ЛЕКЦИЯ 1

Геометрия на движението

Библиография

1.Анчев А., Л. Лилов, С. Радев (1988). Лекции по аналитична механика, част 1. Унив. изд. „Св. Кл. Охридски“, София.

2.Младенов К. (2001) . Теоретична механика, ч. 1 и 2, АВС – Техника.

3.Лойцянский Л. Г., А. И. Лурье (1995). Курс теоретической механики. ч. 1 и 2, „Наука“, Москва.

4.Бл. Долапчиев, Аналитична механика, 2-ро издание, София, 1966.

5.Бухгольц, Н. Н., Основной курс теоретической механики, изд. 6-ое, Наука, Москва, 1976.

6.Марков К. (1995). Ръководство по аналитична механика. Унив. изд. „Св. Кл. Охридски“, София.

7.Писарев А., Ц. Парасков, С. Бъчваров (1986, 1988). Курс по теоретична механика. ч. 1 и 2. ДИ „Техника“, София.

8.Percey F. Smith, William R. Lfingley, Yale University, Theoretical Mechanics, Ginn and Company, Boston-New York- Chicago-London, 1910

9.A. Nony Mous, A Short Introduction to Theoretical Mechanics, Brigham University, 2007

10.Rugerro M. Santilli, Foundation of Theoretical Mechanics, Cambridge, US, Springer-Verlag Ney York Inc., 1983

11.Classical Mechanics, H. Goldstain, C. P. Poole, J. L. Safko, Addison-Wesley, 2002

12.Mathematical methods in classical mechanics, V. I. Arnold, 1989, http://www.colorado.edu/physics/phys5210/

Съдържание

1. Предмет на аналитичната механика.
2. Траектория на точка.
3. Векторна функция на скаларен аргумент.
4. Ходограф на вектор-функция.
5. Производна на векторна функция.
6. Вектори скорост и ускорение на движеща се точка.
7. Триедър на Френе.

Механиката е раздел на физиката. От своя страна според спецификата на изучаваните области тя включва подраздели – например аналитична механика, механика на непрекъснатите среди, механика на флуидите, хидроаеромеханика и др. В аналитичната механика също се обособяват области като кинематика, статика и динамика. Като цяло се изучава движението на материалните тела, но спецификата на движението според изучаваните негови параметри определя и конкретното исторически наложило се наименование на съответната дисциплина. Кинематиката изучава движението без да се интересува от причините, които го пораждат и разглежда параметри като траектории, скорости и ускорения, които зависят от времето. За разлика от геометричните конфигурации, които не се изменят с времето, горепосочените параметри конкретизират геометрични конфигурации, които могат да се променят с времето, т.е. са функции на времето. Затова в литературата кинематиката е известна и под името „геометрия на движението“.

1. Предмет на аналитичната механика. Понятия и дефиниции.

- движението като философско понятие: всички процеси и явления във вселената

- механично движение – изменение във времето на взаимното разположение на телата в пространството

- изучаване на общите закони на механичното движение и механичното взаимодействие на материалните тела

- основни понятия: пространство, време, сила, маса

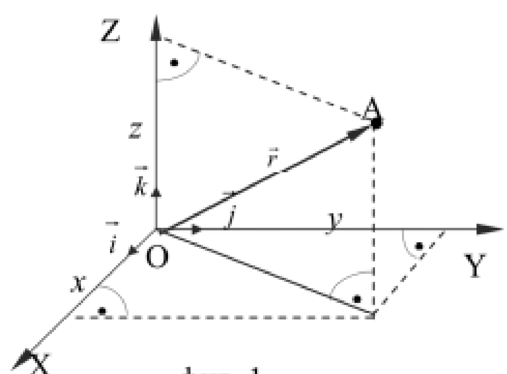
- материална точка: материален обект с пренебрежимо малки размери

- абсолютно твърдо тяло: разстоянието между произволни негови точки остава неизменно независимо от механичните въздействия

