3. Линейни трансформации в E_3^*

Нека в $E_3 = E_3^* \setminus \{\Omega\}$ е фиксирана афинна координатна система $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$. Хомогенните координати на точките и равнините спрямо K означаваме съответно с $M(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq (0,0,0,0)$ и

$\alpha[u_1, u_2, u_3, u_4] \neq [0,0,0,0]$.

Линейна трансформация в E_3^*.

Нека $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ е матрица от ред 4 – $i,j = 1, \dots, 4$.

Трансформацията φ_A в E_3^*, която на точка $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ съпоставя точка $M'(x_1', x_2', x_3', x_4')$ по следния начин

$$\varphi_A : \rho \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \ \rho \neq 0, \rho \in \mathbb{R}.$$

се нарича линейна трансформация в E_3^*. Означаване $\varphi_A(M) = M'$, $M \xrightarrow{\varphi_A} M'$.

В E_3^* са в сила твърдения, аналогични 2. на тези в E_2^*. В сила е следната

<u>Теорема 1.</u> Нека φ_A е линейна трансформация в E_3^* с $\operatorname{rank} A = 4$. Тогава φ_A е еднозначно обратимо точково съответствие в E_3^*, което индуцира както еднозначно обратимо съответствие между равнините така и еднозначно обратимо съответствие между правите, запазващо съответно компланарността и колинеарността на точките.

Доказателство. От $\operatorname{rank} A = 4 \Rightarrow \det A \neq 0$.

1. φ_A е еднозначно обратимо точково съответствие

1.1. Всяка точка M има образ при φ_A.

Да допуснем противното $\Rightarrow \exists M(x_1, x_2, x_3, x_4)$; $\varphi(M) = (0,0,0,0) \Rightarrow$ линейната хомогенна система

$$
\begin{aligned}
0 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\
0 &= a_{21}x_1 + \cdots \cdots + a_{24}x_4 \\
0 &= a_{31}x_1 + \cdots \cdots + a_{34}x_4 \\
0 &= a_{41}x_1 + \cdots \cdots + a_{44}x_4
\end{aligned}
$$

има ненулево решение (x_1, x_2, x_3, x_4) 3 $\Leftrightarrow \det A = 0$ ↯ с $\operatorname{rank} A = 4$. Следователно всяка точка има образ при φ_A.

1.2. От $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow$ определена е $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$, $\operatorname{rank} A^{-1} = 4$.

$$\varphi_A^{-1} : \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}.$$

Следователно всяка точка има точно един първообраз (аналогично на 1.1).

2. Образ на равнината $\alpha[u_1, u_2, u_3, u_4]$ при φ_A наричаме равнината $\alpha'[u_1', u_2', u_3', u_4']$, за която

$$\varphi_A : \sigma[u_1' \; u_2' \; u_3' \; u_4'] = [u_1 \; u_2 \; u_3 \; u_4] A^{-1}$$

$$\sigma \neq 0.$$

Тъй като $\operatorname{rank}(A^{-1}) = 4$, то както в 1. се доказва, че φ_A е еднозначно обратимо съответствие между равнините в E_3^*.

Имаме

$$\varphi_A^{-1} : \frac{1}{\sigma}(u_1 \; u_2 \; u_3 \; u_4) = (u_1' \; u_2' \; u_3' \; u_4') A$$

3. Нека $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $\alpha[u_1, u_2, u_3, u_4]$ са съответно точка и равнина. Тогава $M \, z \, \alpha \iff u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$,

т.е. $\iff (u_1 \; u_2 \; u_3 \; u_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = 0 \quad (\underline{u}\,\underline{X} = 0)$.

Нека $\varphi_A(M) = M'$ и $\varphi_A(\alpha) = \alpha'$. $\Rightarrow$

$$(u_1' \, u_2' \, u_3' \, u_4')\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix} = \sigma^{-1}(u_1 u_2 u_3 u_4)A^{-1}\rho^{-1}A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$= \sigma^{-1}\rho^{-1}(u_1 u_2 u_3 u_4)\underbrace{A^{-1}A}_{=E}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = (\sigma\rho)^{-1}(u_1 u_2 u_3 u_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

Следователно $M' \, z \, \alpha'$ точно тогава, когато $M \, z \, \alpha$.

