Тема: Редове
Основни дефиниции и теореми

Нека е даден редът $a_1+a_2+...+a_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

1. Сумата $S_n=a_1+a_2+...+a_n$ се нарича **частична (парциална) сума на реда.**

2. Казваме, че редът е сходящ, ако редицата S_n е сходяща и границата $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ се нарича сума на реда и това се отбелязва $S=a_1+a_2+...+a_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

3. **Необходимо условие за сходимост.** Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е сходящ, то $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Ясно е, че ако $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$, то редът е разходящ.

4. Принцип за сравняване (разгледайте съответната теорема за несобствени интеграли) . Дадени са редовете $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

– Нека за членовете на редовете е в сила $0\le a_n\le b_n$. Тогава:

ако $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ е сходящ, то $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е сходящ,

ако $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е разходящ, то $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е разходящ.

– Нека $0\le a_n=\alpha_n b_n$, $b_n\ge 0$. Тогава

ако $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ е сходящ, то $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е сходящ,

ако $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=A>0$, то редовете $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ са едновременно сходящи, или разходящи; в този случай ще пишем $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

ако $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е разходящ, то $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ е разходящ.

Задача 1. Докажете, че редът $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+...$ и намерете неговата сума.

Решение. Да разложим частното $\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$ на елементарни дроби:

$$\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{2x+1}\Leftrightarrow 1=A(2x+1)+B(2x-1)$$

При $x=\frac{1}{2}\Rightarrow 1=2A\Rightarrow A=\frac{1}{2}$ и при $x=-\frac{1}{2}\Rightarrow 1=-2B\Rightarrow B=-\frac{1}{2}$ или

$$\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}) .$$

Да разгледаме парциалната сума $S_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Всеки от членовете разлагаме, като използваме доказаното равенство при $x=1,2,3,...$:

$$S_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+...+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1}).$$

Оттук $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}$.

Следователно редът е сходящ и $\frac{1}{2}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+...$

Задача 2. Докажете, че редът $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+...$ и намерете неговата сума.

Решение. Да разложим частното $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ на елементарни дроби:

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}\Leftrightarrow 1=A(x+1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x+1)$$

При $x=0\Rightarrow 1=2A\Rightarrow A=\frac{1}{2}$, при $x=-1\Rightarrow 1=-B\Rightarrow B=-1$ и

$x=-2\Rightarrow 1=2C\Rightarrow C=\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{1}{2}\;\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+2}$.

Да разгледаме парциалната сума $S_n=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Всеки от членовете разлагаме, като използваме доказаното равенство при $x=1,2,3,...$:

$$S_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}+$$

$$+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+$$

$$+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+$$

....

$$+\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}$$

$$+\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2})$$

Оттук $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2})=\frac{1}{4}$.

Следователно редът е сходящ и

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+...$$

Задача 3. (за домашно). Докажете, че редът $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.11}+...+\frac{1}{n(n+3)}+...$ и намерете неговата сума.

Задача 4. а) Докажете, че редът $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+...$ и намерете неговата сума.

б) Сходящ ли е редът $1-2+4-8+...+(-1)^{n+1}n+...$

Решение. а) Парциалната сума

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}\ 1-(-\frac{1}{2})^n\ \to\frac{2}{3}.$$

Следователно редът е сходящ и

$$\frac{2}{3}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+...$$

б) Редицата $(-1)^{n+1}n$ не клони към 0. Следователно редът е разходящ.

При изследване за сходимост на редове е важно да се знаят следните стандартни редове:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\quad\begin{cases}\text{при } \alpha\le 1 & \text{редът е разходящ}\\ \text{при } \alpha>1 & \text{редът е сходящ}\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n\quad\begin{cases}\text{при } -1<q<1 & \text{редът е сходящ}\\ \text{при } |q|\ge 1 & \text{редът е разходящ}\end{cases}.$$

Задача 5. Да се изследва кои от следните редове са сходящи:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^2$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\ \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$; ж) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\ln\frac{n+1}{n-1}$.

Решение. Задачата ще решим с принципа за сравняване

а) $\frac{n+1}{n(n+2)}=\frac{n}{n^2}.\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\sim\frac{1}{n}$ $(\alpha_n=\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\to 1\neq 0)$. Редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ е разходящ.

Следователно $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$ е разходящ.

б) $\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^2=\frac{n^2}{n^4}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)^2\sim\frac{1}{n^2}$ $(\alpha_n=\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)^2\to 1)$

Редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ е сходящ и следователно $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^2$ е сходящ.

в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}}.\frac{\pi}{4}.\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$ $(\alpha_n=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}}.\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{4})$ Редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ е разходящ.

Следователно $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$ е разходящ.

г) $\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}=\dfrac{n-(n-1)}{n(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}=\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\right)}\sim\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Редът $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ е сходящ и следователно $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}$ е сходящ.

д) Решете задачата самостоятелно.

е) $\dfrac{\ln n}{n^2}=\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}.\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Имаме $\alpha_n=\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\to 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ е сходящ. Следователно $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}$ е сходящ.

ж) $\dfrac{1}{n^{\alpha}}\ln\dfrac{n+1}{n-1}=\dfrac{1}{n^{\alpha}}\dfrac{\ln\dfrac{n+1}{n-1}}{\dfrac{n+1}{n-1}-1}.\left(\dfrac{n+1}{n-1}-1\right)=\dfrac{1}{n^{\alpha}}\dfrac{\ln\dfrac{n+1}{n-1}}{\dfrac{n+1}{n-1}-1}.\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n}}.\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$

$\left(\alpha_n=\dfrac{\ln\dfrac{n+1}{n-1}}{\dfrac{n+1}{n-1}-1}.\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n}}\to 1\right)$

Следователно при $\alpha+1\leq 1$ редът е разходящ, а при $\alpha+1>1$ е сходящ.