Упражнение №11:

Денотационна семантика по стойност

Как изглеждат нещата на теория?

Ще припомним основните факти от теорията за частния случай на рекурсивна програма с *две* функционални променливи. Всяка такава програма е синтактичен обект от вида

$$
\begin{aligned}
&\tau_0(X_1,\dots,X_n,F,G) \qquad \texttt{where}\\
&F(X_1,\dots,X_k) = \tau_1(X_1,\dots,X_k,F,G)\\
&G(X_1,\dots,X_m) = \tau_2(X_1,\dots,X_m,F,G)
\end{aligned}
$$

Тук $X_1, X_2, \dots$ са *обектови променливи*, F и G са *функционални променливи*, а τ_0, τ_1 и τ_2 са *термове*.

На тялото на програмата R съответства системата

$$
\left|\begin{array}{lcl}
f(x_1,\dots,x_k) & \simeq & \underbrace{\tau_1(x_1,\dots,x_k,f,g)}_{\Gamma(f,g)(\bar{x})}\\
g(x_1,\dots,x_m) & \simeq & \underbrace{\tau_2(x_1,\dots,x_m,f,g)}_{\Delta(f,g)(\bar{x})}.
\end{array}\right. \tag{1}
$$

За да я препишем във вид, удобен за прилагане на общата теория на ОС, въвеждаме т. нар. *термални* оператори. В случая те са два:

$$\Gamma:\ \mathcal{F}_k\times\mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_k \quad \text{и} \quad \Delta:\ \mathcal{F}_k\times\mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_m,$$

които се определят от термовете τ_1 и τ_2 както следва:

$$\Gamma(f,g)(x_1,\dots,x_k) \simeq \tau_1(x_1,\dots,x_k,f,g)$$

$$\Delta(f,g)(x_1,\dots,x_m) \simeq \tau_2(x_1,\dots,x_m,f,g).$$

Така горната система (1) можем да препишем по-компактно като

$$
\left|\begin{array}{lcl}
f & = & \Gamma(f,\ g)\\
g & = & \Delta(f,\ g).
\end{array}\right. \tag{2}
$$

Да означим с $\mathbf{\Gamma} = \Gamma\times\Delta$ декартовото произведение на Γ и Δ. По определение, за всяка двойка функции $(f,g)\in\mathcal{F}_k\times\mathcal{F}_m$:

$$\mathbf{\Gamma}(f,g) \stackrel{\text{деф}}{=} (\Gamma(f,g),\ \Delta(f,g)).$$

Да отбележим, че $\mathbf{\Gamma}$ е изображение от вида

$$\mathbf{\Gamma}:\ \mathcal{F}_k\times\mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_k\times\mathcal{F}_m$$

и следователно можем да говорим за *неподвижни точки* на $\mathbf{\Gamma}$ — нещо, което очевидно не е възможно при операторите Γ и Δ.

От общата теория знаем, че термалните оператори Γ и Δ са непрекъснати. Следователно непрекъснат е и операторът $\mathbf{\Gamma}$, разглеждан като изображение в областта на Скот

$$(\mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m,\ \subseteq,\ (\emptyset^{(k)}, \emptyset^{(m)})).$$

Съгласно обобщената теорема на Кнастер-Тарски, операторът Γ има *най-малка неподвижна точка* $f_{\mathbf{\Gamma}} = (f^*, g^*)$. Двойката (f^*, g^*) всъщност се явява най-малкото (относно $\subseteq$) решение на системата (2).

Чрез тази най-малка неподвижна точка (f^*, g^*) въвеждаме денотационната семантика по стойност на програмата R — функцията $D_V(R)$:

Денотационна семантика по стойност на програмата R е функцията $D_V(R):\ \mathbb{N}^n \ \multimap\!\!\!\rightarrow\ \mathbb{N}$, която се определя с равенството:

$$D_V(R)(x_1, \dots, x_n)\ \simeq\ \tau_0(x_1, \dots, x_n, f, g)$$

за всички естествени $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$.

