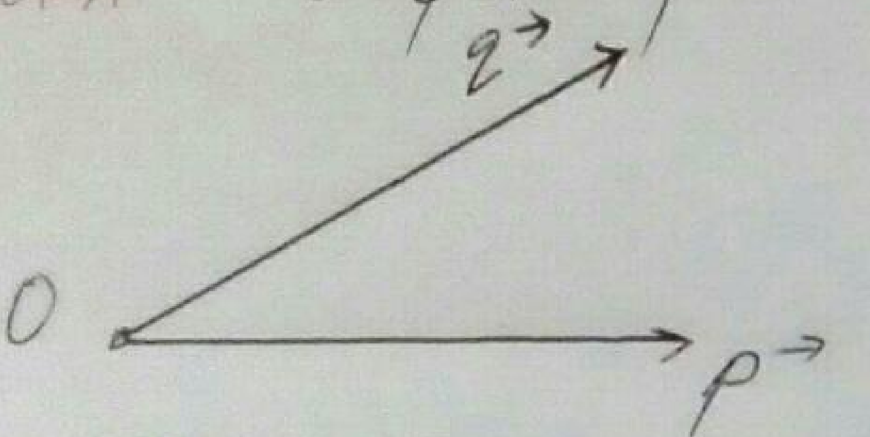
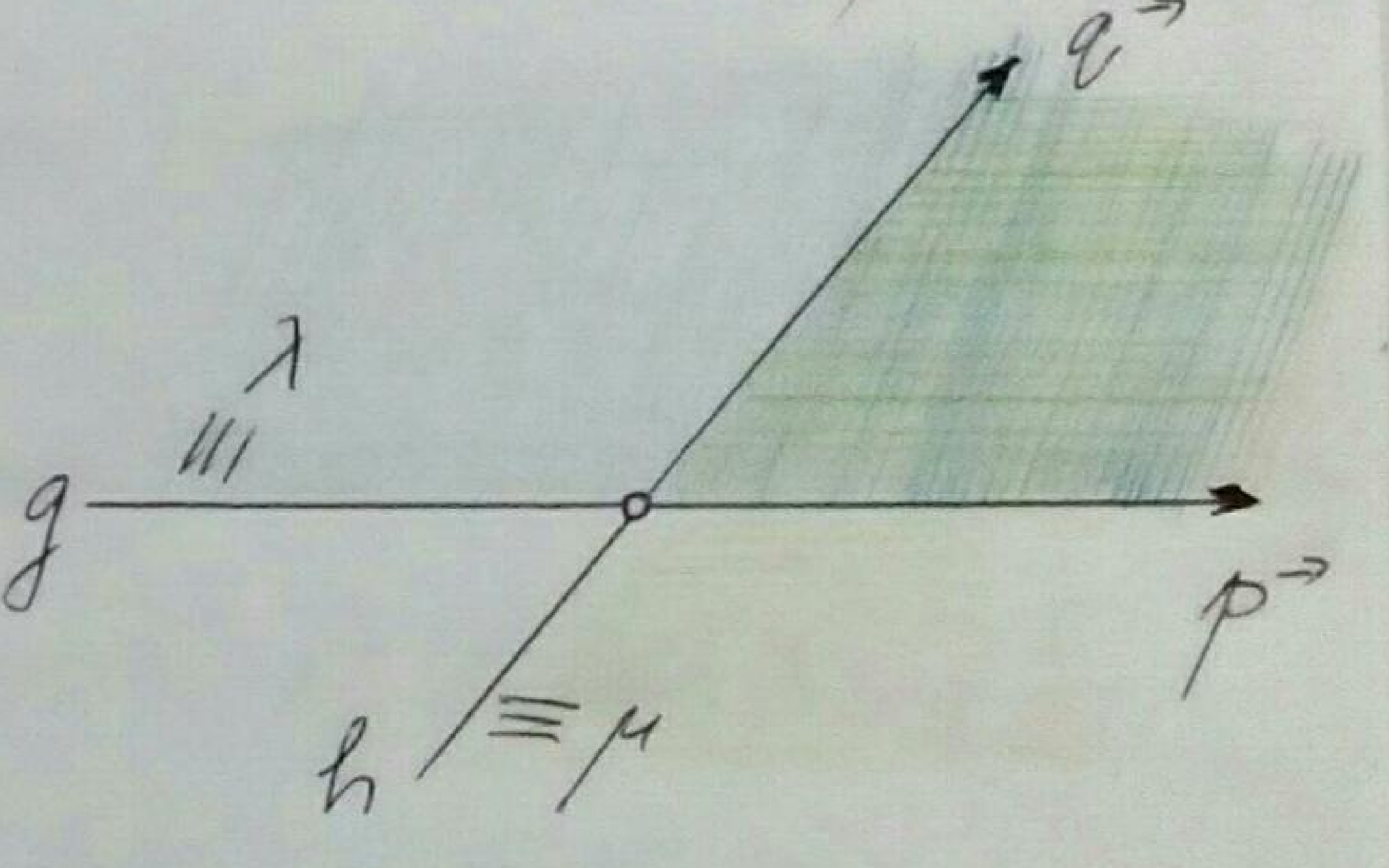
5.2. Ориентация в равнината

