Двойни интеграли

$\int_a^b f(x)dx$ интерпретирахме като лице под графика на функция. Може да го разглеждаме и по друг начин. Ако имаме нишка с дължина $(b-a)$ и $f(x)$ задава плътността ѝ в точката x, то Римановите суми и тяхната граница – определеният интеграл $\int_a^b f(x)dx$ може да мислим като маса на цялата нишка.

Тази идея за определен интеграл показва пренасянето към повече измерения. Ако $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и $f: D \to \mathbb{R}$, то можем да си мислим за D като пластина, а за f – като плътността ѝ. Тогава

$\iint_D f(x,y)\,dxdy$ е масата на пластината.

Формалният подход за въвеждане на кратен (определен) интеграл минава през разбивания, Риманови суми и техни граници.

В задачите ще ползваме, че ако D е крайно обединение на криволинейни трапци и f – непрекъсната в D, то $\iint_D f(x,y)dxdy$ съществува (т.е. има смисъл да говорим за определен интеграл).

Важно е и следното правило за изчисляване на двоен интеграл, което показва свеждането към повторен интеграл:

<u>Тв.</u> $D: \begin{cases} a \le x \le b \\ g(x) \le y \le h(x) \end{cases}$ е криволинеен трапец, f – непрекъсната в D.

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \quad // \text{ Аналогично твърдение важи за трапец по } y.$$

Двойните интеграли притежават свойствата:

$$\iint_D \left(\alpha \cdot f(x,y) + \beta \cdot g(x,y)\right) dxdy = \alpha \cdot \iint_D f(x,y)\,dxdy + \beta \cdot \iint_D g(x,y)\,dxdy$$

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$$

Както $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (единичен интеграл върху 0-мерно множество), така $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = 0$, ако D е едномерно множество (права, окръжност, ...).

Твърдението и свойствата ще ползваме при пресмятане на двойни интеграли. Трябва да представим D като обединение на криволинейни трапци и след това да пресмятаме интегралите.

Накрая да отбележим, че ако $D \subseteq \mathbb{R}^2$, то $\iint\limits_D 1.dxdy$ е точно лицето на D.

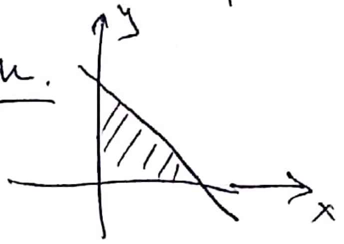
<u>Зад. 1</u>. Намерете $\iint\limits_D xy\,dxdy$, $D = [0;1]\times[0;1]$ е единичен квадрат.

<u>Реш.</u> $D: 0 \le x, y \le 1$ е трапец по x.

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(x \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

<u>Зад. 2</u>. Намерете $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy$, $D: \begin{cases} x, y \ge 0 \\ x+y \le 2. \end{cases}$

<u>Реш.</u>



D е трапец по x: $y \ge 0$, $y \le 2-x$.

$\Rightarrow 2-x \ge y \ge 0 \Rightarrow x \le 2$ и $x \ge 0$, така

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2-x. \end{cases}$$

$$\iint\limits_D (x-y)\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} (x-y)\,dy \right) dx = \int_0^2 \left[xy - \frac{y^2}{2}\Big|_0^{2-x} \right] dx =$$

$$= \int_0^2 \left(x(2-x) - \frac{(2-x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[2x(2-x) - (2-x)^2 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(4x - 2x^2 - 4 + 4x - x^2 \right) dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(-3x^2 + 8x - 4 \right) dx = \frac{1}{2}\left(-x^3 + 4x^2 - 4x \right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2}(-8 + 16 - 8) = 0.$$

Зад. 3. $\iint\limits_D x^2(x-y)\,dxdy$, $D: \begin{cases} x^2 \le y \\ y^2 \le x \end{cases}$.

Реш. За произволна точка $(x,y) \in D$, имаме $x \ge y^2 \ge 0$, $y \ge x^2 \ge 0$ $\Rightarrow D$ е в първи квадрант. Тогава $y \le \sqrt{x}$ и $y \ge x^2$. Така $x^2 \le y \le \sqrt{x}$. Оттук, $\sqrt{x} \ge x^2$, $x \ge x^4$, $1 \ge x^3$ дели на $x \ge 0$. $\Rightarrow 0 \le x \le 1$. Така D е трапец: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$.

$$\iint\limits_D x^2(x-y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^3 - x^2 y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^3 y - \frac{x^2y^2}{2} \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^3\sqrt{x} - \frac{x^3}{2} - x^3.x^2 + \frac{x^2.x^4}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(x^{7/2} - x^5 + \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2}x^3 \right) dx =$$

$$= \frac{2}{9}x^{9/2} - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1 = \frac{2}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{14} - \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{112 - 84 + 36 - 63}{7.8.9} = \frac{148 - 147}{504} = \frac{1}{504}.$$

Зад. 4. $\iint\limits_D \sqrt{x+y}\,dxdy$, $D: \begin{cases} x, y \ge 0 \\ x+y \le 1 \end{cases}$.

