ЛЕКЦИЯ 5

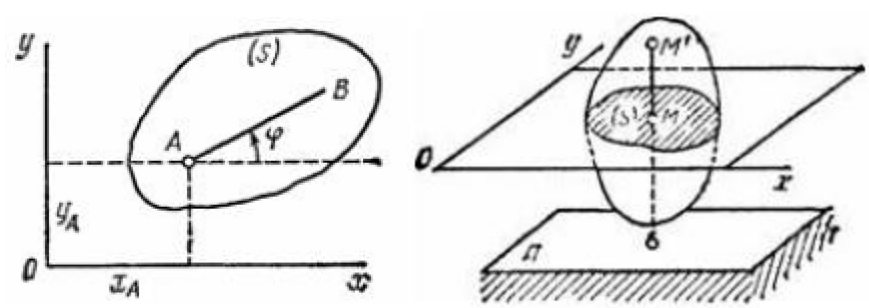
Геометрия на движението

Съдържание

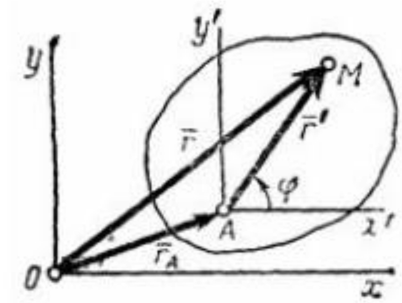
1. Равнинно движение на тяло.
2. Преместване на равнинна фигура.
3. Поле на скоростите на точките на равнинна фигура.
4. Моментен център на скоростите.
5. Центроиди.

1. Равнинно движение на тяло.

- *Равнинно движение:* всички точки от тялото остават в равнина, успоредна на някаква неподвижна равнина по време на движението
- изучаването на равнинното движение на тяло се свежда до определяне на движението на една равнинна фигура в нейната равнина



фиг.1



фиг.2

- означения
  - Oxy : неподвижна координатна система
  - A x'y' : координатна система, фиксирана в тялото (A- полюс)
  - M : произволна точка от тялото
  - $\mathbf{r}$: радиус-вектор на M относно Oxy с координати (x,y)
  - $\mathbf{r}'$: радиус-вектор на M относно A x'y' с координати (x',y')
  - $\mathbf{r}_A$: радиус-вектор на A относно Oxy с координати (x_0,y_0)
  - φ : ъгъл на завъртане около полюса

- равнинното движение на тяло се определя от:
  - уравнението на движение на основната точка (полюс)

$$x_o = f_1(t), \qquad y_o = f_2(t) \tag{1}$$

  - уравнението на въртене около основната точка

$$\varphi = \varphi(t) \tag{2}$$

от

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}' \tag{3}$$

$$x = x_0 + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \quad y = y_0 + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \tag{4}$$

- уравненията (4) – параметрични уравнения на точката M; траекторията се получава чрез изключване на времето
- функциите x_0 , y_0 , φ - зададени функции на времето

2. Преместване на равнинна фигура.

- всяко преместване на равнинна фигура се представя от две движения:
  - *постъпателно*; (зависи от избора на полюса)

- *завъртане около полюса*; (не зависи от избора на полюса)

- вектор на малките завъртания $\boldsymbol{\theta}$:
  - *големина*, равна на големината на ъгъла на завъртане
  - *направление*, перпендикулярно на равнината на преместване
  - *посока* съгласно правилото за положително завъртане

- представяне на преместването на произволна точка чрез вектора на малките завъртания $\boldsymbol{\theta}$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p_0} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}' \qquad (5)$$

- теорема на Ойлер:

  Всяко непостъпателно преместване на равнинна фигура може да се представи като едно завъртане около някакъв център

  Доказателство: преместването на равнинна фигура се определя от преместването на две произволни точки от нея, $A \to A_1$ и $B \to B_1$, т.е. $AB \to A_1B_1$. Пресечната точка C на симетралите на AA_1 и BB_1 е център на ротация с ъгъл $< ACA_1$. Разстоянията от C до точки A и B заедно с отсечката AB образуват еднозначно определен триъгълник ΔCAB, еднакъв с триъгълника ΔCA_1B_1 по три страни; ъгълът $< ACA_1$, довеждащ $A \to A_1$, довежда ΔCAB в ΔCA_1B_1

- частни случаи:
  - симетралите на AA_1 и BB_1 съвпадат – центърът на завъртане е пресечна точка на симетралите и правите AB и A_1B_1, ако те не са успоредни
  - симетралите на AA_1 и BB_1 съвпадат и правите AB и A_1B_1 са успоредни, център на завъртане не съществува; преместването е постъпателно
  - при успоредни симетрали център на завъртане не съществува; преместването е постъпателно

3. Поле на скоростите на точките на равнинна фигура.

