Въведение

(☆) Дадено е мн-во от ф-ли Г. Изпълнимо ли е то? (Г е ~~затворено~~) мн-во от затв. ф-ли)

- Ако да, модел за Г.
- Ако не, метод на резолюцията.

(☆) Методът на резолюцията е полуразрешим начин да отговорим на този въпрос.

(☆) Приложение:
Ако Г е мн-во от предпоставки и ф-ла φ, то ако искаме да докажем, че $\Gamma \models \varphi$, то можем да покажем, че $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ не е изпълнимо.

def Литерал ще наричаме атомарна ф-ла. Но не винаги $\neg L$ също той както, ако L е литерал, то не винаги $\neg L$ също е литерал, то въвеждаме

$$L^{\partial} = \begin{cases} \neg p, & L = p \\ p, & L = \neg p \end{cases}$$

def
Елементарна дизюнкция наричаме дизюнкция от литерали $L_1 \vee \dots \vee L_n$.

def Дизюнкт наричаме крайно мн-во от литерали.

$L_1 \vee \dots \vee L_n \rightsquigarrow D = \{L_1, \dots, L_n\}$
(ще можем да направим обратното преобразуване)

def

Нека D_1 и D_2 са дизюнкти. Нека $L \in D_1$, $L^\partial \in D_2$. Тогава $Res_L(D_1, D_2) = (D_1 \setminus \{L\}) \cup (D_2 \setminus \{L^\partial\})$.

def

Резолютивен извод наричаме крайна редица от дизюнкти, за която:

1) $D_1, D_2 \in S$ - стартово мн-во от дизюнкти

2) $D_k \in S$ или $D_k = Res_L(D_i, D_j)$ за $1 \le i \ne j < k$ } за вс. k

def

Казваме, че дизюнкт D е резолютивно изводим от мн-во от дизюнкти S, ако има резолютивен извод $D_1, \dots, D_n$ от S такъв, че $D = D_n$. Пишем $S \vdash_r D$

def

Ако $S \vdash_r$ ■, то S е неизпълнимо.

Метод на резолюцията

Задача

Нека $\varphi \leftrightharpoons \exists x \forall y (p(x,y) \Leftrightarrow \neg \exists z (p(y,z) \& p(z,y)))$

Докажете, че φ е неизпълнима.

Решение I - семантично:

Нека вземем свидетел за съществуването, т.е. нека x_0 е такова, че

$$(*) \ \forall y (p(x_0,y) \Leftrightarrow \neg \exists z (p(y,z) \& p(z,y)))$$

В частност това е вярно за $y = x_0$. Оттук получаваме

$$p(x_0,x_0) \Leftrightarrow \neg \exists z (p(x_0,z) \& p(z,x_0))$$

Нека предположим, че $p(x_0,x_0)$ е истина. Тогава

$$\neg \exists z (p(x_0,z) \& p(z,x_0))$$

също е истина. Но при $z = x_0$ получаваме, че

$$p(x_0,x_0) \& p(x_0,x_0)$$

е истина, което е абсурд.

Нека сега предположим, че $p(x_0,x_0)$ е лъжа.

Тогава $\neg \exists z (p(x_0,z) \& p(z,x_0))$ е лъжа, т.е.

$$\exists z (p(x_0,z) \& p(z,x_0)) \text{ е истина}$$

Нека z_0 е свидетел за това съществуване, т.е.

$$(**) \ p(x_0,z_0) \& p(z_0,x_0)$$

е истина.

В частност $p(x_0,z_0)$ е истина. Тогава

Нека сега в $(*)$ $y = z_0$.

$$\neg \exists z (p(z_0,z) \& p(z,z_0)) \text{ е истина}$$

но при $z = x_0$ видяхме че $(**)$ е истина, абсурд.

Оттук φ не е изпълнимо.

Метод на резолюцията:

1) Привеждане формулите в ПНФ (пренексна нормална форма).

квантори (КНФ)

def// Казваме, че ф-ла φ е в ПНФ, ако

$\varphi \leftrightharpoons Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \, \varphi'$, ако

1) $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ за $i = \overline{1..n}$
2) φ' е безкванторна ф-ла
3) $x_i \neq x_j$ за $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$

~~2) Скулемизация - премахване кванторите за съществуване.~~

$\boxed{\text{Изваждане на квантор отпред}}$

Ако x не е свободна променлива за ф-ла ψ, то
1) $\forall x \varphi \vee \psi \models\!\!\dashv \forall x(\varphi \vee \psi)$;
2) $\forall x \varphi \,\&\, \psi \models\!\!\dashv \forall x(\varphi \,\&\, \psi)$;
3) $\exists x \varphi \vee \psi \models\!\!\dashv \exists x(\varphi \vee \psi)$;
4) $\exists x \varphi \,\&\, \psi \models\!\!\dashv \exists x(\varphi \,\&\, \psi)$;

2) Скулемизация - премахване кванторите за същ.