Реш. Като в задача 2, D е трапец: $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{cases}$.

$$\iint\limits_D \sqrt{x+y}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (y+x)^{1/2}\,d(y+x) \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{3}(y+x)^{3/2} \Big|_0^{1-x} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 \left((1-x+x)^{3/2} - x^{3/2} \right) dx =$$

$$\frac{2}{3} \int_0^1 \left(1 - x^{3/2} \right) dx = \frac{2}{3} \left(x - \frac{2}{5}x^{5/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

Удобно е да се ползва, че $\int_a^b c(x)\,dy = c(x)\int_a^b 1\,dy = (b-a).c(x)$, т.е. събираемите от $f(x,y)$ в които не участва y след интегриране по y се умножават по дължината на интервала. Виж задача 2

Зад. 5. $\iint\limits_D x^2 dxdy$, $D: \sqrt{x}+\sqrt{y} \le 1$.

Реш. Ако $(x,y)\in D$, то $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ имат смисъл $\Rightarrow x\ge 0, y\ge 0 \Rightarrow D$ е в първи квадрант.

По-нататък представяме като трапец по x, т.е. решаваме неравенството относно y: $\sqrt{y} \le 1-\sqrt{x}$.

Оттук, $\sqrt{y}\ge 0 \Rightarrow 1-\sqrt{x}\ge 0$, $\sqrt{x}\le 1$, $x\le 1$. Така $0\le x\le 1$.

За y получаваме $y\le 1-2\sqrt{x}+x$. Имаме и $y\ge 0$, т.е.:

$$D: \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1-2\sqrt{x}+x \end{cases}$$

Тогава $\iint\limits_D x^2 dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-2\sqrt{x}+x} x^2 dy \right) dx = \int_0^1 x^2(1-2\sqrt{x}+x-0)\,dx =$

$= \int_0^1 (x^2-2x^{5/2}+x^3)\,dx = \frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{2}{7}x^{7/2} + \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}^{(4.7} - \frac{4}{7}^{(3.4} + \frac{1}{4}^{(3.7} =$

$= \frac{28-48+21}{3.7.4} = \frac{49-48}{84} = \frac{1}{84}$.

Зад. 6. $\iint\limits_D \frac{x+y}{x-y-1}$, $D: x^2\le y\le x$.

Реш. D е решено спрямо y. От $x\ge x^2$, получаваме интервал за x: $x\in[0;1]$, така $D: \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x^2\le y\le x \end{cases}$.

Ако $x=1$, то $y=1$ и $x-y-1=-1\ne 0$.

Ако $x<1$, то $y\ge x^2\ge 0$ и $x-y-1\le x-1<0$

$\Rightarrow$ Знаменателят не се нулира и $\frac{x+y}{x-y-1}$ е непрекъсната.

$\iint\limits_D \frac{x+y}{x-y-1}dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} \frac{x+y}{x-y-1} dy \right) dx$.

Първо да решим като неопределен вътрешния интеграл:

$\int \frac{x+y}{x-y-1}dy = \int \frac{(y+1-x)-1+x+x}{x-y-1}dy = \int (-1) + \frac{2x-1}{x-y-1}dy =$

$= -y-(2x-1)\int \frac{d(-y)}{x-y-1} = -y-(2x-1)\ln|x-y-1|$.

Заместваме в границата:

$$\int_{x^2}^{x} \frac{x+y}{x-y-1}\,dy = \{-y-(2x-1)\ln|x-y-1|\}\Big|_{x^2}^{x} =$$

$$= -x-(2x-1)\ln|x-x-1| - [-x^2-(2x-1)\ln|x-x^2-1|] =$$

$$= -x-(2x-1)\ln 1 + x^2 + (2x-1)\ln(x^2-x+1) =$$

$$= x^2-x+(2x-1)\ln(x^2-x+1).$$

(Тук, $|-x^2+x-1| = x^2-x+1$, защото $x^2-x+1>0$ за всяко x.)

