Лекция №7

2.3 Теорията на неподвижните точки за произволна ОС

Тук по същество ще повторим дефинициите и твърденията от последните два раздела 1.4 и 1.5 на предишната глава, като този път ще работим не в познатата ни ОС $(\mathcal{F}_n,\ \subseteq,\ \emptyset^{(n)})$, а в произволна област на Скот. Доказателствата на твърденията в този раздел също ще бъдат много подобни на съответните им, които доказахме дотук.

2.3.1 Непрекъснати изображения в ОС

Ще предполагаме, че са фиксирани две области на Скот

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathcal{F},\ \leqslant,\ \Omega) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\mathcal{F}'} = (\mathcal{F}',\ \leqslant',\ \Omega').$$

Съвсем умишлено ги означаваме с $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{F}'}$ (а не с $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A_1}, \dots$, както беше в предишния раздел), защото резултатите, които сега ще получим, ще прилагаме за области на Скот, които са с носители — множества от функции. Ще ни интересуват основно множествата $\mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_n^{\perp}$ и техните декартови произведения.

Когато областта на Скот е произволна (в смисъл, неуточнена), точните горни граници в нея ще означаваме с lub. Когато сме в ОС $(\mathcal{F}_n,\ \subseteq,\ \emptyset^{(n)})$, ще използваме добре познатото ни означение $\bigcup$ за точна горна граница. Накрая, ако областта на Скот е $(\mathcal{F}_n^{\perp},\ \sqsubseteq,\ \Omega^{(n)})$, точната горна граница ще отбелязваме със знака $\bigsqcup$. Същите означения ще използваме и при декартови произведения на ОС от първия и втория тип.

Изображенията, които ще разглеждаме, ще действат от $\mathcal{F}$ към $\mathcal{F}'$. Вече отбелязахме, че тези ОС в нашите приложения ще са свързани с функции, затова изображенията в тях ще наричаме отново *оператори*.

Определение 2.3. Ще казваме, че операторът $\Gamma\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ е *монотонен*, ако за всяка двойка $f, g \in \mathcal{F}$ е изпълнено:

$$f \leqslant g \implies \Gamma(f) \leqslant' \Gamma(g).$$

Определение 2.4. Операторът $\Gamma\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ ще наричаме *непрекъснат*, ако за всяка монотонно растяща редица $f_0 \leqslant f_1 \leqslant \dots$ в $\mathcal{F}$ е изпълнено:

$$\Gamma(\underbrace{\ lub_n\, f_n\ }_{\text{т.г.гр. е в } \mathcal{F}}) \;=\; \underbrace{lub_n\, \Gamma(f_n)}_{\text{т.г.гр. е в } \mathcal{F}'}. \tag{2.7}$$

Забележка. В горното равенство имаме предвид, че точната горна граница $lub\ \Gamma(f_n)$ на редицата в дясно $\{\Gamma(f_n)\}_n$ съществува и съответно е равна на $\Gamma(\underset{n}{lub}\ f_n)$.

Твърдение 2.7. Всеки непрекъснат оператор $\Gamma\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ е монотонен.

Доказателство. Да фиксираме $f, g \in \mathcal{F}$, такива че $f \leqslant g$. Трябва да покажем, че $\Gamma(f) \leqslant' \Gamma(g)$. Да разгледаме монотонно растящата редица

$$f \leqslant g \leqslant g \leqslant \dots,$$

чиято т.г. граница очевидно е g. Прилагаме определението за непрекъснатост на Γ към тази редица. Така получаваме, че $\Gamma(g)$ ще е точна горна граница на редицата

$$\Gamma(f), \Gamma(g), \Gamma(g) \dots$$

Но тази редица има точно два различни члена — $\Gamma(f)$ и $\Gamma(g)$. Това означава, че $\Gamma(f) \leqslant' \Gamma(g)$ и значи Γ наистина е монотонен. $\square$

Да отбележим, че ако приложим *монотонния* оператор $\Gamma\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ към елементите на монотонно растящата редица

$$f_0 \leqslant f_1 \leqslant \dots$$

с граница f, то той ще запази наредбата на нейните елементи, т.е. ще имаме

$$\Gamma(f_0) \leqslant' \Gamma(f_1) \leqslant' \dots .$$

Но $\boldsymbol{\mathcal{F}'} = (\mathcal{F}',\ \leqslant',\ \Omega')$ е област на Скот и там наредбата $\leqslant'$ е пълна. Следователно редицата $\{\Gamma(f_n)\}_n$ ще има точна горна граница — да я означим с g.

Ние имаме, че за всяко n $f_n \leqslant f$ и следователно отново за всяко n $\Gamma(f_n) \leqslant' \Gamma(f)$. Последното означава, че $\Gamma(f)$ е горна граница за редицата $\{\Gamma(f_n)\}_n$, но g беше точната ѝ горна граница, и значи $\Gamma(f) \leqslant' g$.

Получихме, че и при произволна област на Скот за всеки монотонен оператор Γ е изпълнено

$$\underset{n}{lub}\ \Gamma(f_n) \ \leqslant' \ \Gamma(\underset{n}{lub}\ f_n).$$

Това, което в добавка ни дава *непрекъснатостта* на Γ е, че горното неравенство се превръща в равенство.

