# Упражнение №10:

## Индуктивен принцип на Скот

Синоними:

*Индуктивен принцип на Скот и Де Бакер*

*Правило/принцип за $\mu$-индукция на Скот*

*Индукционно правило на Скот*

На английски ще го срещнете и като

*Scott's fixed-point induction principle*

Индуктивният принцип на Скот е *метод за доказване на свойства на най-малките неподвижни точки на непрекъснати оператори* в области на Скот. Сега ще го прилагаме за оператори над ОС $(\mathcal{F}_n, \subseteq, \emptyset^{(n)})$, а по-нататък — за оператори в произволни области на Скот. И тъй като денотационната семантика на рекурсивните програми се дефинира посредством н.м.н.т. на такива оператори, то индуктивният принцип на Скот всъщност се явява *метод за доказателство на коректност на рекурсивни програми.* Както ще съобразим по-долу, с правилото на Скот ще можем да доказваме само *частична коректност* на такива програми. Това не бива да ни разочарова — все пак, никое правило не е универсално ⌣̈. А и за доказване на *завършване* на програми вече имаме позната техника — *индукцията над фундирани множества*, която, оказва се, работи перфектно и в случая на рекурсивни програми.

Да си припомним твърденията от лекцията за правило на Скот, които ще ни трябват за задачите.

**Индуктивен принцип на Скот.** Нека $\Gamma : \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathcal{F}_n$ е непрекъснат (компактен) оператор, а $P$ е свойство в $\mathcal{F}_n$, което удовлетворява условията:

1) $P(\emptyset^{(n)})$;

2) за всяка $f \in \mathcal{F}_n$ е вярно, че $P(f) \implies P(\Gamma(f))$;

3) свойството $P$ е непрекъснато.

Тогава $P$ е вярно за най-малката неподвижна точка $f_\Gamma$ на оператора $\Gamma$.

Тук по определение свойството $P$ в множеството $\mathcal{F}_n$ е *непрекъснато*, ако за всяка монотонно растяща редица $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \dots$ в $\mathcal{F}_i$ е изпълнено:

$$\forall i P(f_i) \implies P(\bigcup_i f_i). \qquad (1)$$

С други думи, $P$ е непрекъснато, ако то "издържа" на граничен преход.

По-голямата част от задачите, които ще разглеждаме, ще са за един специален вид свойства — т.нар. свойства от тип частична коректност. Да фиксираме някакво входно условие $I(x_1,\dots,x_n)$ и изходно условие $O(x_1,\dots,x_n,y)$. Свойството от тип *частична коректност* $P_{p.c.}$ в $\mathcal{F}_n$ (относно дадените $I$ и $O$) се определя с еквивалентността:

$$P_{p.c.}(f) \iff \forall x_1\dots\forall x_n(\ (I(\bar{x})\ \&\ !f(\bar{x})) \implies O(\bar{x},f(\bar{x}))).$$

Тук $\bar{x}$ е съкращение за $(x_1,\dots,x_n)$.

В някои от задачите входното условие $I(\bar{x})$ ще е "истина" за всяко $\bar{x}\in\mathbb{N}^n$, или все едно — няма да има специално изискване за входните данни. Тогава горното свойство за частична коректност изглежда по-просто:

$$P_{p.c.}(f) \iff \forall x_1\dots\forall x_n(!f(\bar{x}) \implies O(\bar{x},f(\bar{x}))).$$

От лекциите знаем, че всяко свойство от тип частична коректност е непрекъснато. Освен това, всяко такова свойство тривиално е вярно за $\emptyset^{(n)}$:

$$P_{p.c.}(\emptyset^{(n)}) \iff \forall x_1\dots\forall x_n(\ \underbrace{\underbrace{(I(\bar{x})\ \&\ \underbrace{!\emptyset^{(n)}(\bar{x})}_{false})}_{false} \implies O(\bar{x},\emptyset^{(n)}(\bar{x}))}_{true}\ ).$$

Тъй като предпоставката на импликацията е винаги "лъжа", то цялата импликация е винаги "истина", т.е. първото от трите условия в правилото на Скот $P_{p.c.}(\emptyset^{(n)})$ е вярно за всяко свойство от тип частична коректност.

