Тема: Степенни редове

Дефиниции и теореми

1. Ред от вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ се нарича **степенен ред.**

2. – Всеки степенен ред е сходящ при $x=0$.

– Ако съществува $x_0 \neq 0$, за което редът е сходящ, то съществува число R, такова че за всяко $|x|<R$ редът е сходящ, за всяко $|x|>R$ редът е разходящ. Числото R се нарича **радиус на сходимост. (** R може да бъде и ∞),

– в точките $-R$ и R редът може да бъде сходящ или разходящ. Множеството от всички точки, в които редът е сходящ се нарича **интервал (област) на сходимост.**

3. Радиусът на сходимост може да се намира с критериите на Даламбер или на Коши (ако може да се приложи граничната им форма).

4. Ред от вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ е също степенен ред. Понятията радиус на сходимост и област на сходимост са аналогични – областта на сходимост е интервал с център точката *a*.

Задача 1. а) Да се намери радиусът на сходимост на реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n(2n+1)}$;

б) да се намери областта му на сходимост.

Решение. а) Ще приложим критерия на Даламбер:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)[2(n+1)+1]}.\frac{n(2n+1)}{x^n}\right| = |x|\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} \to |x|.$$

При $|x|<1$ редът е сходящ, а при $|x|>1$ – редът е разходящ. Следователно радиусът на сходимост $R=1$.

б) При $x=1$ редът е $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$

Тъй като $\frac{1}{n(2n+1)} = \frac{1}{n^2}.\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ $\quad (\frac{1}{2+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2} \neq 0)$, то редът е сходящ.

При $x=-1$ редът $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$. Доказахме, че $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$ е сходящ. Следователно $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$ е абсолютно сходящ.

Задача 2. а) Да се намери радиусът на сходимост на реда $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\right)^3 x^n$;

б) да се намери областта му на сходимост.

Решение. Да припомним, че $(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)...5.3.1$ и

$(2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)...6.4.2 = 2^n n(n-1)(n-2)...3.2.1 = 2^n n!$.

Прилагаме критерия на Даламбер.

$a_n = \left(\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\right)^3 x^n$ и

$$a_{n+1}=\left(\frac{((n+1)+1)!}{(2(n+1)+1)!!}\right)^3 x^{n+1}=\left(\frac{(n+2)!}{(2n+3)!!}\right)^3 x^{n+1}=\left(\frac{(n+2).(n+1)!}{(2n+3).(2n+1)!!}\right)^3 x^{n+1}.$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\left(\frac{(n+2).(n+1)!}{(2n+3).(2n+1)!!}\right)^3 x^{n+1}.\left(\frac{(2n+1)!!}{(n+1)!}\right)^3\frac{1}{x^n}\right|=|x|\left(\frac{n+2}{2n+3}\right)^3\to\frac{|x|}{8}$$

При $\frac{|x|}{8}<1$ или $|x|<8$ редът е сходящ, а при $\frac{|x|}{8}>1$ или $|x|>8$ – редът е разходящ. Следователно радиусът на сходимост е $R=8$.

б) При $x=8$ редът е $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\right)^3 8^n$ (ред с положителни членове) .

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{n+2}{2n+3}\right)^3.8=\left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^3\to 1.$$

Но тъй като $\left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^3>1$, то редът е разходящ.

Да припомним, че от $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1\Rightarrow|a_{n+1}|>|a_n|...>a_1$ следва, че a_n не клони към нула.

При $x=-2$ редът е $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\right)^3 8^n$. Редът е разходящ, тъй като редицата $|a_n| =\left\{\left(\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\right)^3 2^n\right\}$ не клони към нула (необходимо условие за сходимост).

Областта на сходимост е интервала $-8<x<8$.

Задача 3. а) Да се намери радиусът на сходимост на реда $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$;

б) да се намери областта му на сходимост.

