Нормални подгрупи и фактор-групи. Теорема за хомоморфизмите на групи.

Определение 1. *Подгрупа H на група G е нормална, ако $gH = Hg$ за всички $g \in G$. Бележим $H \lhd G$.*

Всяка група G има нормални подгрупи G и $\{e\}$, защото

$$gG = \{ga \,|\, a \in G\} = G = \{ag \,|\, a \in G\} = Gg \quad \text{за всички} \quad g \in G$$

и

$$g\{e\} = \{ge = g = eg\} = \{e\}g \quad \text{за всички} \quad g \in G.$$

Ако G е абелева група, то всяка подгрупа H на G нормална, съгласно

$$gH = \{gh = hg \,|\, h \in H\} = Hg \quad \text{за всички} \quad g \in G.$$

Всяка подгрупа H на G с индекс $[G : H] = 2$ е нормална, защото G има два леви съседни класа относно H. Единият от тях е H, а другият е $gH = G \setminus H$ за произволно $g \in G \setminus H$. Аналогично, G има два десни съседни класа относно H. Това са H и $G \setminus H = Hg$ за произволно $g \in G \setminus H$. В резултат,

$$gH = G \setminus H = Hg \quad \text{за} \quad \forall g \in G \setminus H$$

и $gH = H = Hg$ за $\forall g \in H$.

За да разгледаме пример за подгрупа, която не е нормална, нека

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right) = (1, 2), \quad \tau = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right) = (2, 3) \in S_3.$$

Твърдим, че цикличната подгрупа $H := \langle \sigma \rangle$ на S_3, породена от σ не е нормална. За целта е достатъчно да установим, че $\tau H \neq H\tau$. Да забележим, че $\sigma^2 = \varepsilon$ е тъждествената пермутация, така че

$$H := \langle \sigma \rangle = \{\varepsilon, \sigma\}$$

е от ред 2. Съгласно

$$\tau\sigma = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \neq \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) = \sigma\tau$$

получаваме, че

$$\tau H = \tau\{\varepsilon, \sigma\} = \{\tau, \tau\sigma\} \neq \{\tau, \sigma\tau\} = \{\varepsilon, \sigma\}\tau = H\tau$$

и доказваме, че подгрупата $H = \langle \sigma \rangle$ на S_3 не е нормална.

Твърдение 2. *Следните условия са еквивалентни за група G и произволна нейна подгрупа H:*

(i) H е нормална подгрупа на G;

(ii) $gHg^{-1} = H$ за всички $g \in G$;

(iii) $gHg^{-1} \subseteq H$ за всички $g \in G$.

Доказателство. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ По определение, $H \triangleleft G$ е нормална подгрупа на G точно когато $gH = Hg$ за всички $g \in G$. От $gH = Hg$ следва $gHg^{-1} = Hgg^{-1} = He = H$ чрез дясно умножение с g^{-1}. Обратно, от $gHg^{-1} = H$ получаваме $gH = Hg$ след дясно умножение с g.

Ясно е, че $(ii) \Rightarrow (iii)$.

За $(iii) \Rightarrow (ii)$ да забележим, че щом $gHg^{-1} \subseteq H$ за всички $g \in G$, то това включване остава в сила при замяна на g с g^{-1}, т.е. $g^{-1}H(g^{-1})^{-1} = g^{-1}Hg \subseteq H$ за всички $g \in G$. След ляво умножение с g и дясно умножение с g^{-1} получаваме

$$H = g(g^{-1}Hg)g^{-1} \subseteq gHg^{-1}.$$

От $gHg^{-1} \subseteq H$ и $H \subseteq gHg^{-1}$ за всички $g \in G$ следва $gHg^{-1} = H$ за всички $g \in G$.

□

Ако G е група и $g, h \in G$, то $ghg^{-1} \in G$ се нарича спрегнат на h чрез g. Твърдение 2 показва, че подгрупа H на група G е нормална тогава и само тогава, когато заедно с всеки свой елемент $h \in H$ съдържа всички негови спрегнати $ghg^{-1} \in H$ чрез $g \in G$.

