Векторна функция на скаларен аргумент

$K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ - ОКС

$q \in J \subset \mathbb{R}$

$x^1(q), x^2(q), x^3(q) : J \longrightarrow \mathbb{R}$ - три скаларни функции

$\vec{x}(q) = x^1(q).\vec{e}_1 + x^2(q).\vec{e}_2 + x^3(q).\vec{e}_3 \rightarrow$ вектор

$$\vec{x}(q) = \sum_{i=1}^{3} x^i(q).\vec{e}_i$$

$\vec{x}(q) : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ на числото q съпоставя вектор $\vec{x}(q)$

$x^1(q), x^2(q), x^3(q)$ - координатни функции на $\vec{x}(q)$

Свойства:

1) $\vec{x}(q)$ е непрекъсната в J, ако всяка от $x^i(q)$ е непрекъсната в J;

2) $\vec{x}(q)$ е диференцируема, ако всяка от $x^i(q)$ е диференцируема

$$\frac{d\vec{x}}{dq} = \dot{\vec{x}}(q) = \sum_{i=1}^{3} \frac{dx^i}{dq}.\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}^i.\vec{e}_i$$

$\dot{\vec{x}}(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$

3) $\vec{x}(q) \in C^k(J)$, к – кратно гладка, ако

$x_i(q) \in C^k(J)$, $i=\overline{1,3}$ – означава трите функции

да имат непрекъснати производни до ред к

включително.

4). $\vec{x}(q)$ е интегруема, ако x^1, x^2 и x^3 са

интегруеми : $\int_a^b \vec{x}(q)\,dq = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b x^i(q)\,dq \right) . \vec{e}_i$

5) Правила за диференциране:

$\vec{x}(q)$, $\vec{y}(q)$, $\vec{z}(q)$ – векторни функции

$\alpha(q)$, $\beta(q)$ – скаларни функции

a, b – числа

* $\dfrac{d(a.\vec{x})}{dq} = (a.\vec{x})^{\cdot} = a.\dot{\vec{x}}$

* $\dfrac{d(\alpha.\vec{x})}{dq} = (\alpha.\vec{x})^{\cdot} = \dot{\alpha}.\vec{x} + \alpha.\dot{\vec{x}}$

* $(\vec{x}.\vec{y})^{\cdot} = (\dot{\vec{x}}.\vec{y}) + (\vec{x}.\dot{\vec{y}})$

* $(\vec{x} \times \vec{y})^{\cdot} = (\dot{\vec{x}} \times \vec{y}) + (\vec{x} \times \dot{\vec{y}})$

* $(\vec{x}\vec{y}\vec{z})^{\cdot} = (\dot{\vec{x}}\vec{y}\vec{z}) + (\vec{x}\dot{\vec{y}}\vec{z}) + (\vec{x}\vec{y}\dot{\vec{z}})$

Основни задачи за векторни функции

1 зад. (Основна)

$\vec{x}(q) \in C^1(J)$, $|\vec{x}(q)| = const. \Leftrightarrow (\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}) = 0$

$\vec{x} \perp \dot{\vec{x}}$.

Доказателство:

$|\vec{x}| = a \Leftrightarrow \vec{x}^2 = a^2 \; \Big| \frac{d}{dq}$

$(\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}) + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{x}) = 0$

$2.(\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}) = 0$

$\vec{x} \perp \dot{\vec{x}}$

2 зад. (Основна)

$\vec{x}(q) \in C^1(J)$, $\vec{x}(q)$ има постоянно направление

$\Leftrightarrow \vec{x} \parallel \dot{\vec{x}} \Leftrightarrow \vec{x} \times \dot{\vec{x}} = \vec{o}$.

