Събитията от вида $A = H_i \cup H_j \cup \dots$, които са обединение на няколко събития от разделянето образуват *алгебра от събития*. Наричаме я *породена от разделянето.*

Например, алгебра на събития образуват четирите събития $\Omega, \emptyset, A, A^c$, където $A$ е дадено събитие. $(\Omega = A \cup A^c,\ \emptyset = \Omega^c)$

Възможно е някое събитие от разделянето да съдържа само едно елементарно събитие. Максимален брой на събития в разделянето имаме, когато всяко събитие от разделянето съдържа само по едно елементарно събитие. Наричаме я *максимална алгебра.*

Другият краен случай е с минимален брой събития в разделянето равен на 1 и това събитие съвпада с цялото опитно пространство. Събитията $\Omega$ и $\emptyset$ образуват *тривиалната алгебра* от събития.

## 1.3.2 Вероятност

**Определение 1.17** *Вероятността $P$ е функция, дефинирана върху алгебрата $\mathcal{A}$ от подмножества $A$ на $\Omega$ и приемаща стойности в интервала $[0, 1]$, която удовлетворява следните* аксиоми*:*

1. $P(\Omega) = 1$ *(нормирана);*
2. $P(A) \geq 0$ *за всяко събитие* $A \in \mathcal{A}$ *(неотрицателна);*
3. *Ако* $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ *и* $A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall i, j$, *то* $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ *($\sigma$ - адитивна или изброимо адитивна).*

Необходимо е $P(A)$ да е определена за *наблюдаемите* събития или за зададена *алгебра от събития* $\mathcal{A}$.

Тройката $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ наричаме *вероятностно пространство*, математически модел на случаен експеримент.

Аксиомите (на Колмогоров), чрез които дефинирахме вероятността ни дават ясен математически модел за свойствата на вероятностната функция, но не ни казват как бихме могли да зададем вероятности в конкретно извадково пространство. Това е въпрос на моделиране и стремежът е да изберем модел, който описва най-добре действителността.

**Пример 1.18** *Хвърляме монета,* $\Omega = \{\text{ези}, \text{тура}\}$*. Ако монетата е правилна, то* $P(\text{ези}) = P(\text{тура})$ *и това не следва от аксиомите, а от модела за монета ("правилна"), който сме избрали. От аксиомите обаче, следва че* $P(\text{ези}) = P(\text{тура}) = 0.5$.

*Ако изберем друг модел – за "неправилна" монета, може например* $P(\text{ези}) = 0.2$, $P(\text{тура}) = 0.8$*, което също е съобразено с аксиомите.*

**Пример 1.19** *(Дискретна вероятност): Нека* $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ *е крайно и* $\mathcal{A}$ *е сигма алгебрата от всички подмножества на* $\Omega$*. Нека* $p_1, \dots, p_n$ *са неотрицателни числа и* $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$*.* $\forall A \in \mathcal{A}$*, дефинираме* $P(A) = \sum\limits_{i:\omega_i \in A} p_i$ *($\omega_i$ са елементарните събития). Тогава $P$ е вероятностна функция. Това е в сила и когато $\Omega$ е безкрайно изброимо множество.*

*Доказателството, че $P$ удовлетворява първите две аксиоми е очевидно. Ще покажем, че удовлетворява и третата:* $P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{j:\omega_j \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i} p_{jk} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j:\omega_j \in A_i} p_j = \sum_{i=1}^{k} P(A_k)$.

**Пример 1.20** *Нека алгебрата на събитията е породена от разделянето $H_1, H_2, \ldots, H_m$. Вероятностите $P(H_i)$ на събитията от разделянето определяме като отношението на двете числа: броя на благоприятните към броя на всички възможни елементарни събития (класическа вероятност). Всяко друго събитие $A$ от алгебрата $\mathcal{A}$ е резултат от обединение на някои от тях ($A = H_i \cup H_j \cup \ldots$). За вероятността на $A$ имаме $P(A) = P(H_i) + P(H_j) + \ldots$*

**Пример 1.21** *(Геометрична вероятност): Дадена е мишена за дартс, която се състои от пет концентрични кръга, като разликата в радиусите на всеки два поредни е една и съща. Радиусът на най-големия е $r$, а на най-малкия $r/5$. Предполагаме, че (неумел) играч хвърля стреличка и уцелва напълно случайно някъде в мишената. Как да дефинираме вероятността за улучване на всеки от пръстените на мишената?*

*Смислено е да приемем, че вероятността да уцелим някаква част от мишената трябва да е пропорционална на лицето (площта) на тази част. Така вероятността да бъде улучен най-малкия кръг ще бъде $P(5points) = \frac{\pi r^2/25}{\pi r^2} = 1/25$. Пресметнете и останалите вероятности.*

От аксиомите, чрез които дефинирахме вероятността като функция, следват някои други нейни свойства, които са важни и удобни за практическото пресмятане на вероятности. Ще разгледаме някои от тях в следните две теореми:

**Теорема 1.1** *Пряко следствие от аксиомите за вероятността са следните свойства:*

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(A) \leq 1$ *за всяко събитие* $A$.
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ *за всяко събитие* $A$.

*Доказателство*: $\Omega = A \cup \bar{A} \Rightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$, но $A \cap \bar{A} = \emptyset \Rightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$, откъдето получаваме свойство 3). Оттук $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1$ (свойство 2)). Накрая, $1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 + P(\emptyset)$, откъдето $P(\emptyset) = 0$.

**Теорема 1.2** *В сила са следните свойства на вероятностната функция:*

1. $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A)$.
2. $P(B \cup A) = P(B) + P(A) - P(B \cap A)$.
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ *(монотонност).*

*Доказателство*: $B = \{B \cap A\} \cup \{B \cap \bar{A}\}$ и $\{B \cap A\} \cap \{B \cap \bar{A}\} = \emptyset$, откъдето $P(B) = P(\{B \cap A\} \cup \{B \cap \bar{A}\}) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$, което води до свойство 1). $B \cup A = A \cup \{B \cap \bar{A}\}$ и $A \cap \{B \cap \bar{A}\} = \emptyset$, тогава $P(B \cup A) = P(A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B) + P(A) - P(B \cap A)$ (свойство 2)). $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ и следователно $0 \leq P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)$, което показва монотонността.