Лица на равнинни фигури

Ако $D \subseteq \mathbb{R}^2$, то $s(D) = \iint\limits_D 1\,dxdy$.

Лицето на D е двоен интеграл. В следващите задачи ще пресметнем лицата на фигури, определени от равнинни криви.

Зад. 1. Намерете лицето на елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$; $a, b > 0$.

Реш. Обобщена полярна смяна $x = a.r\cos\varphi$, $y = b.r\sin\varphi$, $r \ge 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$$|J| = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = abr.$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \iff \frac{a^2r^2\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{b^2r^2\sin^2\varphi}{b^2} \le 1 \iff r^2 \le 1 \iff 0 \le r \le 1.$$

Така $S = \iint\limits_D 1\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 |J|\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 abr\,dr\,d\varphi =$

$$= ab.\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\varphi = ab.\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi.\int_0^1 r\,dr = ab.2\pi.\frac{1}{2} = \pi ab.$$

Зад. 2. Намерете лицето, заградено от кривата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = x + y$, $a, b > 0$.

Реш. Когато имаме крива, трябва да определим кой знак определя крайно множество. Например $x^2 + y^2 = R^2$ е уравнението на окръжност. $x^2 + y^2 \ge R^2$ са точките поникзвън окръжността. На това безкрайно множество не можем да съпоставим лице.

$x^2 + y^2 \le R^2$ са точките вътре в кръга ~~това~~ множество има лице.

Искаме да изберем знак $\ge$/$\le$, т.че да отхвърлим безкрайно далечните точки. За достатъчно големи x, y, израз от по-висока степен става по-голям, т.е. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \ge x + y$. Точно това искаме да избегнем. Така множеството заградено от дадената крива е $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le x + y$.

Може да направим същата полярна смяна като в зад. 1.
Вместо това, ще направим линейна смяна: $\begin{cases} x = au \\ y = bv \end{cases}$, $u, v \in \mathbb{R}$.

$$|J| = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab.$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq x + y \iff u^2 + v^2 \leq au + bv \iff u^2 - au + v^2 - bv \leq 0$$

$$u^2 - 2.u.\frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2 - 2.v.\frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$T: \left| \left(u - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{4} \right.$ – това е ~~окръжност~~ кръг с център $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ и радиус $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}$.

$$S = \iint_D 1\,dxdy = \iint_T |J|\,dudv = ab.\iint_T 1\,dudv = ab.S(T).$$

Лицето на T е $\pi.\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}\right)^2 = \pi.\frac{a^2+b^2}{4}$.

$\Rightarrow S(D) = ab.\pi.\frac{a^2+b^2}{4}$.

Зад. 3. Намерете лицето оградено от $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$, $a > 0$

Реш. Важно изразът е по-ниска степен $\Rightarrow D: \left| (x^2+y^2)^2 \leq 2a^2(x^2-y^2) \right.$.

$$S(D) = \iint_D 1\,dxdy.$$

D се определя от четни степени на x и y. $\Rightarrow$ D е симетрично спрямо осите и лицето на D е равно във всеки квадрант.

$\Rightarrow$ Лицето на D е 4 пъти по лицето на D в първи квадрант.

Формално горното разсъждение може да се направи така:

$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$, $D_1 = D \cap \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ е частта от D в I кв.

$D_2 = D \cap \{(x,y) \mid x \leq 0, y \geq 0\}$ – II кв.

$D_3 = D \cap \{(x,y) \mid x \leq 0, y \leq 0\}$ – III кв.

$D_4 = D \cap \{(x,y) \mid x \geq 0, y \leq 0\}$ – IV кв.

$$S(D) = S(D_1) + S(D_2) + S(D_3) + S(D_4) = \iint_{D_1} 1\,dxdy + \iint_{D_2} 1\,dxdy + \ldots$$

$\iint\limits_{D_2} 1\,dxdy$. Правим смяна $\begin{cases} x=-u \\ y=v \end{cases}$, $x\le 0 \Rightarrow u\ge 0$
$y\ge 0 \Rightarrow v\ge 0$.