Доказателство:

I Нека $\exists \vec{a}$ - постоянен : $\vec{x}(q) \parallel \vec{a}$ за $\forall q \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha(q) : \vec{x}(q) = \alpha(q).\vec{a} \; \Big| \frac{d}{dq} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\vec{x}} = (\alpha.\vec{a})' = \dot{\alpha}.\vec{a} + \alpha.\vec{o} = \dot{\alpha}.\vec{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{x} \parallel \dot{\vec{x}} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \vec{x} \times \dot{\vec{x}} = \vec{o}$

II Нека $\vec{x} \times \dot{\vec{x}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \parallel \dot{\vec{x}} \Rightarrow \exists\, \beta(q): \dot{\vec{x}} = \beta . \vec{x}$

Търсим числова функция $\alpha(q)$: $\vec{x}(q) = \alpha(q) . \underset{\text{const.}}{\underset{\parallel}{\vec{a}}}$

Искаме $\left(\dfrac{\vec{x}}{\alpha}\right)^{\cdot} = \vec{0}$

Избираме $\alpha(q) = e^{\int_{q_0}^{q} \beta(t)dt} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\alpha}(q) = e^{\int_{q_0}^{q} \beta(t)dt} \cdot \beta(q) = \alpha(q) . \beta(q)$

Пресмятаме $\left(\dfrac{\vec{x}}{\alpha}\right)^{\cdot} = ?$

$$\left(\frac{\vec{x}}{\alpha}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{\vec{x}} . \alpha - \vec{x} . \dot{\alpha}}{\alpha^2} = \frac{(\beta . \vec{x}) . \alpha - \vec{x} . \alpha . \beta}{\alpha^2} = \vec{0} \Rightarrow \exists\, \vec{a} \text{ - пост.}$$

$\dfrac{\vec{x}(q)}{\alpha} = \vec{a} \Rightarrow \vec{x}(q) = \alpha(q) . \vec{a}$.

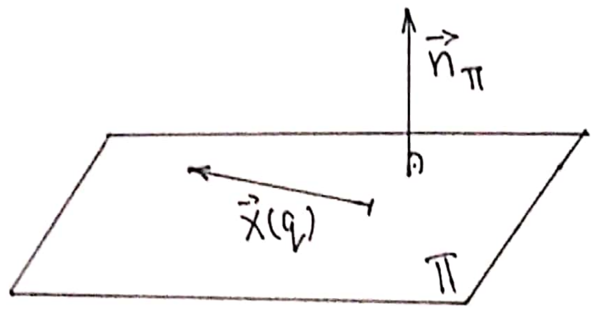
* * *

3 зад. (Основна)

$\vec{x}(q) \in C^2(J)$, $\vec{x}(q)$ - е компланарен на постоянна равнина $\Leftrightarrow (\vec{x}\ \dot{\vec{x}}\ \ddot{\vec{x}}) = 0$.

Доказателство:

I Нека Π е постоянна равнина $\Rightarrow \vec{n}_\Pi$ е постоянен.



Нека $\vec{x}(q) \parallel \vec{n}_\Pi$ за $\forall q \Rightarrow$

$\Rightarrow (\vec{x} . \vec{n}_\Pi) = 0$ за $\forall q$

$$(\vec{x}\cdot\vec{n}_\pi)=0 \;\Big|\frac{d}{dq} \Rightarrow (\dot{\vec{x}}\cdot\vec{n}_\pi)+\vec{x}\cdot\underbrace{\dot{\vec{n}}_\pi}_{\vec{0}}=0 \Rightarrow$$

$$(\dot{\vec{x}}\cdot\vec{n}_\pi)=0 \Rightarrow \dot{\vec{x}}(q)\parallel\pi$$

$$(\dot{\vec{x}}\cdot\vec{n}_\pi)=0 \;\Big|\frac{d}{dq} \Rightarrow (\ddot{\vec{x}}\cdot\vec{n}_\pi)=0 \Rightarrow \ddot{\vec{x}}(q)\parallel\pi$$

