За да пресметнем коефициента на s^{19} ще развием тази функция по степените на s. Ще използваме формулата за бином на Нютон

$$(1-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-a)^k$$

за да преобразуваме числителя. За знаменателя ще използваме формулата за отрицателен бином:

$$(1-a)^{-n} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{n+l-1}{l} a^l = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{n+l-1}{n-1} a^l.$$

По този начин за пораждащата функция на Y получаваме:

$$g_Y(s) = \frac{s^{10}}{6^{10}} \left[\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (s^6)^k \right] \sum_{l=0}^{\infty} \binom{9+l}{l} s^l =$$

$$g_Y(s) = \frac{s^{10}}{6^{10}} \left[1 - \binom{10}{1} s^6 + \binom{10}{2} s^{12} + \ldots \right] \sum_{l=0}^{\infty} \binom{9+l}{l} s^l =$$

Пред сумите стои s^{10}, следователно от произведението на двете суми трябва да получим s^9. Това може да стане само по два начина. Да вземем единица от първата сума и да я умножим с s^9 от втората сума. Или да вземем s^6 от първата и s^3 от втората сума. Останалите събираеми в първата сума са със степен равна или по-голяма от 12, тъй че няма как да се използват.

Окончателно, за търсената вероятност получаваме

$$\mathrm{P}(Y=19) = coeff_{s^{19}} \left\{ g_Y(s) \right\} = \frac{1}{6^{10}} \left[\binom{18}{9} - \binom{10}{1}\binom{12}{3} \right].$$

3.5 По-важни дискретни разпределения

В този раздел ще разгледаме свойствата на някои от най-често срещаните дискретни случайни величини.

3.5.1 Разпределение на Бернули - $X \in Be(p)$

Това разпределение е кръстено на името на швейцарския математик Якоб Бернули. „Опит на Бернули“ наричаме опит, при който има само две възможности, наречени „успех“ с вероятност p или “неуспех’"с вероятност $q = 1 - p$. Стандартният пример е хвърляне на една монета. Съответно, случайната величина с разпределение на Бернули може да взима само две стойности - „1“ при успех и „0“ при неуспех, т.е. разпределението и има вида:

X	0	1
P	q	p

Елементарно се пресмятат $\mathrm{E}X = p$ и $\mathrm{D}X = pq$.

3.5.2 Биномно разпределение - $X \in Bi(n, p)$

Биномното разпределение може да се разглежда, като обобщение на разпределението на Бернули.

Извършваме последователни, независими бернулиеви опити, като вероятността за успех - p е една и съща при всеки опит, съответно вероятността за неуспех е q. Нека броят на опитите - n е предварително фиксиран. Случайната величина X равна на броя на успехите, наричаме биномно разпределена сл.в. Символично това се записва по следния начин: $X \in Bi(n, p)$.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & \multicolumn{7}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{X}} \\
 & * & * & & * & & & * \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\
q & p & p & & \dots & & &
\end{array}$$

Ясно е, че стойностите на X, т.е. броят на успехите е цяло число в интервала от 0 до n. Ще пресметнем вероятността за точно k на брой успеха. Общо са проведени n опита, на k от които има успех. Съществуват C_n^k начина да изберем опитите, при които да има успех. Ако вероятността за успех при всеки опит е p, то вероятността за успех на k фиксирани опита ще бъде p^k, тъй като опитите са независими. Аналогично, вероятността на останалите $n-k$ опита да има неуспех ще бъде $(1-p)^{n-k}$. Така за вероятността за точно k успеха от n опита, получаваме:

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \\ &k = 0, 1, \dots n. \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Биномното разпределение е добре дефинирано, тъй като съгласно формулата за бинома на Нютон е изпълнено:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

Оттук идва и самото наименование на разпределението.

Пример 3.8 *Нека X е броят на шестиците паднали се при хвърлянето на три зара. Тогава $X \in Bi(3, \frac{1}{6})$. Непосредствено от формула (3.5.8) се пресмята разпределението на случайната величина X :*

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

□

За да пресметнем характеристиките на биномно разпределена случайна величина ще я представим като сума от Бернулиеви сл.в.

Нека с X_i, $i = 1, 2, \dots, n$ означим успеха на i-тия опит, т.е. случайните величини X_i могат да вземат само две стойности 0, или 1. X_i и имат разпределение на Бернули, като $\mathrm{E}X_i = p$ и $\mathrm{D}X_i = pq$. Опитите са независими, следователно и случайните величини X_i, $i = 1, 2, \dots, n$ са независими.

