19. Перспектива

Проекционният апарат на метода перспектива се състои от:

1) Две взаимно перпендикулярни равнини π и $\sum$.

Проекционната равнина π се нарича *картинна равнина* (екран).

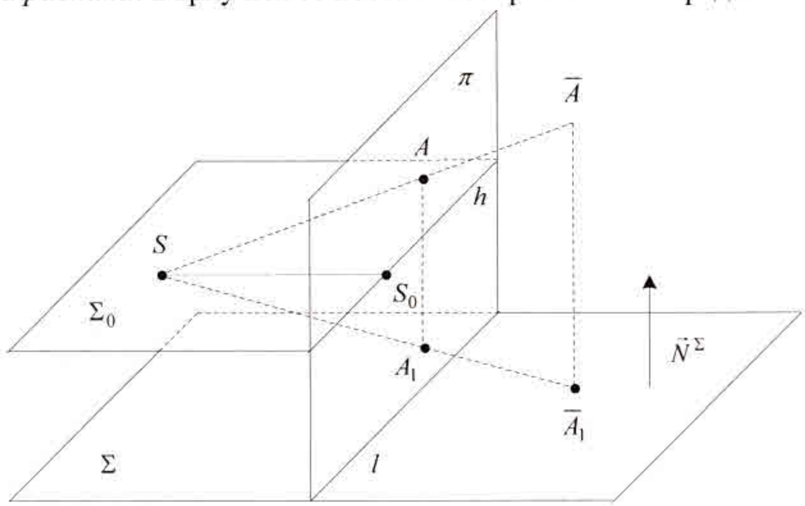
Равнината $\sum$ се нарича *предметната равнина*. Върху нея се поставя изобразяваният предмет.

Правата $l = \pi \cap \Sigma$ се нарича *основа на картината*.

2) Проекционен център S, $(S \notin \Sigma, \pi)$ който е крайна точка – *точка на гледане*.

3) Петата S_0 на перпендикуляра спуснат от проекционния център S към проекционната равнина π се нарича *главна точка на картината* ($S_0 \in \pi,\ SS_0 \perp \pi$).

Разстоянието от центъра S до S_0 – $d = |SS_0| = d(S, \pi)$ се нарича *дистанция*.



4) Нека Σ_0 е равнината през S, успоредна на $\sum$. Правата $h = \Sigma_0 \cap \pi$ се нарича *хоризонт*. Очевидно $S_0 \in h$ и $h \| l$.

Проекционният център S и изобразяваният предмет се разполагат в различни полупространства относно картинната равнина π.

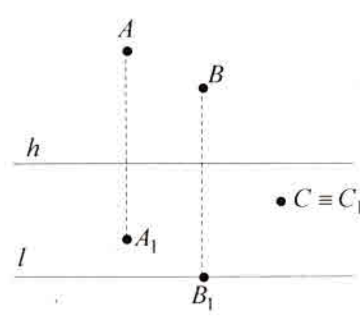
I. Изобразяване на крайни точки и прави

1) Нека $\overline{A}$ е крайна точка и $\overline{A}_1$ е ортогоналната проекция на $\overline{A}$ в $\sum$, ($\overline{A}\overline{A}_1 \perp \Sigma$, $\overline{A}_1 \in \Sigma$). Точката $A = S\overline{A} \cap \pi$ се нарича *перспектива* на точката $\overline{A}$, а $A_1 = S\overline{A}_1 \cap \pi$ – *вторична проекция* на $\overline{A}$.

Правата $\overline{A}\overline{A}_1$ е перпендикулярна на $\sum$ и тъй като равнината π също е перпендикулярна на $\sum$, то $\overline{A}\overline{A}_1$ е успоредна на π. Тогава пресечницата AA_1 на π с равнината $\left(S, \overline{A}, \overline{A}_1\right)$ е успоредна на $\overline{A}\overline{A}_1$, т.е. $AA_1 \perp \dot{\Sigma}$. Следователно $AA_1 \perp h$ и $AA_1 \perp l$.

