Примерни задачи за самоподготовка

Домашно № 1 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Информатика", I курс, летен семестър на 2020/2021 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	Общо
получени точки						
максимум точки	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*100*

Задача 1. Докажете, че $2^x > x$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Задача 2. Принципът на математическата индукция в една от формулировките си гласи, че за всеки предикат $P(n)$, определен върху множеството на целите неотрицателни числа, важи следното твърдение:

$$P(0) \,\wedge\, \big(\forall n \geq 0\big)\big[P(n) \rightarrow P(n+1)\big] \;\Rightarrow\; \big(\forall n \geq 0\big)P(n).$$

В тази формулировка параметърът n пробягва безкрайно множество, като расте неограничено, затова тя е подходяща за повечето математически задачи.

Обаче понякога (например при доказване на коректността на цикъл на някой алгоритъм) се срещат задачи, в които параметърът n пробягва крайно множество, тоест расте ограничено. За тези случаи е подходяща следната разновидност на принципа на математическата индукция:

$$Q(0) \,\wedge\, \big(\forall n \in \big[0\,;N\big)\big)\big[Q(n) \rightarrow Q(n+1)\big] \;\Rightarrow\; \big(\forall n \in \big[0\,;N\big]\big)\,Q(n).$$

Тук N е произволно цяло неотрицателно число, $Q(n)$ е предикат, определен върху множеството на целите числа от 0 до N включително, пробягвано от параметъра n.

Докажете тази разновидност на принципа на математическата индукция. Изисква се строго, тоест напълно формално, доказателство.

Не са приемливи разсъждения, подобни на следните:

Да разгледаме отначало частния случай $N = 3$. Твърдението $Q(0)$ е изпълнено по условие. С помощта на дадената импликация при $n = 0$ извеждаме $Q(1)$, при $n = 1$ извеждаме $Q(2)$, а при $n = 2$ извеждаме $Q(3)$. Следователно твърдението $Q(n)$ е вярно за всяко цяло $n \in \big[0\,;3\big]$.

В това доказателство числото 3 не е специално с нищо: може да се замени с друго число. Аналогично се доказва желаното твърдение за всяко цяло неотрицателно число N.

Първият абзац съдържа напълно строго доказателство, което обаче обхваща, за съжаление, само частния случай $N = 3$. Разсъжденията от втория абзац са верни, но неформални: истина е, че аналогични доказателства съществуват за всяка друга стойност на N, но това твърдение се позовава на чувството за очевидност, което е неформално. Липсва формално доказателство за общия случай.

Можем да се опитаме да отстраним посочения дефект така:

Нека N е произволно цяло неотрицателно число. Твърдението $Q(0)$ е изпълнено по условие. С помощта на дадената импликация при $n = 0$ извеждаме $Q(1)$, при $n = 1$ извеждаме $Q(2)$, при $n = 2$ извеждаме $Q(3)$ и тъй нататък, докато изведем $Q(N)$. Затова твърдението $Q(n)$ е вярно за всяко цяло число $n \in \big[0\,;N\big]$.

Това доказателство също не върши работа. Проблемът се крие в думите "и тъй нататък" (които могат да бъдат заменени с многоточие): тези думи са неформален израз, който показва, че част от доказателството липсва и читателят трябва да възстанови тази част по интуиция.

Правилният подход е този: Нека N е произволно, но фиксирано цяло неотрицателно число, а $Q(n)$ е предикат, определен върху множеството на целите числа от 0 до N включително, пробягвано от параметъра n. С помощта на $Q(n)$ и N дефинирайте подходящ предикат $P(n)$ и приложете стандартната (неограничената) форма на принципа на математическата индукция към предиката $P(n)$. След опростяване ще получите ограничената разновидност на принципа, ако сте избрали правилно предиката $P(n)$. Имайте предвид, че той трябва да бъде определен за всяко цяло неотрицателно число n, включително за $n > N$.

Задача 3. Разглеждаме две безкрайни числови редици, определени рекурентно:

$x_0 = 0, \quad y_k = x_k + k \quad$ и $\quad x_{k+1} = y_k + k + 1 \quad$ за всяко цяло неотрицателно число k.

Намерете формули за общия член на всяка от двете редици.

Задача 4. Предложете триместен предикат $P(x, y, z)$ над множеството на целите числа, който не може да се представи като конюнкция на никакъв краен брой двуместни предикати над същото множество.

Задача 5. Съставете безкрайна редица $\left(R_n\right)_{n=0}^{\infty}$ от двучленни релации над $\mathbb{Z}$, такава че $R_n \supset R_{n+1}$ за всяко цяло число $n \geq 0$.

РЕШЕНИЯ

Задача 1 може да се реши различно, например с методите на математическия анализ, които сами по себе си са важни, но са извън обхвата на учебния предмет "Дискретни структури". Тук предлагаме друго решение — с нестандартно прилагане на математическата индукция. На пръв поглед математическата индукция не е подходяща за доказване на неравенството $2^x > x$, тъй като параметърът x е произволно реално число. Всъщност има индуктивно доказателство, основано на подходящо дискретизиране на множеството $\mathbb{R}$.

С цел да стане ясна идеята на решението, ще изложим първо неформалните разсъждения. Неравенството $2^x > x$ важи за всяко $x \in \big(-\infty\,;\,0\big]$, защото $2^x > 0 \geq x$. Следователно остава да докажем неравенството за $x > 0$. То е изпълнено за всяко $x \in \big(0\,;\,1\big]$, защото $2^x > 1 \geq x$. Важи за всяко $x \in \big(1\,;\,2\big]$, защото $2^x > 2 \geq x$. Също за всяко $x \in \big(2\,;\,4\big]$, защото $2^x > 4 \geq x$. Неравенството $2^x > x$ е изпълнено и за всяко $x \in \big(4\,;\,16\big]$, защото $2^x > 16 \geq x$. Изпълнено е и за всяко $x \in \big(16\,;\,2^{16}\big]$, защото $2^x > 2^{16} \geq x$. И тъй нататък. Тези интервали, взети заедно, покриват цялата реална ос:

$$\mathbb{R} = \big(-\infty\,;\,0\big] \cup \big(0\,;\,1\big] \cup \big(1\,;\,2\big] \cup \big(2\,;\,4\big] \cup \big(4\,;\,16\big] \cup \big(16\,;\,2^{16}\big] \cup \ldots$$

Ето защо неравенството $2^x > x$ важи в крайна сметка за всяко реално число x.

