Афинни трансформации на E_2^*.

Представяне на афинни трансформации чрез ортогонални

Упражнение

Опр: $\varphi_C : E_2^* \longrightarrow E_2^*$ е АТ (афинна транс.), ако:

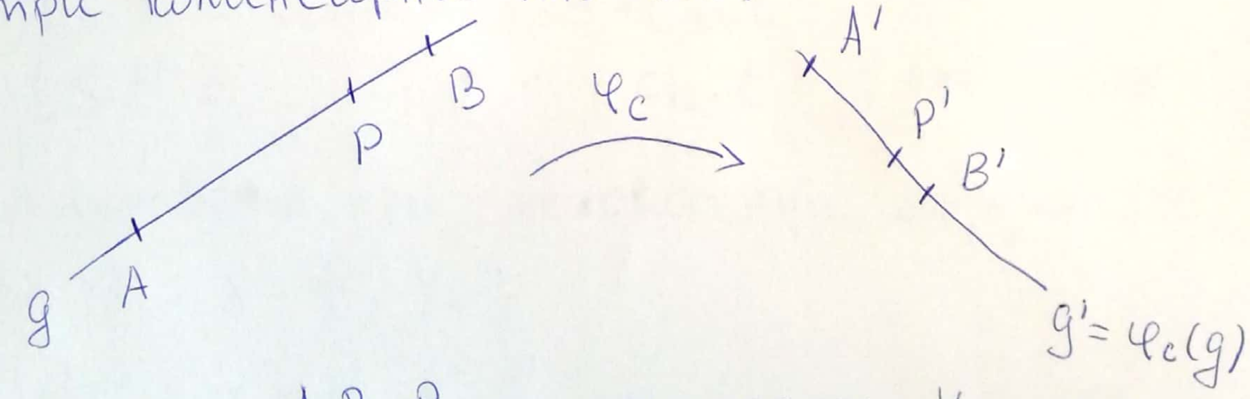
1) φ_C е линейна трансформация, $\det C \neq 0$;

2) $\varphi_C : \omega \longrightarrow \omega$, запазва безкрайната права.

Свойства:

1) АТ запазва успоредността, т.е. Ако $a \parallel b$, то $\varphi(a) \parallel \varphi(b)$.

2) АТ запазва простото отношение на три колинеарни точки.



Нека точките A, B и P са колинеарни. Числото $(ABP) = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$ наричаме просто отношение на A, B и P.

Ако φ_C е АТ и $A \xrightarrow{\varphi_C} A'$, $B \xrightarrow{\varphi_C} B'$, $P \xrightarrow{\varphi_C} P'$, то $(ABP) = (A'B'P')$.

3) АТ запазва отношенията на лицата.
Нека точките A, B и P не са колинеарни.
Ако φ_C е АТ, то $S_{\Delta A'B'P'} = |\det C| \cdot S_{\Delta ABP}$.

4) Аналитично представяне на действието на АТ върху крайни точки (само в E_2):

От $U(a, b, 0) \xrightarrow{\varphi_C} U'(a', b', 0)$ като $(a, b) \neq (0,0)$
$(a', b') \neq (0,0)$

получаваме матрица на АТ:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & \underset{\neq 0}{c_{33}} \end{pmatrix}$$

Нека $M(x, y, t) \xrightarrow{\varphi_C} M'(x', y', t')$, тогава

$$\varphi_C : \begin{cases} \rho \cdot x' = c_{11} \cdot x + c_{12} \cdot y + c_{13} \cdot t \\ \rho \cdot y' = c_{21} \cdot x + c_{22} \cdot y + c_{23} \cdot t \\ \rho \cdot t' = c_{33} \cdot t \end{cases}, \quad t \neq 0 \Rightarrow t' \neq 0$$

Преминаваме към нехомогенни координати:

$M(X, Y)$: $X = \dfrac{x}{t}$, $Y = \dfrac{y}{t}$

$M'(X', Y')$: $X' = \dfrac{x'}{t'}$, $Y' = \dfrac{y'}{t'}$.

