Смяна на базиса.

Нека V е крайномерно линейно пространство над поле F и $\dim V = n$. Нека $e_1, \dots, e_n$ е базис на V. В тази тема ще търсим начин за намиране на линеен оператор, който да преобразува един конкретен базис на V в друг конкретен базис на V.

Нека $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$ е линеен оператор с матрица A. Започваме с проследяването на действието на линейния оператор върху векторите от V. Нека $x \in V$ е произволен вектор и

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n.$$

Нека още образът на вектора x под действието на φ да бъде

$$\varphi(x) = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \dots + \zeta_n e_n.$$

Ако $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$, то φ действа на базисните вектори чрез

$$\varphi(e_j) = \alpha_{1j} e_1 + \alpha_{2j} e_2 + \dots + \alpha_{nj} e_n$$

за всяко $j = 1, 2, \dots, n$. В такъв случай имаме, че

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_1 \varphi(e_1) + \dots + \xi_n \varphi(e_n)\\ &= \xi_1(\alpha_{11} e_1 + \dots + \alpha_{n1} e_n) + \dots + \xi_n(\alpha_{1n} e_1 + \dots + \alpha_{nn} e_n)\\ &= (\xi_1\alpha_{11} + \xi_2\alpha_{12} + \dots + \xi_n\alpha_{1n}) e_1 + \dots + (\xi_1\alpha_{n1} + \xi_2\alpha_{n2} + \dots + \xi_n\alpha_{nn}) e_n.\end{aligned}$$

По този начин получаваме системата

$$(*)\left|\begin{array}{ll}\zeta_1 & = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n,\\ \zeta_2 & = \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n,\\ \dots & \\ \zeta_n & = \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \dots + \alpha_{nn}\xi_n.\end{array}\right.$$

Образуваме векторите

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \in V, \text{ и } \zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \in V$$

и записваме матрично системата $(*)$ като

$$A\xi = \zeta.$$

С тези разсъждения получихме

Твърдение 1. *За координатите ξ на $x \in V$ и координатите ζ на $\varphi(x) \in V$ е в сила матричното равенство*

$$A\xi = \zeta,$$

където A е матрицата на линейния оператор $\varphi \in \operatorname{Hom}(V)$ спрямо фиксиран базис на V.

Нека

$$(1) \quad e_1, e_2, \ldots, e_n$$

и

$$(2) \quad f_1, f_2, \ldots, f_n$$

са два базиса на V. Векторите $f_1, f_2, \ldots, f_n$ се изразяват еднозначно чрез векторите $e_1, e_2, \ldots, e_n$ с

$$\left| \begin{array}{ll} f_1 & = \tau_{11}e_1 + \tau_{21}e_2 + \cdots + \tau_{n1}e_n, \\ f_2 & = \tau_{12}e_1 + \tau_{22}e_2 + \cdots + \tau_{n2}e_n, \\ \ldots & \\ f_n & = \tau_{1n}e_1 + \tau_{2n}e_2 + \cdots + \tau_{nn}e_n \end{array} \right.$$

с подходящи коефициенти $\tau_{ij} \in F$. Записваме координатите на векторите от базиса (2) спрямо базиса (1) в стълбовете на матрица

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \in F_{n\times n}.$$

Матрицата T се нарича *матрица на прехода* от базиса (1) към базиса (2) и записваме $e \xrightarrow{T} f$.

Ясно е, че матрицата T е неособена, защото при допускане на противното имаме, че $\det T = 0 \Leftrightarrow$ стълбовете на T са линейно зависими $\Leftrightarrow$ векторите $f_1, \dots, f_n$ са линейно зависими, което води до противоречие с това, че същите тези вектори образуват базис на V. Обратно, всяка неособена матрица $T \in F_{n\times n}$ е матрица на прехода от един базис към друг. Наистина, нека вземем неособена матрица $T = (\tau_{ij})_{n\times n}$. От базиса (1) и числата τ_{ij} образуваме векторите $f_1, \dots, f_n \in V$:

$$f_j = \tau_{1j}e_1 + \cdots + \tau_{nj}e_n, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Т.к. $\det T \neq 0$, то те са линейно независими и са n на брой и следователно образуват базис на V, а T е матрица на прехода и $e \xrightarrow{T} f$.