Точно обратното е положението със свойствата от тип *тотална коректност* $P_{t.c.}$, които които имат следния общ вид:

$$P_{t.c.}(f) \iff \forall x_1\dots\forall x_n(I(\bar{x}) \implies (\ !f(\bar{x})\ \&\ O(\bar{x},f(\bar{x}))\ )\ ).$$

При тях $P_{t.c.}(\emptyset^{(n)})$ е винаги "лъжа", защото

$$P_{t.c.}(\emptyset^{(n)}) \iff \forall x_1\dots\forall x_n\underbrace{(I(\bar{x}) \implies \underbrace{(\ \underbrace{!(\emptyset^{(n)}(\bar{x})}_{false}\ \&\ O(\bar{x},(\emptyset^{(n)}(\bar{x}))\ )}_{false}\ )}_{false}.$$

Изводът, разбира се е, че тези свойства не могат да се доказват с индуктивния принцип на Скот. В частност, така не може да се показва и *завършване* (*терминация*) при условие $I$, защото свойството $P_{term}$ е частен случай на $P_{t.c.}$:

$$P_{term}(f) \iff \forall x_1\dots\forall x_n(I(\bar{x}) \implies !f(\bar{x})).$$

Свойства от този тип ще доказваме с индукция по някаква фундирана наредба, която обикновено се вижда лесно от дефиницията на Γ. Разбира се, при някои от задачите със структурна индукция можем да доказваме директно свойства от тип тотална коректност.

Тъй като проверката за компактност беше тема на предишно упражнение, във всички задачи от този раздел ще приемаме без доказателство, че съответният оператор е компактен и следователно можем да прилагаме индуктивния принцип на Скот.

**Задача 1.** Даден е операторът $\Gamma : \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$, който се дефинира по следния начин:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x < y \\ f(x-y,y)+1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нека $f_\Gamma$ е най-малката неподвижна точка на оператора.

**а)** Да се докаже, че за $f_\Gamma$ е изпълнено условието:

$$\forall x \forall y > 0 (!f_\Gamma(x,y) \implies f_\Gamma(x,y) \simeq \lfloor \frac{x}{y} \rfloor).$$

**б)** Да се докаже, че $\forall x \forall y > 0 \ !f_\Gamma(x,y)$.

**в)** Да се докаже, че $\forall x \ \neg ! f_\Gamma(x,0)$.

**Решение.** **а)** Да означим с $P$ свойството от условието на задачата:

$$P(f) \overset{\text{деф}}{\iff} \forall x \forall y > 0 (!f(x,y) \implies f(x,y) \simeq \lfloor \frac{x}{y} \rfloor).$$

За да покажем, че $P(f_\Gamma)$ е вярно, е достатъчно да проверим трите изисквания на правилото на Скот:

1) $P(\emptyset^{(2)})$;

2) $P(f) \implies P(\Gamma(f))$ за всяка $f \in \mathcal{F}_2$;

3) $P$ е непрекъснато.

Свойството $P$ можем да препишем като:

$$P(f) \iff \forall x \forall y (\underbrace{y > 0}_{I(x,y)} \ \& \ !f(x,y) \implies \underbrace{f(x,y) \simeq \lfloor \frac{x}{y} \rfloor}_{O(x,y,f(x,y))}),$$

откъдето се вижда, че то е свойство от тип "частична коректност и съгласно това, което казахме по-горе, $P$ е непрекъснато свойство. За такива свойства видяхме още, че условието $P(\emptyset^{(2)})$ винаги е вярно.

Следователно остана да проверим само второто изискване от правилото на Скот, което впрочем е единственото, в което участва операторът $\Gamma$.

Наистина, да вземем произволна функция $f \in \mathcal{F}_2$ и да приемем, че за нея $P(f)$ е вярно, т.е. изпълнено е:

$$\forall x \forall y > 0(!f(x,y) \implies f(x,y) \simeq \lfloor \frac{x}{y} \rfloor). \tag{2}$$

Да отбележим, че допускането, че $P(f)$ е вярно, е всъщност *индукционната хипотеза* при този тип индукция. *Индукционната стъпка* се състои в това да покажем, че и $P(\Gamma(f))$ е вярно.

Свойството $P$, разписано за $\Gamma(f)$ изглежда така:

$$P(\Gamma(f)) \iff \forall x \forall y > 0(!\Gamma(f)(x,y) \implies \Gamma(f)(x,y) \simeq \lfloor \frac{x}{y} \rfloor).$$

За да покажем $P(\Gamma(f))$, фиксираме произволни естествени $x$ и $y > 0$ и приемаме, че за тях $!\Gamma(f)(x,y)$. Трябва да проверим, че

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \lfloor \frac{x}{y} \rfloor.$$

Ясно е, че стойността на $\Gamma(f)(x,y)$ зависи от това дали $x < y$ или $x \geq y$. Да разгледаме поотделно двата случая:

**1 сл.** $x < y$. Този случай е базисен за $\Gamma$, т.е. тук $\Gamma(f)(x,y)$ въобще не зависи от $f$. Имаме

$$\Gamma(f)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{=} 0 = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor,$$

тъй като при $x < y$ очевидно $\lfloor \frac{x}{y} \rfloor = 0$.

