## Задачи за подготовка за първо контролно
## по Числени методи

### 1 тип

1. Като използвате интерполационната формула на Лагранж, намерете полинома $p \in \pi_2$, който удовлетворява условията: $p(-1) = 2,\ p(1) = 2,\ p(2) = 5$. Представете $p(x)$ по степените на $x$.

2. Нека полиномът $L_2(f;x)$ интерполира функцията $f(x) = e^x$ в точките $-1, 0, 1$. Като използвате формулата за оценка на грешката докажете, че

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_2(f;x)| \le \frac{1}{5}.$$

3. Като използвате интерполационната формула на Нютон с разделени разлики, намерете полинома $p \in \pi_3$, който удовлетворява условията: $p(-2) = -8,\ p(0) = 2,\ p(1) = 4,\ p(2) = 12$. Представете $p(x)$ по степените на $x$.

4. Нека $S_k := 1^2 + \cdots + k^2$ за $k \ge 1$, $S_0 := 0$. Покажете, че съществува единствен полином $p \in \pi_3$, удовлетворяващ условията $p(k) = S_k,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots$. Намерете $S_k$ като използвате формулата на Нютон с крайни разлики за интерполиране напред.

5. Като използвате формулата на Нютон с разделени разлики с кратни възли, намерете интерполационния полином на Ермит, който удовлетворява условията: $p(0) = -1,\ p'(0) = 1,\ p''(0) = 2,\ p(1) = 0,\ p'(1) = -1$. Представете $p(x)$ по степените на $x$.

6. Като използвате формулата за тригонометрична интерполация при равноотдалечени възли, определете коефициентите $a_0, a_1, b_1$ така, че $\tau(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ да удовлетворява условията: $\tau(0) = -1, \tau\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2, \tau\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2$.

### 2 тип

1. Нека $l_{kn}(x),\ k = 0, \ldots, n$, са базисните полиноми на Лагранж, съответни на възлите $x_0, \ldots, x_n$. Да се намери (с доказателство)

$$\sum_{k=0}^{n} (x - x_k)^{n+1}\, l_{kn}(x).$$

2. Нека $f \in C^2[0,1]$ и е известно, че $|f''(x)| \le x^2$ за всяко $x \in [0,1]$. За $\xi \in (0,1)$ да означим с $P_\xi(x)$ линейната в $[0,\xi]$ и $[\xi,1]$ непрекъснатата функция, която интерполира $f$ в точките $0, \xi, 1$. Да се определи $\xi$ така, че

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - P_\xi(x)| \le 0,02.$$

3. Нека $\{\eta_k\}_{k=0}^n$ са екстремалните точки на полинома на Чебишов $T_n(x)$. Да се докаже, че ако $p \in \pi_n$ и $|p(\eta_k)| \le 1,\ \ k = 0, \ldots, n$, то $|p(x)| \le |T_n(x)|$ за $|x| \ge 1$.

4. Нека $x_k \neq 0, -1$ за $k = 1, \ldots, n$. Намерете (с доказателство)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n \; f\left(\frac{1}{x_k}\right)}{f'(x_k)(1+x_k)},$$

където $f(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

5. Нека $l_{kn}(x),\ k = 0, \ldots, n$, са базисните полиноми на Лагранж, съответни на възлите $x_0, \ldots, x_n,\ \omega(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$,

$$\varphi_k(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right) l_{kn}^2(x), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Докажете, че $\varphi_k'(x_k) = 0,\ k = 0, \ldots, n$.

6. Докажете, че функциите $\{1, e^{2x}, e^{5x^2}\}$ образуват система на Чебишов в $(-\infty, \infty)$.

Март 2023 г. доц. д-р Л. Милев