Така в перспектива точка $\overline{A}$ се задава от наредената двойка точки (A, A_1), като $AA_1 \perp h$.

Обратно, ако (A, A_1) са двойка точки от π, такива че $AA_1 \perp h$, то съществува единствена точка $\overline{A}$ в пространството, за която A е перспектива и A_1 е вторична проекция. Наистина, ако $\overline{A}_1 = SA_1 \cap \Sigma$ и p е перпендикулярът от $\overline{A}_1$ към $\sum$, то $p \cap SA = \overline{A}$.



Ако $\overline{B}$ е точка от π, то $\overline{B} \equiv B$ и $\overline{B}_1$ лежи на основата l.

$\overline{B}(B, B_1) \in \pi$ $\quad \overline{C}(C, C_1) \in \Sigma$

Ако $\overline{C}$ е точка от $\sum$, то $\overline{C} \equiv \overline{C}_1$ и оттук $C \equiv C_1$. Следователно:

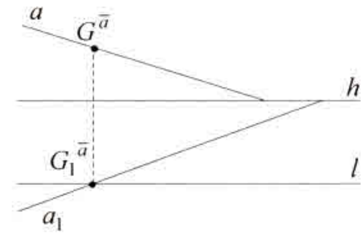
$$\overline{B}(B, B_1) \in \pi \iff B_1 \in l,\ BB_1 \perp h; \qquad \overline{C}(C, C_1) \in \Sigma \iff C \equiv C_1.$$

2) Нека $\overline{a}$ е крайна права и $\overline{a}_1$ е ортогоналната œ проекция в $\sum$. Правата $a = (S, \overline{a}) \cap \pi$ се нарича *перспектива* на $\overline{a}$, а правата $a_1 = (S, \overline{a}_1) \cap \pi$ – *вторичен образ* на $\overline{a}$.

Така в перспектива правата $\overline{a}$ се задава еднозначно от наредената двойка прави $(a,a_1)-\overline{a}(a,a_1)$.

Ясно е, че точката $\overline{A}(A,A_1)$ лежи на правата $\overline{a}(a,a_1)$, точно когато $A\in a,\ A_1\in a_1,\ AA_1\perp h$.

Стъпка на правата $\overline{a}$ се нарича пресечната ѝ точка $\overline{G}^{\overline{a}}$ с равнината π. Тъй като $\overline{G}^{\overline{a}}\in\pi$, то $\overline{G}_1^{\overline{a}}\in l$. От друга страна $\overline{G}^{\overline{a}}\in\overline{a}$, т.е. $G^{\overline{a}}\in a$ и $G_1^{\overline{a}}\in a_1$. Така ако е зададена правата $\overline{a}(a,a_1)$, то перспективата и вторичният образ на стъпката ѝ се определят по следния начин: $G_1^{\overline{a}}=a_1\cap l$, $G^{\overline{a}}\in a$, $G^{\overline{a}}G_1^{\overline{a}}\perp h$.



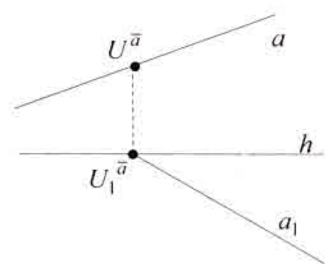
II. Изобразяване на безкрайни точки и безкрайни прави

Перспективата $U^{\overline{a}}$ на безкрайната точка $\overline{U}^{\overline{a}}$ на правата $\overline{a}$ се нарича *убежна точка на правата* $\overline{a}$.

Перспективата $u^{\overline{\alpha}}$ на безкрайната права $\overline{u}^{\overline{\alpha}}$ на равнината $\overline{\alpha}$ се нарича *убежна права на равнината* $\overline{\alpha}$.