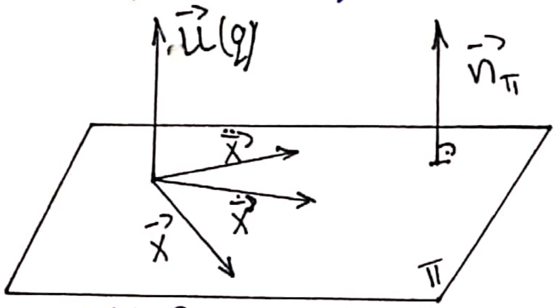
Извод: $\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}} \parallel \pi \Rightarrow$ л3 $\Rightarrow (\vec{x}\dot{\vec{x}}\ddot{\vec{x}})=0$.

II Нека $(\vec{x}\dot{\vec{x}}\ddot{\vec{x}})=0$

Ще док. че $\exists$ пост. равнина $\pi \parallel \dot{\vec{x}}(q)$ за $\forall q$

Разгл. $\vec{u}(q)=\vec{x}\times\dot{\vec{x}}\neq\vec{0}$

Ще док., че $\vec{u}(q)$ има постоянно направление (2 осн. зад.)



ще докажем

$$\left.\begin{aligned}\vec{u}&=x\times\dot{x}\\ \dot{\vec{u}}&=\underbrace{\dot{x}\times\dot{x}}_{\vec{0}}+x\times\ddot{x}=x\times\ddot{x}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}\times\dot{\vec{u}}=(\underset{1}{x}\times\underset{2}{\dot{x}})\times\underset{3}{\dot{u}}=(\underset{1}{x}\cdot\underset{3}{\dot{u}})\cdot\dot{\vec{x}}+(\underset{2}{\dot{x}}\cdot\underset{3}{\dot{u}})\cdot\vec{x}=$$

$$=\underbrace{(x\cdot(x\times\ddot{x}))}_{0}\cdot\dot{x}-(\dot{x}\cdot(x\times\ddot{x}))\cdot\vec{x}=\underbrace{(x\dot{x}\ddot{x})}_{0\text{ по условие}}\cdot\vec{x}=\vec{0}$$

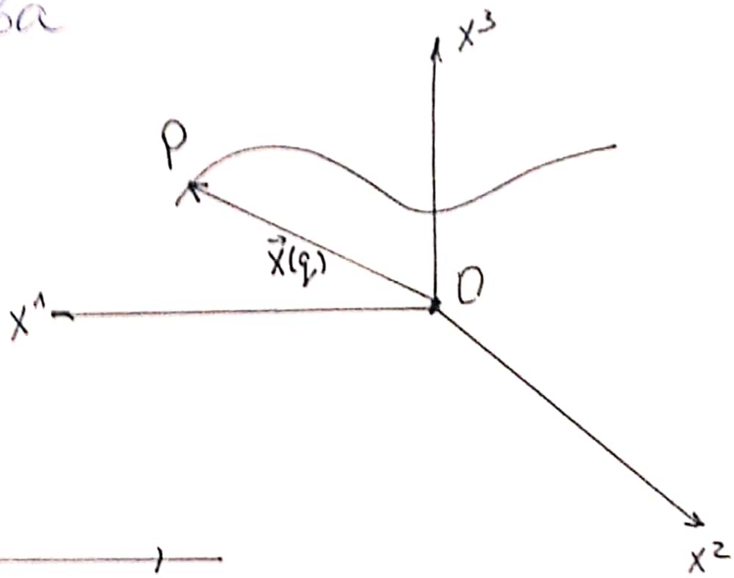
От $\vec{u}\times\dot{\vec{u}}=\vec{0}\Rightarrow\exists$ пост. в-р $\vec{n}$: $\vec{u}\parallel\dot{\vec{u}}\parallel\vec{n}$ - постоянен

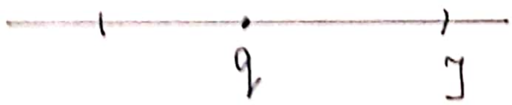
От $\vec{u}\parallel\vec{n}\Rightarrow\vec{x}\perp\vec{n},\ \dot{\vec{x}}\perp n$
От $\dot{\vec{u}}\parallel\vec{n}\Rightarrow\vec{x}\perp n,\ \ddot{\vec{x}}\perp n$
$\Rightarrow$ същ. пост. р-на π:

$\dot{\vec{x}}(q)\parallel\pi$ за $\forall q$.

