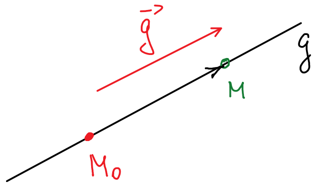
# Уравнения на права в равнината

ОКС $K = Oxy$

## I Координатни параметрични уравнения на права




Дадени са: $\boxed{\begin{array}{l} т.\ M_0(x_0, y_0) \\ \vec{g}\,(a, b) \end{array}}$ =>

$$\Rightarrow \exists!\ g \begin{cases} \ni M_0 \\ \parallel \vec{g} \end{cases}$$

Нека т. $M(x, y)$ е произволна от $g$

$x = ?,\ y = ?$ чрез $M_0$ и $\vec{g}$

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{g} \Rightarrow \exists!\ s \quad \overrightarrow{M_0M} = s.\vec{g}$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = s.\vec{g}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + s.\vec{g}$$

$$\boxed{g \begin{cases} x = x_0 + s.a \\ y = y_0 + s.b \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}}$$

т. $M \longleftrightarrow s$

## II $\boxed{\text{Общо}}$ уравнение на права $\boxed{\text{в равнината}}$

$$g: \begin{cases} x = x_0 + s.a & /.\,b \\ y = y_0 + s.b & /.(-a) \end{cases} + \qquad b.x + (-a).y + (-b.x_0 + a.y_0) = 0$$

$A = b$

$B = (-a)$

$C = -b.x_0 + a.y_0$

$$g: A.x + B.y + C = 0 \qquad (A, B) \neq (0, 0)$$

Свойства:

1) От $\begin{array}{l} A = b \\ B = -a \end{array}$ $\quad \vec{g}(a, b) \parallel g \Rightarrow \boxed{g \parallel \vec{g}(-B, A)}$

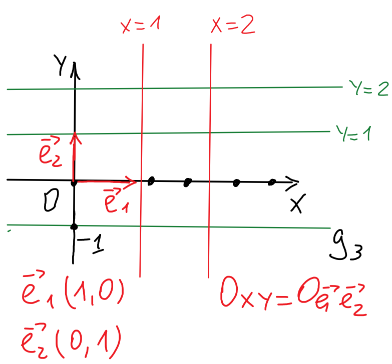
Примери:

$g_1:\ 2x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow g_1 \parallel \vec{g}_1(3, 2)$

$g_2:\ x + y - 4 = 0 \Rightarrow g_2 \parallel \vec{g}_2(-1, 1)$

$g_3:\ y + 1 = 0 \Rightarrow g_3 \parallel \vec{g}_3(-1, 0)$

$A = 0,\ B = 1$




$\boxed{Ox:\ y = 0} \Rightarrow \forall g:\ y = C$

$g \parallel Ox$

$g \parallel O_x$

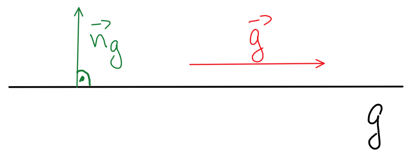
$\boxed{O_y : x = 0}$ $\qquad \forall g : x = C \Rightarrow g \parallel O_y$

2) Нормален вектор на права в равнината

$\vec{n}_g \perp g$

$\vec{n}_g \perp \vec{g} \iff \langle \vec{n}_g, \vec{g} \rangle = 0$

$(\vec{n}_g . \vec{g}) = 0$




$\vec{g}(-B, A)$

$\Downarrow$

$\vec{n}_g(A, B)$

$$\boxed{\begin{aligned} g: A.x + B.y + C = 0 \Rightarrow\ & g \parallel \vec{g}(-B, A) \\ & g \perp \vec{n}_g(A, B) \end{aligned}}$$

Спр. ОКС $K = Oxy$

---

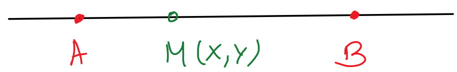
1 зад. (Права през 2 точки)

ОКС $K = Oxy$

$A(1, -2) \quad B(0, -1)$

а) Да се напише общо уравнение на AB

$\left.\begin{matrix} M(x, y) \\ A(1, -2) \\ B(0, -1) \end{matrix}\right\}$ Кога са колинеарни?




