# Критерии на Даламбер, Коши и Раабе-Дюамел

Да напомним, че редът $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ е сходящ за $q \in [0;1)$
и разходящ за $q \geq 1$.

Продължаваме да се интересуваме от сходимост на редове с положителни членове.

Критериите на Даламбер и Коши се основават на сравняване с геометрична прогресия. В задачи най-често ще ползваме граничната им форма.

Тв. (Даламбер-гранична форма). Нека $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ е ред с положителни членове. Нека $\exists$ границата $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Тогава:

- $l > 1 \Rightarrow \sum a_n$ - разходящ
- $l < 1 \Rightarrow \sum a_n$ - сходящ
- $l = 1 \Rightarrow$ Не е ясно. Редът може да е както сходящ, така и разходящ.

Напомняме, че $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1$;

$n!! = n(n-2)(n-4)\ldots$ е произведението на естествените числа през едно.

Така, ако $n=2k$ е четно, $k \in \mathbb{N}$, то

$(2k)!! = 2k(2k-2)(2k-4)\ldots 4.2$ е произведението от четните,

ако $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, то

$n!! = (2k+1)!! = (2k+1)(2k-1)\ldots 3.1$ - произведение от нечетните.

По-рядко се ползва означението $n!!! = n(n-3)(n-6)\ldots$.

Зад. 1. Сходящи ли са редовете:

а) $\sum \frac{n}{3^n}$ б) $\sum \binom{2n}{n}$ в) $\sum \frac{(2n+1)!!}{(2n)!}$, г) $\sum \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$

д) $\sum \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}$ е) $\sum \frac{2.5.8\ldots(3n-1)}{3.7.11\ldots(4n-1)} = \sum \frac{(3n-1)!!!}{(4n-1)!!!!}$

ж) $\sum \frac{b^n}{n!}$, $b>0$ з) $\sum \frac{n^c}{n!}$, $c>0$, и) $\sum \frac{a^n . n!}{n^n}$, $a>0$.

Решение. За всеки ред с $a_n$ ще бележим общия член.
За да приложим Даламбер, трябва да сметнем $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

а) $a_n = \frac{n}{3^n}$. Тогава $a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$ (навсякъде заместваме $n$ с $n+1$).

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)/3^{n+1}}{n/3^n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{n} = \frac{n+1}{3n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{Сходящ.}$$

б) $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$ по дефиниция на биномен коефициент.

Тогава $a_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!\,(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!\,n!}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \frac{n!\,n!}{(n+1)!\,(n+1)!}$$

Забелязваме доста общи множители:
$(2n+2)! = (2n+2)\,(2n+1)! = (2n+2)(2n+1).(2n)!$ и
$(n+1)! = (n+1)\,n!$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}} \cdot \frac{\cancel{n!}\,.\,\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}\,(n+1)\cancel{n!}} = \frac{2\cancel{(n+1)}\,(2n+1)}{(n+1)\,\cancel{(n+1)}} =$$

$$= \frac{4n+2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 4 > 1 \Rightarrow \text{Редът е разходящ.}$$

в) $a_n = \frac{(2n+1)!!}{(2n)!}$, $a_{n+1} = \frac{(2(n+1)+1)!!}{(2(n+1))!} = \frac{(2n+3)!!}{(2n+2)!}$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n}$ е $a_{n+1}$ по реципрочната на дадената дроб.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+3)!!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+1)!!} = \frac{(2n+3)\cancel{(2n+1)!!}\,.\,\cancel{(2n)!}}{[(2n+2)(2n+1).\cancel{(2n)!}]\,\cancel{(2n+1)!!}} =$$

$$= \frac{2n+3}{4n^2+6n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1 \Rightarrow \text{Сходящ.}$$

β) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1)+1)!!}{(2(n+1))!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{(2n+3)!!\,(2n)!!}{(2n+2)!!\cdot(2n+1)!!} =$

$= \frac{(2n+3)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+2)!!} = \frac{2n+3}{1} \cdot \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+3}{2n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$

Попадаме в случая, в който критерия на Даламбер не ни казва нищо. Да забележим, че $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{2n+2} > 1$ за всяко n.

Тогава $a_{n+1} > a_n$ за всяко $n$.

В частност $a_n > a_{n-1}$ и можем да продължим:

$$a_n > a_{n-1} > a_{n-2} > a_{n-3} > \dots \quad > a_1 = \frac{3!!}{2!!} = \frac{3}{2}.$$

Тогава $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ нека е парциалната сума

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n > \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1}_{n}$ (всеки елемент ограничаваме с $a_1$.)

Тогава $S_n > n \cdot a_1 = \frac{3n}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Тогава и $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ и редът е разходящ.

Разсъжденията от този пример могат да се обобщят така:

Ако $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, като $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ за всяко $n > n_0$ (от известно място нататък)

то редът $\sum a_n$ е разходящ.

g) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1)+1)!!}{(2(n+1)+2)!!} \cdot \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!} = \frac{(2n+3)\cancel{!!}}{\cancel{(2n+1)!!}} \cdot \frac{\cancel{(2n+2)!!}}{(2n+4)\cancel{!!}} = \frac{2n+3}{2n+4}$

Така $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, но тук $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ за всяко $n$.

