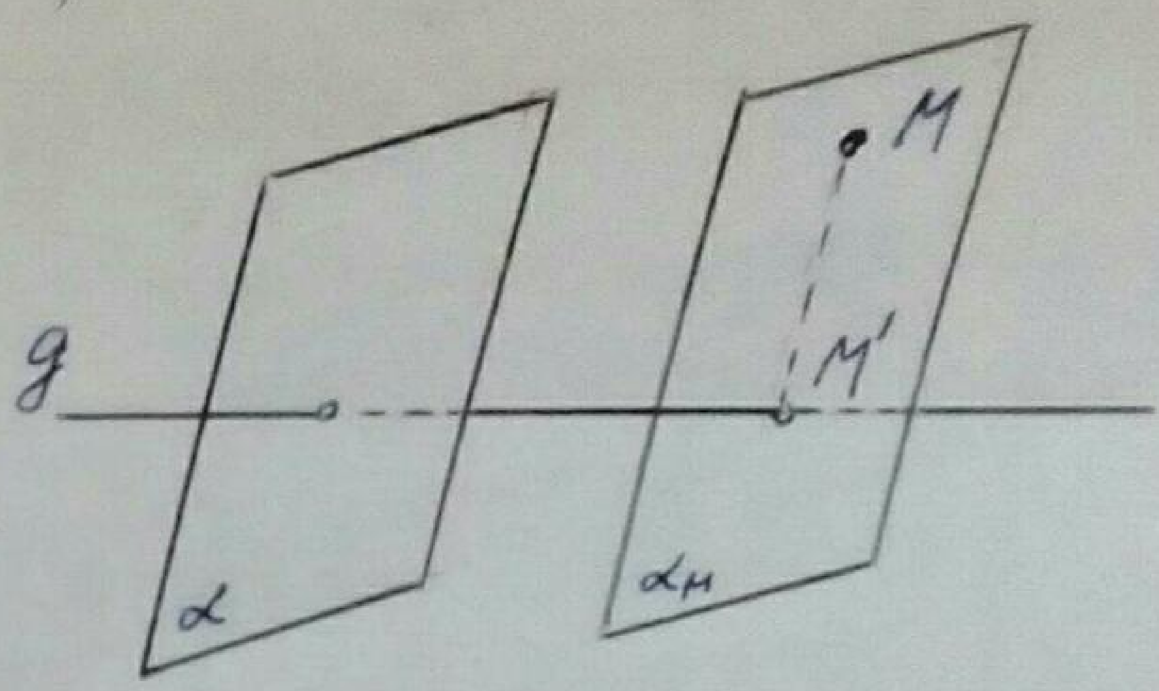
4. Скаларно произведение. Евклидово пространство

Проекция на вектор върху ос



Нека g е права, а α - равнина, пресичаща g, т.е. g не е успоредна на α. Нека M е произволна точка. Тогава през M минава точно една равнина α_M, успоредна на α. Следователно α_M пресича g в точка M', която наричаме проекция на M върху g при проектиране успоредно на α и означаваме

$$M' := \text{пр}_g M \ (\parallel \alpha).$$

Нека $\overrightarrow{AB}$ е насочена отсечка и $A' = \text{пр}_g A \ (\parallel \alpha)$, $B' = \text{пр}_g B' \ (\parallel \alpha)$. Тогава насочената отсечка $\overrightarrow{A'B'}$ наричаме геометрична проекция на $\overrightarrow{AB}$ върху g при проектиране успоредно на α и означаваме

$$\overrightarrow{A'B'} = \text{пр}_g \overrightarrow{AB} \ (\parallel \alpha).$$

Изпълнено е твърдението

Твърдение Равните насочени отсечки имат равни проекции върху ос, успоредно на равнина пресичаща оста.