**2 сл.** $x \geq y$**.** В този случай $\Gamma(f)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(x-y,y)+1$.

Но ние приехме, че $\Gamma(f)(x,y)$ има стойност, което в случая означава, че и $f(x-y,y)$ има стойност. Но в такъв случай можем да приложим индукционното предположение $P(f)$ (или (2) ), когато аргументите на $f$ са $(x-y$ и $y$. Ще имаме

$$f(x-y,y) \simeq \lfloor \frac{x-y}{y} \rfloor,$$

откъдето

$$\Gamma(f)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(x-y,y)+1 \simeq \lfloor \frac{x-y}{y} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor.$$

По този начин направихме индукционната стъпка, т.е. прехода $P(f) \implies P(\Gamma(f))$. И понеже $f$ беше произволна, можем да твърдим, че второто условие от индуктивния принцип на Скот е вярно също.

Да резюмираме: показахме, че и трите изисквания от индуктивния принцип на Скот са изпълнени и следователно свойството $P$ ще е в сила за $f_\Gamma$, т.е. ще е изпълнено, че:

$$\forall x \forall y > 0(!f_\Gamma(x,y) \implies f_\Gamma(x,y) \simeq \lfloor \frac{x}{y} \rfloor).$$

**б)** Свойството $\forall x \forall y > 0 \ !f_\Gamma(x,y)$ вече не можем да докажем с индуктивния принцип на Скот, защото това е свойство от тип „завършване":

$$P_{term}(f) \iff \forall x \forall y(\underbrace{y > 0}_{I(x,y)} \implies !f(x,y))$$

и за такива свойства видяхме, че пропада изискването $P_{term}(\emptyset^{(2)})$. Затова ще използваме друг тип индукция, която обикновено се нарича *индукция по структурата на данните* (или *структурна индукция*). На практика това е индукция по някаква фундирана наредба.

За да се ориентираме каква трябва да е тази наредба, можем да разгледаме рекурсивната програма, определена от опеартора $\Gamma$:

$R:$ `F( X, Y ) = if X < Y then 0 else F( X − Y, Y ) + 1`

Виждаме, че ако $Y > 0$, при всяко рекурсивно обръщение първият аргумент на $F$ *намалява*. Това ни навежда на мисълта да разсъждаваме с пълна индукция относно този аргумент.

Да отбележим, че когато доказваме свойство на $f_\Gamma$ със структурна индукция, никъде в доказателството не използваме, че става въпрос за *най-малката неподвижна точка* на оператора. Разсъжденията вървят за *всяка* неподвижна точка на $\Gamma$. Да видим как става това в тази задача.

Фиксираме *произволна* неподвижна точка $f$ на оператора $\Gamma$:

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x < y \\ f(x-y,y)+1, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3}$$

Искаме да покажем, че

$$\forall x \forall y > 0 \ !f(x,y).$$

Да препишем еквивалентно това условие:

$$\forall y > 0 \ \forall x \ \underbrace{!f(x,y)}_{Q(x)}.$$

Сега да фиксираме някакво $y > 0$. С пълна индукция относно $x \in \mathbb{N}$ ще покажем, че $\forall x Q(x)$, където $Q(x)$ е свойството:

$$Q(x) \iff !f(x,y).$$

База $x = 0$: понеже $0 = x < y$, то от избора на $f$ (условието (3)) ще имаме, че $f(x, y) = 0$, и в частност, $!f(x, y)$.

Сега да вземем произволно $x > 0$ и да приемем, че за всички $x' < x$ е вярно $Q(x')$, т.е. вярно е, че $!f(x', y)$ (индуктивна хипотеза). Трябва да покажем, че е вярно и $Q(x)$. Ще разгледаме поотделно случаите $x < y$ и $x \geq y$.

**1 сл.** $x < y$. Тогава $f(x, y) \stackrel{(3)}{=} 0$ и следователно $!f(x, y)$.

**2 сл.** $x \geq y$. Тук вече е моментът да приложим индуктивната хипотеза $Q(x')$ за $x' = x - y < x$. Наистина,

$$f(x, y) \stackrel{(3)}{\simeq} f(x - y, y) + 1,$$

и понеже по и.х. $!f(x - y, y)$, то значи и $!f(x, y)$.

Така показахме, че за кое да е $y > 0$ е вярно, че $\forall x Q(x)$, откъдето окончателно

$$\forall y > 0 \forall x\ !f(x, y).$$

**Забележка.** Да отбележим, че случаят $x < y$ е базов за рекурсивната схема (3), която $f$ удовлетворява, което автоматично означава, че той трябва да е базов случай и при доказателствата по индукция, свързани с $f$ (по-горе наистина беше така: при $x < y$ не използвахме индуктивната хипотеза). Ако искаме случаят $x < y$ да бъде базата на нашата индукция (и да не разглеждаме отделно случая $x = 0$, който, разбира се, се включва в $x < y$), можем да разсъждаваме така: ще следваме педантично схемата за пълна индукция, която разгледахме на първото упражнение:

*Принцип на пълната индукция:*

$$\frac{\forall x\ (\ \forall x'_{<x} Q(x') \implies Q(x))}{\forall x Q(x)} \qquad (*)$$

Отново фиксираме някакво $y > 0$. Като използваме принципа $(*)$, ще покажем, че за $\forall x Q(x)$, където отново $Q(x) \stackrel{\text{деф}}{\iff} !f(x, y)$.