- движението - векторна функция със скаларен аргумент времето

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

- координатна система – средство за описание на движението



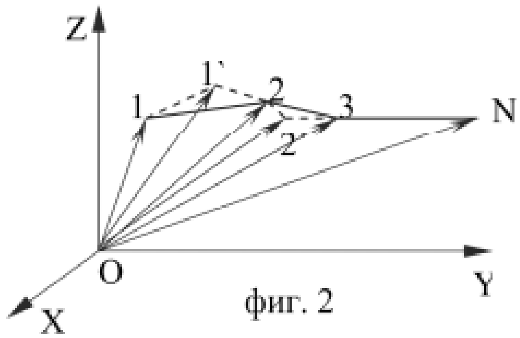
фиг. 1

- Скаларни функции : x=x(t); y=y(t); z=z(t)

2. Траектория на точка.

- Непрекъсната крива в пространството

  На фиг.2 са илюстрирани няколко положения на точката при движението по нейната траектория в различни моменти от време, както и радиус-векторите до тях.



фиг. 2

3. **Векторна функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ на скаларен аргумент t.**

- *определение:* на всяко числено значение на t съответства определено значение на вектора – определени модул и направление.

- разлика със скаларна функция $x = x(t)$ на скаларен аргумент t**:** на всяко числено значение на t съответства определено число.

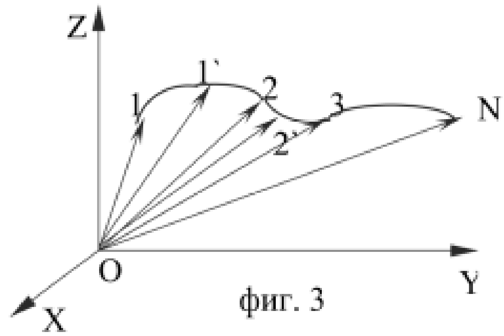
- представяне
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}\,,$$

  i , j , k - единични вектори по координатните оси на Декартова система

4. **Ходограф на вектор-функция.**

- Траектория, описвана от краищата на вектора на вектор-функцията, като векторите имат общо начало - една неподвижна точка

- Съпоставяне на траектория на точка и ходограф на вектор-функция
  траекторията на точка – ходограф на вектор-функция



фиг. 3

5. **Производна на векторна функция.**

- дефиниция

$$\mathbf{a}'(u) = \frac{d\mathbf{a}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{a}(u+\Delta u) - \mathbf{a}(u)}{\Delta u}$$

Вектор с направление на допирателната към ходографа и посока, съответна на нарастване на аргумента

Означения:

$|\mathbf{a}'(u)|$ - модул на производната

a - големина на вектора $\mathbf{a}$

a' - големина (стойност) на производната на вектора $\mathbf{a}$

- Правила за диференциране – общоизвестните правила за диференциране на сбор и произведение. По-долу като пример е дадено правилото и за диференциране в случай на векторно произведение.

$$\frac{d}{du}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{du}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{du}$$

- Пример: производна на единичен вектор $\mathbf{e}$ с постоянно направление

$$\frac{d\mathbf{e}}{du} = \mathbf{0}$$

- Пример: производна на вектор $\mathbf{a}$ с постоянна големина

$$\frac{da^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{a}\mathbf{a}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{a} + \mathbf{a}\frac{d\mathbf{a}}{dt} = 2\mathbf{a}\frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{a} \perp \frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

- За координатна система с неподвижни (с постоянни направления) оси

$\mathbf{a}(u) = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ **,** като големината на вектора е $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Производната на вектора е

$\frac{d\mathbf{a}}{du} = \frac{da_x}{du}\mathbf{i} + \frac{da_y}{du}\mathbf{j} + \frac{da_z}{du}\mathbf{k}$ **,** а големината е $\left|\frac{d\mathbf{a}}{du}\right| = \sqrt{\left(\frac{da_x}{du}\right)^2 + \left(\frac{da_y}{du}\right)^2 + \left(\frac{da_z}{du}\right)^2}$

След диференциране на $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ се получава:

$$a'(u) = \frac{da}{du} = \frac{a_x\frac{da_x}{du} + a_y\frac{da_y}{du} + a_z\frac{da_z}{du}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Сравнявайки изразите за големината на производната на вектора и производната на големината му се вижда, че те са различни, т.е.

