Редове. Сравнителен критерий за редове с положителни членове

Събирането на реални числа е комутативно и асоциативно.
Така $a_1+a_2+\dots+a_n$, $a_i\in\mathbb{R}$ има една и съща стойност независимо как разместваме членовете и къде поставяме скоби.
Следващият пример показва, че не така стоят нещата при ~~със~~ суми на безброй много събираеми:

Пр.1. На колко е равна сумата $1-1+1-1+1-1+\dots$?

От една страна $1-1+1-1+\dots=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots=0+0+\dots=0$.

От друга, $1-1+1-1+\dots=1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\dots=1+0+0+\dots=1$.

Очевидно поставянето на скоби на различни места промени резултата.

За да дефинираме сума на безброй много събираеми $a_0+a_1+\dots$ ~~раз~~ гледаме крайните суми

$$
\left.\begin{aligned}
S_0&=a_0\\
S_1&=a_0+a_1\\
S_2&=a_0+a_1+a_2\\
S_k&=a_0+a_1+\dots+a_k=(a_0+a_1+\dots+a_{k-1})+a_k=S_{k-1}+a_k.
\end{aligned}\right]
$$

наричат се още частични (парциални) суми

Можем да сметнем елементите на редицата $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ при дадени $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$. Да забележим, че за всяко k, S_k е сума на крайно много реални числа.

За така построената редица $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ можем да се запитаме дали има граница или не.

И така стигаме до строгите дефиниции:

$a_0+a_1+a_2+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ наричаме ред, $a_i\in\mathbb{R}$.

$S_k=\sum_{n=0}^{k}a_k$ – k-та парциална сума на реда.

Ако $\lim_{k\to\infty}S_k=S$, $S\in\mathbb{R}$ (т.е. S не е $+$ или $-\infty$), казваме, че редът е сходящ и има сума S.

В противен случай ($\lim_{k\to\infty}S_k=+\infty$ или $-\infty$ или $\nexists\lim_{k\to\infty}S_k$), казваме, че редът е разходящ. (и няма сума).

Да се върнем към примера: $1-1+1-1+\ldots=1+(-1)+1+(-1)+\ldots$

$a_0=1,\ a_1=-1,\ a_2=1,\ a_3=-1,\ldots$ Тогава парциалните суми са:

$S_0=a_0=1,\ S_1=a_0+a_1=0,\ S_2=a_0+a_1+a_2=1,\ S_3=0,\ldots$

$S_{2k}=1,\ S_{2k+1}=0$ за всяко $k\in\{0,1,2,\ldots\}$.

Редицата $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ има две точки на сгъстяване 0 и 1.

Тогава $\{S_k\}$ няма граница и редът е <u>разходящ</u>.

<u>Пр. 2.</u> $a_n=q^n,\ q\in\mathbb{R}$. За кои q, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ е сходящ?

Образуваме $S_k=a_0+a_1+\ldots+a_k=1+q+q^2+\ldots+q^k=\begin{cases}\dfrac{q^{k+1}-1}{q-1}, & q\neq1\\ k+1, & q=1\end{cases}$

Очевидно при $q=1$, $\lim\limits_{k\to\infty}S_k=+\infty$ и редът е разходящ.

При $q\neq1$, $S_k=\dfrac{q^{k+1}-1}{q-1}=\dfrac{q^{k+1}}{q-1}+\dfrac{1}{1-q}$.

При $|q|<1$, $S_k\longrightarrow\dfrac{1}{1-q}$; При $q\in(-\infty;-1]\cup(1;+\infty)$, S_k – разходяща редица.

Така $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n=\begin{cases}1/1-q, & |q|<1\ (\text{сходящ})\\ \text{няма сума}, & |q|\geq1\ (\text{разходящ}).\end{cases}$

В частност при $q=-1$, получаваме пример 1.

<u>Пр. 3.</u> Да се пресметне сумата на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\ldots$

За да сметнем парциалните суми ни помага представянето като сума от елементарни дроби $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n+1-n}{(n+1)n}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

Тогава $S_k=\sum\limits_{n=1}^{k}\dfrac{1}{n(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{k}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\left(\dfrac{1}{1}-\cancel{\dfrac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{2}}-\cancel{\dfrac{1}{3}}\right)+\ldots+\left(\cancel{\dfrac{1}{k}}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

Всяко събираемо освен първото и последното се появява веднъж със знак + и веднъж с –.

$\Rightarrow S_k=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{k+1}\xrightarrow[k\to\infty]{}1-0=1.\ \Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=\lim\limits_{k\to\infty}S_k=1.$

Пр. 4. Намерете сумата на реда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}$

Упътване: Потърсете константи A, B, C, т.че

$$\frac{1}{n^3-n} = \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+1} \text{ за всяко } n.$$

След това заместете с това представяне в

$$S_k = \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n^3-n} = \sum_{n=2}^{k} \left(\frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+1} \right)$$ и опростете.