Наистина, да вземем произволно $x \in \mathbb{N}$ и да приемем, че $\forall x'_{<x} Q(x')$ е вярно (индуктивна хипотеза). Ще докажем, че $Q(x)$ също е вярно. За целта разглеждаме двата случая:

**1 сл.** $x < y$. Тогава $f(x, y) \stackrel{(3)}{=} 0$ и следователно $!f(x, y)$, т.е. $Q(x)$ е вярно.

**2 сл.** $x \geq y$. Тук имаме, съгласно избора на $f$, че

$$f(x, y) \stackrel{(3)}{\simeq} f(x - y, y) + 1.$$

Но $y>0$, и значи $x-y<x$. Тогава индуктивната хипотеза $Q(x-y)$ е в сила, т.е. $!f(x-y,y)$, откъдето и $!f(x,y)$, т.е. вярно е $Q(x)$.

Така доказахме, че условието над чертата на правилото $(*)$ е изпълнено. Следователно е вярно и условието под чертата $\forall x Q(x)$.

**в)** Да означим с $R$ свойството

$$R(f) \iff \forall x\ \neg !f(x,0).$$

Тук отново можем да разсъждаваме с индуктивния принцип на Скот. За да покажем, че $R(f_\Gamma)$ е вярно, проверяваме последователно трите условия:

1) $R(\emptyset^{(2)})$, което е еквивалентно на $\forall x \neg !\emptyset^{(2)}(x,0)$ и значи е вярно.

2) Да приемем, че $R(f)$ е изпълнено за произволна $f \in \mathcal{F}_2$, т.е. вярно е, че за всяко $x \in \mathbb{N}, \neg !f(x,0)$. Защо е вярно и $R(\Gamma(f))$, т.е. защо $\neg !\Gamma(f)(x,0)$ за всяко $x \in \mathbb{N}$? Наистина, избирайки произволно $x \in \mathbb{N}$, можем да запишем:

$$\Gamma(f)(x,0) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(x-0,0)+1 \simeq f(x,0)+1.$$

Но съгласно индукционната хипотеза $R(f)$, $f(x,0)$ няма стойност, а оттук и $\Gamma(f)(x,0)$ няма стойност.

3) Остана да проверим, че $R$ е непрекъснато свойство. Наистина, да вземем произволна монотонно растяща редица $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \dots$ и да приемем, че всеки неин член $f_n$ има свойството $R$, т.е. вярно е, че

$$\forall x\ \neg !f_n(x,0).$$

Да означим с $f$ точната горна граница на тази редица. Трябва да видим, че $R(f)$ също е вярно, т.е. $\forall x \neg !f(x,0)$.

Да си припомним, че т.г.гр. $f$ на една монотонно растяща редица $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \dots$ се дефинира с условието: за всички естествени $\bar{x}, z$:

$$f(x,y) \simeq z \iff \exists n\ f_n(x,y) \simeq z.$$

Сега да вземем произволно $x$. Понеже за всяко $n$, $f_n(x,0)$ няма стойност, то от горната еквивалентност е ясно, че $f(x,0)$ също няма стойност (ако допуснем, че $f(x,0) \simeq z$ за някое $z$, то би трябвало да съществува $n$ : $f_n(x,0) \simeq z$, а такова $n$ няма). $\square$

**Забележка.** От трите подусловия на тази задача можем да заключим, че $f_\Gamma$ е следната функция:

$$f_\Gamma(x,y) \simeq \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & \text{ако } y>0 \\ \neg !, & \text{иначе.} \end{cases}$$

**Задача 2.** Даден е операторът $\Gamma : \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$, който се дефинира както следва:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} x, & \text{ако } x = y \\ f(x-y,y), & \text{ако } x > y \\ f(x,y-x), & \text{ако } x < y. \end{cases}$$

Нека $f_\Gamma$ е най-малката неподвижна точка на оператора.
**а)** Да се докаже, че за $f_\Gamma$ е изпълнено условието:

$$\forall x \forall y (!f_\Gamma(x,y) \implies f_\Gamma(x,y) \simeq \text{НОД}(x,y)).$$

**б)** Да се докаже, че $\forall x > 0 \forall y > 0 \ !f_\Gamma(x,y)$.

**в)** Да се докаже, че $\forall x \forall y \ ((x = 0 \ \dot{\vee} \ y = 0) \implies \neg !f_\Gamma(x,y))$.

**Решение.** **а)** Стандартно приложение на индуктивния принцип на Скот. Означаваме с $P(f)$ свойството от тази подточка:

$$P(f) \stackrel{\text{деф}}{\iff} \forall x \forall y (!f(x,y) \implies f(x,y) \simeq \text{НОД}(x,y)).$$