Крива линия. Естествен параметър. Придружаващ триедър на Френе в точка от крива

I ОКС $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$





$\vec{x} = \vec{x}(q)$, $q \in J$ - векторна функция

$\vec{OP} = \vec{x}(q)$ - радиус-вектор

Когато q описва инт. J, т. P описва линия c в пространството спр. $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

$\vec{OP} = x^1(q).\vec{e}_1 + x^2(q).\vec{e}_2 + x^3(q).\vec{e}_3$

$c: \vec{x} = \vec{x}(q)$

$c: \begin{cases} x^1 = x^1(q) \\ x^2 = x^2(q) \\ x^3 = x^3(q) \end{cases}$, $q \in J$ - координатни параметрични уравнения на линията c.

Примери

$c_1: \begin{cases} x^1 = 1 + 2.q \\ x^2 = 2 - 2.q \\ x^3 = 3 + 1.q \end{cases}$, $q \in \mathbb{R}$, $q \in (0; +\infty)$, $q \in [5; 15]$

$$C_2: \begin{cases} x^1 = \cos q \\ x^2 = \sin q \ , q \in [0; 2\pi) \\ x^3 = 0 \end{cases} ; \quad C_3: \begin{cases} x^1 = 3.\cos q + 5 \\ x^2 = 3.\sin q + 6 \ , q \in [0; 2\pi) \\ x^3 = 7 \end{cases}$$

$$C_4: \begin{cases} x^1 = -3 \\ x^2 = 3.\cos q \ , \quad q \in [0; 2\pi) \\ x^3 = 5.\sin q \end{cases}$$

$$C_5: \begin{cases} x^1 = \operatorname{ch} q = \cosh q \\ x^2 = \operatorname{sh} q = \sinh q \ , q \in \mathbb{R} \\ x^3 = 0 \end{cases} \qquad \operatorname{ch} q = \frac{e^q + e^{-q}}{2}$$

$$\operatorname{sh} q = \frac{e^q - e^{-q}}{2}$$

$$C_6: \begin{cases} x^1 = \cos q \\ x^2 = \sin q \ , q \in \mathbb{R} \\ x^3 = q \end{cases}$$ – обикновена винтова линия

$$C_7: \begin{cases} x^1 = \operatorname{ch} q \\ x^2 = \operatorname{sh} q \ , q \in \mathbb{R} \\ x^3 = q \end{cases}$$

* * *

Линията $c: \vec{x} = \vec{x}(q)$ се нарича z-кратно гладка, ако: 1) $\vec{x} \in C^z(J)$;

2) $\dot{\vec{x}}(q) \neq \vec{o}$ за $\forall q \in J$.

II Дължина на дъга. Естествен параметър

$\vec{OP_0} = \vec{x}(q_0)$

$\vec{OP} = \vec{x}(q)$

$$s(q) = \int_{q_0}^{q} |\dot{\vec{x}}(t)|\,dt$$ - дължина на дъгата $\overset{\frown}{P_0P}$ от лин. c

$\dot{s}(q) = |\dot{\vec{x}}| > 0 \Rightarrow$ съществува обратна функция

$q = q(s)$

Смяна на параметъра:

$\vec{x} = \vec{x}(q) = \vec{x}(q(s)) = \vec{x}(s)$

Пресмятаме:

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{d\vec{x}}{dq} \cdot \frac{dq}{ds} = \frac{\dot{\vec{x}}}{\frac{ds}{dq}} = \frac{\dot{\vec{x}}}{\dot{s}} = \vec{x}\,'(s)$$

$$|\vec{x}\,'(s)| = \frac{|\dot{\vec{x}}|}{\dot{s}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{|\vec{x}\,'(s)| = 1}$$

$c : \vec{x} = \vec{x}(s)$ - линията c е параметризирана спрямо естествения си параметър

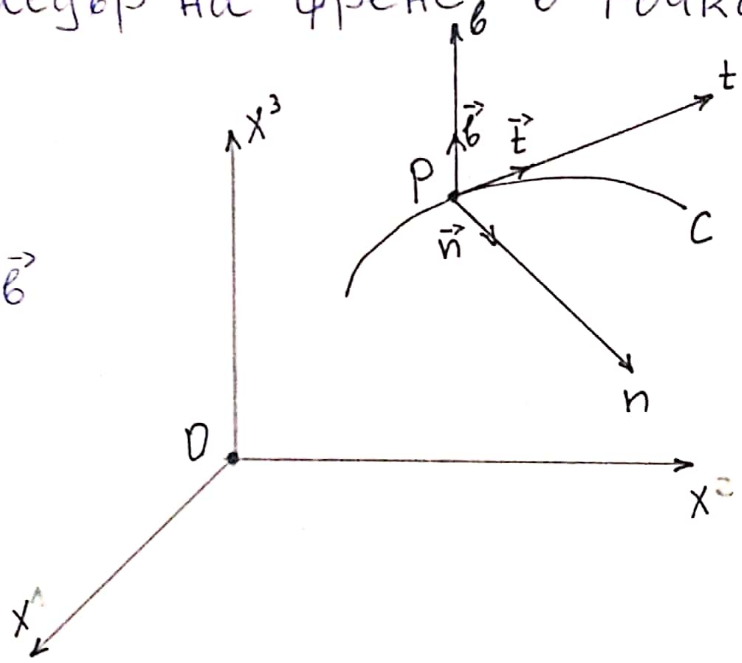
$c : \vec{x} = \vec{x}(q)$

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dq}$$

$c : \vec{x} = \vec{x}(s)$

$$\vec{x}\,' = \frac{d\vec{x}}{ds}$$

III Придружаващ триедър на Френе в точка от линия c.



$c: \vec{x} = \vec{x}(s)$, $\vec{x} \in C^3(J)$

Дефинираме ОКС $P\vec{t}\vec{n}\vec{b}$

* т. $P \in c$

* $\vec{t}(s) = \vec{x}\,'(s) \Rightarrow |\vec{t}| = 1$

$\vec{t}(s)$ – допирателен вектор в т. $P \in c$

* $\vec{n}(s) = \dfrac{\vec{x}\,''(s)}{|\vec{x}\,''(s)|} \Rightarrow |\vec{n}(s)| = 1$

От $|\vec{x}\,'| = 1 \underset{\text{осн. зад.}}{\Rightarrow} \vec{x}\,' \perp \vec{x}\,'' \Rightarrow \vec{t}(s) \perp \vec{n}(s)$