$?\ \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$-2.x - 1 + 0 - 0 + x - y = 0$

$-x - y - 1 = 0 \quad | . (-1)$

$AB: x + y + 1 = 0$

$A(1, -2) \quad 1 - 2 + 1 = 0$ Да

$B(0, -1) \quad 0 - 1 + 1 = 0$ Да

б) $M(5, 6)$

$N(1, 2) \Rightarrow MN: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 6x + y + 10 - 6 - 2x - 5y = 0$

$MN: x - y + 1 = 0$

$5 - 6 + 1 = 0$

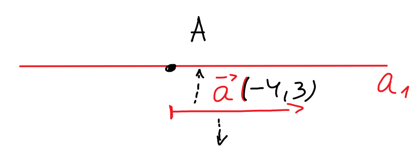
$1 - 2 + 1 = 0$

---

2 зад. (Права успоредна на дадена)

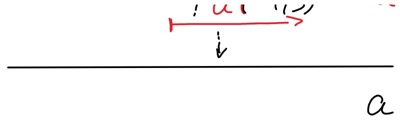
! $a: 3x + 4y + 2 = 0$

$A(1, -2) \quad 3.1 + 4.(-2) + 2 = -3 \neq 0 \Rightarrow A \notin a$



$A(1,-2)$ $\quad 3.1+4.(-2)+2=-3\neq 0 \Rightarrow A \notin a$

?, общо уравнение на $a_1 \begin{cases} \ni A \\ \parallel a \end{cases}$



$a \parallel a_1 \parallel \vec{a}(-4,3)$

$a:\ 3x+4.y+2=0$

$a_1:\ 3.x+4.y+C=0$

$A(1,-2) \Rightarrow 3.1+4.(-2)+C=0$

$3-8+C=0$

$C=5$

$a_1:\ 3x+4y+5=0$

$g \parallel g_1$ $\quad g:\ 7x-y+1=0$

$g_1:\ -14x+2y+100=0$

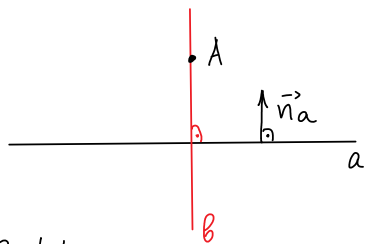
---

3 зад. (права перпендикулярна на дадена)

$a:\ 3x+4y+2=0$

$A(1,-2)$

?, общо уравнение на правата $b \begin{cases} \ni A \\ \perp a \end{cases}$



От $b \perp a \Rightarrow b \parallel \vec{n}_a(3,4)$
$\quad b \ni A(1,-2)$ $\Rightarrow b: \begin{cases} x=1+s.3 & |.4 \\ y=-2+s.4 & |.(-3) \end{cases}$ +

$b:\ 4.x-3.y-10=0$

$a:\ 3.x+4.y+2=0$

$\perp$

$b:\ 4.x-3.y+C=0$

---

4 зад. (симетрия относно права)

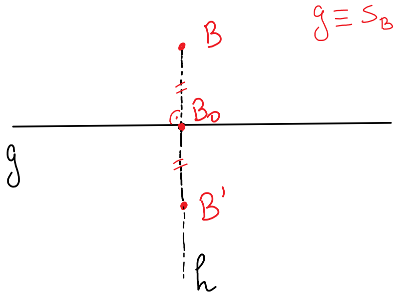
$g: x+y-1=0$ и $B(0,-1)$

$0-1-1\neq 0$

$B \xrightarrow{\sigma_g} B'$

т. $B'$ е ортогонално симетрична на $B$ спр. $g$

Търсим коорд. на т. $B'$



$g \equiv s_{BB'}$

1) ?, $h \begin{cases} \perp g \\ \ni B \end{cases}$ $\quad g:\ x+y-1=0$

$h: x-y+C=0$

$B(0,-1) \Rightarrow 0-(-1)+C=0 \Rightarrow C=-1$

$h:\ x-y-1=0$

2) ?, т. $B_0 = h \cap g \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x-y-1=0 \\ x+y-1=0 \end{array} \right.$ $\Rightarrow B_0(1,0)$ Да

