Изпит – задачи по "Дискретни структури", СУ, ФМИ, КН2, 07 февруари 2020 г.

Първа част

Име: .... ФN: .... Група: ....

Зад.	**1**	**2**	**3**	*Общо на част 1*
точки				
от макс.	20	20	20	60

Всяка от двете части на изпита съдържа по три задачи и всяка задача носи 20 точки. Всяка точка носи един процент. Ако имате над 100 точки, това е бонус за Вас.

Обосновете добре отговорите си.

Задача 1. Докажете или опровергайте, че съществува граф G с 51 върха, такъв че G и $\overline{G}$ са изоморфни.

Задача 2. Докажете, че за всяко $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n}$$

където F_i означава i-тото число на Фибоначи, за всяко i. Числата на Фибоначи се дефинират така:

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0, \\ 1, & \text{ако } n = 1, \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{ако } n > 1 \end{cases}$$

Задача 3. Нека n и k са естествени числа и $k \leq n$. Разпределяме n студенти в k учебни зали така, че всеки студент да бъде разпределен в точно една зала и във всяка зала да има поне един студент. Докажете, че броят на възможните разпределения е равен на $\displaystyle\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} r^n (-1)^{k-r}$.

Изпит – задачи по "Дискретни структури", КН, II поток, 07 февруари 2020 г.

Втора част

Име: .... ФН: .... Група: ....

Зад.	**4**	**5**	**6**	*Общо на част 2*	*Общо на изпита*
точки					
от макс.	20	20	20	60	120

Обосновете добре отговорите си.

Задача 4. Докажете или опровергайте, че логическият съюз **импликация** притежава свойството асоциативност.

Задача 5. Нека $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ е множество от булеви променливи.

а) Дайте определение на *дизюнктивна нормална форма*. **(2 точки)**

Колко дизюнктивни нормални форми има над множеството X? **(8 точки)**

б) Дайте определение на *съвършена дизюнктивна нормална форма*. **(2 точки)**

Колко съвършени дизюнктивни нормални форми има над X? **(8 точки)**

Задача 6. Химик разполага с n вещества, които умее да превръща едно в друго с химични реакции. За всяко $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ е дадено $T(i, j)$: броят на начините за пряко превръщане на i-тото в j-тото вещество, където $T(i, j) \in \mathbb{N}^+$. Всички числа $T(i, j)$ се смятат за **дадени**.

Пряко превръщане означава превръщане, осъществено с помощта на точно **една** химична реакция. Съществуват обаче и косвени превръщания, всяко от които е поредица от **две или повече** химични реакции: едно вещество се превръща в друго с пряко превръщане, то се превръща в трето с пряко превръщане и така нататък до получаване на желаното крайно вещество.

Забележете, че при тези условия е възможно едно вещество да бъде превръщано в себе си, при това по няколко начина. Нещо повече: ако превърнем i-тото вещество в самото него и после пак превърнем i-тото вещество в самото него, това е косвено превръщане с две междинни реакции.

Отговорете на следния въпрос. При дадени ℓ и m, където $\ell, m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, по колко начина можем да превърнем вещество номер ℓ във вещество номер m чрез точно 100 междинни реакции?

Допустимо е да използвате наготово теоретични резултати, доказани на лекции, само трябва да обясните добре за какво става дума.

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Да допуснем, че съществува граф G с 51 върха, изоморфен на допълнението си $\overline{G}$. G и $\overline{G}$ заедно образуват оцветяване с два цвята на ребрата на K_{51} — пълния граф с 51 върха: ребрата на G са оцветени например в бяло, а ребрата на $\overline{G}$ — в черно. Щом G и $\overline{G}$ са изоморфни, те имат равен брой ребра, следователно K_{51} притежава четен брой ребра. Това обаче не е вярно: графът K_{51} има $\dbinom{51}{2} = \dfrac{51\,.\,50}{2} = 51\,.\,25 = 1275$ ребра, което е нечетно число.

Задача 2. С формулата на Бине и биномната формула на Нютон преработваме лявата страна, докато получим дясната:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right] = F_{2n}\,.$$

Задача 3. Нека A_p е множеството от разпределенията, в които зала № p е празна, $1 \le p \le n$. В задачата се иска да докажем, че

$$\left|\,\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k}\,\right| = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}r^n(-1)^{k-r}.$$

Множителят $(-1)^{k-r}$ идва от принципа за включване и изключване; $k-r$ е броят на залите, за които отнапред знаем, че са празни; остават r зали (сред които също може да има празни). Съществуват $\dbinom{k}{k-r} = \dbinom{k}{r}$ начина да изберем $k-r$ празни зали. За всеки конкретен избор има r^n начина да разпределим n студенти в другите r зали: всеки студент има r възможности.

Задача 4. Импликацията не е асоциативна, защото

$$(p \to q) \to r \not\equiv p \to (q \to r).$$

Ако съждението q е вярно, а пък p и r са неверни, то дясната страна е истина, а лявата е лъжа.

Задача 5. а) Дизюнктивната нормална форма е непразна дизюнкция от непразни конюнкции, чиито операнди са или отделни променливи, или променливи с отрицания. Не се разрешава повтаряне на променлива в една конюнкция, нито повтаряне на конюнкция в дизюнкцията, нито пък едно отрицание да обхваща няколко променливи. Редът на операндите няма значение.

Тоест всяка променлива участва в дадена конюнкция или със отрицание, или без отрицание, или изобщо не участва — всичко три възможности. Затова има 3^n конюнкции, където n е броят на променливите. Вадим празната конюнкция и остават $3^n - 1$ непразни конюнкции.

За всяка конюнкция има две възможности: да участва или да не участва в дизюнкцията. Затова броят на дизюнкциите е 2^{3^n-1}. Махайки празната дизюнкция, получаваме отговора: съществуват $2^{3^n-1} - 1$ дизюнктивни нормални форми.

б) Една дизюнктивна нормална форма е съвършена само когато всяка нейна конюнкция съдържа всяка променлива (по веднъж). За всяка променлива по отношение на всяка конюнкция има две възможности: да участва в конюнкцията със или без отрицание. В сметките от точка "а" заменяме числото 3 с числото 2: получава се $2^{2^n - 1} - 1$. Обаче това не е крайният резултат. Сега няма празна конюнкция, която да вадим: всяка конюнкция съдържа всички променливи. Затова изваждането на единица в показателя отпада. На главния ред изваждането се запазва, защото едно множество от конюнкции може да бъде празно, а дизюнктивната нормална форма не може да бъде празна.

Окончателно, съществуват $2^{2^n} - 1$ съвършени дизюнктивни нормални форми.

Задача 6. Разглеждаме мултиграф с n върха — веществата, с които разполага химикът; от връх № i към връх № j отиват $T(i, j)$ ребра. Образуваме матрицата T с n реда и n стълба: в пресечната клетка на ред № i и стълб № j стои числото $T(i, j)$, което е дадено по условие. Косвените превръщания на вещество № ℓ във вещество № m с точно сто преки превръщания съответстват взаимноеднозначно на пътищата от връх № ℓ до връх № m, съставени от сто ребра. Както е известно, броят на тези пътища е равен на числото, стоящо в ред № ℓ и стълб № m на матрицата T^{100}.