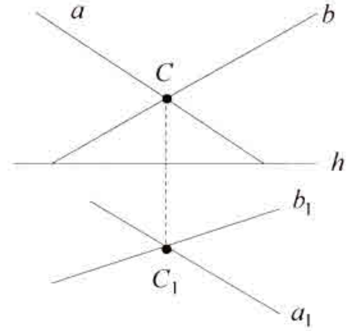
1. Изобразяване на безкрайни точки от Σ. Нека $\overline{U}^{\overline{m}}\in\Sigma$. Ако $\overline{U}_1^{\overline{m}}$ е ортогоналната проекция на $\overline{U}^{\overline{m}}$ в Σ, то $U^{\overline{m}}\equiv U_1^{\overline{m}}$ и $S\overline{U}^{\overline{m}}\cap\pi=U^{\overline{m}}=U_1^{\overline{m}}$. Правата $S\overline{U}^{\overline{m}}$ минава през S и е успоредна на $\overline{m}$. Следователно тя лежи в равнината Σ_0. Тогава точката $U^{\overline{m}}$ ще лежи върху h. В общия случай правата $S\overline{U}^{\overline{m}}$ не е успоредна на π и точката $U^{\overline{m}}\equiv U_1^{\overline{m}}$ е крайна. И така за убежната точка $U^{\overline{m}}(U^{\overline{m}},U_1^{\overline{m}})$ на една права $\overline{m}$, която е успоредна или лежи в предметната равнина Σ имаме $U^{\overline{m}}\equiv U_1^{\overline{m}}\in h$.

2. Нека сега $\overline{a}(a,a_1)$ е произволна крайна права. Ортогоналната проекция $\overline{U}_1^{\overline{a}}$ на $\overline{U}^{\overline{a}}$ в Σ е безкрайна точка, тъй като правата, съединяваща $\overline{U}^{\overline{a}}$ с безкрайната точка P^{∞}, която е перпендикулярна на Σ, е безкрайна права и ще пресича Σ в безкрайна точка. Следователно вторичният образ $U_1^{\overline{a}}$ на точката $\overline{U}^{\overline{a}}$ ще лежи върху h. Освен това $U_1^{\overline{a}}\in a_1$, $U^{\overline{a}}\in a$ и $U_1^{\overline{a}}U^{\overline{a}}\perp h$.



3. Ако $\overline{\alpha}$ е равнина и $\overline{u}^{\overline{\alpha}}$ е безкрайната ѝ права, от горните разсъждения следва, че вторичната проекция $u_1^{\overline{\alpha}}$ съвпада с h. В общия случай (когато $\overline{\alpha}$ не е успоредна на π), перспективата $u^{\overline{\alpha}}$ на $\overline{u}^{\overline{\alpha}}$ е крайна права – $u^{\overline{\alpha}}=\pi\cap\left(S\overline{u}^{\overline{\alpha}}\right)$, като равнината $\left(S\overline{u}^{\overline{\alpha}}\right)$ минава през S и е успоредна на $\overline{\alpha}$. Следователно $\overline{u}^{\overline{\alpha}}(u^{\overline{\alpha}},h)$.

Взаимно положение на две прави



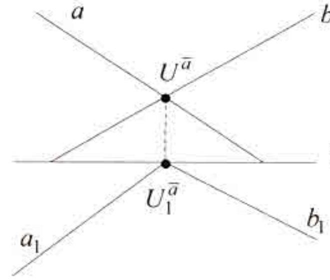
Нека в картинната равнина π са зададени крайните прави $\overline{a}(a,a_1)$ и $\overline{b}(b,b_1)$.

