Знакопроменливи редове. Критерий на Лайбниц

Знакопроменлив наричаме ред $\sum a_n$, който има както положителни, така и отрицателни членове. Специален вид знакопроменливи редове са алтерниращите. Алтерниращ е ред, в който всеки два съседни члена са с различен знак.

Така • ако $a_1 > 0$, то $a_2 < 0$, $a_3 > 0$, $a_4 < 0$, и т.н...

• ако $a_1 < 0$, то нечетните индекси са отрицателни, докато четните индекси са положителни.

Нека $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, $a_3 < 0$, $a_4 > 0, \dots$

Тогава $-a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $-a_3 > 0$, $a_4 > 0, \dots$

Последното може да се запише като $(-1)^n a_n > 0$ за всяко n.

Следователно, ако $\sum a_n$ е алтерниращ, $\sum (-1)^n a_n$ е ред само с положителни членове.

Вярно е и обратното: Ако $a_n > 0$ за всяко n, то $\sum (-1)^n a_n$; както и $\sum (-1)^{n-1} a_n$ са алтерниращи.

Критерият на Лайбниц ни дава достатъчно условие за сходимост на алтерниращи редове.

Тв. Нека $a_n > 0$ за всяко n, като $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, монотонно намалявайки. Тогава алтерниращия ред $\sum (-1)^n a_n$ е сходящ.

(Когато говорим за сходимост пропускаме границата на сумиране ($n=1$ до ∞), защото се подразбират.)

Бел. Достатъчно е $\{a_n\}$ да намалява монотонно от някое n_0 нататък и отново следва сходимост на $\sum (-1)^n a_n$.

Зад. 1. Сходящи ли са редовете:

а) $\sum \frac{(-1)^n}{2n-1}$; б) $\sum (-1)^n \sin\frac{1}{n\sqrt{n}}$; в) $\sum (-1)^{n-1} \cdot \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{2n-1}$

г) $\sum \frac{(-1)^n (2n)!}{n^n}$ д) $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$.

Реш. а) $a_n = \frac{1}{2n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $a_{n+1} = \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n-1} = a_n$.

$\Rightarrow \{a_n\}$ е намаляваща. По Лайбниц $\sum \frac{(-1)^n}{2n-1}$ е сходящ.

б) $\sum (-1)^n \sin\frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum (-1)^n a_n$ за $a_n = \sin\frac{1}{n\sqrt{n}}$, $a_n > 0$.

Още $\frac{1}{n\sqrt{n}} \to 0 \Rightarrow a_n = \sin\frac{1}{n\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

За да приложим Лайбниц трябва да проверим, че $\{a_n\}$ намалява.

Аргументите на $\sin$ са в интервала $(0;1]$.

В този интервал $\sin$ е ~~монотонно~~ растяща, т.е.

$x > y \Leftrightarrow \sin x > \sin y$.

Така за $a_n > a_{n+1}$, т.е. за $\sin\frac{1}{n\sqrt{n}} > \sin\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$ е

достатъчно да е изпълнено $\frac{1}{n\sqrt{n}} > \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$.

Последното е еквивалентно на $(n+1)\sqrt{n+1} > n\sqrt{n}$ *

След вдигане на квадрат получаваме вярно неравенство.

Така показахме, че $a_n > a_{n+1}$ и редът е сходящ по Лайбниц.

в) $a_n = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{2n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $a_n > 0$ за всяко n.

За да покажем ~~монотонност~~ ползваме, че arctg е растяща,

т.е. трябва да ~~[illegible]~~ сравним аргументите на arctg в a_n и

a_{n+1}: $\frac{\sqrt{n}}{2n-1} \overset{?}{>} \frac{\sqrt{n+1}}{2n+1}$. Привеждаме под общ знаменател и вдигаме на квадрат:

$n(2n+1)^2 \overset{?}{>} (n+1)(2n-1)^2$

$4n^3 + 4n^2 + n \overset{?}{>} (n+1)(4n^2-4n+1) = \cancel{4n^3} - 4n^2 + \cancel{n} + 4n^2 - 4n + 1$.

