$\varphi \in Hom(U, V)$; $Ker\,\varphi$; $Im\,\varphi$; $d(\varphi)$, $r(\varphi)$

ТРД: $r(\varphi) + d(\varphi) = \dim U$

Означения: 1) $A \in F_{m\times n}$

$$U_A := \{ x \in \underbrace{F_{n\times 1}}_{\cong F^n} \mid Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \underbrace{F_{m\times 1}}_{\cong F^m} \}$$

(*)

$(1, 0, \dots, 0)$
$(0, 1, \dots, 0)$
$\dots$
$\underbrace{(0, 0, \dots, 1)}_{n}$

стандартен базис на F^n

В случая ги пишем по стълбове

2) $A \in F_{m\times n}$

$$\varphi_A \in Hom(\underbrace{F_{n\times 1}}_{F^n}, \underbrace{F_{m\times 1}}_{F^m}) : \forall x \in F_{n\times 1} \quad \varphi_A(x) = Ax$$

Зад. φ_A е ЛИ. Проверете!

φ_A има матр. A в стандартните бази на F^n и F^m (*)

Зад. $\operatorname{Ker} \varphi_A = U_A \leq F^n \ (F_{n\times 1})$

Зад. $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, V)$; $e_1, \dots, e_n$ - базис на U

$\operatorname{Im} \varphi = \ell(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$

Ако φ е изом., то $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ - базис на V

Тв. $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, V)$ е инективно $\iff \operatorname{Ker} \varphi = \{\theta_U\}$

Д-во $u_1, u_2 \in U$

$\varphi(u_1) = \varphi(u_2) \iff \varphi(u_1 - u_2) = \theta_V \iff u_1 - u_2 \in \operatorname{Ker} \varphi$

$\theta_U \in \operatorname{Ker} U$

<u>Заб.</u> $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, V)$

$e_1, \dots, e_n$ - базис на U; $f_1, \dots, f_m$ - базис на V

$\underline{U} \cong F^n \ (\cong \underline{F_{n\times 1}})$; $V \cong F^m = F_{1\times m} \cong F_{m\times 1}$

$ \| $

$ F_{1\times n}$

U

$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \longmapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$; $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

$A = M_e^f(\varphi)$; $\varphi_A \in \operatorname{Hom}(F^n, F^m)$

$\left.\begin{array}{l} e' \text{ - станд. базис на } F^n \ (F_{1\times n}) \\ f' \text{ - - - - - } F^m \end{array}\right\}$ $M_{e'}^{f'}(\varphi_A) = A$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi_1"', "\cong \ \text{спр. } e"] \arrow[dr, dashed] & V \arrow[d, "\varphi_2"', "\cong \ \text{спр. } f"] \\
F^n \arrow[r, "\varphi_A"] & F^m
\end{tikzcd}$$

диаграмата е комутативна, т.е.

$$\varphi_2 \circ \varphi = \varphi_A \circ \varphi_1$$

$\Big(u \in U; \ u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i; \ \varphi(u) = v = \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i; \ \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \ \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$

$\mu = A\lambda$

$(\varphi_2 \circ \varphi)(u) = \varphi_2(\varphi(u)) = \varphi_2(v) = \mu$ коорд. на v отн. f

$(\varphi_A \circ \varphi_1)(u) = \varphi_A(\varphi_1(u)) = \varphi_A(\lambda) = A\lambda = \mu \Big)$

- $\varphi_1|_{\operatorname{Ker}\varphi} : \operatorname{Ker}\varphi \to U_A \leq F^n$ – ИМ на $\operatorname{Ker}\varphi$ с U_A

  $\varphi_2|_{\operatorname{Im}\varphi} : \operatorname{Im}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi_A$ – ИМ на $\operatorname{Im}\varphi$ с $\operatorname{Im}\varphi_A$

Опр. Всеки базис на U_A се нарича фундаментална система решения (ФСР)

Зад. $\mathrm{Ker}\,\varphi \cong U_A$; $\mathrm{Im}\,\varphi \cong \mathrm{Im}\,\varphi_A$

Зад. $\mathrm{Im}\,\varphi_A = \ell(\varphi_A(e_1'), \dots, \varphi(e_n')) =$

($e_1', \dots, e_n'$ — базиса e' на F^n)
(станд.)