Да разгледаме произволен вектор $x \in V$ от две гледни точки: нека

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \in F^n$$

е векторът от координатите на x спрямо базиса (1), т.е.

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$$

и нека

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \in F^n$$

е векторът от координатите на x спрямо базиса (2), т.е.

$$x = \eta_1 f_1 + \cdots + \eta_n f_n.$$

Използвайки матрицата на прехода T изразяваме последното равенство чрез

$$\begin{aligned} x &= \eta_1 f_1 + \cdots + \eta_n f_n \\ &= \eta_1(\tau_{11}e_1 + \cdots + \tau_{n1}e_n) + \cdots + \eta_n(\tau_{1n}e_1 + \cdots + \tau_{nn}e_n) \\ &= (\tau_{11}\eta_1 + \tau_{12}\eta_2 + \cdots + \tau_{1n}\eta_n)e_1 + \cdots + (\tau_{n1}\eta_1 + \tau_{n2}\eta_2 + \cdots + \tau_{nn}\eta_n)e_n. \end{aligned}$$

За да имаме съвпадане на това представяне с по-горното представяне на x в базиса (1) очевдино трябва да е изпълнена системата

$$\left|\begin{array}{ll} \xi_1 & = \tau_{11}\eta_1 + \tau_{12}\eta_2 + \cdots + \tau_{1n}\eta_n, \\ \xi_2 & = \tau_{21}\eta_1 + \tau_{22}\eta_2 + \cdots + \tau_{2n}\eta_n, \\ \ldots & \\ \xi_n & = \tau_{n1}\eta_1 + \tau_{n2}\eta_2 + \cdots + \tau_{nn}\eta_n, \end{array}\right.$$

която в матричен запис изглежда така:

$$\xi = T\eta.$$

По този начин доказахме следната

Твърдение 2. *Нека V е крайномерно линейно пространство с $\dim V = n$. Нека векторите*

$$(1) \quad e_1, \ldots, e_n$$

и

$$(2) \quad f_1, \ldots, f_n$$

образуват два базиса на V. Ако за произволен вектор $x \in V$ имаме

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$$

и

$$x = \eta_1 f_1 + \cdots + \eta_n e_n,$$

а T е матрицата на прехода от (1) в (2), то в сила е матричното равенство

$$\xi = T\eta.$$

Оттук следва и че

$$\eta = T^{-1}\xi$$

.

Следващото твърдение дава връзката между матриците на един и същи линеен оператор спрямо два различни базиса на линейното пространство.

Твърдение 3. *Нека $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$ е линеен оператор. Нека A е матрицата на φ спрямо базиса (1), а B е матрицата му спрямо базиса (2). Ако T е матрицата на прехода $e \xrightarrow{T} f$, то $B = T^{-1}AT$.*

Доказателство. Нека τ е линейният оператор, чиято матрица спрямо базиса (1) е T. В такъв случай от дефиницията на матрица на прехода следва, че $\tau(e_i) = f_i$ за $i = 1, \ldots, n$, а оттук и $\tau^{-1}(f_i) = e_i$. Нека $B = (b_{ij})_{n\times n}$. Тогава

$$\varphi(f_i) = b_{1i}f_1 + b_{2i}f_2 + \cdots + b_{ni}f_n.$$

Прилагаме оператора τ^{-1} към двете страни на равенството и получаваме (използвайки свойствата на линейните изображния)

$$\tau^{-1}\varphi(f_i) = b_{1i}e_1 + b_{2i}e_2 + \cdots + b_{ni}e_n,$$

но т.к. $f_i = \tau(e_i)$ след заместване имаме

$$\tau^{-1}\varphi\tau(e_i) = b_{1i}e_1 + b_{2i}e_2 + \cdots + b_{ni}e_n.$$

Това равенство дава, че операторът $\tau^{-1}\varphi\tau$ има матрица B в базиса (1). Но от свойствата на композицията на оператори имаме, че матрицата на $\tau^{-1}\varphi\tau$ в базиса (1) е просто произведението на матриците на операторите τ^{-1}, φ и τ, а това е точно матрицата $T^{-1}AT$. По този начин получаваме, че $B = T^{-1}AT$. $\square$