Последното е еквивалентно на $4n^2+4n-1>0$, което е изпълнено за всяко $n\in\mathbb{N}$.

Така от $\frac{\sqrt{n}}{2n-1} > \frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} \Rightarrow a_n = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{2n-1} > \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} = a_{n+1}$.

Изпълнени са всички предпоставки на критерия на Лайбниц и редът е сходящ.

г) $a_n = \frac{(2n)!}{n^n}$; $a_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}}$.

~~Вира~~ За монотонност трябва да сравним a_n и a_{n+1}.

Един вариант е да разгледаме $a_n - a_{n+1}$; друг $\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

Тук по-удачен е втория вариант - факториели ще се съкратят.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n)!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} = \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}(2n+1)(2n+2)}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\cdot e = 0.$$

В частност, $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ за достатъчно големи n, т.е. $a_n < a_{n+1}$.

Това означава, че $\{a_n\}$ е строго растяща.

Тогава общия член на реда $(-1)^n a_n$ не клони към 0.

Това е достатъчно да заключим, че редът е разходящ.

д) $a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} > 0$ за $\ln n > 1$, т.е. за $n > e$.

Игнорирайки първите два члена, $\sum(-1)^n a_n$ е алтерниращ.

Тъй като $\ln$ расте по-бавно от полином $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ &

[Може и с Лопитал: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/2\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}} = 0$].

Остава да проверим монотонност.

Трябва да сравним $a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ и $a_{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$.

Разликата и частното на тези два израза трудно можем да оценим. Затова нека разгледаме $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ като функция на реална променлива. Ако $f(x)$ е монотонно намаляваща функция, то от $n > n+1 \Rightarrow f(n) < f(n+1)$ - точно което искаме.

На пръв поглед си усложняваме задачата - разглеждаме f върху по-голямо множество ($\mathbb{R}$), отколкото ни трябва ($\mathbb{N}$). Но функции на реална променлива можем да диференцираме.

$$f'(x) = \frac{1/x \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot 1/2\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 2 \Leftrightarrow x > e^2.$$

Така f е намаляваща за $x \in (e^2; +\infty)$.

Игнорирайки първите няколко (по-малко от 10) члена на редицата $\{a_n\}$, тя е монотонно намаляваща.

$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$ е сходящ.

Проверката за монотонност понякога е сравнително сложна. Ще видим как може да се избегне. Преди това.

Деф. ~~[illegible]~~ Ред $\sum a_n$ наричаме <u>абсолютно сходящ</u>, ако редът $\sum |a_n|$ от абсолютните стойности е сходящ.

Пр. Всеки сходящ ред с положителни членове е абсолютно сходящ.

Деф. Ред $\sum a_n$ е <u>условно сходящ</u>, ако е сходящ, но не е абсолютно сходящ.

В сила е, че всеки абсолютно сходящ ред е сходящ.
(т.е. $\sum |a_n|$ - сходящ $\Rightarrow \sum a_n$ - сходящ).

Scanned with CamScanner

Зад. 2. Абсолютно или условно сходящи са редовете от предната задача.

Реш. Всеки сходящ ред е или абсолютно сходящ или условно сходящ. Така разходящият ред г) $\sum \frac{(-1)^n (2n)!}{n^n}$ не е нито абсолютно, нито условно сходящ.

За останалите трябва да изследваме съответните редове с положителни членове. Ползваме сравнителния критерий:

а) $\sum \frac{1}{2n-1} \sim \sum 1/n$ – разходящ. $\Rightarrow$ Условно сходящ.

б) $\sum \sin \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \underbrace{\frac{\sin \frac{1}{n\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}} \sim \sum \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$

е сходящ защото $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ Редът е абсолютно сходящ.

в) $\sum \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{n}}{2n-1} \sim \sum \frac{\sqrt{n}}{2n-1} \sim \sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$, $\frac{1}{2} < 1$ $\Rightarrow$ разходящ.

Така $\sum (-1)^{n-1} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$ е условно сходящ.

