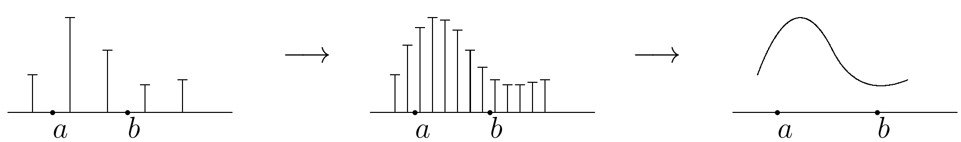
Глава 4

Непрекъснати случайни величини

До сега разглеждахме дискретни случайни величини, чиито стойности са краен или най-много изброим брой. Това ограничение върху броя на стойностите прави дискретните случайни величини неудобни за описване на редица явления. Например, температурата на въздуха се описва с реално число в интервала $(-45, 52)$, влажността, количеството въглероден двуокис също са реални числа. Затова се налага разглеждането на случайни величини стойностите на които са подмножество на реалните числа, т.е. могат да вземат нейзброим брой различни стойности. Такива случайни величини ще наричаме непрекъснати.

За непрекъснатите случайни величини би било безмислено да се въвежда разпределение под формата на таблица като (3.1.1), тъй като не е възможно описването на всички стойности. Затова, като аналог на разпределенията се използва функция наречена *вероятностна плътност*, която играе ролята на вероятност. Формално, непрекъснатите случайни величини се дефинират като се извършва граничен преход по дискретните случайни величини. Можем да си представим този процес като вземем една дискретна случайна величина и увеличаваме броят на нейните стойности все повече и повече, докато нейното разпределение се превърне в непрекъснатата функция в ероятностнаплътност. Това е илюстрирано в следващата схема.



4.1 Функция на разпределение и вероятностна плътност

В този учебник няма да се спираме на формалната (аксиоматична) дефиниция на понятието непрекъсната случайна величина. Вместо това ще дефинираме функцията вероятностнаплътност, а чрез нея и функцията на разпределеие на случайната величина.

Определение 4.1 *Плътност на непрекъснатата случайната величина X наричаме функцията $f_X(x)$, изпълняваща следните условия:*

$$1)\quad f_X(x) \geq 0, \tag{4.1.1}$$
$$2)\quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1, \tag{4.1.2}$$
$$3)\quad \mathrm{P}(a \leq X < b) = \int_a^b f_X(x)dx. \tag{4.1.3}$$

Тази дефиниция е до голяма степен аналогична на дефиницията на разпределение на дискретна случайна величина.

1) отговаря на условието вероятностите да са положителни.

2) означава нормираност, т.е. съответства на условието сумата от всички вероятности в разпределението да бъде едно.

3) дава вероятността за попадане на случайната величина в някакво множество - като се сумират, в случая интегрират, вероятностите на благоприятните случаи.

Определение 4.2 *Функция на разпределение на случайната величина X наричаме функцията $F_X(x)$, дефинирана за всяко реално число x с равенството:*

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X < x). \tag{4.1.4}$$

Съгласно (4.1.3) функцията на разпределение може да се изрази чрез плътността по следния начин

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt. \tag{4.1.5}$$

Следователно обратната връзка е от вида

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}. \tag{4.1.6}$$

4.2 Характеризационни свойства на функцията на разпределение

Тези свойства произтичат от дефиниция 4.2 на ф.р.

Твърдение 4.1 *Всяка ф.р.* $0 \leq F_X(x) = \mathrm{P}(X < x)$ *удовлетворява следните свойства:*

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$*;*

2. Ако $x_1 \leq x_2$*, то* $F_X(x_1) \leq F_X(x_1)$*;*

3. $\lim_{x \uparrow x_0} F_X(x) = F_X(x_0^-)$*;*

4. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

Доказателство: Свойството 1. следва непосредствено от дефиницията на ф.р. За свойство 2., от $x_1 \leq x_2$ следва, че е в сила следната връзка между събитията $\{\omega : X(\omega) \leq x_1\} \subseteqq \{\omega : X(\omega) \leq x_2\}$, откъдето веднага следва 2.

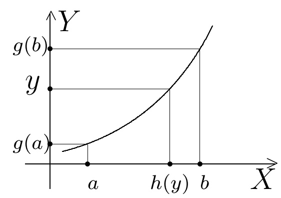
Нека $x_n = x_0 - 1/n$, т.е. $x_n < x_0$ и $x_n \uparrow x_0$, $n \to \infty$. Тогава отново редицата от събития $\{\omega : X(\omega) \leq x_n\} \uparrow \{\omega : X(\omega) \leq x_0\}$.

В сила е и обратното твърдение, а именно, че ако една функция $0 \leq F_X(x) = \mathrm{P}(X < x)$ удовлетворява свойствата 1.-4. на твърдение 4.1, то тя е ф.р. на някоя сл. в. X.

4.3 Смяна на променливите

Нека X е произволна непрекъсната случайна величина с известно разпределение, т.е. познаваме плътността и $f_X(x)$. Нека Y е нова случайна величина зададена като функция на X, т.е. $Y = g(X)$. Ще покажем как може да се намери плътността на новата случайна величина $f_Y(y)$.

Най-напред ще разгледаме случая, в който функцията $g(x)$ е непрекъсната и монотонно растяща (виж Фигура 1). В този случай съществува обратна функция, която ще означим с $h(y) \equiv g^{-1}(y)$.



Фигура 1.

