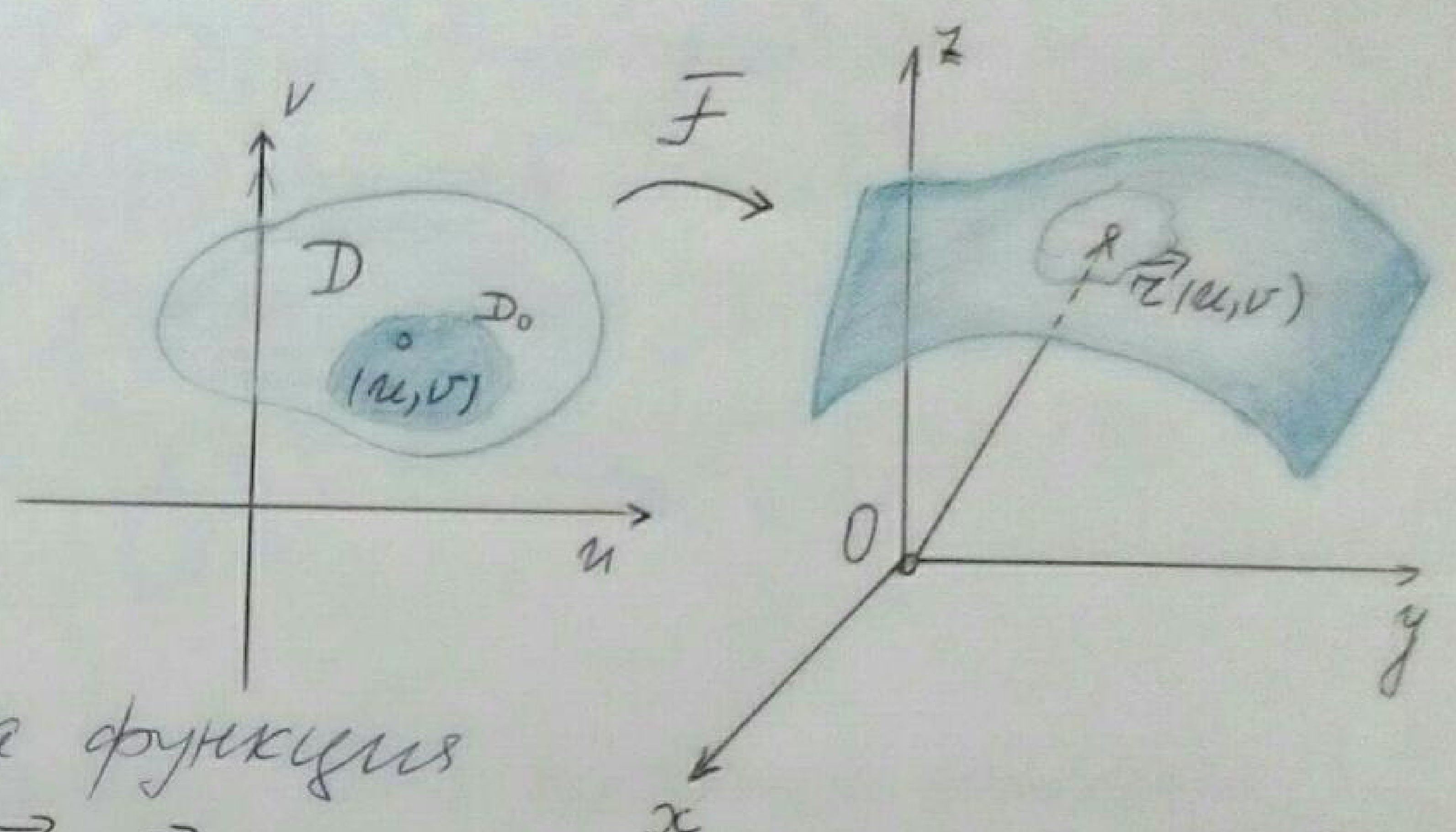
Повърхнини в евклидовото пространство. Допирателна равнина

Непрекъснато изображение $\mathcal{F}$ на област $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^3$ наричаме повърхнина. В класическия смисъл - множеството от точките, получени при $\mathcal{F}$



Аналитично задаване - с векторна функция на два числови аргумента $\mathcal{F}: \vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in D$

Спрямо ОКС $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ - $\mathcal{F}$ множеството от точки с радиус вектор $\vec{r}(u,v)$

$\mathcal{F}$ - **непрекъсната**, ако $\vec{r}(u,v)$ е непрекъсната функция на $\vec{r}(u,v)$.

