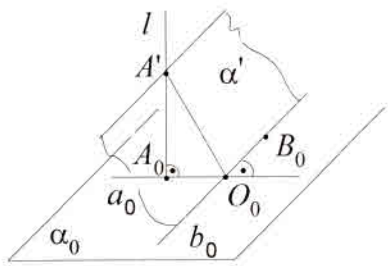
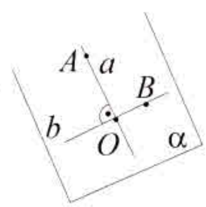
13. Представяне на афинитет между две равнини чрез подобност и ортогонално проектиране

Понякога за краткост вместо афинна трансформация ще казваме *афинитет*.
Нека φ е афинитет в E_3^* и α – крайна равнина. Тогава $\varphi(\alpha)=\alpha`$ също е крайна равнина, като $u_\alpha = \alpha \cap \Omega \xrightarrow{\varphi} \alpha' \cap \Omega = u_{\alpha'}$.
Ще разглеждаме само породеното от φ съответствие между крайните точки на α и $\alpha`$– $\varphi_\alpha$. Съответствието $\varphi_\alpha$ запазва простото отношение и трансформира успоредните прави в успоредни прави, т.е. $\varphi_\alpha$ е афинитет между $\alpha$ и $\alpha`$.
<u>Т:</u> Нека φ е афинитет в пространството и $\varphi(\alpha)=\alpha_0$ (α,α_0 – равнини), а φ_α е породеното от φ съответствие между точките на α и α_0. Съществуват равнина $\alpha`$ и афинна трансформация $\Psi$ такива , че: $\Psi(\alpha)=\alpha`$, а породеното съответствие Ψ_α между α и $\alpha`$ е подобност, като $\varphi_\alpha=\pi_0\Psi_\alpha$, където $\pi_0$ е ортогоналното проектиране на $\alpha`$ върху α_0.
Доказателство: Тъй като φ е афинитет, то породено от φ съответствие между α и α_0 – φ_α е афинитет.
Нека точка $O\in\alpha$, $\varphi(O)=\varphi_\alpha(O)=O_0\in\alpha_0$.
Както при афинитет в равнината може да се докаже, че съществуват прави a и b, такива че:
$a\cap b=O$, $a\perp b$ и $\varphi_\alpha(a)\perp\varphi_\alpha(b)$.
Нека $\varphi_\alpha(a)=a_0$ $\varphi_\alpha(b)=b_0$, т.е.
$a_0\cap b_0=O_0$ и $a_0\perp b_0$. Избираме точки $A_0\in a_0$, $B_0\in b_0$ като $|O_0A_0|=|O_0B_0|$.





Нека $A_0 \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} A\in a$ и $B_0 \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} B\in b$. В общия случай $|OA|\neq|OB|$.
Нека например $|OA|>|OB|$. Съществува права l през A_0, $l\perp\alpha_0$.
Избираме точка $A`\in l$ така, че $\dfrac{|O_0A'|}{|O_0B_0|}=\dfrac{|OA|}{|OB|}>1$. Такава точка съществува, защото от $|O_0B_0|=|O_0A_0|$ следва, че $\dfrac{|O_0A'|}{|O_0A_0|}=\dfrac{|OA|}{|OB|}>1$, т.е. $|O_0A`|>|O_0A_0|$. Това означава, че съществува правоъгълен триъгълник $O_0A_0A`$ с катет $O_0A_0$ и хипотенуза $O_0A`$.
Нека $\alpha`$ е равнината определена от точките $O_0$, $B_0$, $A`$. Нека $E\notin\alpha$, $\alpha`$. Тогава съществува афинна трансформация Ψ определена с:

$$O,A,B,E \xrightarrow{\psi} O_0,A',B_0,E \text{ и } \alpha=(O,A,B)\xrightarrow{\psi}(O_0,A',B_0)=\alpha'.$$

Означаваме с Ψ_α породеното от Ψ съответствие между α и $\alpha`$. Следователно:
$\psi_\alpha : O,A,B \xrightarrow{\psi_\alpha} O_0,A',B_0$ и $\dfrac{|O_0A'|}{|O_0B_0|}=\dfrac{|OA|}{|OB|}$, т.е. $\dfrac{|O_0A'|}{|OA|}=\dfrac{|O_0B_0|}{|OB|}$.
Така получихме, че отношението на съответните отсечки е постоянно и съгласно критерия за подобност, трансформацията Ψ_α е подобност.
Нека π_0 е ортогоналното проектиране на $\alpha`$ върху α_0. Тогава $A'\xrightarrow{\pi_0}A_0$, $O_0\xrightarrow{\pi_0}O_0$ и $B_0\xrightarrow{\pi_0}B_0$. Така имаме $O,A,B\xrightarrow{\psi_\alpha}O_0,A',B_0\xrightarrow{\pi_0}O_0A_0B_0$.
Тъй като една афинна трансформация между две равнини, се определя чрез 3 двойки съответни неколинеарни точки и $O,A,B\xrightarrow{\varphi_\alpha}O_0,A_0,B_0$, то $\varphi_\alpha=\pi_0.\Psi_\alpha$.

Следствие: Нека $ABCD$ и $A_0B_0C_0D_0$ са два афинно еквивалентни четириъгълника съответно в равнините α и α_0, a, b, c, d са правите, перпендикулярни на α_0 и минаващи съответно през точките A_0, B_0, C_0, D_0. Тогава съществува равнина α\` такава, че ако $A$\`$=a\cap\alpha$\`, $B$\`$=b\cap\alpha$\`, $C$\`$=c\cap\alpha$\`, $D$\`$=d\cap\alpha$\`, то четириъгълникът $ABCD$ е подобен на четириъгълника $A$\`B\`$C$\`D\`.

Доказателство: Тъй като $ABCD$ и $A_0B_0C_0D_0$ са афинно еквивалентни, то съществува афинна трансформация φ пораждаща афинитет φ_α между α и α_0 така, че $A,B,C,D \xrightarrow{\varphi_\alpha} A_0,B_0,C_0,D_0$. Съгласно теоремата съществуват равнина α' и афинна трансформация Ψ, пораждаща подобност Ψ_α между α и α' такива, че: $\varphi_\alpha = \pi_0\Psi_\alpha$, където π_0 е ортогоналното проектиране върху α_0. Но $a \perp \alpha_0$, $A_0 \in a$. Следователно, ако $A' = a \cap \alpha$\`, то

$A' \xrightarrow{\pi_0} A_0$. Аналогично

$B' \xrightarrow{\pi_0} B_0,\ C' \xrightarrow{\pi_0} C_0,\ D' \xrightarrow{\pi_0} D_0$

т.е.

$A,B,C,D \xrightarrow{\psi_\alpha} A',B',C',D' \xrightarrow{\pi_0} A_0,B_0,C_0,D_0$.

Тъй като Ψ_α е подобност, то

$ABCD \sim A'B'C'D'$.