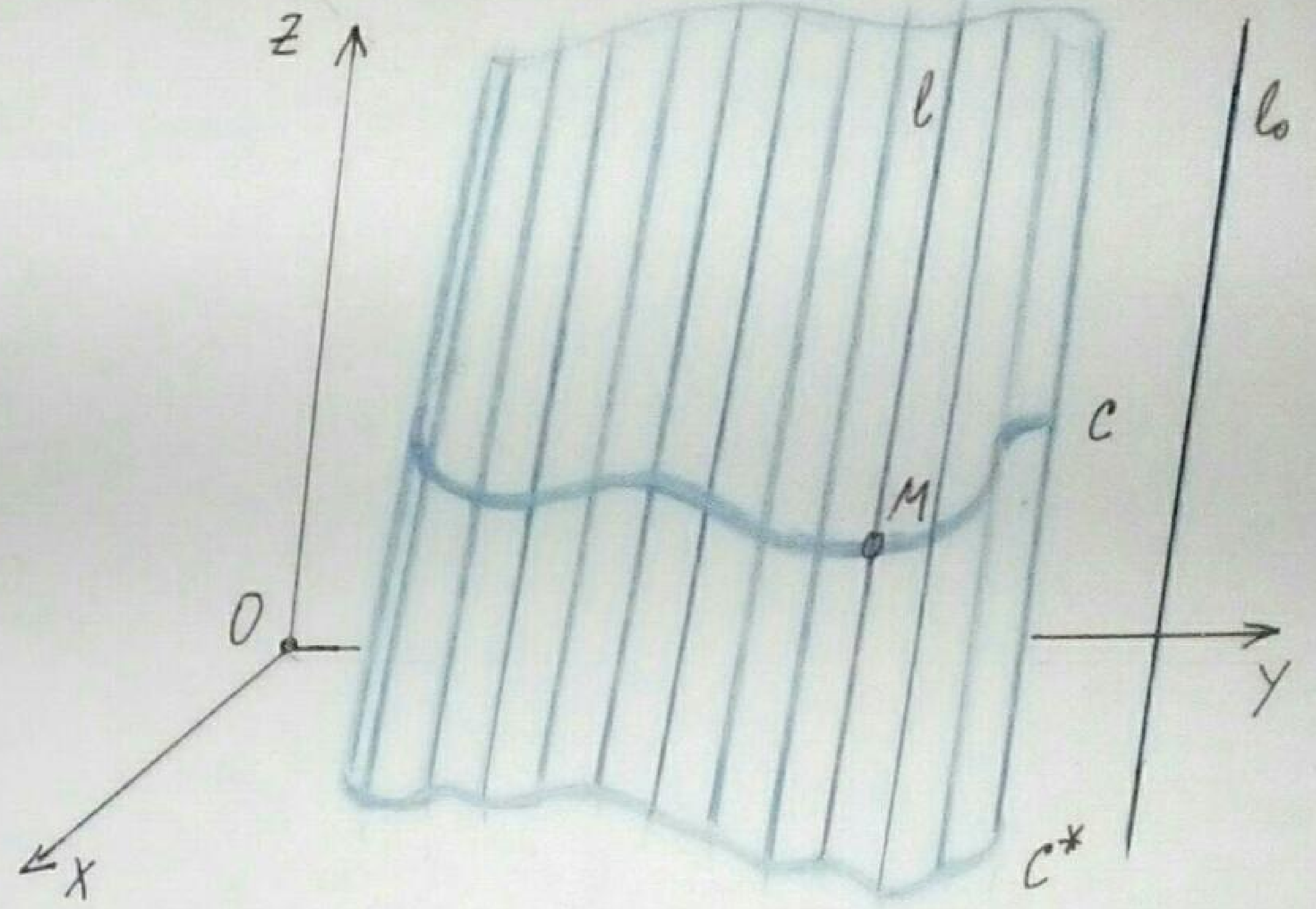
18. Цилиндрични, конични и ротационни повърхнини



Нека c е крива, а l_0 - права. Множеството от точките върху всички прави, които са успоредни на l_0 и пресичат c се нарича цилиндрична повърхнина. Кривата c се нарича управителна крива, а правите - образуващи на повърхнината.

Ще намерим аналитично задаване на цилиндрична повърхнина S.

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е афинна координатна система и спрямо K управителната крива c има уравнение

$$(1)\quad c: \begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases};$$

Без ограничение на общността считаме, че l_0 не е успоредна на Oxy. Тогава каноничните уравнения на образуваща l на S - $l \parallel l_0$ имат вида

$$(2)\quad l: \begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases},$$ т.е. векторът $\vec{v}(a,b,1) \parallel l_0 \parallel l$.

