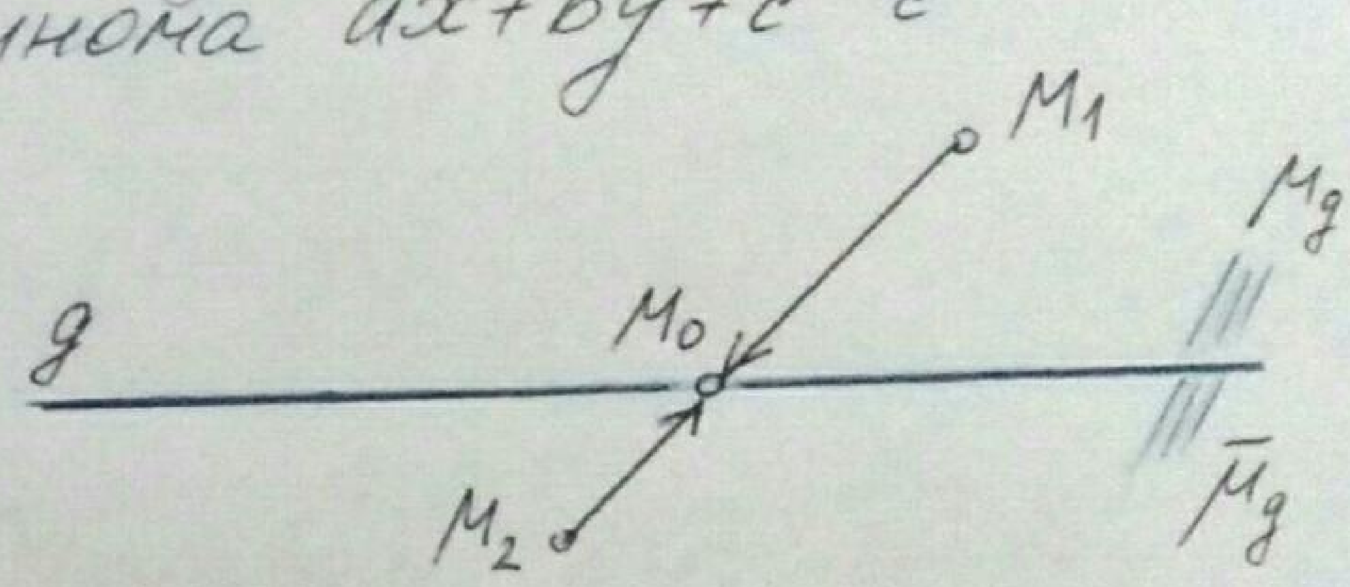
11. Полуравнини. Снопове прави в равнина.

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ е афинна координатна система във фиксирана равнина и спрямо K права g има общо уравнение

$g: ax + by + c = 0$. Означаваме полинома $ax+by+c$ с

$l(x,y) = ax + by + c$.



Нека $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ са две различни точки, нележащи на g.
Тогава е в сила следната

Теорема 1. Отсечката (M_1M_2) пресича правата g точно тогава, когато $l(x_1,y_1)\,l(x_2,y_2) < 0$.

Доказателство. $|\Rightarrow|$ Нека $(M_1M_2) \cap g = M_0$, $M_0(x_0,y_0)$. Тогава векторите $\overrightarrow{M_1M_0}$ и $\overrightarrow{M_2M_0}$ са противопосочни. Следователно $\overrightarrow{M_1M_0} = \lambda\, \overrightarrow{M_2M_0}$, като $\lambda < 0$. $\Rightarrow \begin{cases} x_0 - x_1 = \lambda(x_0 - x_2) \\ y_0 - y_1 = \lambda(y_0 - y_2) \end{cases}$, откъдето $\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda} \\ y_0 = \dfrac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda} \end{cases}$.

(от $\lambda < 0 \Rightarrow 1 - \lambda > 0$)

От $M_0 \in g$ следва, че координатите ѝ удовлетворяват уравнението на g (казано по друг начин - анулира полинома на g - $l(x_0, y_0) = 0$). $\Rightarrow a.\frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda} + b\frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda} + c = 0 \Rightarrow$

$(ax_1 + by_1 + c) - \lambda(ax_2 + by_2 + c) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{l(x_1, y_1)}{l(x_2, y_2)} \Rightarrow$

$l(x_1, y_1)\, l(x_2, y_2) < 0$.

