Смяна на променливите при двойни интеграли

Основна техника за решаване на определени интеграли е смяната на променливите. Ще я напомним за пълнота.

$\int_a^b f(x)dx$ търсим. Правим смяна $x=\varphi(t)$, φ има непрекъсната първа производна. $f(x)=f(\varphi(t))$. Сменяме интервала и dx:
За интервала намираме α, β, т.че $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.
(Така когато x се мени между a и b, t се мени между α и β).
$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)\,dt$. Така навсякъде сменихме x с t:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt.$$

$\iint_D f(x,y)\,dxdy$ търсим. Искаме да направим смяна. Вместо x, y да имаме нови променливи:

$x = g(u,v)$
$y = h(u,v)$. Когато $(x,y)\in D$, трябва да определим къде се мени (u,v).

Както при смяна в единични интеграли искаме g и h да имат непрекъснати частни производни.

$dxdy = |J|\,dudv$, където J е детерминантата: $J = \begin{vmatrix} g'_u & g'_v \\ h'_u & h'_v \end{vmatrix}$.

$|J|$ замества $\varphi'(t)$ ~~в~~ в едномерния случай

Така $\iint_D f(x,y) = \iint_T f(g(u,v), h(u,v))\,|J|\,dudv$ при следните условия:

- g и h имат непрекъснати (първи) частни производни
- Множество T е т.че $(u,v)\in T \iff (x,y)\in D$ (еднозначна смяна)
- $J\neq 0$ - необособеност на смяната.

Последните две условия могат да се нарушават в множества с лице 0.

Най-често (но не единствено) ще ползваме полярната смяна.

$x = r\cos\varphi$, $r \geq 0$.
$y = r\sin\varphi$, $\varphi \in [0; 2\pi]$. $\begin{pmatrix} g(r,\varphi) = r\cos\varphi \\ h(r,\varphi) = r\sin\varphi \end{pmatrix}$.

$g'_r, g'_\varphi, h'_r, h'_\varphi$ са непрекъснати.

Еднозначността се нарушава по лъча $\overrightarrow{Ox}$ – с лице 0.

Накрая $J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$

$|J| = |r| = r \neq 0$ за всяка точка освен началото на координатната система.

Това, че $|J| = r$ ще ползваме наготово нататък.

Числото $|J|$ се нарича Якобиан на смяната.

Зад.1. Намерете $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+24}}$, $D: x^2+y^2 \leq 25$.

Реш. При полярна смяна $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$
$r \geq 0$, $\varphi \in [0; 2\pi]$.

D се преобразува до $r^2 \leq 25 \iff r \leq 5$, т.е. $D: \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 5 \end{cases}$.

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+24}} = \int_0^{2\pi}\int_0^5 \frac{|J|.drd\varphi}{\sqrt{r^2+24}} = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^5 \frac{rdr}{\sqrt{r^2+24}}\right)d\varphi$$

Изразът в скобите не зависи от φ. От гледната точка на φ, подинтегралната функция е константа и тя излиза извън интеграла

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^5 \frac{rdr}{\sqrt{r^2+24}}\right)d\varphi = \int_0^5 \frac{rdr}{\sqrt{r^2+24}} \cdot \int_0^{2\pi} 1d\varphi = 2\pi \cdot \int_0^5 \frac{rdr}{\sqrt{r^2+24}} =$$

$$= \pi \cdot \int_0^5 \frac{2rdr}{\sqrt{r^2+24}} = \pi \cdot \int_0^5 (r^2+24)^{-1/2} d(r^2+24) = \pi \cdot \frac{(r^2+24)^{1/2}}{1/2}\Big|_0^5 =$$

$$= 2\pi\,(r^2+24)^{1/2}\Big|_0^5 = 2\pi\left(\sqrt{25+24} - \sqrt{24}\right) = \underline{2\pi(7-2\sqrt{6})}.$$

Тук ползвахме, че повторният интеграл е произведение от (еднократни) интеграли.