$\mathcal{F}$ - **гладка**, ако за $\forall (u,v) \in D$ $\vec{r}(u,v)$ има непрекъснати частни производни $\vec{r}_u = \dfrac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial u}$, $\vec{r}_v = \dfrac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial v}$ и ! $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{O}$

(Ако има непрек. частни до ред n вкл. - n-кратно гладка)

За коорд. параметричните уравнения на $\mathcal{F}$ спрямо K имаме

$$\mathcal{F}: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases},\ (u,v) \subseteq \mathbb{R}^2; \quad \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{e_1} + y(u,v)\vec{e_2} + z(u,v)\vec{e_3}$$

$$\mathcal{F}\text{ - гладка} \iff \operatorname{rank}\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$$

Нормална околност на точка от повърхнина

Нека D_0 е околност на т. $(u_0, v_0) \in D$, т.е. D_0 - подобласт на D и $P_0 \in F$: $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}(u_0, v_0)$. Когато (u, v) описва D_0, $\vec{r}(u, v)$ описва част F_0 от F, която се нарича околност на P_0. Ако изображението $F\big|_{D_0}$ е биективно, то F_0 се нарича нормална околност на P_0 върху F.

Лема 1. Всяка точка от гладка повърхнина има нормална околност.

Доказателство. Нека $P_0(x, y, z) \in F$ е произв. т-ка, F - гладка $\Leftrightarrow$ $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ $\Rightarrow$ поне една от координатите е различна от нула. Б.О.О считаме, че

$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$ в (u_0, v_0) $\Rightarrow$ $\exists$ околност D_0 на (u_0, v_0), за която
(теорема за неявните функции)

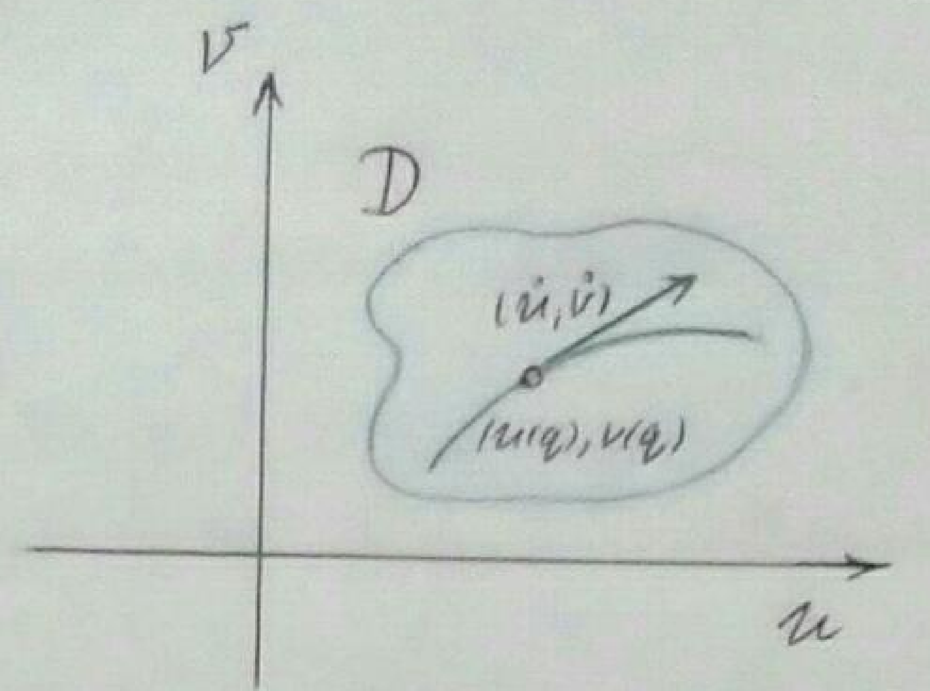
системата $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ може да бъде решена относно u и v (в D_0)