$(\Leftarrow)$ Обратно. Нека $l(x_1, y_1)\, l(x_2, y_2) < 0$. Означаваме с $\lambda = \frac{l(x_1, y_1)}{l(x_2, y_2)}$.

Тогава точката M_0 с координати $M_0\left(\frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}, \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}\right)$ лежи на правата g, тъй като удовлетворява уравнението ѝ -

$$a.\frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda} + b.\frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda} + c = \frac{1}{1-\lambda}\left[l(x_1, y_1) - \lambda\, l(x_2, y_2)\right] = 0.$$

Означаваме с $x_0 = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}$ и с $y_0 = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}$.

Scanned by TapScanner

Тогава $x_0 - x_1 = \lambda.(x_0 - x_1)$ Следователно $\overrightarrow{M_1M_0} = \lambda \overrightarrow{M_2M_0}$, $\lambda < 0$.

$y_0 - y_1 = \lambda.(y_0 - y_1)$

т.е. векторите $\overrightarrow{M_1M_0}$ и $\overrightarrow{M_2M_0}$ са противопосочни $\Rightarrow$ точката M_0 е от отсечката (M_1M_0).

Така получихме, че две точки M_1 и M_2 са от различни полуравнини спрямо права g, ако $l(M_1)l(M_2) \overset{(*)}{<} 0$. Следователно M_1 и M_2 са в една полуравнина спрямо g точно тогава, когато $l(M_1)l(M_2) > 0$.

Аналитично полуравнините μ и $\bar{\mu}$ с контур g могат да се определят както следва

$$\mu_g := \{M(x,y) : l(x,y) > 0\} \text{ и } \bar{\mu}_g = \{M(x,y) : l(x,y) < 0\}.$$

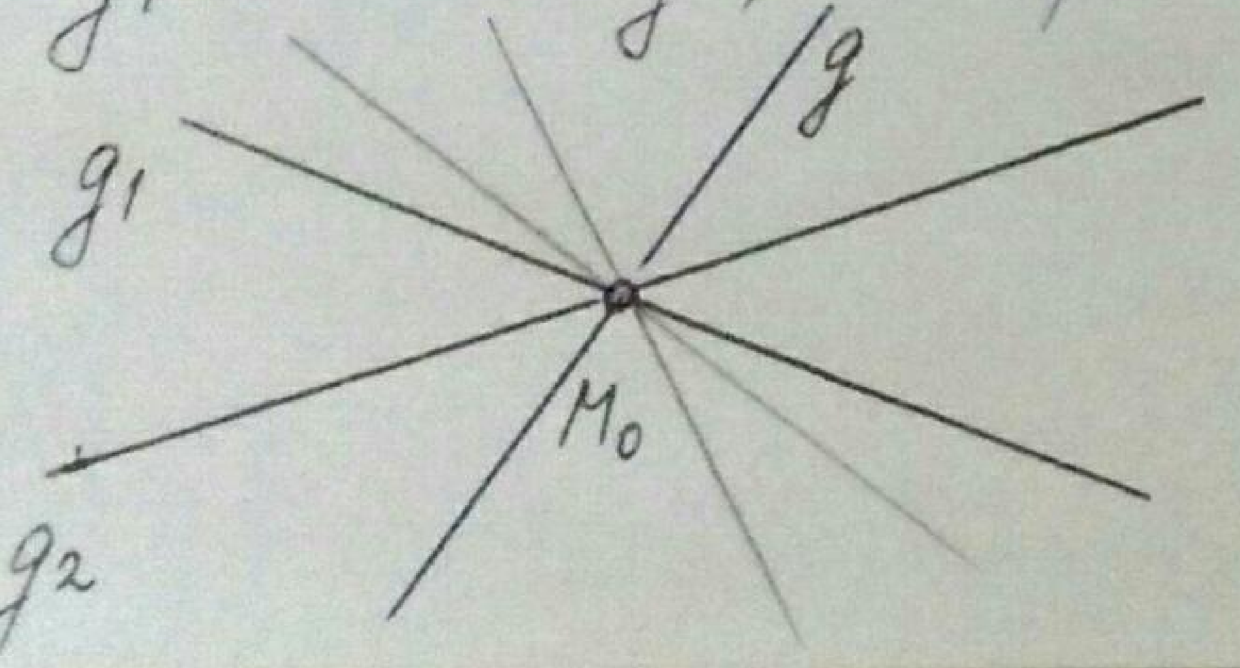
(*) пояснение. За удобство, вместо $l(x_1, y_1)$ пишем $l(M)$.