Зад. 2. Пресметнете $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $D: \left| \begin{array}{l} 0 \le x \le y \\ \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2 \end{array} \right.$

Реш. Когато има x^2+y^2 в условията определящи множеството, или в подинтегралната функция, винаги трябва да се пробва полярна смяна. В случая, $\left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right.$

$$\pi^2 \le x^2+y^2 \le (2\pi)^2$$
$$\Updownarrow$$
$$\pi^2 \le r^2 \le (2\pi)^2$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{\pi \le r \le 2\pi.}$$

$0 \le x \le y \Rightarrow \varphi$ в първи квадрант

Накрая, $x = r\cos\varphi \le y = r\sin\varphi$
$\Rightarrow \sin\varphi \ge \cos\varphi \Rightarrow \varphi \in [\pi/4; \pi/2]$.

Така множеството отново е правоъгълник: $\left| \begin{array}{l} \pi \le r \le 2\pi \\ \pi/4 \le \varphi \le \pi/2 \end{array} \right.$.

$$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_\pi^{2\pi}\left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin r).\underbrace{r}_{\text{Якобиан}}\,d\varphi\right)dr \circleddash \int_\pi^{2\pi}\left(r.\sin r.\int_{\pi/4}^{\pi/2} 1\,d\varphi\right)dr.$$

$$\circleddash \int_\pi^{2\pi} r\sin r\,dr . \int_{\pi/4}^{\pi/2} 1\,d\varphi = \frac{\pi}{4}\int_\pi^{2\pi} r\sin r\,dr.$$

~~Второто~~ равенство е защото $r.\sin r$ е константа спрямо φ.
Третото равенство е защото $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 1\,d\varphi$ е константа спрямо r.
(Ползваме, че $\int_a^b c.f(x)dx = c.\int_a^b f(x)dx$ за сложно изглеждащи с-та).

Решаваме като неопределен $\int r\sin r\,dr$ по части:

$$\int r\sin r\,dr = -\int r\,d\cos r = -r\cos r + \int \cos r\,dr = -r\cos r + \sin r.$$

$$\int_\pi^{2\pi} r.\sin r\,dr = -r\cos r + \sin r\Big|_\pi^{2\pi} = (-2\pi.1+0) - (-\pi.(-1)+0) = -2\pi - \pi = -3\pi.$$

Окончателно, търсеният интеграл е $\frac{\pi}{4}.(-3\pi) = -\frac{3\pi^2}{4}$.

Зад. 3. Намерете $\iint\limits_D \frac{y}{x^2+y^2+6}\,dxdy$, $D: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 \le 3 \\ x^2 \le y^2 \\ y \ge 0 \end{array} \right.$.

Реш. Отново прилагаме познатата полярна смяна:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad \begin{array}{l} r\ge 0 \\ \varphi\in[0;2\pi], \end{array} \quad |J| = r.$$

Как се изобразява D?

$x^2+y^2\le 3 \iff r^2\le 3 \iff r\le\sqrt{3}$.

$y\ge 0 \iff r\sin\varphi\ge 0 \iff \sin\varphi\ge 0 \iff \varphi\in[0;\pi]$.

$x^2\le y^2 \iff \cancel{r^2}\cos^2\varphi \le \cancel{r^2}\sin^2\varphi \iff \cos^2\varphi-\sin^2\varphi\le 0 \iff \cos 2\varphi\le 0$.

$0\le\varphi\le\pi \Rightarrow 0\le 2\varphi\le 2\pi$.

$\cos 2\varphi\le 0$ в този интервал за $2\varphi\in[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$, т.е.

за $\varphi\in[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]$.

Така ~~множеството~~ е правоъгълник $\tilde{D}\left|\begin{array}{l} \pi/4\le\varphi\le 3\pi/4 \\ 0\le r\le\sqrt{3} \end{array}\right.$.

$$\Rightarrow \iint_D \frac{y}{x^2+y^2+6}\,dx\,dy = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\left(\int_0^{\sqrt{3}} \frac{r(\sin\varphi)\cdot r}{r^2+6}\,dr\right)d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sin\varphi\cdot\left(\underbrace{\int_0^{\sqrt{3}}\frac{r^2}{r^2+6}\,dr}\right)d\varphi = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sin\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^{\sqrt{3}}\frac{r^2}{r^2+6}\,dr.$$

със същия трик от миналата задача.