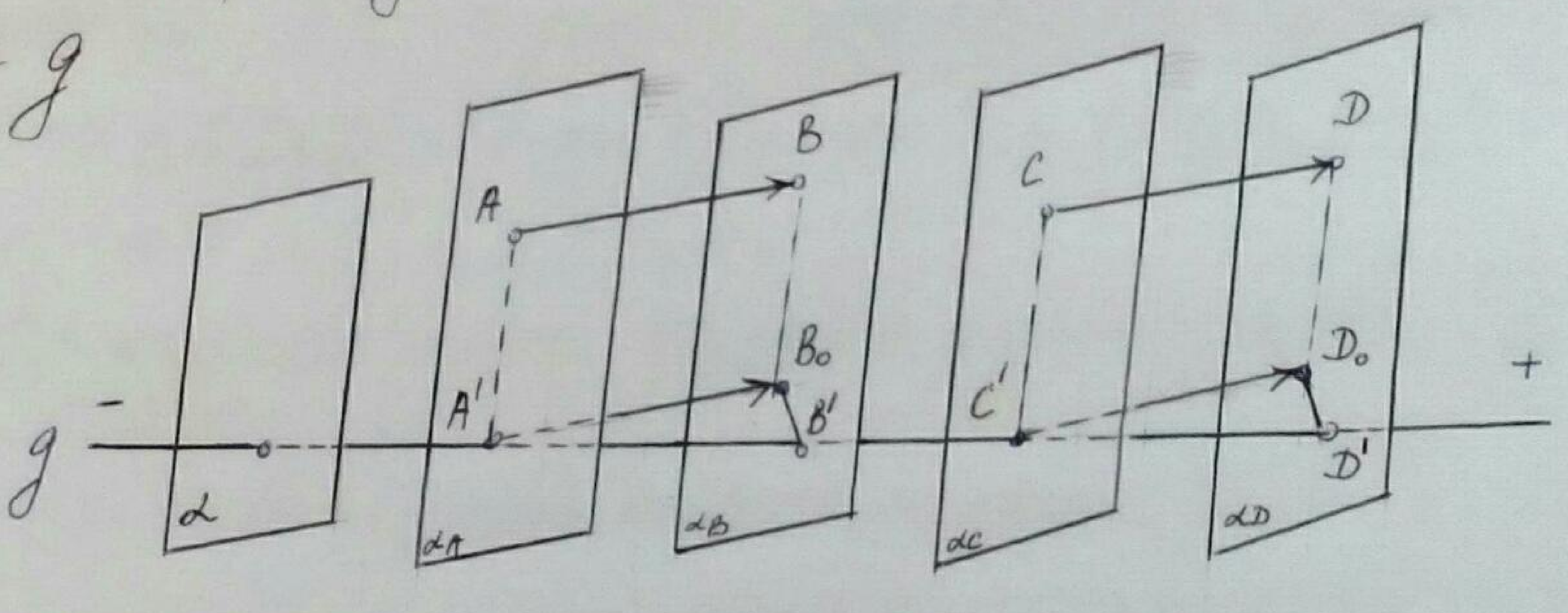
Доказателство. Нека g е ос (върху g е избрана положителна посока)

α - равнина, пресичаща g

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и нека

$\overrightarrow{A'B'} = пр_g \overrightarrow{AB}$ $(\parallel \alpha)$

$\overrightarrow{C'D'} = пр_g \overrightarrow{CD}$ $(\parallel \alpha)$



Ако $\overrightarrow{AB}$ е нулева насочена отсечка или правата AB е успоредна на α, то тогава $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{C'D'}$ са нулеви насочени отсечки и твърдението е тривиално изпълнено.

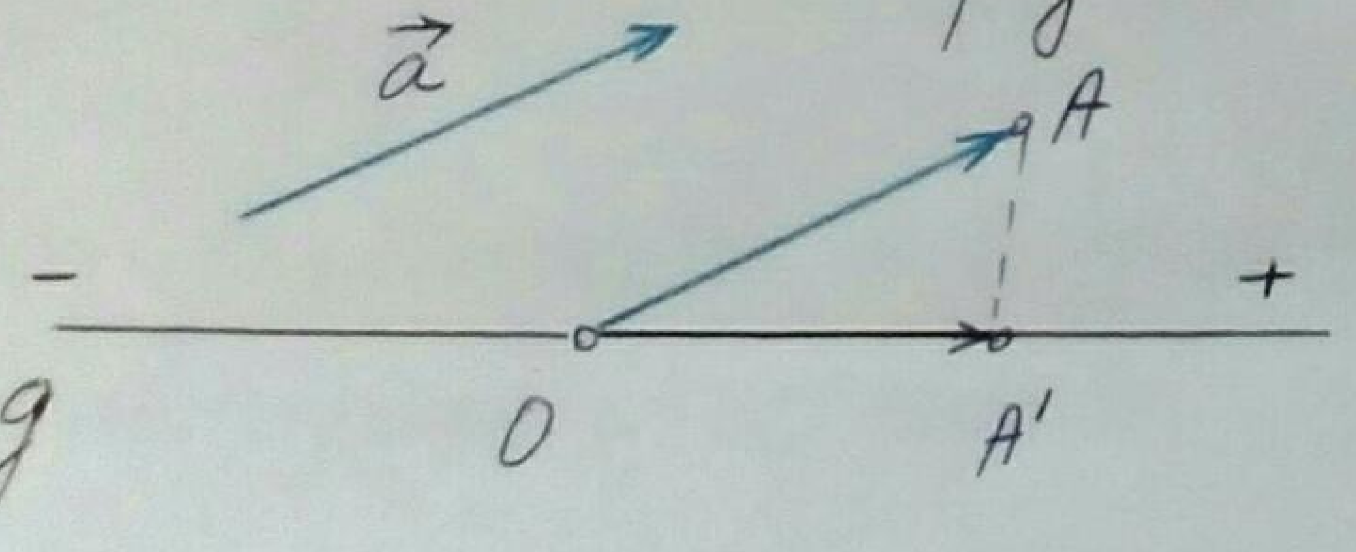
Разглеждаме общия случай. Нека $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C$ и α_D са проектиращите равнини съответно на A, B, C и D. Нека B_0 и D_0 са съответно пресечните точки на права през A', успоредна на AB и на права през C', успоредна на CD. Тъй като успоредни равнини отсичат от успоредни прави равни отсечки, то отсечките $(A'B_0)$ и