Думите "и тъй нататък" и многоточието в безкрайното обединение на интервали показват, че разсъжденията дотук не са формализирани докрай. Сега ще поправим този дефект.

Строго доказателство: Най-напред дефинираме една безкрайна редица от реални числа:

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = 2^{x_n} \text{ за всяко цяло число } n \geq 0.$$

$\big($Това е тъкмо редицата от точки, разбиващи реалната ос на интервали: $0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 16,\ 2^{16}\ldots\big)$ Доказваме по индукция, че редицата е строго растяща: $x_n < x_{n+1}$ за всяко цяло число $n \geq 0$.

База: $n = 0$. Неравенството $x_0 < x_1$ е друг запис на вярното числово неравенство $0 < 1$.

Индуктивна стъпка: Нека $x_n < x_{n+1}$ за някое цяло $n \geq 0$. Ще докажем, че $x_{n+1} < x_{n+2}$. Наистина, $x_{n+1} = 2^{x_n} < 2^{x_{n+1}} = x_{n+2}$. Равенствата са верни според рекурентното уравнение, а неравенството следва от индуктивното предположение $x_n < x_{n+1}$ посредством известния факт, че показателната функция с основа 2 е строго растяща.

Щом числовата редица е строго растяща, тя разбива реалната ос на интервали:

$$\mathbb{R} = \Big(-\infty\,;\,x_0\Big] \ \bigcup\ \bigcup_{n=0}^{\infty} \Big(x_n\,;\,x_{n+1}\Big].$$

Остава да проверим, че неравенството $2^x > x$ е изпълнено във всеки от тези интервали.

Наистина, неравенството $2^x > x$ важи за всяко $x \in \Big(-\infty\,;\,x_0\Big]$, защото $x_0 = 0$ и $2^x > 0 \geq x$. То е в сила и за всяко $x \in \Big(x_n\,;\,x_{n+1}\Big]$, както се вижда от веригата равенства и неравенства $2^x > 2^{x_n} = x_{n+1} \geq x$. Последното неравенство е изпълнено поради избора на интервал за x, първото неравенство следва от факта, че показателната функция с основа 2 е строго растяща, а равенството съвпада с рекурентното уравнение.

Задача 2. Нека N е произволно и фиксирано цяло неотрицателно число, $Q(n)$ е предикат, определен върху множеството на всички цели числа от 0 до N включително, пробягвано от n. Върху множеството на всички цели неотрицателни числа определяме предикат $P(n)$:

$$P(n) = \begin{cases} Q(n) & \text{при } 0 \leq n \leq N; \\ \textit{истина} & \text{при } n > N. \end{cases}$$

Към предиката $P(n)$ прилагаме принципа на математическата индукция:

$$P(0) \,\wedge\, \big(\forall n \geq 0\big)\big[P(n) \rightarrow P(n+1)\big] \ \Rightarrow\ \big(\forall n \geq 0\big)P(n).$$

Присъединяваме умозаключение от общото към частното: $\big(\forall n \geq 0\big)P(n) \ \Rightarrow\ \big(\forall n \in \big[0\,;N\big]\big)\,P(n)$.

От транзитивността на импликацията извличаме следния извод:

$$P(0) \wedge \big(\forall n \geq 0\big)\big[P(n) \to P(n+1)\big] \Rightarrow \big(\forall n \in \big[0\,;N\big]\big)\,P(n).$$

Преобразуваме лявата страна, разбивайки интервала $\big[0\,;+\infty\big)$ на два подинтервала:

$$P(0) \wedge \big(\forall n \in \big[0\,;N\big)\big)\big[P(n) \to P(n+1)\big] \wedge \big(\forall n \geq N\big)\big[P(n) \to P(n+1)\big] \Rightarrow \big(\forall n \in \big[0\,;N\big]\big)\,P(n).$$

При $n \geq N$ имаме $n+1 > N$, затова $P(n+1) = \mathit{истина}$ за всяко цяло $n \geq N$. Заместваме:

$$P(0) \wedge \big(\forall n \in \big[0\,;N\big)\big)\big[P(n) \to P(n+1)\big] \wedge \big(\forall n \geq N\big)\big[P(n) \to \mathit{истина}\big] \Rightarrow \big(\forall n \in \big[0\,;N\big]\big)\,P(n).$$

Импликация с истинен консеквент е истина независимо от антецедента:

$$P(0) \wedge \big(\forall n \in \big[0\,;N\big)\big)\big[P(n) \to P(n+1)\big] \wedge \big(\forall n \geq N\big)\big[\mathit{истина}\big] \Rightarrow \big(\forall n \in \big[0\,;N\big]\big)\,P(n).$$

Опростяваме третия операнд на конюнкцията:

$$P(0) \wedge \big(\forall n \in \big[0\,;N\big)\big)\big[P(n) \to P(n+1)\big] \wedge \mathit{истина} \Rightarrow \big(\forall n \in \big[0\,;N\big]\big)\,P(n).$$

Истината е неутрален елемент на конюнкцията:

$$P(0) \wedge \big(\forall n \in \big[0\,;N\big)\big)\big[P(n) \to P(n+1)\big] \Rightarrow \big(\forall n \in \big[0\,;N\big]\big)\,P(n).$$

Поради множеството от стойности на n в тази формула можем да заместим навсякъде P с Q:

$$Q(0) \wedge \big(\forall n \in \big[0\,;N\big)\big)\big[Q(n) \to Q(n+1)\big] \Rightarrow \big(\forall n \in \big[0\,;N\big]\big)\,Q(n).$$

Това е точно ограничената разновидност на принципа, която искахме да докажем.

Задача 3. Пресмятайки първите няколко члена на двете редици, налучкваме формулите: $x_k = k^2$ и $y_k = k^2 + k$ за всяко цяло неотрицателно число k. Доказваме ги чрез индукция.

База: Формулата $x_k = k^2$ при $k = 0$ се свежда с помощта на началното условие на задачата до вярното числово равенство $0 = 0$.

Индуктивната стъпка се състои от две части:

— Нека $x_k = k^2$ за някое цяло число $k \geq 0$. Ще докажем, че $y_k = k^2 + k$ за същото k. Наистина, $y_k = x_k + k = k^2 + k$. Второто равенство следва от индуктивното предположение, а първото равенство е едно от рекурентните уравнения, дадени по условие.

