Ортогонализация. Изоморфизъм на евклидови пространства.

Следващата теореама дава конкретен метод за построяване на ортогонална система от вектори на базата на произволна система линейно независими вектори.

Теорема(метод за ортогонализация на Грам-Шмид). *Нека V е евклидово пространство и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е линейно независима система вектори от V. Тогава съществува система вектори $e_1, e_2, \ldots, e_n$, такива че*

1. $e_1, e_2, \ldots, e_n$ са всичките ненулеви,

2. $e_1, e_2, \ldots, e_n$ са ортогонална (а оттам и линейно независима) система,

3. Всеки вектор e_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ има вида

$$e_k = a_k + \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + \cdots + \nu_{k-1} e_{k-1}$$

за числа $\nu_i \in \mathbb{R}$,

4. $\ell(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \ell(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ за $k = 1, 2, \ldots, n$,

5. Ако за някое $k : 1 \leq k \leq n$, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ е ортогонална система, то $e_1 = a_1, e_2 = a_2, \ldots, e_k = a_k$.

Доказателство. По индукция.

Стъпка 1: Избираме $e_1 = a_1$. Тогава:

1. $e_1 \neq o$, защото $e_1 = a_1$, а a_1 образува линейно независима система и следователно е ненулев,

2. e_1 е ортогонална система, т.к. се състои само от един вектор,

3. Изпълнено е

$$e_1 = a_1,$$

4. Очевидно $\ell(e_1) = \ell(a_1)$,

5. Системата a_1 се състои от един вектор, следователно е ортогонална и $e_1 = a_1$ е изпълнено по построение.

<u>Стъпка 2:</u> Търсим вектор e_2 във вида

$$e_2 = a_2 + \lambda e_1$$

за реално число λ, което ще определим.

1. Ако допуснем, че $e_2 = o$, то получаваме $a_2+\lambda e_1 = a_2+\lambda a_1 = o$, което означава, че векторите a_1, a_2 са линейно зависими. Това е противоречие и следователно $e_2 \neq o$.

2. За да бъде системата e_1, e_2 ортогонална трябва

$$(e_1, e_2) = 0.$$

Това последователно дава

$$(e_1, a_2 + \lambda e_1) = 0,$$

$$(e_1, a_2) + \lambda \underbrace{(e_1, e_1)}_{\neq 0} = 0,$$

$$\lambda = -\frac{(e_1, a_2)}{(e_1, e_1)}.$$

Следователно при тази стойност на λ системата е ортогонална.

3. Автоматично е изпълнено от вида, в който търсихме и определихме вектора e_2.

4. $e_1 = a_1$ и $e_2 = a_2 + \lambda a_1$ и следователно $e_1, e_2 \in \ell(a_1, a_2)$. От друга страна $a_1 = e_1$ и $a_2 = e_2 - \lambda e_1$ и следователно $a_1, a_2 \in \ell(e_1, e_2)$. Така $\ell(e_1, e_2) = \ell(a_1, a_2)$.

5. Ако a_1, a_2 е ортогонална система, то имаме $e_1 = a_1$ и $e_2 = a_2+\lambda e_1 = a_2 - \frac{(e_1, a_2)}{(e_1, e_1)} e_1 = a_2 - \frac{(a_1, a_2)}{(a_1, a_1)} a_1 = a_2 - \frac{0}{(a_1, a_1)} a_1 = a_2 - 0.a_1 = a_2$.

И така нататък...

<u>Стъпка k:</u> Нека вече са намерени вектори $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$, удовлетворяващи условията 1. – 5. Търсим вектор e_k във вида

$$e_k = a_k + \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + \cdots + \nu_{k-1} e_{k-1},$$

където $\nu_i, i = 1, 2, \dots, k-1$ са реални числа, които ще определим.

1. Т.к.всеки от векторите $e_j, j = 1, 2, \dots, k-1$ е линейна комбинация на векторите a_i за $i = 1, 2, \dots, j$, то от вида, в който търсим вектора e_k следва, че допускането $e_k = o$ води до анулиране на линейна комбинация на векторите $a_1, a_2, \dots, a_k$ с коефициент $1 \neq 0$ пред вектора a_k. Това би означавало, че векторите $a_1, a_2, \dots, a_k$ са линейно зависими, което е противоречие. Следователно $e_k \neq o$.

2. Т.к. векторите $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ вече образуват ортогонална система, остава e_k да е ортогонален на всеки от тях. Това означава за всяко $i = 1, 2, \dots, k-1$ да е изпълнено $(e_k, e_i) = 0$. Това ни дава

$$(a_k + \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + \cdots + \nu_{k-1} e_{k-1}, e_i) = 0,$$

$$(a_k, e_i) + \nu_1 \underbrace{(e_1, e_i)}_{=0} + \cdots + \nu_i \underbrace{(e_i, e_i)}_{\neq 0} + \cdots + \nu_{k-1} \underbrace{(e_{k-1}, e_i)}_{=0} = 0,$$

откъдето за всяко $i = 1, 2, \dots, k-1$ намираме, че $\nu_i = -\dfrac{(a_k, e_i)}{(e_i, e_i)}$. При така намерените стойности на ν_i системата е ортогонална.