$(C'D_0)$ са равни. От факта, че $\alpha_B \parallel \alpha_A$ следва, че α_B лежи изцяло в една полуравнина спрямо α_A. Следователно и лъчите $AB^{\to}$ и $A'B_0^{\to}$ лежат в тази полуравнина, откъдето получаваме, че насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B_0}$ са равни. Аналогично $\overrightarrow{C'D_0} = \overrightarrow{CD}$

Имаме, че $\triangle A'B_0B' \cong \triangle C'D_0D'$ (II-ри признак) – $(A'B_0) = (C'D_0)$
$\sphericalangle B_0A'B' = \sphericalangle D_0C'D'$ и $\sphericalangle A'B_0B' = \sphericalangle C'D_0D'$.
$\Rightarrow (A'B') = (C'D')$. От наблюдението по-горе имаме, че $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

Следователно можем да дефинираме коректно проекция на вектор върху ос:

Нека $\vec{a}$ е вектор, g – ос, O – точка от g, α – равнина, $\alpha \not\parallel g$ и $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Тогава $пр_g \vec{a} (\parallel \alpha) = \vec{a}' = пр_g \overrightarrow{OA} (\parallel \alpha)$



Успоредното проектиране има следните свойства:

1. Ако $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то $пр_g \vec{c} (\parallel \alpha) = пр_g \vec{a} + пр_g \vec{b} (\parallel \alpha)$,

т.е. при успоредното проектиране се запазва операцията събиране на вектори.

Също така се запазва и операцията умножение на вектор с число

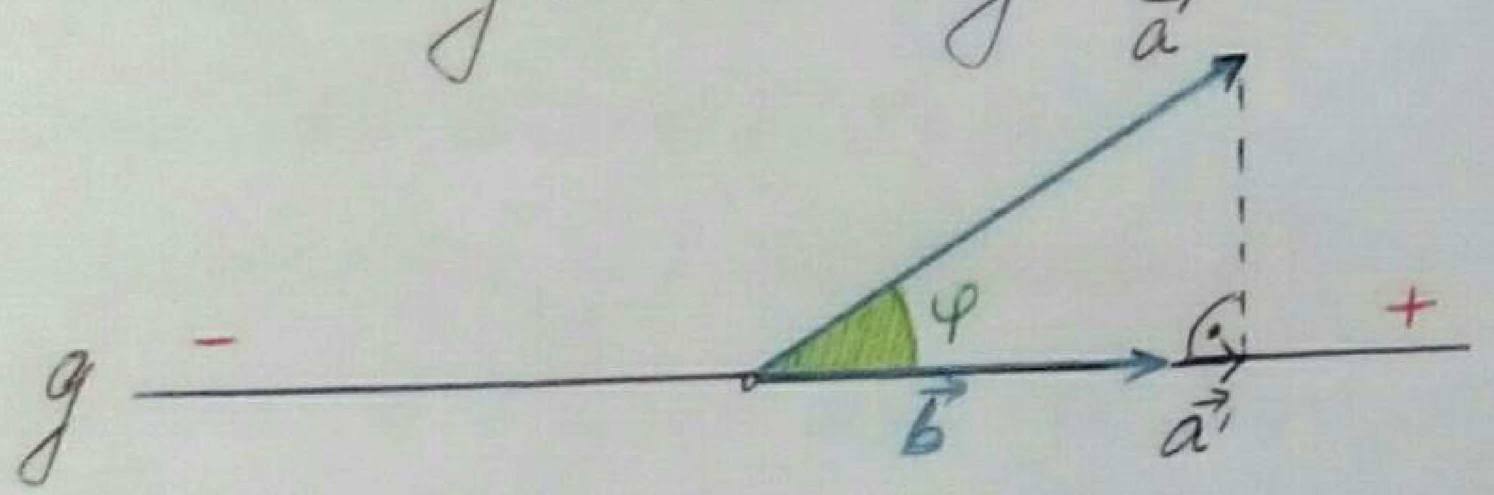
2. $пр_g (\lambda \vec{a}) (\parallel \alpha) = \lambda\, пр_g \vec{a} (\parallel \alpha)$.

