Метрични канонични уравнения на кривите от II степен

Задача: ОКС $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2 = Oxy$

Спр. К е дадена

$k: 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0 \qquad x = \frac{x}{t}, \; y = \frac{y}{t}$

а) Да се намери метрично канонично уравнение на k и последователните координатни трансформации, които водят до него.

I Определяне на типа на k по брой безкрайни и брой особени точки (E_2^*, хомог. коорд.)

$k: 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18.x.t - 18y.t + 9t^2 = 0$

$a_{11} = 5, \; a_{12} = 4, \; a_{22} = 5, \; a_{13} = -9, \; a_{23} = -9, \; a_{33} = 9$

1) $k \cap \omega = ? \quad \omega: t = 0 \Rightarrow 5.x^2 + 8xy + 5y^2 = 0$

$D = a_{12}^2 - a_{11}.a_{22} = 4^2 - 5.5 = -9 < 0$

$\Rightarrow$ k не съдържа безкр. точки

$\boxed{\text{k е от елиптичен тип}}$

2) $\det A = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{vmatrix} = \dots \qquad \det A \neq 0 \Rightarrow$ k не съдържа особени точки

$\boxed{\text{k е неизродена}}$

k е елипса $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ V

II $k: \boxed{5x^2 + 8xy + 5y^2} - 18x - 18y + 9 = 0$ V

Разгл. $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ – не е в диагонален вид

Привеждаме A_1 в диагонален вид спрямо базата от собствените ѝ вектори $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$.

$A_1 . \vec{b}_1 = s_1 . \vec{b}_1 \quad , \quad A_1 . \vec{b}_2 = s_2 . \vec{b}_2$

(*) $A_1 . \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = s . \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ – коорд на собств. вектор $\Rightarrow (\alpha, \beta) \neq (0,0)$

(*) $(A_1 - s.E)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – има ненулево решение $\Leftrightarrow |A_1 - s.E| = 0$

$\binom{*}{*}$ $(A_1 - s.E).\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ има ненулево решение $\Leftrightarrow$ $|A_1 - s.E| = 0$

$|A_1 - s.E| = 0$ – характеристично уравнение на A_1

$A_1 = \begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}5-s & 4\\ 4 & 5-s\end{vmatrix} = 0$

$(5-s)^2 - 4^2 = 0$

$(5-s+4).(5-s-4) = 0$

$s_1 = 9 \qquad s_2 = 1$

$s_1 = 9$, $s_2 = 1$, $s_1.s_2 > 0 \Leftrightarrow$ k да е от елиптичен тип

Ако $s_1.s_2 < 0$, то k е хипербола.

Ако $s_1 = 0$ или $s_2 = 0$, то k е парабола.

За $s_1 = 9 \Rightarrow \vec{b}_1(\alpha_1, \beta_1)$ $\quad |\vec{b}_1| = 1 \Leftrightarrow \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$

От $\binom{*}{*} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}5-9 & 4\\ 4 & 5-9\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} -4.\alpha_1 + 4.\beta_1 = 0\\ \cancel{4.\alpha_1 - 4\beta_1 = 0} \text{ не е необходимо}\\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1\end{array}\right.$

$\left|\begin{array}{l}\alpha_1 = \beta_1\\ \alpha_1^2 + \alpha_1^2 = 1\end{array}\right. \Rightarrow \alpha_1^2 = \frac{1}{2}$

$\alpha_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Изб. $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

За $s_1 = 9 \Rightarrow \vec{b}_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

За $s_2 = 1 \Rightarrow \vec{b}_2(\alpha_2, \beta_2)$ $\quad |\vec{b}_2| = 1 \Leftrightarrow \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1$

$\begin{pmatrix}5-1 & 4\\ 4 & 5-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \left|\begin{array}{l}4.\alpha_2 + 4\beta_2 = 0\\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\alpha_2 = -\beta_2\\ (-\beta_2)^2 + \beta_2^2 = 1\end{array}\right.$

$\beta_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Изб. $\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

За $s_2 = 1 \Rightarrow \vec{b}_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\Rightarrow |\vec{b}_1| = |\vec{b}_2| = 1$, $\vec{b}_1 \perp \vec{b}_2$

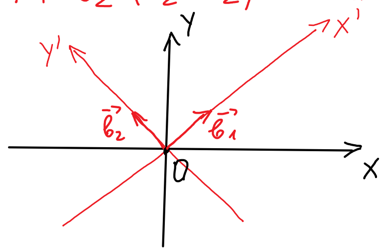
За $s_1 = 9 \Rightarrow \vec{b}_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Извършване смяна на ОКС:

$K = O\vec{e}_1\vec{e}_2 \xrightarrow{T_1} K' = Ox'y'$:
Oxy

$Ox' \uparrow\uparrow \vec{b}_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leftrightarrow s_1 = 9$

$Oy' \uparrow\uparrow \vec{b}_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leftrightarrow s_2 = 1$



$$T_1: \begin{cases} x = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot x' \; \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot y' \\ y = \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}}_{\vec{b}_1}\cdot x' \; \underbrace{\boxed{+\frac{\sqrt{2}}{2}}}_{\vec{b}_2}\cdot y' \end{cases}$$

$M(x,y)$ спр. K произволна $\qquad M(x', y')$ спр. K'

Спрямо $K' = Ox'y'$ $\quad A_1' = \begin{pmatrix} \overset{a_{11}'}{9} & \overset{a_{12}'}{0} \\ 0 & \underset{a_{22}'}{1} \end{pmatrix}$ $\qquad a_{11}' = 9$, $a_{12}' = 0$, $a_{22}' = 1$

Уравнение на k спр. $K' = Ox'y'$

$$k: \underset{s_1}{9}\cdot x'^2 + \underline{0}\cdot x'\cdot y' + \underset{s_2}{1}\cdot y'^2 - 18.\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot y'\right)}_{\text{от } T_1} - 18.\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x' + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot y'\right)}_{\text{от } T_1} + 9 = 0$$

$$k: 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$$

$$k: 9.x'^2 + y'^2 - 18.\sqrt{2}.x' + 9 = 0 \quad \text{спр. } K' \; (\Delta)$$

не е метрично канонично, защото т. $O(0,0)$ не съвпада с центъра на k.

