инд. стъпка:

$$x^n(i) = (x^{n-1}\cdot x)(i) = \sum_{j+k=i} x^{n-1}(\underset{\substack{\parallel\\ n-1}}{j})\; x(\underset{k=1}{k}) = \begin{cases} 0 & i \neq n \\ 1 & i = n \end{cases}$$

$$\varphi : K \to K[[x]]$$

$$k \longmapsto (k, 0, \dots) \;;\quad (\varphi(k))(i) = \begin{cases} k & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

φ – хом на пръстени

$$(\varphi(k+l))(i) = \begin{cases} k+l & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

$$\parallel$$

$$(\varphi(k)+\varphi(l))(i) = (\varphi(k))(i) + (\varphi(l))(i)$$

$$(\varphi(k)\cdot\varphi(l))(i) = \sum_{j+s=i} (\varphi(k))(\underset{\substack{\parallel\\ 0}}{j}) \cdot (\varphi(l))(\underset{\substack{\parallel\\ 0}}{s}) = \begin{cases} 0 & i \neq 0 \\ k\cdot l & i = 0 \end{cases}$$

$$\parallel$$

$$(\varphi(k\cdot l))(i)$$

$\operatorname{Ker} \varphi = \{0\} \to \varphi$ - инъект.; $K \cong \operatorname{Im} \varphi \underset{\text{подгр.}}{<} K[[X]]$

Отождествим K с $\operatorname{Im} \varphi$, т.е.

Считаем, что $(k, 0, \ldots) = k$

$$\left(\varphi(k) \cdot X^n\right)(i) = \sum_{j+s=i} (\varphi(k))(\underset{0}{j}) \cdot X^n(\underset{n}{s}) = \begin{cases} 0 & i \neq n \\ k & i = n \end{cases}$$

$$(k, 0, \ldots)(\underset{\uparrow 0}{0}, \ldots 0, \underset{\uparrow n}{1}, 0, \ldots) = (\underset{\uparrow 0}{0}, \ldots 0, \underset{\uparrow n}{k}, 0, \ldots)$$

$$f \in K[[X]] = \sum_{n=0}^{\infty} (0, \ldots \underset{\uparrow n}{f(n)}, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot X^n$$

Опр. $f \in K[[X]]$ $\quad \deg f = \max\{n \mid f(n) \neq 0\}$, ако $\exists$ ~~...~~

Ако не $\nexists$ $\quad \deg f = +\infty$

Тв. $\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$

$\deg fg \leq \deg f + \deg g$

Забел. $\{a_n\}$ – финитна, ако $\exists N : \forall n > N \ a_n = 0$

$\iff |\{n \mid a_n \neq 0\}| < \infty$

Опр. $K[X] \leq K[[X]]$ е подпръстенът от финитните редици. Нарича се пръстен от пол. на X с коеф. от K

Заб. $f \in K[X] \Rightarrow n = \deg f < \infty$ и $f = \sum_{i=0}^{n} \underline{f(i)} \cdot x^i$

Тв. K - област $\Rightarrow K[[X]]$ - област

Сл. K - област $\Rightarrow K[X]$ - област.

Тв. K - област $\Rightarrow \deg fg = \deg f + \deg g$
за $f \neq 0$ и $g \neq 0$

Заб. $f, g \in K[X]$ $\quad f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$
$(\deg f = n, \deg g = m)$; $h = fg = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i$
$c_0 = a_0 b_0$; $c_{m+n} = a_n b_m$

Заб. Удобно е да смятаме, че $\deg 0 = -\infty$
$\deg fg = \deg f + \deg g \quad \forall f, g \quad ((-\infty) + (+\infty) = -\infty)$

Зад. $(K[[x]])^* = \{ f \in K[[x]] \mid f(0) \in K^* \}$

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \qquad f_0 \in K^*$$

Зад. $(K[x])^* = K^*$

Зад. K е подпръстен на L, $\alpha \in L$

$$\varphi : K[x] \to L$$

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \longmapsto f(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i \quad (\text{стойност на } f \text{ в } \alpha)$$