Решаваме получените два интеграла поотделно:

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sin\varphi\,d\varphi = -\cos\varphi\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = -\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4} = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

$$\underbrace{\int_0^{\sqrt{3}}\frac{r^2}{r^2+6}\,dr}_{\text{рационална функция}} = \int_0^{\sqrt{3}}\frac{r^2+6-6}{r^2+6}\,dr = \int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{6}{r^2+6}\right)dr = r\Big|_0^{\sqrt{3}} - 6\cdot\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dr}{r^2+(\sqrt{6})^2}$$

$$= \sqrt{3} - 6\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{\sqrt{6}}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\sqrt{6}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(Тук ползваме табличния интеграл $\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$.)

Накрая, отговорът е $\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{6}-\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} =$

$$= \sqrt{6}\left(1-\sqrt{2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Общата идея зад последните задачи е, че ако D е правоъгълник: $D: \left| \begin{array}{l} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{array} \right.$ и $f(x,y)$ е произведение на функция на x и функция на y, $f(x,y) = g(x).h(y)$, то двойния интеграл е произведение от единични. По-точно:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{[a;b]\times[c;d]} g(x)h(y)\,dxdy = \left(\int_a^b g(x)dx\right).\left(\int_c^d h(y)dy\right).$$

Зад. 4. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{dxdy}{(6-x^2-y^2)^2}$, $D: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 \le 2y \\ y \le \sqrt{3}.x \end{array} \right.$

Реш. $\left| \begin{array}{l} x = r.\cos\varphi \\ y = r.\sin\varphi \end{array} \right.$, $\begin{array}{l} r \ge 0 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array}$, $|J| = r$. / $\left. \begin{array}{l} y \ge \frac{1}{2}(x^2+y^2) \ge 0 \\ x \ge \frac{1}{\sqrt{3}} y \ge 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$ I квадрант

$y \le \sqrt{3}x \Rightarrow \cancel{r}.\sin\varphi \le \cancel{r}.\sqrt{3}.\cos\varphi$

φ - в първи квадрант $\Rightarrow \underset{\text{(делим на } \cos(\varphi))}{tg\,\varphi \le \sqrt{3}} \Rightarrow \varphi \in [0; \pi/3]$.

$x^2+y^2 \le 2y \Rightarrow r^{\cancel{2}} \le 2\cancel{r}\sin\varphi$, $r \le 2\sin\varphi$.

Така образът на D при полярната смяна е трапец: $\left| \begin{array}{l} 0 \le \varphi \le \pi/3 \\ 0 \le r \le 2\sin\varphi \end{array} \right.$
Това вече не е правоъгълник и трикът от предните задачи не можем да приложим. Трапецът е "по φ" $\Rightarrow$ Външното интегриране е по φ.

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(6-x^2-y^2)^2} = \int_0^{\pi/3}\left(\int_0^{2\sin\varphi} \frac{r\,dr}{(6-r^2)^2}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\left(\int_0^{2\sin\varphi} \frac{dr^2}{(6-r^2)^2}\right)d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\left[\int_0^{2\sin\varphi}(6-r^2)^{-2}d(6-r^2)\right]d\varphi = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\left(-\frac{1}{6-r^2}\Big|_0^{2\sin\varphi}\right)d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\left(-\frac{1}{6-4\sin^2\varphi} + \frac{1}{6}\right)d\varphi = -\frac{1}{12}\int_0^{\pi/3} 1\,d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\frac{1}{2(3-2\sin^2\varphi)}d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{12}.\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3}\frac{d\varphi}{3-2\sin^2\varphi} = -\frac{\pi}{36} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3}\frac{d\varphi}{3(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)-2\sin^2\varphi} =$$

$$= -\frac{\pi}{36} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi + 3\cos^2\varphi} = -\frac{\pi}{36} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi(\operatorname{tg}^2\varphi + 3)} =$$

$$= -\frac{\pi}{36} + \frac{1}{4}\underbrace{\int_0^{\pi/3} \frac{d\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi + (\sqrt{3})^2}} = -\frac{\pi}{36} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^{\pi/3} =$$

Това е интеграл $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)$

$$= -\frac{\pi}{36} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\pi/3}{\sqrt{3}} - \underbrace{\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}0}{\sqrt{3}}}_{0}\right) = -\frac{\pi}{36} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{\pi}{36} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}1 = -\frac{\pi}{36} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{4} = \pi\left(\frac{1}{16\sqrt{3}} - \frac{1}{36}\right) = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{48} - \frac{1}{36}\right).$$

<u>Зад.5.</u> Намерете $\iint\limits_D (x+y)\sqrt{x-y}\,dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le y \le x \\ x^2+y^2 \le 1 \end{cases}$.