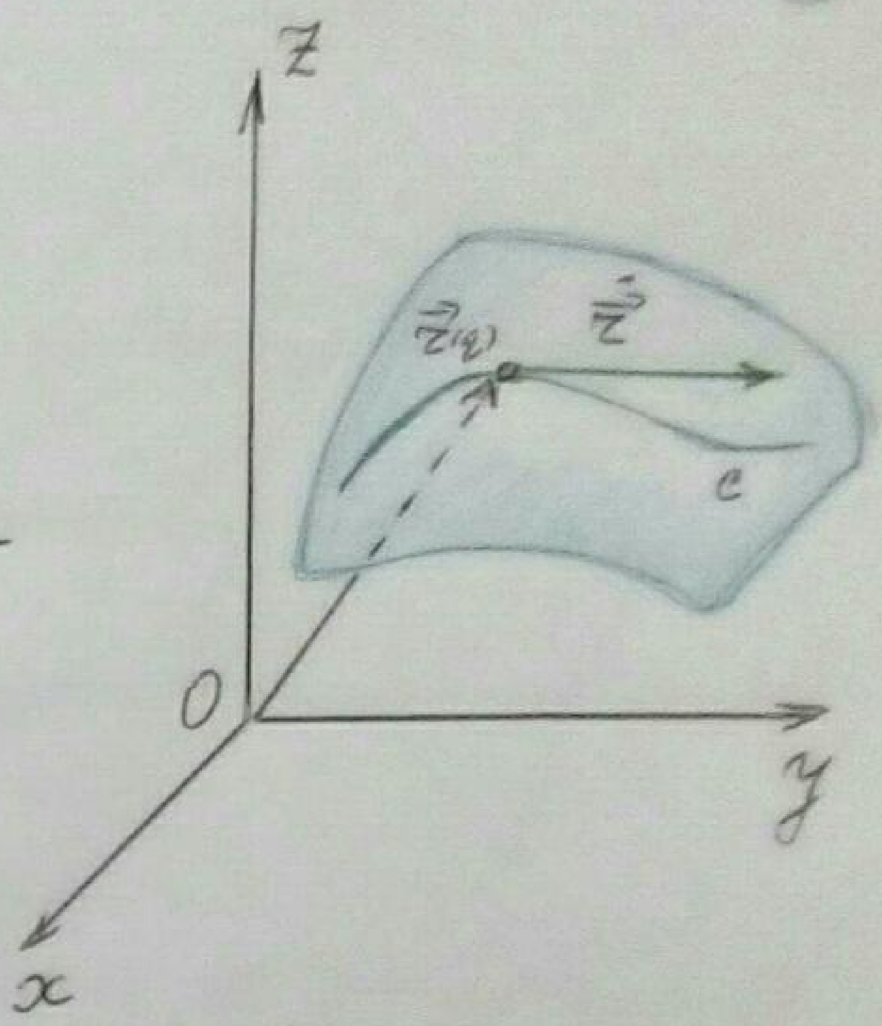
$\begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases}$. В тази околност F има представяне $F: \ z = f(x, y)$

заб. Параметрите (u, v) определят всяка точка от F. Наричат се криволинейни или гаусови координати върху F.

Линии върху повърхнина

Нека точката D описва гладка крива в D т.е.