Ще намерим връзка между p и q, така че l да пресича c. 18.2.

Нека $l \cap c = M(x,y,z)$. Тогава координатите на M удовлетворяват (1) и (2) $\Rightarrow$ имаме

$$\begin{cases} f(az+p, bz+q, z) = 0 \\ g(az+p, bz+q, z) = 0. \end{cases}$$

Ако от горните уравнения елиминираме z получаваме връзка между p и q.

$$\varphi(p,q) = 0.$$

Но $p = x - az$, $q = y - bz$.

Следователно

$$(3) \quad \varphi(x-az, y-bz) = 0.$$

Това уравнение е уравнение на цилиндричната повърхнина S

Обратно: Всяко уравнение от вида (3) е уравнение на някаква цилиндрична повърхнина с управителна крива c^* с уравнение

$c^*: \begin{cases} \varphi(x-az, y-bz) \\ z = 0 \end{cases}$ и образуващи, успоредни на $\vec{v}(a,b,1)$.

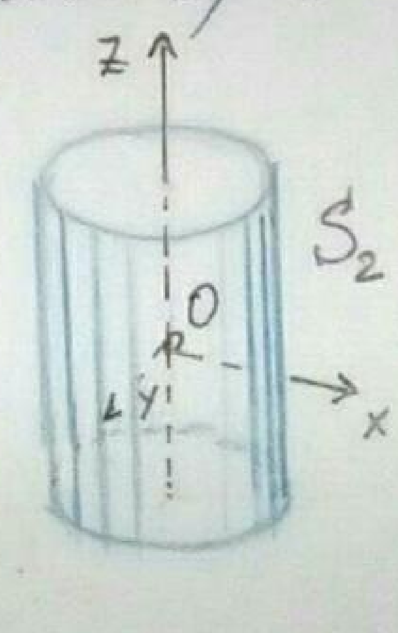
– цилиндричната повърхнина се определя от коя да е своя управителна крива – c^* е кривата, която се получава като пресечем S с координатната равнина Oxy.

По-специално, всяко уравнение от вида $F(x,y)=0$ е уравнение на цилиндрична повърхнина с образуващи, успоредни на оста Oz $(a=0, b=0)$ и управителна крива

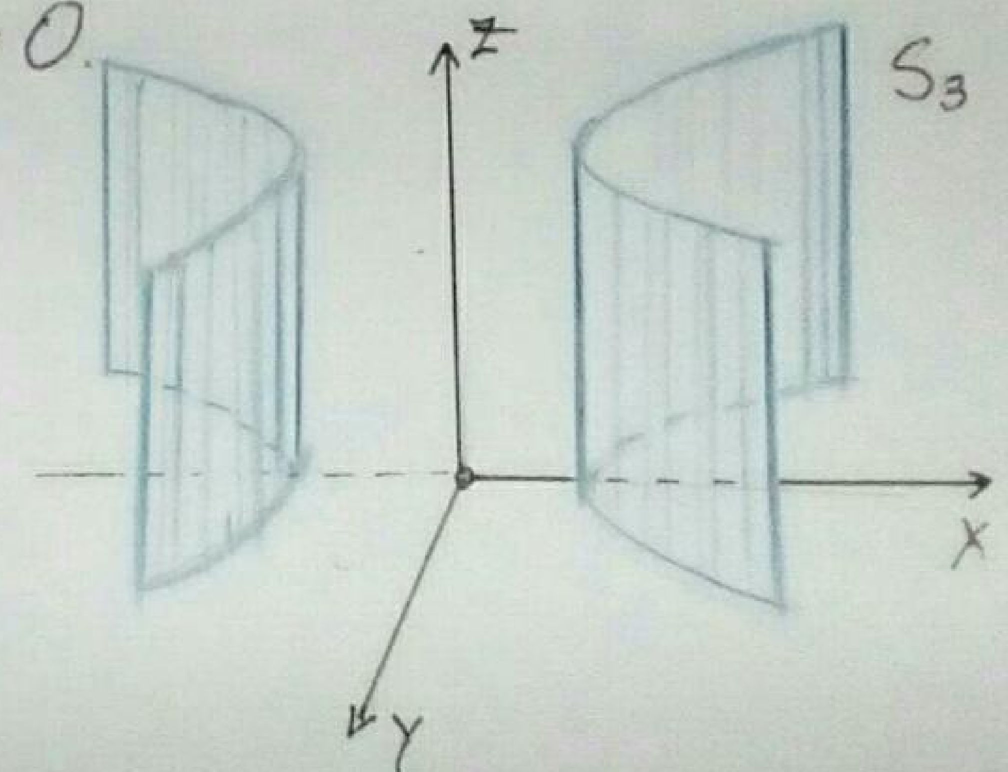
$$c: \begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

Примери 1. $S_1: x^2+z^2=R^2$ е уравнение на цилиндър с управителна крива в Oxz, $c_1: \begin{cases} x^2+z^2=R^2 \\ y=0 \end{cases}$, c_1 – окръжност с център O и радиус R.