В бъдеще ще ни интересуват ОС, които са декартово произведение на други ОС. За изображенията в тях ще ни е необходима операцията *декартово произведение на оператори.* За целта да фиксираме $k+1$ области на Скот

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathcal{F},\ \leqslant,\ \Omega),\ \boldsymbol{\mathcal{F}_1} = (\mathcal{F}_1,\ \leqslant_1,\ \Omega_1),\ \dots\ ,\ \boldsymbol{\mathcal{F}_k} = (\mathcal{F}_k,\ \leqslant_k,\ \Omega_k).$$

Да отбележим специално, че множествата $\mathcal{F}_1, \dots \mathcal{F}_k$ са съвършено *произволни* и нямат връзка с означението $\mathcal{F}_i$ за множеството от всички частични функции на i аргумента.

Нека са ни дадени и k на брой оператора, действащи от $\mathcal{F}$ към всяко от множествата $\mathcal{F}_i$:

$$\Gamma_i\colon\ \mathcal{F} \longrightarrow\ \mathcal{F}_i,\ i = 1, \dots, k.$$

Да дефинираме оператор $\Gamma\colon\ \mathcal{F}\ \longrightarrow\ \mathcal{F}_1 \times \dots \times \mathcal{F}_k$ по следния начин:

$$\Gamma(f)\ \stackrel{\text{деф}}{=}\ (\Gamma_1(f), \dots, \Gamma_k(f)).$$

Този оператор ще означаваме така:

$$\Gamma\ =\ \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_k$$

и ще наричаме *декартово произведение* на операторите $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$. Да отбележим, че съгласно *Твърдение* 2.5, декартовото произведение

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_1} \times \dots \times \boldsymbol{\mathcal{F}_k}$$

на областите на Скот $\boldsymbol{\mathcal{F}_1}, \dots, \boldsymbol{\mathcal{F}_k}$ също е област на Скот и следователно можем да говорим за непрекъснатост на горния оператор Γ. Наредбата в домейна $\mathcal{F}_1 \times \dots \times \mathcal{F}_k$ на тази ОС е покомпонентната наредба, така както я дефинирахме в раздел 2.2.1.

При горните означения:

Твърдение 2.8. Ако операторите $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ са непрекъснати, то тяхното декартово произведение $\Gamma = \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_k$ също е непрекъснат оператор.

Доказателство. Да вземем произволна монотонно растяща редица в $\mathcal{F}$

$$f_0 \leqslant f_1 \leqslant \dots.$$

Трябва да покажем, че $\Gamma(\underset{n}{lub}\ f_n) = \underset{n}{lub}\ \Gamma(f_n)$. Понеже всеки от операторите Γ_i е непрекъснат в ОС $\boldsymbol{\mathcal{F}_i}$, то за всяко $i = 1, \dots, k$ ще е изпълнено

$$\Gamma_i(\underset{n}{lub}\ f_n) = \underset{n}{lub}\ \Gamma_i(f_n).$$

Тогава ще имаме последователно

$$\Gamma(\underset{n}{lub}\ f_n)\ \stackrel{\text{деф}\ \Gamma}{=}\ (\Gamma_1(\underset{n}{lub}\ f_n), \dots, \Gamma_k(\underset{n}{lub}\ f_n)\ )\ =\ (\underset{n}{lub}\,\Gamma_1(f_n), \dots, \underset{n}{lub}\,\Gamma_k(f_n))$$

$$\stackrel{\text{деф}\ lub}{=}\ \underset{n}{lub}\ \underbrace{(\Gamma_1(f_n), \dots, \Gamma_k(f_n))}_{(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_k)(f_n)}\ =\ \underset{n}{lub}\ \underbrace{(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_k)}_{\Gamma}(f_n)\ = \underset{n}{lub}\ \Gamma(f_n).$$

Под "деф lub" по-горе имаме предвид условието (2.3), с което се дефинира точната горна граница в декартово произведение на ОС. $\square$

2.3.2 Теорема на Кнастер–Тарски за произволна ОС

Да фиксираме една област на Скот $\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}, \ \leqslant, \ \Omega)$ и нека $\Gamma\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ е изображение в носителя на тази ОС. Определенията за неподвижна и преднеподвижна точка, както и за най-малка (пред)неподвижна точка на Γ, които знаем от раздел 1.4, се пренасят директно.

Казваме, че $f \in \mathcal{F}$ е *неподвижна точка* на Γ, ако

$$\Gamma(f) = f.$$

Казваме, че $f \in \mathcal{F}$ е *преднеподвижна точка* на Γ, ако

$$\Gamma(f) \leqslant f.$$

Казваме, че f е *най-малка неподвижна точка* на оператора Γ, ако:

1) f е неподвижна точка на Γ;

2) за всяка неподвижна точка g на Γ е вярно, че $f \leqslant g$.

Казваме, че f е *най-малка преднеподвижна точка* на оператора Γ, ако:

1) f е преднеподвижна точка на Γ;

2) за всяка преднеподвижна точка g на Γ е вярно, че $f \leqslant g$.

Лесно се вижда, че ако съществува, най-малката неподвижна точка на Γ е единствена. Ще я означаваме отново с f_Γ. Нека имаме предвид, обаче, че когато множеството $\mathcal{F}$, в което действа Γ, е някакво декартово произведение $\mathcal{F}_1 \times \cdots \times \mathcal{F}_k$, то f_Γ всъщност ще е *вектор* $(f_1, \ldots, f_k)$.