Ако g е ориентирана (ос) права, то алгебричната мярка на проекцията на вектор $\vec{a}$ се нарича алгебрична проекция $\overline{a}' = \overline{пр_g \vec{a}}$ на вектора $\vec{a}$.

Ако равнината α е перпендикулярна на правата g, то проектирането се нарича ортогонално.

При ортогонално проектиране на вектор $\vec{a}$ върху ос за алгебричната проекция $\bar{a}'$ имаме $\text{пр}_g \vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$, където φ е ъгълът между $\vec{a}$ и вектор $\vec{b}$, който е еднопосочно успореден с оста g, т.е. е еднопосочен с положителната посока на g.

случай 1

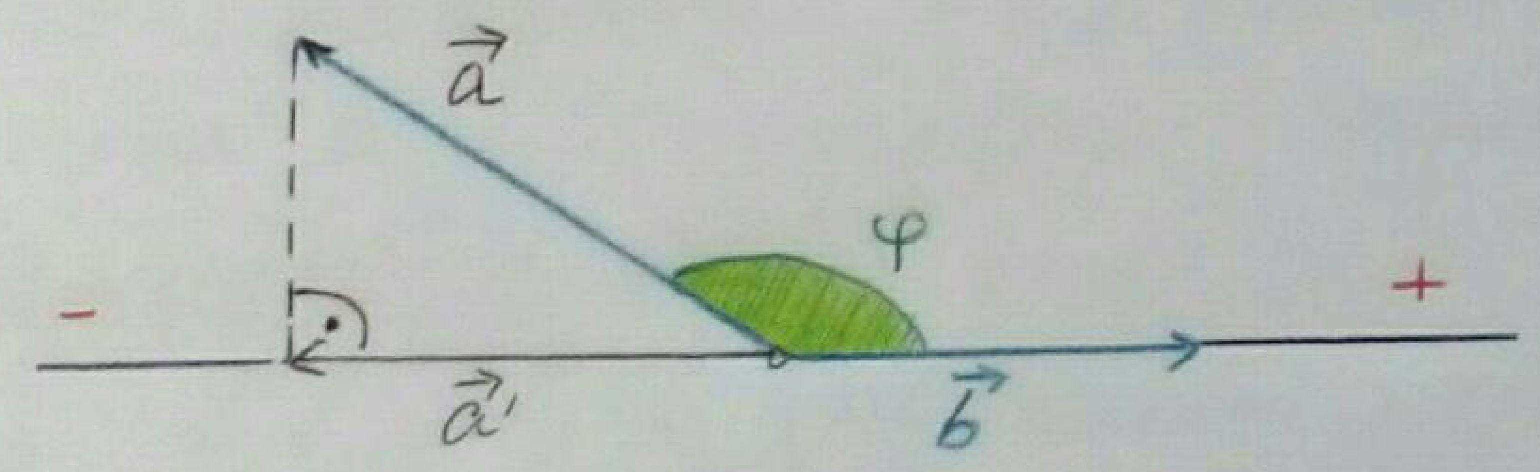


$\measuredangle\varphi = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$

φ - остър ъгъл

(т.е. по-малък от прав ъгъл)

