5. Принцип на изброителната комбинаторика

Съдържание: принцип на: Дирихле, разбиването, изваждането, умножението, биекцията, делението, включването и изключването.

Допълнение: Изброителната комбинаторика е дял от дискретната математика, която се занимава с търсенето на точни формули за изброяването на обекти, наречени комбинаторни структури (за тях ще стане ясно в лек. 6).

Има и аналитична комбинаторика, която ползва средствата на математическия анализ за намиране на асимптотични формули.

Оттук нататък всички м-ва са крайни, освен ако изрично не е казано друго.

Следните основни закони на комбинаториката приемаме без доказателство (освен принципа за включването и изключването, чието д-во тр. да знаем).

Първи принцип:

Принцип на Дирихле: (същото като в лек. 4).

- Ако X и Y са крайни м-ва и $|X| > |Y|$, то не съществува инекция $f: X \to Y$.
- Ако има m ябълки в n чекмеджета и $m > n$, то в поне едно чекмедже има повече от една ябълка.
- Обобщено: ако има $k.n+1$ ябълки в n чекмеджета, то в поне едно чекмедже има повече от k ябълки.

Втори принцип:

На разбиването (събирането): дадено е м-во X и разбиване $Y = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ на X. Тогава: $|X| = |Y_1| + \dots + |Y_n|$

Заб. Това очевидно остава в сила дори някои $З_1 \ldots З_n$ да са празни (т.е. да не е напълно формално разбиване).

Задължително е обаче $З_i \cap З_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Принцип на изваждането (сл. от принципа на разбиването).

Дадено е м-во X и универсум U. Тогава:

$|A| = |U| - |\bar{A}|$

Д-во: $\{A, \bar{A}\}$ е разбиване на $U \overset{\text{пр. разб.}}{\Rightarrow} |U| = |A| + |\bar{A}|$ □

Трети принцип:

на умножението: Нека $A_1 \ldots A_n$ са м-ва. Тогава:

$$|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$$

Четвърти принцип:

на биекцията: Нека A, B са м-ва. Тогава $|A| = |B| \Leftrightarrow$ съществува биекция $f: A \to B$.

Заб. Това е полезно, когато имаме "трудни" за изброяване обекти. Просто изброяване някакви други "лесни" и доказване, че има биекция м-у двете м-ва.

Пети принцип:

на делението: Нека A е м-во и $R \subseteq A^2$ е РЕ. Нека R има k класа на екв. и всеки клас има мощност m. Тогава:

$$m = \frac{|A|}{k}$$

Шести принцип:

на включването и изключването:

Т.1 За всяко $n \geq 1$, за всеки n м-ва $A_1 \ldots A_n$:

$$(3)\quad |A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

Зав. Т.е. в Т.1 е дадено покриване на м-во и намираме мощности на това м-во, като събираме и изваждаме мощностите на дяловете на покриването, техните сечения по двойки, тройки и т.н.

Д-во: С индукция по n.

1. База: $n = 1$, (3) става $|A_1| = |A_1|$ ✓

$n=2$; имаме $|A_1|, |A_2|, |A_1 \cap A_2|$. Тогава очевидно:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| - |A_1 \cap A_2| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2| =$$

$$= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \quad ✓$$

2. ИП: нека за всеки $\underset{\geq 2}{n}$ на бр. м-ва е изпълнено (3).

3. Стъпка: Доказване за всеки $n+1$ на бр. м-ва.

Имаме: $|A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}| =$ // база $n=2$.

$$= |A_1 \cup \dots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}| \quad (4)$$

Знаем $|A_1 \cup \dots \cup A_n|$ от ИП.

Разглеждаме $|(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}|$:

$$(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1} \overset{\text{дистрибутивност}}{=} (A_1 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1})$$

В дясната страна имаме обединение на n на бр. м-ва $\overset{\text{ИП}}{\Longrightarrow}$

$$|(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1})| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i \cap A_{n+1}| -$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}|$$

Заместваме в (4) → на другата стр.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}| = \Big[\sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \dots +$$

$$(-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|\Big] + |A_{n+1}| - \Big[\sum_{1\le i\le n} |A_i \cap A_{n+1}| -$$

$$\sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| + \dots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}|\Big] =$$

$$= \text{// групираме двете} = \sum_{1\le i\le n+1} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n+1} |A_i \cap A_j| + \dots +$$

$$(-1)^{n-1} \sum_{1\le i_1<\dots<i_n\le n+1} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}| + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}|$$ – но това

е точно (3) при $n+1 \Rightarrow \square$