Да формулираме и централния резултат за този раздел — обобщената Теорема на Кнастер-Тарски (или Кнастер-Тарски-Клини), чрез която ще дефинираме денотационна семантика.

Теорема 2.1. (Теорема на Кнастер-Тарски за произволна ОС) Нека $\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}, \ \leqslant, \ \Omega)$ е област на Скот, а $\Gamma : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ е непрекъснат оператор. Тогава Γ притежава най-малка неподвижна точка f_Γ, за която е изпълнено:

$$f_\Gamma \ = \ \underset{n}{lub}\, \Gamma^n(\Omega).$$

В добавка, f_Γ е и най-малката преднеподвижна точка на оператора.

Доказателство. Разсъжденията следват тези от доказателството на *Теорема* 1.1 от раздел 1.4. Отново за по-кратко означаваме $\Gamma^n(\Omega)$ с f_n. Тогава от равенствата

$$f_{n+1} \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma^{n+1}(\Omega) = \Gamma(\Gamma^n(\Omega)) = \Gamma(f_n)$$

получаваме, че редицата $\{f_n\}_n$ удовлетворява рекурентната връзка

$$\left| \begin{array}{l} f_0 = \Omega \\ f_{n+1} = \Gamma(f_n). \end{array} \right.$$

Тази редица е монотонно растяща, т.е. за всяко n имаме $f_n \leqslant f_{n+1}$ — да го проверим с бърза индукция по n. Наистина, при $n = 0$ това е така, защото $f_0 = \Omega$, и понеже Ω е най-малкият елемент на $\mathcal{F}$, то $\Omega \leqslant f_1$.

Сега ако приемем, че за някое $n \in \mathbb{N}$

$$f_n \leqslant f_{n+1},$$

то от това, че Γ е непрекъснат, ще имаме съгласно *Твърдение* 2.7, че той е и монотонен, и като го приложим към двете страни на горното неравенство, ще получим

$$\underbrace{\Gamma(f_n)}_{f_{n+1}} \leqslant \underbrace{\Gamma(f_{n+1})}_{f_{n+2}},$$

или все едно, $f_{n+1} \leqslant f_{n+2}$. Вече можем да твърдим, че редицата

$$f_0 \ \leqslant \ f_1 \leqslant \ \dots$$

е монотонно растяща. Но понеже $(\mathcal{F},\ \leqslant,\ \Omega)$ е област на Скот, там наредбата $\leqslant$ е пълна, и следователно тази редица има точна горна граница

$$g \ = \ \underset{n}{lub}\ f_n.$$

Ще покажем, че g е най-малката неподвижна точка на Γ.

Това, че g е неподвижна точка, се вижда от следната верига равенства:

$$\begin{aligned} \Gamma(g) &\stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma(\underset{n}{lub}\ f_n) \ = \ \underset{n}{lub}\ \Gamma(f_n) \ = \ \underset{n=0}{\overset{\infty}{lub}}\ f_{n+1} \\ &= \ \underset{n=1}{\overset{\infty}{lub}}\ f_n \ = \ \underset{n=0}{\overset{\infty}{lub}}\ f_n \ \stackrel{\text{деф}}{=} \ g. \end{aligned}$$

За предпоследното равенство използвахме очевидния факт

$$lub\ \{f_1, f_2, \dots\} \ = \ lub\ \{\Omega, f_1, f_2, \dots\}.$$

Нека h е друга неподвижна точка на Γ, т.е. нека $\Gamma(h) = h$. Защо $g \leqslant h$? Достатъчно е да видим, че h е само *горна граница* на тази редица, с други думи, да видим, че

$$f_n \leqslant h \ \text{ за всяко } n \geq 0.$$

Това ще проверим отново с индукция относно n. За $n = 0$ очевидно

$$f_0 \stackrel{\text{деф}}{=} \Omega \ \leqslant \ h.$$

Да предположим, че за някое n, $f_n \ \leqslant \ h$. Но Γ е непрекъснат, в частност е монотонен, и оттук

$$\underbrace{\Gamma(f_n)}_{f_{n+1}} \leqslant \Gamma(h) = h, \tag{2.8}$$

или все едно, $f_{n+1} \leqslant h$.

Получихме, че за всяко n $f_n \leqslant h$, с други думи, h е мажоранта на редицата $\{f_n\}_n$. Следователно h мажорира и точната ѝ горна граница g, т.е. $g \leqslant h$.

