Глава 7

Теореми (локална и интегрална) на Моавър-Лаплас

7.1 Локална теорема на Моавър-Лаплас

Теорема 7.1 *Нека $\sigma_n = \sqrt{npq} \to \infty$ в схема на Бернули с n опита и вероятност за успех p. Тогава за всяко $c > 0$ равномерно по всяко x от вида $x = \frac{k-np}{\sigma_n}$,такова, че $|x| \leq c$, където k е цяло число, е в сила:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}} = x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2}}(1 + o(1)),$$

където ν_n е броят на успехите в схема на Бернули (т.е. $\nu_n \in \mathbf{Bi}(n,p)$ с $\mathbf{E}\nu_n = np, \mathbf{D}\nu_n = npq$).

Доказателството на тази теорема е следствие от един по-общ резултат, известен в Теория на вероятностите като Централна Гранична Теорема (ЦГТ), който ще бъде доказан на по-късен етап[1].

---

[1]Означения:
$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - се нарича стандартна нормална (Гаусова) плътност, т.е. на $N(0,1)$, а:
$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - се нарича стандартна нормална (Гаусова) функция на разпределение.

Формула на Стирлинг:
$\ln n! = n \ln n + \ln \sqrt{2\pi n} - n + \alpha_n, \quad \alpha_n \in O(\frac{1}{n})$

$f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0 : \exists\ c > 0 : |f(x)| \leq c|g(x)|$

$f(x) \sim g(x), \quad x \to x_0$, ако $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1$

$f(x) = o(g(x)), \quad x \to x_0, \quad \forall\varepsilon > 0, \quad \forall x : |x - x_0| < \varepsilon$ е в сила $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$

$\log(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} + O(x^2)$.

7.2 Интегрална теорема на Моавър-Лаплас

Теорема 7.2 *При условията на Теорема 7.1, за произволни $a \leq b$ е в сила*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{a \leq \frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Доказателство: След еквивалентни преобразувания получаваме

$$\mathbf{P}\left\{a \leq \frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right\} = \mathbf{P}\{a\sqrt{npq} + np \leq \nu_k \leq b\sqrt{npq} + np\}.$$

Означаваме $l_1 =]np + a\sqrt{npq}[$ и $l_2 = [np + b\sqrt{npq}]$, където с $[x]$ означаваме най-голямото цяло число, което $[x] \leq x$, и с $]x[$ - най-малкото цяло число, което е $]x[gex$.

Тогава за търсената вероятност получаваме

$$\mathbb{P}\left\{a\sqrt{npq} + np \leq \nu_n \leq b\sqrt{npq} + np\right\} =$$

$$\sum_{k=l_1}^{l_2} \mathbb{P}(\nu_n = k) = \sum_{k=l_1}^{l_2} \mathbf{P}\left(\frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$\sum_{k=l_1}^{l_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_k^2}{2}} \Delta x_k \left(1 + O(\frac{1}{\sigma})\right),$$

където последното равенство следва от Локалната теорема на Моавър-Лаплас, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{\sigma}$, където $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$. При $n \to \infty$ последната сума клони към $\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

7.3 Теорема на Бернули (Слаб закон на големите числа)

Теорема 7.3 *Нека са изпълнени условията на Теорема 1.26. Тогава за произволно $\varepsilon > 0$ е изпълнено*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\nu_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

където ν_n е броят на успехите в схема на Бернули.

Доказателство: Имаме следната верига от съотношения

$$\mathbf{P}\left(\omega : \left|\frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}}\right| \leq \frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{-n\varepsilon}{\sqrt{npq}} \leq \frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) \overset{\text{изб.} c<\varepsilon\sqrt{n}}{\geq} \mathbb{P}\left\{-c \leq \frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq c\right\} \overset{\text{ИТМЛ}}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^{c} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \to 1,$$

когато $c \to \infty$.