4 задача, 2 тип

Да се докаже, че полиномите на Льожандър

$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$ удовлетворяват

$\int_{-1}^{1} L_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}$ (Упътване: $L_n(1)=1$, $L_n(-1)=(-1)^n$)

Знаем, че $L_n(x)$ е ортогонален на всички полиноми от Π_{n-1} в интервала $[-1,1]$ при тегло $\mu(x)\equiv 1$.

$$I = \int_{-1}^{1} L_n^2(x)\,dx \overset{\text{интегриране по части}}{=} x L_n^2(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} x\, 2 L_n(x) L_n'(x)\,dx$$

$$= 2 - 2\int_{-1}^{1} L_n(x) . x L_n'(x)\,dx$$

$L_n = \alpha_n x^n + \dots\dots$, $\alpha_n \neq 0$

$L_n' = n\alpha_n x^{n-1} + \dots\dots$

$x L_n' = n\alpha_n x^n + \dots = n L_n + \underset{\Pi_{n-1}}{\underset{\cap}{P_{n-1}}}$

$$I = 2 - 2\int_{-1}^{1} L_n (n L_n + P_{n-1})\,dx$$

$$= 2 - 2n\int_{-1}^{1} L_n^2(x)\,dx - 2\underbrace{\int_{-1}^{1} L_n(x) P_{n-1}\,dx}_{\overset{\shortparallel}{0}\text{, защото } L_n \perp P_{n-1}}$$

$$I = 2 - 2nI \Rightarrow \boxed{I = \frac{2}{2n+1}}$$