- нека Δt е интервал, за който се извършва преместването ;

  от $\mathbf{p} = \mathbf{p_0} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}'$

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{p_0}}{\Delta t} + \lim_{\Delta j \to 0} \left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{\Delta t} \times \mathbf{r}' \right) \qquad (6)$$

$\mathbf{v}_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{p_0}}{\Delta t}$ - скорост на полюса;

$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{\theta}}{\Delta t}$ - ъглова скорост на фигурата

- ***Поле на скоростите на точките на равнинна фигура***

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \qquad (7)$$

проектиране (7) на неподвижните оси ($v_{0x} = \dot{x}_0$; $v_{0y} = \dot{y}_0$; $\omega = \dot{\varphi}$)

$$v_x = v_{0x} - \omega(y - y_0), \quad v_y = v_{0y} + \omega(x - x_0),$$

където $(0,0,\omega)$ са координатите на ъгловата скорост

Частни случаи:

- въртене около неподвижна ос: $\mathbf{v_0} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$
- постъпателно движение: $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v_0}$

- абсолютно, относително и преносно движение
  - *абсолютно*: спрямо неподвижна координатна система Oxy

  - *относително*: спрямо подвижна система A x'y'

  - *преносно*: движението на системата A x'y' спрямо системата Oxy

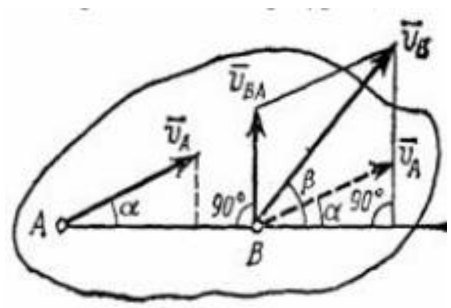
- *абсолютното движение на равнинна фигура може да се разглежда като съставено от две движения: преносно (определено от полюса, постъпателно) и относително (въртене около полюса)*

- *следствие*: скоростта на въртене около полюса е равна на производната по времето на локалния (относно полюса) радиус-вектор на точката

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v} - \mathbf{v_0} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \qquad (8)$$

- теорема:

  Проекциите на скоростите на крайните точки на отсечка AB върху правата AB са равни



фиг.3

Означения: $\mathbf{v}_{AB}$ - скорост на точка B, разглеждана като въртяща се около полюса A

$\mathbf{r}'_{AB}$ - радиус-вектор на B относно A

Тогава

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AB}, \qquad \mathbf{v}_{AB} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{AB},$$

И след скаларно умножение с $\mathbf{r}'_{AB}$ и отчитане на смесеното произведение, в което участват два еднакви вектора и в който случай то е равно на нула, се стига до

$$\mathbf{v}_B\,\mathbf{r}'_{AB} = \mathbf{v}_A\,\mathbf{r}'_{AB} + \mathbf{v}_{AB}\,\mathbf{r}'_{AB}$$

$$\mathbf{v}_B\,\mathbf{r}'_{AB} = \mathbf{v}_A\,\mathbf{r}'_{AB} \qquad (9)$$

Или проекциите на скоростите на крайните точки на отсечка AB върху правата AB са равни, което следва от (9).

4. Моментен център на скоростите.

- ще се покаже, че при всяко непостъпателно движение на равнинна фигура съществува точка, чиято скорост в даден момент е нула - *моментен център на скоростите*

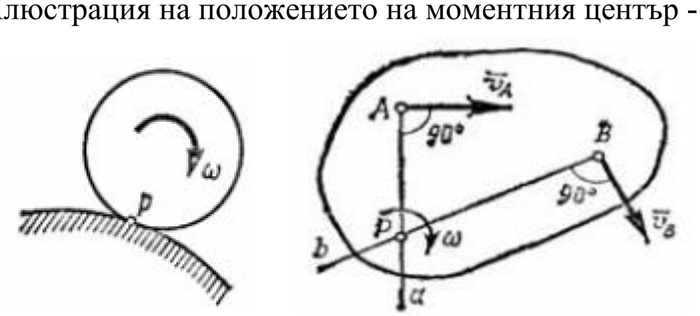
  - за всяка точка М: $\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AM}$, където $\mathbf{v_{AM}} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AM}$
  - съществува положение (заради въртенето), в което $v_M = v_A + \omega AM$ (събираемите са вектори, чието направление е успоредно на една е съща права)
  - може да се построи отсечка $AP = \dfrac{v_A}{\omega}$ по издигнат от полюса А перпендикуляр към $\mathbf{v}_A$, защото големините на скоростите са известни и тогава:

    $v_P = v_A - \omega AP = v_A - \omega \dfrac{v_A}{\omega} = 0$ (знакът „минус“ съответства на полуравнината относно $\mathbf{v}_A$, в която е точката P). Целта на построената отсечка е чрез нейната дължина да се анулира скоростта на полюса и се отчете, че вследствие на въртенето около полюса има две положения, при които векторите на скоростта $\mathbf{v}_{AM}$ са или равни, или противоположни.

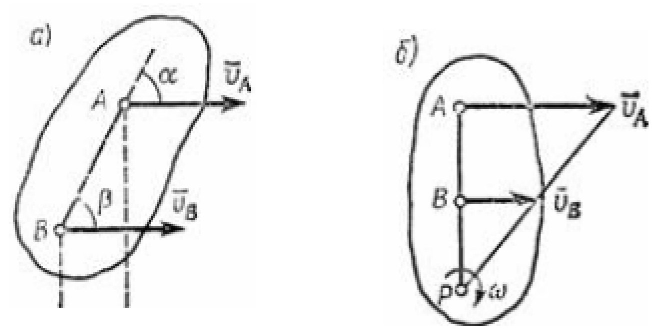
- за всеки полюс Р, съвпадащ с моментния център (за него $v_p = 0$)

  $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{PA} = \omega \times \overrightarrow{PA}$; $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{PB} = \omega \times \overrightarrow{PB}$

  Илюстрация на положението на моментния център - фиг.4.



фиг.4



Фиг.5.

фиг.5а – перпендикулярите към скоростите на точките са успоредни и моменет център на скоростите не съществува.

фиг.5б – перпендикулярите към скоростите на точките съвпадат и моменет център на скоростите съществува, когато скоростите на точките са с различна големина.

- *разпределение на скоростите в тялото*: скоростите на точки от равнинна фигура могат да се разглеждат като скорости на въртене около ос през моментния център, а самият моментен център - като център на въртене на фигурата

- моментният център заема различни положения във всеки момент от време както в движещата се равнинна фигура, така и в неподвижната равнина

- връзка между координатите на неподвижната координатна система Oxy и фиксираната в тялото координатна система O’x’y’ (O’- полюс)

$$x = x_0 + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$

$$y = y_0 + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$

- Определяне на радиус-вектора на моментния център P

от $\mathbf{0} = \mathbf{v_P} = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r'_P}$,

След умножение отляво векторно с $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v_P} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r'_P}) = \mathbf{0} \ ;$$

След разкриване на двойното векторно произведение:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v_0} + (\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{r}'_\mathbf{P})\,\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}'_\mathbf{P} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v_0} - (\boldsymbol{\omega}^2)\mathbf{r}'_\mathbf{P}$$

Окончателно

$$\mathbf{r}'_\mathbf{P} = \frac{1}{\omega^2}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v_0}) \tag{10}$$

- координати на моментния център

  - в неподвижната координатна система Оху

$$x = x_0 - \frac{v_{0y}}{\omega}\ ,\ y = y_0 + \frac{v_{0x}}{\omega} \tag{11}$$

  - в подвижната координатна система O'x'y' (следва от (10) и уравненията на преход между двете координани системи)

$$x' = \frac{1}{\omega}(v_{0x}\sin\varphi - v_{0y}\cos\varphi), \qquad y' = \frac{1}{\omega}(v_{0x}\cos\varphi + v_{0y}\sin\varphi) \quad (12)$$

5. Центроиди.