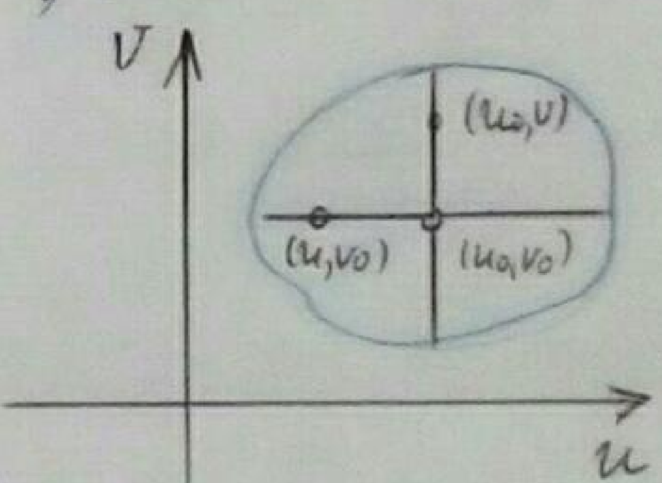


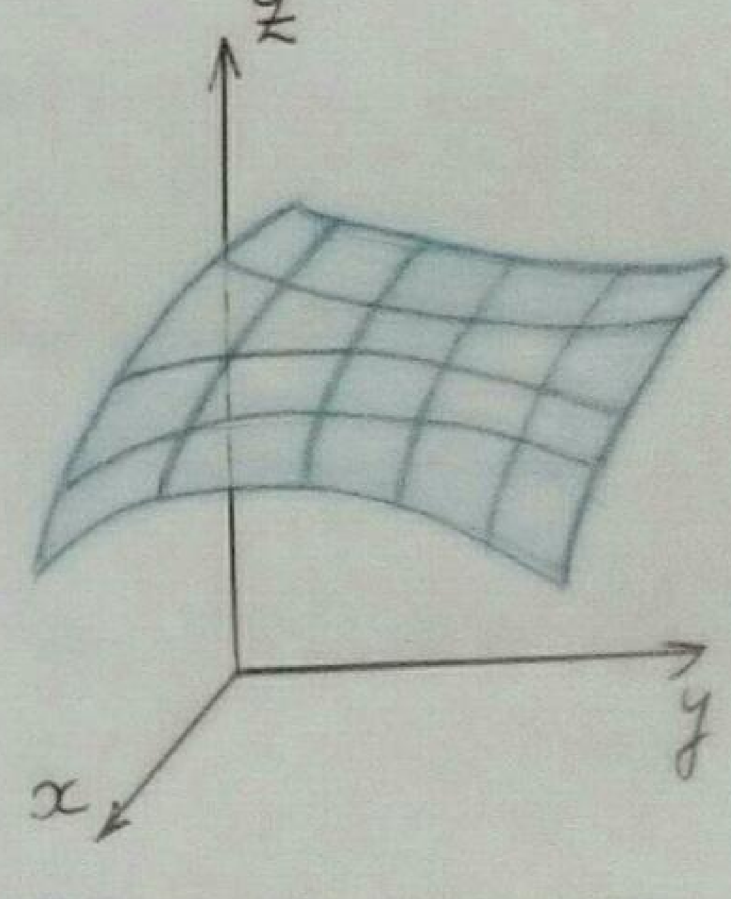
$\begin{cases} u = u(q) \\ v = v(q) \end{cases}, \quad q \in J \subseteq \mathbb{R}$

и $\dot u^2(q) + \dot v^2(q) \neq 0$. Заместваме в уравнението на F. Получаваме крива c върху F

$c: \vec r = \vec r(q) = \vec r(u(q), v(q))$ - еднопараметрична съвкупност от точки

Имаме $\dot{\vec r}(q)\,(\dot u(q), \dot v(q))$, т.е. $\dot{\vec r} = \vec r_u \dot u + \vec r_v \dot v$, c-гладка с допирателен в-р $\dot{\vec r}$





Специално за $v = v_0 = const$ и $u = u_0 = const$

като положим в у-нието на F $\begin{matrix} v = v_0 = const \\ u = q \end{matrix}$