Образуващите на S_1 са успоредни на на Oy.



2. $S_2: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ е уравнение на цилиндър с управителна крива – елипса c_2 в Oxy, $c_2: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0. \end{cases}$

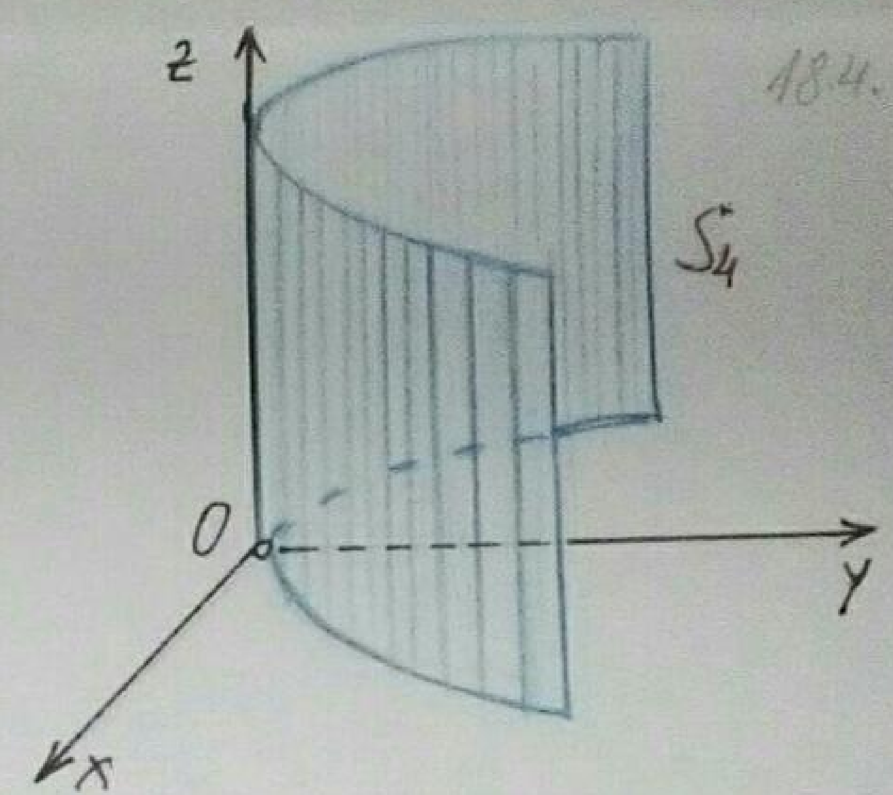


3. $S_3: \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ задава цилиндър с управителна крива – хипербола c_3 в Oxy

$$c_3: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0. \end{cases}$$

4. S_4 : $x^2 = 2py$ - уравнение на цилиндър с управителна крива - парабола c_4 в Oxy -

$c_4 : \begin{cases} x^2 = 2py \\ z = 0 \end{cases}$ с ос Oy.



