Двойни интеграли 2

Нека множеството D се изобразява еднозначно в множеството D' с помощта функции $\begin{vmatrix} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \end{vmatrix}$. Да означим с $\Delta(u,v) = \begin{vmatrix} f'_u & g'_u \\ f'_v & g'_v \end{vmatrix}$.

Теорема 1. Нека функциите $f(u,v)$ и $g(u,v)$ притежават непрекъснати частни производни и $\Delta(u,v) = \begin{vmatrix} f'_u & g'_u \\ f'_v & g'_v \end{vmatrix} \neq 0$ с изключение на множество с лице равно нула.

Ако функцията $F(x,y)$ е непрекъсната в компактното множество D, то

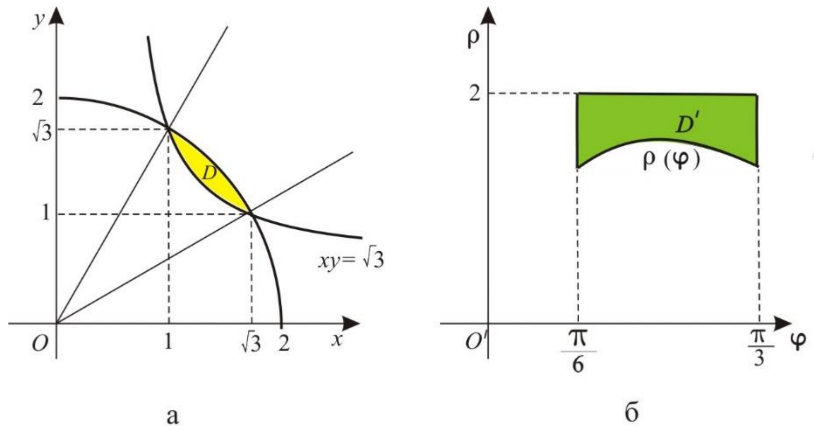
$$\iint_D F(x,y)dxdy = \iint_{D'} F(f(u,v), g(u,v))|\Delta(u,v)|dudv .$$

В интеграли, в които се среща групата x^2+y^2, често е удобно да се направи смяна в полярни координати $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\rho \ge 0$. Функционалната детерминанта е $\Delta(\varphi,\rho) = \rho$.

Задача 1. Да се пресметне интегралът $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, където множеството D, разположено в първи квадрант между от кривите $x^2+y^2=4$ и $xy=\sqrt{3}$.

Решение. На фиг. 1 а е изобразено множеството D. То се състои от точките удовлетворяващи неравенствата $x^2+y^2 \le 4$ и $xy \ge \sqrt{3}$.

Ще направим смяна на променливите в полярни координати $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\rho \ge 0$.



Фиг. 1

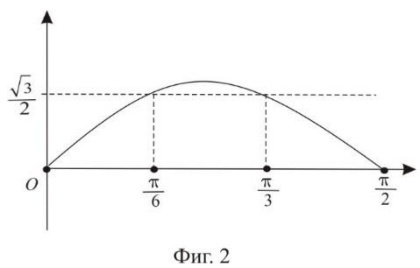
$$D: \begin{cases} xy \ge \sqrt{3} \\ x^2+y^2 \le 4 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad D': \begin{cases} \rho^2\cos\varphi\sin\varphi \ge \sqrt{3} \\ \rho^2 \le 4 \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \rho \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad D': \begin{cases} \rho(\varphi) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\varphi\cos\varphi}} \le \rho \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases} .$$

За да завършим представянето на D' като криволинеен трапец при фиксирано φ трябва да решим и неравенството $\rho(\varphi) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\varphi\cos\varphi}} \le 2$ (горната функция трябва да бъде по-малка от горната).

$$\rho(\varphi) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sin\varphi\cos\varphi}} \le 2 \quad \Leftrightarrow \sqrt{3} \le 4\sin\varphi\cos\varphi \quad \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \le \sin 2\varphi .$$

На фиг. 2 е изобразена графиката на функцията $\sin 2\varphi$ в интервала $[0;\frac{\pi}{2}]$. Така решенията на неравенството са