3) $B(0,-1)$

$B_0(1,0)$ - средата $\Rightarrow \frac{x'+0}{2}=1$ $\quad \frac{y'+(-1)}{2}=0$

! $B'(x',y')$ $\quad x'=2$ $\quad y'=1 \Rightarrow B'(2,1)$

---

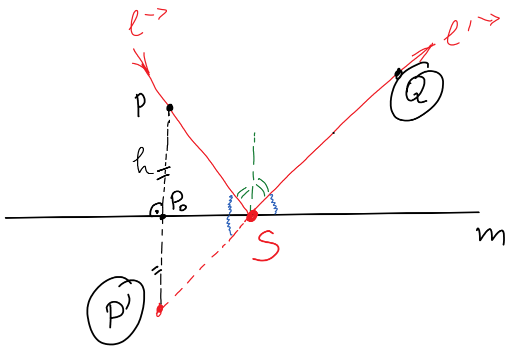
5 зад (лъчи <-> симетрия)

$m: x+y-3=0$, $P(-5,4)$, $Q(-1,1)$

Светлинен лъч $\vec{\ell}$ минава през т. P, отразява се от правата m и отраз. лъч $\vec{\ell'}$ минава през т. Q

?, уравнения на $\ell$ и $\ell'$

! Ако т $P \in \vec{\ell}$, $P \xrightarrow{G_m} P'$, то $P' \in \ell'$




Решение:

1) $P \xrightarrow{G_m} P'$, търсим $P'$

$h \begin{cases} \ni P(-5,4) \\ \perp m: x+y-3=0 \end{cases}$

$h: x-y+C=0$

$-5-4+C=0$

$C=9 \Rightarrow h: x-y+9=0$

$P_0 = m \cap h \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \overset{-3}{x}+\overset{6}{y}-3=0 \\ \underset{-3}{x}-\underset{6}{y}+9=0 \end{array} \right. \Rightarrow P_0(-3,6)$

$\left[ \begin{array}{l} P'(x',y') \\ P(-5,4) \end{array} \right. \Rightarrow \frac{x'+(-5)}{2}=-3 \quad \frac{y'+4}{2}=6$

! $P_0(-3,6)$ - средата $\quad x'=-1 \quad y'=8$

$P'(-1,8)$

2) $\ell' \begin{cases} \ni P'(-1,8) \\ \ni Q(\underset{x=-1}{-1},1) \end{cases} \Rightarrow \ell': \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ldots$

$\ell': x+1=0 \Leftrightarrow \boxed{\ell': x=-1}$

3) $S = \ell' \cap m$

$\left| \begin{array}{l} x=-1 \\ x+y-3=0 \Rightarrow y=4 \end{array} \right. \quad S(-1,4)$

4) $\ell \begin{cases} \ni P(-5,4) \\ \ldots \end{cases} \Rightarrow \ell: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ \ldots \end{vmatrix} = 0$

4) $\ell \begin{cases} \ni P(-5,4) \\ \ni S(-1,4) \end{cases}$ $Y=4$ $\Rightarrow \ell: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\boxed{\begin{aligned} &\ell: y=4 \\ &\ell': x=-1 \end{aligned}}$

---

6 зад. (Упр.)

$P(2,4)$ и $Q(0,1)$

$\ell \to \ni P$, отразява се от $Ox$ $(y=0)$ и отразеният лъч $\ell' \to \ni Q$

?, правите $\ell$ и $\ell'$

---

18.11 Задачи

1 зад. ОКС $K=Oxy$

$b: 5x+4y-13=0$ т. $H(14,15)$

$c: x+2y-5=0$

а) ?, коорд. на върховете на $\triangle ABC$, ако $b$ съдържа $AC$, $c$ съдържа $AB$, т. $H$ е ортоцентърът на $\triangle$-ка.

Решение:

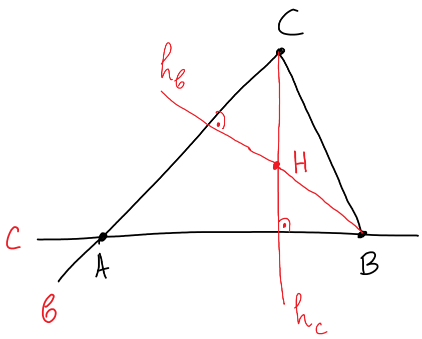
1) $A = b \cap c$ $\left| \begin{aligned} &5x+4y-13=0 \\ &x+2y-5=0 \quad /.(-2) \end{aligned} \right.$ $+$