4. Нека g е права и $g = \alpha \cap \beta$, $\alpha \neq \beta$.
$M \, z \, g \iff M \, z \, \alpha, M \, z \, \beta. \iff \varphi_A(M) \, z \, \varphi_A(\alpha)$ и $\varphi_A(M) \, z \, \varphi_A(\beta)$. От $\alpha \neq \beta \Rightarrow \varphi_A(\alpha) \neq \varphi_A(\beta)$ $\Rightarrow \varphi_A(\alpha) \cap \varphi_A(\beta) = g' \Rightarrow \varphi_A(g) = g'$ и

$M \in g \iff M' \in g'$, $M' = \varphi_A(M)$. $\Rightarrow \varphi_A$ запазва колинеарността на точките.
Нека сега φ_A не е с пълен ранг, т.е $\det A = 0$. Когато $\operatorname{rank} A = 3$ имаме следната

Теорема 2. Нека φ_A е линейна трансформация на E_3^* с $\operatorname{rank} A = 3$. Тогава φ_A изобразява точките на E_3^* в точките на една равнина и съществува точно една точка, която няма образ при φ_A.

Доказателство. Нека φ_A е линейна трансформация на E_3^* с $\operatorname{rank} A = 3$. Тогава линейната хомогенна система

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

има единствено ненулево решение $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) \neq (0,0,0,0)$ с точност до коефициент на пропорционалност, т.е. всички решения са от вида $(\lambda x_1^0, \lambda x_2^0, \lambda x_3^0, \lambda x_4^0)$, $\lambda \neq 0$. Следователно точката $S(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ няма образ при φ_A и е единствената такава.

2. От $\operatorname{rank} A = 3 \Rightarrow \operatorname{rank} A^T = 3$.

Тогава линейната хомогенна система относно u_1, u_2, u_3, u_4

$$A^T \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left(A^T u = u^T A \right)$$

има единствено (ненулево) решение $(u_1^0, u_2^0, u_3^0, u_4^0)$ $\neq (0,0,0,0)$ и всички останали решения са от вида $(\mu u_1^0, \mu u_2^0, \mu u_3^0, \mu u_4^0)$, $\mu \neq 0$.

Нека α е равнината с хомогенни координати $\alpha[u_1^0, u_2^0, u_3^0, u_4^0]$, т.е.

$$A^T \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \\ u_4^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } (u_1^0\ u_2^0\ u_3^0\ u_4^0) A = (0\ 0\ 0\ 0)$$

Нека $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ е произволна точка, различна от S и $\varphi(M) = M'(x_1', x_2', x_3', x_4')$.

Тогава $M' \in \alpha \Leftrightarrow$

$$u_1^0 x_1' + u_2^0 x_2' + u_3^0 x_3' + u_4^0 x_4' = 0.$$

Имаме

$$u_1^0 x_1' + u_2^0 x_2' + u_3^0 x_3' + u_4^0 x_4' = (u_1^0\ u_2^0\ u_3^0\ u_4^0)\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}$$

$$= (u_1^0\ u_2^0\ u_3^0\ u_4^0)\frac{1}{\rho}A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho}\left[(u_1^0\ u_2^0\ u_3^0\ u_4^0)A\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho}(0\,0\,0\,0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow M' \in \alpha \quad \forall M \neq S.$$

$$\left(u^{0T}\frac{1}{\rho}AX = \frac{1}{\rho}(u^{0T}A)X = \frac{1}{\rho}0^T X = 0 \right). \quad \square$$

При $\operatorname{rank} A = 2$, то E_3^* се изобразява в точките на една права, като има точно една права в E_3^*, чиито точки нямат образи при φ_A.

При $\operatorname{rank} A = 1$, E_3^* се "смачква" в точка и има точно една равнина в E_3^*, чиито точки нямат образи при φ_A.