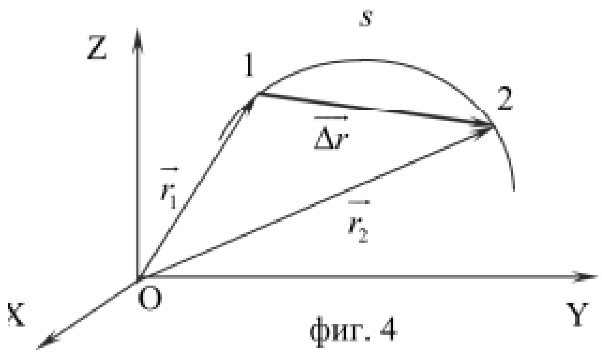
$$|\mathbf{a}'(u)| \neq a'(u)$$

Или *големината на производната на вектора не е равна на. производната на големината му.*

6. Вектори скорост и ускорение на движеща се точка.

Разликата между радиус-векторите на точка в две различни нейни положения се записва като (фиг. 4):

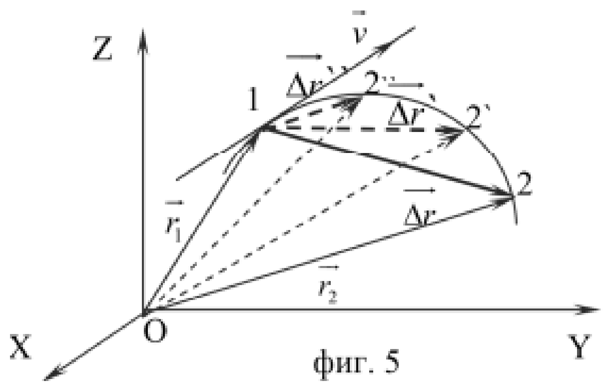
$$\Delta\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$$



фиг. 4

Определения:

средна скорост: $\mathbf{v}_{cp} = \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ **;** **моментна скорост:** $\mathbf{v} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$



фиг. 5

На фиг. 5 са илюстрирани различни положения на точката, съответната разлика $\Delta\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$ и граничното ѝ положение ($\mathbf{r}_1$ е неизменен, т.е. производната се изчислява в тази точка от траекторията).

Аналогично скоростта, както всеки вектор, може да се представи с координатите си

$$\mathbf{v}(t) = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

като за големината ѝ се получава

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

По същия начин се дефинират понятията средно ускорение и моментно ускорение:

Средно ускорение: $\mathbf{w}_{cp} = \dfrac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$

моментно ускорение: $\mathbf{w} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$,

като големината му има вида

$$w = |\mathbf{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} \,.$$

7. Триедър на Френе.

- естествена координатна система

Дефиниция за регулярна крива: допуска задаване с векторно-параметрично уравнение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, където $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ е n пъти непрекъснато-диференцируема функция; при $n = 1$ кривата се налича *гладка*.

Означения и дефиниции:

s - криволинейна абциса; s = s(t) естествен закон на движение на точката

$\boldsymbol{\tau}$ - вектор по тангентата към траекторията:

$$\boldsymbol{\tau} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

Теорема: Всяка непрекъсната и диференцируема функция (гладка крива) притежава единствена допирателна във всяка точка. Ако $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ е векторно-параметричното уравнение на кривата, то допирателната в точката, съответна на стойността на аргумента t, има направлението на вектора $\dot{\mathbf{r}}(t)$.

- оскулачна равнина

  Нека P_0 - точка от гладка крива, а $\boldsymbol{\tau}_0$ - вектор по тангентата в тази точка.