За целта разделяме почленно $\dfrac{\rho \cdot x'}{\rho \cdot t'}$ и $\dfrac{\rho \cdot y'}{\rho \cdot t'}$.

$$\varphi_C : \begin{cases} X' = a_{11} \cdot X + a_{12} \cdot Y + a_{13} \\ Y' = a_{21} \cdot X + a_{22} \cdot Y + a_{23} \end{cases} \qquad a_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{33}}, \ i,j = \overline{1,3}$$

Ако означим с матрица $A = \{a_{ij}\}_{2\times 2}$, представянето на АТ върху крайни точки има вида:

$$\varphi_A : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \ \det A \neq 0$$

! Разгл. т. $O(0,0) \Rightarrow \varphi_A(O) = O'(a_{13}, a_{23})$, т. е. стълбът от свободни елементи $\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$ показва къде се изобразява началото на к. с. O при АТ φ_A.

$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ т. O е неподвижна за φ_A.

* * *

Дилатации:

Нека $K = Oxy$ е ОКС в E_2

Опр. 1: Дилатация d_1 по Ox с коефициент k_1, породена от Ox и Oy, е АТ, при която:

- точките от Oy остават неподвижни;
- правите, които са $\parallel Ox$ остават неподвижни.

По-подробно:

Ако $M(0, y) \in Oy$, то $M \xrightarrow{\varphi_A} M$

$N(x, \underline{\underline{y}}) \xrightarrow{\varphi_A} N'(k_1 . x, \underline{\underline{y}}) \Rightarrow d_1 : \begin{cases} x' = k_1 . x + 0 . y \\ y' = 0 . x + 1 . y \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow d_1 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

d_1 е „разтягане" по Ox при $|k_1|>1$.

d_1 е „свиване" по Ox при $|k_1|<1$.

Опр. 2: Дилатация d_2 по Oy с коеф. k_2, породена от Ox и Oy.

$$M(x,0) \xrightarrow{d_2} M(x,0)$$
$$N(x,y) \xrightarrow{d_2} N'(x,k_2.y)$$
$$\Rightarrow d_2: \begin{cases} x' = 1.x + 0.y \\ y' = 0.x + k_2.y \end{cases}$$

$$d_2: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

* * *

Опр. 3: Ортогонална трансформация:

Една АТ φ, определена с матрица $A = \{a_{ij}\}_{2\times 2}$, наричаме ортогонална, ако A е ортогонална матрица. $A.A^t = A^t.A = E$

по-подробно: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}.a_{21} + a_{12}.a_{22} = 0 \end{array} \right.$

Примери: $A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ е ортогонална

$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ не е ортогонална

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ не е ортогонална

! Важно: Всяка ортогонална трансформация запазва дължини на отсечки и големини на ъгли.

Всяка ортогонална трансформация е еднаквост.

* * *

Основна теорема: Всяка АТ φ може да се представи като композиция от две дилатации d_1 и d_2 по две взаимно перпендикулярни оси и една ортогонална трансформация ψ.

$$\varphi = d_1 \circ d_2 \circ \psi$$

или с матрици:

$$A = D_1 \cdot D_2 \cdot O$$, O - ортогонална матрица.

* * *

Следва алгоритъм за представяне, който ще опиша с конкретна задача:

1 задача: Спрямо ОКС $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ в E_2 е дадена АТ φ с матрица $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+3 & 3\sqrt{3}-1 \\ 3\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-3 \end{pmatrix}$.

Да се определят d_1, d_2 и ψ, така че

$\varphi = d_1 \circ d_2 \circ \psi$

$A = D_1 \cdot D_2 \cdot O$

Лема: За всяка неособена ($\det A \neq 0$) матрица $A = \{a_{ij}\}_{n\times n}$ съществуват симетрична матрица S и ортогонална матрица O, такива че: $A = S.O$.

Решение на 1 зад.

I Търсим $S = ?$ и $O = ?$

От $A = S.O \Rightarrow A^t = (S.O)^t = O^t.S^t \Rightarrow$

$$\Rightarrow A.A^t = S.\underbrace{O.O^t}_{E}.S^t = S.S = S^2 \Rightarrow \boxed{A.A^t = S^2}$$

Пресмятаме: $A.A^t = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+3 & 3\sqrt{3}-1 \\ 3\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sqrt{3}+3 & 3\sqrt{3}+1 \\ 3\sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-3 \end{pmatrix} =$

$$= S^2 = \begin{pmatrix} 40 & 24 \\ 24 & 40 \end{pmatrix}$$

II Търсим „главните направления" на АТ φ.

Това са собствените вектори на $S^2 \to \vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$.

Спрямо базата $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ матрицата S^2 ще бъде в диагонален вид.

