Задачи по висша алгебра

Задача 1. *За кои цели числа b частното* $\dfrac{11b+5}{5b+7}$ *също е цяло?*

Задача 2. *Докажете, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ числото $2^{3^n}+1$ се дели на 3^{n+1}, но не се дели на 3^{n+2}.*

Задача 3. *Решете уравнението $198x + 164y = 10$ в цели числа.*

Задача 4. *Решете ребуса НОС*НОС=АБАНОС, където на еднаквите букви отговарят еднакви цифри, а на различните букви - различни цифри.*

Задача 5. *Нека p и q са различни прости числа. Докажете, че $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.*

Задача 6. *Намерете всички нечетни прости числа p, такива че $15^{\frac{p-1}{2}} \equiv 12 \pmod{p}$.*

Задача 7. *Решете уравнението $\varphi(n) = 12$.*

Задача 8. *Нека $A = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid ac \neq 0\}$. Въвеждаме операция $\circ : A \times A \to A$, оперделена от*

$(a_1,b_1,c_1) \circ (a_2,b_2,c_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1c_2, c_1c_2)$.

Докажете, че A е група относно $\circ$ и $H = \{(a,b,c) \in A \mid a = c\}$ е подгрупа на A.

Задача 9. *Нека $G = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{7}\}$. Въвеждаме операцията $* : G \times G \to G$, с равенството $a * b = a + b - 7ab$. Докажете, че $(G, *)$ е група.*

Намерете $a * a * a * \ldots * a$, където има n операции $*$.

Задача 10. *В множеството $\mathbb{R}^2$ въвеждаме операция $\oplus$ по правилото:*

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, be^{-c} + de^{-a})$$

Докажете, че $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ е група.

Задача 11. *Нека $H = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3,\ (a,b) \neq (0,0)\}$.*

Докажете, че H е циклична група относно умножението на матрици.

Задача 12. *Нека $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

Означаваме с $G = \langle A, B \rangle$ подгрупата на $GL_2(\mathbb{R})$, породена от матриците A и B. Намерете реда на G, както и редовете на всичките ѝ елементи.

Колко различни подгрупи има G?

Задача 13. *Докажете, че групите $\mathbb{Z}_{143} \times \mathbb{Z}_7$ и $\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{77}$ са изоморфни. Кои са подгрупите и факторгрупите на тази група?*

Задача 14. *Намерете всички възможни стойности на реда на елемент от симетричната група S_8.*

Задача 15. *Нека G е група и H е подгрупа. Въвеждаме бинарна $\sim$ релация над G:*

$$a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$$

Докажете, че $\sim$ е релация на еквивалентност. Намерете класовете на еквивалентност по тази релация.

Задача 16. *Намерете центъра Z на групата на кватернионите Q_8. Кои са съседните класове на Q_8 по Z? Напишете таблицата за умножение на съседни класове. На коя група е изоморфна факторгрупата Q_8/Z?*

Задача 17. *Нека $G = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid ab \neq 0\}$. Въвеждаме операция в G по правилото*

$$(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2, a_1 c_2 + c_1 b_2)$$

Нека $H = \{(a,b,c) \in G \mid a = 1\}$ и $K = \{(a,b,c) \in G \mid a = b\}$.
Докажете, че G е неабелева група, $H \lhd G$, $K \lhd G$ и $G/H \cong \mathbb{R}^* \cong G/K$.

Задача 18. *Нека $M = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. В M въвеждаме операции $\oplus$ и $\odot$ така: $x \oplus y = \min(x, y)$ и $x \odot y = x + y$.*
Кои от аксиомите за пръстен са изпълнени в $(M, \oplus, \odot)$?

Задача 19. *Нека $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f -$ непрекъсната$\}$. Разглеждаме и подмножествата $A = \{f \in F \mid f(0) = 0\}$, $B = \{f \in F \mid f(0) = 1\}$ и $C = \{f \in F \mid f(0) = f(1) = 0\}$.*
Да се докаже, че F е пръстен относно поточковите операции събиране и умножение на функции. Кои от подмножествата A, B, C са подпръстени на M?

Задача 20. *Нека $(R, +, \cdot)$ е пръстен с единица 1. Въвеждаме нови операции $\oplus$ и $\odot$ в R по правилата $x \oplus y = x + y - 1$ и $x \odot y = x + y - x \cdot y$.*
Докажете, че $(R, \oplus, \odot)$ е пръстен, изоморфен на $(R, +, \cdot)$.