Накрая, $\int_0^1 [(x^2-x)+(2x-1)\ln(x^2-x+1)]dx =$

$$= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \int_0^1 (2x-1)\ln(x^2-x+1)\,dx = \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\int_0^1 \ln(x^2-x+1)\,d(x^2-x)$$

$$= -\frac{1}{6}+\int_0^1 \ln(x^2-x+1)\,d(x^2-x+1).$$

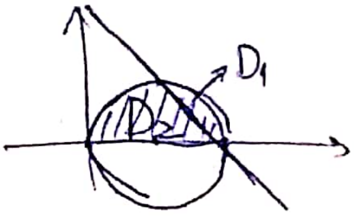
Полагаме $x^2-x+1=t$. Границите са $\left| \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=1. \end{array}\right.$

Така, не е необходимо да смятаме $\int \ln t\,dt$, защото $\int_1^1 \ln t\,dt = 0$.

Окончателно, търсената стойност е $-1/6$.

Зад. 7. $\iint_D |x+y-2|\,dxdy$, $D: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2\le 2x \\ y\ge 0 \end{array}\right.$.

Реш. $x^2+y^2\le 2x \iff (x-1)^2+y^2\le 1$ - кръг с център $(1,0)$.



$y\ge 0$ – горната половина от кръга.

За съжаление, $x+y-2$ има както положителни, така – отрицателни знаци в D.

Директно се вижда, че $(2,0)$ и $(1,1)$ са пресечните точки на $x+y-2=0$ и окръжността $x^2+y^2=2x$.

Така в една част от D, $|x+y-2| = x+y-2$,

в друга (по-голямата), $|x+y-2| = 2-x-y$.

$D = D_1 \cup D_2$, където:

$$D_1: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 \le 2x \\ y \ge 0 \\ x+y-2 \ge 0 \end{array} \right. \qquad D_2: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 \le 2x \\ y \ge 0 \\ x+y-2 \le 0 \end{array} \right. .$$

От свойствата, $\iint\limits_D |x+y-2|\,dxdy = \iint\limits_{D_1} |x+y-2|\,dxdy + \iint\limits_{D_2} |x+y-2|\,dxdy$.

Правата $x+y-2=0$ попада както в D_1, така и в D_2.
Тъй като е едномерна, това не влияе на крайния отговор.
Удобно е D_1 и D_2 да представим като трапци по y.
За всеки от тях y е между 0 и 1.
В D_1 - горната граница за x е от окръжността,
долната - от правата
В D_2 - горната граница за x е от правата
долната - от окръжността.

$$x^2-2x \le -y^2, \quad x^2-2x+1 \le 1-y^2$$
$$(x-1)^2 \le 1-y^2$$
$$|x-1| \le \sqrt{1-y^2}$$
$$-\sqrt{1-y^2} \le x-1 \le \sqrt{1-y^2}$$
$$1-\sqrt{1-y^2} \le x \le 1+\sqrt{1-y^2}$$

В D_2 — В D_1

Така

$$D_1: \left| \begin{array}{l} 0 \le y \le 1 \\ 2-y \le x \le 1+\sqrt{1-y^2} \end{array} \right. ; \quad D_2: \left| \begin{array}{l} 0 \le y \le 1 \\ 1-\sqrt{1-y^2} \le x \le 2-y \end{array} \right.$$

$|x+y-2| = x+y-2$ $\qquad$ $|x+y-2| = 2-x-y$.

$$\iint\limits_D |x+y-2|\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} (x+y-2)\,dx \right) dy + \int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} (2-y-x)\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left((y-2)\left[1+\sqrt{1-y^2}-(2-y)\right] + \frac{x^2}{2}\Big|_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} \right) dy \; +$$

$$+ \int_0^1 \left((2-y)\left[2-y-(1-\sqrt{1-y^2})\right] - \frac{x^2}{2}\Big|_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left[(y-2)(y-1+\sqrt{1+y^2}) + \frac{1}{2}\left(1+2\sqrt{1+y^2}+1+y^2-(y^2-4y+4)\right) \right] dy + \quad -//-$$

$$+ \int_0^1 \left[(2-y)(1-y+\sqrt{1+y^2}) - \frac{1}{2}\left(y^2-4y+1-(1+2\sqrt{1+y^2}+1+y^2)\right) \right] dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\cancel{y^2}-3y+2+(y-2)\sqrt{1+y^2}+1-\cancel{y^2}+2y+\sqrt{1-y^2}\right) dy +$$

$$+ \int_0^1 \left(2-3y+y^2+(2-y)\sqrt{1+y^2}\cancel{+y^2}-1+2y-\sqrt{1-y^2}\right) dy =$$