Така получихме, че g е най-малката неподвижна точка на Γ, с други думи

$$f_\Gamma \ = g \ \stackrel{\text{деф}}{=} \ \underset{n}{lub}\, \Gamma^n(\Omega).$$

Да се убедим, че g е и най-малката *преднеподвижна* точка на оператора. Наистина, понеже $\Gamma(g) = g$, то в частност $\Gamma(g) \leqslant g$, и следователно g е и преднеподвижна точка на Γ. Сега да вземем друга преднеподвижна точка h на Γ. За нея по определение е изпълнено

$$\Gamma(h) \ \leqslant \ h.$$

Със същата рутинна индукция по n показваме, че за всяко n $f_n \leqslant h$, като за прехода от n към $n+1$ в (2.8) вместо $\Gamma(h) = h$ пишем $\Gamma(h) \leqslant h$. $\square$

Да приложим току-що доказаната теорема към два различни оператора, свързани с една и съща рекурсивна програма, която разглеждахме съвсем в началото на курса. Става въпрос за следната програма R:

$R:$ `F( X, Y) = if X = 0 then 0 else F( X − 1, F( X, Y) )`

Като разсъждавахме операционно, тогава лесно съобразихме, че с *call by value* R ще пресметне функцията

$$f_{CV}(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \neg!, & \text{ако } x > 0, \end{cases}$$

докато с *call by name* — функцията

$$f_{CN} = \lambda x, y.0.$$

Сега ще се опитаме да погледнем на R денотационно. Все още не знаем какво формално означа това; в случая идеята ни е по-скоро да видим кои ще са операторите, определени от тялото на R във всяка от двете области на Скот $\boldsymbol{\mathcal{F}_2}$ и $\boldsymbol{\mathcal{F}_2^{\perp}}$, и съответно — кои ще са най-малките неподвижни точки на тези оператори

Първата област на Скот $\boldsymbol{\mathcal{F}_2} = (\mathcal{F}_2,\ \subseteq,\ \emptyset^{(2)})$ познаваме много добре. В нея R определя оператора

$$\Gamma\colon\ \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2,$$

който се дефинира по следния начин:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0\\ f(x-1, f(x,y)), & \text{иначе.}\end{cases}$$

Този оператор очевидно е компактен, и следователно — непрекъснат, така че към него можем да приложим теоремата на Кнастер-Тарски, според която за f_Γ е в сила представянето:

$$f_\Gamma \;=\; \bigcup_n \Gamma^n(\emptyset^{(2)}).$$

Да означим с f_n функцията $\Gamma^n(\emptyset^{(2)})$. Да напомним, че функциите от монотонно растящата редица

$$f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \dots$$

имат смисъл на последователните приближения на f_Γ. Искаме да намерим *явния вид* на всяка f_n, а оттам — и на самата f_Γ.

По определение редицата $\{f_n\}_n$ удовлетворява рекурентната връзка

$$\left|\begin{array}{l} f_0 = \emptyset^{(2)}\\ f_{n+1} = \Gamma(f_n).\end{array}\right. \tag{2.9}$$

Така за първата апроксимация f_1 на f_Γ ще имаме:

$$f_1(x,y) \stackrel{(2.9)}{\simeq} \Gamma(\emptyset^{(2)})(x,y) \stackrel{\text{деф }\Gamma}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0\\ \emptyset^{(2)}(x-1, \emptyset^{(2)}(x,y)), & \text{ако } x>0\end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0\\ \neg!, & \text{ако } x>0.\end{cases}$$

За следващата апроксимация f_2 получаваме:

$$f_2(x,y) \stackrel{(2.9)}{\simeq} \Gamma(f_1)(x,y) \stackrel{\text{деф }\Gamma}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0\\ f_1(x-1, \underbrace{f_1(x,y)}_{\neg!}\,), & \text{ако } x>0\end{cases} \stackrel{\text{деф } f_1}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0\\ \neg!, & \text{ако } x>0.\end{cases}$$

Оказа се, че двете апроксимации f_1 и f_2 съвпаднаха. Това най-вероятно означава, че и всички следващи апроксимации ще са като f_1, защото от

$$f_1 \;=\; f_2,$$

прилагайки почленно Γ, ще получим

$$\Gamma(f_1) \;= \Gamma(f_2), \text{ т.е. } f_2 \;=\; f_3 \text{ и т.н.}$$

Формалното доказателство е с индукция: с индукция относно n ще покажем, че

$$f_n = f_1 \text{ за всяко } n \geq 1.$$

Случаят $n = 1$ е очевиден, а приемайки, че

$$f_n \;=\; f_1,$$

след почленно прилагане на Γ ще имаме

$$\Gamma(f_n) \;=\; \Gamma(f_1),$$

или все едно, $f_{n+1} \;=\; f_2$. Но вече знаем, че $f_2 = f_1$, откъдето веднага и $f_{n+1} = f_1$, с което индуктивната стъпка е проведена. Следователно редицата от последователните приближения на f_Γ изглежда така:

$$f_0 \stackrel{\text{деф}}{=} \emptyset^{(2)} \subset \; f_1 \;=\; f_2 \;= f_3 \ldots .$$

Ясно е, че границата на тази редица е f_1, и значи

$$f_\Gamma \;=\; f_1.$$

Оказа се, че всъщност $f_\Gamma \;=\; f_{CV}$, което, както вече имахме повод да коментираме, не е случайно.