случай 2



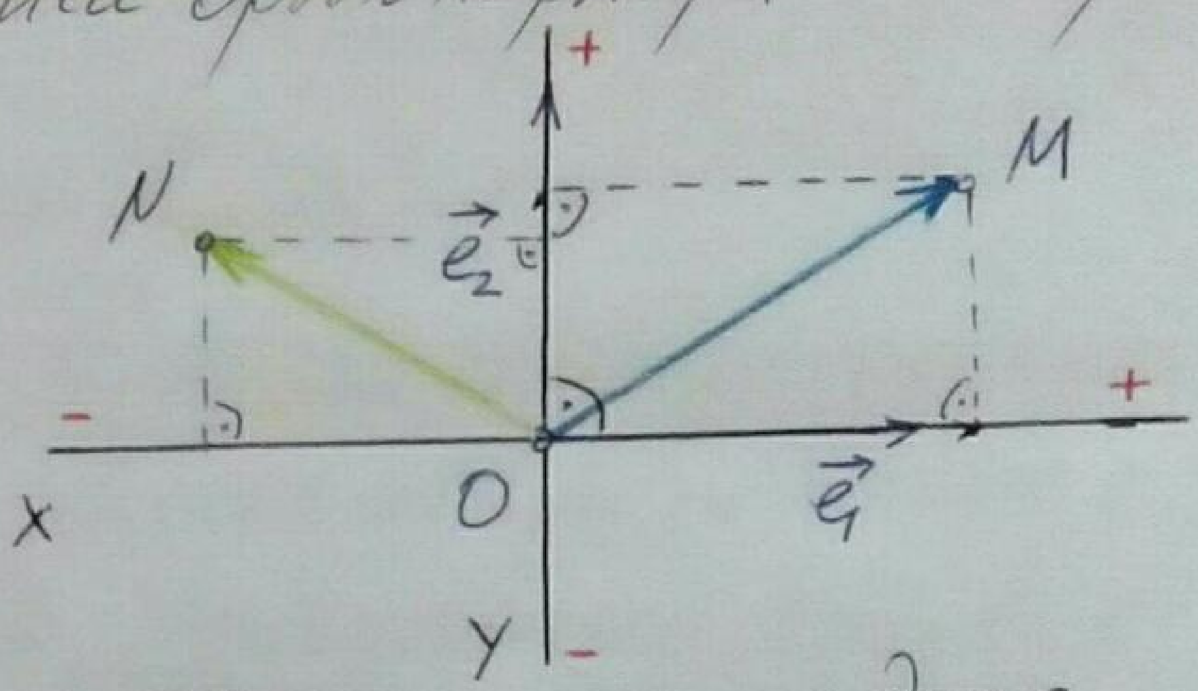
$\measuredangle\varphi$ - тъп ъгъл

В първия случай алгебричната проекция на $\vec{a}$ е положително число, а във втория - отрицателно.

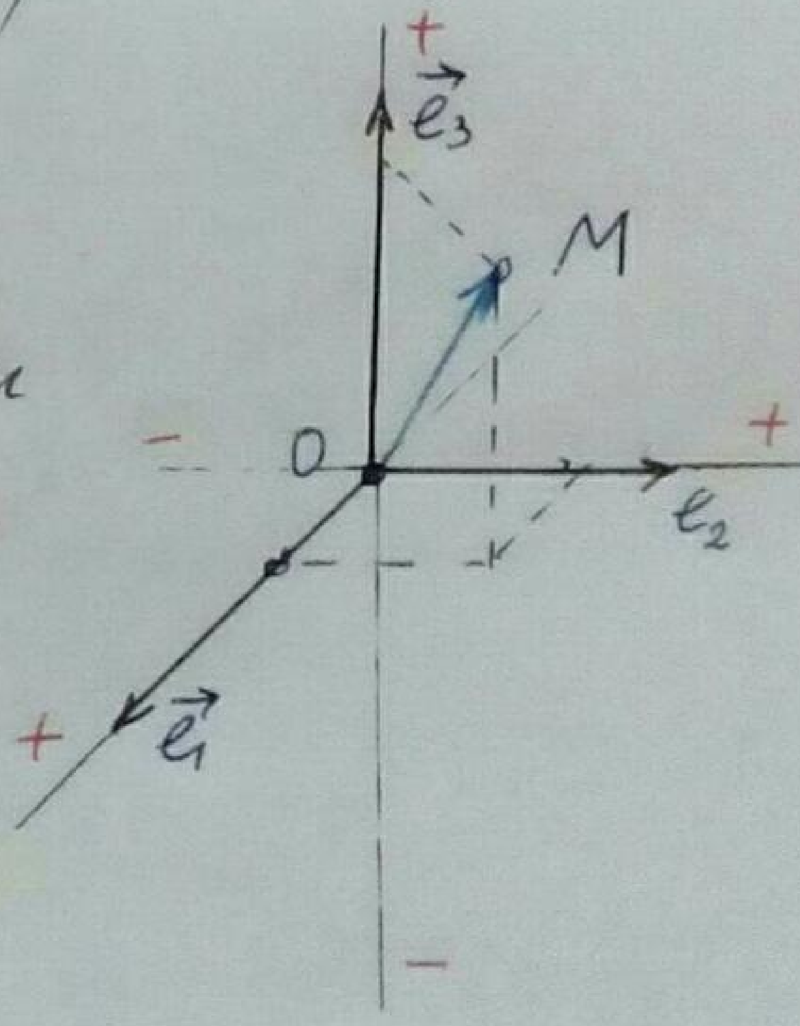
Ортонормирани координатни системи.

1. В равнината.

Афинна координатна система $K=O\vec{e}_1\vec{e}_2$, в която $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ са два взаимно перпендикулярни единични вектора се нарича ортонормирана координатна система в равнината.