$= \ell(\underbrace{\text{стълб. на } A}_{\in F^m})$

Зад. $A \begin{array}{c} \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \end{array} \leftarrow i = i^{\text{ти}}$ ст. на A

Сл. (от ТРД) $A \in F_{m \times n}$

$$\Rightarrow \underset{r(\varphi_A)}{\underset{\|}{cr(A)}} + \underset{d(\varphi_A)}{\underset{\|}{\dim U_A}} = n$$

Сл. $\forall$ ФСР има $n - cr(A)$ вектора

Свойства на обратимите ЛИ

Тв. $\varphi \in Hom(U, V)$; $\dim U = \dim V = n$

$e_1, \dots, e_n$; $f_1, \dots, f_n$ – базиси на U и V

Тогава следните твърдения са еквивалентни:

1) φ - обратимо $\quad$ ($\Leftrightarrow$ φ е ИМ $\Leftrightarrow$ φ е биективно)

2) $A = M_e^f(\varphi)$ - обратима

3) $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ - базис на V

4) $\operatorname{Im} \varphi = V$ $\quad$ ($\Leftrightarrow$ φ е сюрект.)

5) $\operatorname{Ker} \varphi = \{0_V\}$ ($\Leftrightarrow$ φ е инективно)

6) $d(\varphi) = 0$

7) $r(\varphi) = n$

Д-во: $1 \iff 2$ знаем

$$A^{-1} = M_f^e(\varphi^{-1}) \;;\; \varphi^{-1} = \Phi_f^e(A^{-1}) \quad \Big\} \; 1 \iff 2 \iff 3$$

Сега знаем, че $1 \iff 3$

Ясно е, че $4 \iff 7$ и $5 \iff 6$ $\Big\}$ $4 \iff 5 \iff 6 \iff 7$

От за ТРД $\Rightarrow$ $\bar{6} \iff 7$

Но $1 \iff 4$ и 5 $\Rightarrow$ $\forall$ са еквивал.

<u>Зад.</u> $U = V \to$ ЛО $(e \equiv f)$

Зад. $A \in F_{m\times n}$, $B \in F_{m\times k}$

Търсим $X \in F_{n\times k}$: $AX = B$ — матрично уравнение.

(Аналогично за $XA = B$)

Зад. $T \in M_m(F)$ — обратима

$$AX = B \iff (TA)X = (TB) \quad (\Leftarrow \ \cdot T^{-1} \text{ отляво})$$

Зад. $A \xrightarrow[\text{преобр.}]{\text{елементарни}} \begin{pmatrix} * & \cdots & & \text{произволни} & & \\ & * & \cdots & & & \\ & & * & & & \\ & & & * & \cdots & \\ & & 0 & & * & \\ & & & & & * \end{pmatrix}$, „$*$" са $\neq 0$

$$\to \begin{pmatrix} * & 0 & & 0 & & \\ 0 & * & & & & \\ & & & * & 0 & \\ & 0 & & 0 & * & \\ & & & & 0 & \end{pmatrix}$$

Забел. ЕП – смяна на 2 р.; умнож. на ред с число $\neq 0$; прибавяне към ред умн. с число към друг по редове; Аналог. ЕП по стълб.

Забел. $A \in F_{m\times n}$; $\varphi_A \in Hom(F^n, F^m)$

От доказ. на ТРД; $\underbrace{e_1, \dots, e_k}_{\text{② допълн. базис до базис на } F^n}, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_n}_{\text{① базис на } Ker\, \varphi_A}$

$$Im\, \varphi_A = \ell(\varphi_A(e_1), \dots, \varphi_A(e_n)) = \ell(\underbrace{\varphi_A(e_1), \dots, \varphi_A(e_k)}_{\text{базис на } Im\, \varphi_A \ (\Rightarrow rk)})$$