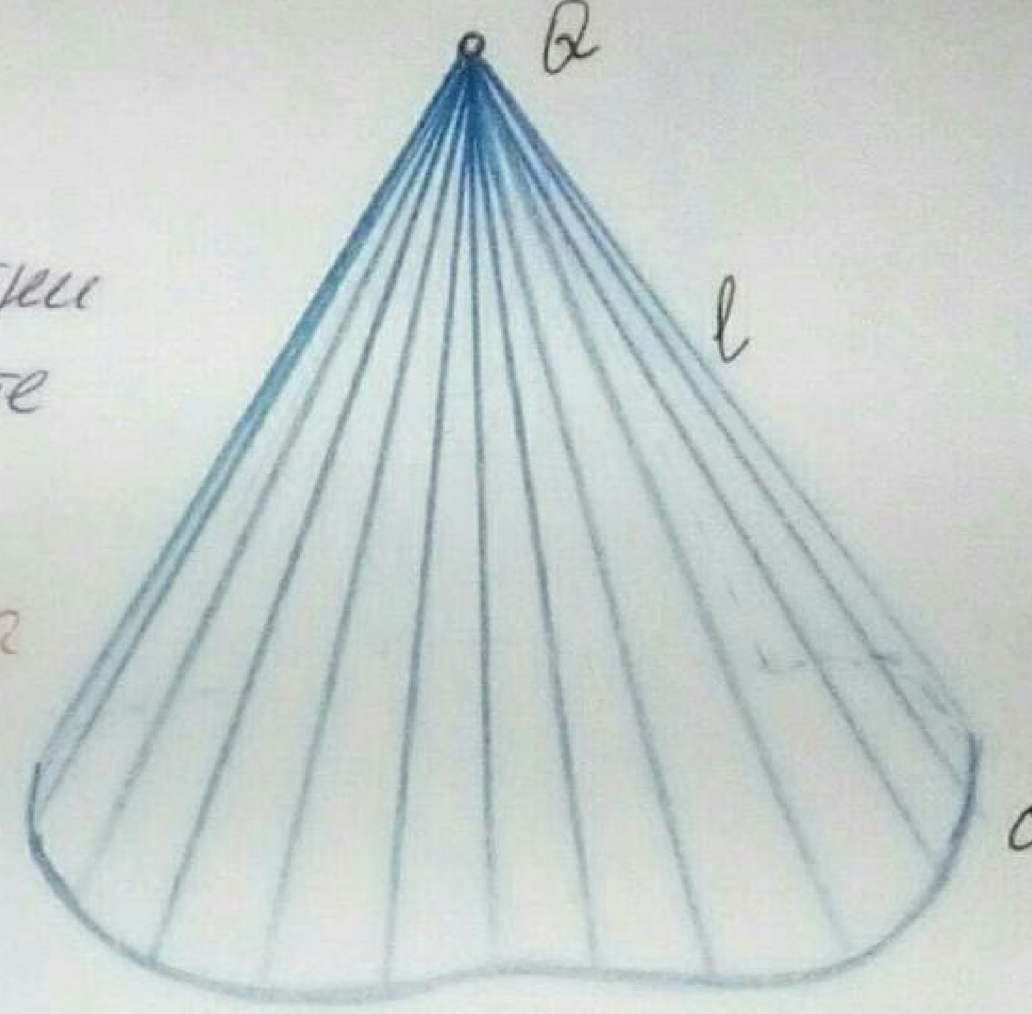
Цилиндрите S_2, S_3 и S_4 са с образуващи, успоредни на Oz.

5. S_5 : $z^2 = 2py$ задава цилиндър с управителна крива - парабола $c_5 : \begin{cases} z^2 = 2py \\ x = 0 \end{cases}$ в Oyz с ос Oy и образуващи, успоредни на Ox.

6. S_6 : $\dfrac{z^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ - цилиндър „стъпил“ в Oxz с управителна крива - хипербола $c_5 : \begin{cases} \dfrac{z^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$,

с образуващи успоредни на Oy.

Конични повърхнини



Нека Q и c са съответно неинцидентни точка и крива. Тогава множеството от точките върху всички прави, които минават през Q и пресичат c се нарича конична повърхнина (или конус); Q се нарича връх, а c – управителна крива на конуса.

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е афинна координатна система и спрямо нея върхът на конуса има координати $Q(x_0, y_0, z_0)$, управителната крива е с уравнение $c: \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$ и правите l през Q, пресичащи c – наречени образуващи са колинеарни с $\vec{p}(a,b,1)$ – т.е. $l \not\parallel Oxy$ (б.о.о.) $\Rightarrow$

$$l: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b, \quad \lambda \in (-\infty, \infty) \\ z = z_0 + \lambda \end{cases}$$

или $l: \begin{cases} x = x_0 + a(z - z_0) \\ y = y_0 + b(z - z_0) \end{cases}$

Като наложим условието l да пресича c – $l \cap c = M(x,y,z)$ получаване

$$(4)\begin{cases} f(x_0 + a(z-z_0), y_0 + b(z-z_0), z) = 0; \\ g(x_0 + a(z-z_0), y_0 + b(z-z_0), z) = 0 \end{cases}$$

След елиминация на z от (4) получаваме връзка между a и b.

$$\psi(a,b) = 0$$

От $a = \dfrac{x-x_0}{z-z_0}$, $b = \dfrac{y-y_0}{z-z_0}$ $\Longrightarrow$ (5) $\psi\left(\dfrac{x-x_0}{z-z_0}, \dfrac{y-y_0}{z-z_0}\right) = 0$

е уравнение на коничната повърхнина.

