Упражнение №7

Компактни оператори

За още задачи по тази и следващи теми, както и за задачите от контролни, писмени и устни изпити по СЕП, давани през последните 15 години, моля посетете

https://store.fmi.uni-sofia.bg/fmi/logic/sep.html

Казваме, че операторът $\Gamma\colon \mathcal{F}_k \longrightarrow \mathcal{F}_m$ е *монотонен*, ако за всяка двойка функции $f, g \in \mathcal{F}_k$ е изпълнено:

$$f \subseteq g \implies \Gamma(f) \subseteq \Gamma(g).$$

Операторът $\Gamma\colon \mathcal{F}_k \longrightarrow \mathcal{F}_m$ наричаме *компактен*, ако за всяка функция $f \in \mathcal{F}_k$, всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}^m$ и всяко $y \in \mathbb{N}$ е в сила еквивалентността:

$$\Gamma(f)(\bar{x}) \simeq y \iff \exists\theta(\theta \subseteq f \ \&\ \theta \text{ е крайна } \&\ \Gamma(\theta)(\bar{x}) \simeq y). \tag{1}$$

При доказване на компактност на оператор ще се възползваме от следващото твърдение от лекциите:

Твърдение 1. Операторът $\Gamma : \mathcal{F}_k \longrightarrow \mathcal{F}_m$ е компактен тогава и само тогава, когато са изпълнени условията:

1) Γ е монотонен;

2) За всички $f \in \mathcal{F}_k$, $\bar{x} \in \mathbb{N}^m$ и $y \in \mathbb{N}$ е в сила импликацията:

$$\Gamma(f)(\bar{x}) \simeq y \implies \exists\theta(\theta \subseteq f \ \&\ \theta \text{ е крайна } \&\ \Gamma(\theta)(\bar{x}) \simeq y). \tag{2}$$

Задача 1. Да се докаже, че следващите оператори са компактни:

а) операторът за диагонализация $\Gamma_d : \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_1$, който се дефинира така: $\Gamma_d(f)(x) \simeq f(x, x)$ за всяко $x \in \mathbb{N}$;

б) операторът $\Gamma_{sq}\colon \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ със следната дефиниция: $\Gamma_{sq}(f) = f \circ f$;

в) операторът за сумиране $\Gamma_{sum} : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$, който за всяко $x \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma_{sum}(f)(x) \simeq \sum_{z=0}^{x} f(z);$$

г) операторът Γ, свързан с функцията на Акерман:

$$\Gamma(f)(x, y) \simeq \begin{cases} y + 1, & \text{ако } x = 0 \\ f(x - 1, 0), & \text{ако } x > 0 \ \&\ y = 0 \\ f(x - 1, f(x, y - 1)), & \text{ако } x > 0 \ \&\ y > 0. \end{cases}$$

Решение. За всеки от операторите показваме, че е монотонен и че за него е в сила правата посока (2) на условието за компактност, след което прилагаме *Твърдение* 1.

а) Монотонност: да вземем две функции f и g от $\mathcal{F}_2$, такива че $f \subseteq g$. За да видим, че и $\Gamma_d(f) \subseteq \Gamma_d(g)$, следваме определението на релацията $\subseteq$:

$$\Gamma_d(f) \subseteq \Gamma_d(g) \stackrel{\text{деф}}{\iff} \forall x \forall y\ (\Gamma_d(f)(x) \simeq y \implies \Gamma_d(g)(x) \simeq y).$$

Наистина, да вземем произволни естествени x и y и да приемем, че $\Gamma_d(f)(x) \simeq y$. Трябва да покажем, че и $\Gamma_d(g)(x) \simeq y$.

Условието $\Gamma_d(f)(x) \simeq y$ означава $f(x,x) \simeq y$. Но $f \subseteq g$, следователно и $g(x,x) \simeq y$, или все едно $\Gamma_d(g)(x) \simeq y$. Понеже x и y бяха произволни, можем да заключим, че $\Gamma_d(f) \subseteq \Gamma_d(g)$.