Сега да видим как ще изглежда операторът, определен от програмата R, в другата област на Скот

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_2^\perp} = (\mathcal{F}_2^\perp,\ \sqsubseteq,\ \Omega^{(2)}).$$

Да напомним, че с $\mathcal{F}_2^\perp$ отбелязвахме множеството от всички *тотални* функции на два аргумента в $\mathbb{N}_\perp \stackrel{\text{деф}}{=} \mathbb{N} \cup \{\perp\}$, т.е.

$$\mathcal{F}_2^\perp = \{f \mid f\colon\ \mathbb{N}_\perp^2 \longrightarrow \mathbb{N}_\perp\}.$$

Да означим с Δ оператора, който съответства на R в ОС $\boldsymbol{\mathcal{F}_2^\perp}$. Да дефинираме $\Delta\colon\ \mathcal{F}_2^\perp \longrightarrow\ \mathcal{F}_2^\perp$ по следния начин:

$$\Delta(g)(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ g(x-1, g(x,y)), & \text{ако } x > 0 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp. \end{cases}$$

Каква е логиката да искаме $\Delta(g)(\perp, y) = \perp$? Да погледнем още веднъж към програмата R:

R `F( X, Y) = if X = 0 then 0 else F( X − 1, F( X, Y) )`

При извикването $F(\perp, y)$ влизаме в проверката $\perp = 0$, за която е логично да приемем, че има стойност $\perp$ (а не *false*). Това е т. нар. *естествено продължение* на базисните функции и предикати, за което ще говорим подробно по-нататък в курса.

Засега ще приемем наготово, че горният оператор Δ е непрекъснат в ОС $(\mathcal{F}_2^{\perp}, \sqsubseteq, \Omega^{(2)})$. Тогава теоремата на Кнастер-Тарски, приложена към Δ, ще ни даде, че

$$g_\Delta = \bigsqcup_n \Delta^n(\Omega^{(2)}).$$

За да намерим g_Δ, ще действаме както при другата ОС — ще намерим явния вид на апроксимациите $\Delta^n(\Omega^{(2)})$ на g_Δ. Нека за по-кратко ги означим е с g_n, т.е.

$$g_n \overset{\text{деф}}{=} \Delta^n(\Omega^{(2)}).$$

Редицата $\{g_n\}_n$ удовлетворява условията

$$\left|\begin{array}{l} g_0 = \Omega^{(2)} \\ g_{n+1} = \Delta(g_n). \end{array}\right. \tag{2.10}$$

Отново се стремим да намерим *явния вид* на всяка от функциите g_n.

За първата функция g_1 ще имаме:

$$g_1(x,y) \overset{(2.10)}{=} \Delta(\Omega^{(2)})(x,y) \overset{\text{деф } \Delta}{=} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \Omega^{(2)}(x-1, \Omega^{(2)}(x,y)), & \text{ако } x > 0 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \perp, & \text{ако } x > 0 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \perp, & \text{ако } x > 0 \ \vee \ x = \perp. \end{cases}$$

За следващата апроксимация g_2 получаваме последователно

$$g_2(x,y) \overset{(2.10)}{=} \Delta(g_1)(x,y) \overset{\text{деф } \Delta}{=} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \text{ (за всяко } y, \text{ вкл. за } y = \perp) \\ g_1(x-1, g_1(x,y)), & \text{ако } x > 0 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ g_1(0, \underbrace{g_1(1,y)}_{\perp}), & \text{ако } x = 1 \\ \perp, & \text{ако } x > 1 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ 0, & \text{ако } x = 1 \\ \perp, & \text{ако } x > 1 \ \vee \ x = \perp. \end{cases}$$

Наблюдавайки какво се случи при $n = 2$, можем да направим предположение, че g_n ще изглежда по подобен начин:

$$g_n(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ако} \quad x < n \ (\textbf{за всяко}\ y \in \mathbb{N}_\perp) \\ \perp, & \text{ако} \quad x \geq n \ \lor \ x = \perp, \end{cases}$$

Да го покажем с индукция относно n. Вече видяхме, че за $n = 0, 1, 2$ g_n наистина има този вид. Сега ако допуснем, че това е така и за произволна функция g_n, то за следващата g_{n+1} ще имаме:

$$g_{n+1}(x, y) \overset{(2.10)}{=} \Delta(g_n)(x, y) \overset{\text{деф } \Delta}{=} \begin{cases} 0, & \text{ако} \quad x = 0 \\ g_n(x-1, g_n(x, y)), & \text{ако} \quad x > 0 \\ \perp, & \text{ако} \quad x = \perp \end{cases}$$

$$\overset{\text{и.х.}}{=} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ 0, & \text{ако } x > 0 \ \&\ x - 1 < n \\ \perp, & \text{ако} \quad x - 1 \geq n \\ \perp, & \text{ако} \quad x = \perp \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{ако } x < n{+}1 \\ \perp, & \text{ако} \quad x \geq n{+}1 \ \lor \ x = \perp. \end{cases}$$

с което индуктивната ни хипотеза се потвърди и за $n + 1$.

Сега като знаем как изглежда всяка от функциите g_n, не е трудно да съобразим, че $g_\Delta \overset{\text{деф}}{=} \sqcup g_n$ ще има вида

$$g_\Delta(x, y) \ = \begin{cases} 0, & \text{ако} \quad x \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако} \quad x = \perp. \end{cases}$$

Наистина, ако $x = \perp$, а $y \in \mathbb{N}_\perp$ — произволно, то за всяко n ще имаме, че $g_n(x, y) = \perp$, откъдето съгласно (2.6) и $g_\Delta(x, y) = \perp$.

Ако x е естествено число, тогава редицата от стойностите на $g_n(x, y)$ ще изглежда по този начин:

$$\underbrace{g_0(x, y)}_{\perp}, \ \ldots \ , \underbrace{g_x(x, y)}_{\perp}, \ \underbrace{g_{x+1}(x, y)}_{0}, \ \underbrace{g_{x+2}(x, y)}_{0}, \ \ldots$$

С други думи, редицата от стойностите е

$$\underbrace{\perp, \ \ldots \ , \perp}_{x+1 \text{ пъти}}, \ 0, \ 0, \ \ldots$$

и нейната граница очевидно е 0.

