28т. => 4,50

Име...Майкъл...Презиме...Захариев...Фамилия...Зарков...

Ф.Н....45655... Курс...III...

Контролна работа № 1 по Геометрия
III курс, Информатика
13.04.2024 г.

Вариант Б

1 зад. В разширеното евклидово пространство E_3^*, в хомогенни координати са дадени точката: $M(0,1,1,-1)$ и правата a: $\begin{cases} z - x = 0 \\ z - y - t = 0 \end{cases}$.

a) (4т.) Да се намерят уравнения на правата b, която минава през точката M и е успоредна на правата a;

b) (4т.) Да се намери уравнение на равнината β, която минава през успоредните прави a и b;

c) (6т.) Да се намери аналитично представяне на ортогонално проектиране ψ на E_3^* върху равнината β.

2 зад.

a) (6т.) Спрямо дадена координатна система в разширената евклидова равнина E_2^* да се намери аналитично представяне на линейната трансформация φ, която изобразява точките:
$A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $O(0, 0, 1)$, $E(1, 1, 1)$ съответно в точките
$A'(0, 1, 0)$, $B'(1, 0, 0)$, $O'(1, 5, 1)$, $E'(2, 6, 1)$. Докажете, че φ е афинна трансформация;

b) (6т.) Намерете неподвижните точки и прави под действие на φ;

c) (4т.) Запишете действието на φ върху крайни точки, в нехомогенни координати, спрямо ОКС в евклидова равнина. Определете вида на изображението φ.

3 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ в равнината са дадени правите:
$g_1: y - 7 = 0$ и $g_2: x - 6 = 0$.

a) (6т.) Намерете аналитично представяне на линейната трансформация $\varphi = \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2}$. Определете вида на φ;

b) (4т.) Намерете неподвижните точки и неподвижните прави под действие на φ. Вярно ли е, че $\sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2} = \sigma_{g_2} \circ \sigma_{g_1}$?

Майкъл Зарков, фн. 45655

Зад. 1 $M(0,1,1,-1)$, $a: \begin{cases} x-z=0 \\ y-z+t=0 \end{cases}$

а) ? $b: \begin{cases} \ni M \\ \parallel a \end{cases}$, безкрайната т. на a: $U_a \left| \begin{array}{l} x-z=0 \\ y-z+t=0 \\ t=0 \end{array} \right.$, $\left| \begin{array}{l} x=z \\ y=z \\ t=0 \end{array} \right.$

$\Rightarrow U_a(1,1,1,0)$

$b \parallel a \Rightarrow U_a \equiv U_b$

Параметрични у-ния за b:

$b: \left| \begin{array}{l} x=\mu \\ y=\lambda+\mu \\ z=\lambda+\mu \\ t=-\lambda \end{array} \right.$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

4т.

б) ? $\beta: \begin{cases} \ni a \\ \ni b \end{cases} \Rightarrow \beta: \begin{cases} \ni M \\ \ni U_a \\ \ni N(2,1,2,1) \end{cases}$ $(N \ni a)$

$\beta: Ax+By+Cz+Dt=0$

$\beta: \left| \begin{array}{l} A.0+B+C-D=0 \\ A+B+C=0 \\ 2A+B+2C+D=0 \end{array} \right.$, $\beta: \left| \begin{array}{l} D=B+C \\ A=-B-C \\ -2(B+C)+B+2C+B+C=0 \end{array} \right.$,

$\beta: \left| \begin{array}{l} A=-B-C=-B \\ D=B+C=B \\ C=0 \end{array} \right.$, за $B=1$, $\beta: -x+y+t=0$

4т.

c) Виж стр. 4 за подточка c).

Зад. 2 $\quad A(1,0,0) \xrightarrow{\ell} B(0,1,0)$

$B(0,1,0) \xrightarrow{\ell} A(1,0,0)$

$O(0,0,1) \xrightarrow{\ell} O'(1,5,1)$

$E(1,1,1) \xrightarrow{\ell} E'(2,6,1)$

а) $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$, $\quad C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\quad \left| \begin{array}{l} c_{11} = 0 \\ c_{21} = \lambda_1 \\ c_{31} = 0 \end{array} \right.$

$C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\quad \left| \begin{array}{l} c_{12} = \lambda_2 \\ c_{22} = 0 \\ c_{32} = 0 \end{array} \right.$

$C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\quad \left| \begin{array}{l} c_{13} = \lambda_3 \\ c_{23} = 5 \cdot \lambda_3 \\ c_{33} = \lambda_3 \end{array} \right.$

$C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\quad \left| \begin{array}{l} c_{11} + c_{12} + c_{13} = 2 \cdot \lambda_4 \\ c_{21} + c_{22} + c_{23} = 6 \lambda_4 \\ c_{31} + c_{32} + c_{33} = \lambda_4 \end{array} \right.$, заместваме

$\left| \begin{array}{l} \lambda_2 + \lambda_3 = 2\lambda_4 \\ \lambda_1 + 5\lambda_3 = 6\lambda_4 \\ \lambda_3 = \lambda_4 \end{array} \right.$, $\quad \left| \begin{array}{l} \lambda_2 = \lambda_4 \\ \lambda_1 = \lambda_4 \\ \lambda_3 = \lambda_4 \end{array} \right.$, за $\lambda_4 = 1$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

$c_{33} \neq 0$

Тъй като в последния ред на матрицата C, $c_{31} = 0$, $c_{32} = 0$, знам линейната трансформация ℓ запазва крайните и безкрайните точки (т.е. образът на крайна т. е крайна и образът на безкрайна е безкрайна). Но това е точно условието ℓ да е афинна трансформация => ℓ е афинна.