Ако x и y са оси ($x \cap y = O$) ориентирани съответно с $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, то координатите (x, y) на точка M са алгебричните мерки на ортогоналните проекции на радиус вектора $\overrightarrow{OM}$. На чертежа M е с положителни x и y координати, а N - с отрицателна x и положителна y координата.



2. В пространството.

Аналогично $K=O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$: $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ са три взаимно перпендикулярни единични вектори – ортонормирана координатна система с оси x, y и z, ориентирани съответно с $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$. Координатите (x, y, z) на т. M са алгебричните мерки на ортогоналните проекции на радиус вектора $\overrightarrow{OM}$.

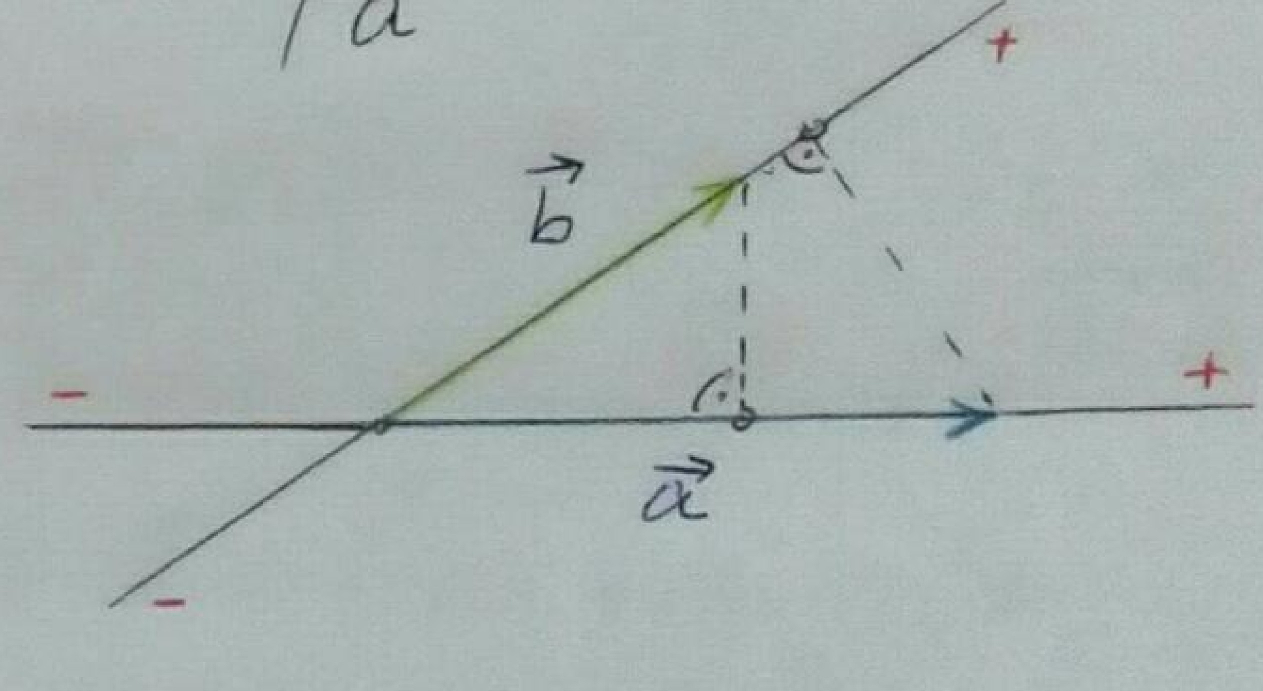
Скаларно произведение

Дефиниция. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са геометрични вектори. Скаларно произведение $\vec{a}\vec{b}$ наричаме числото $\vec{a}\vec{b} := |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ при при $\vec{a} \neq \vec{o}$, $\vec{b} \neq 0$ и $\vec{a}\vec{b} = 0$, ако $\vec{a} = \vec{o}$ или $\vec{b} = 0$

Следователно, ако g е ос, ориентирана с $\vec{b}$, то за алгебричната проекция на $\vec{a}$ върху g имаме $\overline{\text{пр}_g \vec{a}} = |\vec{a}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$. Удобно е да запишем тази проекция като $\overline{\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}}$. Аналогично, ако h е ос, ориентирана с $\vec{a}$, то $\overline{\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}} = \overline{\text{пр}_h \vec{b}} = |\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$

Следователно

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{b}|\,\overline{\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}} \quad \text{и} \quad \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\,\overline{\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}}$$



Свойства:

1. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$
2. $\lambda(\vec{a}\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\lambda\vec{b})$, $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$
4. $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2 \Rightarrow$ скаларният квадрат $\vec{a}^2$ на кой да е ненулев вектор е положително число.