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \le \sin 2\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3} .$$



Фиг. 2

Окончателно получаваме $D': \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \\ \rho(\varphi) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\varphi\cos\varphi}} \le \rho \le 2 \end{cases}$ и

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \iint_{D'} \rho^2.\rho d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\rho(\varphi)}^{2} \rho^3 d\rho \right) d\varphi =$$

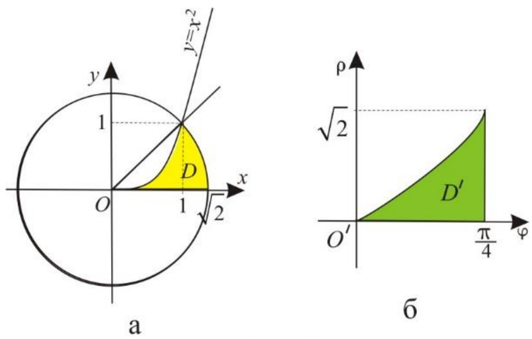
$$= \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\rho^4)\Big|_{\rho(\varphi)}^{2} d\varphi = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (16 - \frac{3}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}) d\varphi = \frac{4\pi}{6} - \frac{3}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{4\pi}{6} - \frac{3}{4}(\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{cotg}\,\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{6} - \frac{3}{4}[(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}) - (\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3})] = \frac{4\pi}{6} - \frac{3}{2}(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{4\pi}{6} - \sqrt{3}.$$

Задача 2. Да се пресметне интегралът $\iint_D xydxdy$, където $D: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 2 \\ 0 \le y \le x^2, x \ge 0 \end{cases}$.

Решение. Множеството D е изобразено на фиг. 3 а. Лесно се съобразява, че то може да се представи като криволинеен трапец при фиксирано *y*: $D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y} \le x \le \sqrt{2 - y^2} \end{cases}$.

Пресметнете самостоятелно интеграла чрез представяне с повторни интеграли.



Фиг. 3

Ние ще направим смяна в полярни координати $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\rho \ge 0$.

$$D: \begin{cases} x^2 \ge y \\ x^2 + y^2 \le 2 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow D': \begin{cases} \rho^2\cos^2\varphi \ge \rho\sin\varphi \\ \rho^2 \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \rho \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D': \begin{cases} \rho\cos^2\varphi \ge \sin\varphi \\ \rho \le \sqrt{2} \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow D': \begin{cases} \rho(\varphi) = \dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \le \rho \le \sqrt{2} \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Очевидно $\varphi = \frac{\pi}{2}$ не удовлетворява системата и следователно можем да разделим на $\cos^2\varphi$. За да решим системата окончателно трябва да осигурим, че горната функция е по-голяма от долната:

$$\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \le \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\varphi \le \sqrt{2}\cos^2\varphi \Leftrightarrow t \le \sqrt{2}(1 - t^2) \qquad \text{(положихме } \sin\varphi = t\text{)}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2} \le 0 \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} \le t \le \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \begin{cases} \text{корените на уравнението} \\ \sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2} = 0 \\ \text{са } t_1 = -\sqrt{2}, t_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 0 \le t \le \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \sin\varphi \le \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}.$$ Окончателно за D' получихме

$$D': \begin{cases} \rho(\varphi) = \dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \le \rho \le \sqrt{2} \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}.$$ Тогава

$$\iint\limits_D xydxdy = \iint\limits_{D'} \rho^2 \cos\varphi \sin\varphi . \rho d\varphi d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int\limits_{\rho(\varphi)}^{\sqrt{2}} \rho^3 \sin\varphi \cos\varphi d\rho \right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin\varphi \cos\varphi \int\limits_{\rho(\varphi)}^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \right) d\varphi = \frac{1}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \cos\varphi . \rho^4 \Big|_{\rho(\varphi)}^{\sqrt{2}} d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi - \frac{1}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \cos\varphi . \left(\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \right)^4 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^5\varphi}{\cos^7\varphi} d\varphi = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^5\varphi . \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^5\varphi d\,\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{4} - \frac{\mathrm{tg}^6\varphi}{24} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24}.$$

Задача 3. Да се пресметне интегралът $\iint\limits_D ydxdy$, където $D\colon\ 2y \le x^2 + y^2 \le 4y$.