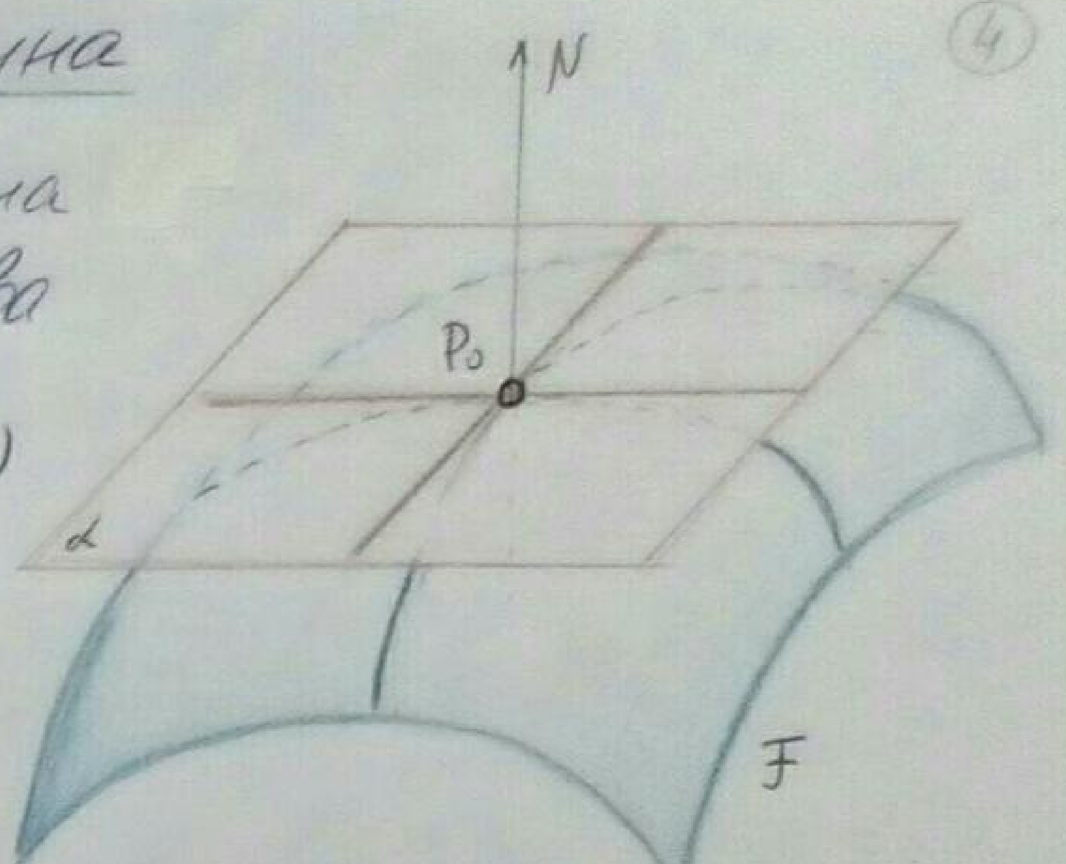
и $\begin{matrix} u = u_0 = const \\ v = q \end{matrix}$ получаваме $\begin{matrix} \vec r(q)\,(q, v_0) \\ \vec r(q)\,(u_0, q) \end{matrix}$

– така наречените координатни (параметрични) линии върху F – съответно u-линии v-линии

$\begin{cases} u = u(q) \\ v = v(q) \end{cases}$ – вътрешни у-ния на c. $\dot u(1,0)$, $\dot v(0,1)$

Имаме, че през всяка точка от F минава точно една u-линия и точно една v-линия (в норм. околност на точката)

Допирателна равнина и нормала към повърхнина



Нека P_0 е произволна точка от гладка повърхнина $F: \vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ и c е произволна крива през P_0. Тогава $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}(u_0, v_0) = \vec{r}(u(q_0), v(q_0)) = \vec{r}(q_0)$. Следователно за допирателния вектор $\dot{\vec{r}}(q_0)$ към c в т. P_0 имаме

$$\dot{\vec{r}}(q_0) = \vec{r}_u(u_0,v_0)\cdot \dot{u}(q_0) + \vec{r}_v(u_0,v_0)\cdot \dot{v}(q_0)$$

От това, че F е гладка, т.е. $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ $\Rightarrow$ еднозначно е определена равнината α в т. P_0, компланарна с $\vec{r}_u(u_0,v_0)$ и $\vec{r}_v(u_0,v_0)$, т.е. допирателните към кривите върху F през P_0 лежат в α. Вярно е и че всяка права в α през P_0 е допирателна към крива от F в т. P_0.