Да забележим също, че за произволна подгрупа H на група G и произволен елемент $g \in G$ подмножеството gHg^{-1} е подгрупа на G, която се нарича спрегната на H чрез g. По-точно, за произволни $gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1} \in gHg^{-1}$ с $h_1, h_2 \in H$ е в сила

$$(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = gh_1(g^{-1}g)h_2g^{-1} = gh_1eh_2g^{-1} = g(h_1h_2)g^{-1} \in gHg^{-1} \quad \text{и}$$

$$(gh_1g^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1}h_1^{-1}g^{-1} = gh_1^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1},$$

вземайки предвид $h_1^{-1} \in H$. Подгрупата H на G е нормална тогава и само тогава, когато всички спрегнати с H подгрупи $gHg^{-1} = H$ на G съвпадат с H.

Нека G е група, а $H \triangleleft G$ е нормална подгрупа на G. Индуцираната от G операция

$$(G/H) \times (G/H) \longrightarrow (G/H), \quad (aH, bH) \mapsto abH$$

в множеството G/H на левите (и десните) съседни класове на G относно H е коректно зададена, защото ако $aH = a_1H$ и $bH = b_1H$, то $a^{-1}a_1, b^{-1}b_1 \in H$. Следователно

$$(ab)^{-1}(a_1b_1) = [b^{-1}(a^{-1}a_1)b](b^{-1}b_1) \in H,$$

съгласно $a^{-1}a_1 \in H$, $b^{-1}(a^{-1}a_1)b^{-1} \in H \triangleleft G$, $b^{-1}b_1 \in H$. В резултат, $abH = a_1b_1H$ и груповата операция на G индуцира коректно определена операция в G/H.

С така определената операция G/H е група. Асоциативността на операцията в G/H се наследява от асоциативността на груповата операция в G, съгласно

$$[(aH)(bH)](cH) = (abH)(cH) = (ab)cH = a(bc)H = (aH)[(bH)(cH)], \quad \forall a, b, c \in G.$$

Неутрален елемент на G/H е $H = eH$, защото

$$(aH)H = (aH)(eH) = (ae)H = aH = (ea)H = (eH)(aH) = H(aH) \quad \text{за всички} \quad a \in G.$$

Всеки елемент $aH \in G/H$ има обратен $a^{-1}H \in G/H$, съгласно

$$(aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H = (a^{-1}a)H = (a^{-1}H)(aH).$$

Това доказва, че G/H е група относно индуцираната от G операция. Казваме, че G/H е фактор-групата на G относно H.

Ако групата G е абелева, то всяка подгрупа H на G е нормална и фактор-групата G/H е абелева.

Ако групата G е крайна, то всяка фактор-група G/H на G е крайна.

Ако $G = \langle g \rangle$ е циклична група и $H = \langle g^m \rangle$ е подгрупата, породена от g^m за минималното $m \in \mathbb{N}$ с $g^m \in H$, то фактор-групата

$$G/H = \{g^i H \mid i \in \mathbb{Z}\} = \langle gH \rangle$$

е циклична. Редът на $G/H = \langle gH \rangle$ е $|G/H| = \mathrm{ord}(gH) = m$, защото m е минималното естествено число с $(gH)^m = g^m H = H$. По-точно, всички елементи на цикличната група G са от вида g^s за някое $s \in \mathbb{Z}$. Цикличната група G е абелева, така че всяка нейна подгрупа H е нормална. Фактор-групата G/H се състои от елементите от вида $g^s H$ за някое цяло $s \in \mathbb{Z}$. Всички такива елементи се представят като степени $g^s H = (gH)^s$, $s \in \mathbb{Z}$ на елемента $gH \in G/H$, откъдето фактор-групата G/H е циклична и се поражда от gH. Редът $|G/H|$ на G/H съвпада с реда $\mathrm{ord}(gH)$ на gH. По определение, редът на gH е минималното естествено число n, за което $H = (gH)^n = g^n H$. Това е минималното естествено n, за което $g^n \in H$. Ние определихме m като минималното естествено число, за което $g^m \in H$, така че $n = m$ и $|G/H| = \mathrm{ord}(gH) = m$.