Теоремата на Кнастер-Тарски ни казва още, че $f_{\mathbf{\Gamma}}$ има следното представяне:

$$f_{\mathbf{\Gamma}}\ =\ \bigcup_n \underbrace{\mathbf{\Gamma}^n(\emptyset^{(k)}, \emptyset^{(m)})}_{(f_n, g_n)}. \tag{3}$$

Да означим с (f_n, g_n) функцията $\Gamma^n(\emptyset^{(k)}, \emptyset^{(m)})$, която има смисъл на *апроксимация* на f_Γ. От горното представяне за f_Γ получаваме

$$f_{\mathbf{\Gamma}}\ =\ (f^*, g^*)\ =\ \bigcup_n (f_n, g_n)\ \stackrel{\text{по теорема}}{=}\ (\bigcup_n f_n,\ \bigcup_n g_n),$$

или разписано по всяка от двете компоненти:

$$f^*\ =\ \bigcup_n f_n \qquad \text{и} \qquad g^*\ =\ \bigcup_n g_n.$$

За да видим как са свързани функциите от горните редици $\{f_n\}_n$ и $\{g_n\}_n$, използваме наблюдението, че редицата от *двойките* функции $\{(f_n, g_n)\}_n$ удовлетворява следната рекурентна схема:

$$\left|\begin{array}{l} (f_0, g_0)\ = (\emptyset^{(k)}, \emptyset^{(m)}) \\ (f_{n+1}, g_{n+1})\ =\ \mathbf{\Gamma}(f_n, g_n)\ =\ (\ \Gamma(f_n, g_n), \Delta(f_n, g_n)\ ). \end{array}\right.$$

Това означава, че за функциите от редиците $\{f_n\}_n$ и $\{g_n\}_n$ ще имаме:

$$\left|\begin{array}{l} f_0\ =\ \emptyset^{(k)} \\ f_{n+1}\ =\ \Gamma(f_n, g_n) \end{array}\right. \tag{4}$$

$$\left|\begin{array}{l} g_0\ =\ \emptyset^{(m)} \\ g_{n+1}\ =\ \Delta(f_n, g_n). \end{array}\right. \tag{5}$$

Задачи за определяне на $D_V(R)$

Задача 1. Да се определи $D_V(R)$ за следната програма R:

$$
\begin{array}{lcl}
F(X,1) & & \texttt{where} \\
F(X,Y) & = & \texttt{if } X == 0 \texttt{ then } Y \texttt{ else } F(X-1, G(X,Y)) \\
G(X,Y) & = & \texttt{if } X == 0 \texttt{ then } 0 \texttt{ else } G(X-1,Y)+Y
\end{array}
$$

Решение. Означаваме с

$$\Gamma: \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \quad \text{и} \quad \Delta: \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$$

операторите, определени от дефинициите на F и G:

$$\Gamma(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ f(x-1, g(x,y)), & \text{ако } x>0 \end{cases}$$

$$\Delta(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ g(x-1,y)+y, & \text{ако } x>0. \end{cases}$$

Забелязваме, че Δ не зависи от първия си аргумент и затова решаваме първо да пресметнем функциите от редицата $g_0, g_1, \ldots$.
Тръгвайки от $g_0 = \emptyset^{(2)}$, за g_1 ще имаме:

$$g_1(x,y) \overset{(5)}{\simeq} \Delta(\emptyset^{(2)}, \emptyset^{(2)})(x,y) \overset{\text{деф } \Delta}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ \emptyset^{(2)}(x-1,y)+y, & \text{ако } x>0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ \neg!, & \text{ако } x>0. \end{cases}$$

За следващата апроксимация g_2 на g можем да напишем:

$$g_2(x,y) \overset{(5)}{\simeq} \Delta(f_1, g_1)(x,y) \overset{\text{деф } \Delta}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ g_1(x-1,y)+y, & \text{ако } x>0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ 0+y, & \text{ако } x=1 \\ \neg!, & \text{ако } x>1, \end{cases}$$

и като обединим първите два реда, преписваме g_2 като

$$g_2(x,y) \simeq \begin{cases} x.y, & \text{ако } x<2 \\ \neg!, & \text{ако } x \geq 2. \end{cases}$$

Това ни подсказва, че g_n може би има следния общ вид:

$$g_n(x,y) \simeq \begin{cases} x.y, & \text{ако } x<n \\ \neg!, & \text{ако } x \geq n. \end{cases} \tag{6}$$