Не е трудно да се провери, че всяко уравнение от вида (5) е уравнение на конус с връх $Q(x_0, y_0, z_0)$ и управителна крива

$$c^*: \begin{cases} F\left(\dfrac{x-x_0}{z-z_0}, \dfrac{y-y_0}{z-z_0}\right); \\ z = 0 \end{cases}$$

– c^* е кривата, която се получава като пресечем конуса с координатната равнина Oxy.

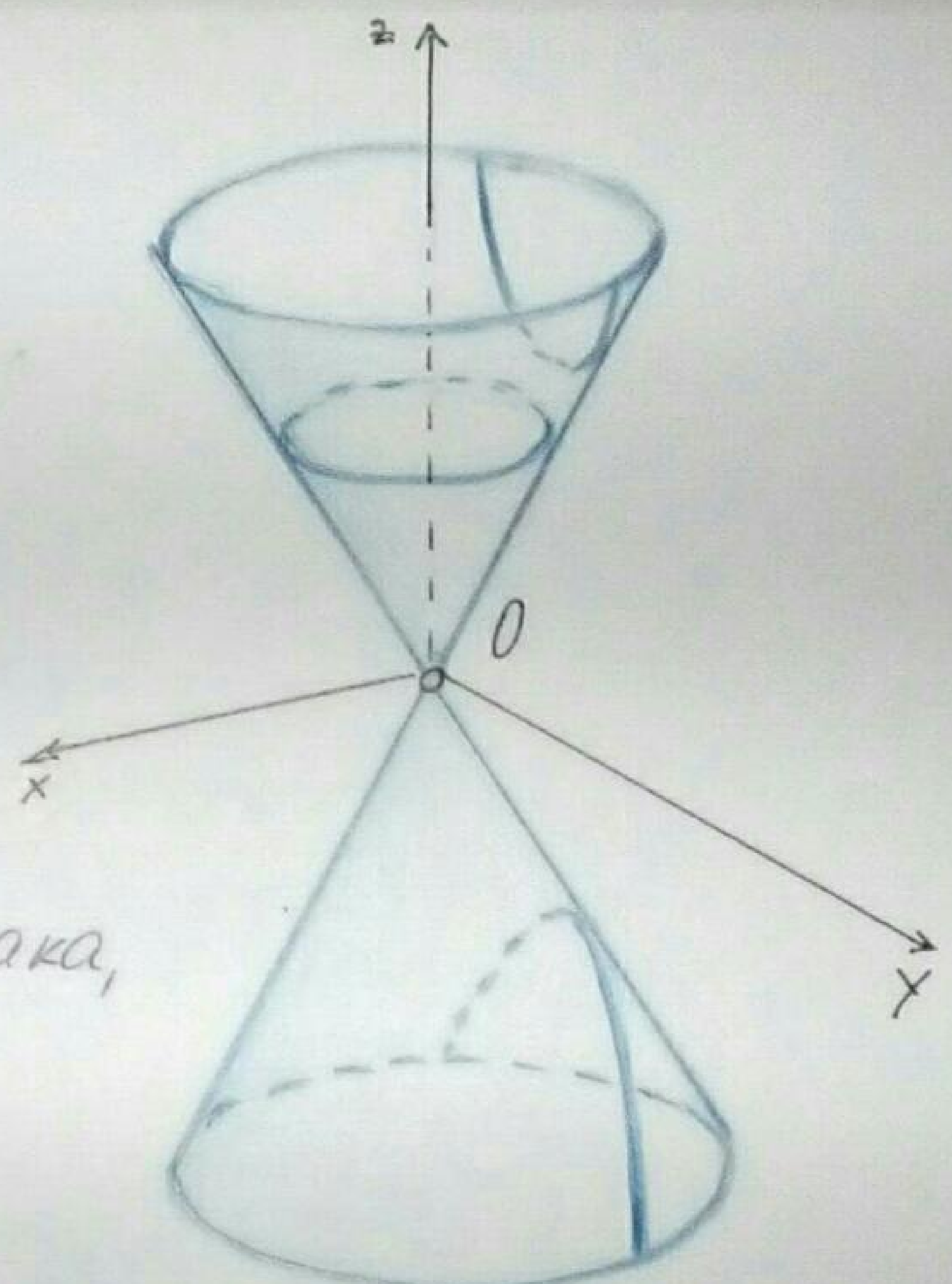
18.6.

Пример $K: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

е уравнение на конус с връх $O(0,0,0)$

Управителна крива е например елипсата

$$\mathcal{E}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = c \end{cases}$$



За управителна крива можем, също така, да вземем хиперболата X_1:

$$X_1: \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = a \end{cases}$$

или хиперболата X_2:

$$X_2: \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = b \end{cases}$$