Задача 21. *Нека p е просто число и $R_p = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_p\}$. Докажете, че R_p е комутативен пръстен с единица относно обичайните операции с матрици. Покажете още, че R_3 е поле, а R_5 не е поле.*

Задача 22. *Нека $R_1 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ и $R_2 = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Q}\}$. Кои от следните са изпълнени:*

- $R_1 < M_2(\mathbb{Q})$, $R_1 \lhd M_2(\mathbb{Q})$;
- $R_2 < M_2(\mathbb{Q})$, $R_2 \lhd M_2(\mathbb{Q})$;
- $R_2 < R_1$, $R_2 \lhd R_1$.

Задача 23. *Нека $I = (9 + \sqrt{95}) \lhd \mathbb{Z}[\sqrt{95}]$ е главният идеал, породен от $9 + \sqrt{95}$.*
Докажете, че $I = \{a + b\sqrt{95} \mid a, b \in \mathbb{Z} : \ 14/(b + 3a)\}$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{95}]/I \cong \mathbb{Z}_{14}$.

Задача 24. *Нека $R = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, c, d \in \mathbb{Z}\}$ и p е просто число. Разглеждаме подмножествата I и J на R определени с $I = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in R \,|\, p/a\}$ и $I = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in R \,|\, p/a,\, p/d\}$.*
Доказате, че I и J са идеали на R и $R/I \cong \mathbb{Z}_p$ е поле, а $R/J \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ не е поле.

Задача 25. *Нека $K = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $M = \{f \in K \mid f(0) = 0\}$ и $N = \{f \in K \mid f(0) = f(1) = 0\}$. Докажете, че $M \lhd K$, $N \lhd K$, K/M е поле, а K/N не е поле.*

Задача 26. *Нека $R = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$. Докажете, че R е пръстен и намерете всички идеали и факторпръстени на R.*

Задача 27. *Нека* $I = 360\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$. *Да означим* $J = \{k \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{N} \,:\, k^n \in I\}$. *Докажете, че* $J \lhd \mathbb{Z}$ *и намерете* $\mathbb{Z}/J$.

Задача 28. *Нека* $f, g \in \mathbb{R}[x]$, *като* $f = x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x + 8$, $g = x^3 + 2x^2 - 4x - 5$.
Намерете (f, g), *както и полиноми* $u, v \in \mathbb{R}[x]$, *такива че* $(f, g) = fu + gv$.

Задача 29. *Докажете, че факторпръстенът* $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + \overline{2}x + \overline{1})$ *е поле.*
Пресметнете $(\overline{2}x^2 + 1)(x^2 + x + \overline{1})^{-1}$ *в това поле.*

Задача 30. *Намерете полином* f *от трета степен с реални коефициенти със следните свойства:*

- f *дава остатък* $-3x - 10$ *при деление с полинома* $x^2 + 1$;
- *За корените* x_1, x_2, x_3 *на* f *е изпълнено* $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1$ *и* $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = 19$.

Задача 31. *Нека* $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 + px + 16 \in \mathbb{R}[x]$. *Намерете* p, *ако за корените* x_1, x_2, x_3, x_4 *на* f *е в сила равенството* $x_1 + x_2 + x_3 = x_4$.

Задача 32. *За кои* $\lambda \in \mathbb{C}$ *полиномът* $g = x^4 - x^3 + \lambda x^2 - x - 6 \in \mathbb{C}[x]$ *има два противоположни корена?*

Задача 33. *За кои стойности на* p *и* q *полиномът* $f = x^4 + 2px^3 + qx + 1 \in \mathbb{C}[x]$ *има трикратен корен?*

Задача 34. *Представете сумата* $\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_1+x_3} + \frac{x_3}{x_1+x_2}$ *чрез елементарните симетрични полиноми* σ_1, σ_2, σ_3.

Задача 35. *Нека* x_1, x_2, x_3 *са корените на полинома* $f = x^3 + px + q$. *Намерете* $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

Задача 36. *Нека* x_1, x_2, x_3 *са корените на полинома* $f = x^3 + px + q$, *като* $f(1) \neq 0$. *Изразете чрез* p *и* q *сумата* $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{(1 - x_i)^2}$.

Задача 37. *Нека* $f = x^4 + x^3 - 4x^2 - 5x - 5$. *Разложете* f *на неразложими над полето* F *полиноми, където:*
а) $F = \mathbb{C}$ *б)* $F = \mathbb{R}$ *в)* $F = \mathbb{Q}$

Задача 38. *Докажете, че полиномът* $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ *е неразложим над* $\mathbb{Q}$.

Задача 39. *Нека* $I = \{f \in \mathbb{Z}[x] \,:\, 10/f(0)\}$. *Докажете, че* $I \lhd \mathbb{Z}[x]$ *и намерете* $\mathbb{Z}[x]/I$.