Наистина, по-горе видяхме, че за началните стойности на n това е така. Сега ако допуснем, че за произволно n горното представяне (6) е в сила, то за $n+1$ ще имаме:

$$g_{n+1}(x,y) \overset{(5)}{\simeq} \Delta(f_n,g_n)(x,y) \overset{\text{деф }\Delta}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ g_n(x-1,y)+y, & \text{ако } x>0 \end{cases} \overset{(6)}{\simeq}$$

$$\begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ (x-1).y+y, & \text{ако } x>0 \ \& \ x-1<n \\ \neg!, & \text{ако } x-1\geq n \end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ xy, & \text{ако } 0<x<n+1 \\ \neg!, & \text{ако } x\geq n+1 \end{cases} \simeq \begin{cases} xy, & \text{ако } x<n+1 \\ \neg!, & \text{ако } x\geq n+1. \end{cases}$$

Границата g на редицата $\{g_n\}_n$ формално няма да ни трябва при определянето на $D_V(R)$, затова няма да я намираме.

Като знаем как изглежда всяка функция g_n, можем да пристъпим към пресмятането на функциите от първата редица $\{f_n\}_n$. Началната функция f_0 отново е $\emptyset^{(2)}$, а за f_1 ще имаме:

$$f_1(x,y) \overset{(4)}{\simeq} \Gamma(\emptyset^{(2)},\emptyset^{(2)})(x,y) \overset{\text{деф }\Gamma}{\simeq} \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ \emptyset^{(2)}(x-1,\emptyset^{(2)}(x,y)), & \text{ако } x>0 \end{cases} \simeq \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ \neg!, & \text{ако } x>0. \end{cases}$$

Оттук за следващата функция f_2 получаваме:

$$f_2(x,y) \overset{(4)}{\simeq} \Gamma(f_1,g_1)(x,y) \overset{\text{деф }\Gamma}{\simeq} \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ f_1(x-1,\underbrace{g_1(x,y)}_{\neg!}), & \text{ако } x>0 \end{cases} \simeq \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ \neg!, & \text{ако } x>0. \end{cases}$$

Излезе, че $f_1 = f_2$, което обаче не означава (както беше при операторите на един аргумент), че рекурсията „ще се затвори“ на стъпка 2 (т.е. ще имаме $f_1 = f_2 = f_3 \dots$). Това е защото следващата апроксимация f_3 зависи както от f_2, така и от g_2, а g_2 е различна от g_1. Да видим:

$$f_3(x,y) \overset{(4)}{\simeq} \Gamma(f_2,g_2)(x,y) \overset{\text{деф }\Gamma}{\simeq} \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ f_2(x-1,g_2(x,y)), & \text{ако } x>0 \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ \underbrace{g_2(1,y)}_{y}, & \text{ако } x=1 \\ \neg!, & \text{ако } x>1 \end{cases} \simeq \begin{cases} x!.y, & \text{ако } x<2 \\ \neg!, & \text{ако } x\geq 2. \end{cases}$$

Очертава се хипотезата, че при $n \geq 2$ функцията f_n ще изглежда така:

$$f_n(x,y) \simeq \begin{cases} x!.y, & \text{ако } x<n-1 \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{7}$$

Наистина, експериментите ни по-горе потвърдиха, че f_2 и f_3 имат този вид. Да приемем, че за произволно $n \geq 2$ това е така. Тогава за $n+1$ ще имаме:

$$f_{n+1}(x,y) \overset{(4)}{\simeq} \Gamma(f_n, g_n)(x,y) \overset{\text{деф }\Gamma}{\simeq} \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ f_n(x-1, g_n(x,y)), & \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

$$\overset{(6)}{\simeq} \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ f_n(x-1, xy), & \text{ако } x > 0 \ \& \ \underbrace{x < n}_{x-1<n-1} \\ \neg!, & \text{в останалите случаи} \end{cases} \overset{(7)}{\simeq} \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ (x-1)!(x.y), & \text{ако } x>0 \ \& \ x<n \\ \neg!, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} x!.y, & \text{ако } x < n \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Като знаем общия вид (7) на всяка от функциите f_n, не е трудно да съобразим, че тяхната граница $f = \bigcup_n f_n$ ще е функцията $x!.y$. Тогава за $D_V(R)(x)$ ще имаме:

$$D_V(R)(x) \ \simeq \ \tau_0(x,f) \ \simeq \ f(x,1) \ = \ x! \quad \text{за всяко } x \in \mathbb{N}.$$

□

Следващата задача е съвсем проста; дадена е на изпит единствено с цел да се провери дали човек знае съответните дефиниции (всъщност тя има и втора част — да се направи същото и за денотационната семантика по име).