а) Нека $\overline{a}\cap\overline{b}=\overline{C}$, като $\overline{C}(C,C_1)$ е крайна точка. Тогава $a\cap b=C$, $a_1\cap b_1=C_1$ и $CC_1\perp h$, като $C_1\notin h$. Следователно необходимите и достатъчни условия, две крайни прави $\overline{a}(a,a_1)$ и $\overline{b}(b,b_1)$ да са *пресекателни* са:

$$a\cap b=C,\ a_1\cap b_1=C_1,\ CC_1\perp h,\ C_1\notin h.$$

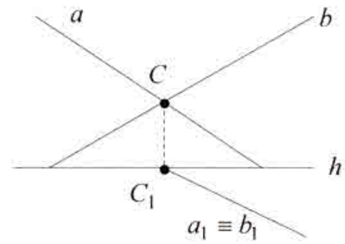
б) Нека $\overline{a} \parallel \overline{b}$. Тогава $\overline{a} \cap \overline{b} = \overline{U}^{\overline{a}} \equiv \overline{U}^{\overline{b}}$. Оттук следва, че $a \cap b = U^{\overline{a}}$ и $a_1 \cap b_1 = U_1^{\overline{a}}$, като $U_1^{\overline{a}} \in h$ и $U^{\overline{a}}U_1^{\overline{a}} \perp h$. Следователно необходимите и достатъчни условия, две крайни прави $\overline{a}(a, a_1)$ и $\overline{b}(b, b_1)$ да са *успоредни* са:

$$a \cap b = U^{\overline{a}},\ a_1 \cap b_1 = U_1^{\overline{a}} \in h,\ U^{\overline{a}}U_1^{\overline{a}} \perp h.$$



Да отбележим, че ако правите $\overline{a}$ и $\overline{b}$ лежат една равнина през *S*, то $a \equiv b$. Тогава $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ще се пресичат, точно когато $a_1 \cap b_1 = C_1 \notin h$ и ще са успоредни, когато $a_1 \cap b_1 = C_1 \in h$.

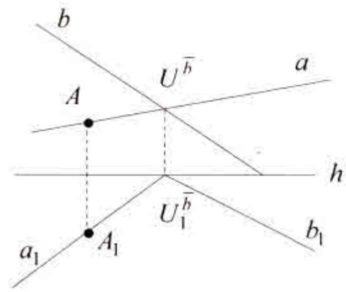
Ако правите $\overline{a}$ и $\overline{b}$ лежат една равнина, перпендикулярна на $\sum$, то $a_1 \equiv b_1$. Нека $C = a \cap b$ и $C_1 = a_1 \cap h$. Тогава $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ще се пресичат, точно когато $CC_1 \not\perp h$ и ще са успоредни, когато $CC_1 \perp h$.



Направените изводи ни дават възможност да решим следната:

Задача. Дадени са точка $\overline{A}(A, A_1)$ и права $\overline{b}(b, b_1)$, $\overline{A} \notin \overline{b}$. Да се намери права $\overline{a}(a, a_1)$ такава, че $\overline{A} \in \overline{a}$ и $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Решение: От $\overline{a} \parallel \overline{b}$ следва, че $\overline{U}^{\overline{a}} \equiv \overline{U}^{\overline{b}}$. Тогава $b_1 \cap h = U_1^{\overline{b}}$, а $U^{\overline{b}} \in b$, като $U_1^{\overline{b}}U^{\overline{b}} \perp h$. Тъй като $\overline{a} = \overline{A}\overline{U}^{\overline{a}}$, то $a = AU^{\overline{a}}$, $a_1 = A_1U_1^{\overline{a}}$ и правата $\overline{a}$ се задава от двойката (a, a_1), т.е. $\overline{a}(a, a_1)$.



III. Задаване на равнина.

Една равнина може да бъде зададена чрез три свои неколинеарни точки, или чрез неколинеарни точка и права от нея, чрез две пресичащи се прави или чрез две успоредни прави.

Обикновено в перспектива една равнина $\overline{\alpha}$ се задава с убежната си права $\overline{u}^{\overline{\alpha}}(u^{\overline{\alpha}}, h)$ и пресечницата œ с проекционната равнина π – $\overline{g}^{\overline{\alpha}}(g^{\overline{\alpha}}, g_1^{\overline{\alpha}})$.

