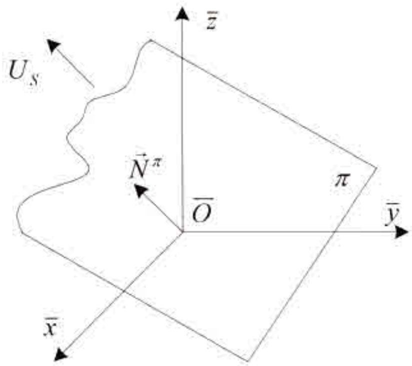
17. Аналитично задаване на правоъгълна аксонометрия

Нека $\bar{K}=\{\bar{O},\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ е ортонормирана координатна система. Избираме проекционната равнина π така, че $\bar{O}\in\pi$. Нека спрямо $\bar{K}$ равнината π има координати $\pi^{\bar{K}}[A, B, C, 0]$, като $A^2+B^2+C^2=1$, т.е. нормалният вектор $\vec{N}^{\pi}(A, B, C)\perp\pi$ е единичен $\left(|\vec{N}^{\pi}|=1\right)$. Тъй като $U_S\perp\pi$, то $s\parallel\vec{N}^{\pi}$, откъдето имаме $U_s(A, B, C, 0)$.



От $U_s\notin(\bar{O}\bar{x}\bar{y})$ следва, че $C\neq 0$;

От $U_s\notin(\bar{O}\bar{y}\bar{z})$ следва, че $A\neq 0$;

От $U_s\notin(\bar{O}\bar{z}\bar{x})$ следва, че $B\neq 0$.

Нека $\psi_{\pi}^{U_s}$ е централното (в случая успоредно) проектиране от U_s в π и $\bar{M}\,(x, y, z, t)\xrightarrow{\psi_{\pi}^{U_S}}M\,(x', y', z', t')$.

Тъй като $M=\bar{M}U_S\cap\pi$ имаме:

1) $M\in\bar{M}U_S\Rightarrow(1)\begin{cases}x'=\lambda x+\mu.A\\ y'=\lambda y+\mu.B\\ z'=\lambda z+\mu.C\\ t'=\lambda t+\mu.0\end{cases},\quad(\lambda,\mu)\neq(0,0)$;

2) $M\in\pi\quad\Rightarrow\quad(2)\quad Ax'+By'+Cz'=0$.

От (1) и (2) намираме $\lambda(Ax+By+Cz)+\mu(A^2+B^2+C^2)=0$.

Понеже $A^2+B^2+C^2=1$, можем да изберем $\lambda=1,\ \mu=-(Ax+By+Cz)$.

Като заместим λ и μ в (1) получаваме:

$$\psi_{\pi}^{U_S}:\begin{cases}x'=x-(Ax+By+Cz)A=(1-A^2)x-ABy-ACz\\ y'=y-(Ax+By+Cz)B=-ABx+(1-B^2)y-BCz\\ z'=z-(Ax+By+Cz)C=-ACx-BCy+(1-C^2)z\\ t'=t\end{cases}\quad\text{или}$$

$$\psi_{\pi}^{U_S}:\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\\ t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-A^2 & -AB & -AC & 0\\ -BA & 1-B^2 & -BC & 0\\ -CA & -CB & 1-C^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}.$$

Означаваме с $\bar{E}_i$ точките за които $\overrightarrow{\bar{O}\bar{E}_i}=\vec{e}_i;\ i=1, 2, 3$. Тогава

$\bar{E}_1(1, 0, 0, 1)\xrightarrow{\psi_{\pi}^{U_S}}E_1(1-A^2, -AB, -AC, 1)$;

$\bar{E}_2(0, 1, 0, 1)\xrightarrow{\psi_{\pi}^{U_S}}E_2(-BA, 1-B^2, -BC, 1)$;

$\bar{E}_3(0, 0, 1, 1)\xrightarrow{\psi_{\pi}^{U_S}}E_3(-CA, -CB, 1-C^2, 1)$

Тъй като $\bar{O}\equiv O(0, 0, 0)$, то векторите $\vec{e}_i=\overrightarrow{OE_i}$ върху аксонометричните оси $O\vec{e}_i$ имат координати:

$\vec{e}_1=\overrightarrow{OE_1}(1-A^2, -AB, -AC)$; $\quad\vec{e}_2=\overrightarrow{OE_2}(-AB, 1-B^2, -BC)$; $\quad\vec{e}_3=\overrightarrow{OE_3}(-AC, -BC, 1-C^2)$.

Тогава коефицентите на изменение са:

$p=|\vec{e}_1|=\sqrt{(1-A^2)^2+(-AB)^2+(-AC)^2}=\sqrt{1-2A^2+A^4+A^2B^2+A^2C^2}$

$=\sqrt{1-2A^2+A^2(A^2+B^2+C^2)}=\sqrt{1-A^2}$ и аналогично $q=|\vec{e}_2|=\sqrt{1-B^2},\ r=|\vec{e}_3|=\sqrt{1-C^2}$.