— Нека $y_k = k^2 + k$ за някое цяло число $k \geq 0$. Ще докажем формулата $x_{k+1} = (k+1)^2$ (тоест тук импликацията върви от един индекс към следващия). Това следва от равенствата $x_{k+1} = y_k + k + 1 = k^2 + k + k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$. Първото равенство представлява едно от рекурентните уравнения, второто равенство следва от индуктивното предположение, а останалите равенства са алгебрични преобразувания.

Тази разновидност на математическата индукция можем да наречем *взаимна индукция:* формулата за първата редица се доказва посредством формулата за втората редица и обратно. Това може да изглежда като кръгово доказателство, но в действителност няма логическа грешка: от формулата за x_0 (базата), установена чрез непосредствена проверка, следва формулата за y_0, от нея следва формулата за x_1, от нея — формулата за y_1, после за x_2, y_2, x_3, y_3 и тъй нататък. Тази верига от разсъждения очевидно не съдържа логически кръг.

Взаимна индукция се използва често при анализ на състезателни игри за двама играчи. За да установим кой от двамата печели играта, формулираме две твърдения от следния вид: "Преди всеки ход на първия играч ..."; "Преди всеки ход на втория играч ...". Тези твърдения ни помагат да разберем кой има печеливша стратегия, а се доказват чрез взаимна индукция: двете части на индуктивната стъпка съответстват на ход на единия играч и ход на другия играч; базата на индукцията съответства на началното положение (преди първия ход на първия играч), затова съдържа проверка на първото твърдение.

Задача 4. Например предикатът $P(x,y,z) \equiv x + y < z$, определен над множеството $\mathbb{Z}$, не може да се представи като конюнкция на никакъв краен брой двуместни предикати над $\mathbb{Z}$. Да допуснем противното: че има представяне от такъв вид. Без ограничение можем да приемем, че то съдържа три двуместни предиката: $P(x,y,z) \equiv x + y < z \equiv A(x,y) \wedge B(y,z) \wedge C(z,x)$.

Действително, ненаредените двойки от аргументи са само три: $\{x\,;\,y\}$, $\{y\,;\,z\}$ и $\{z\,;\,x\}$. Ако двуместните предикати са повече от три, обединяваме онези, които имат еднакви аргументи. Например $\underbrace{A_1(x,y) \,\wedge\, A_2(x,y) \,\wedge\, A_3(x,y)}_{A(x,y)} \wedge B(y,z) \,\wedge\, C(z,x) \,\equiv\, A(x,y) \,\wedge\, B(y,z) \,\wedge\, C(z,x)$.

Ако двуместните предикати са по-малко от три, добавяме тъждествено истинни предикати. Например $B(y,z) \,\wedge\, C(z,x) \,\equiv\, A(x,y) \,\wedge\, B(y,z) \,\wedge\, C(z,x)$, където $A(x,y) \,\equiv\, \textit{истина}$.

И така, допускаме, че съществуват три двуместни предиката A, B и C, определени над $\mathbb{Z}$ и удовлетворяващи следното изискване: $x+y<z \,\equiv\, A(x,y) \,\wedge\, B(y,z) \,\wedge\, C(z,x)$.

Извършваме три различни замествания: $z=x+y+1$, $y=z-x-1$ и $x=z-y-1$. Получаваме следните три формули:

$$x+y<x+y+1 \,\equiv\, A(x,y) \,\wedge\, B(y,x+y+1) \,\wedge\, C(x+y+1,x);$$
$$x+z-x-1<z \,\equiv\, A(x,z-x-1) \,\wedge\, B(z-x-1,z) \,\wedge\, C(z,x);$$
$$z-y-1+y<z \,\equiv\, A(z-y-1,y) \,\wedge\, B(y,z) \,\wedge\, C(z,z-y-1).$$

В лявата страна на формулите се унищожават всички променливи:

$$0<1 \,\equiv\, A(x,y) \,\wedge\, B(y,x+y+1) \,\wedge\, C(x+y+1,x);$$
$$-1<0 \,\equiv\, A(x,z-x-1) \,\wedge\, B(z-x-1,z) \,\wedge\, C(z,x);$$
$$-1<0 \,\equiv\, A(z-y-1,y) \,\wedge\, B(y,z) \,\wedge\, C(z,z-y-1).$$

Отляво стоят три верни числови неравенства, следователно десните страни на формулите са тъждествено истинни. Понеже десните страни са конюнкции, то техните девет операнда също са тъждествено истинни. В частност това важи за операндите $A(x,y)$, $B(y,z)$ и $C(z,x)$. Щом трите предиката са тъждествено истинни, то това е вярно и за тяхната конюнкция:

$$x+y<z \,\equiv\, A(x,y) \,\wedge\, B(y,z) \,\wedge\, C(z,x) \,\equiv\, \textit{истина}.$$

Излиза, че неравенството $x+y<z$ важи за всички цели числа x, y и z. Това очевидно не е така. Контрапример: $9+5<2$ е невярно числово неравенство.

Полученото противоречие показва, че направеното допускане не е правилно. Следователно вярно е обратното: триместният предикат $x+y<z$ не може да се представи като конюнкция на двуместни предикати.

Задача 5. Определяме безкрайна редица $\left(R_n\right)_{n=0}^{\infty}$ от двучленни релации над $\mathbb{Z}$ така:

$$x\,R_n\,y \iff x+y>n.$$

За да докажем, че строгото включване $R_n \supset R_{n+1}$ важи за всяко цяло число $n \geq 0$, е достатъчно да установим, че от $x+y>n+1$ следва $x+y>n$, но от $x+y>n$ не следва $x+y>n+1$. Действително, от $x+y>n+1$ следва $x+y>n$, защото $n+1>n$. Обратното не е вярно: от $x+y>n$ не следва $x+y>n+1$, защото може $x+y=n+1$.

СХЕМА ЗА ТОЧКУВАНЕ

Всяка от петте задачи носи по 20 точки, които се дават единствено за пълно решение. Частични решения не се приемат (и не се очакват, тъй като всички задачи изискват досещане). Може да се отнемат по една-две точки на задача за дребни пропуски като технически грешки или неточности в обясненията.

Примерни задачи за самоподготовка

Домашно № 2 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Информатика", I курс, летен семестър на 2020/2021 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	Общо
получени точки						
максимум точки	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*100*

Задача 1. Колко петцифрени числа можем да образуваме с цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6, ако сред последните три цифри на всяко число поне една е четна и поне една е нечетна?

Задача 2. Нека A е множеството на всички естествени числа от 1 до 100 включително. Колко са ненамаляващите функции от вида $f : A \to A$?