Ъгъл – дефинира се като два лъча с общо начало O, а понякога като част от равнината, оградена от два лъча с общо начало.

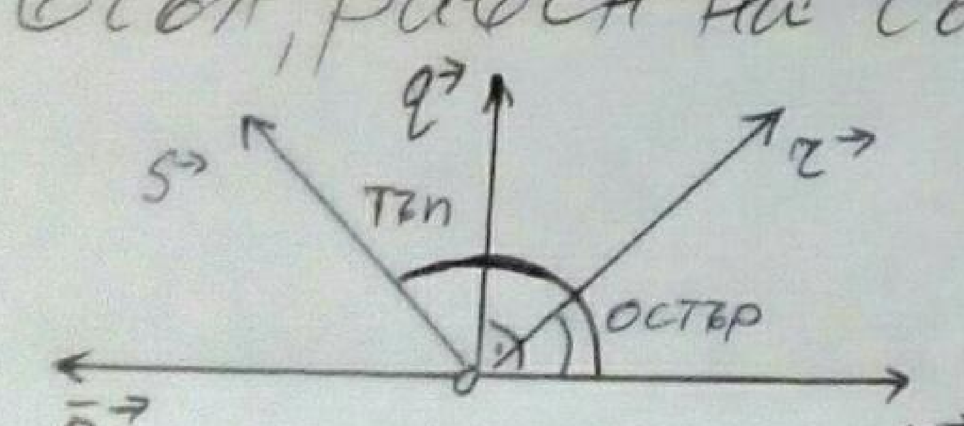


За да се избегне недоразумението коя от двете части се има предвид се въвежда понятието вътрешност на ъгъл по следния начин.

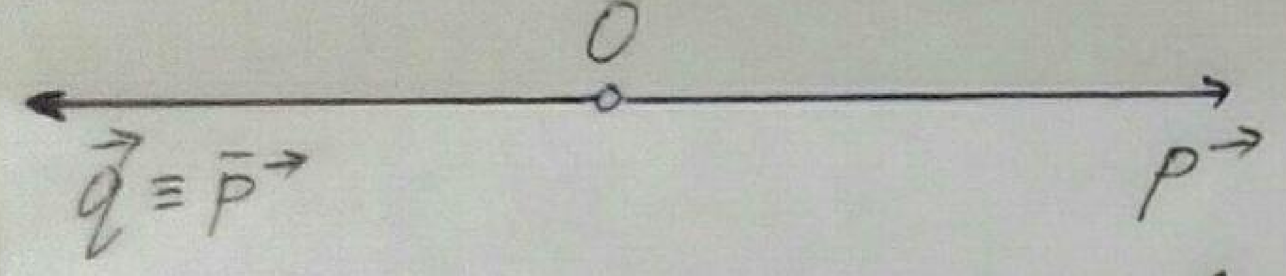
Нека g е правата, съдържаща лъча $\vec{p}$, а h – правата, съдържаща $\vec{q}$, λ – полуравнината с контур g, съдържаща $\vec{q}$, μ – полуравнината, съдържаща лъча $\vec{p}$. Тогава вътрешност на $\measuredangle Opq$ се нарича сечението на λ и μ – $\lambda \cap \mu$.