Разсъждението от предния пример е неприложимо.

За подобни случаи ще въведем "по-силен" критерий - Раабе-Дюамел.

"По-силен" - всичко, което се смята с Даламбер, се смята и с Раабе.

е) $a_{n+1} = \dfrac{2.5.8\ldots(3(n+1)-1)}{3.7.11\ldots(4(n+1)-1)} = \dfrac{2.5.8\ldots(3n+2)}{3.7.11\ldots(4n+3)}$

Горе множителите вървят през 2, долу през 3.
Предпоследните множители са $(3n-1)$ и $(4n-1)$ съответно,

така $a_{n+1} = \dfrac{2.5.8\ldots(3n-1)(3n+2)}{3.7.11\ldots(4n-1)(4n+3)} = a_n \cdot \dfrac{3n+2}{4n+3}$.

$\Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3n+2}{4n+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{3}{4} < 1 \Rightarrow$ Сходящ.

ж) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{b^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{b^n} = \dfrac{b}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ сходящ.
(независимо от $b$).

з) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^c}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{n^c} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^c \cdot \dfrac{1}{n+1}$

$\dfrac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ и $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^c \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, защото $c$ независи от $n$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^c \cdot \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 1.0 = 0.$

$\Rightarrow$ Този ред е сходящ за всяко $c \in \mathbb{R}$.

и) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a^{n+1}.(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \dfrac{n^n}{a^n.n!} = \dfrac{a.(n+1)\,n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{a\,n^n\,\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}\,(n+1)^n} =$

$= \dfrac{a \cdot n^n}{(n+1)^n} = \dfrac{a}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \dfrac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{a}{e}$ по дефиниция на числото $e$.

Така при $a > e$, $\dfrac{a}{e} > 1$ и редът е разходящ.
при $a < e$, $\dfrac{a}{e} < 1$ и редът е сходящ
при $a = e$, $\dfrac{a}{e} = 1$ и граничната форма не казва нищо.

Но редицата $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ е растяща и $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Така $\dfrac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$ за всяко $n$.

Както в пример г), редът е разходящ.

Окончателно $\sum \frac{a^n n!}{n^n}$ е сходящ за $a \in (0; e)$
и разходящ за $a \in [e; +\infty)$.

За случаите $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ отговор за сходимост (почти винаги)
ни дава критерия на Раабе–Дюамел:

Тв. $\sum a_n$ – ред с положителни членове и $\exists l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$

Тогава:

| |
|---|
| $l < 1$ – редът е разходящ |
| $l > 1$ – редът е сходящ |
| $l = 1$ – не е ясно. |

Забележете, че сходимостта при Раабе е за $l > 1$
а при Даламбер е за $l < 1$.

Ако $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ и $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1$ има отрицателна граница. Тогава границата от критерия на Раабе е $-\infty < 1$

Ако $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = +\infty > 1$.

Така всичко, което ни казва Даламбер, ни казва и Раабе.

Въпреки това е добре да стартираме с Даламбер и само ако това не ни свърши работа да прибегнем към Раабе.

Да дорешим д): вече сметнахме, че $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{2n+4}$.

реципрочното на Даламбер

Тогава $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{2n+4}{2n+3} - 1\right) = n\left(\frac{2n+4-2n-3}{2n+3}\right)$

$= \frac{n}{2n+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ Редът е разходящ.

Зад.2. Сходящи ли са редовете:

а) $\sum \frac{(2n)!!}{n!}.\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3^n}\right)$ б) $\sum \frac{4^n (n-1)!}{3.7.11\ldots(4n+3)}$

в) $\sum \frac{3^n.(2n+1)!!}{5.11.17\ldots(6n+5)(6n+11)}$ г) $\sum \frac{(3n)!}{(n!)^3.27^n}$.

Реш. а) $\frac{(2n+2)!!}{(n+1)!}.\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right).\frac{n!}{(2n)!!\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3^n}\right)} =$

$= \frac{(2n+2)\cancel{(2n)!!}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)}{(n+1)\cancel{n!}}.\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(2n)!!}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3^n}\right)} =$

$= \frac{2.\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)}{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3^n}\right)} = \frac{2.\operatorname{arctg}\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^{n+1}}}.\underbrace{\frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}}}_{=1/3}.\frac{\frac{1}{3^n}}{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3^n}\right)} =$

$= \frac{2}{3}.\frac{\operatorname{arctg}(1/3^{n+1})}{1/3^{n+1}}.\frac{1/3^n}{\operatorname{arctg}(1/3^n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}.1.1 = \frac{2}{3} < 1$

съгласно основната граница $\frac{\operatorname{arctg}x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

Може да се реши и по-друг начин:

$(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\ldots.4.2.$ Отделяйки по един множител 2 от всяко число, имаме:

$(2n)!! = \underline{2}.n.\underline{2}.(n-1)\ldots.\underline{2}.2.\underline{2}.1 = 2^n.n(n-1)\ldots2.1 = 2^n.n!$

Така $\sum \frac{(2n)!!}{n!}\operatorname{arctg}\frac{1}{3^n} = \sum 2^n.\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3^n}\right) \sim \sum 2^n.\frac{1}{3^n} = \sum\left(\frac{2}{3}\right)^n$ – сходящ

Тук ползвахме сравнителния критерий.

б) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}.\cancel{n!}}{\cancel{3.7\ldots(4n+3)}(4n+7)}.\frac{\cancel{3.7.11\ldots(4n+3)}}{4^n.\cancel{(n-1)!}} = \frac{4n}{4n+7} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$

Критерият на Даламбер не дава нищо. Още $\frac{4n}{4n+7} < 1$, така че не можем да приложим твърдението от зад.1, г).

Затова продължаваме с Раабе-Дюамел:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{4n+7}{4n}-1\right)=n\cdot\frac{7}{4n}=\frac{7}{4}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{7}{4}>1\Rightarrow \text{Сходящ.}$$

в) $$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\cancel{3^{n+1}}\,3\cdot\cancel{(2n+3)!!}\,(2n+3)}{\cancel{5.11\ldots(6n+11)}(6n+17)}\cdot\frac{\cancel{5.11\ldots(6n+11)}}{\cancel{3^n}\cdot\cancel{(2n+1)!!}}=\frac{3(2n+3)}{6n+17}=$$

$$=\frac{6n+9}{6n+17}\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$ Прилагаме и Раабе:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{6n+17}{6n+9}-1\right)=n\cdot\frac{8}{6n+9}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{4}{3}>1\Rightarrow\text{Сходящ.}$$

г) Както и в предните примери, започваме с Даламбер.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3.27^{n+1}}\cdot\frac{(n!)^3\,27^n}{(3n)!}=\frac{(3n+3)!}{(3n)!}\cdot\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^3\cdot\frac{27^n}{27^{n+1}}=$$

$$=\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{1}\cdot\frac{1}{(n+1)^3}\cdot\frac{1}{27}\cdot$$ ($n+1$ е множител и горе: $3n+3=3(n+1)$)

$$=\frac{3(n+1)(3n+2)(3n+1)}{27\,(n+1)^3}=\frac{(3n+2)(3n+1)}{9(n+1)^2}=\frac{9n^2+9n+2}{9n^2+18n+9}\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$

Раабе: $$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\cdot\left(\frac{9n^2+18n+9}{9n^2+9n+2}-1\right)=n\left(\frac{\cancel{9n^2}+18n+9-\cancel{9n^2}-9n-2}{9n^2+9n+2}\right)$$

$$=n\cdot\frac{9n+7}{9n^2+9n+2}=\frac{9n^2+7n}{9n^2+9n+2}\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$

Нито Даламбер, нито Раабе разпознават сходимост или разходимост.

---

Изрази с факториели са подходящи за Даламбер, защото частното $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ често има много прост вид.

Ако разгледаме обаче $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$, то прилагайки Даламбер,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{(\ln(n+1))^{n+1}}\cdot(\ln n)^n=\frac{\ln^n n}{\ln^{n+1}(n+1)}$$ и не е ясно как се смята тази граница.

Друг начин за сравнение на $\sum a_n$ със геометричната прогресия $\sum q^n$ е да разгледаме $\sqrt[n]{a_n}$ и да сравняваме с 1.

**Тв.** (Критерий на Коши) Нека $\sum a_n$ е ред с положителни членове и $\exists\, l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Тогава:
$$\begin{cases} l > 1 \Rightarrow \text{разходящ} \\ l < 1 \Rightarrow \text{сходящ} \\ l = 1 \ -\text{не е ясно.} \end{cases}$$

Критерия на Коши е полезен когато $a_n$ е $n$-та степен.

**Зад. 3** Сходящи ли са: а) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$ б) $\sum\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, в) $\sum 3^{n+1}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$.

**Реш.** а) $a_n = \left(\frac{1}{\ln n}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1 \Rightarrow$ сходящ.

б) $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = (a_n)^{1/n} = \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n =$

$= \left(1+\frac{-1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1} = 1/e < 1 \Rightarrow$ сходящ.

в) $a_n = 3^{n+1}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$. Тогава

$$(a_n)^{1/n} = \left(3^{n+1}\right)^{1/n} \cdot \left(\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = 3^{1+\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$$

$3^{1+\frac{1}{n}} = 3 \cdot \sqrt[n]{3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3 \cdot 1 = 3.$

$\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = \left(1+\frac{-1}{n+3}\right)^n = \left(1+\frac{-n/(n+3)}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\lim \frac{-n}{n+3}} = e^{-1}.$

Тогава $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3 \cdot e^{-1} = \frac{3}{e} > 1$ от $e < 3$.

$\Rightarrow$ Редът е разходящ.