<u>Реш.</u> Отново правим полярна смяна $\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{matrix}$

$x^2+y^2 \le 1 \Rightarrow r \le 1$

$0 \le y \le x \Rightarrow 0 \le \varphi \le \pi/4$. $\Rightarrow$ Получаваме правоъгълник $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \pi/4. \end{cases}$

$$\int_0^1\left(\int_0^{\pi/4}(\cos\varphi+\sin\varphi)\sqrt{\cos\varphi-\sin\varphi}\cdot r\,d\varphi\right)dr = \int_0^1 r\,dr\cdot\int_0^{\pi/4}(\cos\varphi+\sin\varphi)\sqrt{\cos\varphi-\sin\varphi}\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\cos\varphi+\sin\varphi)\sqrt{\cos\varphi-\sin\varphi}\,d\varphi.$$

Последното обаче не е ясно как се смята.

Досега полярната смяна я правехме най-вече заради вида на множеството D. В едномерния случай смени правихме най-вече не заради интервала, а заради вида на подинтегралната функция. Стараехме се подинтегралната функция да има по-прост вид. При двойни интеграли смените можем да избираме също с цел да опростим подинтегралната функция.

В случая подинтегралната функция е $(x+y)\sqrt{x-y}$.

Да положим $u = x+y$, $v = x-y$.

Но нашите смени трябва да са $\begin{matrix} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \end{matrix}$

Решаваме $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ спрямо x и y: $\begin{matrix} 2x = u+v \\ 2y = u-v \end{matrix}$, $\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$.

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \to |J| = \frac{1}{2}.$$

Да видим областта:

$$x^2+y^2 \le 1 \Rightarrow \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = \frac{u^2+\cancel{2uv}+v^2+u^2-\cancel{2uv}+v^2}{4} = \frac{u^2+v^2}{2} \le 1.$$

$$\Rightarrow u^2+v^2 \le 2$$

$y \ge 0 \Rightarrow \frac{u-v}{2} \ge 0$, $u \ge v$

$x \ge y \Rightarrow \frac{u+v}{2} \ge \frac{u-v}{2} \Rightarrow u+v \ge u-v \Rightarrow v \ge 0.$

Така $T \begin{cases} u \ge v \ge 0 \\ u^2+v^2 \le 2 \end{cases}$

$$\iint_D (x+y)\sqrt{x-y}\,dx\,dy = \iint_T u\sqrt{v} \cdot \frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\iint_T u\sqrt{v}\,du\,dv.$$

За получения интеграл може да представим T като криволинейни трапци или ~~или~~ отново да направим полярна смяна.

Смяната $\begin{cases} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \end{cases}$ преобразува T в $\begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{2} \\ 0 \le \varphi \le \pi/4 \end{cases}$, $|J| = r$.

$$\frac{1}{2}\iint_T u\sqrt{v}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4} \underbrace{r\cdot\cos\varphi}_{u} \cdot \underbrace{\sqrt{r\sin\varphi}}_{v} \cdot \underbrace{r}_{|J|}\,d\varphi\,dr =$$

Множеството е правоъгълник. Подинтегралната функция е произведение от $r^{5/2}$ и $\cos\varphi\sqrt{\sin\varphi}$. $\Rightarrow$ Двойният интеграл е произведение от два единични интеграла.

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4} r^{5/2}\cos\varphi\sqrt{\sin\varphi}\,d\varphi\,dr = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}} r^{5/2}\,dr \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/4}\cos\varphi\sqrt{\sin\varphi}\,d\varphi}_{\text{този се смята}} =$$

$\cos\varphi$ вкарваме зад d.