Доказателство. ① $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\overline{пр_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})} = |\vec{a}|(\overline{пр_{\vec{a}}\vec{b}} + \overline{пр_{\vec{a}}\vec{c}})$

(реални числа)

$= |\vec{a}|\overline{пр_{\vec{a}}\vec{b}} + |\vec{a}|\overline{пр_{\vec{a}}\vec{c}} = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}.$

Верността на твърденията в ② и ③ се доказва аналогично и се предоставя за самостоятелна работа.

Благодарение на скаларното произведение лесно се пресмятат дължини на отсечки, ъгли между прави.

Имаме $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ (1), където $\vec{a}\neq\vec{o}$, $\vec{b}\neq\vec{o}$.

(в практиката се работи с косинуси от ъгли)

За дължината на вектор $\vec{a}$ имаме $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$

Разстояние между две точки A и B намираме като $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$

От (1) имаме, че два ненулеви вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са перпендикулярни точно тогава, когато скаларното им произведение $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Нека V е произволно векторно пространство над поле $\mathbb{F}$. 4.9.

Ако на всеки два вектора $\vec{a}, \vec{b}$ от V може да се съпостави число $\vec{a}\vec{b}$ от $\mathbb{F}$ със свойствата ①, ②, ③ и ④, то V се нарича евклидово векторно пространство.

Всъщност, евклидово пространство е векторно пространство, снабдено със скаларно произведение f

$$f: V \times V \longrightarrow \mathbb{F},$$

което удовлетворява ①, ②, ③ и ④.

При така фиксирано скаларно произведение могат да се дефинират „дължина" на вектор, „ъгъл" между два вектора, „ортогоналност" на вектори.

Примерно, два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ наричаме ортогонални, ако скаларното им произведение $\vec{a}\vec{b}$ е нула.

Удобно е да приемем, че нулевият вектор е перпендикулярен на всеки вектор.

Координатно изразяване на скаларното произведение.

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е афинна координатна система в пространството и $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$.

От свойствата на скаларното произведение получаваме

$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1\vec{e}_1^{\,2} + a_2b_2\vec{e}_2^{\,2} + a_3b_3\vec{e}_3^{\,2} + (a_1b_2 + a_2b_1)\vec{e}_1\vec{e}_2 + (a_2b_3 + a_3b_2)\vec{e}_2\vec{e}_3 + (a_3b_1 + a_1b_3)\vec{e}_3\vec{e}_1$$

Нека сега K е ортонормирана координатна система. Следователно $\vec{e}_i^{\,2} = 1$, $\vec{e}_i\vec{e}_j = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$.

$\Rightarrow$ $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, за дължината на вектор $\vec{a}$ имаме

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

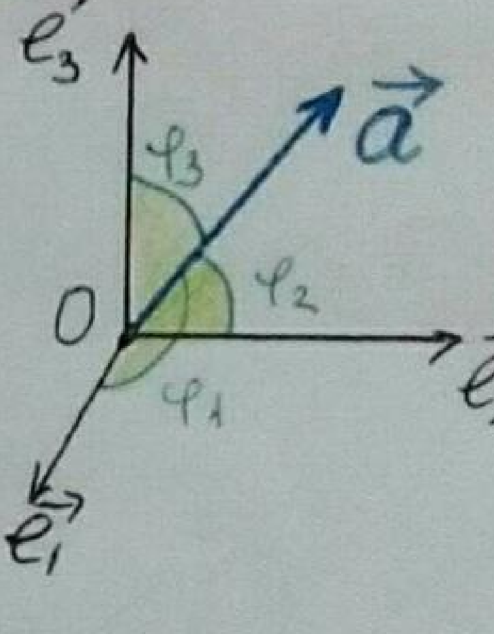
$$\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Разстоянието между две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ е

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Да отбележим, че спрямо ортонормирана координатна система (ОКС) координатите на вектор $\vec{a}$ се пресмятат лесно: Ако $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, то координатата a_i е скаларното произведение на $\vec{a}$ и $\vec{e_i}$ — $a_i = \vec{a}\,\vec{e_i}$.