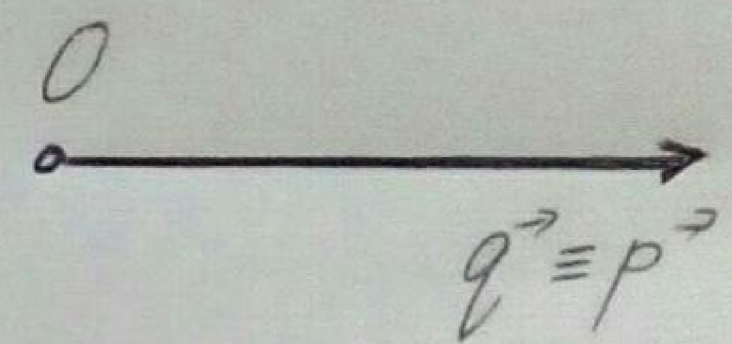
Ъгъл, равен на съседния си се нарича прав ъгъл. Ако ъгълът е по-малък (по-голям) от прав, то той се нарича остър (тъп) ъгъл.



Ако $\vec{q} \equiv \bar{p}$, то ъгълът се нарича изправен ъгъл

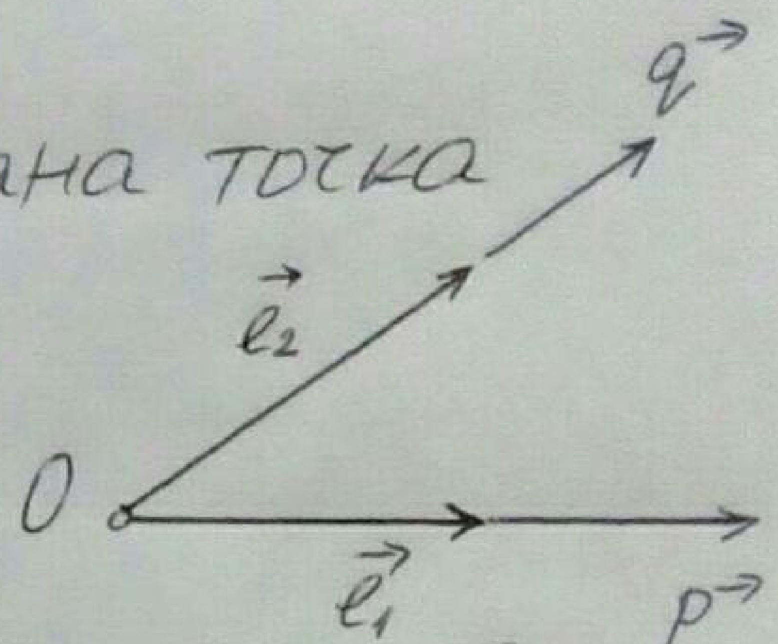


и нулев ъгъл, ако $\vec{q} \equiv \vec{p}$



Насочен ъгъл $\sphericalangle \widehat{pq}$, $\vec{q} \neq \vec{p}, \bar{p}$ е ъгъл, в който рамото $\vec{p}$ е избрано за първо, а $\vec{q}$ – за второ (аналог на насочена отсечка).

Всяка наредена база $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ във всяка фиксирана точка задава насочен ъгъл.



Нека $\alpha = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ и $\beta = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ са наредени бази и $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ е матрицата на прехода от α към β - $\alpha \xrightarrow{C} \beta$ $\Rightarrow \det C \neq 0$. Ако $\det C > 0$ казваме, че α и β са еднакво ориентирани. Ако $\det C < 0$ – противоположно ориентирани.

Нека α, β и γ са наредени бази, C и D матриците на преход $\alpha \xrightarrow{C} \beta$, $\beta \xrightarrow{D} \gamma$.

Имаме: 1. $\alpha \xrightarrow{E} \alpha$, където $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\det E = 1 \Rightarrow \alpha$ е ориентирана сама със себе си