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{r^{7/2}}{7/2}\Big|_0^{\sqrt{2}} \cdot \int_0^{\pi/4} (\sin\varphi)^{1/2}\,d\sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{7}\cdot(\sqrt{2})^{7/2} \cdot \frac{(\sin\varphi)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{7}\cdot(2^{1/2})^{7/2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{3/2} =$$

$$= \frac{2}{21}\cdot 2^{7/4}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{3/2} = \frac{2}{21}\cdot 2^{7/4}\cdot(2^{-1/2})^{3/2} = \frac{2}{21}\cdot 2^{7/4}\cdot 2^{-3/4} = \frac{2}{21}\cdot 2 = \frac{4}{21}.$$

С първата от двете направени смени може да се реши и

интеграла $\iint_D \sqrt{y^2-x^2}$, $D: 0\le 3x \le y \le 1+x$. Оставяме я за размисъл.

Зад. 6. Намерете $\iint_D (\sqrt{x}+\sqrt{y})\,dxdy$, $D: \sqrt{x}+\sqrt{y}\le a$,

където a е положителен параметър.

Реш. От допустими стойности на $\sqrt{x}+\sqrt{y} \Rightarrow x,y\ge 0$, т.е.

D е в първи квадрант.

D може да представим като трапец по x: $0\le\sqrt{y}\le a-\sqrt{x}$.

Тогава $a-\sqrt{x}\ge 0$, $a\ge\sqrt{x}$, $a^2\ge x$ и решаваме относно y:

$y\le(a-\sqrt{x})^2 = a^2-2a\sqrt{x}+x$. Така $D: \begin{cases} 0\le x\le a^2 \\ 0\le y\le a^2-2a\sqrt{x}+x \end{cases}$.

$$\iint_D (\sqrt{x}+\sqrt{y})\,dxdy = \int_0^{a^2}\left(\int_0^{a^2-2a\sqrt{x}+x} (\sqrt{x}+\sqrt{y})\,dy\right)dx$$

Може да се довърши докрай без съществени трудности.

За да покажем още смени на променливи, ще решим задачата по друг начин. Да пробваме стандартната ни полярна смяна.

$x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тогава $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{r}\,(\sqrt{\cos\varphi}+\sqrt{\sin\varphi})\le a$.

В задачите дотук съществено ползвахме, че $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$, за да превръщаме окръжности в прави.

Вместо $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ можем да направим смяна $\begin{cases} x=r\cos^k\varphi \\ y=r\sin^k\varphi \end{cases}$

за подходящо k.

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{r}\,(\underbrace{\cos^{k/2}\varphi+\sin^{k/2}\varphi}_{1,\text{ ако } k/2=2,\text{ т.е. за } k=4})$$

Областта D ще приеме много хубав вид при $\begin{cases} x=r.\cos^4\varphi \\ y=r\sin^4\varphi \end{cases}$.

Якобианът на тази смяна е $J=\begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^4\varphi & r.4\cos^3\varphi(-\sin\varphi) \\ \sin^4\varphi & r.4\sin^3\varphi.\cos\varphi \end{vmatrix} =$

$=4r.\cos^5\varphi\sin^3\varphi+4r.\sin^5\varphi\cos^3\varphi = 4r.\sin^3\varphi.\cos^3\varphi$.

$|J| \neq 0$ освен при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ – множество с лице 0.
Тъй като D е в първи квадрант, смяната е еднозначна.
Тогава $D: \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq a \iff \sqrt{r}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \leq a \iff \begin{cases} 0 \leq r \leq a^2. \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \end{cases}$.

$$\iint_D (\sqrt{x}+\sqrt{y})\,dx\,dy = \int_0^{a^2}\int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sqrt{r}.\cos^2\varphi + \sqrt{r}.\sin^2\varphi)}_{\sqrt{r}} \underbrace{4r.\sin^3\varphi\cos^3\varphi}_{|J|}\, dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{a^2} 4r\sqrt{r}\,dr . \int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi\cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{2}{5}.4r^{5/2}\Big|_0^{a^2} . \int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi\cos^3\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{8}{5}a^5 . \int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi\cos^3\varphi\, d\varphi.$$

Тригонометричният интеграл сметаме по части.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi.\cos^2\varphi.\cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi\cos^2\varphi\, d\sin\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\frac{\sin^4\varphi}{4} =$$

$$= \underbrace{\cos^2\varphi\frac{\sin^4\varphi}{4}\Big|_0^{\pi/2}}_{0} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4\varphi}{4}.2\cos\varphi.(-\sin\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^5\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^5\varphi\, d\sin\varphi = \frac{1}{2}.\frac{\sin^6\varphi}{6}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{12}.$$

Окончателно, интегралът е равен на $\frac{8}{5}a^5.\frac{1}{12} = \frac{2a^5}{15}$.