д) $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \geq \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ – разходящ $\Rightarrow \sum \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ мажорира разходящ ред и също е разходящ $\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$ е условно сходящ.

Тук ползвахме, че $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ е сходящ за $\alpha > 1$ и разходящ за $\alpha \leq 1$.

Зад. 3. Да се изследват за абсолютна и условна сходимост:

а) $\sum \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!}$ б) $\sum \frac{(n!)^2 (-4)^n}{(n+1)(2n+1)!}$ в) $\sum \frac{(-3)^{3n} (n!)^3}{(3n)!\, n^2}$

г) $\sum \frac{(-1)^n n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$, ~~$a \in \mathbb{R}, a \notin \{-1, -2, -3, \dots\}$~~ $a > -1$ е параметър.

(~~ако $a = -k$ за естествено k, всички събираеми в реда след k тогава имат 0 в знаменател и нямат~~ смисъл.)

Преди решението ще формулираме твърдението, което ще ползваме.

Тв. $a_n > 0$ и $n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} l > 0$. Тогава $\sum (-1)^n a_n$ е сходящ.

Границата, която се смята тук е точно тази от критерия на Раабе-Дюамел. Да напомним, че
ако $l > 1$, то $\sum a_n$ е сходящ
ако $l < 1$, то $\sum a_n$ е разходящ
е критерия на Раабе-Дюамел.

Така: $l = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$

- $l > 1 \Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ е абсолютно сходящ
- $l \in (0;1) \Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ е условно сходящ
- $l = 1 \Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ е сходящ, но не знаем дали абсолютно или условно

Реш. а) $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, $a_{n+1} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} = \frac{(2n+1)(2n-1)!!}{(2n+2)(2n)!!} = \frac{2n+1}{2n+2}a_n$.

$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+1}$ и $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{2n+2-2n-1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow \sum a_n$ е разходящ по Раабе-Дюамел.

От горното твърдение, $\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ е сходящ.

Така $\sum (-1)^n a_n$ е сходящ, но $\sum |(-1)^n a_n| = \sum a_n$ е разходящ

$\Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ е условно сходящ.

б) $a_n = \frac{(n!)^2 4^n}{(n+1)(2n+1)!}$, $a_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2 \cdot 4^{n+1}}{(n+2)(2n+3)!}$.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n!)^2 \cdot 4^n \cdot (n+2)(2n+3)!}{(n+1)(2n+1)!\,((n+1)!)^2\, 4^{n+1}} = \left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^2 \cdot \frac{4^n}{4^{n+1}} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot (2n+3)(2n+2) = \frac{(n+2)(2n+3)\cdot 2\cancel{(n+1)}}{(n+1)^2 \cdot {}_2\cancel{4} \cdot \cancel{(n+1)}} = \frac{(2n+3)(n+2)}{2(n+1)^2}$$

$$= \frac{2n^2+7n+6}{2n^2+4n+2}.$$

Тогава $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = n\left(\frac{2n^2+7n+6-2n^2-4n-2}{2n^2+4n+2}\right) = n\cdot\frac{3n+4}{2n^2+4n+2}$

$$= \frac{3n^2+4n}{2n^2+4n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ – сходящ.}$$

$\Rightarrow \sum(-1)^n a_n$ – абсолютно сходящ.

в) $(-3)^{3n} = (-1)^{3n}\cdot 3^{3n} = (-1)^{2n}\cdot(-1)^n\cdot(3^3)^n = (-1)^n\cdot 27^n.$