Задача 3. С помощта на биномната формула докажете комбинаторното тъждество

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}, \quad 0 \le r \le n.$$

Задача 4. Докажете тъждеството от задача 3 чрез комбинаторни разсъждения.

Задача 5. По колко начина можем да прочетем думата *ЯГОДА*, ако от всяка клетка отиваме или в клетката под нея, или в клетката отдясно?

		Я		
	Я	Г	О	Д
Я	Г	О	Д	А
		Д	А	
		А		

СХЕМА ЗА ТОЧКУВАНЕ

Всяка задача носи 20 точки само ако е решена изцяло. Частични решения не се приемат. Могат да се отнемат по една-две точки на задача за дребни пропуски (технически грешки).

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Отначало ще преброим всички петцифрени числа, които могат да се образуват от цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6. За всяка позиция има седем възможности (дадените цифри), само за първата позиция възможностите са шест, тъй като там не може да стои цифрата нула. Понеже всяка възможност за една позиция се съчетава с всяка възможност за друга позиция, прилагаме правилото за умножение: съществуват $6 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 7 = 14406$ петцифрени числа, образувани от цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

От тях премахваме онези числа, чиито последни три цифри са все четни (0, 2, 4 или 6). Броят на числата от този вид е $6 \,.\, 7 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 2688$.

Премахваме и числата, които завършват на три нечетни цифри (това са цифрите 1, 3 или 5). Броят на тези числа е $6 \,.\, 7 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 1134$.

Остават $14406 - 2688 - 1134 = 10584$ числа. Това е отговорът на задачата.

Задача 2. Функцията f се определя еднозначно от стойностите $f(1), f(2), \ldots, f(100)$, тоест можем да я отъждествим с редицата от сто числа. Следователно трябва да изберем сто измежду целите числа от 1 до 100 вкл. Едно и също число можем да изберем няколко пъти, защото нищо не пречи f да приема равни стойности. Тоест имаме съединения с повторение. На пръв поглед тези съединения са вариации, понеже са редици, а не множества от стойности на f. Това щеше да бъде правилното тълкуване, ако брояхме всички функции f. Обаче ние броим само ненамаляващите функции, което означава, че в какъвто и ред да изберем стоте стойности, след това трябва да ги подредим в ненамаляваща редица. С други думи, редът, в който отначало избираме стойностите на f, няма значение. Ето защо съединенията са комбинации.

Следователно ненамаляващите функции от вида $f : A \to A$ могат да бъдат разглеждани като комбинации с повторение на 100 елемента от клас 100. Броят им се пресмята по формулата

$$\widetilde{C}\,^{100}_{100} = \frac{199!}{100!\,99!} = \frac{101 \,.\, 102 \,.\, 103 \,\ldots\, 199}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,\ldots\, 99} \approx 4{,}52743 \,.\, 10^{58}.$$

Задача 3. От формулата за сбор на геометрична прогресия следва тъждеството

$$\sum_{k=0}^{n} (1+x)^k = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x}\,.$$

Това равенство важи за всяко $x \neq 0$, затова двете страни имат едни и същи коефициенти пред едни и същи степени на x. Да сравним коефициентите пред x^r.

От биномната формула следва, че в лявата страна този коефициент е

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{r}.$$

В дясната страна това е точно коефициентът пред x^{r+1} в числителя, тоест

$$\binom{n+1}{r+1}.$$

От равенството на коефициентите следва, че

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Тъй като $\binom{k}{r} = 0$ при $k < r$, то можем да пропуснем нулевите събираеми в сумата:

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Това е тъкмо желаното тъждество.

Задача 4. Комбинаторното тъждество може да се докаже чрез двукратно преброяване. Ако разполагаме с $n+1$ предмета, номерирани с целите числа от 1 до $n+1$ включително, по колко начина можем да изберем $r+1$ от тях, без да се интересуваме от реда им?

Понеже редът на избиране няма значение, това са комбинации. А тъй като всеки предмет може да бъде избран само веднъж, то имаме комбинации без повторение. Броят им е

$$C_{n+1}^{r+1} = \binom{n+1}{r+1}.$$

От друга страна, можем да разсъждаваме и така: Да означим с $k+1$ най-големия номер сред номерата на избраните предмети. Тогава $r \le k \le n$ и остава да изберем още r предмета измежду предметите с номера от 1 до k включително, а това може да стане по $C_k^r = \binom{k}{r}$ начина. Като сумираме по всевъзможните стойности на k, получаваме

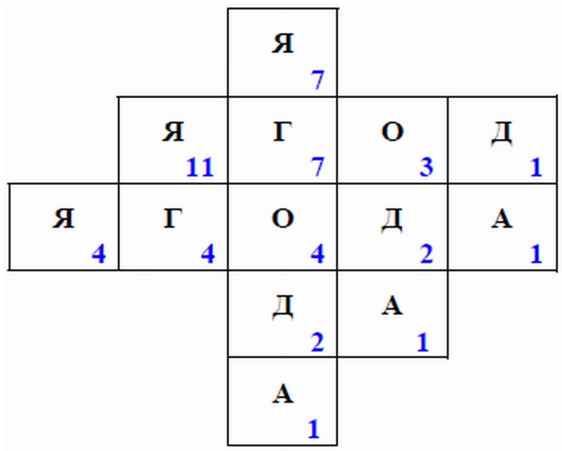
$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r}.$$

Двата израза са формули за едно и също количество, следователно са равни:

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Задача 5. В случая думата е кратка и таблото е малко, та можем да намерим отговора и с пълно изчерпване. Но при голямо табло бройката нараства и този метод става неподходящ. Вместо това се използва т. нар. *динамично програмиране*, чиято основна идея е да се решат всички по-малки задачи от дадената и техните решения да се запомнят (обикновено в таблица, но понякога в друга структура от данни). В тази задача можем да използваме дадената таблица. Попълваме я с числа, както следва.

Във всяка клетка записваме едно число, което показва по колко начина можем да прочетем края на думата, започвайки от тази клетка, тоест по колко начина можем да стигнем от нея до някоя буква *А*, като се движим само надолу и надясно. Таблицата попълваме отзад напред. Първо пишем единици в клетките с буква *А*, защото от тях има само един начин да прочетем края на думата, т.е. буквата *А*. После попълваме клетките с буква *Д*: във всяка от тях пишем сбора от двете числа в клетките отдясно и отдолу. Така попълваме и клетките с *О*, *Г* и *Я*.