$\vec{n}(s)$ – вектор по главната нормала в т. $P \in c$

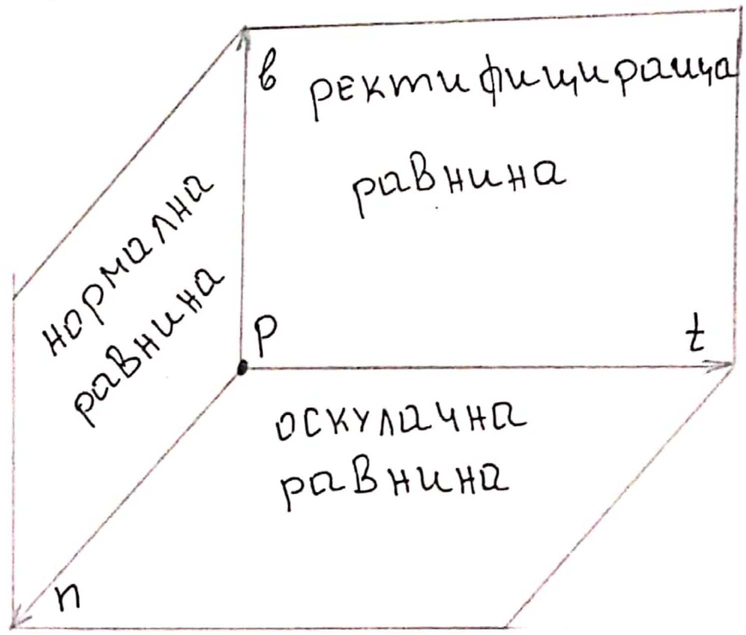
Посоката на $\vec{n}(s)$ е винаги към вдлъбнатата част на линията c.

* $\vec{b}(s) = \vec{t} \times \vec{n} \Rightarrow |\vec{b}| = 1$, $\vec{b} \perp \vec{t}$, $\vec{b} \perp \vec{n}$, $(t, n, b) \in S^+$

$\vec{b}(s)$ – вектор по бинормалата

$P\vec{t}\vec{n}\vec{b}$ – триедър на Френе

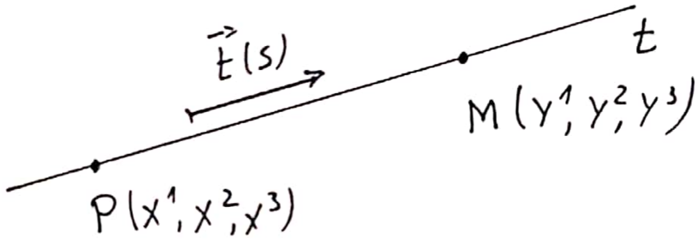
IV Координатни оси и координатни равнини на P_{tnb}



$t \begin{cases} \ni P \\ \parallel \vec{t} \end{cases}$

↳ допирателна в т. $P \in C$

$$t: \begin{cases} y^1 = x^1(s) + \lambda . t^1(s) \\ y^2 = x^2(s) + \lambda . t^2(s) \\ y^3 = x^3(s) + \lambda . t^3(s) \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$



$n: \begin{cases} \ni P \\ \parallel \vec{n}(s) \end{cases}$ – главна нормала в т. $P \in C$

$b: \begin{cases} \ni P \\ \parallel \vec{b}(s) \end{cases}$ – бинормала в т. $P \in C$

* * *

Оскулачна равнина $\begin{cases} \ni P \\ \perp \vec{b}(s) \end{cases}$

Ако $N(y^1, y^2, y^3)$ е произволна от оскулачната равнина, то

$$(\vec{PN} . \vec{b}) = 0 \Rightarrow (y^1 - x^1).b^1 + (y^2 - x^2).b^2 + (y^3 - x^3).b^3 = 0$$

общо уравнение

Пример: обикновена винтова линия

$$c: \begin{cases} x^1 = a.\cos q \\ x^2 = a.\sin q \\ x^3 = d.q \end{cases}, q \in \mathbb{R} \qquad \begin{matrix} a = const., a > 0 \\ d = const. \end{matrix}$$

$$c: \vec{x}(q)\,(a.\cos q, a.\sin q, d.q)$$

1) Дължина на дъга

$$\dot{\vec{x}}(q)\,(-a.\sin q, a.\cos q, d)$$

$$|\dot{\vec{x}}|^2 = (-a.\sin q)^2 + (a.\cos q)^2 + d^2 = a^2 + d^2$$

$$\dot{s}(q) = |\dot{\vec{x}}| = \sqrt{a^2+d^2}$$

$$s(q) = \int_0^q |\dot{\vec{x}}(\lambda)|\,d\lambda = \int_0^q \sqrt{a^2+d^2}\,d\lambda = \sqrt{a^2+d^2}.\lambda\Big|_0^q$$

