Примерни решения на задачите от контролно 1 по Висша алгебра.

Петър Евгениев.

11 април 2021 г.

Задача 1. *Нека G е циклична група от ред 70 с пораждащ елемент g. Нека означим $H = \{h \in G \mid h^{55} = e_G\}$.*

1. *Да се докаже, че $H < G$ е подгрупа на G;*
2. *Да се намери редът $|H|$ на H;*
3. *Да се намери пораждащ елемент h на $H = \langle h \rangle$;*
4. *Да се намери число t, за което $G/H \cong \mathbb{C}_t$.*

Решение. Преди всичко за произволни елементи $h_1, h_2 \in H$ е ясно ,че

$$(h_1.h_2)^{55} = h_1 h_2 h_1 h_2 \dots h_1 h_2 = h_1^{55}.h_2^{55} = e_G.e_G = e_G.$$

Съществено използвахме, че G е циклична, в часност абелева и значи $(gh)^n = g^n.h^n$. Ясно е, че неутралният елемент $e_G \in H$. Нека $h \in H$ е произволен. Тогава елемента $h \in G$ в качеството му на групов елемент на G притежава обратен $h^{-1} \in G$. Обаче, съгласно

$$(h^{-1})^{55} = h^{-55} = (h^{55})^{-1} = e_G^{-1} = e_G.$$

Това на, свой ред доказа $h^{-1} \in H$. Простата проверка, че $H < G$ е извършена.

$$H = \{h \in G \mid h^{55} = e_G \Leftrightarrow 55 = |h| \cdot l, \quad l \in \mathbb{N}\} = \{h \in G \mid |h| \mid 55 \quad \text{и} \quad |h| \mid 70\}.$$

Тоест H се състои точно от груповите елементи от редове, които са едновременно делители на реда на G и 55. С други думи

$$\begin{aligned} H &= \{h \in G \mid |h| \in \{1, 5, 11, 55\} \cap \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}\} = \{H \in H \mid |h| \in \{1, 5\}\} \\ &= \{g^k \mid |g^k| \in \{1, 5\}\}. \end{aligned}$$

Вземайки предвид,че групата G е циклична, а H е нейна подгрупа, следва че H също е циклична подгрупа. Това означава, че елементите на H са от вида g^k за подходящи $k \in \mathbb{N}$.

По-точно H се състои от груповите елементи от редове общите делители[1] на числата 55 и 70. Имаме

$$|h| = |g^k| = \frac{|g|}{(k,|g|)} = \frac{70}{(k,70)} = 5 \Leftrightarrow (k, 14\cdot 5) = \frac{70}{5} = 14 \Leftrightarrow 14 \leq k \leq 4\cdot 14.$$

Тоест елементите на H са

$$H = \{e, g^{14}, g^{2\cdot 14}, g^{3\cdot 14}, g^{3\cdot 14}, g^{5\cdot 14} = g^{70} = e_G \quad \text{и се повтарят циклично}\} = \left\langle g^{14} \right\rangle.$$

Точно заради цикличното повтаряне е достатъчно да разглеждаме $k = l\cdot 14$, където l се мени между произволна пълна система остатъци $\pmod 5$, например $1, 2, 3, 4$.

По-точно за всички $k = l \cdot 14$, където $l \in \mathbb{Z}$, след деление с частно и остатък на 5, получаваме $l = 5q + r, \quad 0 \leq r \leq 4$ и значи

$$g^k = g^{l\cdot 35} = g^{(5q+r)14} = (g^{14\cdot 5})^q . g^{14r} = (g^{70})^q . g^{14r} = e_G^q . g^{14r} = g^{14r} \quad 0 \leq r \leq 4.$$

Което доказа,че елементите в H са точно

$$H = \left\langle g^{14} \right\rangle = \{e_G, g^{14}, g^{2\cdot 14}, g^{3\cdot 14}, g^{4\cdot 14}\}.$$

По такъв начин H има ред $|H| = \mathrm{ord}(g^{14}) = 5 = (70, 55)$.

Сега разглеждайки фактора G/H, който разбира се е група, съгласно факта, че G е циклична, в частност абелева и значи всяка нейна подгрупа е нормална - така G/H е група , и то циклична. Знаем, че с точност до изоморфизъм има единствена циклична група от ред t, и това е $\langle \omega \rangle = \mathbb{C}_t \cong \mathbb{Z}_t = \left\langle (\overline{1})_t \right\rangle$. По-този начин е достатъчно да намерим реда на G/H, което е точно индекса на H в G и от теоремата на Лагранж имаме

$$|G| = |H|.|G:H| = |H|.|G/H| \Rightarrow |G/H| = \frac{|G|}{|H|} = \frac{70}{5} = 14.$$

Това пък доказа, че $G/H \cong \mathbb{C}_{14}$.

