Диференцируемост. Диференциране на съставна функция

Ако $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ е дефинирана в околност на (x_0,y_0), **частни производни** на f по x и по y в точката (x_0,y_0) наричаме съответно границите $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$ и $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$.

Деф. Нека $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ е дефинирана в околност на (x_0,y_0). Казваме, че f е **диференцируема** в (x_0,y_0), ако съществуват числа A и B, т.ч.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-Ah-Bk}{\sqrt{h^2+k^2}}=0 \quad (*)$$

Доказва се, че числата A и B ~~от~~ дефиницията са точно частните производни $A=f'_x(x_0,y_0)$ и $B=f'_y(x_0,y_0)$.

Иначе казано, функция е диференцируема, ако притежава частни производни и още е изпълнено $(*)$.

Ако функция не притежава някоя частна производна, тя не е диференцируема.

Да сравним с условието за диференцируемост за $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

f е диференцируема, ~~в~~ x_0, ако $\exists A=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Еквивалентно последното може да се запише $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-A.h}{h}\xrightarrow[h\to0]{}0$

Последния запис прилича вече на дефиницията за диференцируемост за $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Грубо казано, функция е диференцируема в точка, ако може да се приближи с линейна функция около тази точка:

В $\mathbb{R}^1$: $f(x_0+h)\approx f(x_0)+f'(x_0).h$

В $\mathbb{R}^2$: $f(x_0+h,y_0+k)\approx f(x_0,y_0)+f'(x_0).h+f'(y_0).k$

и т.н. за $\mathbb{R}^n$...

Както и в $\mathbb{R}^1$, и тук важи:

Th. Ако f е диференцируема в (x_0,y_0), то f - непрекъсната в (x_0,y_0).

В сила е и следната теорема:

<u>Th.</u> Ако частните производни $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$ са непрекъснати в точката (x_0,y_0), то $f(x,y)$ е диференцируема в (x_0,y_0).

<u>Зад.</u> Изследвайте за диференцируемост функциите:

а) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & x=y=0\end{cases}$ б) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$

в) $f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & x=y=0\end{cases}$ г*) $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$. само в точката $(0,0)$.

<u>Реш.</u> За $(x,y)\neq(0,0)$ функциите а, б, в можем да диференцираме частно по x и y и ще получим непрекъснати функции.

По горната теорема, функциите са диференцируеми $f(x,y)$.

Остава да изследваме точката $(0,0)$. Тъй като функциите са зададени по случаи, ще пресметнем $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ по дефиниция и после ще заместим в $(*)$ (ако те съществуват):

а) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{0}{h}=0.$

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(0,h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{0}{h}=0.$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-0.h-0.k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2k}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

Числителят и знаменателят са от трета степен.

Ако изберем $h=k$, получаваме частно на полиноми от трета степен.

Това ни подсказва, че границата не е 0. За да покажем, че границата не е някое число е удобно да ползваме Хайне:

$(h_n,k_n)=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\xrightarrow[n\to\infty]{}(0,0).$

$$\frac{h_n^2k_n}{(h_n^2+k_n^2)^{3/2}}=\frac{1/n^3}{(2/n^2)^{3/2}}=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n^3}{2^{3/2}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt2}\neq0\Rightarrow(*)\text{ не е в сила}$$

$\Rightarrow f$ не е диференцируема $f(0,0)$

Да отбележим, че по-рано видяхме, че $f(x,y)$ е непрекъсната в $(0,0)$. Така f е пример за непрекъсната, но не диференцируема функция.

б) $f'_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 \sin\frac{1}{h^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h \cdot \sin\dfrac{1}{h^2}.$

Тук не можем да ползваме границата $\dfrac{\sin h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$, защото аргумента на $\sin$ клони към ∞, не към 0.

Въпреки това границата съобразяваме, че е от вида

$$\underbrace{h}_{\text{клони към } 0} \cdot \underbrace{\left(\sin\frac{1}{h^2}\right)}_{\text{ограничена}} \Rightarrow \text{Границата е } 0 \text{ като следствие от лемата за полицаите.}$$

Така $f'_x(0,0)=0$. Поради симетрията на x и y, $f'_y(0,0)=0$.