Решение. Множеството D е изобразено на фиг. 4. Ще направим смяна в полярна координати $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\rho \ge 0$.

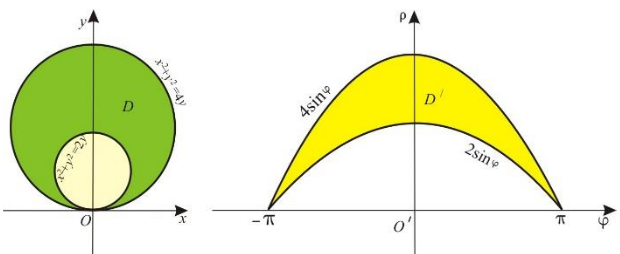
$$D\colon\ 2y \le x^2 + y^2 \le 4y \Leftrightarrow D'\colon \begin{cases} 2\rho\sin\varphi \le \rho^2 \le 4\rho\sin\varphi \\ \rho \ge 0, 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow D'\colon \begin{cases} 2\sin\varphi \le \rho \le 4\sin\varphi \\ \rho \ge 0, 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}.$$

Трябва да осигурим, че горната функция е по-голяма от долната:

$$\begin{cases} 2\sin\varphi \le 4\sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \Rightarrow 0 \le \varphi \le \pi.$$

Окончателно за D' получаваме

$$D': \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 2\sin\varphi \le \rho \le 4\sin\varphi \end{cases}.$$ Тогава



Фиг. 4

$$\iint\limits_D ydxdy = \iint\limits_{D'} \rho\sin\varphi . \rho d\varphi d\rho = \int\limits_0^{\pi} \left(\int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} \sin\varphi . \rho^2 d\rho \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi . \rho^3 \Big|_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} d\varphi = \frac{64-8}{3} \int\limits_0^{\pi} \sin^4\varphi d\varphi = \frac{56}{3} \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi =$$

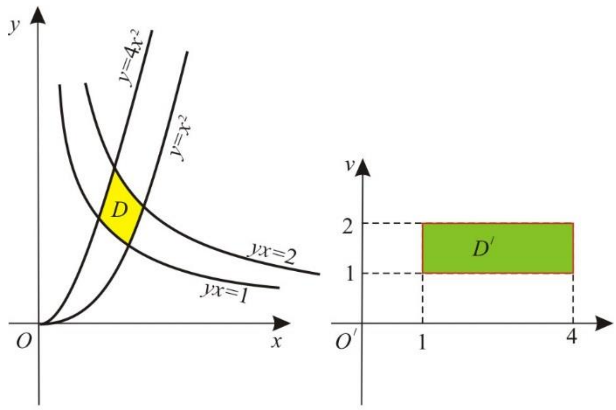
$$=\frac{14}{3}\left(\int_0^{\pi} d\varphi-2\int_0^{\pi}\cos 2\varphi d\varphi+\int_0^{\pi}\cos^2 2\varphi d\varphi\right)=\frac{14}{3}\left(\pi-\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}d\varphi\right)=$$

$$=\frac{14}{3}\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\cos 4\varphi d4\varphi\right)=\frac{14}{3}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{8}\sin 4\varphi\Big|_0^{\pi}\right)=7\pi .$$

Да припомним, че лицето $S(D)$ на компактното множество D се изразява чрез двойни интеграли: $S(D)=\iint\limits_D dxdy$.

Задача 4. Да се пресметне лицето на множеството, заградено от кривите $y=x^2$, $y=4x^2$, $xy=1$ и $xy=2$.

Решение. Множеството D е изобразено на фиг. 5. То не е много удобно за представяне като криволинеен трапец – трябва да се представи като обединения на няколко криволинейни трапеца.



