ЛИНЕЙНИ ТРАНСФОРМАЦИИ НА E_2^* и E_3^*

1 зад. Спрямо дадена координатна система в разширената Евклидова равнина E_2^* да се намери аналитично представяне на линейната трансформация φ, която изобразява точките $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $O(0, 0, 1)$, $E(1, 1, 1)$ съответно в точките: $A'(2, 1, 0)$, $B'(1, 2, 0)$, $O(0, 0, 1)$, $E'(3, 3, 1)$.
Да се определят неподвижните точки и неподвижните прави под действие на φ.

Решение:

Търсим елементите на матрица $C = \{c_{ij}\}_{3\times 3}$, която задава действието на линейната трансформация φ.

Нека $M(x, y, z) \overset{\varphi}{\to} M'(x', y', z')$, тогава по дефиниция между координатите на първообраз и образ е установена следната връзка:

$$\varphi: C.\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \rho.\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{pmatrix}, \rho \neq 0.$$

Прилагаме тази дефиниция за всяка двойка съответни точки, дадени в условието:

За $A(1,0,0) \overset{\varphi}{\to} A'(2,1,0)$, получаваме $C.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho_1.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \rho_1 \neq 0$ или по-подробно $\left| \begin{matrix} c_{11} = \rho_1.2 \\ c_{21} = \rho_1.1 \\ c_{31} = \quad 0 \end{matrix} \right.$.

За $B(1,0,0) \overset{\varphi}{\to} B'(2,1,0)$, получаваме $C.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho_2.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \rho_2 \neq 0$ или по-подробно $\left| \begin{matrix} c_{12} = \rho_2.1 \\ c_{22} = \rho_2.2 \\ c_{32} = \quad 0 \end{matrix} \right.$.

За $O(0,0,1) \overset{\varphi}{\to} O(0,0,1)$, получаваме $C.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \rho_3.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \rho_3 \neq 0$ или по-подробно $\left| \begin{matrix} c_{13} = \quad 0 \\ c_{23} = \quad 0 \\ c_{33} = \rho_3.1 \end{matrix} \right.$.

До тук за матрицата на изображението φ получаваме следния резултат: $C = \begin{pmatrix} 2\rho_1 & \rho_2 & 0 \\ \rho_1 & 2\rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}$.

Четвъртата двойка съответни точки използваме, за да установим зависимости между коефициентите ρ_1, ρ_2 и ρ_3.

За $E(1,1,1) \xrightarrow{\varphi} E'(3,3,1)$, получаваме $\begin{pmatrix} 2\rho_1 & \rho_2 & 0 \\ \rho_1 & 2\rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \rho_4.\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \rho_3 \neq 0$ или по-подробно $\left| \begin{array}{l} 2\rho_1 + \rho_2 = 3\rho_4 \\ \rho_1 + 2\rho_2 = 3\rho_4. \\ \quad \rho_3 = \rho_4 \end{array} \right.$

Решението на последната система е $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 \neq 0$. Можем да изберем конкретна числова стойност, напр. $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$.

Окончателно търсеното аналитично представяне на линейната трансформация φ е $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Една точка $M(x,y,t)$, зададена с тройка хомогенни координати в разширената Евклидова равнина E_2^* е неподвижна за линейна трансформация φ, зададена с матрица C, ако съществува реално число $\mu \neq 0$, такова че:

$$C.\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \mu.\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Затова пресмятаме собствените стойности и собствените вектори на матрицата C.
Характеристичното уравнение на получената матрица C има вида:

$$\begin{vmatrix} 2-\mu & 1 & 0 \\ 1 & 2-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Корените му са: $\mu_1 = 3$ и $\mu_{2,3} = 1$. Съответните собствени вектори са:

1) За $\mu_1 = 3$ от системата (1) получаваме координатите на неподвижната точка $M(1,1,0)$;

2) За $\mu_{2,3} = 1$ от системата (1) получаваме безброй много неподвижи точки, които лежат на една права, а именно правата $g: x + y = 0$ е поточково неподвижна.

Неподвижните прави на φ могат да бъдат определени по два начина (само единият от тях е напълно достатъчен).

Първи начин: Прилагаме ***Принцип за дуалност в E_2^**** и формулираме твърдението за неподвижните прави на φ:

1) Правата $g: x + y = 0$ е поточково неподвижна;
2) Всяка права b, която минава през точката $M(1,1,0)$ е неподвижна (но не поточково) за φ.