Ясно е, че $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Тогава от свойства **E3** и **D4**, съответно за очакването и дисперсията следва:

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathrm{E}X_1 + \mathrm{E}X_2 + \ldots + \mathrm{E}X_n = np,$$
$$\mathrm{D}X = \mathrm{D}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathrm{D}X_1 + \mathrm{D}X_2 + \ldots + \mathrm{D}X_n = npq.$$

Ще пресметнем и максималната стойност на вероятността, т.е. ще открием за кое $k = 0, 1, \ldots n$ вероятността $\mathrm{P}(X = k)$ достига максимум. Намирането на този максимум не е възможно по традиционния начин, познат от математическият анализ с намиране на първата производна, тъй като биномният коефициент в (3.5.8) не може да бъде диференциран. Затова ще разгледаме отношението на вероятностите. Ако е изпълнено неравенството

$$\frac{\mathrm{P}(X = k)}{\mathrm{P}(X = k-1)} > 1,$$

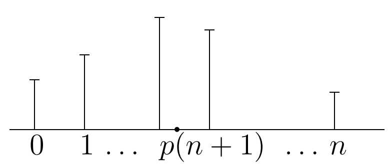
то вероятността $\mathrm{P}(X = k)$, разглеждана като функция по k, е растяща. По този начин ще определим интервалите на растене и намаляване на функцията. Съгласно (3.5.8) горното неравенство е еквивалентно на:

$$1 < \frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{n!\,(k-1)!(n-k+1)!\,p}{k!(n-k)!\,n!\,q} = \frac{(n-k+1)\,p}{kq}.$$

Ще решим това неравенство спрямо k

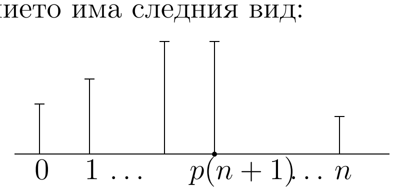
$$p(n+1) > (p+q)k = k. \tag{3.5.9}$$

Тук p и $n+1$ са известни константи. Следователно за $k < p(n+1)$ вероятността $\mathrm{P}(X = k)$ е растяща по k. Аналогично, при $k > p(n+1)$ вероятността $\mathrm{P}(X = k)$ е намаляваща. Знаем, че k взима стойности $0, 1, \ldots n$. В началото вероятностите растат, достигат до някаква максимална стойност, след което започват да намаляват. Тогава, разпределението на случайната величина изглежда по следния начин:



Максималната стойност на вероятността се достига за най-голямото цяло число k, което е по-малко от $p(n+1)$, т.е. при k равно на цялата част на $p(n+1)$.

Ако числото $p(n+1)$ се окаже цяло, то неравенство (3.5.9) се превръща в равенство за някое k. Тогава ще има две максимални стойности за вероятността $\mathrm{P}(X = k)$ и $\mathrm{P}(X = k-1)$, а разпределението има следния вид:



3.5.3 Геометрично разпределение - $X \in Ge(p)$

Отново ще разглеждаме схема на Бернули, т.е. извършваме n последователни независими опити с вероятност за успех на всеки опит p. Случайната величина X равна на броя на неуспехите до достигане на първи успех наричаме геометрично разпределена сл.в. Символично това се записва по следния начин: $X \in Ge(p)$. Броят на опитите не е ограничен, така че стойностите на X могат да варират от 0 до ∞.

Ще пресметнем вероятноста за точно k неуспеха до първия успех, т.е. $\mathrm{P}(X = k)$ за $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ясно е, че тази вероятност отговаря на събитието - „при първите k опита има неуспех, а на опит $k + 1$ успех“:

$$\overbrace{0\,|\,0\,|\,0\,|\quad \ldots \quad |\,0\,|\,1}^{X}\,|\quad \ldots$$

Опитите са независими, следователно $\mathrm{P}(X = k) = (1 - p)^k p = q^k p$. Тук, както обикновено сме означили вероятността за неуспех с q.