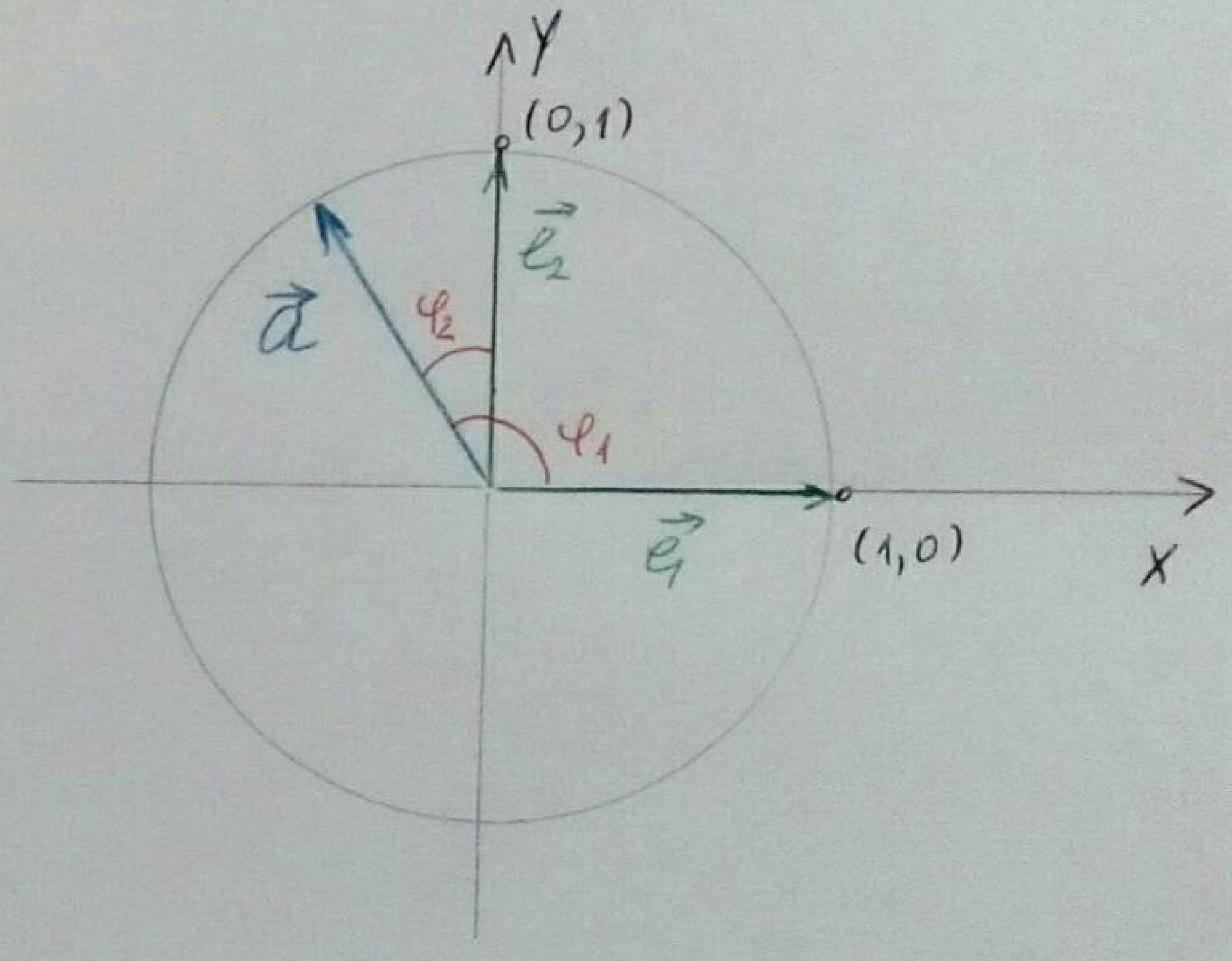
Нека векторът $\vec{a}$ е с дължина едно (единичен вектор) - $|\vec{a}|=1$ и ъглите, които $\vec{a}$ сключва с координатните вектори $\vec{e_i}$ са съответно φ_i, $i=1,2,3$, т.е. $\varphi_1 = \measuredangle(a, \vec{e_1})$, $\varphi_2 = \measuredangle(a, \vec{e_2})$ и $\varphi_3 = \measuredangle(a, \vec{e_3})$. Тогава спрямо K векторът $\vec{a}$ има координати $\vec{a}(\cos\varphi_1, \cos\varphi_2, \cos\varphi_3)$. Числата $\cos\varphi_i$ се наричат директорни косинуси на посоката, определена от $\vec{a}$. От факта, че $\vec{a}$ е единичен, т.е. $|\vec{a}|=1$ получаваме $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1$.



Забележка. (1) Всеки вектор може да се нормира, като се раздели на дължината си — $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ е единичен вектор, колинеарен с $\vec{a}$.

(2) като меним $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ получаваме всевъзможните посоки в пространството

Спрямо ортонормирана координатна система в равнината $- K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ скаларното произведение на векторите $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ е $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.



Ако $|\vec{a}| = 1$, то $\vec{a}(\cos\varphi_1, \cos\varphi_2)$.

От $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 = 1 \implies$

$\cos\varphi_2 = \varepsilon \sin\varphi_1$, където $\varepsilon = \pm 1$