Действия с матрици. Обратна матрица.

Нека F е числово поле, а $m, n \in \mathbb{N}$. Обичайно с $F_{m\times n}$ означаваме множеството от всички $m \times n$ матрици с елементи от F. В $F_{m\times n}$ въвеждаме следните две операции:

<u>1:</u> Ако $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in F_{m\times n}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \in F_{m\times n}$, то

$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \in F_{m\times n}$.

<u>2:</u> Ако $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in F_{m\times n}$, а $\lambda \in F$, то

$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \in F_{m\times n}$.

Матрицата, чиито елементи са всичките равни на нула, наричаме *нулева матрица* и означаваме $\mathbb{O}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in F_{m\times n}$ (или накратко само $\mathbb{O}$). За $\forall A \in F_{m\times n}$ е изпълнено $A + \mathbb{O} = A$.

Означаваме $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix} \in F_{m\times n}$. Ясно е, че $A + (-A) = \mathbb{O}$.

Поради това си свойство матрицата $-A$ се нарича *противоположна* на матрицата A. За $A, B \in F_{m\times n}$ означаваме с $A - B$ матрицата $A + (-B)$. Тя се нарича *разлика* на матриците A и B.

Относно по-горе въведените операции в $F_{m\times n}$ са изпълнени следните свойства (навсякъде $A, B, C \in F_{m\times n}, \lambda, \mu \in F$):

1) $A + B = B + A$ (комутативност)

Наистина, нека $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$. Тогава $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A$.

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (асоциативност)

3) $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$ за $\forall A$

4) $A + (-A) = (-A) + A = \mathbb{O}$ за $\forall A$

5) $1.A = A$ за $\forall A$

6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

7) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

8) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Фактът, че горните осем свойства са в сила определят множеството $F_{m\times n}$ като *линейно пространство* над полето F. Тези свойства са известни още като аксиоми за линейно пространство.

Нека сега $A_{m\underline{s}} = (a_{ij}), B_{\underline{s}n} = (b_{ij}),\ m, n, s \in \mathbb{N}$. Дефинираме нова операция - умножение на матрици. В случая $A.B = C,\ C_{m\times n} = (c_{ij})$, където $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj},\ \forall i = 1, 2, \ldots, m;\ \forall j = 1, 2, \ldots, n$. С други думи две матрици се умножават по правилото „ред по стълб“[1]. По-специално $\exists AB$ $\underline{\text{и}}$ $\exists BA \Leftrightarrow A_{m\times s}, B_{s\times m}$. Тогава $(AB)_{m\times m}$, а $(BA)_{s\times s}$. Оттук се вижда, че в общия случай матриците AB и BA са различни, т.е. умножението на матрици $\underline{\text{не}}$ е комутативно. Затова е важно да се има предвид, че дори когато умножаваме квадратни матрици A, B, естествено от един и същи ред n, произведенията AB и BA ще бъдат също квадратни матрици от ред n, но в общия случай $AB \neq BA$.

Друга особеност при умножението на матрици е, че е възможно да имаме $A \neq \mathbb{O}, B \neq \mathbb{O}$, но $AB = \mathbb{O}$. В този случай A и B се наричат *делители на нулата.* Например при $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ имаме, че $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$.

[1] Забележете, че точно поради това е необходимо броят на стълбовете на едната матрица да е равен на броят на редовете на другата матрица. В противен случай умножението на матрици не е дефинирано: например в случая, ако $m \neq n$, не можем да намерим произведението BA.

За всеки две квадратни матрици $A_{n\times n}$ и $B_{n\times n}$ е в сила равенството $\det(AB) = \det A . \det B$. Това следва от теоремата за умножение на детерминанти и дефиницията на операцията умножение на матрици.

С така въведената нова операция умножение на матрици са изпълнени още свойствата:

9) $(AB)C = A(BC)$ (асоциативност)
10) $(A+B)C = AC+BC$ и $C(A+B) = CA+CB$ (дистрибутивност)[2]

Нека направим проверка на асоциативността (свойство 9) за матрици $A, B, C \in F_{n\times n}$. Нека $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$ и нека $AB = D,\ D = (d_{ij})$, където $d_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}bkj$. Сега означаваме $(AB)C = DC = H,\ H = (h_{ij}),\ h_{ij} = \sum_{l=1}^{n} d_{il}c_{li} = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right) c_{lj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}$. Да означим още $BC = P,\ P = (p_{ij}), p_{ij} = \sum_{l=1}^{n} b_{il}c_{lj}$ и оттук $A(BC) = AP = Q,\ Q = (q_{ij}), q_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl}c_{lj}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}$. Очевидно $h_{ij} = q_{ij}\ \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$. Следователно $H = Q$, т.е. $(AB)C = A(BC)$.

Нека имаме матрицата $E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$. Еквивалентно може да запишем $E = (\delta_{ij})$, където δ_{ij} е символът на Кронекер. За всяка матрица $A \in F_{n\times n}$ е изпълнено $AE = EA = A$. Поради този факт матрицата E се нарича *единична матрица(от ред n)*. Изпълнено е свойството:

11) $\lambda.A = (\lambda.E)A$ за $\lambda \in F, A \in F_{n\times n}$.

Нека имаме матрицата $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Да си припомни, че матрицата $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $A^t = (a_{ji})_{n\times m}$ се

[2] Това свойство е валидно в случаите, когато събирането и умножението на матрици са дефинирани едновременно - например в $F_{n\times n}$.

