(Задача)

Нека $\mathcal{L}$ е език с двуместен предикатен символ p и две индивидни константи a и b.

$\varphi_1: \forall x(\neg p(x,x) \,\&\, (p(x,b) \vee p(a,x)))$

$\varphi_2: \forall x \forall y \forall z(p(x,y) \,\&\, p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$

$\varphi_3: \forall x(p(x,b) \Rightarrow \exists y(p(x,y) \,\&\, p(y,b)) \,\&\, \exists y(p(y,x)))$

$\varphi_4: \forall x(p(a,a) \Rightarrow \neg \forall y(p(x,y) \Rightarrow \exists z(p(x,z) \,\&\, p(z,y))))$

Изпълними ли са:

1. $\Phi_1 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$
2. $\Phi_2 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$

Решение:

1. Когато заместим във φ_1 x с a получаваме
$\neg p(a,a) \,\&\, (p(a,b) \vee p(a,a))$,
което за да е истина трябва $p(a,b)$ да е истина.
Оттук φ_1 ни "казва" в началото

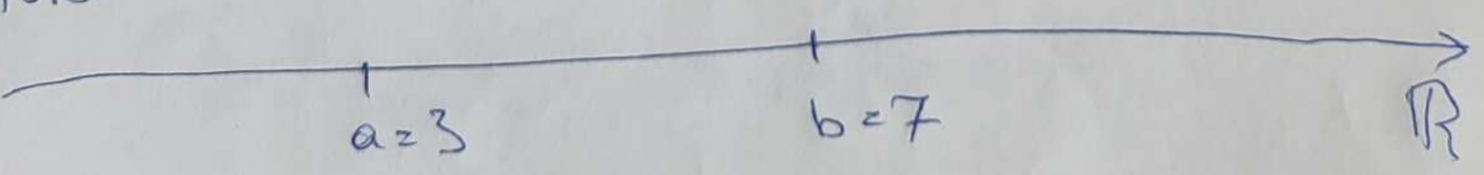
φ_1: "p е антирефлексивна и освен $a < b$"

φ_2: "транзитивност"

φ_3: "ако $x<b$, то има y м/у x и b и има y такова, че $y<x$."

$S = (\mathbb{R}, <, a^S, b^S)$, където $a^S = 3$, $b^S = 7$

Разглеждаме
Тогава $S \models \Phi_1$.



2. Какво ни казва φ_4?

φ_4: "ако $x < a$, то нямаме гъстота"

(гъстота - $\forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow \exists z (p(x,z) \,\&\, p(z,y))))$)

Нека $M = \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 3\} \cup [3, +\infty)$ и нека

$S' = (M, <, a^{S'}, b^{S'})$, където $a^{S'} = 3$, $b^{S'} = 7$

За φ_1 и φ_2 док. е аналогично.

Нека $x_0 < 7$ е произволно.

I сл. $x_0 \geq 3$, тогава $\frac{x_0 + 7}{2} \geq 3$, очевидно ~~$\frac{x_0+7}{2}$~~ $\in$

е в сила $\frac{x_0+7}{2} \in [3, \infty)$.

II сл. $x_0 < 3$, тогава $x_0 + 1 \in \mathbb{Z}$ и $x_0 + 1 \leq 3 < 7$.

Очевидно $S' \models \varphi_3$.

Нека $x_0 < a^S = 3$. Нека допуснем, че

$\forall y (p(x_0, y) \Rightarrow \exists z (p(x,z) \,\&\, p(z,y)))$

В частност това е вярно за $y_0 = x_0 + 1$. Имаме, че

$x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ и $y_0 = x_0 + 1$. От предположението

$\{n \in \mathbb{Z} \mid n < 3\}$ такова, че

получаваме, че има $z_0 \in$

$x_0 < z_0 < y_0 = x_0 + 1$, абсурд

Оттук $S' \models \varphi_4$ и $S' \models \Phi_2$.

