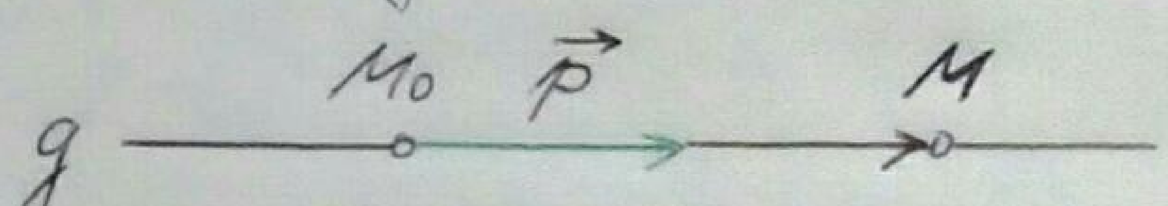
9. Общо уравнение на права в равнина. Взаимно положение на две прави. Отрезово и декартово уравнение.

Нека в равнина α е фиксирана афинна координатна система $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ и g е произволна права в α.



Върху g избираме една точка $M_0(x_0, y_0)$ и един ненулев вектор $\vec{p}(p_1, p_2)$. Тогава точка $M(x,y)$ е от g точно тогава, когато векторите $\vec{p}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ са колинеарни, т.е. линейно зависими, което е изпълнено точно тогава, когато детерминантата от координатите им е нула:

$(\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0))$

$$(1) \quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. когато $p_2(x-x_0) - p_1(y-y_0) = 0$ или

$$p_2 x - p_1 y - p_2 x_0 + p_1 y_0 = 0.$$

Полагаме $p_2 = a$, $-p_1 = b$ и $-p_2 x_0 + p_1 y_0 = c$ (т.е. $\vec{p}(-b, a)$)

Тогава уравнението (2) $ax + by + c = 0$ се нарича общо уравнение на g спрямо K.

9.2.

от $\vec{p} \neq \vec{o}$ следва, че координатите му не са едновременно нула, т.е. числата a и b не са едновременно нула, т.е. $a^2+b^2 \neq 0$.

От горните разсъждения следва, че

1.) Всяка права g има уравнение от вида (2), т.е. общо уравнение.

Обратно, ще покажем, че

2.) Всяко уравнение от вида (2) с $a^2+b^2 \neq 0$ е общо уравнение на точно една права.

Нека $b \neq 0$. (Ако $b=0$, то $a \neq 0$ и този случай се разглежда аналогично.) Тогава x_0 и $y_0 = -\dfrac{ax_0+c}{b}$ е решение на (1).

Нека g е правата през $M_0(x_0, y_0)$, $g \parallel \vec{p}(-b, a)$. Тогава g има уравнение от вида (3) $ax + by - ax_0 - by_0 = 0$. (виж (1))

Но $-ax_0 - by_0 = c$. Следователно (3) е точно уравнението (2) и е общо уравнение на g.

Ако $M_1(x_1, y_1)$ е точка от g, $M_1 \neq M_0$, а $\vec{q}(q_1, q_2)$ е ненулев вектор, колинеарен с g, $\vec{q} \neq \vec{p}$, то g има общо уравнение (4) $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $a_1 = p_2$, $b_1 = -p_1$ ... (виж (1)).

От $\vec{q} \parallel \vec{p} \Rightarrow \exists \lambda \neq 0 : \vec{q} = \lambda \vec{p} \Rightarrow q_1 = \lambda p_1$ и $q_2 = \lambda p_2$

Следователно $a_1 = \lambda a$ $b_1 = \lambda b$. От $M_0 \in g \overset{(4)}{\Rightarrow} a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = 0$

$\Rightarrow c_1 = -(a_1 x_0 + b_1 y_0) = -\lambda(a x_0 + b y_0) = \lambda c$

$\Rightarrow a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$, $c_1 = \lambda c$

Обратно. Нека g и g_1 са прави с общи уравнения съответно $g: ax + by + c = 0$ и $g_1: a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, за които $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$ и $c_1 = \lambda c$, $\lambda \neq 0$. Тогава всяка точка $M^*(x^*; y^*) \in g$ удовлетворява уравнението на g_1 – $a_1 x^* + b_1 y^* + c_1 = \lambda a x^* + \lambda b y^* + \lambda c = \lambda(a x^* + b y^* + c) = \lambda . 0 = 0$. Аналогично – всяка точка $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y}) \in g_1$ удовлетворява уравнението на g – $a\bar{x} + b\bar{y} + c = \frac{\lambda}{\lambda}(a\bar{x} + b\bar{y} + c) = \frac{1}{\lambda}(\lambda a \bar{x} + \lambda b \bar{y} + \lambda c) = \frac{1}{\lambda}(a_1 \bar{x} + b_1 \bar{y} + c_1) = \frac{1}{\lambda} . 0 = 0$.