И задачата е решена.

В общия случай, да забележим, ако s_0 е фиксирано естествено число,и $G = \langle g \rangle$ е циклична група от ред n. Множеството

$$H = \{h \in G \mid h^{s_0} = e_G\}$$

е циклична подгрупа на G от ред $|H| = (n, s_0)$, защото както разбрахме вече елементите на H са точно груповите елементи от редове всевъзможните общи делители на n и s_0. За всеки такъв елемент е известно, че той поражда циклична група от ред съответния делител. Ако $\{d_1 < \ldots < d_r\}$ са всички общи делители на на n и s_0 и $h_{d_1}, \ldots, h_{d_4} \in H$ са елементи от редове съответно $d_1, \ldots, d_r$, то са в сила включванията на циклични подгрупи

$$\langle h_{d_1} \rangle < \langle h_{d_2} \rangle < \ldots < \langle h_{d_r} \rangle = H.$$

[1]Следствие от Теоремата на Лагранж, получаващо се като вземем произволен елемент $a \in G$ от група и породим цикличната подгрупа $\langle a \rangle < G$ И значи $|a| = \mathrm{ord}\,\langle a \rangle \mid\mid |G|$.

И d_r, разбира се е точно $(n, s_0) = d_r$, поражда H, защото елементите на H от редове другите, по-малки, общи делители на s_0 и n пораждат циклчини групи не садържащи, грубо казано, по-големите от тях подгрупи - но те на свой ред се съдържат в H и по тази причина H се поражда от еле мент от ред (n, s_0).

Разбира се такъв има. По-точно от това, че G е циклична подгрупа с пораждащ елемент g, то елементите на H, в частност на H са от вида g^k. От формулата

$$|g^k| = \frac{|g|}{(|g|, k)} = (n, s_0) \Leftrightarrow (n, k) = \frac{n}{(n, s_0)} \in \mathbb{N}.$$

И така, за числото $k := \frac{n}{(n,s_0)}$, елемента g^k е от ред $|g^k| = (n, s_0)$, съгласно $\left(n, \frac{n}{(n,s_0)}\right) = \frac{n}{(n,s_0)}$.

Задача 2. *Нека* $H = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z|^{162} = z^{162}\}$ *и* $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. *Да се докаже, че* $H/R^+ \cong \mathbb{C}_{162}, H/\mathbb{C}_{162} \cong \mathbb{R}^+$ *и* $\mathbb{C}^*/H \cong \mathbb{U}$.

Доказателство. Търсим индективен хомоморфизъм $\varphi : H \to \mathbb{C}_{162}$ с ядро $\operatorname{Ker} \varphi = \mathbb{R}^+$.

Нека преди всичко напомним, че от доказаната на първото упражнение[2] по ЛА формула на Ойлер $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$, и значи всяко комплексно число се записва във вида $r\,\mathrm{e}^{i\varphi} = r\,\mathrm{e}^{2\pi q i}, 0 \le q < 1$. Тук $r = |z|$. По-нататък, да напомним че $n-$тите корени на единицата са комплексните числа, за които $z^n = 1$. Това са точно числата

$$\mathbb{C}_n = \{\mathrm{e}^{2k\pi i/n} \mid 0 \le k \le n-1\}.$$

По-нататък, след това кратко напомняне, нека разгледаме множеството H. То се състои от всички комплексни числа $z = r\,\mathrm{e}^{2\pi q i} \in \mathbb{C}$, за които

$$z^n = r^n\,\mathrm{e}^{2\pi n q i} = r^n, \quad \text{за} \quad n = 162, \quad 0 \le q < 1.$$

Горното е равносилно на $\mathrm{e}^{2\pi n q i} = 1 \Leftrightarrow 2\pi 162 q = 2\pi s$, където $s \in \mathbb{Z}$. Получихме

$$H = \left\{ r\,\mathrm{e}^{2q\pi i} \mid q = \frac{s}{162}, \quad s \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Сега е почти очевидно, как да дефинираме изображението $\varphi : H \to \mathbb{C}_{162}$, като

$$\varphi\left(r\,\mathrm{e}^{\frac{2s\pi i}{162}}\right) := \mathrm{e}^{2s\pi/162} \in \mathbb{C}_{162}, \quad s \in \mathbb{Z}.$$