$(x,y)\in D \Rightarrow (x^2+y^2)^2\le 2a^2(x^2-y^2)$
$\Rightarrow (u^2+v^2)^2\le 2a^2(u^2-v^2) \Rightarrow (u,v)\in D$
и от $u\ge 0, v\ge 0 \Rightarrow (u,v)\in D_1$.

$$J=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad |J|=1.$$

Тогава $\iint\limits_{D_2} 1\,dxdy = \iint\limits_{D_1} 1\,dxdy$.

Аналогично със смените $\begin{cases} x=-u \\ y=-v \end{cases}$ и $\begin{cases} x=u \\ y=-v \end{cases}$ се доказва, че $s(D_3)=s(D_4)=s(D_1)$.

Всъщност подробно доказахме, че осевата симетрия запазва лице.

Така $s(D)=4s(D_1)$, $D_1: \begin{cases} (x^2+y^2)^2\le 2a^2(x^2-y^2) \\ x,y\ge 0 \end{cases}$

Правим полярна смяна в D_1: $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$, $|J|=r$, $r\ge 0$

От $x,y\ge 0 \Rightarrow 0\le\varphi\le \pi/2$.

$(x^2+y^2)^2\le 2a^2(x^2-y^2) \Rightarrow (r^2)^2\le 2a^2(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi)$

$r^4\le 2a^2r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi) = 2a^2r^2.\cos2\varphi$, $r^2\le 2a^2\cos2\varphi$.

Оттук, $\cos2\varphi \ge \dfrac{r^2}{2a^2}\ge 0 \Rightarrow$ От $\varphi\in[0;\pi/2] \Rightarrow 2\varphi\in[0;\pi/2]$.
$\varphi\in[0;\pi/4]$.

Тогава $r\le\sqrt{2a^2\cos2\varphi} = a\sqrt{2\cos2\varphi}$.

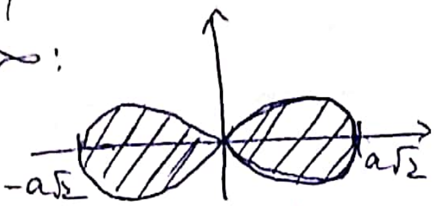
Така след смяната D_1 е трапец: $\begin{cases} 0\le\varphi\le\pi/4 \\ 0\le r\le a\sqrt{2\cos2\varphi} \end{cases}$.

$$s(D)=4s(D_1)=4.\iint\limits_{D_1} 1\,dxdy = 4\int_0^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{2\cos2\varphi}} r\,dr\,d\varphi =$$

$$=4.\int_0^{\pi/4} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{a\sqrt{2\cos2\varphi}} d\varphi = 4.\int_0^{\pi/4} \frac{a^2.\cancel{2}.\cos2\varphi}{\cancel{2}}\,d\varphi = 2a^2\int_0^{\pi/4}\cos2\varphi\, d(2\varphi)$$

$$=2a^2.\sin2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = \boxed{2a^2}$$

Бел. Споменатата крива носи името на Бернули и има формата на знака за ∞:



Зад. 4. Намерете лицето, определено от кривата $(x^2+y^2)^2 = x^3+y^3$.

Реш. Отляво степента е по-висока $\Rightarrow$ $D: (x^2+y^2)^2 \le x^3+y^3$.

Полярна смяна $\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}$, $|J| = r$, $r \ge 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$(x^2+y^2)^2 \le x^3+y^3 \Rightarrow (r^2)^2 \le r^3\sin^3\varphi + r^3\cos^3\varphi = r^3(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)$

$\Rightarrow r \le \sin^3\varphi + \cos^3\varphi$. Оттук, $\sin^3\varphi+\cos^3\varphi \ge r \ge 0$.

$(\sin\varphi+\cos\varphi)\underbrace{(\sin^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi)}_{\text{непълен квадрат} \Rightarrow \text{винаги неотрицателен.}} \ge 0$

Тогава $\sin\varphi+\cos\varphi \ge 0$. Директно се вижда, че решенията в $[0;2\pi]$ са $[0;\frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4};2\pi]$.

Така получихме 2 интервала за φ.