$3x-3=0$

$x=1 \Rightarrow 2y=5-1$

$y=2$

$\boxed{A(1,2)}$




2) $h_c \begin{cases} \ni H(14,15) \\ \perp c: 1.x+2y-5=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $h_c: 2.x-1.y+D=0$

$H \to 2.14-1.15+D=0$

$D=-13$

$h_c: 2x-y-13=0$

3) т. $C = h_c \cap b$

$\left| \begin{aligned} &2x-y-13=0 \\ &5x+4y-13=0 \end{aligned} \right.$

$5 \quad -3$

$\boxed{т.\ C(5,-3)}$

4) $h_b \begin{cases} \ni H \\ \perp b: 5x+4y-13=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $h_b: 4x-5y+D=0$

$H \to \underbrace{4.14}_{56}-\underbrace{5.15}_{-75}+D=0$

$D=+19$

$\underbrace{\ldots}_{56} + \underbrace{\ldots}_{-75} + D = 0$

$D = +19$

$h_b: 4x - 5y + 19 = 0$

5) т. $B = h_b \cap C$

$\begin{cases} 4x - 5y + 19 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{т. } B(-1, 3)}$

б) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot |3 + 10 + 3 - 15 + 2 + 3| =$

$= \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ кв. ед.

---

2 зад. ОКС $K = Oxy$

$b_A: 2x - 3y - 5 = 0$ т. $B(3, -4)$

$m_A: x - 8y + 4 = 0$

а) ?, коорд. на $A$ и $C$ на $\Delta ABC$, за който

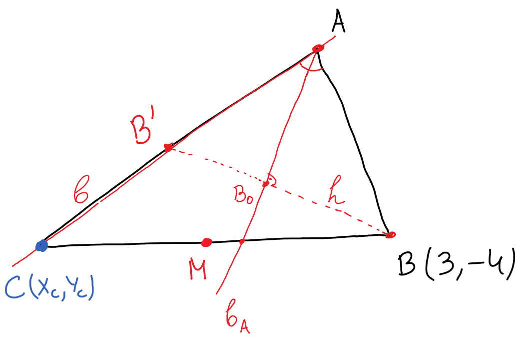
$b_A$ - вътр. ъглополовяща при $A$

$m_A$ - медиана при $A$

Решение:

1) $A = b_A \cap m_A$ $\begin{cases} 2x - 3y - 5 = 0 \\ x - 8y + 4 = 0 \end{cases}$

$A(4, 1)$




2) Нека $B \xrightarrow{\sigma_{b_A}} B' \Rightarrow B' \in AC$

$\sigma_{b_A}$ - осева симетрия отн. $b_A$

Търсим коорд. на $B'$

$h \begin{cases} \perp b_A: 2x - 3y - 5 = 0 \\ \ni B(3, -4) \end{cases} \Rightarrow h: 3x + 2y + D = 0$

$B \to 9 - 8 + D = 0$ $D = -1$

$h: 3x + 2y - 1 = 0$

$B_0 = h \cap b_A$ $\begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 \;/.3 \\ 2x - 3y - 5 = 0 \;/.2 \end{cases} \Rightarrow 13x - 13 = 0$

$x = 1$

$y = -1$

$B_0(1, -1)$ - средата

$B(3, -4)$

$B'(x', y')$

$\frac{x' + 3}{2} = 1$ $\frac{y' + (-4)}{2} = -1$

$x' = -1$ $y' = 2$

$\boxed{B'(-1,2)}$

3) Нека $b \begin{cases} \ni A(4,1) \\ \ni B'(-1,2) \end{cases} \Rightarrow b: \left|\begin{matrix} x & y & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} x & y \\ 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix} = 0$

$b: x - y + 8 - (-1 + 2x + 4y) = 0$

$b: -x - 5y + 9 = 0 \quad /.(-1)$

$\boxed{b: x + 5y - 9 = 0}$

4) т. $C(x_c, y_c)$

$C \ni b \Rightarrow x_c + 5.y_c - 9 = 0$

Нека $M$ е средата на $BC \Rightarrow M\left(\frac{x_c+3}{2}, \frac{y_c-4}{2}\right)$