Ясно е, че функцията g_Δ няма как да е равна на f_{CN}, защото g_Δ е функция в $\mathbb{N}_\perp$, докато f_{CN} е функция в $\mathbb{N}$. Ако, обаче, "върнем" g_Δ в света на естествените числа, двете функции вече ще съвпадат. Как точно става това "ограничаване" ще разберем отново в раздел 3.5.

2.3.3 Теорема на Кнастер-Тарски за системи от уравнения

Теоремата на Кнастер-Тарски, която доказахме в предишния раздел, беше формулирана за оператори в *произволна* област на Скот $\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathcal{F},\ \leqslant,\ \Omega)$. Когато тази ОС е декартово произведение на други области (какъвто ще бъде най-типичният случай в бъдеще), тази теорема можем да преформулираме по един по-естествен начин.

За целта да фиксираме k отново на брой произволни ОС

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_1} = (\mathcal{F}_1,\ \leqslant_1,\ \Omega_1),\ \ldots\ ,\ \boldsymbol{\mathcal{F}_k} = (\mathcal{F}_k,\ \leqslant_k,\ \Omega_k).$$

Да означим с $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \ldots \times \mathcal{F}_k$ декартово произведение на *носителите* на тези ОС, а с

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathcal{F},\ \leqslant,\ \Omega)$$

— декартовото произведение на самите ОС. Тук релацията $\leqslant$ е стандартната покомпонентна наредба, индуцирана от наредбите $\leqslant_1, \ldots, \leqslant_k$, а $\Omega = (\Omega_1, \ldots, \Omega_k)$.

Съгласно *Твърдение* 2.5, $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ също е ОС. Сега да вземем произволен оператор Γ в тази ОС:

$$\Gamma\colon\ \mathcal{F}_1 \times\ \ldots\ \times \mathcal{F}_k \ \longrightarrow\ \mathcal{F}_1 \times\ \ldots\ \times \mathcal{F}_k.$$

Тогава за всяка к-орка $(f_1, \ldots, f_k) \in \mathcal{F}$ съществува $(g_1, \ldots, g_k) \in \mathcal{F}$:

$$\Gamma(f_1, \ldots, f_k) \ = \ (g_1, \ldots, g_k).$$

За всяко $i = 1, \ldots, k$ да означим с

$$\Gamma_i :\ \mathcal{F}_1 \times\ \cdots \times\ \mathcal{F}_k \ \longrightarrow\ \mathcal{F}_i$$

оператора, който връща i-тата компонента на $\Gamma(f_1, \ldots, f_k)$, т.е.

$$\Gamma_i(f_1, \ldots, f_k) \ = \ g_i.$$

Тогава за всяка $(f_1, \ldots, f_k) \in \mathcal{F}$ ще имаме

$$\Gamma(f_1, \ldots, f_k) \ = \ (\Gamma_1(f_1, \ldots, f_k),\ \ldots\ ,\Gamma_k(f_1, \ldots, f_k)),$$

което в нашите означения за декартово произведение на оператор може да се запише като

$$\Gamma \ = \ \Gamma_1 \times\ \ldots\ \times \Gamma_k.$$

Нека $\bar{f} = (f_1, \ldots, f_k)$ е неподвижна точка на Γ. Тогава означава, че $\Gamma(\bar{f}) = \bar{f}$, или все едно

$$(\Gamma_1(\bar{f}),\ \ldots\ ,\Gamma_k(\bar{f})) = (f_1, \ldots, f_k).$$

Разписваме покомпонентно горното равенство и стигаме до k на брой равенства

$$\left|\begin{array}{lcl} \Gamma_1(f_1,\dots,f_k) & = & f_1 \\ \vdots & & \\ \Gamma_k(f_1,\dots,f_k) & = & f_k. \end{array}\right.$$

Можем да кажем, че $(f_1,\dots,f_k)$ всъщност е *решение на системата от уравнения*

$$\left|\begin{array}{lcl} \Gamma_1(\mathbb{X}_1,\dots,\mathbb{X}_k) & = & \mathbb{X}_1 \\ \vdots & & \\ \Gamma_k(\mathbb{X}_1,\dots,\mathbb{X}_k) & = & \mathbb{X}_k. \end{array}\right. \tag{2.11}$$

Вярно е и обратното: ако $(f_1,\dots,f_k)$ е решение на горната система, то $(f_1,\dots,f_k)$ е неподвижна точка на Γ.