Вместо $\varphi \in [0;2\pi]$, по начало можем да изберем $\varphi \in [-\pi,\pi]$.

Решенията на $\sin\varphi+\cos\varphi \ge 0$ в $[-\pi;\pi]$ са $\underbrace{\varphi \in [-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]}_{\text{един интервал}}$.

Затова предпочитаме втората смяна.

Тогава след смяната D е криволинеен сектор: $T \left| \begin{array}{l} -\pi/4 \le \varphi \le 3\pi/4 \\ 0 \le r \le \sin^3\varphi + \cos^3\varphi. \end{array} \right.$

$$\Rightarrow S(D) = \iint\limits_D 1\,dx\,dy = \iint\limits_T |J|\,dr\,d\varphi = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\left(\int_0^{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi} r\,dr\right)d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)} d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}(\sin^6\varphi + 2\sin^3\varphi\cos^3\varphi + \cos^6\varphi)\,d\varphi.$$

$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1 \Rightarrow 1=(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)^3=$

$=\sin^6\varphi+3\sin^4\varphi\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi\cos^4\varphi+\cos^6\varphi=$

$=\sin^6\varphi+\cos^6\varphi+3\sin^2\varphi\cos^2\varphi(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi).$

Оттук $\sin^6\varphi+\cos^6\varphi=1-3\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}(1-3\sin^2\varphi\cos^2\varphi+2\sin^3\varphi\cos^3\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\left(1-\frac{3}{4}\cdot4\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\frac{1}{4}\cdot8\sin^3\varphi\cos^3\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\left(1-\frac{3}{4}\cdot\sin^2 2\varphi+\frac{1}{4}\sin^3 2\varphi\right)d\varphi=\frac{1}{8}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}(4-3\sin^2 2\varphi+\sin^3 2\varphi)\,d\varphi$$

Полагаме $2\varphi=t$, $-\pi/4\le\varphi\le 3\pi/4 \Rightarrow -\frac{\pi}{2}\le 2\varphi=t\le\frac{3\pi}{2}$

$\varphi=t/2 \Rightarrow d\varphi=\frac{1}{2}dt$

$$S=\frac{1}{8}\cdot\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}(4-3\sin^2 t+\sin^3 t)\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{16}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}(4-3\sin^2 t+\sin^3 t)\,dt.$$

$\cos 2t=\cos^2 t-\sin^2 t=1-2\sin^2 t \Rightarrow \sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}$

$\sin 3t=3\sin t-4\sin^3 t \Rightarrow \sin^3 t=\frac{3\sin t-\sin(3t)}{4}.$

$$\frac{1}{16}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}(4-3\sin^2 t+\sin^3 t)\,dt=\frac{1}{16}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\cos 2t+\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t\right)dt$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{5}{2}t+\underbrace{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{3}{4}\cos t+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cos 3t}_{\text{равни в границите от периодичност}}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{3\pi/2}$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\frac{5}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\pi=\boxed{\frac{5\pi}{16}}$$

Следващата задача е от изпит.

Зад. 5. Намерете лицето на множеството, определено от неравенството $x^2+(y-2)^2 \le 4-2\sqrt{2(x^2+y^2)}$.

Реш. Нека $x=r\cos\varphi$

$y=r\sin\varphi$, $r\ge 0$

$0\le\varphi\le 2\pi$, $|J|=r$.

$x^2+(y-2)^2 \le 4-2\sqrt{2(x^2+y^2)}$

$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi-4r\sin\varphi+4\le 4-2\sqrt{2r^2}$

$r^2-4r\sin\varphi\le -2r\sqrt{2}$, $|:r$

$r-4\sin\varphi\le -2\sqrt{2}$

$0\le r\le -2\sqrt{2}+4\sin\varphi = 4\left(\sin\varphi-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\rightarrow \sin\varphi-\frac{\sqrt{2}}{2}\ge 0$, $\sin\varphi\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi\in[\pi/4;3\pi/4]$.