Всяка променлива по екзистенциален квантор се замества с функционален символ, зависещ от променливите по универсални квантори преди нея. Ако няма такива се замества с константа

- $\varphi \leftrightharpoons \exists x \varphi'$, то скулемизацията ѝ дава $\varphi_S \leftrightharpoons \varphi'[x/c]$, където c е константа
- $\varphi \leftrightharpoons \forall y_1 \dots \forall y_k \exists x \varphi'$, то скулемизацията ѝ $\varphi_S \leftrightharpoons \forall y_1 \dots \forall y_k \, \varphi'[x/f(y_1, \dots, y_k)]$

3) Същинска метод на резолюцията:

3.1) Резолвента

3.2) Колапс

Резолвента:

Нека D_1 и D_2 са дизюнкти и $D_1 = \{L\} \cup D_1'$ и $D_2 = \{\tilde{L}\} \cup D_2'$. Намираме субституция σ такава, че $L\sigma = \tilde{L}\sigma$, тогава

$$Res_L(D_1, D_2) = D_1'\sigma \cup D_2'\sigma$$

Колапс:

Ако $D = \{L, \tilde{L}\} \cup D'$ и намираме субституция такава, че $L\sigma = \tilde{L}\sigma$, то

$$Collapse(D) = \{L\sigma\} \cup D'\sigma$$

4) Край, получили сме празен дизюнкт.

Решение на задачата

$\varphi \leftrightharpoons \exists x \forall y (p(x,y) \Leftrightarrow \neg \exists z (p(y,z) \& p(z,y))) \models\!\!\dashv$

$\exists x \forall y ((p(x,y) \& \neg \exists z (p(y,z) \& p(z,y))) \vee$
$(\neg p(x,y) \& \exists z (p(y,z) \& p(z,y)))) \models\!\!\dashv$

$A \Leftrightarrow B \models\!\!\dashv (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)$

$\exists x \forall y ((p(x,y) \& \forall z (\neg p(y,z) \vee \neg p(z,y))) \vee$
$(\neg p(x,y) \& \exists z (p(y,z) \& p(z,y)))) \models\!\!\dashv$

$\exists x \forall y \exists z ((p(x,y) \& \forall t (\neg p(y,t) \vee \neg p(t,y))) \vee$
$(\neg p(x,y) \& (p(y,z) \& p(z,y)))) \models\!\!\dashv$

$\exists x \forall y \exists z \forall t ((p(x,y) \& (\neg p(y,t) \vee \neg p(t,y))) \vee$
$(\neg p(x,y) \& (p(y,z) \& p(z,y)))) \models\!\!\dashv$

Имаме, че $A \vee (B \& C) \models\!\!\dashv (A \vee B) \& (A \vee C)$

$\models\!\!\dashv \exists x \forall y \exists z \forall t (((p(x,y) \& (\neg p(y,t) \vee \neg p(t,y))) \vee \neg p(x,y))$
$\& ((p(x,y) \& (\neg p(y,t) \vee \neg p(t,y))) \vee p(y,z))$
$\& ((p(x,y) \& (\neg p(y,t) \vee \neg p(t,y))) \vee p(z,y)))$

$$
\begin{aligned}
\models \exists x \forall y \exists z \forall t \big(& (p(x,y) \vee \neg p(x,y)) \;\& \\
& (\neg p(y,t) \vee \neg p(t,y) \vee \neg p(x,y)) \;\& \\
& (p(x,y) \vee p(y,z)) \;\& \\
& (\neg p(y,t) \vee \neg p(t,y) \vee p(y,z)) \;\& \\
& (p(x,y) \vee p(z,y)) \;\& \\
& (\neg p(y,t) \vee p(t,y) \vee p(z,y)) \big)
\end{aligned}
$$

2) Скулемизация

$\exists x \rightsquigarrow$ константа a. Тогава

$$
\begin{aligned}
\underset{x=a}{\overset{\text{skolem}}{\sim}} \forall y \exists z \forall t \big(& (p(a,y) \vee \neg p(a,y)) \;\& \\
& (\neg p(y,t) \vee \neg p(t,y) \vee \neg p(a,y)) \;\& \\
& (p(a,y) \vee p(y,z)) \;\& \\
& (\neg p(y,t) \vee \neg p(t,y) \vee p(y,z)) \;\& \\
& (p(a,y) \vee p(z,y)) \;\& \\
& (\neg p(y,t) \vee \neg p(t,y) \vee p(z,y)) \big)
\end{aligned}
$$

