Положително дефинитни квадратични форми

Определение. *Нека V е линейно пространство над $\mathbb{R}$ и $\tilde{\varphi}$ е квадратична форма във V. Ще казваме, че $\tilde{\varphi}$ е положителна дефинитна квадратична форма, ако за всеки вектор $\boldsymbol{u}$ от V е изпълнено $\tilde{\varphi}(\boldsymbol{u}) \geq 0$, като $\tilde{\varphi}(\boldsymbol{u}) = 0$ точно когато $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.*

Нека във V е въведено скаларно произведение $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Да положим $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Тогава φ е симетрична билинейна форма, чиято асоциирана квадратична форма $\tilde{\varphi}$ е положително дефинитна. Обратно, нека $\tilde{\varphi}$ е положително дефинитна квадратична форма и φ е (единствената) симетрична билинейна форма, асоциирана с $\tilde{\varphi}$. Тогава във V можем да въведем скаларно произведение като положим $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

Твърдение 1. *Една квадратична форма в n-мерно пространство е положително дефинитна тогава и само тогава, когато тя има каноничен вид $\lambda_1\xi_1^2 + \cdots + \lambda_n\xi_n^2$ и $\lambda_i > 0$ за $i = 1, \ldots, n$, т. е. когато нормалният вид на формата е $\eta_1^2 + \cdots + \eta_n^2$.*

Нека $A = (a_{ij})_{n\times n}$ е квадратна матрица от ред n. Да положим $\Delta_0 = 1$ и

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

за $k = 1, \ldots, n$. Ясно е ,че $\Delta_1 = a_{11}$ и $\Delta_n = \det A$. Детерминантите Δ_1, $\ldots$, Δ_n ще наричаме *главни минори* на матрицата A.

Твърдение 2 (метод на Якоби). *Нека $\dim V = n < \infty$ и $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ е базис на V. Нека $\tilde{\varphi}$ е квадратична форма във V и $A = (a_{ij})_{n\times n}$ е матрицата ѝ в този базис. Тогава, ако главните минори на матрицата A са различни от нула, то съществува базис $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ на V, в който квадратичната форма има вида*

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{u}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\xi_n^2, \qquad \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{f}_i \in V.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $1 \leq j \leq n$. Да разгледаме системата

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jj}x_j = 1. \end{array} \right. \tag{1}$$

По-кратко k-тото уравнение на системата може да се запише във вида

$$\sum_{s=1}^{j} a_{ks}x_s = \delta_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{при } k < j \\ 1 & \text{при } k = j \end{cases}$$

$(k = 1, \ldots, j)$. Детерминантата на системата е Δ_j и по условие $\Delta_j \neq 0$. Следователно тя има единствено решение $(x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jj})$. Замествайки в k-тото уравнение неизвестните $x_1, \ldots, x_j$ съответно с $x_{j1}, \ldots, x_{jj}$, получаваме равенствата

$$\sum_{s=1}^{j} a_{ks} x_{js} = \delta_{kj} \tag{2}$$

$(k = 1, \ldots, j)$. От вида на свободните членове на системата (1) и от формулите на Крамер получаваме $x_{jj} = \dfrac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}$ (формулата е вярна и при $j = 1$). В частност $x_{jj} \neq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Да разгледаме матрицата

$$T = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{n1} \\ & x_{22} & \ldots & x_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрицата T е триъгълна и в j-ия ѝ стълб $(j = 1, \ldots, n)$ стоят елементите $(x_{j1}, \ldots, x_{jj}, 0, \ldots, 0)$, т. е. първите j елемента са решението на системата (1) (ще подчертаем, че **вторият индекс** на елементите от i-ия **ред** на матрицата T е равен на i). Имаме $\det T = x_{11} x_{22} \ldots x_{nn} \neq 0$ (по-точно $\det T = \dfrac{\Delta_0}{\Delta_1} \cdot \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} \cdots \dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \dfrac{\Delta_0}{\Delta_n}$). Тъй като T е обратима матрица, тя е матрица на прехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ към базис $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, като $\boldsymbol{f}_j = x_{j1}\boldsymbol{e}_1 + x_{j2}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_{jj}\boldsymbol{e}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Нека $B = (b_{ij})_{n \times n}$ е матрицата на квадратичната форма $\tilde{\varphi}$ в новия базис и φ е асоциираната ѝ симетрична билинейна форма. Тогава за $1 \leq i \leq j \leq n$ имаме

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \varphi(\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{i} x_{ik}\boldsymbol{e}_k, \sum_{s=1}^{j} x_{js}\boldsymbol{e}_s\right) \\ &= \sum_{k=1}^{i}\sum_{s=1}^{j} x_{ik}x_{js}\varphi(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_s) = \sum_{k=1}^{i}\sum_{s=1}^{j} x_{ik}x_{js}a_{ks} \\ &= \sum_{k=1}^{i} x_{ik}\left(\sum_{s=1}^{j} a_{ks}x_{js}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Сумата в скобите в дясната страна на това равенство е точно лявата страна на равенството (2). Следователно равенството (3) приема вида

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{i} x_{ik}\delta_{kj}. \tag{4}$$

Сега при $i < j$ имаме $k \le i < j$, откъдето $\delta_{kj} = 0$ и значи $b_{ij} = 0$. Тъй като матрицата B е симетрична, то $b_{ij} = 0$ и за $i > j$. При $i = j$ равенството (4) приема вида $b_{jj} = \sum\limits_{k=1}^{j} x_{jk}\delta_{kj} = x_{jj}\delta_{jj} = x_{jj} = \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}$. Така намираме

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta_0}{\Delta_1} & & 0 & \\ & \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \end{pmatrix}.$$

Следователно в базиса $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ квадратичната форма $\tilde{\varphi}$ има търсеният каноничен вид

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{u}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\xi_n^2.$$

Теорема 3 (критерий на Силвестър). *Една квадратична форма в крайномерно пространство V е положително дефинитна тогава и само тогава, когато главните минори на матрицата ѝ във всеки базис на V са положителни числа.*

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\tilde{\varphi}$ е квадратична форма във V и главните минори на матрицата ѝ във всеки базис на V са положителни. Тогава тя има каноничен вид, посочен в твърдение 3 и според твърдение 1 $\tilde{\varphi}$ е положително дефинитна.

Обратно, нека $\tilde{\varphi}$ е положително дефинитна квадратична форма и φ е асоциираната ѝ симетрична билинейна форма. Нека $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ е произволен базис на V и $A = (a_{ij})_{n\times n}$ е матрицата на $\tilde{\varphi}$ в този базис. Въвеждаме във V скаларно произведение като положим $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Имаме $a_{ij} = \varphi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Следователно за главните минори Δ_k $(k = 1, \ldots, n)$ на A имаме

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) & \ldots & (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_1) & \ldots & (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_k) \end{vmatrix} = \Gamma(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k).$$

Тъй като векторите $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ са линейно независими, то $\Gamma(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k) > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ (теорема 1 от § 22), т. е. $\Delta_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$. С това теоремата е доказана.