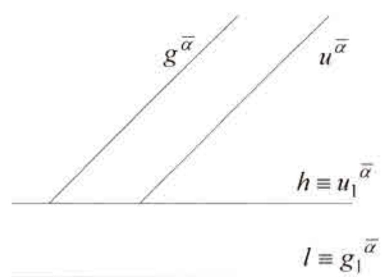
Правата $\overline{g}^{\overline{\alpha}}$ се нарича *диря* (*следа*) на $\overline{\alpha}$.

Тъй като $\overline{g}^{\overline{\alpha}}$ е права от π, то $g^{\overline{\alpha}} \equiv \overline{g}^{\overline{\alpha}}$ и $\overline{g}_1^{\overline{\alpha}} \equiv l$.

От друга страна $u^{\overline{\alpha}} = \pi \cap \left(S\overline{u}^{\overline{\alpha}}\right)$, като равнината $\left(S\overline{u}^{\overline{\alpha}}\right)$ е успоредна на $\overline{\alpha}$.

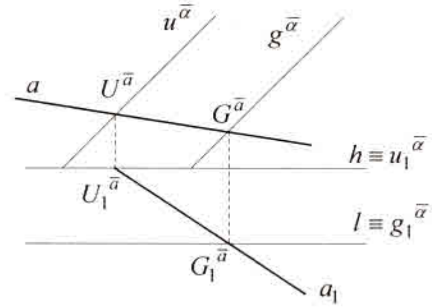
Следователно правите $g^{\overline{\alpha}}$ и $u^{\overline{\alpha}}$ са успоредни, като пресечници на π с две успоредни равнини, т.е. $g^{\overline{\alpha}} \parallel u^{\overline{\alpha}}$.

И така в перспектива една равнина $\overline{\alpha}$ се задава еднозначно чрез наредената двойка прави $[\overline{u}^{\overline{\alpha}}, \overline{g}^{\overline{\alpha}}]$ или



$$\overline{\alpha}[u^{\overline{\alpha}}, g^{\overline{\alpha}}],\ \text{като}\ g^{\overline{\alpha}} \parallel u^{\overline{\alpha}},\ \text{а}\ u_1^{\overline{\alpha}} \equiv h\ \text{и}\ \overline{g}_1^{\overline{\alpha}} \equiv l.$$

Инцидентност на права и равнина



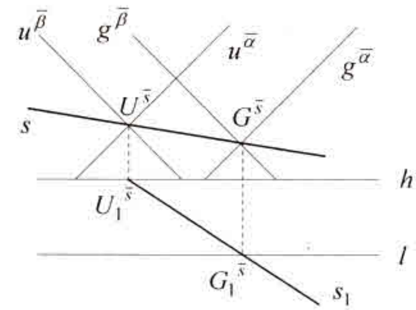
Ще намерим критерий една права $\overline{a}(a, a_1)$ да лежи в дадена равнина $\overline{\alpha}[u^{\overline{\alpha}}, g^{\overline{\alpha}}]$.

Нека $\overline{a} \in \overline{\alpha}$. Тогава $\overline{U}^{\overline{a}} \in \overline{u}^{\overline{\alpha}}$ и следователно $U^{\overline{a}} \in u^{\overline{\alpha}}$. От друга страна $\overline{a} \cap \pi = \overline{G}^{\overline{a}}$, а $\overline{\alpha} \cap \pi = \overline{g}^{\overline{\alpha}}$, така че $\overline{G}^{\overline{a}} \in \overline{g}^{\overline{\alpha}}$ и $G^{\overline{a}} \in g^{\overline{\alpha}}$.

Обратно, ако $U^{\overline{a}} \in u^{\overline{\alpha}}$ и $G^{\overline{a}} \in g^{\overline{\alpha}}$, то точките $\overline{U}^{\overline{a}}$ и $\overline{G}^{\overline{a}}$ от правата $\overline{a}$ лежат в равнината $\overline{\alpha}$, откъдето следва, че $\overline{a} \in \overline{\alpha}$.