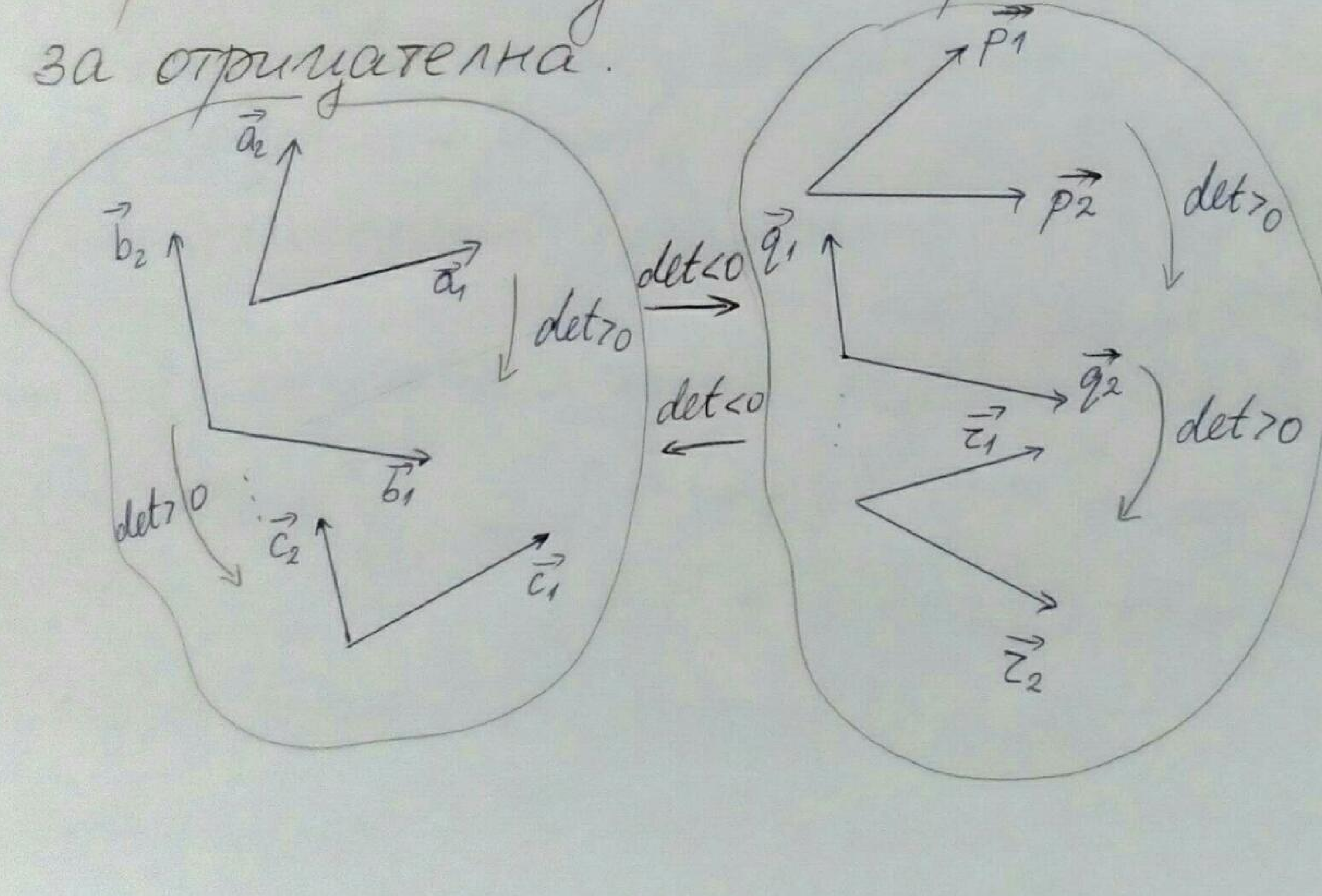
2. Ако $\alpha \xrightarrow{C} \beta$, то $\beta \xrightarrow{C^{-1}} \alpha \Rightarrow \alpha$ и β са еднакво ориентирани $\Leftrightarrow \beta$ и α са еднакво ориентирани ($CC^{-1} = E \Rightarrow \det C . \det C^{-1} = 1 > 0$)

3. Нека $\alpha \xrightarrow{C} \beta$, $\det C > 0$, т.е. α и β са еднакво ориентирани. Нека също така $\beta \xrightarrow{D} \gamma$, $\det D > 0$ – β и γ еднакво ориентирани. Тогава матрицата на прехода от α към γ е произведението на матриците DC (D след C). $\alpha \xrightarrow{DC} \gamma$. От $\det(DC) = \det D . \det C > 0$ следва, че α и γ са еднакво ориентирани.

За наредените бази $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ и $(\vec{a}_2, \vec{a}_1)$ матрицата на прехода C от първата към втората база е $C = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. (вж (2) – $\vec{a}_2 = 0.\vec{a}_1 + 1.\vec{a}_2$, $\vec{a}_1 = 1.\vec{a}_1 + 0.\vec{a}_2$). От $\det C = -1 < 0$ следва, че тези бази са противоположно ориентирани.