Задача 2. (Писмен изпит, 05/02/2017, спец. КН) Определете $D_V(R)$ за следващата програма R:

$G(X, F(X))$ `where`
$F(X) \ = $ `if` $X == 0$ `then` $F(G(X, F(X)))$ `else` 0
$G(X,Y) \ = $ `if` $X == 0$ `then` 0 `else` $G(F(X), Y)$

Решение. Да означим отново с

$$\Gamma : \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \quad \text{и} \quad \Delta : \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$$

операторите, определени от дефинициите на F и G:

$$\Gamma(f,g)(x) \ \simeq \ \begin{cases} f(g(x, f(x))), & \text{ако} \ \ x = 0 \\ 0, & \text{ако} \ \ x > 0 \end{cases}$$

$$\Delta(f,g)(x,y) \;\simeq\; \begin{cases} 0, & \text{ако } \; x=0 \\ g(f(x),y), & \text{ако } \; x>0. \end{cases}$$

Вече казахме, че тази задача е много лесна. Да се убедим:

$$f_1(x) \overset{(4)}{\simeq} \Gamma(\emptyset^{(1)},\emptyset^{(2)})(x) \overset{\text{деф }\Gamma}{\simeq} \begin{cases} \emptyset^{(1)}(\emptyset^{(2)}(x,\emptyset^{(1)}(x))), & \text{ако } x=0 \\ 0, & \text{ако } x>0 \end{cases} \simeq \begin{cases} \neg!, & \text{ако } x=0 \\ 0, & \text{ако } x>0. \end{cases}$$

Следващата апроксимация $f_2 \overset{\text{деф}}{=} \Gamma(f_1,g_1)$ формално зависи от g_1, но на практика g_1 не ни трябва, за да определим f_2:

$$f_2(x) \overset{(4)}{\simeq} \Gamma(f_1,g_1)(x) \overset{\text{деф }\Gamma}{\simeq} \begin{cases} f_1(g_1(x,\underbrace{f_1(x)}_{\neg!})), & \text{ако } x=0 \\ 0, & \text{ако } x>0 \end{cases} \simeq \begin{cases} \neg!, & \text{ако } x=0 \\ 0, & \text{ако } x>0. \end{cases}$$

Ясно е, че и за всяко $n>0$, f_n ще има горния вид, откъдето и точната горна граница f ще е същата функция:

$$f(x) \simeq \begin{cases} \neg!, & \text{ако } x=0 \\ 0, & \text{ако } x>0. \end{cases}$$

Сега за функциите от редицата $g_0,g_1,\dots$ ще имаме:

$$g_1(x,y) \overset{(5)}{\simeq} \Delta(f_0,g_0)(x,y) \overset{\text{деф }\Delta}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ \emptyset^{(2)}(\emptyset^{(1)}(x),y), & \text{ако } x>0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ \neg!, & \text{ако } x>0. \end{cases}$$

Оттук, като имаме предвид и полученото по-горе за f_1, можем да запишем следното за g_2:

$$g_2(x,y) \overset{(5)}{\simeq} \Delta(f_1,g_1)(x,y) \overset{\text{деф }\Delta}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ \underbrace{g_1(\underbrace{f_1(x)}_{0},y)}_{0}, & \text{ако } x>0 \end{cases} \;\simeq\; 0.$$

Излезе, че $g_2=\lambda x,y.0$. Функцията g_2 е тотална, а от теорията знаем, че $g_2 \subseteq g_3$, което означава, че $g_2=g_3$, а оттук и $g_2=g_n$ за всяко $n=2,3,\dots$. Тогава и граничната функция g ще е равна на g_2, т.е. ще имаме

$$g(x,y) \;\simeq\; 0 \quad \text{за всички} \quad x,y \in \mathbb{N}.$$

Сега финално

$$D_V(R)(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} g(x,f(x)) \;\simeq\; \begin{cases} \neg!, & \text{ако } x=0 \\ 0, & \text{ако } x>0. \end{cases}$$

□