Следователно $p=|\vec{e}_1|=\sqrt{1-A^2}$, $q=|\vec{e}_2|=\sqrt{1-B^2}, r=|\vec{e}_3|=\sqrt{1-C^2}$.

От тук следва че: $p^2+q^2+r^2=1-A^2+1-B^2+1-C^2=3-(A^2+B^2+C^2)=2$.

За ъглите между аксонометричните оси имаме:

$$\cos\sphericalangle(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\frac{\vec{e}_1\vec{e}_2}{|\vec{e}_1||\vec{e}_2|}=\frac{(1-A^2)(-AB)+(-AB)(1-B^2)+(-AC)(-BC)}{\sqrt{1-A^2}\,\sqrt{1-B^2}}=$$

$$=\frac{-AB(1-A^2+1-B^2-C^2)}{\sqrt{1-A^2}\,\sqrt{1-B^2}}=\frac{-AB[2-(A^2+B^2+C^2)]}{\sqrt{1-A^2}\,\sqrt{1-B^2}},\text{ т.е.}$$

$$\cos\sphericalangle(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\frac{-AB}{\sqrt{1-A^2}\,\sqrt{1-B^2}}\text{ и аналогично}$$

$$\cos\sphericalangle(\vec{e}_2,\vec{e}_3)=\frac{-BC}{\sqrt{1-B^2}\,\sqrt{1-C^2}},\quad \cos\sphericalangle(\vec{e}_3,\vec{e}_1)=\frac{-CA}{\sqrt{1-C^2}\,\sqrt{1-A^2}}.$$

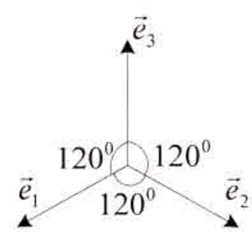
I.Правоъгълна изометрия

В този случай $p=q=r$, от където следва че $1-A^2=1-B^2=1-C^2\Rightarrow A^2=B^2=C^2$.

Тъй като $A^2+B^2+C^2=1$, то $A^2=B^2=C^2=\frac{1}{3}$ и $|\vec{e}_i|=p=q=r=\sqrt{1-A^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0,82$.

Освен това $A=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, B=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, C=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Нека за определеност $A=\frac{1}{\sqrt{3}}, B=\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\ (\varepsilon=\pm1), C=\frac{\eta}{\sqrt{3}}\ (\eta=\pm1)$.



За ъглите между аксонометричните оси имаме:

$$\cos\sphericalangle(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=-\frac{\varepsilon/3}{\sqrt{2/3}\,\sqrt{2/3}}=-\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\cos\sphericalangle(\vec{e}_2,\vec{e}_3)=-\frac{\varepsilon\eta}{2},\quad \cos\sphericalangle(\vec{e}_3,\vec{e}_1)=-\frac{\eta}{2}$$

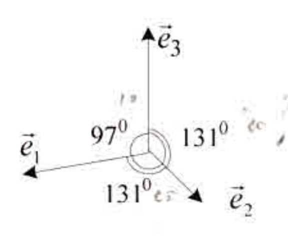
Най-често се избира $\varepsilon=\eta=1$, тогава $\sphericalangle(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\sphericalangle(\vec{e}_2,\vec{e}_3)=\sphericalangle(\vec{e}_3,\vec{e}_1)=120^\circ$.

II.Правоъгълна диметрия

Най-често използваната правоъгълна диметрия е с коефициенти на изменение $p=2q=r$. Тогава: $\sqrt{1-A^2}=2\sqrt{1-B^2}=\sqrt{1-C^2}$, и от $A^2+B^2+C^2=1$ получаваме $A^2=C^2; B^2=1-(A^2+C^2)=1-2A^2$. Но $1-A^2=4(1-B^2)$, откъдето намираме, че $1-A^2=8A^2$, т.е. $A^2=C^2=1/9;\ B^2=7/9$.

Така получаваме: $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=p=r=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 0,94$ и $|\vec{e}_2|=q=\frac{1}{2}r=\frac{\sqrt{2}}{3}\approx 0,47$.

Нека $A=\frac{1}{3}, B=\varepsilon\frac{\sqrt{7}}{3}\ (\varepsilon=\pm1), C=\frac{\eta}{3}\ (\eta=\pm1)$. Тогава за ъглите между аксонометричните оси получаваме:



$$\cos\sphericalangle(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=-\frac{\varepsilon\sqrt{7}}{4};\cos\sphericalangle(\vec{e}_2,\vec{e}_3)=-\frac{\varepsilon\eta\sqrt{7}}{4};\cos\sphericalangle(\vec{e}_3,\vec{e}_1)=-\frac{\eta}{8};$$

При $\varepsilon=\eta=1$ тези ъгли са:

$\sphericalangle(\vec{e}_1,\vec{e}_2)\approx 131^o25';\quad \sphericalangle(\vec{e}_2,\vec{e}_3)\approx 131^o25';\quad \sphericalangle(\vec{e}_3,\vec{e}_1)\approx 97^o10$.