Така получихме трапец "по φ" $T\left|\begin{array}{l}\pi/4\le\varphi\le 3\pi/4\\ 0\le r\le 4\left(\sin\varphi-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{array}\right.$.

$$S=\iint_T |J|\,dr\,d\varphi=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left(\int_0^{4\left(\sin\varphi-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} r\,dr\right)d\varphi=$$

$$=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{4\left(\sin\varphi-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}d\varphi=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{1}{2}\left(4\left(\sin\varphi-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}16\left(\sin^2\varphi-\sqrt{2}\cdot\sin\varphi+\frac{1}{2}\right)d\varphi=$$

$$=8\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}-\sqrt{2}\sin\varphi+\frac{1}{2}\right)d\varphi=8\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left(1-\frac{\cos 2\varphi}{2}-\sqrt{2}\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$=8\cdot\left.\left(\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\sqrt{2}\cdot\cos\varphi\right)\right|_{\pi/4}^{3\pi/4}=$$

$$=8\cdot\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{4}\cdot(-1)+\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\cdot 1+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=$$

$$=8\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{4}-1-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}-1\right)=8\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\right)=\underline{4(\pi-3)}.$$

От геометрията е известно, че средата на отсечката, свързваща $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ е с координати $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Ако имаме три точки $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, медицентърът на $\triangle ABC$ е с координати $\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.

Тази точка се нарича още център на тежестта.

Аналогично, център на тежестта на n точки $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ е точката с координати $\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}, \frac{y_1+y_2+\dots+y_n}{n}\right)$.

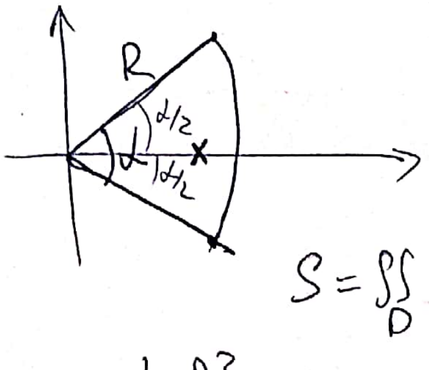
След граничен преход можем да намираме център на тежестта на "произволно" множество в $\mathbb{R}^2$: Ако $D \subseteq \mathbb{R}^2$, знаменателят клони към $s(D) = \iint_D 1\,dxdy$, а числителят клони към $\iint_D x\,dxdy$ за първата координата.

и $\iint_D y\,dxdy$ за втората координата.

Така, център на тежестта на $D \subseteq \mathbb{R}^2$ е $\left(\frac{\iint_D x\,dxdy}{\iint_D 1\,dxdy}, \frac{\iint_D y\,dxdy}{\iint_D 1\,dxdy}\right)$.

Зад. 6. Намерете центърът на тежестта на кръгов сектор с ъгъл α и радиус R.

Реш. Разполагаме кръговия сектор по следния начин.



За пресмятане на интегралите правим полярна смяна. Секторът се преобразува до $\begin{cases} 0 \le r \le R \\ -\frac{\alpha}{2} \le \varphi \le \frac{\alpha}{2} \end{cases}$.

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$, $|J| = r$.

$$S = \iint_D 1\,dxdy = \int_0^R \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} r\,d\varphi\,dr = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} 1\,d\varphi \cdot \int_0^R r\,dr =$$

$= \alpha \cdot \frac{R^2}{2}$ (съгласува се с формула за лице на кръг при $\alpha = 2\pi$)

$$S_x = \iint_D x\,dxdy = \int_0^R \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} r \cdot r\cos\varphi\,dr\,d\varphi = \int_0^R r^2 dr \cdot \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos\varphi\,d\varphi =$$

$= \frac{R^3}{3} \cdot \sin\varphi \Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} = \frac{2R^3 \sin\frac{\alpha}{2}}{3} \Rightarrow m_x = \frac{2R^3 \sin\frac{\alpha}{2}}{3} \cdot \frac{2}{\alpha R^2} = \frac{4R\sin\frac{\alpha}{2}}{3\alpha}$.

$$S_y = \int_0^R \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} r \cdot r\sin\varphi \, d\varphi \, dr = \frac{R^3}{3} \cdot \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{R^3}{3} \cdot \cos\varphi \Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} = 0.$$

$\Rightarrow m_y = \frac{S_y}{S} = 0.$

Центърът на тежестта е точката $\left(\frac{4R\sin\frac{\alpha}{2}}{3\alpha}, 0\right)$.

