Задачи за контролно 2 по висша алгебра

Задача 1. *Нека* $M = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *В* M *въвеждаме операции* $\oplus$ *и* $\odot$ *така:* $x \oplus y = \min(x, y)$ *и* $x \odot y = x + y$.

Кои от аксиомите за пръстен са изпълнени в $(M, \oplus, \odot)$*?*

Задача 2. *Нека* $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f - \text{ непрекъсната}\}$. *Разглеждаме и подмножествата* $A = \{f \in F \mid f(0) = 0\}$, $B = \{f \in F \mid f(0) = 1\}$ *и* $C = \{f \in F \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

Да се докаже, че F *е пръстен относно поточковите операции събиране и умножение на функции. Кои от подмножествата* A, B, C *са подпръстени на* M*?*

Задача 3. *Нека* $(R, +, \cdot)$ *е пръстен с единица 1. Въвеждаме нови операции* $\oplus$ *и* $\odot$ *в* R *по правилата* $x \oplus y = x + y - 1$ *и* $x \odot y = x + y - x \cdot y$.

Докажете, че $(R, \oplus, \odot)$ *е пръстен, изоморфен на* $(R, +, \cdot)$.

Задача 4. *Нека* p *е просто число и* $R_p = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_p\}$. *Докажете, че* R_p *е комутативен пръстен с единица относно обичайните операции с матрици. Покажете още, че* R_3 *е поле, а* R_5 *не е поле.*

Задача 5. *Нека* $R_1 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ *и* $R_2 = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Q}\}$. *Кои от следните са изпълнени:*

- $R_1 < M_2(\mathbb{Q})$, $R_1 \lhd M_2(\mathbb{Q})$;
- $R_2 < M_2(\mathbb{Q})$, $R_2 \lhd M_2(\mathbb{Q})$;
- $R_2 < R_1$, $R_2 \lhd R_1$.

Задача 6. *Нека* $I = (9 + \sqrt{95}) \lhd \mathbb{Z}[\sqrt{95}]$ *е главният идеал, породен от* $9 + \sqrt{95}$.

Докажете, че $I = \{a + b\sqrt{95} \mid a, b \in \mathbb{Z} : \ 14/(b + 3a)\}$ *и* $\mathbb{Z}[\sqrt{95}]/I \cong \mathbb{Z}_{14}$.

Задача 7. *Нека* $R = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, c, d \in \mathbb{Z}\}$ *и* p *е просто число. Разглеждаме подмножествата* I *и* J *на* R *определени с* $I = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in R \mid p/a\}$ *и* $I = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in R \mid p/a,\ p/d\}$.

Докажате, че I *и* J *са идеали на* R *и* $R/I \cong \mathbb{Z}_p$ *е поле, а* $R/J \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ *не е поле.*

Задача 8. *Нека* $K = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $M = \{f \in K \mid f(0) = 0\}$ *и* $N = \{f \in K \mid f(0) = f(1) = 0\}$. *Докажете, че* $M \lhd K$, $N \lhd K$, K/M *е поле, а* K/N *не е поле.*

Задача 9. *Нека* $R = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$. *Докажете, че* R *е пръстен и намерете всички идеали и факторпръстени на* R.

Задача 10. *Нека* $I = 360\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$. *Да означим* $J = \{k \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{N} \ : \ k^n \in I\}$. *Докажете, че* $J \lhd \mathbb{Z}$ *и намерете* $\mathbb{Z}/J$.