Следователно правите g и g_1 съвпадат.
С това доказахме следната

<u>Теорема</u>. Спрямо афинна координатна система $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ всяка права g има уравнение от вида

$$ax + by + c = 0,$$

където $a^2 + b^2 \neq 0$ и векторът $(-b, a)$ е колинеарен с g. Две уравнения от този вид са уравнения на една и съща права точно тогава, когато коефициентите им са пропорционални.

Правите $g: ax + by + c = 0$ и $g_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ са успоредни точно тогава, когато $\vec{p_1}(-b_1, a_1) \parallel \vec{p}(-b, a)$ и нямат обща точка, т.е. $g \parallel g_1 \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : a_1 = \lambda a, b_1 = \lambda b$, но $c_1 \neq \lambda c$. Ако допуснем, че $c_1 = \lambda c \Rightarrow g_1 \equiv g$.

Правите $g: ax+by+c=0$ и $g_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ са пресичащи се точно тогава, когато векторите $\vec{p}(-b,a)$ и $\vec{p_1}(-b_1,a_1)$ не са колинеарни, т.е. за никое $\lambda \neq 0$ не е изпълнено $a_1=\lambda a$ и $b_1=\lambda b$. Имаме $\vec{p} \nparallel \vec{p_1} \Leftrightarrow \vec{p}$ и $\vec{p_1}$ са линейно независими $\Leftrightarrow$

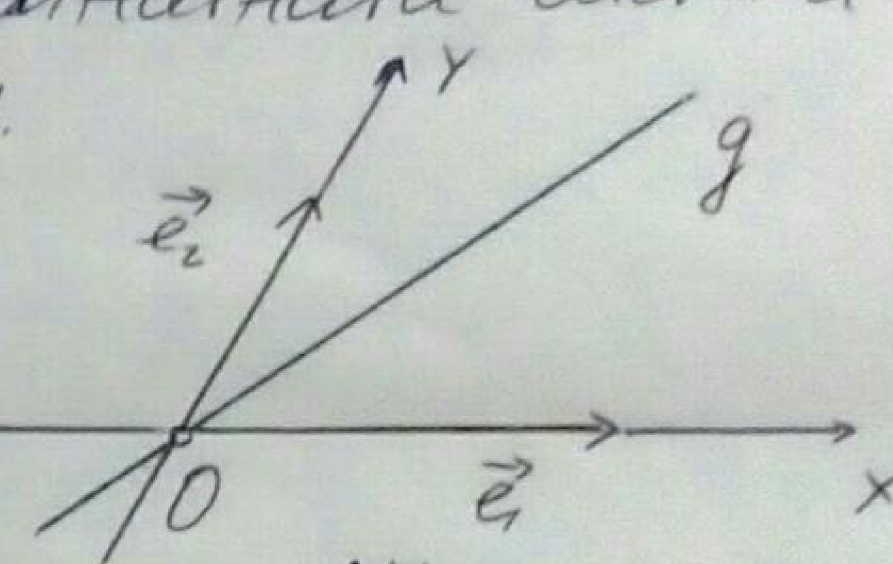
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

За разположението на $g: ax+by+c=0$ спрямо координатната система $K=O\vec{e_1}\vec{e_2}$ имаме следното.

1. g минава през O точно тогава, когато $c=0$.

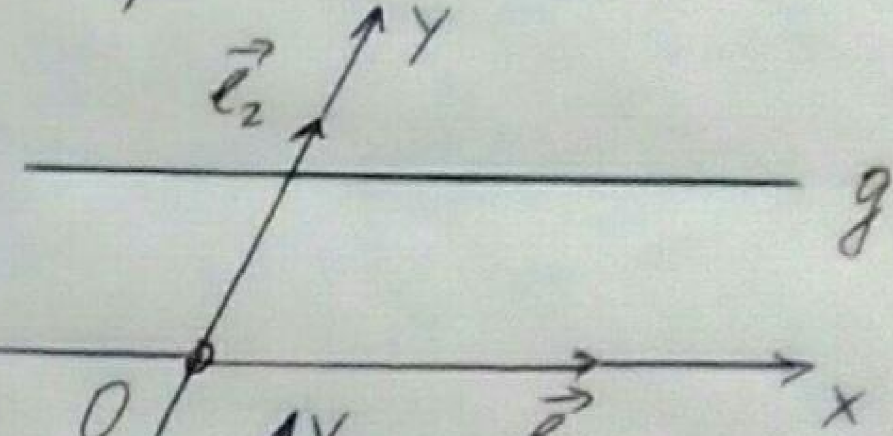
- имаме $O \in g \Leftrightarrow a.0+b.0+c=0 \Leftrightarrow c=0$.