От 1., 2. и 3. получаваме, че всяка наредена база е еднакво ориентирана с $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ или с $(\vec{a}_2, \vec{a}_1)$.

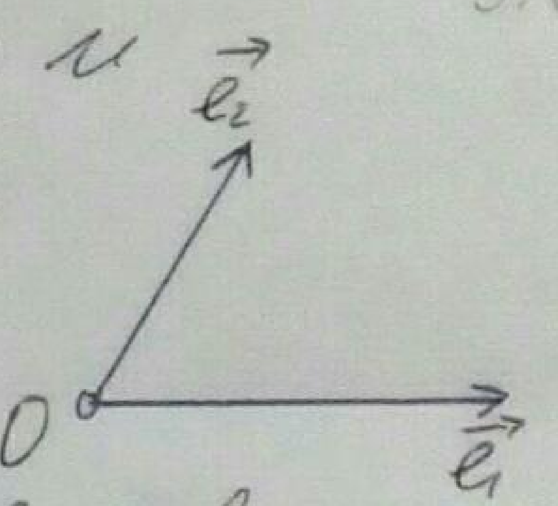
По този начин множеството от насочените ъгли се разделя на два класа (на еквивалентност) наречени посоки на въртене в равнината. Едната избираме за положителна, а другата за отрицателна.



Всеки клас съдържа само еднакво ориентирани бази.

От единия към другия клас се преминава с отрицателна детерминанта.

Нека $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ е фиксирана координатна система и определената от нея посока е избрана за положителна



Алгебрична мярка на насочения $\measuredangle \widehat{pq}$ спрямо K наричаме мярката на $\measuredangle pq$ взета с „+" или „-" в зависимост от ориентацията на ъгъла спрямо K (мярката на $\measuredangle pq$ – $\mu(\measuredangle pq)$ е положително число). Означаваме $\bar{\mu}(\measuredangle \widehat{pq})$. Ясно е, че

$$\bar{\mu}(\measuredangle \widehat{pq}) = -\bar{\mu}(\measuredangle \widehat{qp}).$$

При фиксирана положителна посока на въртене можем да дефинираме ориентиран ъгъл $\measuredangle(\widehat{p,q})_0$, съответен на насочения ъгъл $\measuredangle(\widehat{p,q})$ по следния начин. Мярката $\mu(\measuredangle \widehat{p,q})$ се дефинира като

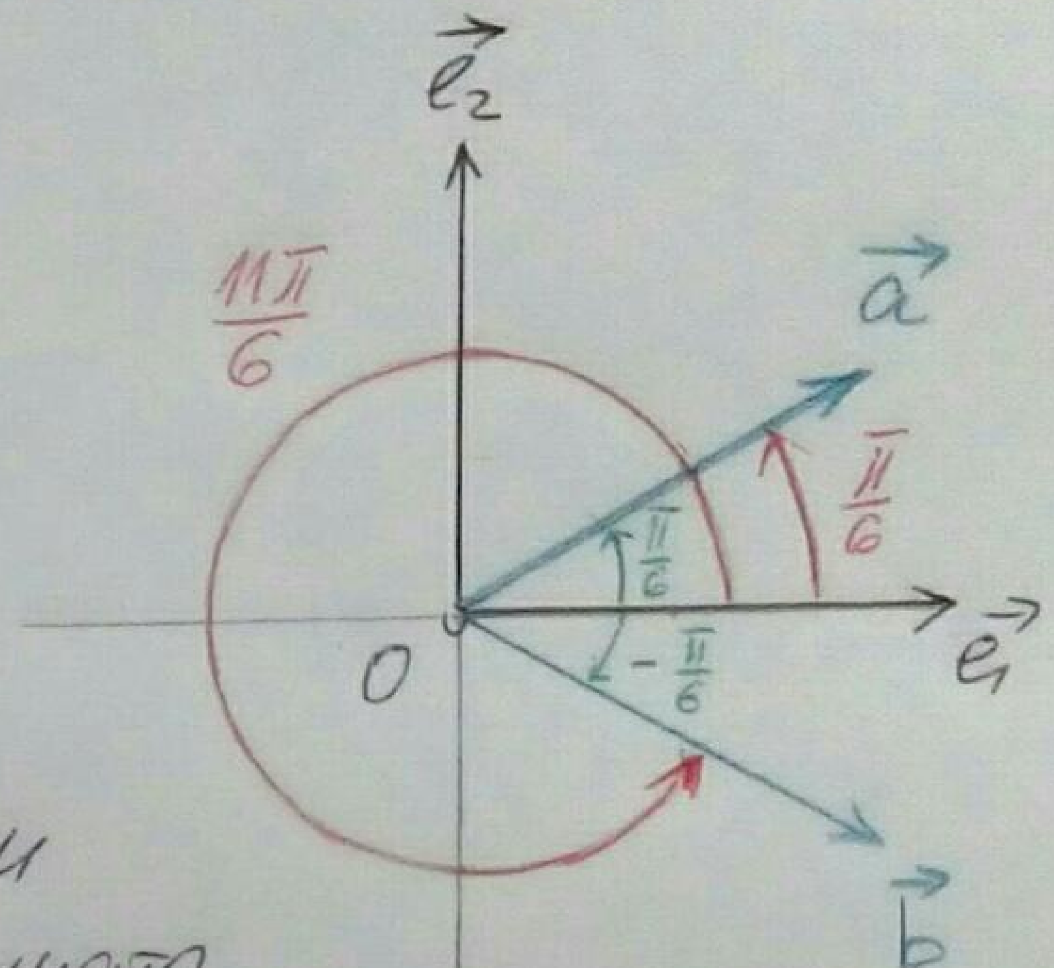
$$\mu(\measuredangle \widehat{p,q})_0 := \begin{cases} \bar{\mu}(\measuredangle \widehat{pq}) & \text{при } \bar{\mu}(\measuredangle \widehat{pq}) > 0 \\ 2\pi + \bar{\mu}(\measuredangle \widehat{pq}) & \text{при } \bar{\mu}(\measuredangle \widehat{pq}) < 0 \end{cases}$$

