ЗАДАЧИ ОТ ИЗПИТНИ ТЕМИ - I част

1 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, за които $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a},\vec{c}) = \sphericalangle(\vec{c},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Нека т.Н е петата на височината през върха О на тетраедъра *OABC*. Да се изрази вектора $\overrightarrow{OH}$ като линейна комбинация на $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и да се намери дължината му.

2 зад. Дадени са векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, за които $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle(\vec{c},\vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a},\vec{c}) = \frac{2\pi}{3}$. Нека *OABC* е тетраедър, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

a) Да се намери обема на тетраедъра *OABC*;

b) Нека точките *M*, *N* и *P* принадлежат съответно на отсечките *AB*, *BC* и *CA* като *AM:MB* = *BN:NC* = *CP:PA* = 1:2. Да се изразят векторите $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}$ и $\overrightarrow{MP}$ като линейни комбинации на $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. Да се пресметне $\cos\sphericalangle NMP$;

c) Нека точката *G* е медицентърът на ΔABC. Да се докаже, че т.*G* е медицентърът и на ΔMNP.

3 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, като $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Нека $\overrightarrow{OA} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{a} \times \vec{b}$.

a) Да се намери обема на тетраедъра *OABC*;

b) Ако точките A_1, B_1 и O_1 са средите на страните на триъгълник *OAB*, да се намерят обиколката и лицето на триъгълник $A_1B_1O_1$.

4 зад. Дадени са векторите $\overrightarrow{CA} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}), \overrightarrow{CB} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{CD} = \vec{a} \times \vec{b}$, като $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

a) Нека точка *H* е петата на височината на Δ *ABC*, спусната от върха *A* към страната *BC*. Да се изрази $\overrightarrow{AH}$ като линейна комбинация на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се намери дължината на $\overrightarrow{AH}$.

b) Да се намерят лицето на триъгълник *ABC* и обема на тетраедъра *ABCD*.

5 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ като $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$.
$\overrightarrow{CA} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}), \overrightarrow{CB} = \vec{b}, \overrightarrow{CD} = \vec{a} \times \vec{b}$.

a) Нека точката *H* е петата на височината през върха *A* на триъгълник *ABC*. Да се изрази векторът $\overrightarrow{AH}$ като линейна комбинация на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се намери $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, ако $|\overrightarrow{AH}| = 1$.

b) При каква стойност на ъгъла α векторите $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са линейно независими?

c) При $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, да се намери обема на тетраедъра *ABCD*.

6 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ като $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Даден е успоредника *ABCD*, за който $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Нека точката *M* е средата на страната *AB*, а точките *N*, *P* и *Q* са медицентровете съответно на ΔAMD, Δ *MCB* и ΔCDM.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{NQ}, \overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{PN}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и да се докаже, че правите *PN* и CD са успоредни;

b) Да се намерят лицето и обиколката на ΔNPQ;

c) Ако $\overrightarrow{AS} = \vec{a} \times \vec{b}$, да се намери обема на паралелепипеда с ръбове $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AS}$.

7 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Точките M, N и P са медицентровете съответно на триъгълниците: *AOB*, *BOC* и *AOC*.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}$ и $\overrightarrow{PM}$ като линейни комбинации на $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$;

b) Да се докаже, че следните прави са две по две успоредни: *MN* и *AC*, *PM* и *BC*, *NP* и *AB*;

c) Ако $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ и $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, да се намери периметъра на триъгълник MNP.