$$\boxed{s(q) = \sqrt{a^2+d^2}.q}$$

$$q = \frac{s}{\sqrt{a^2+d^2}}$$

$$c: \begin{cases} x^1(s) = a.\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+d^2}} \\ x^2(s) = a.\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+d^2}} \\ x^3(s) = d.\frac{s}{\sqrt{a^2+d^2}} \end{cases} \Rightarrow$$ c е параметризирана спрямо естествения си параметър

$$\vec{x}'(s) = \frac{d\vec{x}}{ds} \Rightarrow |\vec{x}'(s)| = 1$$

2) Пресмятане на векторите от P_{tnb}

Наричат се векторни инварианти в точка от c.

$$* \quad \vec{t} = \vec{x}' = \frac{\dot{\vec{x}}}{\dot{s}} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|} \Rightarrow \vec{t}\left(\frac{-a.\sin q}{\sqrt{a^2+d^2}}, \frac{a.\cos q}{\sqrt{a^2+d^2}}, \frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}\right)$$

$$\dot{\vec{x}}(-a.\sin q, a.\cos q, d)$$

$$|\dot{\vec{x}}| = \sqrt{a^2+d^2}$$

$$* \quad \vec{b} = \frac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{\vec{x}}(-a.\sin q, a.\cos q, d) \\ \ddot{\vec{x}}(-a.\cos q, -a.\sin q, 0) \end{array} \times$$

$$\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}\left(a.d.\sin q, -a.d\cos q, a^2\right)$$

$$|\dot{x} \times \ddot{x}|^2 = a^2.d^2 + a^4 \Rightarrow |\dot{x} \times \ddot{x}| = a.\sqrt{a^2+d^2}$$

$$\vec{b} = \left(\frac{d.\sin q}{\sqrt{a^2+d^2}}, \frac{-d.\cos q}{\sqrt{a^2+d^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}\right)$$

Важно е да проверим дали $\vec{t} \perp \vec{b}$. $(\vec{t}.\vec{b}) = 0$

$$* \quad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} \Rightarrow \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2+d^2}} \cdot (d.\sin q, -d.\cos q, a)$$

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+d^2}} \cdot (-a.\sin q, a.\cos q, d)$$

$$\vec{b} \times \vec{t} = \frac{1}{a^2+d^2} \cdot \left(-\cos q.(a^2+d^2), -\sin q(a^2+d^2), 0\right)$$

$$\vec{n}(-\cos q, -\sin q, 0)$$

Важно е да проверим дали $\vec{n} \perp \vec{t}$, $\vec{n} \perp \vec{b}$, $|\vec{n}| = 1$.

Формули за $\vec{t}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$ спрямо произволен параметър

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}, \quad \vec{b} = \frac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}, \quad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$$

3) Координатни параметрични уравнения на главната нормала $n \begin{cases} \ni P \\ \parallel \vec{n}(q) \end{cases}$

$$n: \begin{cases} y^1 = a.\cos q + \mu.(-\cos q) \\ y^2 = a.\sin q + \mu.(-\sin q), \\ y^3 = d.q + \mu.0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \mu \in \mathbb{R} \\ q \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

За упр. уравнения на t и b.

4) Общо уравнение на оскулачната равнина

$$(y^1 - a.\cos q).\frac{d.\sin q}{\sqrt{a^2+d^2}} + (y^2 - a.\sin q).\left(\frac{-d.\cos q}{\sqrt{a^2+d^2}}\right) + (y^3 - d.q).\frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}} = 0$$

$$y^1.(d.\sin q) - y^2.(d.\sin q) + y^3.a - d.q = 0$$

За упр. общи уравнения на нормална равн. и на ректифицираща равнина.