Смяната, която ползвахме тук е частен случай на т.нар. обобщена полярна смяна. Тя е ~~...~~ валидна за ъгли в първи квадрант и има вида
$$\begin{cases} x = a.r.\cos^k\varphi \\ y = b.r.\sin^k\varphi \end{cases}, \quad a,b,k \text{ – параметри.} \quad k,a,b > 0$$
$$r \geq 0, \quad \varphi \in [0, \pi/2].$$

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos^k\varphi & ar\,k.\cos^{k-1}\varphi(-\sin\varphi) \\ b\sin^k\varphi & br\,k\sin^{k-1}\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = abrk(\cos^{k+1}\varphi\sin^{k-1}\varphi + \sin^{k+1}\varphi\cos^{k-1}\varphi) =$$

$$= abk.r.(\sin\varphi\cos\varphi)^{k-1}.$$

Стандартната полярна смяна се получава при $a=b=k=1$.

Ще завършим с две задачи от изпити.

Зад.7. Да се намери $\iint\limits_D \frac{x^2y\,dxdy}{x^2+y^2+4}$, $D: \begin{cases} x^2+y^2\le 9 \\ x\ge y\ge 0 \end{cases}$.

Реш. Полярната смяна е удобна: x^2+y^2 участва както в D, така и в подинтегралната функция. $\begin{matrix} x=r\cos\varphi, & r\ge 0 \\ y=r\sin\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi \end{matrix}$ $|J|=r$

$x^2+y^2\le 9 \Rightarrow r^2\le 9,\ r\le 3.$

$\left.\begin{matrix} x\ge 0 \Rightarrow \cos\varphi\ge 0 \\ y\ge 0 \Rightarrow \sin\varphi\ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varphi$ - в първи квадрант, $0\le\varphi\le\pi/2$

$x\ge y \Rightarrow \cos\varphi\ge\sin\varphi \Rightarrow \varphi\in[0,\pi/4]. \Rightarrow \begin{cases} 0\le\varphi\le\pi/4 \\ 0\le r\le 3 \end{cases}$

$$\iint\limits_D \frac{x^2y\,dxdy}{x^2+y^2+4} = \int_0^{\pi/4}\int_0^3 \frac{r^2\cos^2\varphi\cdot r\sin\varphi\cdot \overset{=|J|}{r}}{r^2+4}\,dr\,d\varphi$$ произведение на интеграли

$$= \int_0^3 \frac{r^4}{r^2+4}\,dr\cdot\int_0^{\pi/4}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \int_0^3\frac{r^4-16+16}{r^2+4}dr\left(-\int_0^{\pi/4}\cos^2\varphi\,d\cos\varphi\right) =$$

$$= \int_0^3\left(r^2-4+16\cdot\frac{1}{r^2+2^2}\right)dr\cdot\left(-\frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{\pi/4}\right) =$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}-4r+\frac{16}{2}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{2}\right)\Big|_0^3\right]\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\cdot 1\right] =$$

$$= \left(9-12+8\cdot\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3\cdot 8_4}\right) = \boxed{\left(8\operatorname{arctg}\frac{3}{2}-3\right)\cdot\frac{4-\sqrt{2}}{12}}.$$

Зад.8. Пресметнете $\iint\limits_D (2-x-y)\,dxdy$, $D: 2y\le x^2+y^2\le 4$.

Реш. Любимата полярна смяна: $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$, $r\ge 0$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $|J|=r$.

$x^2+y^2\le 4 \Rightarrow r^2\le 2^2 \Rightarrow r\le 2.$

$2y\le x^2+y^2 \Rightarrow 2r\sin\varphi\le r^2 \Rightarrow r\ge 2\sin\varphi$, $2\sin\varphi\le 2$ за всяко φ.

Така имаме долни граници за r: 0 и $2\sin\varphi$.

Ако $\sin\varphi\le 0$, то границата за r е $0\le r\le 2$

Ако $\sin\varphi\ge 0$, то границата за r е $2\sin\varphi\le r\le 2$.