Общият член е $\frac{(-1)^n\cdot 27^n(n!)^3}{(3n)!\,n^2} = a_n$

$$a_{n+1} = \frac{27^{n+1}((n+1)!)^3}{(3n+3)!\,(n+1)^2}.$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{27^n(n!)^3}{(3n)!\,n^2}\cdot\frac{(3n+3)!\,(n+1)^2}{27^{n+1}((n+1)!)^3} = \frac{27^n}{27^{n+1}}\cdot\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^3\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{(3n+3)!}{(3n)!} =$$

$$= \frac{1}{27(n+1)^3}\cdot\frac{\cancel{(n+1)^2}}{n^2}\cdot(3n+3)(3n+2)(3n+1) = \frac{3\cancel{(n+1)}(3n+2)(3n+1)}{_9\,27\cancel{(n+1)}\,n^2} =$$

$$= \frac{9n^2+9n+2}{9n^2}.$$

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = n\left(\frac{\cancel{9n^2}+9n+2-\cancel{9n^2}}{9n^2}\right) = \frac{9n^2+2n}{9n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 > 0$$

$\Rightarrow \sum(-1)^n a_n$ е сходящ, но $\sum a_n$ не можем да определим по Раабе дали е сходящ или не.

Не знаем дали началният ред е сходящ условно или абсолютно.

г) Произведението $(a+1)(a+2)\dots(a+n)$ е положително $\Rightarrow$ Редът е алтерниращ.

За абсолютните стойности имаме $a_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{\cancel{(a+1)\dots(a+n)}}\cdot\frac{\cancel{(a+1)\dots}(a+n+1)}{(n+1)!} = \frac{a+n+1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = n\left(\frac{a+n+1-n-1}{n+1}\right) = \frac{an}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} a.$

Така при $a > 1$ – абсолютна сходимост.

при $a = 1$ – сходимост. Раабе-Дюамел не казва абсолютна или не.

Заместваме: $\sum \frac{(-1)^n n!}{2.3\ldots(n+1)} = \sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ – абсолютно разходящ

=> при $a=1$ – условна сходимост.

• при $a \in (0;1)$ – условна сходимост

• при $a \leq 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+1+a} > 1$ => общия член не клони към 0 => разходящ

Ще споменем един критерий за редове с положителни членове.

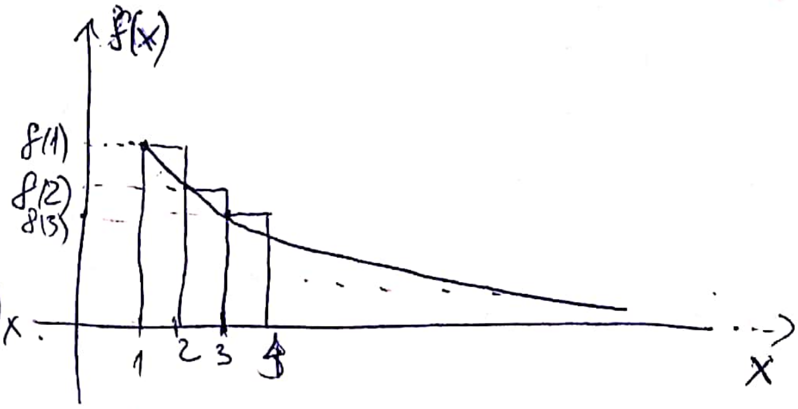
Всяка редица $a_1, a_2, \ldots$ е функция от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{R}$.

Вместо a_i ще пишем $f(i)$.

Така, вместо $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ да пишем $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$. Последното представлява лицето под стълбичката от правоъгълници с ширина 1 и височини $f(1), f(2), \ldots$

Това е Риманова сума за несобствения интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ е свързана със сходимостта на $\int_1^{\infty} f(x)dx$.



Т1. (Интегрален критерий)

$f: [a;+\infty) \to \mathbb{R}$ – неотрицателна, непрекъсната и намаляваща.

Тогава $\int_a^{\infty} f(x)dx \sim \sum_{n=a}^{\infty} f(n)$ (едновременно сходящи).

С производни се проверява, че $f(x) = \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$ е намаляваща за $\alpha > 0$ от известно място нататък.

Тогава $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta x} \sim \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x} = \begin{cases} \alpha > 1, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{сходящ} \\ \alpha = 1, \beta > 1 \Rightarrow \text{сходящ} \\ \text{иначе} \Rightarrow \text{разходящ.} \end{cases}$

В частност $\sum \frac{1}{n \ln n}$ е разходящ.