нарича транспонирана на матрицата A. Операцията транспониране на матрица има следните свойства:

i) $(A^t)^t = A$
ii) $(A+B)^t = A^t + B^t$ (ако $\exists A+B$)
iii) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$ за произволно $\lambda \in F$
iv) $(AB)^t = B^t A^t$ (ако $\exists AB$)

Да направим проверка на свойство *iv*) за $A = (a_{ij})_{n\times n}, B = (b_{ij})_{n\times n}$. Нека $AB = C = (c_{ij}),\ c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$. От друга страна да запишем $(AB)^t = C^t = D = (d_{ij}), d_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki}$. Ако означим $B^tA^t = H = (h_{ij}), h_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk}$. Следователно $h_{ij} = d_{ij}$ за $\forall i,j = 1,2,\ldots,n$, или еквивалентно $H = D$, т.е. $B^tA^t = (AB)^t$.

Нека $A \in F_{n\times n}$ е квадратна матрица. Казваме, че матрицата A е *обратима* или *неособена*, ако съществува матрица $A^{-1} \in F_{n\times n}$, такава че $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Тогава имаме $AA^{-1} = E \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det E \Rightarrow \det A \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$. С други думи, необходимо условие една матрица да е неособена е детерминантата й да е различна от нула. Скоро ще видим, че това условие е и достатъчно[3]. Имаме още, че $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$. Освен това матрицата A^{-1} е единствена. Наистина, нека $X \in F_{n\times n}$ и $AX = XA = E$. Тогава имаме $X = EX = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}E = A^{-1}$, т.е. $X = A^{-1}$.

Теорема. *Квадратната матрица* $A = (a_{ij}) \in F_{n\times n}$ *е обратима* $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$. *Тогава обратната матрица* A^{-1} *е единствена и*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

където A_{ij} *са адюнгираните количества в* $\det A$.

Доказателство. По-горе вече видяхме, че ако матрицата A е обратима, то $\det A \neq 0$. Остава да докажем, че за дадената матрица A^{-1} е изпълнено $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ при предположение, че $\det A \neq 0$. Да означим

[3] Достатъчността ще следва от доказателството на следващата теорема, която дава конструктивен метод за намиране на обратна матрица, който е в сила винаги когато детерминантата на изходната матрица е различна от нула.

$\Delta = \det A \neq 0$. Нека $AA{-}1 = C,\ C = (c_{ij})_{n\times n}$. Имаме, че i-тият ред на A е $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$, а j-тият стълб на A^{-1} е $\frac{1}{\Delta}A_{j1}, \frac{1}{\Delta}A_{j2}, \dots, \frac{1}{\Delta}A_{jn}$. Тогава $c_{ij} = \frac{1}{\Delta}(a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}) = \frac{1}{\Delta}\delta_{ij}\Delta = \delta_{ij}$, т.е. $c_{ij} = \delta_{ij}$ за $\forall i, j = 1, 2, \dots, n \Rightarrow C = E$. Така получихме, че $AA^{-1} = E$. Аналогично се доказва, че $A^{-1}A = E$. Следователно така зададената A^{-1} е обратната на A. $\square$

Да отбележим, че посоченият по-горе метод за конструиране на обратна матрица има преди всичко теоретично значение. В практиката се използват други методи, които значително по-бързо довеждат до намирането на A^{-1}.

Ако $A, B \in F_{n\times n}$ са обратими, то матрицата AB също е обратима и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Наистина, директно се проверява, че $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$. Следователно $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Нека сега за $A \in F_{n\times n}$ и $k \in \mathbb{N}$ дефинираме $A^k = \underbrace{A.A\dots A}_{k}$. В такъв случай очевидно е изпълнено, че $A^kA^l = A^{k+l}$ и $(A^k)^l = A^{kl}$ за $\forall k, l \in \mathbb{N}$. По дефиниция приемаме, че $A^0 = E$. Ако имаме $\det A \neq 0 (\Leftrightarrow \exists A^{-1})$, за $k \in \mathbb{N}$ дефинираме $A^{-k} = (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$. По този начин $A^kA^l = A^{k+l}$ и $(A^k)^l = A^{kl}$ за $\forall k, l \in \mathbb{Z}$.

Нека $A, B \in F_{n\times n}$ и $\det A \neq 0$. Разглеждаме матричното уравнение

$$AX = B,$$

където $X \in F_{n\times n}$ е неизвестна матрица, която търсим. Умножавайки уравнението от двете страни с A^{-1}, получаваме $A^{-1}AX = A^{-1}B$ и следователно $X = A^{-1}B$. Тогава $X = A^{-1}B$ е единственото решение на даденото уравнение и се нарича условно „ляво частно на B и A“. Аналогично, уравнението

$$YA = B$$

има единствено решение $Y = BA^{-1}$, което условно се нарича „дясно частно на B и A“.

Пример:

Да се реши матричното уравнение $AX = B$, където $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Имаме, че $\det A = 3.2 - 1.2 = 4 \neq 0$ и следователно A е обратима. Единственото решение на уравнението е $X = A^{-1}B$. имаме, че $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$. $A_{11} = (-1)^{1+1}\Delta_{11} = 2, A_{21} = (-1)^{2+1}\Delta_{21} =$

-1, $A_{12} = (-1)^{1+2}\Delta_{12} = -2$, $A_{22} = (-1)^{2+2}\Delta_{22} = 3$, т.е. $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
Сега $X = A^{-1}B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2.(-2)+(-1).4 & 2.0+(-1).3 \\ (-2).(-2)+3.4 & (-2).0+3.3 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 & -3 \\ 16 & 9 \end{pmatrix}$ или $X = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{4} \\ 4 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$.