Твърдение 3. *(i) Ядрото* $\ker \varphi$ *на хомоморфизъм на групи* $\varphi : G \to G'$ *е нормална подгрупа на* G*;*

(ii) За произволна нормална подгрупа H *на* G *изображението*

$$\pi : G \longrightarrow G/H, \quad \pi(a) = aH, \quad \forall a \in G$$

е хомоморфизъм на групи с ядро $\ker \pi = H$ *и образ* $\mathrm{im} \pi = G/H$*, който се нарича естествен хомоморфизъм на* G *с ядро* H*.*

По този начин възниква взаимно еднозначно съответствие между нормалните подгрупи и хомоморфизмите на група G*.*

Доказателство. (i) В Твърдение 12 (i) от темата за групи доказахме, че ядрото $\ker \varphi$ на хомоморфизъм на групи $\varphi : G \to G'$ е подгрупа на G. Тази подгрупа е нормална, защото за произволни $a \in \ker \varphi$ и $g \in G$ е изпълнено $gag^{-1} \in \ker \varphi$, съгласно

$$\varphi(gag^{-1}) = \varphi(g)\varphi(a)\varphi(g)^{-1} = \varphi(g)e_{G'}\varphi(g)^{-1} = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = e_{G'}.$$

(ii) Изображението π е хомоморфизъм на групи поради

$$\pi(ab) = abH = (aH)(bH) = \pi(a)\pi(b) \quad \text{за всички} \quad a, b \in G.$$

Ядрото на π е

$$\ker \pi = \{a \in G \,|\, \pi(a) = aH = H\} = \{a \in G \,|\, a \in H\} = H.$$

Образът $\mathrm{im}(\pi) = G/H$, защото всеки елемент на G/H е от вида $aH = \pi(a)$ за някое $a \in G$.

□

Да забележим, че вместо да индуцираме груповата операция в G/H от тази в G, можем да я определим по такъв начин, че изображението $\pi : G \to G/H$, $\pi(a) = aH$ да е хомоморфизъм на групи.

Теорема 4. *Ако $\varphi : G_1 \to G_2$ е хомоморфизъм на групи, то ядрото $\ker \varphi$ е нормална подгрупа на G_1 и φ индуцира изоморфизъм на групи*

$$\overline{\varphi} : G_1/\ker \varphi \longrightarrow \mathrm{im}\varphi, \quad \overline{\varphi}(a \ker \varphi) = \varphi(a) \quad \textit{за всички} \quad a \in G,$$

изпълняващ равенството $\overline{\varphi}\pi = \varphi$ за естествения хомоморфизъм $\pi : G_1 \to G_1/\ker \varphi$ на G_1 с ядро $\ker \varphi$, по протежение на диаграмата

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ G_1/\ker\varphi \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \mathrm{im}\varphi \end{tikzcd}$$

Доказателство. Да забележим, че

$$a \ker \varphi = b \ker \varphi \Leftrightarrow a^{-1}b \in \ker \varphi \Leftrightarrow e_{G_2} = \varphi(a^{-1}b) = \varphi(a)^{-1}\varphi(b) \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b).$$

Това доказва коректността и инективността на $\overline{\varphi}$. За сюективността на $\overline{\varphi}$ отбелязваме, че всеки елемент на $\mathrm{im}\varphi$ е от вида $\varphi(a) = \overline{\varphi}(a \ker \varphi)$ за някое $a \in G$. Освен това,

$$\overline{\varphi}((a \ker \varphi)(b \ker \varphi)) = \overline{\varphi}(ab \ker \varphi) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \overline{\varphi}(a \ker \varphi)\overline{\varphi}(b \ker \varphi), \quad \forall a, b \in G,$$

така че $\overline{\varphi}$ е хомоморфизъм, а оттам и изоморфизъм на групи.

Непосредствено се проверява, че

$$\overline{\varphi}\pi(a) = \overline{\varphi}(a \ker \varphi) = \varphi(a) \quad \text{за всички} \quad a \in G,$$

така че $\overline{\varphi}\pi = \varphi$.

□