$M \ni m_A: x - 8y + 4 = 0$

$\frac{x_c+3}{2} - 8.\left(\frac{y_c-4}{2}\right) + \overset{2}{4} = 0$

$x_c + 3 - 8y_c + 32 + 8 = 0$

$x_c - 8y_c + 43 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ т. $C \left| \begin{matrix} x_c + 5y_c - 9 = 0 \\ x_c - 8y_c + 43 = 0 \end{matrix} \right. \quad (-)$

$13.y_c - 52 = 0$

$y_c = 4$

$x_c + 20 - 9 = 0$

$x_c = -11$

$C(-11, 4)$

---

б) $S_{\triangle ABC} = ?$ (Упр.) Отг 39 кв. ед.

Да се намерят координатите на центъра $S$ и дължината на радиуса $R$ на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

$A(4,1) \quad B(3,-4) \quad C(-11,4)$

I н. $s_{AB}$ – симетрала

(Упр.) $s_{AB} \begin{cases} \perp AB \\ \ni N \text{ – средата на } AB \end{cases} \qquad s_{BC} \begin{cases} \perp BC \\ \ni M \text{ – средата на } BC \end{cases}$

т. $S = s_{AB} \cap s_{BC} \qquad R = |\vec{AS}|$

II $|\vec{AS}| = |\vec{BS}| = |\vec{CS}|$

$S(x,y) \Rightarrow \vec{AS}(x-4, y-1)$

$\vec{BS}(x-3, y+4)$

$S(x,y) \Rightarrow \vec{AS}(x-4, y-1)$

$\vec{BS}(x-3, y+4)$

$\vec{CS}(x+11, y-4)$

$$\begin{cases} |\vec{AS}|^2 = |\vec{BS}|^2 \\ |\vec{BS}|^2 = |\vec{CS}|^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-4)^2+(y-1)^2 = (x-3)^2+(y+4)^2 \\ (x-3)^2+(y+4)^2 = (x+11)^2+(y-4)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-8x+16+y^2-2y+1 = x^2-6x+9+y^2+8y+16 \\ x^2-6x+9+y^2+8y+16 = x^2+22x+121+y^2-8y+16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x-10y-8=0 \\ -28x+16y-112=0 \,/:(-4) \end{cases} \quad \begin{cases} x+5y+4=0 \quad (-7) \\ 7x-4y+28=0 \end{cases} \quad -39.y=0$$

$y=0$

$x=-4$

$S(-4,0) \Rightarrow \vec{AS}(-8,-1) \Rightarrow R = |\vec{AS}| = \sqrt{(-8)^2+(-1)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$

ОКС

---

3 зад. ОКС $K = Oxy$

$b: 2x-y=0$

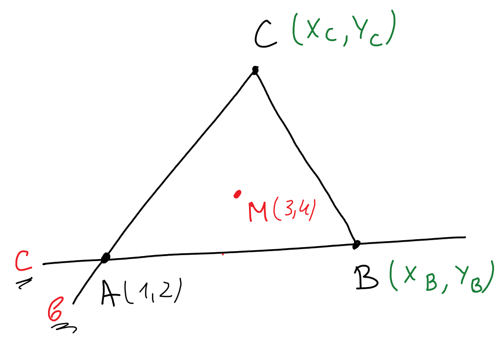
$c: x-2y+3=0$

$M(3,4)$

а) ?, коорд. на върховете на $\triangle ABC$:

$b \supset AC$, $c \supset AB$, $M$ е медицентърът

Решение:




1) т. $A = b \cap c \Rightarrow A(1,2)$

$$M \begin{cases} 3 = \dfrac{1+x_B+x_C}{3} \; ! \\ 4 = \dfrac{2+y_B+y_C}{3} \; ! \end{cases}$$

$\vec{OM} = \frac{1}{3}.(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})$

$C \in b \Rightarrow 2.x_C - y_C = 0$ !

$B \in c \Rightarrow x_B - 2y_B + 3 = 0$

$$\begin{cases} 1+x_B+x_C = 9 \\ 2+y_B+y_C = 12 \\ 2x_C - y_C = 0 \\ x_B - 2y_B + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} B(5,4) \\ C(3,6) \end{matrix}$$

б) $A(1,2)$, $B(5,4)$, $C(3,6)$

Да се намерят:
1) $P_{\triangle ABC}$
2) $S_{\triangle ABC}$
3) Вида на $\triangle ABC$ според ъглите
4) 2 височини $\Rightarrow$ ортоцентър
5) център и радиус на описана около $\triangle ABC$ окр.