Например числото 4 в една от клетките с буква *О* означава, че краят на думата, т.е. *ОДА*, може да бъде прочетен по четири начина, ако започнем от това *О*.

Накрая събираме числата от клетките с буква *Я*: $4+11+7=22$, което е търсеният отговор: думата *ЯГОДА* може да бъде прочетена по 22 начина.

Примерни задачи за самоподготовка

Контролно по дисциплината "Дискретни структури"
за специалност "Информатика", I курс,
летен семестър на 2020/2021 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	Общо
получени точки						
максимум точки	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*100*

Задача 1. Докажете, че ако $A \subseteq B \cap C$, то $\Big(B \cup C\Big) \backslash B = \overline{\overline{C} \cap \overline{A}} \cap \overline{B}$.

Задача 2. В множеството на всички хора разглеждаме релацията "X е потомък на Y". Проверете дали тя е:

а) строга наредба; **(10 точки)**

б) строга линейна наредба. **(5 точки)**

Какво представляват:

в) максималните елементи на релацията? **(2,5 точки)**

г) минималните елементи на релацията? **(2,5 точки)**

Задача 3. В множеството $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ дефинираме двучленна релация R по следния начин: $\big(x\,;\,y\big)\,R\,\big(a\,;\,b\big) \iff$ редицата x, y, a, b съдържа четен брой нечетни числа.

а) Докажете, че R е релация на еквивалентност. **(10 точки)**

б) Опишете класовете на еквивалентност на R възможно най-ясно. **(10 точки)**

Задача 4. Нека A и B са множества, за които $|A| = n > 0$, $|B| = m > 0$ и $A \cap B = \varnothing$. Колко са подмножествата X на $A \cup B$, такива че $X \cap A \neq \varnothing$ и $X \cap B \neq \varnothing$?

Задача 5. Да се докаже, че за всяко цяло число $n \geq 6$ всеки квадрат може да се разреже на n квадрата (не непременно еднакви).

Задача 6. Изброимо ли е множеството от правите в равнината? Отговорът да се обоснове!

РЕШЕНИЯ

Задача 1 може да се реши поне по два начина.

Първи начин: чрез преобразуване поотделно на лявата и дясната страна на тъждеството до получаване на един и същи израз.

Опростяваме лявата страна с помощта на известни формули от теорията на множествата: $\left(B\cup C\right)\setminus B = \left(B\setminus B\right)\cup\left(C\setminus B\right) = \varnothing\cup\left(C\setminus B\right) = C\setminus B$. Второто и третото от тези равенства се основават съответно на следните известни тъждества от теорията: $B\setminus B = \varnothing$ и $\varnothing\cup X = X$. Първото преобразуване във веригата от равенства два реда по-горе представлява приложение на един от разпределителните закони за множества.

Дясната страна се преобразува така: $\overline{\overline{C}\cap\overline{A}}\cap\overline{B} = \left(C\cup A\right)\cap\overline{B} = C\cap\overline{B} = C\setminus B$. Първото равенство следва от съответния закон на Де Морган, третото е известно от теорията, а второто равенство следва от формулата $C\cup A = C$. Тя важи поради включването $A\subseteq C$, което е следствие от двете включвания $A\subseteq B\cap C\subseteq C$ (първото от тях е изпълнено по условие, второто е теорема).

И така, двете страни на тъждеството са равни всяка поотделно на $C\setminus B$, откъдето следва, че са равни и помежду си.

Втори начин: чрез табличния метод.

A	B	C	$B\cap C$	$A\subseteq B\cap C$	$B\cup C$	$\left(B\cup C\right)\setminus B$	$\overline{C}$	$\overline{A}$	$\overline{C}\cap\overline{A}$	$\overline{\overline{C}\cap\overline{A}}$	$\overline{B}$	$\overline{\overline{C}\cap\overline{A}}\cap\overline{B}$
0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

Условието $A\subseteq B\cap C$ е нарушено в трите реда на таблицата, които съдържат сини клетки. Стълбовете на таблицата, съответстващи на лявата и дясната страна на доказваното тъждество, съвпадат във всички останали редове (жълтите клетки). Казано по друг начин, равенството $\left(B\cup C\right)\setminus B = \overline{\overline{C}\cap\overline{A}}\cap\overline{B}$ важи винаги, когато е изпълнено условието $A\subseteq B\cap C$.

Забележка: Частта от трите реда надясно от сините клетки не е задължително да се попълва, защото тези стойности не участват в решението на задачата.

Задача 2. Релацията "X е потомък на Y" е строга наредба в множеството на хората, защото притежава следните свойства:

— антирефлексивност: никой човек не е потомък на себе си;

— антисиметричност: не може X да е потомък на Y и Y да е потомък на X;

— транзитивност: ако X е потомък на Y и Y е потомък на Z, то X е потомък на Z.

Тази наредба не е линейна, понеже не е силно антисиметрична: тя има несравними елементи. Ако X и Y са например брат и сестра, то нито X е потомък на Y, нито Y е потомък на X.

Минимални елементи на релацията "X е потомък на Y" са хората, които нямат потомци, тоест хората без деца.

Максимални елементи на тази релация са хората, които не са потомци на други хора. Тоест максимални елементи са първите хора, каквото и да се разбира под това название.

Задача 3. Да означим с $f(\alpha)$ броя на нечетните числа в крайната целочислена редица α. Ясно е, че $f(\alpha\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$, където $\alpha\beta$ е редицата, получена от залепването на β след α.

а) Проверяваме трите свойства на релациите на еквивалентност:

— *Рефлексивност:* За всяка наредена двойка $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ е вярно, че $(x\,;\,y)\,R\,(x\,;\,y)$, защото $f(x,y,x,y) = f(x,y) + f(x,y) = 2f(x,y)$ е четно число.

— *Симетричност:* От $(x\,;\,y)\,R\,(a\,;\,b)$ следва, че $(a\,;\,b)\,R\,(x\,;\,y)$, защото няма значение за коя от редиците x, y, a, b и a, b, x, y ще кажем, че съдържа четен брой нечетни числа: двете редици се различават единствено по реда на елементите си, а не по броя им. По-формално:

$$(x\,;\,y)\,R\,(a\,;\,b) \Rightarrow f(x,y,a,b) \text{ е четно число} \Rightarrow f(x,y) + f(a,b) \text{ е четно число} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(a,b) + f(x,y) \text{ е четно число} \Rightarrow f(a,b,x,y) \text{ е четно число} \Rightarrow (a\,;\,b)\,R\,(x\,;\,y).$$

Първият и последният преход се основават на определенията на функцията f и релацията R; вторият и четвъртият преход използват свойството на f, изтъкнато в началото на решението; третият преход следва от разместителното свойство на събирането.

