вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
ДР1	45655	**5**	**1**	**I**	**Информатика**
Име:	**Майкъл Захариев Зарков**				

Домашна работа № 1

Домашното се предава **разделено** по задачи на лекцията на **6 ноември 2019 г.**

Задача 1.

а) Да се запише в алгебричен вид числото

$$\left(\frac{\sqrt{3}+5i}{2\sqrt{3}-4i}\right)^{655}.$$

б) Да се намерят в тригонометричен вид корените на уравнението $x^{239}+\dfrac{3i\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}=0$;

в) Да се намерят в алгебричен вид корените на уравнението $x^2+(8-2i)x+(18-4i)=0$.

Задача 2. Нека ω_0, ω_1,..., ω_{34} са тридесет и петите корени на единицата, където $\omega_k=\cos\dfrac{2k\pi}{35}+i\sin\dfrac{2k\pi}{35}$. Да се пресметне израза

$$\omega_0^{637}+\omega_1^{637}+\cdots+\omega_{34}^{637}.$$

Задача 3. Да се реши системата в зависимост от стойностите на параметрите λ и μ:

$$\left|\begin{array}{rrrrl} 2x_1- & 2x_2- & 5x_3+ & x_4= & 1\\ -3x_1+ & x_2+ & x_3- & x_4= & \lambda\\ 29x_1- & 13x_2- & 20x_3+ & (1+\mu)x_4= & 3-2\lambda\\ 7x_1- & 2x_2- & x_3- & 2x_4= & -1 \end{array}\right..$$

Задача 4.

а) Нека $\mathbb{V}$ е множеството на всички безкрайни числови редици. Да се докаже, че $\mathbb{V}$ е линейно пространство относно обичайните операции събиране на редици и умножение на редица с число;

б) Нека $\mathbb{W}\subset\mathbb{V}$ е множеството на финитните редици (т.е. редиците, на които само краен брой от членовете могат да бъдат ненулеви). Да се докаже, че $\mathbb{W}$ е подпространство на $\mathbb{V}$;

в) Нека $\mathbb{W}\subset\mathbb{V}$ е множеството на всички аритметични прогресии. Да се докаже, че $\mathbb{W}$ е подпространство на $\mathbb{V}$;

г) Образуват ли геометричните прогресии подпространство на $\mathbb{V}$? Защо?

д) Нека $\mathbb{W}$ е множеството на редиците a_1, a_2, ..., за които $a_{n+1}=a.a_n+b.a_{n-1}$ при $n\geqq 2$, където a, $b\in F$ са константи. Да се докаже, че $\mathbb{W}$ е подпространство на $\mathbb{V}$.

Задача 5. Нека $4\mathbb{Z}$ е множстовото от целите числа, които се делят на 4 (тези числа още наричаме кратни на числото 4). Тоест $4\mathbb{Z}=\{4z \mid z\in\mathbb{Z}\}=\{z\in\mathbb{Z}\mid \exists\, q\in\mathbb{Z}\ :\ z=4q\}$

а) Докажете, че множеството $4\mathbb{Z}$ е подгрупа на $\mathbb{Z}$.

Нека $R_\sim$ е следната бинарна релация над множеството на целите числа:
$\forall a,\ b\in\mathbb{Z}\quad (a,\ b)\in R_\sim \iff a-b\in 4\mathbb{Z}$ (Тоест $R_\sim=\{(a,\ b)\ \in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid a-b\in 4\mathbb{Z}\}$).

б) Докажете, че $R_\sim$ е релация на еквивалентност.

в) Намерете (опишете) всички класове на еквивалентност на релацията $R_\sim$.

- Докажете, че ако $z \in \mathbb{Z}$, то $\forall m \in [z] \quad [m] = [z]$.

- Колко е броя на различните класове на еквивалентност ?

г) Докажете, че намерените от вас класове на еквивалентност разбиват множеството $\mathbb{Z}$.

Дефинираме, операцията $\oplus$ в множеството от класовете на еквивалентност на релацията $R_\sim$ по следния начин: Нека $a,\ b \in \mathbb{Z}$, тогава $[a] \oplus [b] = [a+b]$. Докажете, че тази операция е дефинирана коректно (тоест не зависи от избора на представители на двата класа). Тоест докажете, че ако $[a] = [a_1]$ и $[b] = [b_1]$, то $[a] \oplus [b] = [a_1] \oplus [b_1]$. За целта използвайте, че ако $[z] = [m]$, то $z - m \in 4\mathbb{Z}$.

д) Докажете, че множеството от класовете на еквивалентност на релацията $R_\sim$ е група относно операцията $\oplus$.

Нека $S = \{x \in \mathbb{C} \mid x^4 = 1\}$. Тоест S е множеството от решения на уравнението $x^4 = 1$ в множеството на комплексните числа.

е) Докажете, че множеството S е група относно операцията умножение на комплексни числа.

ж) Постройте биекция f между множеството от класовете на еквивалентност на релацията $R_\sim$ и множеството S, притежаваща следното свойство: $\forall a,\ b \in \mathbb{Z}\ f([a] \oplus [b]) = f([a]).f([b])$, където символът . е бинарната операция умноженение на комплексни числа.

Забележка: докажете, че f притежава свойството: $\forall a,\ b \in \mathbb{Z}\ f([a] \oplus [b]) = f([a]).f([b])$

Задача 6. Нека $\mathbb{V}$ е линейно пространство и $\mathbb{W} \subsetneq \mathbb{V}$ е собствено подпространство на $\mathbb{V}$. Да се докаже, че:

а) Съществува базис на $\mathbb{V}$ от вектори, никой от които не принадлежи на $\mathbb{W}$;

б) Ако $k \leqq \dim \mathbb{W}$, то съществува базис на $\mathbb{V}$, в който точно k вектора принадлежат на $\mathbb{W}$