7. Рекурентни уравнения: методи за решаване, примери

Деф: Рекурентно уравнение (РУ) (това е по-скоро общо описание, отколкото формална деф.).

Уравнение, при което за получаване на стойностите на уравнението при дадено $n \in \mathbb{R}$, участват стойностите на уравнението за едно или повече $k_1, k_2, \dots k_i < n$.

Също поне за една ~~стойност~~ $n \in \mathbb{R}$ трябва да е зададена стойността на у-нието в n. Това се нарича начално условие/условия.

С примери по-лесно се разбира:

Пр: Сечимостта от равнинните прави е РУ:

$$L(n) = \begin{cases} L(n-1) + n, & n \in \mathbb{N}^+ \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

Заб. Горе пише, че $n \in \mathbb{R}$, но ние ще се занимаваме с $n \in \mathbb{N}$.

Заб. Очевидно всяко рекурентно у-ние дефинира числова редица.

Възможно е две РУ да са синтактично различни, но да задават една и съща редица:

Пр: $$L(n) = \begin{cases} L(n-1) + n, & n \in \mathbb{N}^+ \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

$$M(n) = \begin{cases} M(n-2) + 2n - 1, & n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \\ 2, & n = 1 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

$M(n)$ и $L(n)$ дефинират: $1, 2, 4, 7, 11, 16 \dots$

Решение на РУ: това е формула за дясната страна (в която не участват рекурсивни извиквания за по-малки стойности), която задава същата числова редица като у-нието.

Начини за решаване на РЗ:

1. Чрез развиване: това е неформален метод за доказване, с който само можем да се досетим за решението. Когато се сетим за решение, го проверяваме по индукция.
2. Индукция: този метод работи, когато имаме кандидат за решение (някакво уравнение за дясната страна) и просто го проверяваме дали е вярно.
3. С метода на характеристичното уравнение: ако имаме РЗ от определен вид, с този алгоритъм директно получаваме реш. стр. 4
4. Мастър теоремата (заб. само го споменавам, но няма да я учим в този курс): отново, ако РЗ е от определен вид, алгоритмично намираме реш.

1. Пр. С развиване решете: $L(n) = \begin{cases} L(n-1)+n, & n \in \mathbb{N}^+ \\ 1, & n=0 \end{cases}$

$$L(n) = L(n-1) + n$$
$$L(n) = L(n-2) + (n-1) + n$$
$$L(n) = L(n-3) + (n-2) + (n-1) + n$$
$$\vdots$$
$$L(n) = L(0) + 1 + 2 + \dots + n \quad // \ L(0) = 1$$
$$L(n) = 1 + 1 + 2 \dots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} \ \checkmark$$

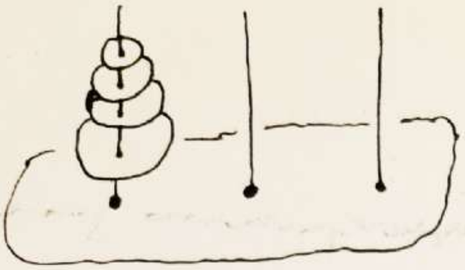
2. Пр: Проверка на горното с индукция по n:

1. База: $n=0$, $L(0) = 1+0$ ✓
2. Стъпка: $L(n+1) := L(n) + (n+1)$

$$L(n+1) \overset{ИП}{=} 1 + \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ \checkmark \text{ Вярно.}$$

Пр: Съставяне на РУ от реален обект

Ханойските кули (преместване на дискове)!



Условие:

- можем да местим дисковете само един по един.
- можем да нанизваме дисковете само на някой от трите пръта.
- не може по-голям диск да нанизваме върху по-малък.

Въпрос:

Какъв е необходимият и достатъчен брой ходове $H(n)$ за преместване на n диска от най-левия до най-десния прът?

Реш: Очевидно за $n = 1$, $H(n) = 1$.

За $n \geq 2$ имаме $H(n) = H(n-1) + 1 + H(n-1)$, защото първо местим горните $n-1$ диска на средния прът; преместваме най-големия диск на десния прът; преместваме останалите $n-1$ диска от средния на десния.

На кратко:
$$H(n) = \begin{cases} 2H(n-1) + 1, & n \geq 2 \\ 1, & n = 1 \end{cases}$$

Решението на РУ-то е $H(n) = 2^n - 1$ (на стр. 6 е доказано).

Линейно хомогенно РУ с константни коефициенти

Дадено е РУ: $a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$ (3), където $c_1 \dots c_k \in \mathbb{R}$, $c_k \neq 0$ са константи и k също е константа. Това е линейно РУ от k-ти ред с константни коефициенти и с крайна история.

Началните условия са $a_1 = q_1 \dots a_k = q_k$ (или $a_0 = q_0 \dots a_{k-1} = q_{k-1}$).

Важно е, че са k на брой.

Метод на характеристичното у-ние за решаване на РУ от вида (3)

Правим характеристичното у-ние на (3). Заместваме a_n с x^n, a_{n-1} с x^{n-1} и т.н. Получаваме:

$$x^n = c_1 x^{n-1} + \dots + c_k x^{n-k} \quad \Big| : x^{n-k}$$

(4) $x^k - c_1 x^{k-1} + \dots - c_k = 0$ — това е характеристичното у-ние.