Зад. 7. Намерете лицето и центърът на тежестта на множеството $D: \begin{cases} x^{2/3} + y^{2/3} \le 1 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

Реш. Тук е подходяща обобщена полярна смяна $\begin{cases} x = r\cos^3\varphi \\ y = r\sin^3\varphi \end{cases}$.

От $x, y \ge 0 \Rightarrow 0 \le \varphi \le \pi/2$.

$x^{2/3} + y^{2/3} = r^{2/3}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^{2/3} \le 1 \Leftrightarrow r \le 1$.

Тогава D се трансформира в $T: \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$.

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^3\varphi & r \cdot 3\cos^2\varphi \cdot (-\sin\varphi) \\ \sin^3\varphi & r \cdot 3\sin^2\varphi \cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$= 3r\cos^4\varphi\sin^2\varphi + 3r\cos^2\varphi\sin^4\varphi = 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$

$$S = \iint_D 1\,dx\,dy = \iint_T |J|\,d\varphi\,dr = \int_0^1 3r\,dr \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{3}{8}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi\,d\varphi = \frac{3}{8}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{3}{8}\left(\frac{\varphi}{2} - \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sin 4\varphi}_{\text{тук} = 0}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{3\pi}{32}}$$

За център на тежестта, трябва да пресметнем

$$\iint_D x\,dx\,dy = \iint_T x \cdot |J|\,dr\,d\varphi = \iint_T r\cos^3\varphi \cdot 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^1 3r^2\,dr \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cos^5\varphi\, d\varphi = r^3\Big|_0^1 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos^4\varphi \cdot \cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos^4\varphi\, d\sin\varphi = \int_0^{\pi/2}\cos^4\varphi\, d\frac{\sin^3\varphi}{3} \overset{\text{по части}}{=}$$

$$= \underbrace{\frac{\sin^3\varphi}{3}\cdot\cos^4\varphi\Big|_0^{\pi/2}}_{0} - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3\varphi}{3}\cdot 4\cos^3\varphi\cdot(-\sin\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^4\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{4}{3}\int_0 \sin^4\varphi\cos^2\varphi\, d\sin\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\frac{\sin^5\varphi}{5} = \frac{4}{15}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\sin^5\varphi = \text{по части}$$

$$= \underbrace{\frac{4}{15}\cos^2\varphi\sin^5\varphi\Big|_0^{\pi/2}}_{0} + \frac{4}{15}\int_0^{\pi/2}\sin^5\varphi\cdot 2\cos\varphi(-\sin\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{8}{15}\int_0^{\pi/2}\sin^6\varphi\, d\sin\varphi = \frac{8}{15}\cdot\frac{\sin^7\varphi}{7}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{8}{105}\cdot 1 = \frac{8}{105}.$$

$$\Rightarrow m_x = \frac{\iint_D x\,dxdy}{\iint_D 1\,dxdy} = \frac{8/105}{3\pi/32} = \frac{8}{105}\cdot\frac{32}{3\pi} = \frac{256}{315\pi}.$$

Поради съображения за симетрия (множеството е симетрично при смяна на x и y), центърът на тежестта лежи на правата $x=y$, т.е. $m_y = m_x = \frac{256}{315\pi}$.

Така центърът на тежестта е точката $M\left(\frac{256}{315\pi}, \frac{256}{315\pi}\right)$.

В тези задачи считахме, че множеството е еднородно (с еднаква плътност във всяка точка). Дори и това да не е в сила, можем да приложим същите идеи:

Ако $f: D\to\mathbb{R}$ е плътността на D, то масата на D е $\iint_D f(x,y)\,dxdy$, а центърът на тежестта на D е $\left(\frac{\iint_D x f(x,y)\,dxdy}{\iint_D f(x,y)\,dxdy}, \frac{\iint_D y f(x,y)\,dxdy}{\iint_D f(x,y)\,dxdy}\right)$.