Глава 5

Бета и Гама разпределения

5.1 Трансформация на променливи

X е случайна величина с плътност $f_X(x)$, а $Y = g(X)$, където g е строго монотонна и диференцируема функция. Плътността на Y тогава е

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$$

5.2 Приложение за намиране на моменти на сл. в.

5.2.1 Гама разпределение

Гама функция: $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt, \quad \alpha > 0$

Свойства: $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

От горната дефиниция следва, че $f(t) = \frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{\Gamma(\alpha)}, \quad 0 < t < \infty$ е плътност на разпределение на някаква сл. в. T (интегралът е 1).

Нека $X = \beta T$, $T = \frac{X}{\beta}$, тогава, прилагайки трансформацията, получаваме че:

$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}|\frac{1}{\beta}| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}$, $0 < x < \infty$, $0 < \beta < \infty$
ще бъде плътността на Гама-разпределена сл. в. $\Gamma(\alpha, \beta)$ с параметри α за форма и β за мащаб.

Частни случаи: хи-квадрат с p степени на свобода при $\alpha = p/2, \beta = 2$, експоненциално при $\alpha = 1$.

Определяне на моментите:

$EX = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\beta}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\beta$,

защото $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}}x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}}dx = 1$ - плътност на $\Gamma(\alpha+1, \beta)$.

Аналогично

$EX^2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int\limits_0^\infty x^{\alpha+1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \frac{\Gamma(\alpha+2)\beta^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} = \alpha(\alpha+1)\beta$,

откъдето

$VX = \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - (\alpha\beta)^2 = \alpha\beta^2$.

Интересна е връзката между Гама разпределението и това на Поасон. Ако за дадено цяло α, $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ и $Y \sim Po(\frac{x}{\beta})$, то $P(X \leq x) = P(Y \geq \alpha), \forall x$.

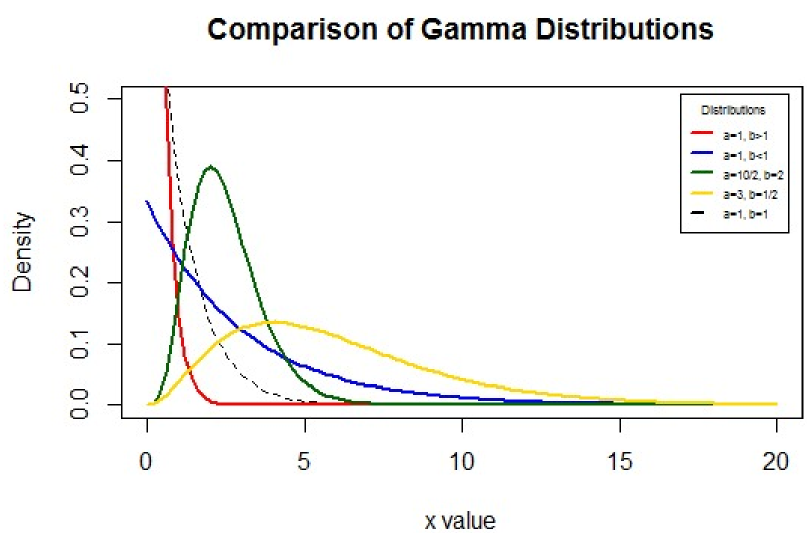
$$P(X \le x) = \frac{1}{(\alpha-1)!\beta^\alpha} \int\limits_0^x t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}} dt = \frac{1}{(\alpha-1)!\beta^\alpha} (-\beta) \int\limits_0^x t^{\alpha-1} d e^{-\frac{t}{\beta}}$$

$$= \frac{1}{(\alpha-1)!\beta^{\alpha-1}} [-t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}} \Big|_0^x + \int\limits_0^x (\alpha-1) t^{\alpha-2} e^{-\frac{t}{\beta}} dt]$$

$$-\frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{(\alpha-1)!\beta^{\alpha-1}} + \frac{1}{(\alpha-2)!\beta^{\alpha-1}} \int\limits_0^x t^{\alpha-2} e^{-\frac{t}{\beta}} dt = \frac{1}{(\alpha-2)!\beta^{\alpha-1}} \int\limits_0^x t^{\alpha-2} e^{-\frac{t}{\beta}} dt - P(Y = \alpha - 1) = \ldots =$$

$$\frac{1}{0!\beta} \int\limits_0^x t^0 e^{-\frac{t}{\beta}} dt - [p_{\alpha-1} + \ldots + p_1] = -\frac{\beta e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta} \Big|_0^x - [p_{\alpha-1} + \ldots + p_1] = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}} - [p_{\alpha-1} + \ldots + p_1] =$$

$$1 - [p_{\alpha-1} + \ldots + p_1 + p_0] = P(Y \ge \alpha)$$



5.2.2 Бета разпределение

Бета функция: $B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$, $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}$, $\quad 0 < x < 1, \quad \alpha, \beta > 0$, е плътност на сл.в. $X \sim B(\alpha, \beta)$ - Бета разпределение.

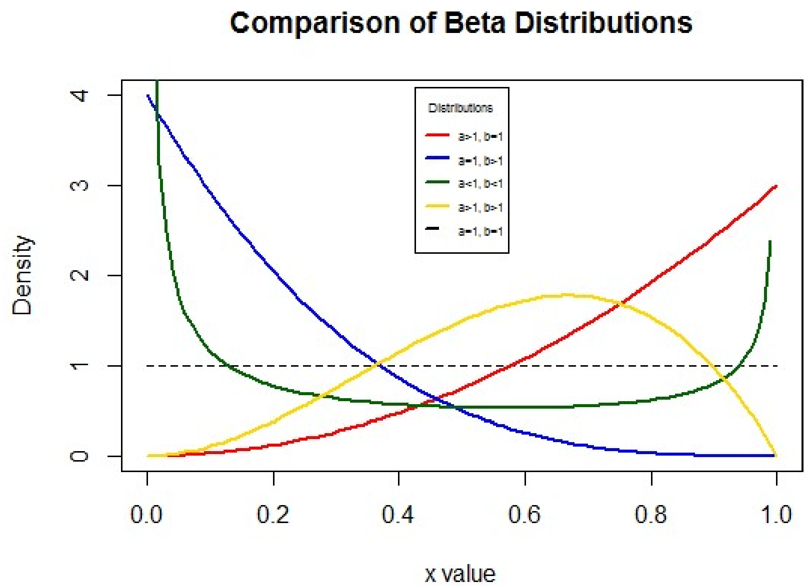
Определяне на моментите:

$$EX^n = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int\limits_0^1 x^{(n+\alpha)-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \frac{B(n+\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+n+\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta+n-1)}$$

$n = 1: \quad EX = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

$n = 2: \quad EX^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$

$VX = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$


Comparison of Beta Distributions
Distributions
a>1, b=1
a=1, b>1
a<1, b<1
a>1, b>1
a=1, b=1
Density
0
1
2
3
4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x value