— *Транзитивност*: Нека $(x\,;\,y)\,R\,(a\,;\,b)$ и $(a\,;\,b)\,R\,(c\,;\,d)$. От определението на R следва, че $f(x,y,a,b) = f(x,y) + f(a,b)$ е четно число и $f(a,b,c,d) = f(a,b) + f(c,d)$ е четно число. Сборът им $f(x,y) + f(c,d) + 2f(a,b)$ е четен, т.е. $f(x,y) + f(c,d) = f(x,y,c,d)$ е четно число, затова $(x\,;\,y)\,R\,(c\,;\,d)$. Следователно релацията R е транзитивна.

Щом R е рефлексивна, симетрична и транзитивна, то тя е релация на еквивалентност.

б) $(x\,;\,y)\,R\,(a\,;\,b) \iff f(x,y,a,b)$ е четно $\iff f(x,y) + f(a,b)$ е четно $\iff f(x,y)$ и $f(a,b)$ имат еднаква четност. Тоест класовете на еквивалентност на релацията R съответстват точно на остатъците при деление на 2. Затова R има два класа на еквивалентност:

$$A_1 = \Big\{(x\,;\,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\Big|\; x \equiv y \pmod 2\Big\};$$
$$A_2 = \Big\{(x\,;\,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\Big|\; x \not\equiv y \pmod 2\Big\}.$$

Задача 4. На всяко множество $X \subseteq A \cup B$ от вида, описан в условието на задачата, съпоставяме наредената двойка $(C\,;\,D)$, където $C = X \cap A$ и $D = X \cap B$. Множествата C и D са непразни по условие и са подмножества на A и B съответно (това следва от свойствата на операцията сечение). C е непразно подмножество на A, а D е непразно подмножество на B, тоест $(C\,;\,D) \in \left(2^A \backslash \varnothing\right) \times \left(2^B \backslash \varnothing\right)$.

Ще докажем, че така определеното съответствие $X \leftrightarrow (C\,;\,D)$ е биекция; с други думи, всяка наредена двойка $(C\,;\,D) \in \left(2^A \backslash \varnothing\right) \times \left(2^B \backslash \varnothing\right)$ притежава единствен първообраз X.

Съществуване: Множеството $X = C \cup D$ е първообраз на $(C\,;\,D)$, защото:

1) Наредената двойка $(C\,;\,D)$ е образ на X, т.е. $C = X \cap A$ и $D = X \cap B$. Действително, $X \cap A = \left(C \cup D\right) \cap A = \left(C \cap A\right) \cup \left(D \cap A\right) = C \cup \varnothing = C$, където $C \cap A = C$, защото $C \subseteq A$, и $D \cap A = \varnothing$, защото $D \subseteq B$ и $B \cap A = \varnothing$. Аналогично се доказва, че $D = X \cap B$.

2) Множеството X е допустимо, тоест $X \subseteq A \cup B$ (защото $X = C \cup D$ и $C \subseteq A$, $D \subseteq B$) и $X \cap A \neq \varnothing$, $X \cap B \neq \varnothing$ (защото $X \cap A = C \neq \varnothing$ и $X \cap B = D \neq \varnothing$).

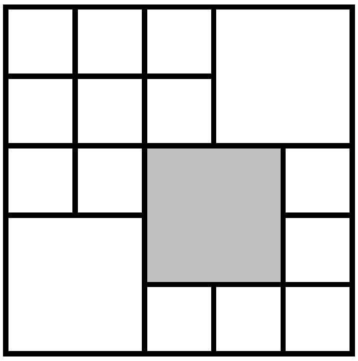
Единствеността на първообраза е следствие на тъждеството $\left(X \cap A\right) \cup \left(X \cap B\right) = X$, което се доказва така: $\left(X \cap A\right) \cup \left(X \cap B\right) = X \cap \left(A \cup B\right) = X$. Първото равенство се явява приложение на един разпределителен закон от теорията на множествата, а второто равенство следва от включването $X \subseteq A \cup B$, което е изпълнено по условие.

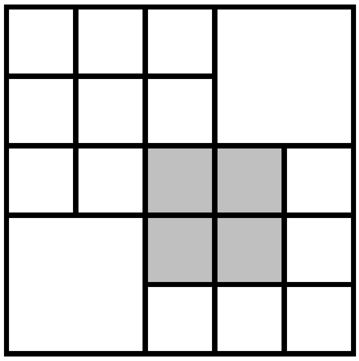
От наличието на биекция следва, че множествата X са колкото наредените двойки $(C\,;\,D)$:
$$\left|\left(2^A \backslash \varnothing\right) \times \left(2^B \backslash \varnothing\right)\right| = \left|\left(2^A \backslash \varnothing\right)\right| \cdot \left|\left(2^B \backslash \varnothing\right)\right| = \left(\left|2^A\right| - 1\right)\left(\left|2^B\right| - 1\right) = \left(2^n - 1\right)\left(2^m - 1\right).$$

Задача 4 може да се реши и по друг начин — с принципа за включване и изключване. Тъй като $A \cap B = \varnothing$, то $\left|A \cup B\right| = \left|A\right| + \left|B\right| = n + m$. Броят на подмножествата X на $A \cup B$ е равен на 2^{n+m}. Вадим онези X, които нямат сечение с B, т.е. подмножествата на A, а те са 2^n. Изваждаме и всичките 2^m подмножества на B, защото сечението им с множеството A е празно. Накрая прибавяме единица заради празното множество, извадено два пъти: $\varnothing \subseteq A$, $\varnothing \subseteq B$. Получаваме $2^{n+m} - 2^n - 2^m + 1$, което съвпада по стойност с предишния отговор.

Задача 5 зависи от параметър, чиито стойности са естествени числа, затова тя може да се реши по метода на математическата индукция. Първо ще проведем индуктивната стъпка, защото изборът на база зависи от избора на стъпка.

Индуктивна стъпка: Да предположим, че квадрат може да се разреже на n квадрата за някое цяло число $n \geq 6$. Един от тези n квадрата разделяме на четири по-малки квадратчета чрез две прави, успоредни на страните на избрания квадрат и минаващи през неговия център, както е показано на чертежа.