Накрая заместваме в $(*)$:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-f'_x(0,0).h - f'_y(0,0).k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\,\sin\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Забелязваме, че можем да положим $t=\sqrt{h^2+k^2} \xrightarrow{(h,k)\to(0,0)} 0$.

Но $\lim\limits_{t\to 0} t \sin\dfrac{1}{t^2} = 0$ точно както пресметнахме $f'_x(0,0)$.

$\Rightarrow$ $(*)$ е изпълнено и f е диференцируема в $(0,0)$.

Ще отбележим, че за $(x,y)\neq(0,0)$,

$$f'_x(x,y) = 2x\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2).\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).\left(-\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\right).2x =$$

$$= 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

За $x_n=y_n=\dfrac{1}{2\sqrt{n\pi}}$ имаме: $x_n^2+y_n^2 = \dfrac{1}{4n\pi}+\dfrac{1}{4n\pi} = \dfrac{1}{2n\pi} \Rightarrow \dfrac{1}{x_n^2+y_n^2} = 2n\pi$

$$f'_x(x_n,y_n) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\sin(2n\pi)}_{0} - \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.2n\pi.\underbrace{\cos(2n\pi)}_{1} = -2\sqrt{n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty.$$

Така $(x_n,y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}(0,0)$, то $f'_x(x_n,y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, докато $f'_x(0,0)=0$.

т.е. f'_x не е непрекъсната. Въпреки това f е диференцируема.
Така непрекъснатост на f'_x и f'_y е достатъчно, но не и необходимо условие за диференцируемост.

в) $f'_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{-1/h^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1/h}{e^{1/h^2}}$

При $h \to 0$, $|1/h| \to \infty$. Нека $t = 1/h$.

$\dfrac{t}{e^{t^2}} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$ като полином върху експонента. $\Rightarrow f'_x(0,0) = 0$.

Аналогично $f'_y(0,0) = 0$.

Тогава $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{e^{-\frac{1}{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}}$. Нека $\sqrt{h^2+k^2} = t$, $t \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$.

Така получаваме $\dfrac{e^{-1/t^2}}{t} = \dfrac{1/t}{e^{1/t^2}} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ както $f'_x(0,0)$.

$\Rightarrow f$ - диференцируема в $(0,0)$.

г) $f'_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$ поради $f(0,0) = f(0,h) = 0$.

Аналогично, $f'_y(0,0) = 0$.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - 0.h - 0.k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Числителя и знаменателя са от еднаква обща степен.

Да изберем $(h_n, k_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{|h_n k_n|}}{\sqrt{h_n^2+k_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1/n^2}{1/n^2 + 1/n^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \neq 0.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \neq 0$, т.е. f не е диференцируема в $(0,0)$.

Деф. $C^k(X)$ ще бележим множеството от функции с до k-ти непрекъснати частни производни, дефинирани в X.

$C^0(\mathbb{R})$ - непрекъснати функции на един аргумент

$C^1(\mathbb{R})$ - ~~непрекъснати~~ функции на един аргумент, които притежават и непрекъсната ~~частна~~ първа производна.

Тв. Нека $\varphi(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, x_i - диференцируеми по t функции.

(За φ казваме че е съставна функция-композиция на f и $x_1, x_2, \dots, x_n$).

Тогава φ е диференцируема по t и

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x_2'(t) + \dots$$

$$\dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x_n'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x_i'(t)$$

Още последното се записва и като $\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} \cdot x_i'(t)$.

За да отличаваме диференциранията по коя променлива се извършват, можем да бележим диференцирането по t с $\dot{}$ вместо $'$:

$\dot{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} \cdot \dot{x}_i(t)$. (Аргументът на f'_{x_i} пропускаме, защото се подразбира).

Всъщност това твърдение е обобщение на твърдението за производна на съставна функция: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Така $f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ диференцираме n пъти като съставна функция и сумираме всички произведения.

Пр. $f(a,b) = a^b$, $\varphi(t) = f(x(t), y(t)) = x(t)^{y(t)}$.