Втори начин: Прилагаме теоремата за действие на неособена линейна трансформация върху прави:

$$[u_1\; u_2\; u_3].C^{-1} = \sigma.[u_1{}'\; u_2{}'\; u_3{}'], \sigma \neq 0.$$

Намираме обратната матрица на $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тя има вида $C^{-1} = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

За да определим хомогенните координати на неподвижна права $g[u_1\; u_2\; u_3]$, решаваме системата:

$$[u_1\; u_2\; u_3].(C^{-1} - \sigma.E) = [0,0,0], \sigma \neq 0 \qquad (2)$$

Характеристичното уравнение на C^{-1}, $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \sigma & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \sigma \end{vmatrix} = 0$ има корени $\sigma_1 = \frac{1}{3}$ и $\sigma_{2,3} = 1$.

1) За $\sigma_1 = \frac{1}{3}$ от системата (2) получаваме координатите на неподвижната права $g[1,1,0]$;
2) За $\sigma_{2,3} = 1$ от системата (2) получаваме безброй много неподвижни прави, които отговарят на условието: $1.u_1 + 1.u_2 + 0.u_3 = 0$. Геометрично това са всички прави, които минават през точката $M(1,1,0)$.

2 зад. (**Упражнение**) Спрямо дадена координатна система в разширената Евклидова равнина E_2^* да се намери аналитично представяне на линейната трансформация φ, която изобразява точките $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $O(0, 0, 1)$, $E(1, 1, 1)$ съответно в точките: $A'(3, 2, 0)$, $B'(2, 3, 0)$, $O(0, 0, 1)$, $E'(5, 5, 1)$.
Да се определят неподвижните точки и неподвижните прави под действие на φ.

ЦЕНТРАЛНО ПРОЕКТИРАНЕ НА E_3^*

Централното проектиране на E_3^* върху равнина γ с център $S(a, b, c, d)$ е линейна трансформация на E_3^*. Аналитично такъв тип изображение се задава с матрица $C = \{c_{ij}\}_{4\times 4}$, която притежава следните свойства:

1) $\det C = 0$;
2) $r(C) = 3$;
3) $C.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, т.е. центърът S няма образ;
4) $[u_1\ u_2\ u_3\ u_4].C = [0,\ 0,\ 0,\ 0]$. Тази система е изпълнена, защото образите на всички точки от лежат в равнината γ.
5) Равнината γ е **крайна** равнина. Центърът S може да бъде крайна или безкрайна точка. Най-важното, за да може да бъде дефинирано централно проектиране върху равнина γ с център S, е **центърът да не лежи в проекционната равнина**.
Когато центърът е **безкрайна** точка, централното проектиране се нарича **успоредно**, т.е. проектираме по дадено направление.
Ортогонално проектиране имаме, когато направлението, по което проектираме, е перпендикулярно на проекционната равнина.

1 зад. В разширеното Евклидово пространство E_3^*, в хомогенни координати са дадени точките:
$A(3, 0, -1, 2), B(2, 1, 1, 1), M(1, -1, -1, 1)$ и равнината $\gamma: x + 2y - z - 3t = 0$

a) Да се намерят координатите на U_{AB} – безкрайната точка на правата AB;
b) Да се намери уравнение на равнината $\boldsymbol{\alpha}$, която минава през точката $\boldsymbol{M}$ и през безкрайната права на равнината **γ**;
c) Да се намери аналитично представяне на централното проектиране **ψ** на E_3^* върху равнината **α**, с център точката $\boldsymbol{U_{AB}}$.

Решение:

a) Координатни параметрични уравнения на правата AB:

$$AB: \begin{cases} x = 3.p + 2.q \\ y = \qquad\ \ 1.q \\ z = -p\ + 1.q \\ t = 2.p\ + 1.q \end{cases},\ (p, q) \neq (0, 0)$$

$U_{AB} = AB \cap \Omega$, където с Ω е означена безкрайната равнина на E_3^*, която има уравнение $\Omega: t = 0$

Последното условие е изпълнено за онази точка от правата AB, за която $q = -2p$. Заместваме в уравненията на AB и получаваме $U_{AB}(1, 2, 3, 0)$.