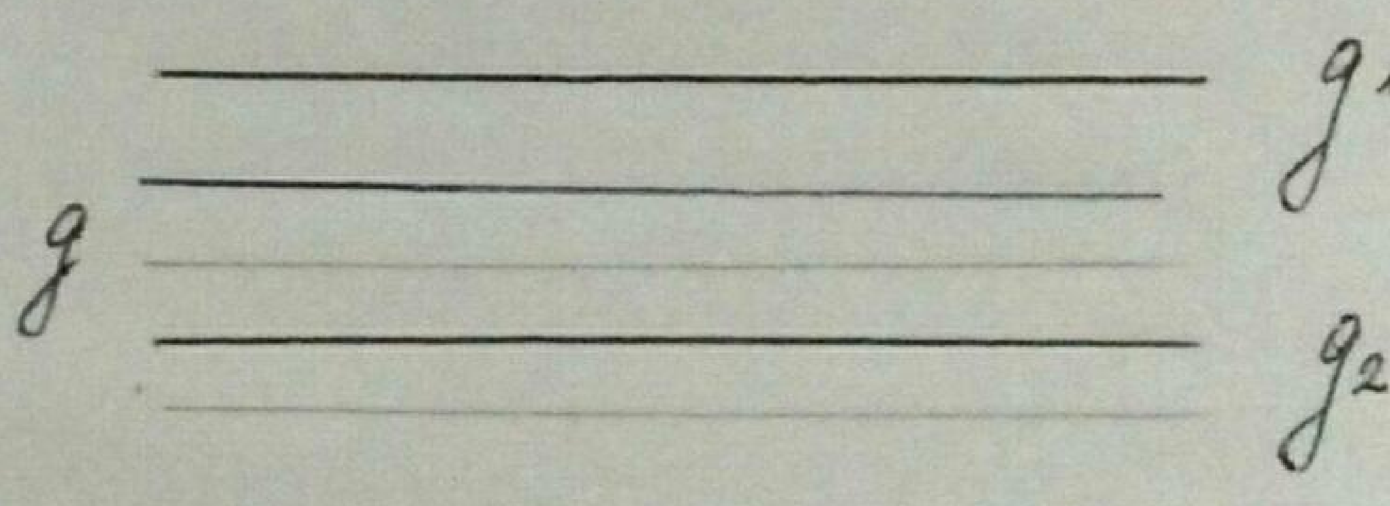
Снопове прави в равнина.

Спрямо афинна координатна система $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ са дадени различните прави g_1 и g_2 с уравнения съответно $g_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $g_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Полиномите им са означени съответно с l_1 и l_2 - $l_1(x,y) = a_1x + b_1y + c_1$ и $l_2(x,y) = a_2x + b_2y + c_2$.

Нека g е произволна права с уравнение $g: ax + by + c = 0$, а полиномът ѝ е означен с l - $l(x,y) = ax + by + c$.

За правите g_1 и g_2 има две възможности - или g_1 и g_2 са пресичащи се, или са успоредни. Когато g_1 и g_2 са пресича- пресичащи се - $g_1 \cap g_2 = M_0$, то множеството от правите през M_0 се нарича сноп прави с център M_0 (или централен сноп). Ако g_1 и g_2 са успоредни, то множеството от правите, успоредни на g_1 ($\Rightarrow$ и на g_2) се нарича сноп успоредни прави.





11.5.

Следните теореми дават необходими и достатъчни условия права g да принадлежи на сноп прави.

<u>Теорема 2</u>. Нека правите g_1 и g_2 се пресичат в точката M_0. Тогава правата g минава през точката M_0 точно тогава, когато полиномът на g е ненулева линейна комбинация на полиномите на g_1 и g_2.

Доказателство. Нека $g_1 \cap g_2 = M_0(x_0, y_0) \Rightarrow$ координатите на M_0 анулират полиномите на g_1 и g_2 $\Rightarrow l_1(x_0,y_0)=0$ и $l_2(x_0,y_0)=0$.

$|\Leftarrow|$ Нека $l(x,y) = \lambda l_1(x,y) + \mu l_2(x,y)$, където $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \setminus (0,0)$.