То е от тип "частична коректност" и съгласно това, което обсъждахме по-горе, на практика трябва да проверим само условието 2): за всяка $f \in \mathcal{F}_2$

$$P(f) \implies P(\Gamma(f))$$

Наистина, да вземем произволна функция $f \in \mathcal{F}_2$ и да предположим, че за нея е вярно $P(f)$:

$$\forall x \forall y (!f(x,y) \implies f(x,y) \simeq \text{НОД}(x,y)). \qquad \textit{(индукционна хипотеза)}$$

Трябва да покажем, че е в сила и $P(\Gamma(f))$, което в случая означава:

$$\forall x \forall y (!\Gamma(f)(x,y) \implies \Gamma(f)(x,y) \simeq \text{НОД}(x,y)).$$

Приемаме, че за някои $x, y$, $!\Gamma(f)(x,y)$ и преминаваме към разглеждане на трите случая от дефиницията на оператора:
**1 сл.** $x = y$. Тук по определение $\Gamma(f)(x,y) \ = \ x \ = \text{НОД}(x,y)$.

**2 сл.** $x > y$. Тогава $\Gamma(f)(x,y) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(x-y,y)$ и значи $!f(x-y,y)$. Но тогава можем да приложим индуктивната хипотеза $P(f)$, според която $f(x-y,y) = \text{НОД}(x-y,y)$. Така общо ще имаме:

$$\Gamma(f)(x,y) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(x-y,y) \stackrel{\text{и.х. } P(f)}{=} \text{НОД}(x-y,y) = \text{НОД}(x,y).$$

**3 сл.** $x < y$. Съвсем симетричен на горния.

**б)** Подобно на *Задача* 1, и тук свойството

$$P(f) \stackrel{\text{деф}}{\iff} \forall x > 0 \ \forall y > 0 \ !f(x,y)$$

не може да се атакува с принципа за $\mu$-индукция на Скот. Затова опитваме с друга индукция. Отново разсъжденията ще бъдат за *произволна* неподвижна точка на Γ. Наистина, да фиксираме една такава $f$:

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} x, & \text{ако } x = y \\ f(x-y,y), & \text{ако } x > y \\ f(x,y-x), & \text{ако } x < y. \end{cases}$$

Нека $Q$ е свойството

$$Q(x,y) \iff !f(x,y).$$

Ще използваме индукция по лексикографската наредба $\prec$ на $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ (за която знаем, че е фундирана), за да покажем, че

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \; Q(x,y).$$

Базата на индукцията е най-малкият относно $\prec$ елемент на $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ — $(1,1)$, за който имаме $f(1,1) = 1$ и значи $!f(1,1)$.

Сега да фиксираме произволни $(x,y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ и да приемем, че

$$\forall (x',y') \prec (x,y) \; Q(x',y') \qquad \textit{(индукционна хипотеза)}$$

За да покажем, че и $Q(x,y)$ е вярно, отново разглеждаме трите случая за $x$ и $y$:

**1 сл.** $x = y$. Тук само от избора на $f$ (без да използваме индуктивната хипотеза) имаме, че $!f(x,y)$.

**2 сл.** $x > y$. В този случай $f(x,y) \simeq f(x-y,y)$. Понеже $y > 0$, със сигурност $(x-y,y) \prec (x,y)$ и тогава по и.х. $Q(x-y,y)$ ще имаме, че $!f(x-y,y)$, а оттук и $!f(x,y)$.

**3 сл.** $x < y$. Аналогичен на горния, като използваме, че за $x > 0$ е вярно, че $(x,y-x) \prec (x,y)$.

*за упражнение* За упражнение: предредактирайте горното доказателство така, че базата на индукцията да бъдат всички двойки $(x,y)\colon\; x = y$.

**в)** Да означим с $R$ свойството от тази подточка:

$$R(f) \iff \forall x \forall y\, (x = 0 \,\dot{\vee}\, y = 0 \implies \neg !f(x,y)).$$

Тогава $R(\emptyset^{(2)})$ е очевидно, а непрекъснатостта на това свойство се проверява както в *Задача* 1 в). Остана да видим, че

$$R(f) \implies R(\Gamma(f)).$$

Вземаме произволна функция $f \in \mathcal{F}_2$, за която $R(f)$ е вярно. Избираме естествени числа $x, y$: $x = 0 \,\dot{\vee}\, y = 0$, т.е. такива, че точно едното от двете числа е 0. Нека например $x = 0$, а $y > 0$. Тогава

$$\Gamma(f)(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(x,y-x) \simeq f(0,y) \overset{\text{и.х. } R(f)}{\simeq} \neg !.$$

Случаят $x > 0$ и $y = 0$ е аналогичен. Съгласно индуктивния принцип на Скот можем да твърдим, че $R(f_\Gamma)$ е налице. $\square$

**Забележка.** Като следствие от тази задача получаваме, че

$$f_\Gamma(x,y) \simeq \begin{cases} \neg!, & \text{ако } x = 0 \mathbin{\dot\vee} \ y = 0 \\ \text{НОД}(x,y), & \text{иначе,} \end{cases}$$

ако, разбира се, приемем, че $\text{НОД}(0,0) \stackrel{\text{деф}}{=} 0$.