Частните производни са
$$f'_a(a,b) = b \cdot a^{b-1}$$
$$f'_b(a,b) = (a^b)'_b = (e^{b \ln a})'_b = e^{b \ln a} \cdot \ln a = a^b \cdot \ln a$$

Тогава за $\varphi(t) = x(t)^{y(t)} = f(x(t), y(t))$ имаме:

$\dot\varphi(t) = f'_a \cdot \dot x(t) + f'_b \cdot \dot y(t) = f'_a(x(t), y(t)) \cdot \dot x(t) + \cancel{f'_b(x(t), y(t))}$

$+ f'_b(x(t), y(t)) \cdot \dot y(t) = y(t) \cdot x(t)^{y(t)-1} \cdot \dot x(t) + x(t)^{y(t)} \cdot \ln(x(t)) \cdot \dot y(t)$

$= x(t)^{y(t)-1} [y(t) \dot x(t) + x(t) \cdot \ln x(t) \cdot \dot y(t)]$.

В частност за $x(t) = y(t) = 1$, $\dot x(t) = \dot y(t) = 1$.

$\dot\varphi(t) = t^{t-1}[t \cdot 1 + t \cdot \ln t \cdot 1] = t^t(1 + \ln t)$.

Зад. Нека $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, т.е. φ има непрекъснати частни производни.

а) $f(x,y,z) = \varphi(xy, \frac{y}{z})$. Докажете, че $x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial f}{\partial z}$

б) $f(x,y,z) = \varphi(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$. Докажете, че $x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

Реш. а) $f(x,y,z) = \varphi(u(x,y,z), v(x,y,z))$

$u(x,y,z) = xy \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

$v(x,y,z) = y/z \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1/z, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}$.

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{y}{z^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}$.

$\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ не знаем. Затова изразяваме всичко чрез тях.

Тогава $y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = y\left(x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{1}{z}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + z\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot 0 - \frac{y}{z^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) =$

$= (xy + 0 \cdot z)\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \cancel{\left(\frac{y}{z} - z \cdot \frac{y}{z^2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial v}} = x \cdot y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} = x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$.

Тук ползвахме, че твърдението за диференциране на съставна функция $\varphi(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ важи и за функция φ на повече променливи: $\varphi(y,z) = f(x_1(y,z), \ldots, x_n(y,z))$

$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y}$; $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial z}$.

д) $u(x,y,z) = y/x$, $v(x,y,z) = z/x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{z}{x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{x}.$$

$f(x,y,z) = \varphi(u(x,y,z), v(x,y,z))$

Изразяваме $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ чрез производните на φ: $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{z}{x^2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + z\cdot\frac{\partial f}{\partial z} = x\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{z}{x^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + y\cdot\frac{1}{x}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + z\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} =$$

$$= -\frac{y}{x}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{z}{x}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{y}{x}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{z}{x}\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0.$$

Зад: Нека $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ и $f(x,y) = \varphi(xy, \frac{y}{x})$. Изразете частните производни на f $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ чрез частните производни на φ.

Реш. $u(x,y) = xy$, $v(x,y) = \frac{y}{x}$ $\quad f(x,y) = \varphi(u(x,y), v(x,y))$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = y\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = x\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

За да намерим вторите производни, диференцираме ~~отново~~.

$\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ е функция на u и v, точно както и φ е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)\right] + \underbrace{\frac{2y}{x^3}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\right]}_{\text{диференциране на произведение на функции на } x.}$$

$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)\right]$ и $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\right)$ намираме аналогично:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y\cdot\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \frac{2y}{x^3}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right] =$$

$$= y\left(y\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right) + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\left(y\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u} - \frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right) =$$

$$= y^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{2y^2}{x^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \frac{2y}{x^3}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

Тук ползвахме, че $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u}$ поради тяхната непрекъснатост.
Останалите производни са също толкова досадни.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) =$$

$$= 1\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u} + x\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right] +$$

$$+ \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1}{x}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right] =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + x\left(y\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u}\cdot y - \frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right) =$$

$$= xy\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \cancel{\frac{y}{x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}} + \cancel{\frac{y}{x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u}} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = x\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} =$$

$$= x\cdot\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= x\left(x\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right) + \frac{1}{x}\cdot\left(x\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right) =$$

$$= x^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + 2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}.$$

Забелязва се прилика между $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial f}{\partial x}$ която прилича на формулата $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \underbrace{y^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} \underbrace{- 2\cdot y\cdot\frac{y}{x^2}}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} + \underbrace{\left(-\frac{y}{x^2}\right)^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \text{израз със } \frac{\partial\varphi}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

тези коефициенти се получават точно като $(a-b)^2$.