Да допуснем, че полиномът $l(x,y) = \lambda l_1(x,y) + \mu l_2(x,y)$ не е полином на права, т.е., че $l(x,y) = 0$ не е уравнение на права. Това би било така точно тогава, когато и двата коефициента пред x и y са нула, т.е

$$(1) \left| \begin{array}{l} \lambda a_1 + \mu a_2 = 0 \\ \lambda b_1 + \mu b_2 = 0 \end{array} \right.$$

, а (1) е линейна хомогенна система с две уравнения, с две неизвестни, която има ненулево решение (λ, μ). Това е възможно точно тогава, когато $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, което е изпълнено точно тогава, когато $g_1 \parallel g_2$. Но по условие $g_1 \cap g_2 = M_0$. Следователно, $g_1 \equiv g_2$ – противоречие (често „противоречие" се изобразява „накратко" със светкавица – ↯)

От $l(x_0, y_0) = \lambda l_1(x_0, y_0) + \mu l_2(x_0, y_0) = \lambda . 0 + \mu . 0 = 0$ следва, че правата g минава през точката M_0.

2.) $\Rightarrow$) Нека сега правата g е инцидентна с точката M_0 => анулира полинома на g – имаме $l(x_0, y_0) = 0$. Тогава има $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, такива че $l(x,y) = \lambda l_1(x,y) + \mu l_2(x,y)$.

Например, ако $M_1(x_1, y_1) \in g$ като $M_1 \neq M_0$, то или $l_1(x_1, y_1) \neq 0$, или $l_2(x_1, y_1) \neq 0$. Тогава за $\lambda = -l_2(x_1, y_1)$ и $\mu = l_1(x_1, y_1)$ и права g' с полином $\lambda l_1(x,y) + \mu l_2(x,y)$, т.е. с уравнение $g' : \lambda l_1(x,y) + \mu l_2(x,y) = 0$ имаме $M_0 \in g'$ и $M_1 \in g'$. Следователно $g' \equiv g \Rightarrow l(x,y) = \lambda l_1(x,y) + \mu l_2(x,y)$. □

В сила е и

<u>Теорема 2.</u> Нека g_1 и g_2 са две успоредни прави. Тогава правата g е успоредна на g_1 и g_2 точно тогава, когато полиномът на g е линейна комбинация на полиномите на g_1 и g_2.

Доказателство. От $g_1 \parallel g_2 \Rightarrow \exists k \neq 0$ такова, че $a_2 = k a_1$ и $b_2 = k b_1$.
От $g_1 \neq g_2 \Rightarrow c_2 \neq k c_1$.

Нека l е линейна комбинация на l_1 и l_2 – $l(x,y) = \lambda l_1(x,y) + \mu l_2(x,y)$

Тогава $l(x,y) = (\lambda + \mu k) a_1 . x + (\lambda + \mu k) b_1 . y + \lambda c_1 + \mu c_2$, $\quad (\lambda, \mu) \neq (0,0)$
което не е полином на права, ако коефициентите пред x и y станат едновременно нула. Това се случва, ако $\lambda + \mu k = 0$.
Във всички останали случаи $l(x,y)$ е полином на права, която е успоредна на g_1 и g_2.

Обратно, ако g е произволна права, успоредна на g_1 и $g_2 \Rightarrow$
$\exists \nu \neq 0$ такова, че $a = \nu a_1$ и $b = \nu b_1$.

Сега системата $\begin{vmatrix} \lambda + \mu k = \nu \\ \lambda c_1 + \mu c_2 = c \end{vmatrix}$ има ненулево решение

$(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, тъй като детерминантата ѝ е различна от нула -

$\begin{vmatrix} 1 & k \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Ако допуснем $\begin{vmatrix} 1 & k \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow c_2 - kc_1 = 0 \Rightarrow c_2 = kc_1$

$\Rightarrow g_1 \equiv g_2$, противоречие.

Следователно, за тези λ и μ получаваме

$(\lambda + \mu k)(a_1 x + b_1 y + c_1) + \lambda c_1 + \mu c_2 = \nu a_1 . x + \nu b_1 y + c = ax + by + c = l(x,y)$.

Така че, както две пресичащи се прави, така и две успоредни прави определят съответно сноп пресичащи се или сноп успоредни прави като права принадлежи на съответния сноп точно тогава, когато полиномът ѝ е ненулева линейна комбинация на полиномите на правите, задаващи снопа.