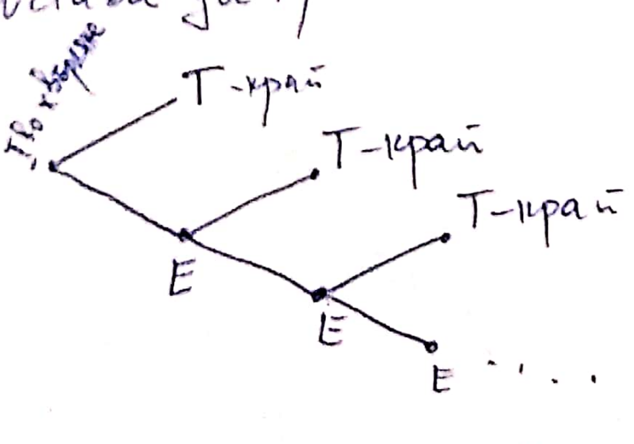
Следващият пример показва, че ползването на дефиницията е често тромаво. ~~Как да определим дали ред е сходящ~~ По-нататък ще дадем по-бързи алгоритми (критерии) за проверка дали ред е сходящ. Още по-нататък ще сметнем същия ред по друг начин.

Пр. 5. Хвърляме една монета до момента, в който се падне за първ път тура. Колко средно хвърляния сме направили? Приемаме, че шансовете за ези и тура са равни.

Реш. Може да е необходимо 1 хвърляне (Т), 2 хвърляния (ЕТ), 3 хвърляния (ЕЕТ) и т.н...

Средния брой хвърляния е равен на сумата от:
(Вероятността да приключим за 1 хвърляне) $\cdot$ (бройката $= 1$) $+$
$+$ (Вероятността да приключим за 2 хвърляния) $\cdot$ (бройката $= 2$) $+ \dots$
$+ (\dots$ k хвърляния) $\cdot\, k + \dots$

Остава да пресметнем посочените вероятности:



За да се падне първо тура на k-то хвърляне, трябва 1, 2, ..., (k-1)-во да са ези, k-то да е тура.

Вероятността е $\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}}_{k-1}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$.

Така получихме, че средния брой хвърляния е $1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2^2} + 3\cdot\frac{1}{2^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Към момента не е ясно дали този ред е сходящ или не. Тъй като единственото, което знаем засега е дефиницията, няма какво друго да правим.

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} =$$

$$= \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \dots + \tfrac{1}{2^k}\right) +$$
$$+ \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \dots + \tfrac{1}{2^k}\right) +$$
$$+ \left(\tfrac{1}{8} + \dots + \tfrac{1}{2^k}\right) +$$
$$\vdots$$
$$+ \left(\tfrac{1}{2^{k-1}} + \tfrac{1}{2^k}\right) +$$
$$+ \left(\tfrac{1}{2^k}\right) =$$

// тук всеки ред е геометрична прогресия с частно 1/2

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) +$$
$$+ \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{k-2}}\right) +$$
$$\vdots$$
$$+ \frac{1}{2^{k-1}}\left(1 + \frac{1}{2}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2^k} \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^k}}{(1 - 1/2)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{k-1}}}{(1 - 1/2)} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2})}$$

$$= \frac{2}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) + \frac{2}{4}\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) + \frac{2}{8}\left(1 - \frac{1}{2^{k-2}}\right) + \dots + \frac{2}{2^k}\left(1 - \frac{1}{2^1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^k}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^k}\right) + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^k} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) - \big(\underbrace{\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k}}_{k}\big)$$

прегрупирахме всички положителни и всички отрицателни. Положителните членове също образуват геометрична прогресия.

$$\Rightarrow S_k = \frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - 1/2} - \frac{k}{2^k} = 2\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) - \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k}$$

Добре е да се провери:

При $k=3$, $2-\frac{k+2}{2^k} = 2-\frac{5}{8} = \frac{11}{8}$.

$S_3 = \frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3} = \frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{3}{8} = \frac{11}{8}$. ✓

$\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty}\left(2-\frac{k+2}{2^k}\right) = 2$, защото $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k+2}{2^k} = 0$
(полином и експонента)

С това доказахме, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ е сходящ и сумата му е 2.

Това беше повече от очаквано, защото стандартна монета се пада тура половината от хвърлянията.

Така че средния брой хвърляния до тура е равен на общия брой хвърляния към броя тура, което е 2 при много хвърляния.

С аналогични разсъждения може да се докаже, че средния брой хвърляния на обикновен зар до падане на шестица е точно 6.

Намирането на общия член S_k далеч не беше просто.
В общия случай такива кратки изрази за S_k не можем да намерим.