**Задача 3.** Даден е операторът $\Gamma: \ \mathcal{F}_2 \longrightarrow \ \mathcal{F}_2$, който се дефинира с условията:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ f(x-1,1), & \text{ако } x > 0 \ \& \ y = 0 \\ f(x-1, f(x, y-1)), & \text{ако } x > 0 \ \& \ y > 0. \end{cases}$$

Да се докаже, че за $f_\Gamma$ е изпълнено:

$$\forall x > 0 \forall y \ (!f_\Gamma(x,y) \implies f_\Gamma(x,y) = 1).$$

**Решение.** Това е първият ни пример за свойство $P$, което трябва *да усилим*, за да можем да направим индуктивния преход

$$P(f) \implies P(\Gamma(f)).$$

Но да видим защо се налага това. Да тръгнем за начало със свойството от условието на задачата, както беше в предишните ни примери. В случая то трябва да е

$$P(f) \iff \forall x > 0 \forall y \ (!f(x,y) \implies f(x,y) = 1).$$

Да приемем, че $P(f)$ е вярно и да се опитаме да покажем $P(\Gamma(f))$. За целта трябва да вземем произволни $x > 0$ и $y$, такива че $!\Gamma(f)(x,y)$. Наистина, да изберем $x = 1$ и $y = 0$, примерно. Тогава от дефиницията на $\Gamma$ ще имаме, че

$$\Gamma(f)(1,0) \simeq f(0,1).$$

Единственото, което знаем за $f$ е това, което сме предположили в индукционната хипотеза $P(f)$. Но в нея не се казва нищо за стойностите на $f$ в точки от вида $(0,y)$ и очевидно доказателството не може да продължи.

Така стигаме до извода, че трябва да *допълним* $P$ с още някакво свойство — да кажем $P_1$, в което е включена информация за всички стойности от вида $f(0,y)$. Но какви трябва да бъдат те?

Тъй като след прилагане на принципа на Скот, трябва да стигнем до извода, че $P_1(f_\Gamma)$ е вярно, излиза, че това трябва да са стойностите на $f_\Gamma$ в точките от вида $(0, y)$. Да ги пресметнем:

$$f_\Gamma(0, y) \simeq \Gamma(f_\Gamma)(0, y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} y,$$

следователно допълнителното свойство $P_1$ би трябвало да е нещо такова:

$$P_1(f) \iff \forall y \; f(0, y) \simeq y.$$

Но сега изниква друг проблем — това свойство $P_1$ очевидно не е вярно за $\emptyset^{(2)}$! Да пробваме да го "адаптираме" към условията на принципа на Скот, като го напишем в условен вид, така че да е тривиално вярно за $\emptyset^{(2)}$:

$$P_1(f) \iff \forall y \; (!f(0, y) \implies f(0, y) \simeq y).$$

Да означим с $P_2$ първоначалното свойство, което трябваше да докажем, а именно:

$$P_2(f) \iff \forall x > 0 \; \forall y \; (!f(x, y) \implies f(x, y) = 1)$$

и да обединим двете свойства в едно общо:

$$P(f) \iff P_1(f) \; \& \; P_2(f).$$

Двете части на $P$ са свойства от тип „частична коректност“ и следователно те са верни за $\emptyset^{(2)}$, откъдето следва, че и $P(\emptyset^{(2)})$ е вярно. Освен това $P_1$ и $P_2$ са непрекъснати, и значи тяхната конюнкция също е непрекъснато свойство (Твърдение 1.13 от записките). Така остана да проверим само че $P$ се запазва при прехода от $f$ към $\Gamma(f)$.

Наистина, да фиксираме произволна $f \in \mathcal{F}_2$ и да приемем, че за нея е вярно $P(f)$. Да покажем $P(\Gamma(f))$ означава да покажем поотделно, че са верни $P_1(\Gamma(f))$ и $P_2(\Gamma(f))$. Първото условие изглежда така:

$$P_1(\Gamma(f)) \iff \forall y \; (!\Gamma(f)(0, y) \implies \Gamma(f)(0, y) \simeq y).$$

От дефиницията на $\Gamma$ имаме

$$\Gamma(f)(0, y) \simeq y,$$

и значи $P_1(\Gamma(f))$ е вярно (забележете, че тук никъде не използвахме предпоставката на импликацията $!\Gamma(f)(0, y)$ от $P_1(\Gamma(f))$.