1) Търсим собствените стойности λ_1 и λ_2 на S^2

$|S^2 - \lambda.E| = 0$ - характеристично уравнение на S^2

$\longrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 40-\lambda & 24 \\ 24 & 40-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 64, \ \lambda_2 = 16$$

2) Търсим собствените вектори $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ на S^2. Те ще се получат ортогонални. Ние трябва да ги пресметнем, така че $|\vec{b}_1| = 1$ и $|\vec{b}_2| = 1$.

* За $\lambda_1 = 64$ пресм. $\vec{b}_1(\alpha_1, \beta_1)$: $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$

$$(S^2 - 64.E) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 40-64 & 24 \\ 24 & 40-64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -24.\alpha_1 + 24.\beta_1 = 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (може и $\alpha_1 = \beta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, избираме си)

* За $\lambda_2 = 16$ пресм. $\vec{b}_2(\alpha_2, \beta_2)$: $\alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 40-16 & 24 \\ 24 & 40-16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 24\alpha_2 + 24.\beta_2 = 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ избирам $\alpha_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Резултат: $\vec{b}_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ за $\lambda_1 = 64$

$\vec{b}_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ за $\lambda_2 = 16$

III Смяна на ОКС: От $K = Oe_1e_2 \xrightarrow{B} K' = O\vec{b_1}\vec{b_2}$

Матрицата на прехода е $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

Спрямо K' е изпълнено:

$(S')^2 = \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow S' = \begin{pmatrix} \pm 8 & 0 \\ 0 & \pm 4 \end{pmatrix}$ знаците могат да се изберат

Нека $S' = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, тогава $S' = D_1' \cdot D_2'$, където

$D_1' = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ е матрица на дилатация d_1.

d_1 „разтяга" по направлението на $\vec{b_1}$ с коеф. 8.

$D_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ е матрица на дилатация d_2.

d_2 „разтяга" по $\vec{b_2}$ с коеф. 4.

D_1' и D_2' са матриците на търсените дилатации спрямо $K' = O\vec{b_1}\vec{b_2}$.

IV Получаване на разлагането $A = D_1 \cdot D_2 \cdot O$ спр. K

$D_1 = B \cdot D_1' \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$B^{-1} = B^t$

$\Rightarrow D_1 = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$

$$D_2 = B \cdot D_2' \cdot B^{-1} = \dots = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$S = D_1 \cdot D_2$ или $S = B \cdot S' \cdot B^{-1} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

От $A = S \cdot O$ търсим ортогоналната матрица O.

$O = S^{-1} \cdot A$

Пресмятаме $S^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$O = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}+3 & 3\sqrt{3}-1 \\ 3\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-3 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Краен резултат:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}+3 & 3\sqrt{3}-1 \\ 3\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\varphi = d_1 \circ d_2 \circ \psi$$

* * *

2 зад. Спрямо ОКС $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е дадена АТ φ_A

$$A = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 5.\sqrt{3} & -5 & 2 \\ 10 & 10.\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

. Търсим разлагане

$A = D_1 . D_2 . D_3 . O$

$\varphi = d_1 \circ d_2 \circ d_3 \circ \psi$

I $S^2 = A . A^t$

$$S^2 = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 25 & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

II $|S^2 - \lambda . E| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = 9,\ \lambda_3 = 4$

$$\left.\begin{aligned} \text{За } \lambda_1 = 25 &\Rightarrow \vec{b}_1\,(0, 1, 0) \\ \lambda_2 = 9 &\Rightarrow \vec{b}_2\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \lambda_3 = 4 &\Rightarrow \vec{b}_3\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}\right\}$$ собствени вектори на S^2

! Векторите $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ и $\vec{b}_3$ задават направленията, по които „разтеглят" дилатациите d_1, d_2 и d_3.

$\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}$ са коефициентите на „разтегляне".

III От $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3 \xrightarrow{B} K' = O\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Спр. K':

$$(S')^2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow S' = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_1' = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D_3' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

IV Резултат спр. К $\qquad B^{-1} = B^t$

Пресметнете сами: $D_1 = B \cdot D_1' \cdot B^{-1}$

$$D_2 = B \cdot D_2' \cdot B^{-1}$$

$$D_3 = B \cdot D_3' \cdot B^{-1}$$

$$S = B \cdot S' \cdot B^{-1}$$

$$O = S^{-1} \cdot A$$

3 зад. (Упражнение)

$$A = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2+4\sqrt{2} & 2-4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2-4\sqrt{2} & 2+4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$