---

Контролна работа №1

# Контролна работа №1

3 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, за които $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{2}, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3\pi}{4}$.
Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = \underbrace{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} + \lambda\vec{a}}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{a} \times \vec{b} + (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}$.
a) (4т.) Да се определи $\lambda$ така, че векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ да са колинеарни;
b) (8т.) Ако $\lambda = -1$, да се докаже, че векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, и $\overrightarrow{OC}$ са линейно независими и да се намери обема на тетраедъра $OABC$.

Screen clipping taken: 18.11.2021 г. 14:48

$\vec{a}^2 = 4, \; \vec{b}^2 = 2, \; (\vec{a}.\vec{b}) = 2.\sqrt{2}.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2$

$(\vec{a}.\vec{b}) = -2$ !

Не $\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = 2.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}}$ вектор ≠ число

Не $\boxed{2 + \vec{a} - \vec{b}}$

$\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}}_{\text{вектор}} \neq \underbrace{(\vec{a} \times \vec{b}) . \vec{a}}_{0}$

а) $\overrightarrow{OA} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{OB} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} + \lambda.\vec{a}$

$\overrightarrow{OB} = \underbrace{(\vec{a}^2).\vec{b} - (\vec{b}.\vec{a}).\vec{a}}_{} = \underbrace{4.\vec{b} + 2.\vec{a} + \lambda.\vec{a}}_{}$

$\lambda = ? \quad \overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB} \iff \overrightarrow{OB} = k.\overrightarrow{OA}$

I н. $k.(\vec{a} + \vec{b}) = 4\vec{b} + (2+\lambda).\vec{a}$

$\left| \begin{array}{l} k = 2+\lambda \\ k = 4 \end{array} \right. \Rightarrow 4 = 2+\lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$

II н. $\underbrace{\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \vec{0}}$ $\quad (\vec{a} + \vec{b}) \times (4\vec{b} + (2+\lambda).\vec{a}) = \vec{0} \Rightarrow$

$4(\vec{a} \times \vec{b}) + (2+\lambda).\underbrace{(\vec{b} \times \vec{a})}_{-\vec{a} \times \vec{b}} = \vec{0}$

$(4 - 2 - \lambda).\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\neq \vec{0}} = \vec{0} \Rightarrow 4 - 2 - \lambda = 0$

$\boxed{\lambda = 2}$

б) $\lambda = -1 \quad (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}).\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OA} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{OB} = \underbrace{4\vec{b} + 2\vec{a} - \vec{a}} = 4\vec{b} + \vec{a}$

$\overrightarrow{OC} = \vec{a} \times \vec{b} + (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} + \underbrace{(\vec{a}\vec{b})}_{-2}.\vec{b} - \underbrace{\vec{b}^2}_{2}.\vec{a}$

$\overrightarrow{OC} = \vec{a} \times \vec{b} - 2\vec{b} - 2.\vec{a}$

$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = (\vec{a} + \vec{b}) \times (4\vec{b} + \vec{a}) = 4(a \times b) + \vec{b} \times \vec{a} = 4(\vec{a} \times \vec{b}) - \vec{a} \times \vec{b} = 3(\vec{a} \times \vec{b})$

$(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}).\overrightarrow{OC} = 3(\vec{a} \times \vec{b}).[\vec{a} \times \vec{b} - 2\vec{b} - 2\vec{a}] = 3.(\vec{a} \times \vec{b})^2 - 6.\underbrace{(\vec{a}\vec{b}\vec{b})}_{0} - 6.\underbrace{(\vec{a}\vec{b}\vec{a})}_{0} =$

$= 3(\vec{a} \times \vec{b})^2 = 3.(\vec{a}^2\vec{b}^2 - (a.b)^2) = 3.(4.2 - (-2)^2) =$

$= 12 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ – ЛНЗ

$V_{OABC} = \frac{1}{6}.|(\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC})| = 2$ куб. ед.

---

$|\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{2} > 3 > \sqrt{3}$

$\hookrightarrow \sphericalangle ABC \Rightarrow \cos \sphericalangle ABC = \dfrac{(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{BC}|}$