Да резюмираме:

$$\boxed{\begin{array}{c} (f_1,\dots,f_k) \text{ е неподвижна точка на } \Gamma = \Gamma_1\times\dots\times\Gamma_k \\ \text{точно когато } (f_1,\dots,f_k) \text{ е решение на системата (2.11).} \end{array}}$$

Аналогично се вижда, че

$$\boxed{\begin{array}{c} (f_1,\dots,f_k) \text{ е най-малка неподвижна точка на } \Gamma \\ \text{точно когато } (f_1,\dots,f_k) \text{ е най-малко решение на системата (2.11).} \end{array}}$$

Ако $\bar{f} = (f_1,\dots,f_k)$ е преднеподвижна точка на Γ, то по определение $\Gamma(\bar{f}) \leqslant \bar{f}$, което ще рече

$$(\Gamma_1(\bar{f}),\ \dots\ ,\Gamma_k(\bar{f})) \leqslant (f_1,\ \dots\ f_k).$$

Горното неравенство е по отношение на покомпонентната наредба, което означава, че всъщност са в сила следните k на брой неравенства:

$$\left|\begin{array}{lcl} \Gamma_1(f_1,\dots,f_k) & \leqslant_1 & f_1 \\ \vdots & & \\ \Gamma_k(f_1,\dots,f_k) & \leqslant_k & f_k. \end{array}\right.$$

или все едно — $(f_1,\dots,f_k)$ е решение *на системата от неравенства*

$$\left|\begin{array}{lcl} \Gamma_1(\mathbb{X}_1,\dots,\mathbb{X}_k) & \leqslant_1 & \mathbb{X}_1 \\ \vdots & & \\ \Gamma_k(\mathbb{X}_1,\dots,\mathbb{X}_k) & \leqslant_k & \mathbb{X}_k. \end{array}\right. \tag{2.12}$$

Отново можем да заключим, че $(f_1, \dots, f_k)$ е преднеподвижна точка на $\Gamma = \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_k$ точно когато $(f_1, \dots, f_k)$ е решение на *системата от неравенства* (2.12), и съответно $(f_1, \dots, f_k)$ е най-малката преднеподвижна точка на Γ точно когато $(f_1, \dots, f_k)$ е най-малкото решение на системата (2.12).

При дефиниране на денотационна семантика на рекурсивна програма R ние ще се движим по-скоро по обратния път: на всяка рекурсивна дефиниция на R ще съпоставяме по един оператор Γ_i, а след това от тези оператори $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ ще образуваме тяхното декартово произведение Γ. При това ще ни е нужно да знаем как се изразява f_Γ чрез отделните оператори $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$.

За да разберем как става това, да фиксираме произволни области на Скот

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_1} = (\mathcal{F}_1,\ \leqslant_1,\ \Omega_1),\ \dots\ ,\ \boldsymbol{\mathcal{F}_k} = (\mathcal{F}_k,\ \leqslant_k,\ \Omega_k).$$

Да положим $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times\ \dots\ \times \mathcal{F}_k$, $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_k)$ и да означим с $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ тяхното декартово произведение:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathcal{F},\ \leqslant, \Omega).$$

Нека са дадени непрекъснатите оператори

$$\Gamma_i :\ \mathcal{F}_1 \times\ \dots \times\ \mathcal{F}_k\ \longrightarrow\ \mathcal{F}_i$$

за $i = 1, \dots k$. Съгласно *Твърдение* 2.8, непрекъснат оператор ще е и тяхното декартово произведение $\Gamma = \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_k$, който дефинираме по този начин:

$$\Gamma(\bar{f})\ \stackrel{\text{деф}}{=}\ (\Gamma_1(\bar{f}), \dots, \Gamma_k(\bar{f})).$$

Ясно е, че Γ е изображение от вида

$$\mathcal{F}_1 \times\ \dots \times\ \mathcal{F}_k\ \longrightarrow\ \mathcal{F}_1 \times\ \dots \times\ \mathcal{F}_k,$$

т.е. типът на входа и на изхода на Γ е един и същ, следователно можем да говорим за неподвижни точки на Γ. Както отбелязахме по-горе, този оператор е непрекъснат в ОС $\boldsymbol{\mathcal{F}}$. Следователно можем да приложим теоремата на Кнастер-Тарски за произволни ОС и да получим, че Γ има н.м.н.т. f_Γ, за която е изпълнено:

$$f_\Gamma\ =\ \underset{n}{lub}\ \Gamma^n(\Omega).$$

Да видим как се разписва това условие чрез операторите $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, с помощта на които дефинирахме Γ. (Ако си представяте f_Γ просто като $(f_{\Gamma_1}, \dots, f_{\Gamma_k})$ — ами не е чак толкова просто $\ddot\smile$).

Удобно е отново да въведем означение за n-тата апроксимация $\Gamma^n(\Omega)$ на оператора Γ. Имаме, че $\Gamma^n(\Omega) \in \mathcal{F}_1 \times \ \cdots \times \mathcal{F}_k$, т.е тази апроксимация всъщност е вектор. Нека го означим с $(f_1^n, \dots, f_k^n)$, т.е. имаме

$$\Gamma^n(\Omega) \ = \ (f_1^n, \dots, f_k^n).$$

Редицата от последователните апроксимации $\{(f_1^n, \dots, f_k^n)\}_n$ удовлетворява следната рекурентна схема:

$$\begin{aligned}
(f_1^0, \dots, f_k^0) &\stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma^0(\Omega) \ = \ \Omega \ = \ (\Omega_1, \dots, \Omega_k)\\
(f_1^{n+1}, \dots, f_k^{n+1}) &= \Gamma(f_1^n, \dots, f_k^n) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{=} (\Gamma_1(f_1^n, \dots, f_k^n), \dots, \Gamma_k(f_1^n, \dots, f_k^n)).
\end{aligned}$$