Това изображение е хомоморфизъм на групи, съгласно

$$\begin{aligned} \varphi\left(r_1\,\mathrm{e}^{2s_1\pi i/162}.r_2\,\mathrm{e}^{2s_2\pi i/162}\right) &= \varphi\left(r_1 r_2\,\mathrm{e}^{[2(s_1+s_2)\pi i]/162}\right) := \mathrm{e}^{[2(s_1+s_2)\pi i]/162} \\ &= \mathrm{e}^{2s_1\pi i/162}\,\mathrm{e}^{2s_2\pi i/162} = \varphi\left(r_1 e^{2s_1\pi i/162}\right)\varphi\left(r_2\,\mathrm{e}^{2s_2\pi i/162}\right). \end{aligned}$$

Очевидно е,че така определен φ е сюрективен хомоморфизъм, съгласно факта, че за произволен $\mathrm{e}^{2k\pi i/162}$, т.е. $0 \le k \le 161$, какъвто модул и да изберем $r \in \mathbb{R}^+$ числото $r\,\mathrm{e}^{2k\pi i/162} \in H$ е негов първообраз. Забележете, никак не е инектен този хомоморфизъм,

[2]Можете да намерите доказателство ,например, в записките ми по ЛА.

цял клас от числа, се изпращат в един и същи 162−ри корен на единицата. Ядрото на този сюрективен хомоморфизъм на групи е се състои от всички числа от H, за които

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{r\,\mathrm{e}^{2s\pi i/162} \mid \varphi(r\,\mathrm{e}^{2s\pi i/162}) = \mathrm{e}^{2s\pi/162} = 1 \Leftrightarrow s \in 162\mathbb{Z} \Leftrightarrow r\,\mathrm{e}^{2s\pi i/162} = r\} = \mathbb{R}^+.$$

Останалото $H/\operatorname{Ker}\varphi = H/\mathbb{R}^+ \cong \varphi(H) = \mathbb{C}_{162}$ се решава от теоремата за хомоморфизмите.

Относно $H/\mathbb{C}_{162} \cong \mathbb{R}^+$, изображението

$$\Psi : H \to \mathbb{R}^+, \quad \Psi(r\,\mathrm{e}^{2s\pi i/162}) := r$$

е очевидно сюрективно изображение, съгласно $\forall r \in \mathbb{R}^+$, всички числа $r\,\mathrm{e}^{2s\pi i162} \in H, s \in \mathbb{Z}$ са негови първообрази. Нещо повече, то е хомоморфизъм на групи.

$$\Psi\left(r_1\,\mathrm{e}^{2s_1\pi i/162}.r_2\,\mathrm{e}^{2s_2\pi i/162}\right) := r_1 r_2 = \Psi\left(r_1\,\mathrm{e}^{2s_1\pi i/162}\right)\Psi\left(r_2\,\mathrm{e}^{2s_2\pi i/162}\right).$$

Неговото ядро е точно

$$\operatorname{Ker}\Psi = \{r\,\mathrm{e}^{2s\pi i/162} \in H \mid r = 1\} = \{\mathrm{e}^{2s\pi i/162} \in H\} = H \cap \mathbb{C}_{162} = \mathbb{C}_{162}.$$

И отново по Теоремата за хомоморфизмите, получаваме

$$H/\operatorname{Ker}\psi = H/\mathbb{C}_{162} \cong \mathbb{R}^+ = \Psi(H).$$

Очевиден е и третия хомоморфизъм. Действително, изображението

$$\mathcal{F} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}, \quad \mathcal{F}(r\,\mathrm{e}^{2\pi q i}) := \mathrm{e}^{2\pi 162 q i} \in \mathbb{U}, \quad 0 \le q < 1.$$

е сюреиткивно, съгласно

$$\forall\,\mathrm{e}^{2\pi 162 q i} \in \mathbb{U}, \quad \text{числата} \quad r\,\mathrm{e}^{2\pi[q/162]i} \quad \text{са негови първообрази} \quad \forall r \in \mathbb{R}^+.$$

Това, че $\mathcal{F}$ е хомоморфизъм на групи следва от факта, че

$$\mathcal{F}(r_1\,\mathrm{e}^{2\pi q_1 i}.r_2\,\mathrm{e}^{2\pi q_2 i}) = \mathrm{e}^{2\pi 162(q_1+q_2)i} = \mathrm{e}^{2\pi 162 q_1 i}\,\mathrm{e}^{2\pi 162 q_2 i} = \mathcal{F}(r_1\,\mathrm{e}^{2\pi q_1 i})\mathcal{F}(r_2\,\mathrm{e}^{2\pi q_2 i}).$$

Неговото ядро е

$$\operatorname{Ker}\mathcal{F} = \{r\,\mathrm{e}^{2\pi q i} \in \mathbb{C}^* \mid \mathrm{e}^{2\pi 162 q i} = 1 \Leftrightarrow r\,\mathrm{e}^{2\pi q i} \in H\} = \mathbb{C}^* \cap H = H.$$

И така отново по теоремата за хомоморфизмите, задачата е решена. $\square$