Желателно е да получим координатите на точките, които са аксонометрични проекции, спрямо ортонормирана координатна система в проекционната равнина π.

Обикновено се приема проекционната равнина (екрана) да съвпада с равнината $\overline{O}\overline{xy}$.

За тази цел след като получим аксонометричния образ в равнината π, <u>завъртаме π така, че да съвпадне с</u> $\overline{O}\overline{xy}$, като това осъществяваме по следния начин:

Избираме ортонормирана координатна система $K' = \overline{O}\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ такава, че векторите $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ да са компланарни с π, т.е. $\vec{e}_1' \parallel \pi, \vec{e}_2' \parallel \pi$, а $\vec{e}_3' = \vec{N}^{\pi}(A, B, C)$.

Нека $\vec{e}_2'(u, v, w)$, като $|\vec{e}_2'| = 1$, т.е. $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. От условието $\vec{e}_2' \parallel \pi$ имаме $Au + Bv + Cw = 0$. Тъй като K' е ортонормирана координатна система, то $\vec{e}_1' = \vec{e}_2' \times \vec{e}_3'$ и следователно $\vec{e}_1'\left(\begin{vmatrix} v & w \\ B & C \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} w & u \\ C & A \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u & v \\ A & B \end{vmatrix}\right)$ т.е. $\vec{e}_1'(Cv - Bw,\ Aw - Cu,\ Bu - Av)$.

Ортогоналната трансформация φ, която довежда $K' = \overline{O}\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ в $\overline{K} = \overline{O}\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3$, ще довежда равнината $\pi \equiv (\overline{O}\vec{e}_1'\vec{e}_2')$ в равнината $(\overline{O}\overline{e}_1\overline{e}_2) \equiv (\overline{O}\overline{xy})$, т.е. $\varphi(\pi) = (\overline{O}\overline{e}_1\overline{e}_2)$. От формулите за смяна на ортонормирани координатни системи (в нехомогенни координати спрямо $\overline{K}$) имаме:

$$\varphi : \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cv - Bw & Aw - Cu & Bu - Av \\ u & v & w \\ A & B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

В хомогенни координати трансформацията φ се представя чрез:

$$\varphi : \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \\ t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cv - Bw & Aw - Cu & Bu - Av & 0 \\ u & v & w & 0 \\ A & B & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

С трансформацията $\theta = \varphi\psi_{\pi}^{U_s}$ намираме координатите на аксонометричните проекции на точките в равнината $\pi(\overline{O}\overline{xy})$:

$$\theta : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cv - Bw & Aw - Cu & Bu - Av & 0 \\ u & v & w & 0 \\ A & B & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - A^2 & -AB & -AC & 0 \\ -AB & 1 - B^2 & -BC & 0 \\ -AC & -BC & 1 - C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Като използваме, че $A^2 + B^2 + C^2 = 1, Au + Bv + Cw = 0$ получаваме:

$$\theta : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cv - Bw\,. & Aw - Cu & Bu - Av & 0 \\ u & v & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Тъй като $\vec{e}_3 \parallel \pi, |\vec{e}_3| \neq 0$, можем да изберем $\vec{e}_2' = \dfrac{\vec{e}_3}{|\vec{e}_3|}\left(-\dfrac{AC}{\sqrt{1-C^2}}, -\dfrac{BC}{\sqrt{1-C^2}}, \dfrac{1-C^2}{\sqrt{1-C^2}}\right)$.

Тогава $\vec{e}_1' = \left(-\dfrac{B}{\sqrt{1-C^2}}, \dfrac{A}{\sqrt{1-C^2}}, 0\right)$. Така окончателно получаваме за θ:

$$\theta : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{B}{\sqrt{1-C^2}} & \dfrac{A}{\sqrt{1-C^2}} & 0 & 0 \\ -\dfrac{AC}{\sqrt{1-C^2}} & -\dfrac{BC}{\sqrt{1-C^2}} & \dfrac{1-C^2}{\sqrt{1-C^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Така например за правоъгълна изометрия с $\varepsilon = \eta = 1$, ще имаме

$$\theta : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

За намиране на първата вторична проекция използваме същата матрица, като държим сметка, че за точката $\bar{M}(x, y, z, t)$ точката $\bar{M}_1(x, y, 0, t)$ е ортогонална проекция в равнината $(\bar{O}\bar{e}_1\bar{e}_2)$.