  Нека P_1 - друга точка от кривата, а $\boldsymbol{\tau}_1$ - вектор по тангентата в тази точка.

  Векторите $\boldsymbol{\tau}_0$ и $\boldsymbol{\tau}_1$ с начало P_0 характеризират в общия случай равнина, която при граничен преход $P_1 \to P_0$ се дефинира като оскулачна.

  Смисъл: оскулачната равнина е „най-плътно" приближена до кривата в околност на съответната точка.

  Следствие: оскулачната равнина или е единствена, или всяка равнина през допирателната към кривата в дадена точка е оскулачна.

- нормална равнина и главна нормала

  нормална равнина в точка – перпендикулярна равнина към тангентата в тази точка

  главна нормала – пресечница на оскулачната и нормалната равнина

- означения: единични вектори $\boldsymbol{\tau}$ по тангентата и $\mathbf{n}$ по главната нормала

- бинормала и единичен вектор по бинормалата

  $$\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$$

С всяка точка от траекторията може да се свърже естествена координатна система (естествен триедър , триедър на Френе) с оси, насочени по тангентата, нормалата и бинормалата.

Единичните вектори по тези оси образуват дясна координатна система.

Примери.

1.Точка се движи съгласно уравненията $x = 6 + 3t$, $y = 4t$. *Да се определи траекторията на точката.*

Изключване на t от двете уравнения: $t = \frac{y}{4}$ и се получава $x = 6 + 0.75y$.

Траекторията е *полуправа*, започваща от точката, съответна на $t = 0$, т.е. $x_0 = 6$, $y_0 = 0$.

Точката се движи по нея с нарастване на времето t. При избор на полуправата за абцисна ос уравненията на движение приемат вида $x_1 = 5t$, $y_1 = 0$.

2. *Точка се движи съгласно уравненията* $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, *където* $\varphi = kt$. *Да се определи траекторията на точката, времето за пълен оборот и моментът, когато двете координати станат равни помежду си.*

Изключване на t от двете уравнения: $x^2 + y^2 = a^2$ - окръжност с център в координатното начало. Пълен оборот – времето, за което ъгълът стане 2π, т.е. $\varphi = kT = 2\pi$ или $T = \frac{2\pi}{k}$.

Моментът t_1, в който координатите станат равни, е $x = y = a\cos kt_1 = a\sin kt_1$ или $tg\, kt_1 = 1$.

На практика такива моменти са безкрайно много и се дават с $t_1 = \frac{\pi}{4k} + \frac{\pi}{k}n, \quad n \in N$.

3. *Точка се движи съгласно уравненията* $x = a\cos(kt - \varepsilon)$, $y = b\cos kt$. *Да се определи траекторията на точката. Как се изменя тя при нарастване на* ε *от 0 до* 2π *?*

За изключване на t от: $\cos kt = \frac{y}{b}$, и $x = a\cos(kt - \varepsilon) = a[\cos kt \cos\varepsilon + \sin kt \sin\varepsilon]$, като от първото уравнение се замества $\cos kt$ във второто, което после се решава относно $\sin kt$, т.е.

$$\sin kt = \frac{x/a - (y/b)\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}.$$

След сумиране на квадратите на $\sin kt$ и $\cos kt$ и преобразуване се стига до

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\frac{x}{a}\frac{y}{b}\cos\varepsilon = \sin^2\varepsilon$$ - уравнение на елипса.

От него се вижда, че най-големите и най-малките стойности на x и y съответно по координатните оси са $\pm a$ и $\pm b$, т.е. винаги елипсата е вписана в правоъгълник със страни $2a$ и $2b$.

Изменение на траекторията при нарастване на ε от 0 до 2π.

а) $\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0$, т.е. две съвпадащи прави, явяващи се диагонал на правоъгълника.