Нека α е р-ната през P_0, компланарна с $\vec{r}_u(u_0,v_0), \vec{r}_v(u_0,v_0)$ и g е права в α през P, $\vec{a} \parallel g \Rightarrow \vec{a} = \lambda \vec{r}_u(u_0,v_0) + \mu \vec{r}_v(u_0,v_0)$, $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ и c е кривата през P с вътрешни уравнения

$$c: \begin{cases} u = u_0 + \lambda q \\ v = v_0 + \mu q \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{r}(q) = \vec{r}(u(q), v(q)) \Rightarrow \dot{\vec{r}}(q) = \vec{r}_u \cdot \dot{u} + \vec{r}_v \cdot \dot{v}$

$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(q_0) = \vec{r}_u(u_0,v_0)\,\lambda + \vec{r}_v(u_0,v_0)\,\mu$. Следователно допирателният към c в т. P вектор лежи в α. α – допирателна равнина. В сила е

<u>Теорема</u> Нека P е точка от гладка повърхнина $\mathcal{F}$. Тогава допирателните към минаващите през P криви от $\mathcal{F}$ лежат в допирателната равнина α в същата точка. Обратно - всяка права от α през P е допирателна към крива от $\mathcal{F}$, минаваща през P.

Ако $\mathcal{F}: \vec{r} = \vec{r}(u,v)$, то α има уравнение

$$(\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v))(\vec{y} - \vec{r}(u,v)) = (\vec{y} - \vec{r}(u,v))\vec{r}_u \vec{r}_v = 0.$$

Ако спрямо ОКС K $\mathcal{F}$ е зададена с уравнение $z = f(x,y)$ (изп. u, v),

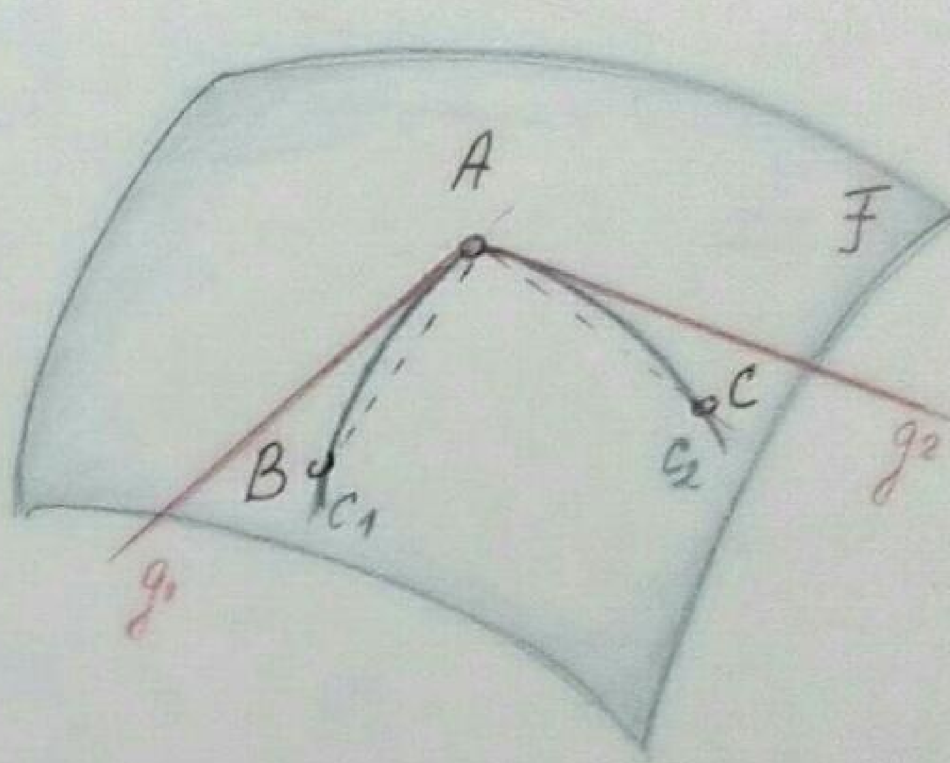
т.е. $\mathcal{F}: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}$, то в $P_0(u_0, v_0, f(u_0,v_0))$ $\quad \alpha: \begin{vmatrix} x - u_0 & y - v_0 & z - f(u_0,v_0) \\ 1 & 0 & f_u(u_0,v_0) \\ 0 & 1 & f_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0$

