Задачи за контролно 1 по висша алгебра

Задача 1. *За кои цели числа b частното* $\dfrac{11b+5}{5b+7}$ *също е цяло?*

Задача 2. *Докажете, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ числото $2^{3^n}+1$ се дели на 3^{n+1}, но не се дели на 3^{n+2}.*

Задача 3. *Решете уравнението $198x + 164y = 10$ в цели числа.*

Задача 4. *Четирима рибари уловили по-малко от 500 риби. Без да ги разделят, легнали да спят.*

През нощта се събудил първият рибар, разделил ги на четири равни купчини, като останала една риба в повече. Той хвърлил едната риба в морето, прибрал на скрито място една от купчините за себе си, а останалите три купчини събрал и оставил да се делят на сутринта.

След него се събудил вторият рибар, разделил (останалите) риби на четири равни купчини, като останала една риба в повече. Хвърлил едната риба в морето, прибрал една от купчините за себе си, а останалите три купчини събрал и оставил да се делят сутринта.

Абсолютно същото след него направил и третият рибар.

Накрая същото направил и четвъртият рибар.

Колко риби са останали на сутринта за разделяне?

Задача 5. *Решете ребуса НОС*НОС=АБАНОС, където на еднаквите букви отговарят еднакви цифри, а на различните букви - различни цифри.*

Задача 6. *Нека p и q са различни прости числа. Докажете, че $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.*

Задача 7. *Намерете всички нечетни прости числа p, такива че $15^{\frac{p-1}{2}} \equiv 12 \pmod{p}$.*

Задача 8. *Решете уравнението $\varphi(n) = 12$.*

Задача 9. *Нека $A = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid ac \neq 0\}$. Въвеждаме операция $\circ : A \times A \to A$, опеpделена от*

$(a_1, b_1, c_1) \circ (a_2, b_2, c_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1c_2, c_1c_2)$.

Докажете, че A е група относно $\circ$ и $H = \{(a,b,c) \in A \mid a = c\}$ е подгрупа на A.

Задача 10. *Нека $G = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{7}\}$. Въвеждаме операцията $* : G \times G \to G$, с равенството $a * b = a + b - 7ab$. Докажете, че $(G, *)$ е група.*

Намерете $a * a * a * \ldots * a$, където има n операции $*$.

Задача 11. *В множеството $\mathbb{R}^2$ въвеждаме операция $\oplus$ по правилото:*

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, be^{-c} + de^{-a})$$

Докажете, че $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ е група.

Задача 12. *Нека $H = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3,\ (a,b) \neq (0,0)\}$.*

Докажете, че H е циклична група относно умножението на матрици.

Задача 13. *Нека* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Означаваме с $G = \langle A, B \rangle$ *подгрупата на* $GL_2(\mathbb{R})$, *породена от матриците* A *и* B. *Намерете реда на* G, *както и редовете на всичките ѝ елементи.*

Колко различни подгрупи има G?

Задача 14. *Докажете, че групите* $\mathbb{Z}_{143} \times \mathbb{Z}_7$ *и* $\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{77}$ *са изоморфни.*

Задача 15. *Намерете всички възможни стойности на реда на елемент от симетричната група* S_7.

Задача 16. *Нека* G *е група и* H *е подгрупа. Въвеждаме бинарна* $\sim$ *релация над* G:

$$a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$$

Докажете, че $\sim$ *е релация на еквивалентност. Намерете класовете на еквивалентност по тази релация.*

Задача 17. *Намерете центъра* Z *на групата на кватернионите* Q_8. *Кои са съседните класове на* Q_8 *по* Z? *Напишете таблицата за умножение на съседни класове. На коя група е изоморфна факторгрупата* Q_8/Z?

Задача 18. *Нека* $G = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid ab \neq 0\}$. *Въвеждаме операция в* G *по правилото*

$$(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = (a_1a_2, b_1b_2, a_1c_2 + c_1b_2)$$

Нека $H = \{(a, b, c) \in G \mid a = 1\}$ *и* $K = \{(a, b, c) \in G \mid a = b\}$.

Докажете, че G *е неабелева група,* $H \lhd G$, $K \lhd G$ *и* $G/H \cong \mathbb{R}^* \cong G/K$.