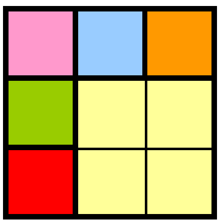


Сивият квадрат се разделя на четири по-малки квадратчета.

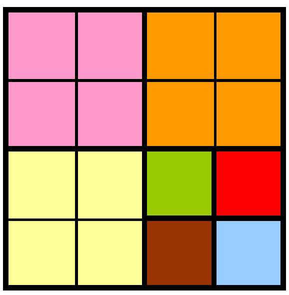
Тъй като добавяме четири квадратчета, а губим един квадрат (този, който разделяме на четири), то броят на квадратите се увеличава с 3. Така квадратите на разрязването стават $n+3$.

База: Понеже индуктивната стъпка е от n към $n+3$, то не е достатъчно да вземем за база само случая $n = 6$: от него чрез стъпката се получават само числата 9, 12, 15, 18, 21 и т.н. (тоест само кратните на 3). Ето защо е нужно да разгледаме в базата още следните два случая:
$n = 7$ — оттук се получават числата 10, 13, 16 и т.н. (които дават остатък 1 при деление на 3);
$n = 8$ — оттук се получават числата 11, 14, 17 и т.н. (които дават остатък 2 при деление на 3).
Взети заедно, трите числови редици изчерпват всички цели числа $n \geq 6$.

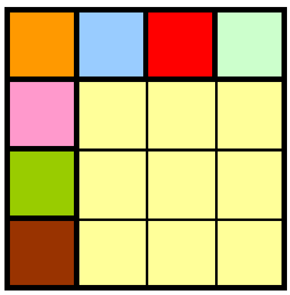
В повечето задачи, решавани чрез математическа индукция, базата се проверява тривиално. Тук не е така: трите търсени разрязвания не се намират много лесно. Един възможен подход е да разрежем дадения квадрат на повече от n квадратчета, а после да окрупним някои от тях в по-големи квадрати. Завишения брой ("повече от n") избираме да бъде квадрат на цяло число, защото тогава разрязването се постига лесно — успоредно на страните на дадения квадрат, като разрезите са равномерно отдалечени един от друг. Конкретните резултати от този подход са показани на трите чертежа.



$n = 6$



$n = 7$



$n = 8$

Задача 6. Множеството от всички прави в равнината е неизброимо. Това се доказва така:
1) В равнината въвеждаме правоъгълна координатна система.
2) Всяка права, успоредна на ординатната ос, има уравнение от вида $x = c$.
Множеството от тези прави означаваме с M.
3) На всяко реално число c съпоставяме правата $x = c$. Това е биекция между $\mathbb{R}$ и M.
4) Понеже множеството $\mathbb{R}$ е неизброимо, то от биекцията следва, че и M е неизброимо.
5) Множеството от всички прави е неизброимо като надмножество на неизброимото M.

СХЕМА ЗА ТОЧКУВАНЕ

Задача 1 се оценява с 20 точки само ако е решена пълно. Частични решения не носят точки.

Задача 2 се оценява с 20 точки — по 2,5 точки за всяка от следните осем стъпки:
— проверка за антирефлексивност;
— проверка за симетричност;
— проверка за транзитивност;
— извода, че дадената релация е строга наредба;
— проверка за силна антисиметричност;
— извода, че дадената релация не е строга наредба;
— намирането на максималните елементи;
— намирането на минималните елементи.

Задача 3 се оценява с 20 точки, разпределени по следния начин:
— проверка за рефлексивност: 3 точки;
— проверка за симетричност: 3 точки;
— проверка за транзитивност: 4 точки;
— преформулиране на релацията в термините на равенство на четностите: 5 точки;
— формално описание на класовете на еквивалентност: 5 точки.

Задача 4 се оценява с 20 точки — по 5 точки за всяка от следните четири стъпки:
— дефиниране на подходящо изображение (биекция);
— доказване, че изображението е сюрекция;
— доказване, че изображението е инекция;
— пресмятане на броя на множествата X.
Точките могат да се дават и на по-малки части в зависимост от подетапите на всяка стъпка.
Ако задачата се решава с принципа за включване и изключване, точките се разпределят така:
— за общата идея (структурата на решението): 3 точки;
— за пресмятане на броя на елементите на $A \cup B$: 3 точки;
— за пресмятане на броя на подмножествата на $A \cup B$: 3 точки;
— за пресмятане на броя на подмножествата на A: 3 точки;
— за пресмятане на броя на подмножествата на B: 3 точки;
— за прибавянето на единица заради празното множество: 3 точки;
— за заместване в принципа за включване и изключване: 2 точки.

Задача 5 се оценява с 20 точки:
— за индуктивната стъпка: 5 точки;
— по 5 точки за всеки от трите случая в базата.

Задача 6 се оценява с 20 точки — по 4 точки за всяка от петте стъпки в решението.

Примерни задачи за самоподготовка

Домашно № 3 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Информатика", I курс, летен семестър на 2020/2021 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
получени точки					
максимум точки	*20*	*20*	*20*	*40*	*100*

Задача 1. Пълно ли е множеството от булеви функции $\left\{ \wedge \,;\, \oplus \,;\, \vee \right\}$?

Задача 2. Шеферова ли е булевата функция $f(x,y,z) = (10111110)$?

Задача 3. Намерете съвършената дизюнктивна нормална форма на булевата функция $f(x,y,z) \equiv \big((x \rightarrow y) \oplus z\big) \leftrightarrow x$.

Задача 4. Нека G е неориентиран граф със сто върха — целите числа от 1 до 100 вкл. Между два различни върха има ребро тогава и само тогава, когато едното число дели другото. (Числата трябва да са различни, тоест графът не съдържа примки.)

а) Намерете кликовото число на G. **(6 точки)**
б) Намерете хроматичното число на G. **(6 точки)**
в) Намерете хроматичния индекс на G. **(6 точки)**
г) Двуделен граф ли е G ? **(3 точки)**
д) Планарен граф ли е G ? **(3 точки)**
е) G съдържа ли хамилтонов път? **(5 точки)**
ж) G съдържа ли хамилтонов цикъл? **(3 точки)**
з) G съдържа ли ойлеров път? **(4 точки)**
и) G съдържа ли ойлеров цикъл? **(4 точки)**

СХЕМА ЗА ТОЧКУВАНЕ

Всяка от първите три задачи в домашното носи по 20 точки само ако е решена изцяло, тоест частични решения не се оценяват.