Сега ще се насочим към въпроса за сходимост на ред.
Ще изложим няколко критерия за сходимост.

(Критерий е твърдение от рода на Ако ...., то $\sum a_n$ е сходящ.
Редът $\sum a_n$ може да е сходящ и без да е изпълнена предпоставката.
Затова критерий наричаме още достатъчно условие за сходимост)

Първо ще се занимаем с редове с положителни членове, т.е.
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_i > 0$ за всяко i.

Първият критерий за сходимост е сравнителният критерий, който много прилича на съответния критерий при несобствени интеграли.

Както и при интеграли, и тук особено полезна е неговата граничната форма.

Тв. (Сравнителен критерий за редове с положителни членове).

Нека $\sum a_n$ и $\sum b_n$ са два реда, $a_n > 0$, $b_n > 0$ за всяко n

Нека $l = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$. ($l \geq 0$ или $l = \infty$) Тогава:

1) $l = 0$. Ако $\sum b_n$ е сходящ, то $\sum a_n$ е сходящ.

!2) $l \in (0; +\infty)$. Тогава $\sum a_n$ е сходящ тогава и само тогава, когато $\sum b_n$ е сходящ, пишем $\sum a_n \sim \sum b_n$.

3) $l = \infty$. Ако $\sum b_n$ е разходящ, то $\sum a_n$ - разходящ.

Най-често ще ползваме (2).

Когато говорим за сходимост, ~~[illegible]~~ първите 5, 100, 1000 члена не влияят - с тях или без тях за сходимост е все същото.

От означенията подразбираме, че сумите се до ∞.

Затова $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ можем да съкратим до $\sum a_n$.

Разбира се, когато търсим сумата на реда е ~~важен~~ всеки член, защото $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имат различни суми.

Докато се интересуваме само от сходимост, ще си позволяваме да пишем $\sum a_n$.

Пр.6 Докажете, че $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ е сходящ.

Реш. Знаем, че $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ е сходящ. Нека $a_n = 1/n^2$, $b_n = 1/n(n+1)$.

Тогава $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1/n^2}{1/n(n+1)} = \frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \in (0; +\infty)$.

$\rightarrow \sum \frac{1}{n^2} \sim \sum \frac{1}{n(n+1)}$ и $\sum \frac{1}{n^2}$ е сходящ.

Пр.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ.

Предполагам, че е правено на лекции, но все пак:

$$S_{2^n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots \frac{1}{2^{n-1}} + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} \cdot n$$

$\Rightarrow$ S_n има неограничено растяща подредица S_{2^n}

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - разходящ.

За „дълбоките" последствия на този факт, потърсете информация за:

- Jeep problem
- Ant on rubber rope paradox.

Пр.8. За кои $\alpha \in \mathbb{R}$, редът $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ е сходящ?

Предните примери отговарят на въпроса за $\alpha = 1$ - разходящ;
$\alpha = 2$ - сходящ.

Ако $\alpha > 2$, то $\frac{1/n^\alpha}{1/n^2} = \frac{n^2}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

От сходимостта на $\sum 1/n^2$, по (1) от сравнителния критерий, следва сходимост и на $\sum 1/n^\alpha$.

Ако $\alpha < 1$, то $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ сравняване с $b_n = \frac{1}{n}$, $\sum b_n$ - разходящ.

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1/n^\alpha}{1/n} = \frac{n}{n^\alpha} = n^{1-\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ и по (3) от сравнителния критерий, следва разходимост на $\sum 1/n^\alpha$.

Какво става за $\alpha \in (1;2)$?

Оказва се, че тогава редът е сходящ.

Така $\boxed{\sum 1/n^\alpha \text{ е сходящ за } \alpha > 1 \text{ и разходящ за } \alpha \leq 1.}$

Сравнете с $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ е сходящ за $\alpha > 1$ и разходящ за $\alpha \leq 1$.

Сходимостта на $\sum 1/n^\alpha$ за $\alpha \in (1;2)$ се доказва най-лесно с интегралния критерий, който ще въведем по-късно. Засега го приемаме на доверие.

<u>Зад. 1.</u> Кои от следните редове са сходящи:

а) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(3n+1)}}$; б) $\sum \frac{\sin 1/n}{n}$; в) $\sum \frac{n^2}{n^2+(n+1)^2}$; г) $\sum (e^{1/n}-1)\sin\frac{1}{\sqrt{n+2}}$

<u>Реш.</u>: а) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(3n+1)}}$ Нека $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(3n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{3n^2+n}} = \frac{1}{n\sqrt{3+1/n}}$.

Тогава за $b_n = 1/n$, имаме $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n\sqrt{3+1/n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{3}}$.

По сравнителния критерий, $\sum a_n \sim \sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ - разходящ.