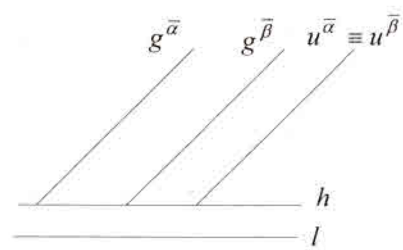
Пресечница на две равнини

Полученият критерий дава възможност да се намери пресечницата $\overline{s}$ на две равнини $\overline{\alpha}[u^{\overline{\alpha}}, g^{\overline{\alpha}}]$ и $\overline{\beta}[u^{\overline{\beta}}, g^{\overline{\beta}}]$ – $\overline{s} = \overline{\alpha} \cap \overline{\beta}$.



От $\overline{s} \in \overline{\alpha}$ следва, че $U^{\overline{s}} \in u^{\overline{\alpha}}$, $G^{\overline{s}} \in g^{\overline{\alpha}}$, а от $\overline{s} \in \overline{\beta}$ – $U^{\overline{s}} \in u^{\overline{\beta}}$, $G^{\overline{s}} \in g^{\overline{\beta}}$. Тогава $u^{\overline{\alpha}} \cap u^{\overline{\beta}} = U^{\overline{s}}$, $g^{\overline{\alpha}} \cap g^{\overline{\beta}} = G^{\overline{s}}$ и $s = U^{\overline{s}}G^{\overline{s}}$. За точките върху вторичната проекция на $\overline{s}$ имаме: $U_1^{\overline{s}} \in h$, $U^{\overline{s}}U_1^{\overline{s}} \perp h$ и $G_1^{\overline{s}} \in l$, $G^{\overline{s}}G_1^{\overline{s}} \perp h$. И така ако $\overline{s}(s, s_1)$ е пресечницата на $\overline{\alpha}[u^{\overline{\alpha}}, g^{\overline{\alpha}}]$ и $\overline{\beta}[u^{\overline{\beta}}, g^{\overline{\beta}}]$, то: $s = U^{\overline{s}}G^{\overline{s}}$, $s_1 = U_1^{\overline{s}}G_1^{\overline{s}}$.

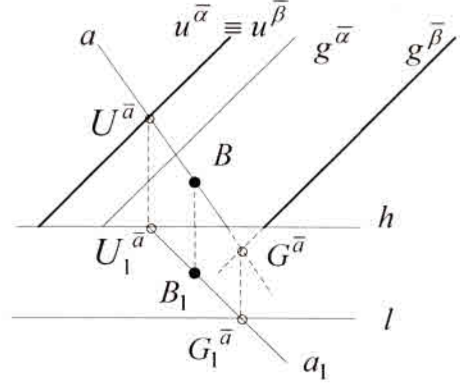
Успоредни равнини



Ако равнините $\overline{\alpha}[u^{\overline{\alpha}}, g^{\overline{\alpha}}]$ и $\overline{\beta}[u^{\overline{\beta}}, g^{\overline{\beta}}]$ са успоредни, то $\overline{u}^{\overline{\alpha}} \equiv \overline{u}^{\overline{\beta}}$ и следователно $u^{\overline{\alpha}} \equiv u^{\overline{\beta}}$. Обратно, ако $u^{\overline{\alpha}} \equiv u^{\overline{\beta}}$, то $\overline{u}^{\overline{\alpha}} \equiv \overline{u}^{\overline{\beta}}$, откъдето $\overline{\alpha} \parallel \overline{\beta}$. Тъй като $g^{\overline{\alpha}} \parallel u^{\overline{\alpha}}$ и $g^{\overline{\beta}} \parallel u^{\overline{\beta}}$, то $g^{\overline{\alpha}} \parallel g^{\overline{\beta}}$, като при $\overline{\alpha} \neq \overline{\beta}$ имаме $g^{\overline{\alpha}} \neq g^{\overline{\beta}}$. И така:

$$\overline{\alpha}[u^{\overline{\alpha}}, g^{\overline{\alpha}}] \parallel \overline{\beta}[u^{\overline{\beta}}, g^{\overline{\beta}}] \iff u^{\overline{\alpha}} \equiv u^{\overline{\beta}},\ g^{\overline{\alpha}} \parallel g^{\overline{\beta}},\ g^{\overline{\alpha}} \neq g^{\overline{\beta}}.$$