1.



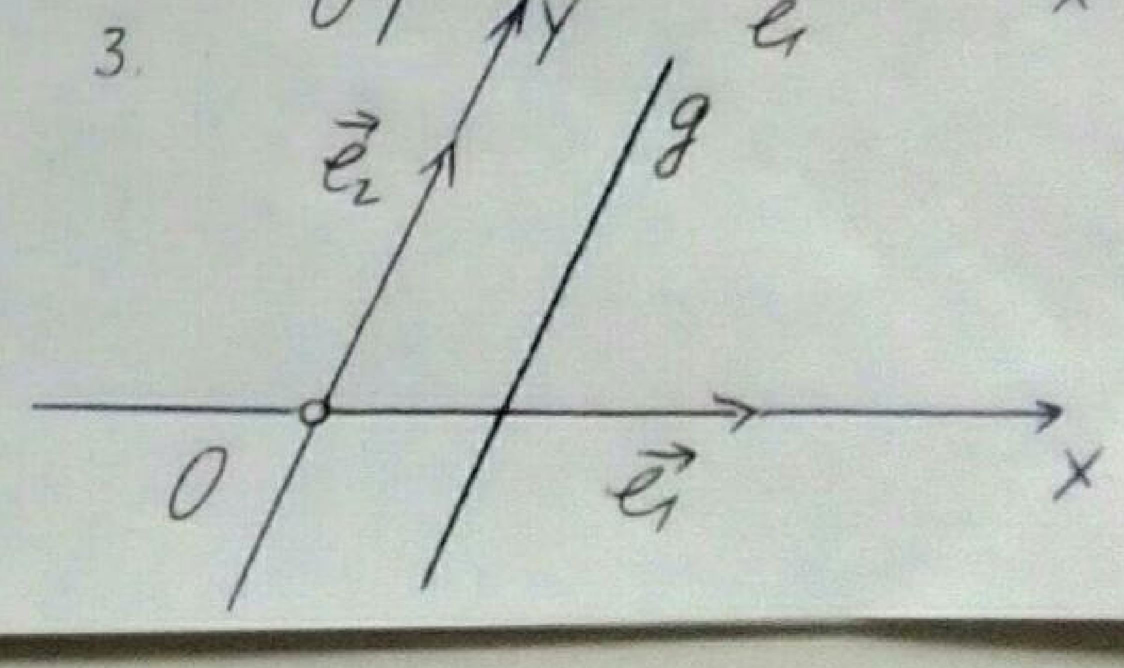
2. g е успоредна на абсцисната ос $\Leftrightarrow$ $\vec{p}(-b,a) \parallel \vec{e_1}(1,0) \Leftrightarrow a=0$.

2.



3. g е успоредна на ординатната ос точно тогава, когато $\vec{p}(-b,a) \parallel \vec{e_2}(0,1)$ $\Leftrightarrow b=0$.

3.



Примери. 1. Общото уравнение на права g през т. $M_0(2,-1)$, колинеарна с вектор $\vec{p}(3,-4)$ може да се намери по един от следните два начина.

1. $g: 4x + 3y + c = 0$ (от $g \parallel \vec{p}$); от $M_0 \in g \Rightarrow 4.2 + 3.(-1) + c = 0 \Rightarrow c = -5$
$\Rightarrow g: 4x + 3y - 5 = 0$.

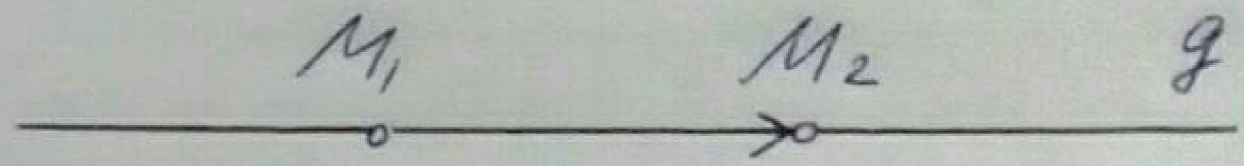
2. От (1) - векторите $\overrightarrow{M_0M}(x-2, y+1)$ и $\vec{p}(3,-4)$ са колинеарни
$\Rightarrow 4(x-2) + 3(y+1) = 0 \Rightarrow 4x - 8 + 3y + 3 = 0 \Rightarrow$
$g: 4x + 3y - 5 = 0$. (Провека дали $M_0 \in g \to 4.2 - 3 - 5 = 0$.).