Така множеството е обединение на 2 трапеца:

$$\left|\begin{array}{l}0 \le \varphi \le \pi \quad (\text{тук } \sin\varphi \ge 0)\\ 2\sin\varphi \le r \le 2\end{array}\right. \cup \left|\begin{array}{l}\pi \le \varphi \le 2\pi \quad (\text{тук } \sin\varphi \le 0)\\ 0 \le r \le 2\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \iint_D (2-x-y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi}\int_{2\sin\varphi}^{2} (2 - r\cos\varphi - r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi +$$

$$+\int_{\pi}^{2\pi}\int_0^2 (2 - r\cos\varphi - r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_{2\sin\varphi}^{2}\left(2r - r^2(\sin\varphi+\cos\varphi)\right)dr\,d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi}\int_0^2 \left[2r - r^2(\sin\varphi+\cos\varphi)\right]dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi}\left[r^2 - \frac{r^3}{3}(\sin\varphi+\cos\varphi)\Big|_{2\sin\varphi}^{2}\right]d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi}\left[r^2 - \frac{r^3}{3}(\sin\varphi+\cos\varphi)\right]\Big|_0^2\Big]\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} 4 - \frac{8}{3}(\sin\varphi+\cos\varphi) - \left(4\sin^2\varphi - \frac{8\sin^3\varphi}{3}(\sin\varphi+\cos\varphi)\right)d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} 4 - \frac{8}{3}(\sin\varphi+\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\left[4 - \frac{8}{3}(\sin\varphi+\cos\varphi)\right]d\varphi + \int_0^{\pi}\left[\frac{8}{3}\sin^3\varphi(\sin\varphi+\cos\varphi) - 4\sin^2\varphi\right]d\varphi +$$

$$+\int_{\pi}^{2\pi}\left[4 - \frac{8}{3}(\sin\varphi+\cos\varphi)\right]d\varphi \;=$$ (комбинираме първия и третия интеграл)

$$= \int_0^{2\pi}\left(4 - \frac{8}{3}(\sin\varphi+\cos\varphi)\right)d\varphi + \int_0^{\pi}\left(\frac{8}{3}\sin^4\varphi + \frac{8}{3}\sin^3\varphi\cos\varphi - 4\sin^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= 4\cdot 2\pi - \underbrace{\frac{8}{3}(-\cos\varphi+\sin\varphi)\Big|_0^{2\pi}}_{0} + \frac{8}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\varphi\,d\varphi + \frac{8}{3}\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\sin\varphi - 4\cdot\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi.$$

$$= 8\pi + \underbrace{\frac{8}{3}\cdot\frac{\sin^4\varphi}{4}\Big|_0^{\pi}}_{0} + \frac{8}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\varphi\,d\varphi - 4\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = 8\pi + \frac{8}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\varphi\,d\varphi -$$

$$-4\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi.$$

От $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi \rightarrow \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$.

$$\sin^4\varphi = \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4\varphi}{2}$$

$$\cos 4\varphi = \cos^2 2\varphi - \sin^2 2\varphi = 2\cos^2 2\varphi - 1 \Rightarrow \cos^2 2\varphi = \frac{1+\cos 4\varphi}{2}$$

$$\int_0^\pi \sin^2\varphi\, d\varphi = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\pi - \frac{1}{2}\cdot\int_0^\pi \cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\int_0^\pi \cos 2\varphi\, d(2\varphi)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \underbrace{\frac{1}{4}\cdot \sin 2\varphi \Big|_0^\pi}_{0} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^\pi \sin^4\varphi\, d\varphi = \int_0^\pi \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi\right) d\varphi = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2\varphi\, d2\varphi + \frac{1}{8}\int_0^\pi \cos 4\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{3\pi}{8} - \underbrace{\frac{1}{4}\cdot \sin 2\varphi\Big|_0^\pi}_{0} + \underbrace{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\cdot \sin 4\varphi\Big|_0^\pi}_{0} = \frac{3\pi}{8}.$$

Окончателно получаваме:

$$8\pi + \frac{8}{3}\int_0^\pi \sin^4\varphi\, d\varphi - 4\int_0^\pi \sin^2\varphi\, d\varphi = 8\pi + \frac{\cancel{8}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}\pi}{\cancel{8}} - \cancel{4}^{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}} =$$

$$= 8\pi + \pi - 2\pi = \boxed{7\pi}$$