Съгласно основната Т. на алгебрата (4) има точно k на бр. корена броейки кратностите. Правим си мулти-во от корените с кратностите: $A = \{\alpha_1 \dots \alpha_k\}_M$

Нека различните корени от A са $\beta_1 \dots \beta_t$, $t \le k$. Нека β_i е с кратност r_i (Заб. очевидно $r_1 + \dots + r_t = k$).

Тогава общото решение е:

(5) $$a_n = A_{1,1}\beta_1^n + A_{1,2}\, n\, \beta_1^n + \dots + A_{1,r_1} n^{r_1-1}\beta_1^n + \\ \vdots \\ + A_{t,1}\beta_t^n + A_{t,2}\, n \cdot \beta_t^n + \dots + A_{t,r_t} n^{r_t-1}\beta_t^n$$

Все още неизвестните константи $A_{i,j}$ са точно k на бр. и могат да бъдат намерени със система с началните условия $a_1 = q_1 \dots a_k = q_k$

Заб. Ако не са дадени начални условия, оставяме реш. в параметричния вид (5).

Линейно нехомогенно РУ:

Дадено е РУ: $a_n = \underbrace{c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}}_{\text{хомогенна част}} + \underbrace{p_1(n) b_1^n + \dots + p_l(n) b_l^n}_{\text{нехомогенна част}}$ (6),

където: k, l - константи; $c_1 \dots c_k$, $c_k \neq 0$ - константи; $b_1 \dots b_l$ - две по две различни константи; $p_1(n) \dots p_l(n)$ - полиноми на n.

<u>Метод на хомогенното у-ние за решаване на РУ от вида ⑥.</u>

Първо игнорираме нехомогенната част и намираме корените на характеристичното у-ние на хомогенното РУ. Получаваме м-вото от корените A.

Нека B е мулти-м-вото от числата $b_1 \dots b_l$, като b_i има кратност $\deg p_i(n) + 1$. Обединяваме A и B и съставяме общото решение спрямо това обединение, както преди в ⑤. Единствената особеност е, че константите $A_{i,j}$ са повече от k на бр. и трябва да пресметнем още няколко стойности a_n от ⑥, за да намерим всички $A_{i,j}$.

<u>Пр.</u> Решете следното РУ: (числата на Фибоначи)

$$F_n = \begin{cases} F_{n-1} + F_{n-2}, & n \geq 2 \\ 1, & n = 1 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

<u>Реш:</u> характеристичното у-ние: $x^n = x^{n-1} + x^{n-2} \;\big|\; : x^{n-2}$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

мулти-м-во от корените: $A = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}_M$

Общо реш.: $F_n = A_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Намираме A_1 и A_2:

$$\begin{cases} F_0 = 0 = A_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = A_1 + A_2 \\ F_1 = 1 = A_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{cases}$$

⋮ решаваме

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \; A_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \implies F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Пр: Решете следното РУ: (РУ на Ханойските кули).

$$h(n) = \begin{cases} 2h(n-1) + 1, & n \geq 2 \\ 1, & n = 1 \end{cases}$$

Реш: Характеристично у-ние: $x^n = 2x^{n-1} \mid : x^{n-1}$

$x - 2 = 0 \Rightarrow$ корени: $A = \{2\}_M$

$1 = 1 n^0 . 1^n \Rightarrow B = \{1\}_M$

$A \cup B = \{1, 2\}_M$

Общо реш: $h(n) = A_1 . 1^n + A_2 2^n$

$h(2) \stackrel{def}{=} 2h(1) + 1 = 2.1 + 1 = 3$

$$\begin{cases} h(1) = 1 = A_1 . 1^1 + A_2 2^1 = A_1 + 2A_2 \\ h(2) = 3 = A_1 . 1^2 + A_2 2^2 = A_1 + 4A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = 1 - 2A_2 \\ 3 = 1 - 2A_2 + 4A_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A_1 = -1, \ A_2 = 1}$$

$\Rightarrow \underline{h(n) = -1 \cdot 1^n + 1 . 2^n = 2^n - 1}$

Пр: Решете следното РУ:

$$a_n = 10a_{n-1} - 24a_{n-2} + 17 - 139.4^n + 16.6^n + 13n + 8^n n^2 + n4^n + 8^{n-3}$$
$$+ 13681 n^2 . 4^n$$

Първо го привеждаме във вида (6):

$$a_n = 10a_{n-1} - 24a_{n-2} + (13n + 17)1^n + (13681n^2 + n - 139). 4^n$$
$$+ 16.6^n + (n^2 + 8^{-3}) 8^n$$

Харак. у-ние: $x^n = 10x^{n-1} - 24x^{n-2} \mid : x^{n-2}$

$x^2 - 10x + 24 = 0$

$x_1 = 4, \ x_2 = 6 \Rightarrow \{4, 6\}_M$

Нехомогенната част: $\{1, 1, 4, 4, 4, 6, 8, 8, 8\}_м$

Хомогенна и нехомогенна: $\{1, 1, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 8, 8, 8\}_м$

Общото реш. е:

$$a_n = A_1 \cdot 1^n + A_2 n \cdot 1^n + A_3 4^n + A_4 n 4^n + A_5 n^2 4^n + A_6 n^3 4^n + A_7 6^n + A_8 n 6^n + A_9 8^n + A_{10} n 8^n + A_{11} n^2 8^n$$