б) $\frac{\sin 1/n}{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Така за $a_n = \frac{\sin 1/n}{n}$ и $b_n = \frac{1/n}{n} = \frac{1}{n^2}$:

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin 1/n}{n}\cdot n^2 = \frac{\sin 1/n}{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1. \Rightarrow \sum a_n \sim \sum \frac{1}{n^2}$ е сходящ.

в) $\sum \frac{n^2}{n^2+(n+1)^2} = \sum \frac{1}{1+(1+\frac{1}{n})^2} \sim \sum 1$ е разходящ

$(\sum 1 = \sum \frac{1}{n^0},\ 0<1)$

Пример б) показва, че може да заменяме множители с еквивалентни на тях. Да приложим към г):

г) $\sum (e^{1/n}-1)\sin\frac{1}{\sqrt{n+2}} \sim \sum \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+2}} \sim \sum \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ - сх.

По-подробно:

$$\sum (e^{1/n}-1)\sin\frac{1}{\sqrt{n+2}} = \sum \underbrace{\frac{e^{1/n}-1}{1/n}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\underbrace{\frac{\sin(1/\sqrt{n+2})}{1/\sqrt{n+2}}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

$$\sim \sum \frac{1}{n\sqrt{n+2}} = \sum \frac{1}{n\sqrt{n}\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1}} \sim \sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$$ - сходящ.

В следващата задача идеята ще е да търсим α, т.че за $b_n = 1/n^\alpha$ да е изпълнено $\frac{a_n}{b_n} \to c \in (0, +\infty)$.
Тогава $\sum a_n \sim \sum b_n = \sum \frac{1}{n^\alpha}$ и сходимостта зависи от това как е разположено α спрямо числото 1.
Такова α (ако съществува) е единствено.

Зад.2. Сходящи ли са: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{n-1}{n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) - 1$

Реш. а) $a_n = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{n-1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

$\arcsin\frac{n-1}{n} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow a_n > 0$ за всяко n.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi/2 - \arcsin\frac{n-1}{n}}{(1/n)^\alpha} \overset{?\exists}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\pi/2 - \arcsin(1-x)}{x^\alpha}$$

Тук положихме $x = 1/n$ и след това разглеждаме $x \to 0$ като реално число. В резултат получихме граница на функция, не граница на редица.

$?\exists$ означава, че ако границата вдясно съществува, тя е равна на границата на редицата вляво. Ползата от това е, че можем да правим Лопитал:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi/2 - \arcsin(1-x)}{x^\alpha} = \left[\frac{0}{0}\right], \text{ стига } \alpha > 0.$$ Така при $\alpha > 0$ прилагаме Лопитал:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}(-1)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-1+2x-x^2}}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\alpha\sqrt{x(2-x)}\cdot x^{\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\alpha\sqrt{2-x}\; x^{\alpha-1/2}}$$

Ако изберем $\alpha = 1/2$, то последната граница е $\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2} \in (0, +\infty)$

Така получихме, че $\frac{\pi/2 - \arcsin\frac{n-1}{n}}{1/\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2}$ и

$\sum a_n \sim \sum 1/\sqrt{n}$ е разходящ от $1/2 < 1$.

б) Идеята е същата: да положим $1/n = x$, $x \to 0$.
За целта трябва да изразим $a_n = n\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) - 1$ като функция на $1/n$.

$$a_n = \frac{1}{1/n} \cdot \ln\left(\frac{\cancel{n}(2+1/n)}{\cancel{n}(2-1/n)}\right) - 1 = \frac{1}{1/n} \cdot \ln\left(\frac{2+1/n}{2-1/n}\right) - 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1/n}\ln\left(\frac{2+1/n}{2-1/n}\right) - 1}{(1/n)^\alpha} \overset{??}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) - 1}{x^\alpha}.$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}\left(\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) - x\right)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) - x}{x^{\alpha+1}} = \left[\frac{0}{0}\right] \text{ за } \alpha+1>0.$$

Прилагаме Лопитал:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cancel{2-x}}{2+x} \cdot \frac{1(2-x)-(2+x).(-1)}{(2-x)^{\cancel{2}}} - 1}{(\alpha+1)x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2-x+2+x}{4-x^2} - 1}{(\alpha+1)x^\alpha} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4-4+x^2}{4-x^2}}{(\alpha+1)x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(4-x^2)(\alpha+1)x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(4-x^2)(\alpha+1)x^{\alpha-2}}.$$

При $\alpha = 2$, $x^{\alpha-2}$ изчезва и получаваме граница $\frac{1}{12} > 0$.

В частност оттук следва, че $a_n > 0$ за всички достатъчно големи n, т.е. можем да считаме, че $\sum a_n$ е ред с положителни членове (от някое място нататък).

Оттук и $\alpha = 2 > 1$ от сравнителния критерий $\Rightarrow \sum a_n$ - сходящ

За размисъл: Сходящ ли е $\sum \left[\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$?