φ е ХММ на пръстени

$$\left(+ \text{ - ок; } \cdot \ \sum_i a_i \alpha^i \cdot \sum_j b_j \alpha^j = \sum \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j \Big) \alpha^k \right)$$

Опр. α - корен ако $f(\alpha) = 0$

Тв. $K,\ \alpha \in K \overset{\deg f \geq 1}{\Rightarrow} \exists q \in K[x],\ r \in K : f = (x-\alpha)\cdot q + r,\ r = f(\alpha)$

$\deg q = \deg f - 1$

Д-во $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\ a_n \neq 0$

$$f(x) - \underbrace{f(\alpha)}_{\substack{\shortparallel \\ r}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{(x^i - \alpha^i)}_{\substack{\shortparallel \\ (x-\alpha)(\text{пол. от ст. } i-1 \text{ и ст. коеф. } 1)}} = (x-\alpha)\cdot q \ ;\ q = a_n x^{n-1} + \dots$$

Сл. α - корен $\Leftrightarrow \exists q : f = (x-\alpha) q$

Тв. K - област; $\deg f = n \Rightarrow f$ има най-много n разл. корена в K

Д-во Нека $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ - разл. корени на f

$$f = (x-\alpha_1) q_1 \ ;\ 0 = f(\alpha_2) = \underbrace{(\alpha_2 - \alpha_1)}_{\neq 0} q_1(\alpha_2) \overset{\text{област}}{\Rightarrow} q_1(\alpha_2) = 0$$

$$\Rightarrow \exists q_2 : q_1 = (x - \alpha_2) q_2$$

$f = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\,q_2$ и т.н.

$f = (x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_m)\,q_m \to n = \deg f \geq m$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \; m + \deg q_m$

Тв. K - област; $f, g \in K[x]$; $\deg f \leq n$, $\deg g \leq n$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ - разл. $\Rightarrow f = g$

Забел. $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i \underset{\text{смисъл}}{\overset{\text{опред.}}{\Longleftrightarrow}} m = n$ и $\forall i \;\; a_i = b_i$

$f = g$ във функционален смисъл, ако $\forall \alpha \in K \; f(\alpha) = g(\alpha)$

Пр. $f = x^p - x \in \mathbb{Z}_p[x]$, p - просто

$\forall \alpha \in \mathbb{Z}_p \quad f(\alpha) = 0$

Д-во $h = f - g$; $\deg h < n$; $\forall i = 1, \ldots, n \;\; h(\alpha_i) = 0$ Т!

Забел. Тв - принцип за сравняване на коефиц.

Зад. $h = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$; $\forall i = 1 \dots n$ $\quad h(\alpha_i) = 0$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_1^2 + \dots + a_{n-1} \alpha_1^{n-1} = 0 \\ a_0 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_2^2 + \dots + a_{n-1} \alpha_2^{n-1} = 0 \\ \dots \\ a_0 + a_1 \alpha_n + a_2 \alpha_n^2 + \dots + a_{n-1} \alpha_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \dots & & & & \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0$$

Зад. Интерполационен полином на Лагранж

$\exists! h$: $\deg h < n$ и $\forall i = 1 \dots n$ $\quad h(\alpha_i) = \beta_i$

($\alpha_1 \dots \alpha_n$ – разл.)