Тогава по всяка от компонентите $i = 1, \dots, k$ ще имаме, че

$$\boxed{\left| \begin{aligned} f_i^0 \ &= \ \Omega_i \\ f_i^{n+1} \ &= \ \Gamma_i(f_1^n, \dots, f_k^n). \end{aligned} \right.} \tag{2.13}$$

По-нататък, от доказателството на теоремата на Кнастер-Тарски за ОС знаем още, че последователните приближения $\Gamma^n(\Omega)$ на f_Γ образуват монотонно растяща редица. С други думи, имаме, че

$$(f_1^0, \dots, f_k^0) \ \leqslant \ (f_1^1, \dots, f_k^1) \ \leqslant \dots,$$

откъдето по *Твърдение* 2.4 получаваме, че ще е монотонно растяща и редицата по всяка от компонентите. За i-тата компонента това означава, че редицата

$$f_i^0 \ \leqslant_i \ f_i^1 \ \leqslant_i \ f_i^2 \ \leqslant_i \ \dots$$

е монотонно растяща в ОС $\boldsymbol{\mathcal{F}_i} = (\mathcal{F}_i, \ \leqslant_i \ \Omega_i)$, и следователно там тя ще има т.г. граница $\underset{n}{lub} \ f_i^n$, $1 \le i \le k$.

От *Твърдение* 2.4 знаем, че точната горна граница в ОС, която е декартово произведение, се дефинира по следния начин:

$$\underset{n}{lub} \ (f_1^n, \dots, f_k^n) \ = \ (\underset{n}{lub} \ f_1^n, \ \dots, \ \underset{n}{lub} \ f_k^n).$$

Най-малката неподвижна точка f_Γ също е вектор; да го означим така:

$$f_\Gamma \ = \ (f_\Gamma^1, \dots, f_\Gamma^k).$$

Тогава ще имаме последователно

$$(f_\Gamma^1, \dots, f_\Gamma^k) \ = \ \underset{n}{lub} \ \Gamma^n(\Omega) \ = \ \underset{n}{lub} \ (f_1^n, \dots, f_k^n) \ = \ (\underset{n}{lub} \ f_1^n, \dots, \underset{n}{lub} \ f_k^n).$$

Следователно f_Γ^i е точна горна граница на редицата, определена с рекурентната връзка (2.13), за всяко $i = 1, \dots, k$.

Да резюмираме: когато Γ е декартово произведение от вида $\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_k$, неговата най-малка неподвижна точка е векторът $f_\Gamma = (f_\Gamma^1, \dots, f_\Gamma^k)$, в който i-тата функция f_Γ^i, $i = 1, \dots, k$, е точна горна граница на редицата, определена с рекурентната схема (2.13).

2.3.4 Индуктивен принцип на Скот за произволна ОС

Ще завършим тази глава с обобщение на индуктивния принцип на Скот за случая на произволна ОС $\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathcal{F},\ \leqslant,\ \Omega)$.

Първо обобщаваме дефиницията за непрекъснатост. Свойството P в множеството $\mathcal{F}$ наричаме *непрекъснато*, ако за всяка монотонно растяща редица $f_0 \leqslant f_1 \leqslant \dots$ в $\mathcal{F}$ е изпълнено условието:

$$\forall n\ P(f_n) \implies P(\underset{n}{lub}\ f_n).$$

Лесно се съобразява, че двете основни *Твърдение* 1.14 и *Твърдение* 1.16 за непрекъснати свойства, които доказахме за ОС $\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_n,\ \subseteq,\ \emptyset^{(n)})$, остават в сила и за произволни ОС.

Твърдение 2.9. (Индуктивен принцип на Скот за произволна ОС) Нека $\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathcal{F},\ \leqslant,\ \Omega)$ е ОС, а $\Gamma\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ е непрекъснат оператор. Нека още P е свойство в $\mathcal{F}$, за което са изпълнени условията:

1) $P(\Omega)$;

2) за всяка $f \in \mathcal{F}$ е вярно, че $P(f) \implies P(\Gamma(f))$;

3) свойството P е непрекъснато.

Тогава P е вярно за най-малката неподвижна точка f_Γ на оператора Γ.

Доказателство. По същество повтаря доказателството на *Твърдение* 1.11, но да го проведем все пак. Отново използваме представянето

$$f_\Gamma = \underset{n}{lub}\ \Gamma^n(\Omega).$$

от теоремата на Кнастер-Тарски за ОС. Нека

$$f_n = \Gamma^n(\Omega).$$

От доказателството на горната теорема знаем още, че редицата $f_0, f_1, \dots$ е монотонно растяща. С индукция по n показваме, че $P(f_n)$ е вярно за всяко f_n.

При $n = 0$ по определение $f_0 = \Omega$ и верността на $P(f_0)$ следва от условието 1).

Да приемем, че за някое n е вярно $P(f_n)$. Но тогава съгласно 2) ще е вярно и $P(\Gamma(f_n))$, или все едно, ще е вярно $P(f_{n+1})$.

Така получихме, че за всяко n, $P(f_n)$ е в сила, откъдето поради непрекъснатостта на P ще имаме, че $P(\underset{n}{lub}\ f_n)$ също ще е в сила. Но $\underset{n}{lub}\ f_n = f_\Gamma$ и следователно $P(f_\Gamma)$ е налице. □