$+ \det C \neq 0$

6т.

Неподвижни точки за φ:

$$|C-\lambda.E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda).(\lambda^2-1) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) =$$

$$= -(\lambda-1)^2(\lambda+1) \Rightarrow \text{собств. ст-ти}$$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$

За $\lambda = 1$

$$(C-E).\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left| \begin{array}{l} -x+y+t=0 \\ x-y+5t=0 \end{array} \right.,\quad \left| \begin{array}{l} x = y+t \\ y+t-y+5t=0 \end{array} \right.,\quad \left| \begin{array}{l} x=y \\ t=0 \end{array} \right., \text{ за } y=1$$

т. $M(1,1,0)$ е неподвижна за φ.

За $\lambda = -1$

$$(C+E).\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left| \begin{array}{l} x+y+t=0 \\ x+y+5t=0 \\ 2t=0 \end{array} \right.,\quad \left| \begin{array}{l} x=-y \\ t=0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{за } x=1,$$

т. $N(1,-1,0)$ е неподвижна за φ.

Неподвижни прави за φ:

$$C^{-1} = ?,\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=C^{-1}}$$

Собствените стойности на C^{-1} са също $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$.

За $\lambda = 1$

$$[A,B,C].\begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [0,0,0],\quad \left| \begin{array}{l} -A+B=0 \\ A-B=0 \\ 5A+B=0 \end{array} \right.,\quad \left| \begin{array}{l} A=B \\ 6A=0,\ A=0 \\ B=0 \end{array} \right.$$

Тогава:
1. ∀ ... съществува

За $c=1$, $w[0,0,1]$ - безкрайната права е неподвижна ✓

За $\lambda=-1$

$$[A,B,C]\cdot\begin{pmatrix}1&1&-5\\1&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}=[0,0,0], \quad \begin{cases}A+B=0\\-5A-B+2C=0\end{cases}, \quad \begin{cases}A=-B\\4B+2C=0\\C=-2B\end{cases}$$

за $B=-1$, $g[1,-1,2]$ е неподвижна за φ. ✓ 6т.

c) $$\begin{cases}\mu x'=0.x+1.y+1.t\\ \mu y'=1.x+0.y+5.t\\ \mu t'=1.t\end{cases}, \quad \begin{cases}x'=0.x+1.y+1\\ y'=1.x+0.y+5\end{cases}$$ ✓

хомогенни — нехомогенни

$$T=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \; b=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}, \quad T.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+b=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}.$$ ✓

Какво е изображението? 2т.

Зад. 1

c) $\beta: -x+y+0.z+t=0$ => в нехомогенни корд. векторът $\vec{n}_1(-1,1,0)$ е $\perp$ на β => в хомогенни корд. $S[-1,1,0,0]$ е център на проекцията φ.

Нека $M_0(x_0,y_0,z_0,t_0)\neq S$. Тогава координатите на образът M' на M_0 удовлетворяват равенствата:

$$M': \begin{cases}x=\lambda x_0-\mu\\ y=\lambda y_0+\mu\\ z=\lambda z_0\\ t=\lambda.t_0\\ -x+y+t=0\end{cases}, \quad \begin{cases}0=\lambda x_0-\mu-\lambda y_0-\mu-\lambda.t_0\\ \mu=\lambda.\dfrac{x_0-y_0-t_0}{2}\end{cases} \Big| \text{ заместваме}$$

$$\begin{cases}x=\lambda x_0-\lambda.\dfrac{x_0-y_0-t_0}{2}\\ y=\lambda y_0+\lambda\,\dfrac{x_0-y_0-t_0}{2}\\ z=\lambda z_0\\ t=\lambda.t_0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \lambda\left(\dfrac{2x_0 - x_0 + y_0 + t_0}{2}\right) \\ y = \lambda\left(\dfrac{2y_0 + x_0 - y_0 - t_0}{2}\right) \\ z = \lambda\cdot(0\cdot x_0 + 0\cdot y_0 + 1\cdot z_0 + 0\cdot t_0) \\ t = \lambda\cdot(0\cdot x_0 + 0\cdot y_0 + 0\cdot z_0 + 1\cdot t_0) \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \lambda\cdot\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}y_0 + 0\cdot z_0 + \frac{1}{2}t_0\right) \\ y = \lambda\cdot\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}y_0 - 0\cdot z_0 - \frac{1}{2}t_0\right) \\ z = -//- \\ t = -//- \end{cases}$$

За $\lambda = 2$ матрицата на φ е:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6т.