2. Правите $g: 2x - 3y + 4 = 0$ и $g_1: 2\sqrt{2}.x - 3\sqrt{2}y - 4 = 0$ са успоредни, тъй като $g \parallel \vec{p}(3,2)$, $g_1 \parallel \vec{p_1}(3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \Rightarrow \vec{p_1} = \sqrt{2}.\vec{p}$, но $-4 \neq \sqrt{2}.4$.

3. Правите $g: x + y - 1 = 0$ и $g_1: x - y - 3 = 0$ са пресичащи се, тъй като $g \parallel \vec{p}(-1,1)$, $g \parallel \vec{p}_1(1,1) \Rightarrow \vec{p_1} \nparallel \vec{p}$ - $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$.
Лесно се пресмята, че пресечната им точка е с координати - $g \cap g_1 = G$, $G(2,-1)$.

Нека правата g е определена от две различни точки M_1 и M_2, които имат координати спрямо афинната координатна система $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ съответно $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Следователно векторът $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ е колинеарен с g.

$\Rightarrow$ общото уравнение на g се получава от (1). Имаме



$$(5)\quad g: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad g: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

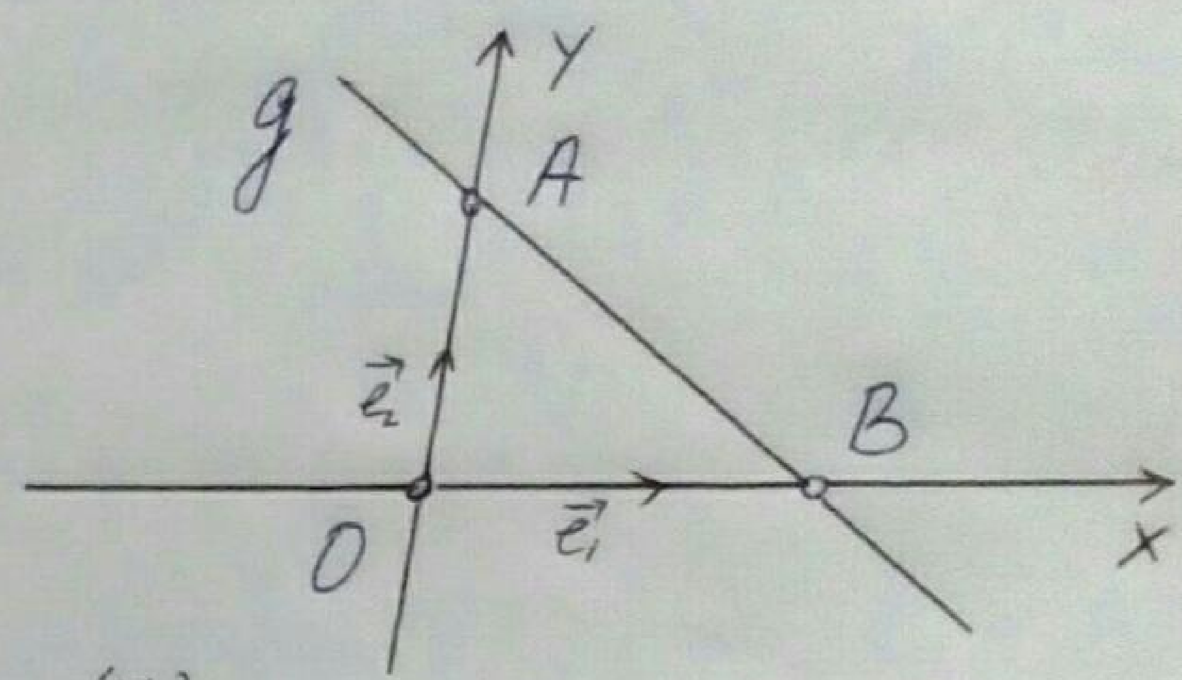
Да отбележим, че ако $x_2 = x_1$, от $M_1 \neq M_2$ следва $y_2 \neq y_1$, както и че $g \parallel \vec{e_2}$, т.е. g е успоредна на ординатната ос и е с уравнение $g: x + c = 0$, $(c = -x_1 = -x_2)$.

