Задачи за упражнения по
"Диференциални уравнения и приложения"

I. Линейни системи с постоянни коефициенти

Задача 1. Решете линейната хомогенна система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

или в матричен запис $\dot{x} = Ax$, където

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \ \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}, \text{ а матрицата } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ е}$$

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad (3)\ A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$(4)\ A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(7)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (8)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$(10)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad (11)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad (12)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Решете линейните нехомогенни системи $\dot{x} = Ax + f(t)$, където

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} 2\,e^{3t} \\ 5\,e^{-t} \end{pmatrix}, \quad (2)\ A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin 2t \end{pmatrix},$$

$$(3)\ A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{e^t-1} \\ -\frac{3}{e^t-1} \end{pmatrix}, \quad (4)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{pmatrix},$$

$$(5)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 2\,e^t \\ 2\,e^t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(6)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix},$$

$$(7)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

II. Автономни системи

Задача 1. Намерете особените точки и начертайте фазовия портрет на системата

$$(1)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 \end{cases}, \ (2)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}, \ (3)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2 \end{cases},$$

$$(4)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - 5x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 2x_2 \end{cases}, \ (5)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}, \ (6)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 6x_2 \end{cases}.$$

Задача 2. С помощта на теоремата на Ляпунов за устойчивост по първо приближение изследвайте относно устойчивост нулевото решение на системата

$$(1)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1x_2 - x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 5x_1^4 + x_2^3 + 2x_1 - 3x_2 \end{cases}, \ (2)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = e^{x_1+2x_2} - \cos 3x_1 \\ \dot{x}_2 = \sqrt{4+8x_1} - 2e^{x_2} \end{cases},$$

$$(3)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = \ln(4x_2 + e^{-3x_1}) \\ \dot{x}_2 = 2x_2 - 1 + \sqrt[3]{1-6x_1} \end{cases}, (4)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = \tan(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = 2^{x_2} - 2\cos(\frac{\pi}{3} - x_1) \end{cases},$$

$$(5)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = e^{x_1} - e^{-3x_1} \\ \dot{x}_2 = 4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2) \\ \dot{x}_3 = \ln(1 + x_3 - 3x_1) \end{cases}.$$

Задача 3. Изследвайте при какви стойности на параметрите a и b е асимптотично устойчиво нулевото решение на системата

$$(1)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - 2x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_1x_2 \end{cases}, \ (2)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \sin x_1 \\ \dot{x}_2 = ax_1 + bx_2 \end{cases}, \ (3)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = 2e^{-x_1} - \sqrt{4 + ax_2} \\ \dot{x}_2 = \ln(1 + x_1 + ax_2) \end{cases}.$$

Задача 4. Намерете всички особени точки на системата и ги изследвайте относно устойчивост

$$(1)\ \begin{cases}\dot{x}_1 = e^{x_2} - e^{x_1}\\ \dot{x}_2 = \sqrt{3x_1 - x_2^2} - 2\end{cases},\ (2)\ \begin{cases}\dot{x}_1 = \ln(1 + x_2 + \sin x_1)\\ \dot{x}_2 = 2 + \sqrt[3]{3\sin x_1 - 8}\end{cases},$$

$$(3)\ \begin{cases}\dot{x}_1 = -\sin x_2\\ \dot{x}_2 = 2x_1 + \sqrt{1 - 3x_1 - \sin x_2}\end{cases},\ (4)\ \begin{cases}\dot{x}_1 = \ln(-x_1 + x_2^2)\\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - 1\end{cases}.$$

Задача 5. Изследвайте относно устойчивост нулевото решение на системата, построявайки функция на Ляпунов.

$$(1)\ \begin{cases}\dot{x}_1 = x_1x_2 - x_1^3\\ \dot{x}_2 = -x_1^2 - x_2^3\end{cases},\ (2)\ \begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_2^3 - x_1^3\\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3\end{cases},\ (3)\ \begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = -x_1^7\end{cases}.$$

III. Линейни частни диференциални уравнения от първи ред

Задача 1. Намерете общото решение на ЧДУ от първи ред

$$(1)\quad xz\frac{\partial u}{\partial x} - yz\frac{\partial u}{\partial y} + 3x^3\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$(2)\quad 3z\frac{\partial u}{\partial x} + zx^2\frac{\partial u}{\partial y} - x\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$(3)\quad zy^2\frac{\partial u}{\partial x} + 2z\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$(4)\quad y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = x - y.$$