Решение. а) Ще приложим критерия на Даламбер

$$a_n=\binom{2n}{n}x^n=\frac{\overbrace{2n.(2n-1)(2n-2)...(n+2)(n+1)}^{n\ \text{множителя}}}{n!}x^n$$

$$a_{n+1}=\binom{2(n+1)}{n+1}x^{n+1}=\binom{2n+2}{n+1}x^{n+1}=\frac{\overbrace{(2n+2)(2n+1)2n.(2n-1)(2n-2)...(n+2)}^{n+1\ \text{множителя}}}{(n+1)n!}x^{n+1}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|x^{n+1}.\frac{(2n+2)(2n+1)2n.(2n-1)(2n-2)...(n+2)}{(n+1).n!}.\frac{n!}{2n.(2n-1)(2n-2)...(n+2)(n+1)}.\frac{1}{x^n}\right|=$$

$$=|x|.\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\to 4|x|.$$

При $4|x|<1$ или $|x|<\frac{1}{4}$ редът е сходящ, а при $4|x|>1$ или $|x|>\frac{1}{4}$ – редът е разходящ. Следователно радиусът на сходимост е $R=\frac{1}{4}$.

б) При $x=\frac{1}{4}$ редът е $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$. Това е ред с положителни членове и

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}=\frac{4n^2+6n+2}{4n^2+8n+4}\to 1.$$

Тъй като $\frac{4n^2+6n+2}{4n^2+8n+4}<1$ критерия на Даламбер не дава резултат. Прилагаме критерия на Раабе и Дюамел

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+6n+2}-1\right)=\frac{n(2n+2)}{4n^2+6n+2}\to\frac{2}{4}<1$$

Редът е разходящ, но тъй като границата е положително, то

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}=0.$$

При $x=-\frac{1}{4}$ редът е $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$. Това е Лайбницевски ред. За редицата $a_n=\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$ доказахме, че $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}=0$, и монотонно намаляваща ($\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$). По критерия на Лайбниц редът $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$ е сходящ. (По горе доказахме, че $\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$, което означава, че $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$ е условно сходящ.

Областта на сходимост е интервала $-\frac{1}{4}\le x<\frac{1}{4}$.

Задача 4. Да се намери радиусът на сходимост на реда

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}+(-3)^n}{n}x^n$.

Решение. В тази задача ще приложим критерия на Коши. Ще използваме следните твърдения:

– ако $a_n\to a>0$, то $\sqrt[n]{a_n}\to 1$

– $\sqrt[n]{n}\to 1$

а) $\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n\sqrt{n}}\right|}=\frac{|x|}{\sqrt[n]{n\sqrt{n}}}=\frac{|x|}{\sqrt[n]{n}\sqrt{\sqrt[n]{n}}}\to|x|$

При $|x|<1$ редът е сходящ, а при $|x|>1$– редът е разходящ. Следователно радиусът на сходимост $R=1$.

б) $\sqrt[n]{\left|\frac{5^{n-1}+(-3)^n}{n}x^n\right|}=|x|\frac{5.\sqrt[n]{\frac{1}{5}+(\frac{-3}{5})^n}}{\sqrt[n]{n}}\to 5|x|$

Използвахме, че $\frac{1}{5}+(\frac{-3}{5})^n\to\frac{1}{5}>0$

(Пресмятанията могат да се направят при $n\ge 4$–тогава подкоренната величина е положителна и може да се махни модула).

При $5|x|<1$ или $|x|<\frac{1}{5}$ редът е сходящ, а при $5|x|>1$ или $|x|>\frac{1}{5}$ – редът е разходящ. Следователно радиусът на сходимост е $R=\frac{1}{5}$.

Задачи за самостоятелна работа

Задача 5. Задача 3. а) Да се намери радиусът на сходимост на реда

$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}\frac{x^n}{(n+1)^{k+1}}$, където k дадено естествено число;

б) да се намери областта му на сходимост.

Задача 6. а) Да се намери радиусът $R(p)$ на сходимост на реда $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{2n-1}x^{2n}$.

б) да се намери областта му на сходимост.