Ако $y_2 = y_1$, то $x_2 \neq x_1$, $g \parallel \vec{e_1}$, т.е. g е успоредна на абсцисната ос. Уравнението на g в този случай е $g: y + c = 0$, $(c = -y_1 = -y_2)$.

Ясно е, че при $x_2 = x_1$ точките от g имат една и съща първа координата, а при $y_2 = y_1$ – една и съща втора координата.

Нека g е права, която не минава през началото на координатната система O и пресича координатните оси Ox и Oy съответно в точки $B(b,0)$ и $A(0,a)$.

От $g \nparallel Ox \Rightarrow a \neq 0$ и от $g \nparallel Oy \Rightarrow b \neq 0$.



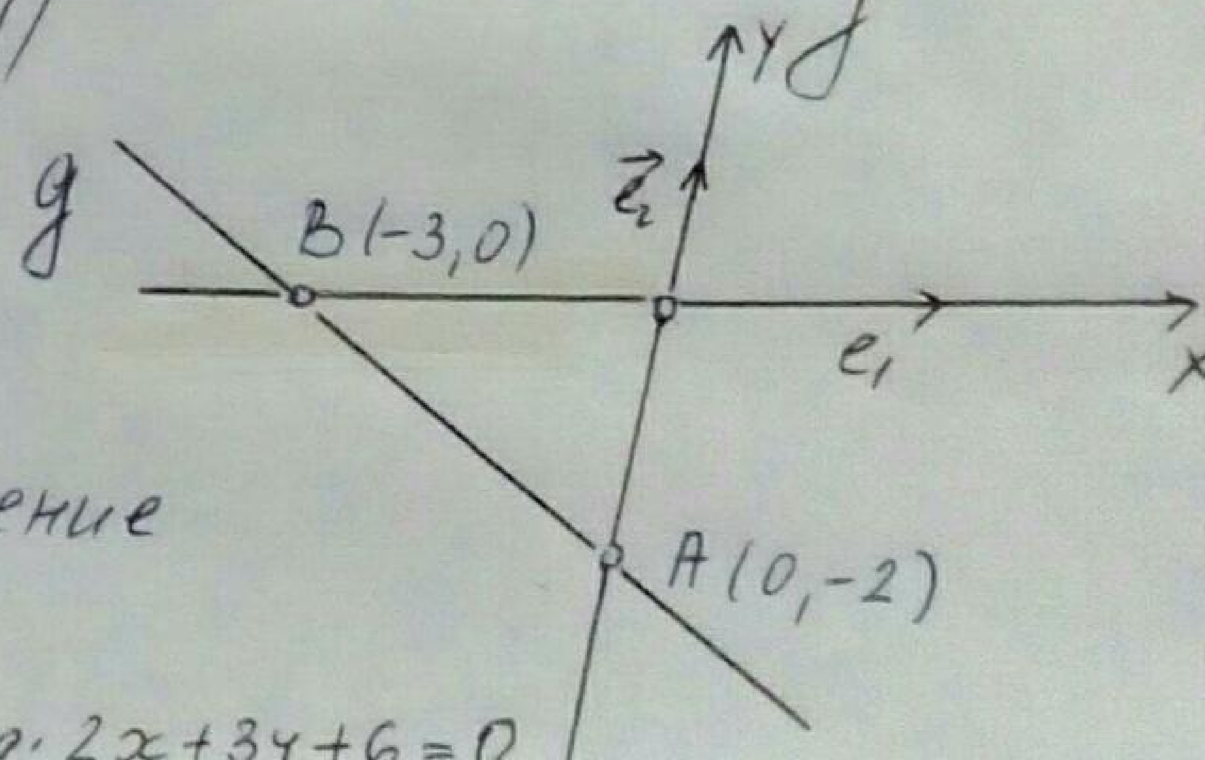
За уравнението на g от (6) получаваме

$$g: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & a & 1 \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow g: ax + by - ab = 0. \quad (7)$$

Като разделим на ab и прехвърлим свободния член отдясно получаваме

$$(8) \quad g: \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1.$$

Уравнението (8) се нарича отрезово уравнение на g.



Пример $g \cap Ox = B(-3,0)$ и $g \cap Oy = (0,-2)$, т.е. отрезите на g абсцисата и от ординатата са съответно -3 и -2. Тогава отрезовото уравнение на g е $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1$.