Да проверим, че за Γ_d е в сила импликацията

$$\forall f_{\in \mathcal{F}_1} \forall x \forall y\ (\Gamma_d(f)(x) \simeq y \implies \exists \theta(\theta \subseteq f\ \&\ \theta \text{ е крайна } \&\ \Gamma_d(\theta)(x) \simeq y)).$$

За целта фиксираме функция $f \in \mathcal{F}_1$ и естествени числа x и y и приемаме, че $\Gamma_d(f)(x) \simeq y$, което ще рече — $f(x,x) \simeq y$. Очевидно резултатът y зависи само от стойността на f в точката (x,x). Тогава е ясно коя крайна функция $\theta \subseteq f$ да изберем, така че да си осигурим $\Gamma_d(\theta)(x) \simeq y$ — полагаме θ да е *рестрикцията на* f до множеството $\{(x,x)\}$:

$$\theta := f \restriction \{(x,x)\}.$$

От избора на θ автоматично следва, че тя е подфункция на f, дефинирана в най-много една точка — точката (x,x). Но ние имаме, че $(x,x) \in Dom(f)$, откъдето

$$\theta(x,x) = f(x,x)\ (= y).$$

Оттук веднага $\Gamma_d(\theta)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \theta(x,x) \simeq y$.

б) По дефиниция

$$\Gamma_{sq}(f)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} (f \circ f)(x) \simeq f(f(x)).$$

За да се убедим, че и този оператор е монотонен, вземаме отново произволни функции f, g от $\mathcal{F}_1$, такива че $f \subseteq g$. Да приемем, че $\Gamma_{sq}(f)(x) \simeq y$ за някои $x, y \in \mathbb{N}$. Това означава, че $f(f(x)) \simeq y$. В такъв случай, съгласно нашата дефиниция за суперпозиция, със сигурност $f(x)$ ще е дефинирано, т.е. $f(x) \simeq z$ за някое z. Понеже x и z са от $Dom(f)$, а $f \subseteq g$, то веднага $f(x) = g(x)$ и $f(z) = g(z)$. Но тогава

$$\Gamma_{sq}(g)(x) \simeq g(g(x)) \simeq g(\underbrace{f(x)}_{z}) \simeq f(\underbrace{f(x)}_{z}) \simeq y,$$

което и трябваше да покажем.

Нсочваме се към проверка на импликацията

$$\forall_{f \in \mathcal{F}_1} \forall x \forall y \; (\Gamma_{sq}(f)(x) \simeq y \implies \exists \theta(\theta \subseteq f \;\&\; \theta \text{ е крайна } \&\; \Gamma_{sq}(\theta)(x) \simeq y)).$$

Избираме произволни $f \in \mathcal{F}_1$, x и y и приемаме, че $\Gamma_{sq}(f)(x) \simeq y$, т.е. $f(f(x)) \simeq y$. Вече видяхме, че оттук следва, в частност, че $f(x)$ е дефинирана. Можем да вземем

$$\theta := f \restriction \{x,\; f(x)\}.$$

Да отбележим, че това всъщност е единственият възможен избор за θ, ако искаме тя да е подфункция на f, защото само за точките x и $f(x)$ знаем със сигурност, че принадлежат на дефиниционната област на f.

Ясно е, че $\theta(x) = f(x)$ и $\theta(f(x)) = f(f(x))$. Тогава

$$\Gamma_{sq}(\theta)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \theta(\underbrace{\theta(x)}_{=f(x)}) \simeq \theta(f(x)) \simeq f(f(x)) \simeq y.$$

в) Оставяме проверката за монотонността на Γ_{sum} за упражнение и се насочваме директно към условието (2).

За целта, нека $\Gamma_{sum}(f)(x) \simeq y$, т.е. $f(0) + \dots + f(x) \simeq y$ за някои f, x и y. В частност, $!f(0), \dots, !f(x)$. Резултатът y се определя от стойностите на f в точките $0, 1, \dots, x$, и следователно $Dom(\theta)$ трябва да включва тези точки (и само тях, ако искаме θ да е подфункция на f). Наистина, нека

$$\theta := f \restriction \{0, \dots, x\}.$$

Така ще имаме

$$\Gamma_{sum}(\theta)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \theta(0) + \dots + \theta(x) \simeq f(0) + \dots + f(x) \simeq y.$$

г) Тъй като операторът

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} y+1, & \text{ако } x = 0 \\ f(x-1, 0), & \text{ако } x > 0 \;\&\; y = 0 \\ f(x-1, f(x, y-1)), & \text{ако } x > 0 \;\&\; y > 0. \end{cases}$$

се дефинира с разглеждане на случаи, ще се наложи и ние да разгледаме тези случаи, когато доказваме неговата компактност.