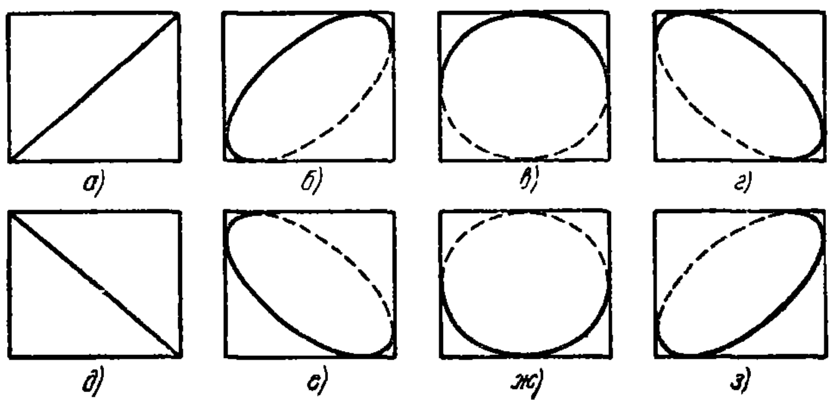
б) ε расте до $\pi/2 \Rightarrow$ една от осите на елипсата постепенно се разширява.

в) $\varepsilon = \pi/2 \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, уравнението на елипсата е в каноничен вид.

г) ε расте до $\pi \Rightarrow$ една от осите на елипсата постепенно се стеснява.

д) $\varepsilon = \pi \Rightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0$ и отново се получават две съвпадащи прави, явяващи се другия диагонал на правоъгълника.

При увеличаване на ε по-нататък до 2π процесът се повтаря, като фигурите се явяват огледално отражение на случаите б), в) и г).



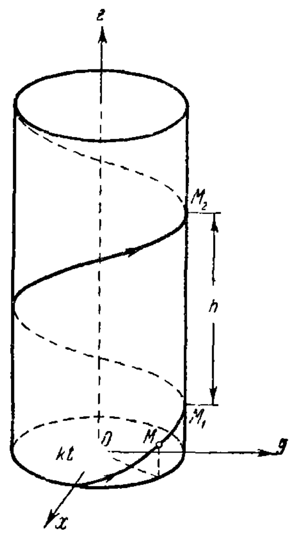
4. *Точка се движи в равнина съгласно уравненията* $x = e^{-t}\cos kt$, $y = e^{-t}\sin kt$. *Да се определи траекторията на точката в полярни координати.*

От $\frac{y}{x} = tg\varphi = tg\,kt \quad \Rightarrow \varphi = kt$. От $x^2 + y^2 = \rho^2 = e^{-2t}$ и изключване на времето: $\rho = e^{-\varphi/k}$.

Движението е по траектория, която е навиваща се към координатното начало спирала.

5. *Точка се движи съгласно уравненията* $x = a\cos kt$, $y = a\sin kt$, $z = bt$ *Да се определи траекторията и законът за движение по траекторията. Начални условия:* $s = 0$ *при* $t = 0$.

Изключване на t от първите две уравнения: $x^2 + y^2 = a^2$- проекцията на траекторията в координатната равнина Оху е окръжност с център в координатното начало. Пълен оборот – времето, за което ъгълът стане 2π , т.е. $\varphi = kT = 2\pi$ или $T = \frac{2\pi}{k}$. За това време z ще приеме стойност $z = h = b\dfrac{2\pi}{k}$. Траекторията е винтова линия със стъпка $h = b\dfrac{2\pi}{k}$, т.е. спирала, която се навива на цилиндър с радиус a.



За определяне на закона за движение по траекторията е необходимо да се намери диференциалът на дъга от нея, след което да се интегрира по времето. Или:

$d\sigma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$, където $dx = -ak\sin ktdt$, $dy = ak\cos ktdt$, $dz = bdt$.

Тогава $d\sigma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{a^2k^2 + b^2}dt$ и $\sigma = \sqrt{a^2k^2 + b^2}\, t + C$.

От началните условия следва $C = 0$.

Движението започва от точката $x_0 = a, y_0 = 0, z_0 = 0$ при $t = 0$ и се извършва по винтова линия срещу часовниковата стрелка.