- подвижна центроида – траекторията на моментния център в подвижната координатна система

- неподвижна центроида – траекторията на моментния център в неподвижната координатна система

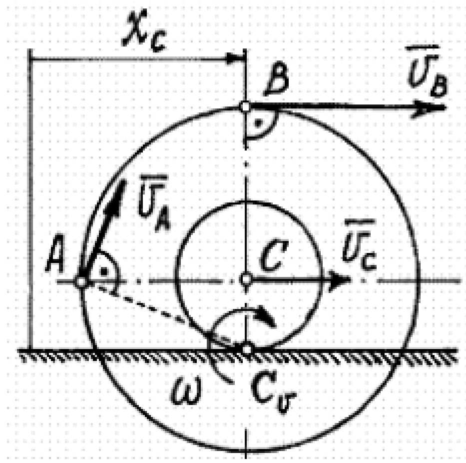
- *моментният център е обща точка на двете траектории – подвижната и неподвижната центроида, във всеки момент.*

- скоростта на моментния център е по допирателната към всяка от траекториите; *двете центроиди се допират в моментния център*

- при движение на равнинна фигура подвижната центроида се търкаля *без хлъзгане* по неподвижната центроида

Примери.

1. Тяло е съставено от два свързани концентрични диска с различни радиуси R=4 и r=2, като малкият диск се търкаля по неподвижна равнина. Траекторията на центъра му С се дава с $x_c = 3t$. Да се определят скоростите на точки А, В и С (фиг.6).

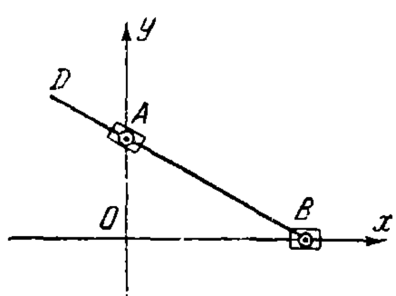


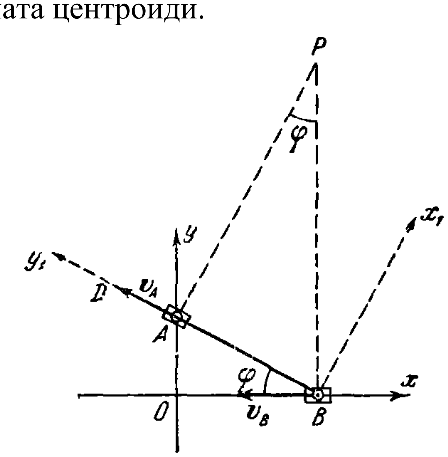
фиг.6

Моментен център - C_v. Скорост на С - $v_C = \dot{x}_C = 3$. Ъглова скорост: $\omega = \frac{v_C}{r} = \frac{3}{2}$.

$v_A = \omega AC_v = \omega\sqrt{r^2 + R^2} = 6.71$; $\quad v_B = \omega BC_v = \omega(r+R) = 9$

2. Краят В на прът шарнирно е закрепен към направляваща, движеща се хоризонтално. Прътът минава през шарнир А, който може да се върти около ос, перпендикулярна на равнината на движението (фиг.7); разстоянието ОА= a. Да се намерят уравненията на неподвижната и подвижната центроиди.





фиг.7 фиг.8

Неподвижна координатна система: Оху (фиг.7);

подвижна координатна система Bx_1y_1 (фиг.8). Моментен център на скоростите – P.

Неподвижната центроида – геометрично място на моментните центрове в неподвижната равнина.

Координати на P в неподвижната равнина : $x_P = \dfrac{a}{tg\varphi}; \quad y_P = \dfrac{AB}{\sin\varphi} = \dfrac{AO}{\sin^2\varphi} = \dfrac{a}{\sin^2\varphi}$

Изключване на ъгъла:

$x_P^2 = a^2 \dfrac{1-\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}; \quad \sin^2\varphi = \dfrac{a}{y_P} \;\Rightarrow\; x_P^2 = a(y_P - a)$ - уравнение на неподвижната центроида (парабола)

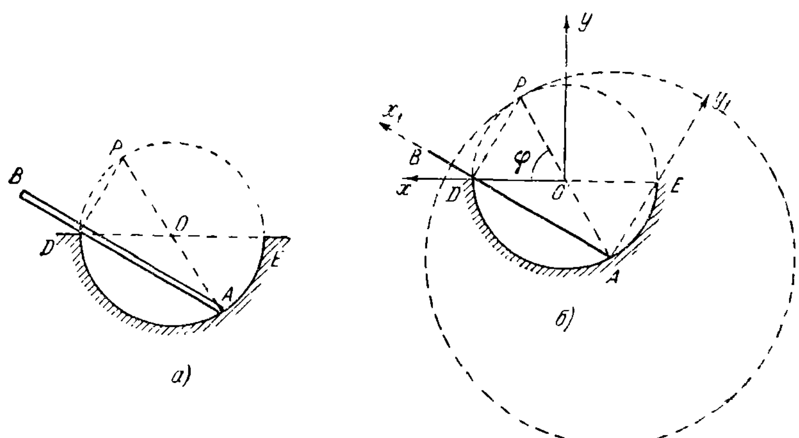
Координати на P в подвижната равнина : $x_1 = BP\cos\varphi = \dfrac{a}{\sin^2\varphi}\cos\varphi; y_1 = AB = \dfrac{a}{\sin\varphi}$

