– $\forall a \in R^* \ \exists a' \in R^* : aa' = a'a = e$

$a \in R^* \Rightarrow \exists b \in R : \underline{ab = ba = e}$. Трябва да проверим, че $\underline{b \in R^*}$

$\downarrow$

$b \in R^*$ (с $\underline{a}$)

<u>Зад.</u> $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$; $(a^{-1})^{-1} = a$

$$\boxed{a}\boxed{a^{-1}} = \boxed{a^{-1}}\boxed{a} = e$$

V – ЛП

– подпрост.

– ЛК → ЛО $\quad e(X) = \bigcap U$ – най-малкото подпространство,
$\quad X \subseteq U < V$ което съдържа X

– ЛИ $\longleftrightarrow$ хомоморфизми ! $\bigcap$ на подпростр. е подпрост.

$(G,\cdot)$ гр. ; $g,h \in G$ $\sim$ ЛК $\to$ $gh, hg, gg^{-1}=e, g^{-1}h^{-1}, gh^{-1}, h^{-1}g^{-1},$

$gh^{-1}h=g$, $\cancel{g^{-1}h^{-1}g^{-1}h^{-1}}$, $g^n h^n$, gg

α – група, пръстен, тяло, поле ; Лин. простр.

Опр. Ако $R \in \alpha$ и $S \subseteq R$, казваме, че S е подα, ако

$S \in \alpha$ относно опер. на R

$2\mathbb{Z} = \{2z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ подпръстен на $\mathbb{Z}$

(схема 1)

$f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$

$z \mapsto 2z$

биекция

В $2\mathbb{Z}$ $\oplus$, $\odot$ наследени от $\mathbb{Z}$ чрез f

$(2z_1) \oplus (2z_2) := 2(z_1 + z_2)$ | $2\mathbb{Z}$ е пръстен

$(2z_1) \odot (2z_2) := 2(z_1 z_2)$ | с $1 - 2.1$

$(2\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ не е подпръстен на $\mathbb{Z}$

Зад. Нека R е α и $R_i, i \in I$ са подα. Тогава

$$\bigcap_{i \in I} R_i \text{ също е под}\alpha$$

Опр. R е α; $X \subseteq R$; $\langle X \rangle = \bigcap_{\substack{X \subseteq U \\ U \text{ - под}\alpha \text{ на } R}} U$ (най-малката подα, която съдържа X)

Зад. 1) $\alpha = \Lambda\Pi \to \langle X \rangle = \ell(X)$

2) $\alpha =$ група

$$\langle X \rangle = \{ x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{\underset{\substack{\uparrow \\ e}}{0}\};\ x_1 \ldots x_n \in X;\ \varepsilon_i = \pm 1 \}$$

Интерпретация: разгл. думи дори безсмислени получени от азбуката $X \cup X^{-1}$ $\left(X^{-1} = \{ x^{-1} \mid x \in X \} \right)$ с опер. конкатенация (слепване)