3. Автоматично е изпълнено от вида, в който търсихме и определихме вектора e_k.

4. Доказва се аналогично на случая $k = 2$.

5. Нека $a_1, a_2, \dots, a_k$ е ортогонална система. Тогава системата $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ също е ортогонална и според индукционното предположение имаме, че $e_1 = a_1, e_2 = a_2, \dots, e_{k-1} = a_{k-1}$. Тогава

$$\nu_i = -\frac{(a_k, e_i)}{(e_i, e_i)} = -\frac{(e_k, e_i)}{(e_i, e_i)} = -\frac{0}{(e_i, e_i)} = 0$$

за всяко $i = 1, 2, \dots, k-1$ и следователно $e_k = a_k$.

Според принципа на математическата индукция теоремата е доказана и след n на брой стъпки изчерпваме векторите $a_1, a_2, \dots, a_n$ и получаваме новите вектори $e_1, e_2, \dots, e_n$, които изпълняват свойствата 1. – 5. $\square$

Твърдение 1. *Нека евклидовото пространство V е крайномерно. Тогава*

(i) Всяка ортогонална система от ненулеви вектори може да се допълни до ортогонален базис на пространството,

(ii) V има ортонормиран базис.

Доказателство. (i) Нека $\dim V = n$. Ако $a_1, a_2, \dots, a_m \in V$ е ортогонална система ненулеви вектори, то $a_1, a_2, \dots, a_m$ е линейно независима система и $m \leq n$. В такъв случай съществуват вектори $a_{m+1}, \dots, a_n \in V$ (при $m < n$), така че $a_1, \dots, a_m; a_{m+1}, \dots, a_n$ да са базис на V. По метода на Грам-Шмид получаваме векторите $e_1, \dots, e_m; e_{m+1}, \dots, e_n$, които са ортогонална система и следователно образуват базис на V. При това, т.к. по условие векторите $a_1, a_2, \dots, a_m$ бяха ортогонални, то $e_1 = a_1, \dots, e_m = a_m$ и така векторите $a_1, \dots, a_m; e_{m+1}, \dots, e_n$ образуват ортогонален базис на V.

(ii) Нека $a_1 \in V$, $a_1 \neq o$. Тогава a_1 е ортогонална система и според (i) съществува ортогонален базис $a_1, e_2, \dots, e_n$ на V. Нека $f_1 = \dfrac{1}{|a_1|} a_1$ и $f_i = \dfrac{1}{|e_i|} e_i$ за $i = 2, 3, \dots, n$. Така $f_1, f_2, \dots, f_n$ е ортонормиран базис на V. □

Нека V и V' са евклидови пространства, а $\varphi : V \longrightarrow V'$ е изображение. Изображението φ е изоморфизъм на евклидови пространства, ако φ е изоморфизъм на V и V' като линейни пространства над $\mathbb{R}$ и $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$ за всеки два вектора $x, y \in V$. Означаваме $V \cong V'$.

Твърдение 2. *Две крайномерни евклидови пространства V и V' са изоморфни тогава и само тогава, когато $\dim V = \dim V'$.*

Доказателство. Необходимост: Ако $V \cong V'$, то V и V' са изоморфни и като линейни пространства (над $\mathbb{R}$) и следователно $\dim V = \dim V'$.

Достатъчност: Нека $\dim V = \dim V' = n$. Нека $e_1, e_2, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на V, а $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ е ортонормиран базис на V'. Знаем, че изображението

$$\varphi : V \longrightarrow V',$$

дефинирано с

$$\varphi(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \dots + \lambda_n e'_n$$

е изоморфизъм на V и V' като линейни пространства над $\mathbb{R}$. Остава да проверим, че φ запазва скаларното произведение. Наистина, за произволни вектори $x = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_n e_n \in V$ и $y = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + \cdots + \nu_n e_n \in V$ имаме, че

$$(x, y) = \mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2 + \cdots + \mu_n \nu_n.$$

Сега, понеже $\varphi(x) = \mu_1 e'_1 + \mu_2 e'_2 + \cdots + \mu_n e'_n \in V'$ и $\varphi(y) = \nu_1 e'_1 + \nu_2 e'_2 + \cdots + \nu_n e'_n \in V'$ е ясно, че

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = \mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2 + \cdots + \mu_n \nu_n = (x, y).$$

Следователно φ е изоморфизъм на евклидови пространства, т.е. $V \cong V'$. $\square$

За произволно $n \in \mathbb{N}$ линейното пространство $\mathbb{R}^n$ над $\mathbb{R}$ е също и n-мерно евклидово пространство. Според Твърдение 2 всяко n-мерно евклидово пространство е изоморфно на $\mathbb{R}^n$, т.е. съществува единствено, с точност до изоморфизъм, n-мерно евклидово пространство, а именно $\mathbb{R}^n$.