Правата n през т. P, която е перпендикулярна на α се нарича нормала към $\mathcal{F}$ в т. P $\Rightarrow$ има векторно параметрично уравнение

$$n: \vec{y} = \vec{r}(u_0,v_0) + \lambda(\vec{r}_u(u_0,v_0) \times \vec{r}_v(u_0,v_0)) \quad \lambda \in (-\infty, \infty)$$

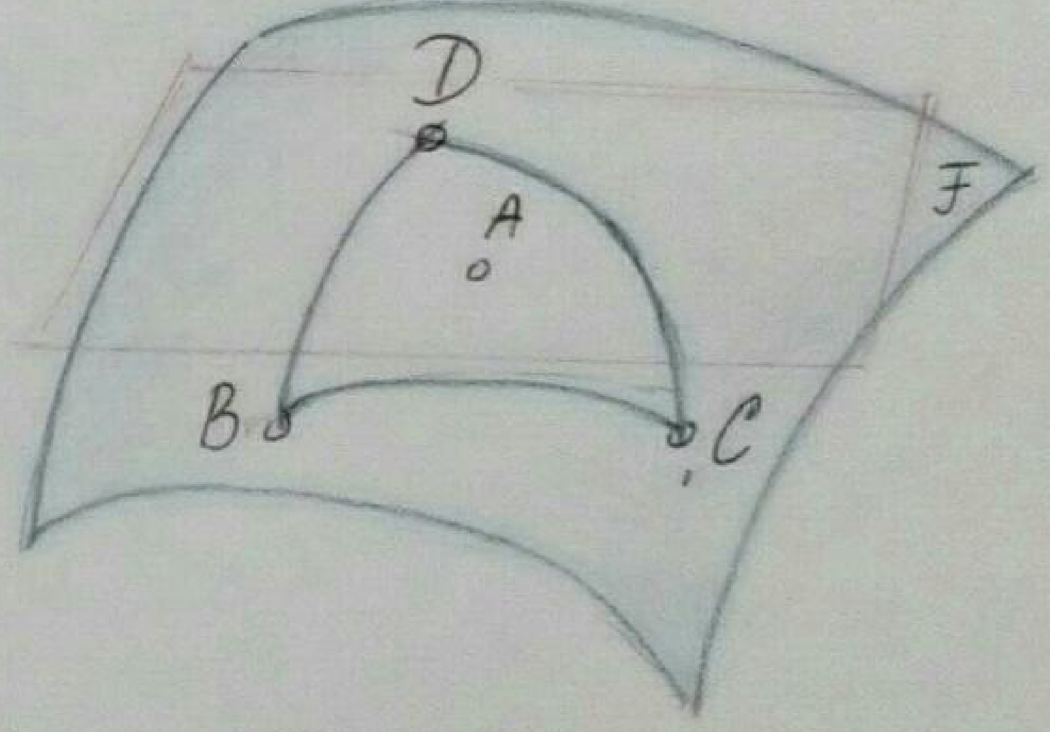
Допирателна равнина може да се дефинира и по следния начин

Деф1 Допирателната равнина в т. A от повърхнината F е границата, към която клони равнината ABC, когато точките B и C клонят по F към A по две различни направления.



По-общо – не е необходимо т. A да е фиксирана.