Пристъпваме към проверката на $P_2(\Gamma(f))$, което изглежда така:

$$P_2(\Gamma(f)) \iff \forall x > 0 \; \forall y \; (!\Gamma(f)(x, y) \implies \Gamma(f)(x, y) = 1).$$

Избираме произволни $x > 0$ и $y$, за които приемаме, че $!\Gamma(f)(x,y)$. Трябва да покажем, че $\Gamma(f)(x,y) = 1$. Имаме две възможности: $y = 0$ и $y > 0$, които ще разгледаме поотделно.

**1 сл.** $y = 0$. В този случай $\Gamma(f)(x,0) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(x-1,1)$ и следователно $!f(x-1,1)$. Сега възникват два подслучая:
**1.1** $x = 1$. Тогава

$$\Gamma(f)(1,0) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(0,1) \stackrel{\text{и.х. } P_1(f)}{\simeq} 1.$$

**1.2** $x > 1$. В този случай

$$\Gamma(f)(x,0) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(\underbrace{x-1}_{>0},1) \stackrel{\text{и.х. } P_2(f)}{\simeq} 1.$$

**2 сл.** $y > 0$. Тук вече $\Gamma(f)(x,y) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(x-1, f(x,y-1))$. Тогава ще са дефинирани изразите $f(x,y-1)$ и $f(x-1,f(x,y-1))$. Отново трябва да разгледаме два случая.
**2.1** $x = 1$. Тогава

$$\Gamma(f)(1,y) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(0,f(1,y-1)) \stackrel{\text{и.х. } P_1(f)}{\simeq} f(1,y-1) \stackrel{\text{и.х. } P_2(f)}{\simeq} 1.$$

**2.2** $x > 1$. В този случай

$$\Gamma(f)(x,y) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(\underbrace{x-1}_{>0}, f(x,y-1)) \stackrel{\text{и.х. } P_2(f)}{\simeq} 1.$$

Сега вече можем да твърдим, че $P_1(\Gamma(f))$ & $P_2(\Gamma(f))$ е вярно, т.е. $P(f)$ е вярно, с което индуктивната стъпка е проведена и следователно, съгласно правилото на Скот, $P(f_\Gamma)$ ще е изпълнено. Тогава, в частност, и $P_2(f_\Gamma)$ ще е изпълнено, което и трябваше да докажем. $\square$

**Задача 4. (Писмен изпит, 30.06. 2014, спец. КН и И)**
Операторът $\Gamma : \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ действа по правилото:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x+y \text{ е просто} \\ f(x+y,y)+1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Да се докаже, че:

**а)** операторът $\Gamma$ е компактен;

**б)** ако $f_\Gamma$ е най-малката неподвижна точка на $\Gamma$, то:

$$\forall x \forall y (!f_\Gamma(x,y) \implies x + y.f_\Gamma(x,y) \text{ е просто})$$

**Решение.** **б)** Да дефинираме свойството $P$ като

$$P(f) \iff \forall x \forall y(!f(x,y) \implies x+y.f(x,y) \text{ е просто}).$$

Това е свойство от тип частична коректност и следователно е непрекъснато. $P(\emptyset^{(2)})$ е очевидно, тъй че остана да проверим само второто условие от индукционното правило на Скот.

Наистина, да приемем, че за някоя $f \in \mathcal{F}_2$ е изпълнено $P(f)$. Ще докажем, че $P(\Gamma(f))$, т.е.

$$\forall x \forall y(!\Gamma(f)(x,y) \implies x+y.\Gamma(f)(x,y) \text{ е просто}).$$

Избираме произволни естествени числа $x$ и $y$ и приемаме, че $!\Gamma(f)(x,y)$. Отново ще трябва да разгледаме двете възможности за $x$ и $y$ от определението на $\Gamma$.

**1 сл.** $x+y$ е просто число. Тогава от дефиницията на $\Gamma$ имаме, че $\Gamma(f)(x,y) \simeq 1$ и значи

$$x+y.\Gamma(f)(x,y) \simeq x+y.1 = x+y$$

е просто число.

**2 сл.** $x+y$ не е просто число. Тогава

$$\begin{aligned} x+y.\Gamma(f)(x,y) &\overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} x+y.(f(x+y,y)+1)) \\ &\simeq (x+y)+y.f(x+y,y). \end{aligned}$$

Но ние имаме $!\Gamma(f)(x,y)$, откъдето и $!f(x+y,y)$. Следователно можем да приложим индуктивната хипотеза $P(f)$ и да получим, че

$$(x+y)+y.f(x+y,y) \text{ е просто число.}$$

Значи и стойността на израза $x+y.\Gamma(f)(x,y)$, за която видяхме, че е равна точно на $(x+y)+y.f(x+y,y)$, също ще е просто число.

