5.1 Смяна на координатната система в равнината.

Нека $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ и $K' = O'\vec{e_1}'\vec{e_2}'$ са две афинни координатни системи в равнината и $\vec{c}$ е произволен вектор с координати спрямо K и K' съответно $c_K(c_1, c_2)$ и $c_K'(c_1', c_2')$, т.е.

$\vec{c} = c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2}$ (1) и $\vec{c} = c_1'\vec{e_1}' + c_2'\vec{e_2}'$. (1*)

Връзката между координатите на $\vec{c}$ спрямо K и K' зависи от изразяването на $\vec{e_1}'$ $\vec{e_2}'$ чрез $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$.

Нека
$$\begin{aligned} \vec{e_1}' &= \alpha_{11}\vec{e_1} + \alpha_{21}\vec{e_2} \\ \vec{e_2}' &= \alpha_{12}\vec{e_1} + \alpha_{22}\vec{e_2} \end{aligned} \quad (2)$$
Векторите $\vec{e_1}'$ и $\vec{e_2}'$ са неколинеарни $\Rightarrow$ линейно независими, което е изпълнено точно тогава, когато
$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

От (1) и (1*) за $\vec{c}$ получаваме

$$\vec{c} = c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2} = c_1'\vec{e_1}' + c_2'\vec{e_2}' \overset{(2)}{=} c_1'(\alpha_{11}\vec{e_1} + \alpha_{21}\vec{e_2}) + c_2'(\alpha_{12}\vec{e_1} + \alpha_{22}\vec{e_2})$$

$$= (c_1'\alpha_{11} + c_2'\alpha_{12})\vec{e_1} + (c_1'\alpha_{21} + c_2'\cdot\alpha_{22})\vec{e_2}$$

Но $\vec{c}$ се изразява по единствен начин чрез $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$.
Следователно

$$(3)\ \begin{cases} c_1 = \alpha_{11} c_1' + \alpha_{12} c_2' \\ c_2 = \alpha_{21} c_1' + \alpha_{22} c_2' \end{cases} \quad \left(\text{или } \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix}, \vec{c} = A\vec{c}\,' \right)$$

Ако знаем координатите на $\vec{c}$ спрямо K' чрез (3) можем да намерим координатите му спрямо K.

Матрицата $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ се нарича матрица на прехода от K към K', а Δ - детерминанта на прехода от K към K'

От $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ системата (3) може да се реши еднозначно спрямо c_1' и c_2'.

Всъщност $\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, където A^{-1} е обратната матрица на A

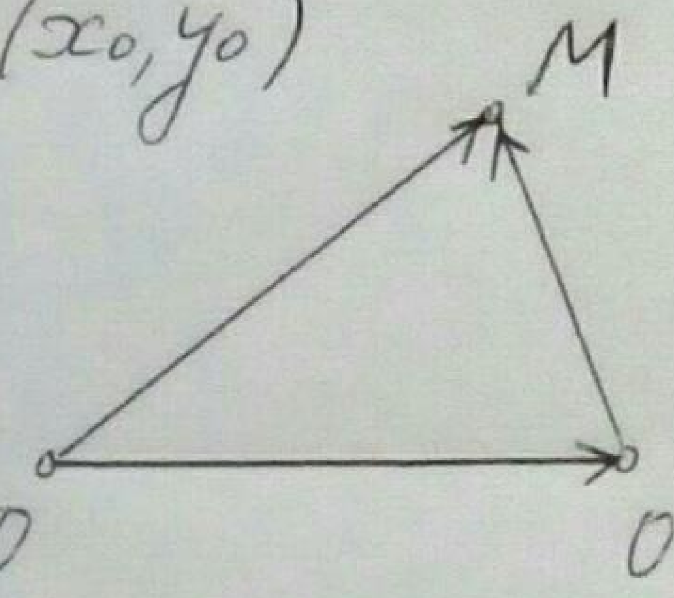
$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичната матрица от ред 2. A^{-1} - обратна на A, ако

$AA^{-1} = E \quad \Rightarrow A^{-1}A = E$.

Нека M е произволна точка и има съответно координати

$M_K(x, y)$ и $M_{K'}(x', y')$

и центърът O' спрямо K има координати $O_K(x_0, y_0)$



Имаме $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M} \Rightarrow \vec{O'M} = \vec{OM} - \vec{OO'}$

$\vec{O'M}_K(x - x_0, y - y_0)$, $\vec{O'M}_{K'}(x', y')$

От (3) получаваме

$$(4)\quad \begin{cases} x - x_0 = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' \\ y - y_0 = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4')\quad \begin{cases} x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + x_0 \\ y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + y_0 \end{cases}$$

или накратко $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

или $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

(4) ((4')) са формулите, които дават връзка между координатите на произволна точка M спрямо K и K'.