Следователно $0 < \mu(\measuredangle \widehat{pq})_0 < 2\pi$

Дефинираме 1. На нулев ъгъл, т.е. $\vec{p}$ и $\vec{q}$ еднопосочни $\mu(\measuredangle \widehat{p,q}) := 0$

2. На изправен ъгъл, т.е $\vec{p}$ и $\vec{q}$ противопосочни мярката е $\mu(\measuredangle \widehat{p,q}) := \pi$

Пример: Нека $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ е ортонормирана координатна система и определената от нея посока е положителна.



Спрямо K са дадени векторите $\vec{a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $\vec{b}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Мярката на $\measuredangle \vec{e_1}\vec{a}$, както и на $\measuredangle \vec{e_1}\vec{b}$ е $\frac{\pi}{6}$ – $\mu(\measuredangle \vec{e_1}\vec{a}) = \mu(\measuredangle \vec{e_1}\vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

Тъй като насоченият ъгъл $\measuredangle \widehat{\vec{e_1}\vec{a}}$ принадлежи на положителната посока на въртене в равнината, то алгебричната му мярка е $\bar{\mu}(\measuredangle \widehat{\vec{e_1}\vec{a}}) = \mu(\measuredangle(\vec{e_1},\vec{a})) = \frac{\pi}{6}$.

Насоченият ъгъл $\measuredangle \widehat{\vec{e_1}\vec{b}}$ принадлежи на отрицателната посока и за алгебричната му мярка имаме $\bar{\mu}(\measuredangle \widehat{\vec{e_1}\vec{b}}) = -\mu(\measuredangle(\vec{e_1}\vec{a})) = -\frac{\pi}{6}$.

За ориентирания ъгъл $\measuredangle(\widehat{\vec{e_1},\vec{a}})_0$ имаме $\mu(\measuredangle \widehat{\vec{e_1},\vec{a}})_0 = \frac{\pi}{6}$, а за ориентирания ъгъл $\measuredangle(\widehat{\vec{e_1}\vec{b}})_0$ имаме

$$\mu(\measuredangle(\widehat{\vec{e_1},\vec{b}}))_0 = 2\pi + \bar{\mu}(\measuredangle \widehat{\vec{e_1}\vec{b}}) = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$$

За самостоятелна работа: Намерете мерките на ориентираните ъгли $\measuredangle(\widehat{\vec{a},\vec{b}})_0$; $\measuredangle(\widehat{\vec{b},\vec{e_2}})_0$; $\measuredangle(\widehat{\vec{e_2},\vec{a}})_0$