Получихме, че $P(\Gamma(f))$ също е вярно, което приключва проверката на второто изискане от индукционното правило на Скот. Прилагаме го и получаваме, че $P(f_\Gamma)$ е вярно. □

**Задача 5.** Даден е операторът

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ако } x \text{ е четно} \\ f(f(\frac{3x+1}{2})), & \text{ако } x \text{ е нечетно.} \end{cases}$$

Да се докаже, че за $f_\Gamma$ е изпълнено:

$$\forall x(!f_\Gamma(x) \implies f_\Gamma(x) \le \frac{x}{2}).$$

**Решение.** Да означим с $P$ свойството от условието на задачата, т.е. свойството, което се дефинира с еквивалентността

$$P(f) \iff \forall x(!f(x) \implies f(x) \leq \frac{x}{2}).$$

Горното свойство е от тип "частична коректност" и значи е непрекъснато; освен това $P(\emptyset^{(1)})$ е винаги вярно. Това, което отново остава, е да проверим само второто условие от правилото на Скот.

Наистина, да фиксираме произволна функция $f \in \mathcal{F}_1$ и да приемем, че за нея $P(f)$ е вярно. Ще покажем, че и $P(\Gamma(f))$ е вярно.

$P(\Gamma(f))$ изглежда така:

$$P(\Gamma(f)) \iff \forall x(!\Gamma(f)(x) \implies \Gamma(f)(x) \leq \frac{x}{2}).$$

Избираме произволно $x$ и приемаме, че за него $!\Gamma(f)(x)$. Трябва да покажем, че

$$\Gamma(f)(x) \leq \frac{x}{2}.$$

Разглеждаме поотделно двата случая от дефиницията на $\Gamma$.

**1 сл.** $x$ е четно. По определение $\Gamma(f)(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \frac{x}{2} \leq \frac{x}{2}$.

**2 сл.** $x$ е нечетно. В този случай $\Gamma(f)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(f(\frac{3x+1}{2}))$.
Нашето предположение е, че $\Gamma(f)(x)$ има стойност, т.е. изразът $f(f(\frac{3x+1}{2}))$ има стойност. Това означава, съгласно определението за суперпозиция, че и изразът $f(\frac{3x+1}{2})$ трябва да има стойност. Сега прилагаме двукратно индукционното предположение $P(f)$ и получаваме последователно:

$$f(f(\frac{3x+1}{2})) \stackrel{\text{и.х. } P(f)}{\leq} \frac{f(\frac{3x+1}{2})}{2} \stackrel{\text{и.х. } P(f)}{\leq} \frac{\frac{\frac{3x+1}{2}}{2}}{2} = \frac{3x+1}{8} \leq \frac{x}{2}.$$

Така направихме индуктивната стъпка, т.е. преходът $P(f) \implies P(\Gamma(f))$. Понеже $f$ беше произволна, можем да твърдим, че условието 2) е в сила за всяка $f \in \mathcal{F}_1$. Финално, прилагайки правилото на Скот, можем да твърдим, че $P(f_\Gamma)$ вярно, т.е. наистина

$$\forall x(!f_\Gamma(x) \implies f_\Gamma(x) \leq \frac{x}{2}).$$

**Внимание!** Не можем да извършим горната оценка отвътре навън, макар привидно да изглежда, че и така получаваме верния резултат:

$$f(f(\frac{3x+1}{2})) \stackrel{\text{и.х. } P(f)}{\leq} f(\frac{\frac{3x+1}{2}}{2}) = f(\frac{3x+1}{4}) \stackrel{\text{и.х. } P(f)}{\leq} \frac{3x+1}{8} \leq \frac{x}{2}.$$

Намерете грешката/грешките $\smile$. $\square$

**Отговор.** В това разсъждение всъщност има две грешки. Едната е, че за първото неравенство се предполага неявно монотонност на $f$, която не следва отникъде. Другата грешка е, че при второто прилагане на индуктивната хипотеза трябва да сме осигурили, че $f(\frac{3x+1}{4})$ има стойност. Това отново по никакъв начин не се гарантира от предположението, което имаме за $f$, а именно — $f(f(\frac{3x+1}{2}))$.

*упражнение*

**Задача 6. (Писмен изпит, 14.02. 2018, спец. КН и И)**
Даден е следният оператор $\Gamma : \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} y+1, & \text{ако } x = y \\ f(f(x+1, y-1), y), & \text{ако } x < y \\ f(f(x-1, y+1), x), & \text{ако } x > y. \end{cases}$$

Да се докаже, че за най-малката му неподвижна точка $f_\Gamma$ е изпълнено:

$$\forall x \forall y (|x-y| \text{ е четно } \& \ !f_\Gamma(x,y) \implies f_\Gamma(x,y) \simeq \max(x,y)+1).$$