Изключване на ъгъла:

$$\sin\varphi = \frac{a}{y_1}, \qquad x_1 = \frac{ay_1^2}{a^2}\sqrt{1-\sin^2\varphi} = \frac{y_1^2}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{y_1^2}}$$

$\Rightarrow \quad a^2x_1^2 = ay_1^2(y_1^2 - a^2)$ - уравнение на подвижната центроида

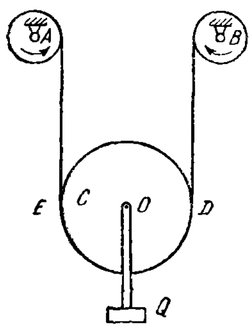
3. Прът AB се движи в равнината на чертежа така, че единият му край A непрекъснато се пързаля по полуокръжността EAD, а другият му край винаги се допира до неподвижната точка D на диаметъра ED. Да се намерят уравненията на неподвижната и подвижната центроиди.

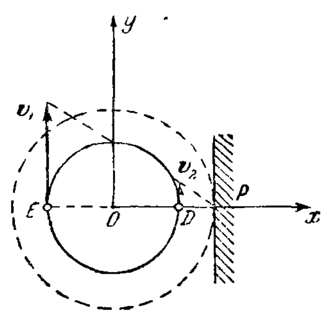


Скоростта на точка A описва дъга от окръжност, т.е. тя е по допирателната към нея и моментният център на скоростите лежи на перпендикуляр, издигнат от направлението на скоростта, т.е. по направление на радиуса ѝ. От друга страна скоростта на точка от пръта, съвпадаща в момента с неподвижната точка D на диаметъра ED, има посока по направление на пръта, т.е. моментният център на скоростите лежи на перпендикуляр, издигнат от направлението на скоростта. Тогава моментният център на скоростите е пресечната точка P на двата перпендикуляра, която лежи на окръжността – заради вписания прав ъгъл с връх D. Или *геометричното място на моментните центрове на скоростите в неподвижната равнина – неподвижната центроида, е самата окръжност с център O и радиус OA.*

Точка P е на два пъти по-голямо разстояние от A и следователно ще описва окръжност в подвижната равнина с два пъти по-голям радиус - *подвижната центроида. Движението може да се разглежда като търкаляне на голямата окръжност по малката, допирайки се без хлъзгане в допирната им точка.*

4. Товар Q е закачен на макара C, имаща диаметър $d = 75$ [sm], която от своя страна се издига чрез две други макари A и B с радиуси $r = 20$ [sm], фиксирани неподвижно. Макара A прави $n_1 = 60$ [rpm], а макара B - $n_2 = 15$ [rpm]. Да се определят неподвижната и подвижната центроиди на макарата C.





Линейната скорост на точката, обща за макарата A и нишката, е

$$v_1 = r\,\omega_1 = 20.60.\frac{2\pi}{60} = 40\pi \quad \text{[sm/s]}.$$

Линейната скорост на точката, обща за макарата B и нишката, е

$$v_2 = r\,\omega_2 = 20.15.\frac{2\pi}{60} = 10\pi \quad \text{[sm/s]}.$$

Тези линейни скорости са всъщност скоростите на точки E и D, които са по допирателните към окръжностите на макарите, като в този случай перпендикулярите, издигнати от тях съвпадат, и моментният център не може да се определи като тяхна пресечна точка; това става, защото са известни големините им.

Ако l е разстоянието от D до моментния център на скоростите, то

$v_1 = (d + l)\omega$ и $v_2 = l\,\omega$ и от последната система от две уравнения следва след изключване на ъгловата скорост около моментния център на скоростите ω:

$$\Rightarrow \quad l = \frac{d v_2}{v_1 - v_2} = 25 \text{ [sm]}.$$

Неподвижна центроида: права на разстояние $l + \dfrac{d}{2}$ от оста “y”.

Подвижна центроида: окръжност с радиус $l + \frac{d}{2}$ от центъра О.

Движението може да се разглежда като търкаляне на окръжността по правата, допирайки се без хлъзгане в допирната им точка.