b) По условие равнините α и γ имат обща безкрайна права, което означава, че те са успоредни. Успоредните равнини имат съответно пропорционални коефициенти пред x, y и z в общите си уравнения. Като използваме, че равнината α минава през дадената точка $M(1, -1, -1, 1)$, получаваме нейно общо уравнение в хомогенни координати:

$$\alpha: x + 2y - z = 0.$$

c) В конкретната задача проекционната равнина е $\alpha: x + 2y - z = 0$. Хомогенните координати на безкрайния център на централното проектиране на E_3^* върху α са:

$$U_{AB}(1, 2, 3, 0).$$

Нека $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0) \neq (0, 0, 0, 0)$ е произволна точка от E_3^*, различна от центъра U_{AB}. Съществува единствена права m_0, която минава през точките M_0 и U_{AB}. Нейните координатни параметрични уравнения имат вида:

$$m_0: \begin{cases} x = p.x_0 + 1.q \\ y = p.y_0 + 2.q \\ z = p.z_0 + 3.q \\ t = p.t_0 \ + 0.q \end{cases}, \ (p, q) \neq (0, 0).$$

Нека образът на точката M_0 под действие на централното проектиране върху равнината α е точката $M'(x', y', z', t') = m_0 \cap \alpha$. Определяме стойности на параметрите $(p, q) \neq (0, 0)$, които да удовлетворяват системата:

$$\left| \begin{array}{l} x = p.x_0 + 1.q \\ y = p.y_0 + 2.q \\ z = p.z_0 + 3.q \\ t = p.t_0 \ + 0.q \\ \quad x + 2y - z = 0 \end{array} \right.$$

$p = -2, q = \ x_0 + 2y_0 - z_0$, които заместваме в уравненията на m_0, за да определим връзката между координатите на първообраз и образ под действие на централното проектиране върху α. След извършване на възможните пресмятания, от коефициентите в получените линейни комбинации, записваме матрицата C, която е търсеното аналитично представяне на разглежданото централно проектиране:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2 зад. (**Упражнение**) В разширеното Евклидово пространство E_3^*, в хомогенни координати са дадени точките:
$A(2, 1, 1, 1), B(3, 0, -1, 2), M(1, 0, -1, -1)$ и равнината $\gamma: x + 2y - z + 4t = 0$.

a) Да се намерят координатите на U_{AB} – безкрайната точка на правата AB;

b) Да се намери уравнение на равнината $\boldsymbol{\alpha}$, която минава през точката $\boldsymbol{M}$ и през безкрайната права на равнината $\boldsymbol{\gamma}$;
c) Да се намери аналитично представяне на централното проектиране $\boldsymbol{\psi}$ на E_3^* върху равнината $\boldsymbol{\alpha}$, с център точката $\boldsymbol{U_{AB}}$.

3 зад. (Ортогонално проектиране) Да се намери аналитично представяне на **ортогоналното** проектиране $\boldsymbol{\psi}$ на E_3^* върху равнината $\gamma: x + 2y - z + 4t = 0$.

Решение:

1) Определяме координатите на проекционния център. За целта разглеждаме общото уравнение на равнината γ в нехомогенни координати спрямо ОКС: $\gamma: X + 2Y - Z + 4 = 0$. Нормалният вектор на равнината има координати $\vec{n}_\gamma(1, 2, -1)$. Така за хомогенни координати на безкрайния център на ортогоналното проектиране получаваме: $S(1, 2, -1, 0)$.
2) Намирането на матрицата на ортогоналното проектиране става по начина, описан в 1 зад, подусловие с). Проекционната равнина е $\gamma: x + 2y - z + 4t = 0$, центърът на проектиране е $S(1, 2, -1, 0)$.

4 зад. Дадена е линейна трансформация с матрица $C = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Докажете, че C е матрица на централно проектиране.

Намерете координатите на проекционния център S и на проекционната равнина γ.

Решение:

1) Пресмята се $\det C = 0$;
2) Пресмята се $r(C) = 3$;
3) От системата $C.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ се получават координатите на проекционния център $S(3, 2, 1, 1)$;
4) От системата $[u_1\ u_2\ u_3\ u_4].C = [0,\ 0,\ 0,\ 0]$ се получават координатите на проекционната равнина $\gamma[1, -2, 1, 1]$;
5) Непосредствено проверяваме, че $[1\ \ -2\ \ 1\ \ 1].\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$, което означава, че S не лежи на γ.

5 зад. (**Упражнение**) Дадена е линейна трансформация с матрица $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Докажете, че C е матрица на централно проектиране.

Намерете координатите на проекционния център S и на проекционната равнина γ.