Задача

Изпълнимо ли е мн-вото от ф-ли

$\varphi_1: \forall x(p(x) \Longleftrightarrow \neg p(f(x)))$

$\varphi_2: \forall x \exists y(r(x,y) \;\&\; r(f(f(f(x))), f(y)))$

$\varphi_3: \forall x(r(x,x))$

$\varphi_4: \forall x \forall y \forall z(r(x,y) \;\&\; r(y,z) \Longrightarrow r(x,z))$

$\varphi_5: \forall x \forall y(r(x,y) \Longrightarrow (p(x) \Longleftrightarrow p(y)))$

Решение:

φ_3: "рефлексивност"

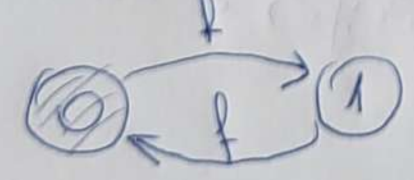
φ_4: "транзитивност"

φ_1: "f праща елементите в противоположните им спрямо p"

φ_2: в някакъв смисъл ни казва "f е нечетна спрямо r"

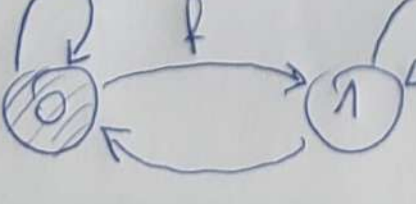
φ_5: "ако x и y са в релация спрямо r, то те имат еднаква истинност спрямо p"

От φ_1 виждаме, че ни трябват поне два елемента в нашия универсум, p да е истина за единия и лъжа за другия, f да ни праща от единия в другия. Почти:



$, p^S(x) \xleftrightarrow{def} x = 0$

От φ_3 виждаме, че r е рефлексивна. Така получаваме



$, p^S(x) \xleftrightarrow{def} x = 0$

Проверяване, че получената структура $S=(\{0,1\}, p^S, r^S, f^S)$

$p^S(x) \overset{def}{\Longleftrightarrow} x=0$

$r^S(x,y) \overset{def}{\Longleftrightarrow} x=y$

$f^S(0) \leftrightharpoons 1$, $f^S(1) \leftrightharpoons 0$

върши работа и за останалите ф-ли.

$S \models \varphi_1$: нека $x_0 \in \{0,1\}$ е произволно.
I случай: $x_0 = 0$, тогава $f(x_0) = 1$ и $p^S(x_0)$ е истина, а $p^S(f(x_0))$ е лъжа
II случай: $x_0 = 1$, тогава $f(x_0) = 0$ и $p^S(x_0)$ е лъжа, а $p^S(f(x_0))$ е истина.

$S \models \varphi_2$: нека $x_0 \in \{0,1\}$ е произволно. Нека $y_0 = x_0$ и и е изпълнено, че $r(x_0, y_0)$ е истина и $r(f(f(f(x_0))), f(y_0))$ е истина, тъй като ~~$f(f(f(x_0)))=1-x_0$ и $f()$~~ $f(f(f(x_0))) = 1 - x_0$ и $f(y_0) = 1 - y_0$, а $1 - x_0 = 1 - y_0$ $(x_0 = y_0)$.

$S \models \varphi_3$: нека $x_0 \in \{0,1\}$. Ако $x_0 = 0$, $r^S(x_0, x_0)$ е истина. Ако $x_0 = 1$, $r^S(x_0, x_0)$ също е истина,

$S \models \varphi_4$: нека $x_0, y_0, z_0 \in \{0,1\}$. Единственият вариант, в който $r^S(x_0, y_0)$ и $r^S(y_0, z_0)$ да са истина, е когато $x_0 = y_0 = z_0$. Тогава е в сила, че ~~$r(z_0, x_0)$ също~~ $r(x_0, z_0)$ също е истина.

$S \models \varphi_5$: нека $x_0, y_0 \in \{0,1\}$ са такива, че $r^S(x_0, y_0)$ е истина. Следователно $x_0 = y_0$, откъдето $p^S(x_0)$ е истина т.с.т.к. $p^S(y_0)$ е истина.

Така $S \models \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$

$\boxed{\text{Задача}}$

Изпълнимо ли е?

$\varphi_1: \exists x \forall y \exists z (p(x,y) \Rightarrow (p(x,x) \vee p(y,z) \vee \neg p(x,z)))$

$\varphi_2: \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow q(x,y))$

$\varphi_3: \exists x (\exists y\, q(x,y) \,\&\, \exists y \neg q(x,y))$

Решение:

I стъпка – φ_1: Първата ф-ла ни "принуждава" ~~да~~ единствено да имаме поне един елемент в света

$$0 \quad , \; p^s = \emptyset, \; q^s = \emptyset$$

II стъпка – φ_2: Не ни "кара" да добавяме нищо повече.

III стъпка – φ_3: Задължава ни да добавим още един елемент ~~още~~

$$0 \xrightarrow{q} 1 \quad , \; p^s = \emptyset, \; q^s = \{(0,1)\}$$