За да видим, че Γ е монотонен, вземаме произволни двуместни функции f и g, такива че $f \subseteq g$ и приемаме, че $\Gamma(f)(x,y) \simeq z$ за някои x, y и z. Искаме да покажем, че $\Gamma(g)(x,y) \simeq z$. Разглеждаме поотделно трите случая от дефиницията на Γ.

1 сл. $x = 0$. Тук очевидно $\Gamma(f)(x,y)$ = y+1 =$\Gamma(g)(x,y)$.

2 сл. $x > 0$ & $y = 0$. В този случай $\Gamma(f)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(x-1,0) \simeq z$. Но $f \subseteq g$, значи и $g(x-1,0) \simeq z$, откъдето $\Gamma(g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} g(x-1,0) \simeq z$.

3 сл. $x > 0$ & $y > 0$. По определение $\Gamma(f)(x,y) \simeq f(x-1, f(x,y-1))$. От допускането $\Gamma(f)(x,y) \simeq z$ ще имаме $f(x-1,f(x,y-1)) \simeq z$. От дефиницията за суперпозиция следва, че и $f(x,y-1)$ ще е дефинирана. Понеже $f \subseteq g$, ще имаме, че

$$f(x,y-1) = g(x,y-1) \quad \text{и} \quad f(x-1,f(x,y-1)) = f(x-1,g(x,y-1)).$$

Оттук

$$\Gamma(g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} g(x-1,g(x,y-1)) \simeq g(x-1,f(x,y-1)) \simeq f(x-1,f(x,y-1)) \simeq y.$$

Сега се насочваме към проверката на импликацията

$$\forall f_{\in \mathcal{F}_2} \forall x \forall y\, \forall z (\Gamma(f)(x,y) \simeq z \implies \exists \theta(\theta \subseteq f \,\&\, \theta \text{ е крайна } \&\, \Gamma(\theta)(x,y) \simeq z)).$$

Да приемем, че $\Gamma(f)(x,y) \simeq z$ за някои f, x и y. Отново се налага да следваме случаите от дефиницията на Γ.

1 сл. $x = 0$. В този случай $\Gamma(f)$ не зависи от f и значи ако вземем

$$\theta := \emptyset^{(2)}$$

ще имаме със сигурност, че $\theta \subseteq f$ и $\Gamma(\theta)(x,y) \simeq z$. Да отбележим, че това е единственият възможен избор на θ, защото допускането $\Gamma(f)(x,y) \simeq z$ не ни дава никаква информация за $Dom(f)$, в частност, напълно възможно е и f да е $\emptyset^{(2)}$.

2 сл. $x > 0$ & $y = 0$. Условието $\Gamma(f)(x,y) \simeq z$ тук означава $f(x-1,0) \simeq z$. Тогава за

$$\theta := f \restriction \{(x-1,y)\}$$

очевидно ще е изпълнено $\Gamma(\theta)(x,y) \simeq z$.

3 сл. $x > 0$ & $y > 0$. В този случай имаме, че $f(x-1,f(x,y-1)) \simeq z$. Съобразете, че за функцията

$$\theta := f \restriction \{(x,y-1),(x-1,f(x,y-1))\}$$

ще е в сила $\Gamma(\theta)(x,y) \simeq z$. $\square$

за упражнение **Задача 2. (Писмен изпит, 01/09/2016, спец. И и КН)** Казваме, че една частична функция $f : \mathbb{N} \multimap \mathbb{N}$ е *растяща*, ако

$$\forall x \forall y (x \leq y \,\&\, !f(x) \,\&\, !f(y) \implies f(x) \leq f(y)).$$

Нека Γ е следният оператор:

$$\Gamma(f)(x, y) \simeq \begin{cases} f(y) - f(x), & \text{ако } f \text{ е растяща} \\ f(y) + f(x), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вярно ли е че:

а) Γ е монотонен оператор?

б) Γ е компактен оператор?

Обосновете отговорите си.

Още задачи по тази тема може да намерите в сборника по СЕП, 64-72 стр.