Четвъртата задача се оценява по подусловия, като всяко от първите три подусловия носи по 6 точки:

— за формулиране на верен отговор (число): 1 точка;
— за доказване на долната граница на отговора: 2 точки;
— за доказване на горната граница на отговора: 3 точки.

Останалите подусловия на четвъртата задача носят точки само ако са решени изцяло (тоест ако имат верен и обоснован отговор).

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Всички булеви функции от множеството $\{\wedge\,;\,\oplus\,;\,\vee\}$ запазват нулата:

$$0 \wedge 0 = 0, \quad 0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \vee 0 = 0.$$

От критерия на Пост следва, че това множество не е пълно.

Задача 2. За шеферовите функции е в сила опростен вариант на критерия на Пост: Една булева функция е шеферова, ако и само ако не запазва нулата, не запазва единицата и не е самодвойствена. За функцията $f(x,\,y,\,z) = (10111110)$ проверката е непосредствена:

— f не запазва нулата: $f(0,\,0,\,0) = 1 \neq 0$ (гледаме първия елемент на вектора);

— f не запазва единицата: $f(1,\,1,\,1) = 0 \neq 1$ (гледаме последния елемент на вектора);

— f не е самодвойствена, защото не съвпада с двойствената си функция, както става ясно от разликата във векторите на двете функции: $(10111110) \neq (10000010)$. Двойствения вектор получаваме, като запишем дадения вектор отзад напред и обърнем всички негови елементи (всички единици заменяме с нули, а всички нули заменяме с единици).

Трите изисквания са изпълнени, значи функцията $f(x,\,y,\,z) = (10111110)$ е шеферова.

Задачата можем да решим и иначе — като изразим чрез f множество от булеви функции, за което знаем, че е пълно, например $\{\neg\,;\,\vee\}$:

$$\neg\, x \;\equiv\; f(x,\,x,\,x);$$

$$x \vee y \;\equiv\; f(x,\,y,\,\neg\, x) \;\equiv\; f\big(x,\,y,\,f(x,\,x,\,x)\big).$$

Първата формула (изразяването на отрицанието) важи еднакво за всички шеферови функции. Втората формула (за включващата дизюнкция) е различна за различните шеферови функции и се намира с опитване. Всяка от двете формули се доказва чрез непосредствена проверка, извършена например по табличния метод.

Задача 3. Ще намерим съвършената дизюнктивна нормална форма на булевата функция $f(x,y,z) \;\equiv\; \big((x \rightarrow y) \oplus z\big) \leftrightarrow x$, като първо представим функцията в табличен вид:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

От редовете, в които f има стойност 1, съставяме съвършената дизюнктивна нормална форма:

$$f \;\equiv\; \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,z \vee x\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,\overline{z}\,.$$

Задача 4. а) Ако числата на върховете от коя да е клика подредим в нарастващ ред, ще получим редица, в която всеки член дели всички следващи членове. Кликовото число на G е дължината на най-дълга редица от този вид. Ограничени сме до целите числа от 1 до 100 вкл., затова трябва да започнем редицата с възможно най-малко число и всеки път да го умножаваме с възможно най-малки множители (по-големи от 1). Тоест трябва да започнем с числото 1 и на всяка стъпка да го умножаваме по 2. Получаваме редицата от степените на двойката: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Това е най-дългата редица от този вид и най-голямата клика в графа. Следователно кликовото число на графа е 7 (дължината на получената редица).

б) Хроматичното число винаги е по-голямо или равно на кликовото число, т.е. нужни са поне седем цвята за боядисване на върховете на графа така, че краищата на всяко ребро да са разноцветни. От друга страна, седем цвята стигат, както показва следното оцветяване: боядисваме в цвят k целите числа от интервала $\left[2^{k-1}\,;\,2^{k}\right)$, $1 \leq k \leq 7$; от последния интервал оцветяваме само числата под 100 вкл. Така частното на всеки две различни числа от един цвят, т.е. от един интервал, е строго между 1 и 2 (ако делим по-голямото число на по-малкото), затова частното е дробно число, поради което две числа от един цвят не се делят едно на друго, значи не са свързани с ребро. Следователно краищата на всяко ребро на графа са разноцветни. Окончателно, хроматичното число е 7.

в) Хроматичният индекс е по-голям или равен на най-голямата от степените на върховете, а тя е 99, защото върхът 1 е свързан с всички други върхове (единицата дели всички числа). Ето защо са нужни поне 99 цвята за ребрата на графа. От друга страна, 99 цвята са достатъчни, както показва следното оцветяване: боядисваме реброто между върховете k и r в цвят $\left|k-r\right|$. Щом графът има сто върха (числата 1, 2, 3, … , 100) и няма примки, то $\left|k-r\right|$ е от 1 до 99 вкл. (тоест номерата на цветовете, предписани от правилото за боядисване на ребрата, са допустими). Ребрата, излизащи от върха k, имат цветове измежду следните:

— 1, 2, 3, … , $k-1$ — при $r<k$;

— k, $2k$, $3k$ и т.н. — при $r=2k$, $r=3k$, $r=4k$ и т.н.

Вижда се, че номерата на цветовете не се повтарят, тоест всички ребра, излизащи от върха k, имат различни цветове. Това важи за всеки връх k, тоест предложеното боядисване е правилно. Окончателно, хроматичният индекс на графа е 99.

г) Графът не е двуделен: съдържа цикъл с нечетна дължина, например 1 — 2 — 4 — 1. До същия извод се стига и посредством хроматичното число: щом то е 7, то два цвята не стигат за оцветяване на върховете, следователно графът не е двуделен.

д) Щом кликовото число е 7, то графът съдържа клика със седем, а значи и с пет върха (например 1, 2, 4, 8, 16). От теорията се знае, че граф с такава клика не може да е планарен. Следователно и нашият граф не е планарен.

е) Върховете 97, 89 и 83 са от първа степен, защото това са прости числа между 50 и 100: те имат само един делител — единицата (и себе си, но графът няма примки), а техните кратни са по-големи от 100. Щом графът съдържа поне три върха от първа степен (числата 97, 89 и 83), в него не може да има хамилтонов път: върховете от първа степен трябва да са краища на пътя, а всеки път има само два края. Ето защо даденият граф не съдържа хамилтонов път.

ж) Щом графът не съдържа хамилтонов път, той не съдържа и хамилтонов цикъл.

з), и) Графът съдържа поне три върха от нечетна (първа) степен — числата 97, 89 и 83. Затова в него няма нито ойлеров път, нито ойлеров цикъл.