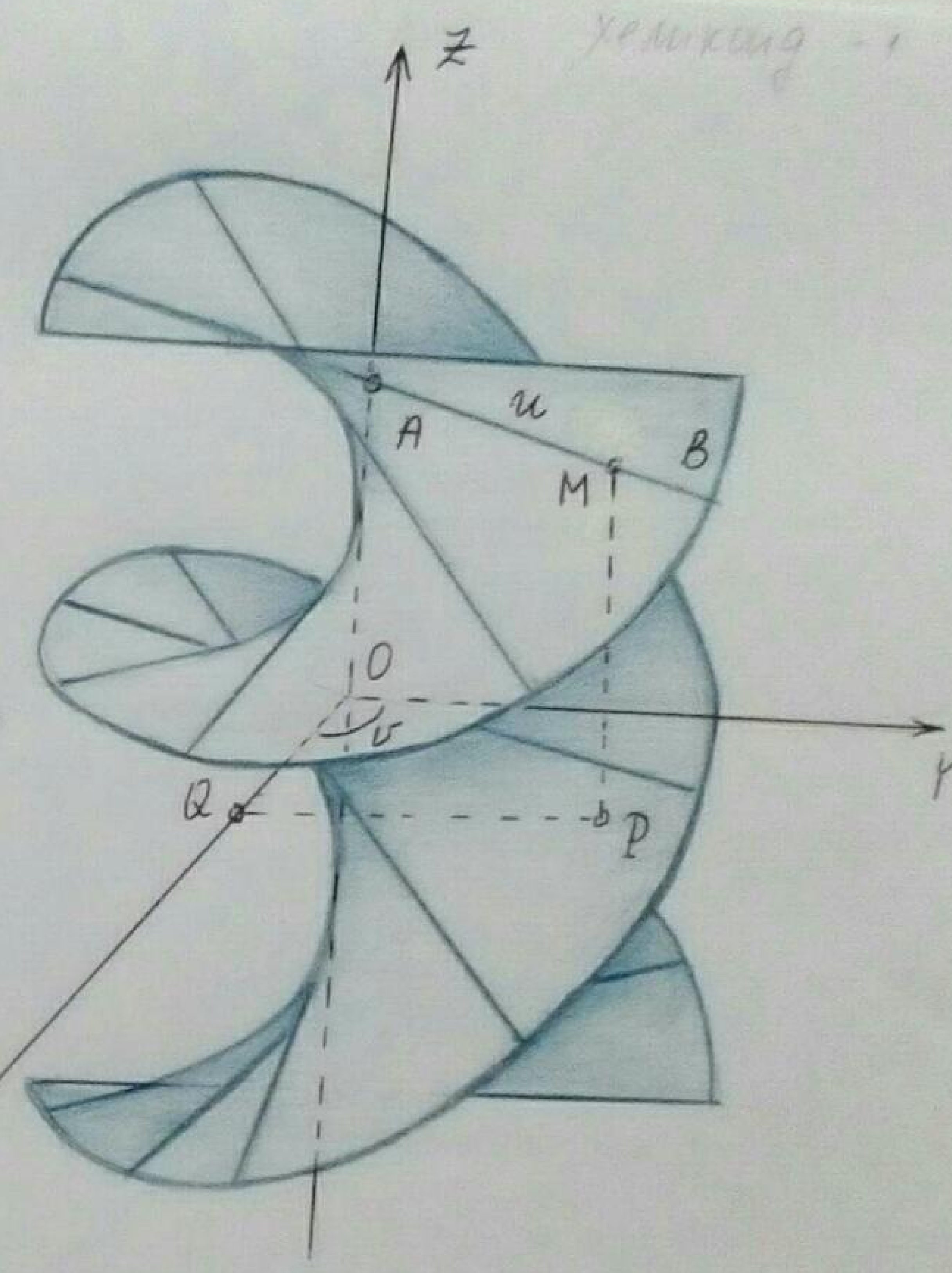
Деф2 Допирателната равнина в точката A от повърхнината F е границата, към която клони равнината BCD, когато точките B, C, D клонят по F към A, така че ΔABC няма безкрайно малки ъгли.



За да съществува границата е достатъчно да поставим условието $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ да са непрекъснати.

Прав хеликоид

Получава се при движението на права AB, пресичаща неподвижна права Oz (ос на хеликоида) под прав ъгъл, върти се около оста и в същото време се движи постъпателно по посока на оста като скоростите на тези движения са пропорционални.



За криволинейни координати (параметри) на т. M може да вземем 1. разстоянието $u = MA$ до оста и 2. ъгълът v на завъртане на образуващата AM като отчитаме от някое начално положение. Избираме ОКС k като оста му приемем за ос z, а началното положение на образуващата - за ос x. Тогава

$$x = OQ = OP\cos v = MA\cos v = u\cos v$$

$$y = QP = a\sin v$$

Тъй като пътят OA, изминат от т. A по оста е пропорционален на ъгъла v, то $z = OA = b$, където b (ход на хеликоида) е преместването на образуващата при завъртане на един радиан. Следователно параметричните уравнения на хеликоида са

$$X: \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = bv \end{cases}$$