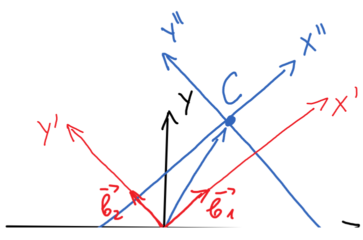
III Търсим централно уравнение на k

Нека т. $C(p,q)$ спр. K' е центърът на k

Изв. смяна на ОКС $K' = Ox'y' \xrightarrow{T_2} K'' = Cx''y''$: $Cx'' \uparrow\uparrow Ox'$, $Cy'' \uparrow\uparrow Oy'$

$$T_2: \begin{cases} x' = x'' + p \\ y' = y'' + q \end{cases}$$

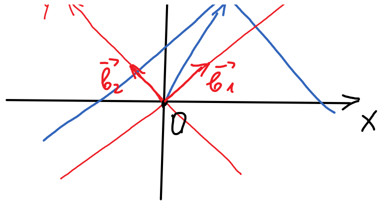
$C(p,q)$ спр. K'



$C(p,q)$ спр. K'

$p=?\,,\ q=?$

Уравн. от T_2 заместване в (Δ)



$$K:\ 9.x'^2 + y'^2 - 18.\sqrt{2}.x' + 9 = 0$$

$$K:\ 9.(x''+p)^2 + (y''+q)^2 - 18.\sqrt{2}.(x''+p) + 9 = 0 \qquad p=?\,,\ q=?$$

$$9x''^2 + 18p.x'' + 9p^2 + y''^2 + 2q.y'' + q^2 - 18\sqrt{2}.x'' - 18\sqrt{2}\,p + 9 = 0$$

$$K:\ \underline{9x''^2 + y''^2} + x''.\underbrace{\cancel{(18p - 18.\sqrt{2})}}_{=0} + \underbrace{\cancel{2q}}_{=0}.y'' + (9p^2 + q^2 - 18\sqrt{2}p + 9) = 0$$

$$9.(\sqrt{2})^2 + 0^2 - 18.(\sqrt{2})^2 + 9 = 18 - 36 + 9 = -9$$

$$\left|\begin{array}{l} 18p - 18\sqrt{2} = 0 \\ 2q = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} p = \sqrt{2} \\ q = 0 \end{array}\right.$$

$C(\sqrt{2}, 0)$ спр. K'

Спр. K'', $K:\ 9x''^2 + y''^2 - 9 = 0 \ /:9$ $\qquad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$$K:\ \frac{x''^2}{1^2} + \frac{y''^2}{3^2} = 1$$

б) Да се намерят координатите на фокусите F_1 и F_2 на елипсата K спр. $K = Oxy$.

1) F_1 и F_2 спр. K'' $\qquad K:\ \dfrac{x''^2}{1^2} + \dfrac{y''^2}{3^2} = 1$

$a = 1$

$b = 3$

$b > a \Rightarrow Oy''$ е голямата ос

$c = \sqrt{b^2 - a^2}$

$c = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$

$F_1(\underset{x''}{0}, \underset{y''}{-2\sqrt{2}}) \qquad F_2(\underset{x''}{0}, \underset{y''}{2\sqrt{2}})$ спр. K''

2) F_1 и F_2 спр. K'

$$T_2: \begin{cases} x' = x'' + \sqrt{2} \\ y' = y'' + 0 \end{cases} \qquad C(\sqrt{2}, 0) \text{ спр. } K'$$

$$F_1(\underset{x''}{0}, \underset{y''}{-2\sqrt{2}}) \xrightarrow{T_2} \begin{cases} x' = 0 + \sqrt{2} \\ y' = -2\sqrt{2} + 0 \end{cases} \Rightarrow F_1(\underset{x'}{\sqrt{2}}, \underset{y'}{-2\sqrt{2}}) \text{ спр. } K'$$

$$F_2(\underset{x''}{0}, \underset{y''}{2\sqrt{2}}) \xrightarrow{T_2} F_2(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \text{ спр. } K'$$

3) F_1 и F_2 спр. K

$$T_1: \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x' - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y' \end{cases}$$

$$F_1(\underset{x'}{\sqrt{2}}, \underset{y'}{-2\sqrt{2}}) \xrightarrow{T_1} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-2\sqrt{2}) = 1 + 2 = 3 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-2 \cdot \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

$F_1(3, -1)$ спр. K

$$F_2(\underset{x'}{\sqrt{2}}, \underset{y'}{2\sqrt{2}}) \xrightarrow{T_1} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (2\sqrt{2}) = -1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (2\sqrt{2}) = 3 \end{cases}$$

$F_2(-1, 3)$ спр. K