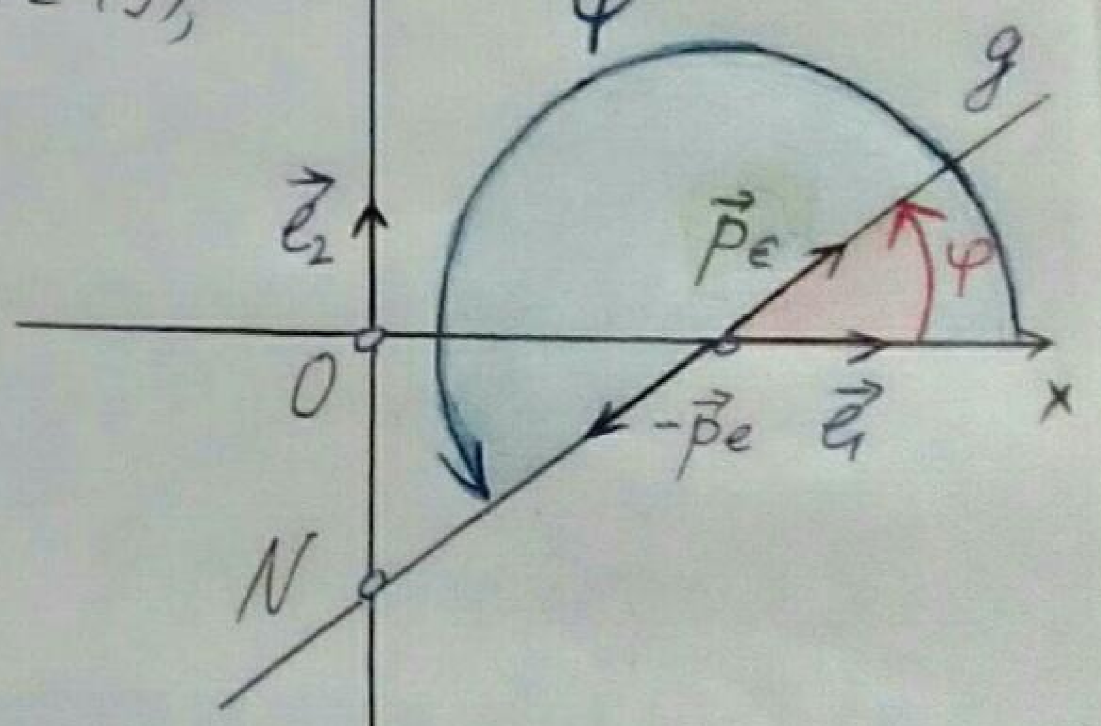
За общото уравнение на g непосредствено получаваме $g: 2x+3y+6=0$

Нека правата g с общо уравнение $g: ax+by+c=0$ да пресича ординатната ос, т.е. $g \nparallel Oy$. Както е ясно от по-горе, това е изпълнено точно тогава, когато $b \neq 0$. Тогава уравнението на g може да се запише като

$$g: y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad \text{или} \quad (9)\ g: y = kx + n.$$

Последното уравнение се нарича декартово уравнение на g.

Нека сега $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ е ортонормирана координатна система. Ако g е определена с декартовото си уравнение (9), то вектор, колинеарен с g има примерно координати $(1, k)$. Като разделим този вектор на дължината му – $\sqrt{1+k^2}$ получаваме единичен вектор, колинеарен с g – вектора с координати $\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$. Този единичен вектор $\vec{p}_e$ има също така координати $(\cos\varphi, \sin\varphi)$,



където φ е ориентираният ъгъл $\sphericalangle(\vec{e_1}, \vec{p_e})$.

Следователно $k = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = tg\varphi$.

Числото k не зависи от избора на посоката върху g поради следното. Другият единичен вектор, колинеарен с g е векторът $-\vec{p_e}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$. Ако φ^* е ориентираният ъгъл $\sphericalangle(\vec{e_1}, -\vec{p_e})$, то $tg\,\varphi^* = \frac{\sin\varphi^*}{\cos\varphi^*} = k = tg\varphi$. Последното се забелязва и от факта, че $\varphi^* = \varphi \pm \pi$.

Това число k се нарича ъглов коефициент на правата g.

Ясно е, че правите, успоредни на g имат един и същ ъглов коефициент – този на g.

Геометричното тълкуване на коефициента n в (9) е следното: правата g пресича оста Oy в точка N с координати $N(0, n)$. Следователно n е отрезът на g от ординатната ос.