(от горе $\exists! h$)

$\beta = (\beta_1 \ldots \beta_n)$; $h(\beta)$ – търсения полином

$$h(\lambda \beta' + \mu \beta'') = \lambda h(\beta') + \mu h(\beta'')$$

$$\left(W \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \right)$$

за $(1, 0, 0 \ldots 0)$ $\quad h(\alpha_1) = 1$, $\underbrace{h(\alpha_2) = \ldots = h(\alpha_n) = 0}$

$$h = (x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) \cdot C \; ; \; C = \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2) \ldots (\alpha_1 - \alpha_n)}$$

$$\omega(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n) \qquad h = \frac{\omega(x)}{(x - \alpha_1)\, \omega'(\alpha_1)}$$

$$\omega'(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_2) \ldots (\alpha_1 - \alpha_n)$$

$$l_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x - \alpha_i)\, \omega'(\alpha_i)}$$

$$\beta \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \beta_i l_i(x)$$

Пр. $x^2-2x \in \mathbb{Z}_{16}[x]$ $\qquad$ $0, 2$ - кор.; 8

Опр. $f \in K[x]$, K - област

α е k-кратен корен, ако $f=(x-\alpha)^k q$, $q(\alpha)\neq 0$

Тв. F - поле, $\operatorname{char} F = 0$; $f \in F[x]$

α е k-кратен на $f \Leftrightarrow f(\alpha)=f'(\alpha)=\dots=f^{(k-1)}(\alpha)$, $f^{(k)}(\alpha)\neq 0$

Зад. $f=\sum a_i x^i \longrightarrow f' \overset{def}{=} \sum (i\cdot a_i)x^i$

означение

Докажете, че $(f+g)'=f'+g'$, $(fg)'=f'g+fg'$

Зад. $F[x]$ - област (F - поле). Полето ѝ от частни

$F(x)=\left\{\frac{f(x)}{g(x)} \mid f,g \in F[x],\ g\neq 0\right\}$ полето от рационални ф-ии

Д-во: Ще док., че ако α е $k^{\geq 2}$-кратен на f, то α е $k-1$ кратен на f'

$$f = (x-\alpha)^k q, \quad q(\alpha) \neq 0$$

$$f' = k(x-\alpha)^{k-1} q + (x-\alpha)^k q' = (x-\alpha)^{k-1} \underbrace{(kq + (x-\alpha) q')}_{q_1}$$

$$f' = (x-\alpha)^{k-1} q_1$$

$$q_1(\alpha) = k\, q(\alpha) \neq 0 \quad (\operatorname{char} F \neq 0)$$

($\Rightarrow$) инд. по кратността

($\Leftarrow$) $f(\alpha) = 0 \to \alpha$ - корен $\to$ нека е s-кратен $\overset{(\Rightarrow)}{\Rightarrow}$

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(s-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(s)}(\alpha) \neq 0 \quad \Rightarrow s = k$$

Тв. α – кратен корен $\Leftrightarrow$ $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ $\quad (f\in F[x])$ — поле

Д-во $(\Rightarrow)$ $f=(x-\alpha)^k q$, $q(\alpha)\neq 0$, $k\geq 2$

$$f' = k(x-\alpha)^{k-1} q + (x-\alpha)^k q \; ; \; f'(\alpha)=0$$

$(\Leftarrow)$ $f(\alpha)=0 \to f=(x-\alpha)q$

$$f' = q + (x-\alpha)q' \xrightarrow{f'(\alpha)=0} q(\alpha)=0 \to q=(x-\alpha)q_1$$

$$\Rightarrow f=(x-\alpha)^2 q_1$$

Сл. $f\in F[x]$; f има кратен корен $\Leftrightarrow$ $(f,f')\neq 1$

Зад. F подполе на K; $f\in F[x]$

$$(f,f')_F = (f,f')_K$$

$f = (x-\alpha)\cdot q + f(\alpha)$, $\deg q = \deg f - 1$ (за $\deg f > 1$)

$f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$

? $q = b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}$

$$(x-\alpha)\, q = -\alpha b_0 + (\underbrace{b_0 - b_1\alpha}_{a_1})\, x + \dots + (\underbrace{b_{n-2} - b_{n-1}\alpha}_{a_{n-1}})\, x^{n-1} + \underbrace{b_{n-1}}_{a_n} x^n$$

$f(\alpha) - \alpha b_0 = a_0$