Фиг. 5

Ще направим следната смяна на променливите

$$\begin{cases} u=\dfrac{y}{x^2} \\ v=xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=ux^2 \\ v=ux^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt[3]{\dfrac{v}{u}} \\ y=u\sqrt[3]{\dfrac{v^2}{u^2}}=\sqrt[3]{uv^2} \end{cases}.$$

Да пресметнем функционалната детерминанта

$$\Delta(u,v)=\begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt[3]{v}}{3\sqrt[3]{u^4}} & \dfrac{\sqrt[3]{v^2}}{3\sqrt[3]{u^2}} \\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v^2}} & \dfrac{2\sqrt[3]{u}}{3\sqrt[3]{v}} \end{vmatrix}=-\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{u^3}}-\frac{1}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{u^3}}=-\frac{3}{9}\frac{1}{u}=-\frac{1}{3u}.$$

Тъй като D е в първи квадрант, то можем да смятаме, че $x>0$ и $y>0$, а следователно $u>0$ и $v>0$. Тогава $\Delta(u,v)\neq 0$.

Да определим и множеството D':

$$D:\begin{cases} x^2\le y\le 4x^2 \\ 1\le xy\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow D:\begin{cases} 1\le \dfrac{y}{x^2}\le 4 \\ 1\le xy\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow D':\begin{cases} 1\le u\le 4 \\ 1\le v\le 2 \end{cases}.$$

Пресмятаме лицето:

$$S=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{D'}\left|\Delta(u,v)\right|dudv=\iint\limits_{D'}\left|-\frac{1}{3u}\right|dudv=$$

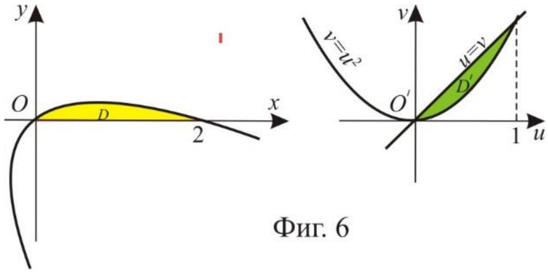
$$=\frac{1}{3}\int_1^4\left(\int_1^2\frac{1}{u}dv\right)du=\frac{1}{3}\int_1^4\frac{du}{u}.\int_1^2 dv=\frac{1}{3}(\ln 4-\ln 1)(2-1)=\frac{\ln 4}{3}.$$

Задача 5. Да се пресметне лицето на множеството, заградено от кривата $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^2=\frac{x}{2}-\frac{y}{3}$ и абсцисната ос.

Решение. Множеството D е изобразено на фиг. 6.

Ще направим смяна на променливите

$$\left|\begin{array}{l} u=\frac{x}{2}+\frac{y}{3} \\ v=\frac{x}{2}-\frac{y}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=u+v \\ y=\frac{3}{2}(u-v) \end{array}\right. .$$



Фиг. 6

Тогава кривата се преобразува в парабола

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^2=\frac{x}{2}-\frac{y}{3} \quad \Leftrightarrow \quad u^2=v \ .$$

А абсцисната ос се преобразува в права

$$y=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}(u-v)=0 \Leftrightarrow v=u \, .$$

Множеството D се преобразува в множеството D', заградено от кривите $v=u^2$ и $v=u$. То се представя като криволинеен трапец така $D':\begin{cases} 0\le u\le 1 \\ u^2\le v\le u \end{cases}$.

Сега да пресметнем функционалната детерминанта

$$\Delta(u,v)=\begin{vmatrix} x_u{}' & y_u{}' \\ x_v{}' & y_v{}' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=-3 \, .$$

Тогава лицето е

$$S=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{D'}|-3|dudv=3\int_0^1\left(\int_{u^2}^{u}dv\right)du=3\int_0^1(u-u^2)du=3(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=\frac{1}{2}.$$

Домашна работа

1. Пресметнете двойния интеграл $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy$, където $D:\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}x\le y\le\sqrt{x} \\ 1\le x^2+y^2\le 9 \end{cases}$.

2. Пресметнете лицето на областта, заградена от параболите $y=\sqrt{x}$ и $y=2\sqrt{x}$ и правата $x=4$.