Горния резултат можем да използваме за определянето на равнина $\overline{\beta}[u^{\overline{\beta}}, g^{\overline{\beta}}]$, минаваща през дадена точка $\overline{B}(B, B_1)$ и успоредна на дадена равнина $\overline{\alpha}[u^{\overline{\alpha}}, g^{\overline{\alpha}}]$. Тъй като при $\overline{\alpha} \parallel \overline{\beta}$ имаме $u^{\overline{\alpha}} \equiv u^{\overline{\beta}}$, то трябва да намерим само $g^{\overline{\beta}} \parallel u^{\overline{\alpha}}$. Правата $g^{\overline{\beta}}$ минава през стъпката $G^{\overline{a}}$ на всяка права $\overline{a} \in \overline{\beta}$. Убежната точка $U^{\overline{a}}$ на тази права лежи върху $u^{\overline{\alpha}} \equiv u^{\overline{\beta}}$. Тъй като $\overline{B} \in \overline{\beta}$, то $\overline{B} \in \overline{a}$. Оттук следва търсеното построение:



Избираме $U^{\overline{a}} \in u^{\overline{\alpha}}$, $U_1^{\overline{a}} \in h$, $U^{\overline{a}}U_1^{\overline{a}} \perp h$;

Определяме правата $\overline{a}(a, a_1) = \overline{B}\overline{U}^{\overline{a}}$, $a = BU^{\overline{a}}$, $a_1 = B_1U_1^{\overline{a}}$;

Намираме стъпката $\overline{G}^{\overline{a}}(G^{\overline{a}}, G_1^{\overline{a}})$ на $\overline{a}$:

$$G^{\overline{a}} \in a, G_1^{\overline{a}} \in l,\ G^{\overline{a}}G_1^{\overline{a}} \perp h.$$

Правата $g^{\overline{\beta}}$ е определена от $G^{\overline{a}} \in g^{\overline{\beta}}$, $g^{\overline{\beta}} \parallel u^{\overline{\alpha}} \equiv u^{\overline{\beta}}$. Така е определена равнината $\overline{\beta}[u^{\overline{\beta}}, g^{\overline{\beta}}]$.

Пробод на права и равнина

Нека са дадени равнина $\overline{\alpha}[u^{\overline{\alpha}}, g^{\overline{\alpha}}]$ и права $\overline{a}(a, a_1)$, $\overline{a} \notin \overline{\alpha}$, $\overline{a} \nparallel \overline{\alpha}$. Ще намерим пресечната точка $\overline{P}(P, P_1)$ на $\overline{a}$ и $\overline{\alpha}$ – $\overline{P} = \overline{a} \cap \overline{\alpha}$. Нека $\overline{\beta}[u^{\overline{\beta}}, g^{\overline{\beta}}]$ е произволна равнина през $\overline{a}$, т.е. $U^{\overline{a}} \in u^{\overline{\beta}}$, $G^{\overline{a}} \in g^{\overline{\beta}}$ и $u^{\overline{\beta}} \parallel g^{\overline{\beta}}$. Тогава, ако $\overline{m} = \overline{\alpha} \cap \overline{\beta}$, то $\overline{P} = \overline{a} \cap \overline{m}$.

Ще отбележим, че е достатъчно да определим само правата $\overline{m} = U^{\overline{m}} G^{\overline{m}}$. Тогава $P = a \cap m$ и $P_1 \in a_1$, $PP_1 \perp h$.