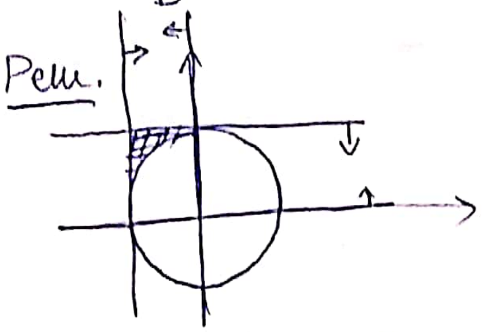
$$= \int_0^1 \left[\left(1-y+(y-1)\sqrt{1-y^2}\right) + \left(1-y+\cancel{(1-y)\sqrt{1-y^2}}\right)\right] dy =$$

$$= \int_0^1 (2-2y)\, dy = 2y - y^2 \Big|_0^1 = 1.$$

Завършваме с две задачи от скорошни изпити.

Зад 8. $\iint\limits_D xy\,dxdy$, $D: \begin{cases} x^2+y^2 \ge 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ -1 \le x \le 0 \end{cases}$.

Реш.



извън единичната окръжност.
От чертежа е ясно, че D е трапец по x,
x е между -1 и 0.
y е между окръжността и $y=1$.

Така, $y^2 \ge 1-x^2$, $y \ge 0 \Rightarrow y \ge \sqrt{1-x^2}$.

$$\Rightarrow D: \begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ \sqrt{1-x^2} \le y \le 1. \end{cases}$$

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \int_{-1}^{0} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{1} xy\,dy \right) dx = \int_{-1}^{0} x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{\sqrt{1-x^2}}^{1} dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} x\left(\frac{1}{2} - \frac{1-x^2}{2}\right) = \int_{-1}^{0} x\left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{2}} + \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x^3 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{8}.$$

Зад. 9. $\iint\limits_D xy\,dxdy$, $D: \begin{cases} x^2+y^2 \le 2x \\ x \le 2y \end{cases}$.

Реш. Имаме $x \ge \frac{1}{2}(x^2+y^2) \ge 0$ и $y \ge \frac{1}{2}x \ge 0 \Rightarrow D$ е в първи квадрант.

Решаване относно y: $y^2 \le 2x - x^2 \Rightarrow 2x - x^2 \ge y^2 \ge 0$, $x \in [0;2]$.

$y \le \sqrt{2x-x^2}$, от $x \le 2y \Rightarrow y \ge \frac{1}{2}x$.

Така $\frac{1}{2}x \le y \le \sqrt{2x-x^2}$.

В частност, $\frac{1}{2}x \le \sqrt{2x-x^2}$, $\frac{1}{4}x^2 \le 2x - x^2$, $\frac{5}{4}x^2 \le 2x$,

$5x^2 \le 8x$, $x(5x-8) \le 0$, $x \in [0; \frac{8}{5}]$.

Така $D: \begin{cases} 0 \le x \le 8/5 \\ 1/2\,x \le y \le \sqrt{2x-x^2} \end{cases}$.

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \int_0^{8/5} \left(\int_{1/2x}^{\sqrt{2x-x^2}} xy\,dy \right) dx = \int_0^{8/5} x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{1/2x}^{\sqrt{2x-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^{8/5} \frac{x}{2}\left(2x - x^2 - \frac{1}{4}x^2\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{8/5} x\left(2x - \frac{5}{4}x^2\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{8/5} \left(2x^2 - \frac{5}{4}x^3\right) dx = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^{8/5} =$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}2^3 - \frac{5}{4}\frac{2^4}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}8 - \frac{5}{16}16\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{8}{5}\right)^3 - \frac{5}{16}\cdot\left(\frac{8}{5}\right)^4\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{5}\right)^3\left(\frac{2}{3} - \frac{\cancel{5}}{16}\cdot\frac{8}{\cancel{5}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{5}\right)^3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{5}\right)^3\cdot\frac{1}{6} = \frac{8^3}{2.5^3.6} = \frac{2^{\cancel{9}\,7}}{\cancel{2}.5^3.\cancel{2}.3} =$$

$$= \frac{2^7}{3.5^3} = \frac{128}{3.125} = \boxed{\frac{128}{375}}$$