Допълваме

$\varphi_A(e_1), \dots, \varphi_A(e_k)$ с $f_1, \dots, f_{m-k}$ до базис на F^m

Тогава φ_A е единственото ЛИ, което изпраща базиса $e_1, \dots, e_n$ във векторите $\varphi_A(e_1), \dots, \varphi_A(e_k)$, $f_1, \dots, f_{m-k}$. В тези бази φ_A има матр.

$$R = \left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

S – матр. на пр. от станд. б. на F^m към $\varphi_A(e_1), \dots, \varphi_A(e_k), f_1, \dots, f_{m-k}$

T – матр. на пр. от станд. б. на F^n към $e_1, \dots, e_n$

$$R = S^{-1} A T \quad ; \quad A = S R T^{-1}$$

Допълнение

Тв. За $A \in F_{m \times n}$ $\exists k \in \mathbb{N}$ $\exists T \in M_n(F)$ и $\exists S \in M_m(F)$ – обратими, $\exists R \in F_{m \times n}$: $R = \left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ и $A = SRT^{-1}$

Сл. $A \in M_n(F) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ $\exists T, S \in M_n(F)$ – обратими и $\exists R \in M_n(F)$: $R = \left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ и $A = SRT^{-1}$

Интерпретация на $\overline{ЕП}$

$\varphi \in Hom(U, V)$

$e_1, \dots, e_n$ – базис на U ; $f_1, \dots, f_m$ – базис на V

$A = M_e^f(\varphi)$

1) A_1 – матр. получена от A като сме разменили $i^{\text{ия}}$ и $j^{\text{ия}}$ ред

f' – базис на V получен от f като сме разменили $i^{\text{ия}}$ и $j^{\text{ия}}$ в-р $(f' = f_1 \dots \underset{i}{f_j} \dots \underset{j}{f_i} \dots f_n)$ разм.

$$A_1 = M_{e}^{f'}(\varphi)$$

$$T_1 = T_f^{f_1} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \end{array} \\ \quad\quad\quad\; i \;\; j & \end{array} \; ; \quad A_1 = (T_1)^{-1} A$$

1') A_1' – матр. пол. от A като сме разм. $i^{\text{ия}}$ и $j^{\text{ия}}$ ст.

e' – базис на U пол. от e чрез $i \leftrightarrow j$

$$T_1' = T_{e'}^{f} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} \quad & \quad & i & \quad & j & \quad & \quad \end{array} & \end{array} ; \quad A_1' = A T_1'$$

2) умн. на $i^{ю}$ стр с $\lambda \neq 0 \longrightarrow A_2$

f'' - базис (зачем?) $\quad f_1, \ldots, \underbrace{\frac{1}{\lambda} f_i}_{i}, \ldots, f_n$

$$T_2 = T_{f}^{f''} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\lambda} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \quad & \quad & i & \quad & \quad \end{array} & \end{array} \Rightarrow A_2 = (T_2)^{-1} A$$

2') по стълбове $\longrightarrow A_2'$

(умнож. на i-ия ст. с λ)

e'' - базис $e_1, \dots, \underbrace{\lambda e_i}_{i}, \dots, e_n$

$$T_2' = T_e^{e''} = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \qquad A_2' = A\,T_2'$$

3) Прибавяне i-ия ред умн. с λ към j-ия ред $\longrightarrow A_3$

f''' - базис $f_1, \dots, \underbrace{f_j - \lambda f_i}_{j}, \dots, f_n$

$$T_3 = T_f^{f'''} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} & & j & \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{c} \\ \ddots \\ 1 \\ \\ \end{array} & \boxed{\begin{array}{c} -\lambda \\ \\ 1 \end{array}} & \left.\begin{array}{c} \cdots \\ \\ 1 \\ \ddots \; 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \end{array} \qquad (\forall \text{ ост. ел. са } = 0)$$

$$A_3 = (T_3)^{-1} A$$

3'/ Приб. $i^{\text{ти}}$ ст. умн. с λ към $j^{\text{ти}}$ ст. $\rightarrow A_3'$

e''' – базис $e_1, \dots, \underbrace{e_j + \lambda e_i}, \dots, e_n$

$$T_3' = T_e^{e'''} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & \lambda & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ i \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \qquad\quad j & \end{array}$$

$$A_3' = A T_3$$