Понеже z зависи от y можем да разгледаме z като резултат от някоя z ф-я приложена над y, т.е. $z = f(y)$. Тогава

$$
\begin{aligned}
\underset{z=f(y)}{\overset{\text{skolem}}{\sim}} \forall y \forall t \big(& (p(a,y) \vee \neg p(a,y)) \;\& \\
& (\neg p(y,t) \vee \neg p(t,y) \vee \neg p(a,y)) \;\& \\
& (p(a,y) \vee p(y,f(y))) \;\& \\
& (\neg p(y,t) \vee \neg p(z,y) \vee p(y,f(y))) \;\& \\
& (p(a,y) \vee p(f(y),y)) \;\& \\
& (\neg p(y,t) \vee \cancel{\neg p(z,y)} \vee p(f(y),y)) \big) \\
& \qquad\qquad\quad \neg p(t,y)
\end{aligned}
$$

Така получаваме следното мн-во от дизюнкти

$D_1 = \{p(a, y_1), \neg p(a, y_1)\}$

$D_2 = \{\neg p(y_2, t_2), \neg p(t_2, y_2), \neg p(a, y_2)\}$

$D_3 = \{p(a, y_3), p(y_3, f(y_3))\}$

$D_4 = \{\neg p(y_4, t_4), \neg p(t_4, y_4), p(y_4, f(y_4))\}$

$D_5 = \{p(a, y_5), p(f(y_5), y_5)\}$

$D_6 = \{\neg p(y_6, t_6), \neg p(t_6, y_6), p(f(y_6), y_6)\}$

Същински метод на резолюцията

1. Резолвенти:
   Ако $D_i = \{A, l_2, \dots, l_k\}$, $D_j = \{\neg A', l'_2, \dots, l'_n\}$
   и σ е такава субституция, че $A\sigma = A'\sigma$, то
   $Res(D_i, D_j) = \{l_2\sigma, \dots, l_k\sigma, l'_2\sigma, \dots, l'_n\sigma\}$

2. Колапс:
   Ако $D = \{l', l'', l_2, \dots, l_k\}$ и σ е такава, че
   $l'\sigma = l''\sigma$. Тогава
   $Col(D) = \{l'\sigma, l_2\sigma, \dots, l_k\sigma\}$

1) Нека $\sigma: \left| \begin{array}{l} t_4 = a \\ y_3 = y_4 \end{array} \right.$, тогава

$$Res(D_3, D_4) \underset{\substack{t_4 = a \\ y_3 = y_4}}{=\!=\!=} \{p(y_4, f(y_4)), \neg p(y_4, a)\}$$

$D_7 = \{p(y_7, f(y_7)), \neg p(y_7, a)\}$

2) $Res(D_5, D_6) \underset{\substack{t_6 = a \\ y_5 = y_6}}{=\!=\!=} \{p(f(y_6), y_6), \neg p(y_6, a)\}$

$D_8 = \{p(f(y_8), y_8), \neg p(y_8, a)\}$

3) $Res(D_2, D_7) \underset{\substack{t_2 = f(y_7) \\ y_2 = y_7}}{=\!=\!=} \{\neg p(y_7, a), \neg p(a, y_2), \neg p(f(y_7), y_7)\}$

$D_9 = \{\neg p(y_9, a), \neg p(a, y_9), \neg p(f(y_9), y_9)\}$

4) $Res(D_8, D_9) \underset{y_9 = y_8}{=\!=} \{\neg p(y_8, a), \neg p(a, y_8)\}$

$D_{10} = \{\neg p(y_{10}, a), \neg p(a, y_{10})\}$

5) $Res(D_5, D_{10}) \underset{\substack{y_{10} = f(y_5) \\ y_5 = a}}{=\!=\!=} \{p(a,a), \neg p(a, f(a))\} = D_{11}$

6) $Res(D_{11}, D_3) \underset{y_3 = a}{=\!=} \{p(a,a)\} = D_{12}$

7) $\underset{y_{10} = a}{Col(D_{10})} = \{\neg p(a,a)\}$

8) $Res(D_{12}, D_{13}) = \blacksquare$

// Не можем да унифицираме ф-я с константа и обратно