Вероятността случайната величина X да принадлежи на интервала $[a, b]$ е равна на вероятността Y да принадлежи на $[g(a), g(b)]$. Това ни дава възможност да пресметнем функцията на разпределение на Y

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(g(X) < y) = \mathrm{P}(X < h(y)) = F_X(h(y)).$$

Пресмятането на плътността $f_Y(y)$ съгласно (4.1.6) се свежда до намиране на производна на $F_X(h(y))$. От фомулата за диференциране на сложна функция следва

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_X(h(y))}{\partial y} = f_X(h(y))\, h'(y). \tag{4.3.7}$$

Нека сега функцията $g(x)$ е непрекъсната и монотонно намаляваща. Обратната функция $h(y)$ отново съществува.

Вероятността случайната величина X да принадлежи на интервала $[a, b]$ е равна на вероятността Y да принадлежи на $[g(b), g(a)]$. За функцията на разпределение на Y получаваме

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(g(X) < y) = \mathrm{P}(X > h(y)) =$$

$$= 1 - \mathrm{P}(X \le h(y)) = 1 - F_X(h(y)).$$

В последното равенство използвахме факта, че X е непрекъсната и следователно вероятността да попадне във фиксирана точка е нула, т.е. $\mathrm{P}(X \le h(y)) = \mathrm{P}(X < h(y))$ Отново ще приложим (4.1.6) за да определим плътността на Y

$$f_Y(y) = \frac{\partial[1 - F_X(h(y))]}{\partial y} = -f_X(h(y))\, h'(y). \tag{4.3.8}$$

Тъй като $g(x)$ е намаляваща функция, то и обратната и функция $h(y)$ също е намаляваща, а производната и $h'(y)$ е отрицателна. Следователно намерената плътност е добре дефинирана $f_Y(y) \ge 0$.

Ще обобщим тези два случая на смяна на променливите в следващото твърдение.

Твърдение 4.2 *Нека X е непрекъсната случайна величина, а $g(x)$ е монотонна и непрекъсната функция. Тогава плътността на случайната величина $Y = g(X)$ се пресмята по формулата*

$$f_Y(y) = f_X(h(y))\,|h'(y)|, \tag{4.3.9}$$

където $h(y)$ е обратната функция на $g(x)$.

Доказателство: Доказателството следва непосредствено от (4.3.7) и (4.3.8).

4.4 Математическо очакване

Формално понятието математическо очакване също се дефинира чрез граничен преход. Ние няма да се спираме на този аксиоматичен подход. Ще използваме следният директен начин.

Определение 4.3 *Математическо очакване на непрекъснатата сл.в. X наричаме числото $\mathrm{E}X$ дефинирано с равенството:*

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)dx. \tag{4.4.10}$$

Ако интегралът е разходящ, казваме че математическото очакване не съществува.

Тази дефиниция на математическото очакване е аналогична на дефиницията (3.2.2) от дискретния случай. Поради неизброимия брой стойности на случайната величина тук сумирането е заменено с интегриране, а конкретните вероятности са заменени с плътността на случайната величина.

По-общо математическо очакване на функция от случайна величина може да бъде зададено по следния начин.

Следващото твърдение дава начина да се пресметне математическото очакване на функция от случайна величина.

Твърдение 4.3 *Нека X е непрекъсната случайна величина, а $g(x)$ е произволна функция. Тогава, ако съществува математическото очакване $\mathrm{E}g(X)$, то се пресмята по формулата*

$$\mathrm{E}g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)dx.$$

Забележка. Ще направим доказателството само в случая когато $g(x)$ е непрекъсната и монотонна. Твърдението е изпълнено за произволна функция, но доказателството в този случай изисква аксиоматичнто построяване на понятието математическо очакване, което е извън рамките на тези записки.

Доказателство: Ще използваме формулата за смяна на променливите. Нека $Y = g(X)$. Съгласно предходната дефиниция

$$\mathrm{E}g(x) = \mathrm{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_X(h(y))\,|h'(y)|dy.$$

В последното равенство приложихме (4.3.9). Сега ще направим и смяна на променливите в интеграла, като ще ползваме същата смяна $y = g(x)$, $x = h(y)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_X(h(y))\, |h'(y)| dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_X(h(y)) dh(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x) dx.$$

$\square$

4.5 Дисперсия на непрекъсната сл.в.

Определение 4.4 *Дисперсия на непрекъснатата сл.в.* X *наричаме числото* $\mathrm{D}X$ *дефинирано с равенството:*

$$\mathrm{D}X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}X)^2\, f_X(x) dx. \tag{4.5.11}$$

Ако интегралът е разходящ, казваме че дисперсията е безкрайна.

Ще отбележим, че всички свойства на математическото очакване и диспресията от дискретния случай се запазват и няма да ги доказваме отделно.

4.6 По-важни непрекъснати разпределения

4.6.1 Равномерно разпределение - $X \in U(a,b)$

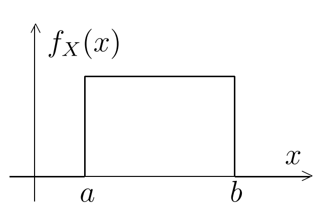
Нека $[a,b]$ е произволен интервал върху реалната права. Казваме, че случайната величина X е равномерно разпределена в $[a,b]$, ако вероятността да вземе коя да е стойност в този интервал е една и съща. Или казано по друг начин, ако X попада по случаен начин в този интервал. Равномерното разпределение се означава съкратено $X \in U(a,b)$, където $a < b$ са реални числа.

Плътността на равномерно разпределената случайна величина X е константа в $[a,b]$, т.е.

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , x \in [a,b], \\ 0 & , x \notin [a,b] \end{cases}$$

и е представена на Фигура 2.

Константата е определена от нормиращото условие (4.1.2), т.е. лицето под функцията вероятностна плътност да бъде единица.



Фигура 2. Вероятностна плътност на сл.в. $X \in U(a,b)$.