За да се покаже, че това разпределение е добре дефинирано, е достатъчно да се приложи формулата за сума на безкрайна геометрична прогресия:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p = \frac{p}{1 - q} = 1.$$

Директното пресмятане на математическото очакване и дисперсията на X изисква умения за сумиране на редове. Например,

$$\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k\, q^k p.$$

Пораждащите функции дават възможност за значително опростяване на този процес. Пораждащата функция на X е сума на безкрайна геометрична прогресия:

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k) s^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p s^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (qs)^k = \frac{p}{1 - qs}.$$

Съгласно свойство **g1**) математическото очакване на X е производната на пораждащата функция при $s = 1$:

$$\mathrm{E}X = g'_X(1) = \left.\frac{pq}{(1 - qs)^2}\right|_{s=1} = \frac{pq}{(1 - q)^2} = \frac{q}{p}.$$

За да пресметнем дисперсията на X ще ни трябва втората производна на пораждащата функция:

$$g''_X(1) = \left.\left(\frac{pq}{(1 - qs)^2}\right)'\right|_{s=1} = \frac{2pq^2}{(1 - q)^3} = \frac{2q^2}{p^2}.$$

Сега, ще използваме свойство **g2**) на пораждащите функции:

$$\mathrm{D}X = g''_X(1) + g'_X(1) - \left(g'_X(1)\right)^2 = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q(q + p)}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

3.5.4 Поасоново разпределение - $X \in Po(\lambda)$

Често се налага да се разглеждат модели, при които се извършват много независими опити, но вероятността за успех при всеки от тях е малка. Интерес представлява броят на успехите X. Тогава разглеждаме модел, в който случайната величина е биномно разпределена $X \in Bi(n, p)$, но $n \to \infty$, $p \to 0$. Това гранично разпределение е изведено от френския математик Симеон Поасон.

Определение 3.6 *Казваме, че случайната величина X е Поасоново разпределена, ако тя взима целочислени стойности с вероятност, съответно*

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.5.10}$$

където $\lambda > 0$ е константа.

Поасоновото разпределение се означава съкратено с $X \in Po(\lambda)$.

Разпределението е добре дефинирано, тъй като

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Поасоновото разпределение се използва за описване на редки събития. Типичен пример е заявки към сървър. Броят на компютрите в мрежата е голям, а вероятността конкретен компютър да потърси връзка е малка. Тогава броят на заявките е Поасоново разпределена случайна величина. Поасоново разпределени се оказват и броят на мутиращите клетки при рентгеново облъчване, броят на получените писма за определен период от време, головете по време на футболна среща и т.н.

Изобщо Поасоновото разпределение се използва, когато пресмятаме броя на сбъдванията X на събитие в определен интервал от време, ако сбъдването на събитието не зависи от времето изминало от сбъдването на предишното събитие, т.е. събитията са независими и освен това имаме предварителна информация за средния брой сбъдвания, т.е. знаем математическото очакване на X.

Следващата теорема дава условията, при които Поасановото разпределение може да се използва като апроксимация за биномното.

Теорема 3.1 (Поасон) *Нека сл.в. $X \in Bi(n, p_n)$, т.е.*

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}. \tag{3.5.11}$$

Ако $n \to \infty$, $p_n \to 0$, така че $np_n \to \lambda > 0$, то за всяко фиксирано $k = 0, 1, 2, \dots$ е изпълнено

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Доказателство: Най-напред ще преработим биномния коефициент, участващ в (3.5.11)

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^k(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})}{k!}.$$

Ще запишем биномната вероятност $\mathrm{P}(X = k)$ от равенство (3.5.11) по следния начин:

$$\mathrm{P}(X=k) = \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})}{k!} n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}. \tag{3.5.12}$$

Сега ще намерим границите при $n \to \infty$ на отделните множители в този израз.
За всяко $i = 1, 2, \dots k-1$ при $n \to \infty$ е изпълнено:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{i}{n}\right) = 1.$$

По условие k е фиксирано число, тогава в следното произведение има краен брой, а именно $k-1$ множителя, следователно

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = 1. \tag{3.5.13}$$

Знаем, че $np_n \to \lambda$, тогава

$$\lim_{n\to\infty} n^k p_n^k = \lim_{n\to\infty} (np_n)^k = \lambda^k. \tag{3.5.14}$$

От условието $np_n \to \lambda$ следва $p_n \sim \lambda/n$ и тогава:

$$\lim_{n\to\infty} (1-p_n)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

Първата граница е добре позната $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$. За втората граница аналогично на (3.5.13) получаваме единица. Следователно

$$\lim_{n\to\infty} (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \tag{3.5.15}$$

За да завършим доказателството е достатъчно да извършим граничен преход в (3.5.12) и да заместим (3.5.13), (3.5.14) и (3.5.15). □

За пресмятането на математическото очакване и дисперсията на поасоновото разпределение ще използваме свойствата на пораждащите функции. Нека $X \in Po(\lambda)$. За пораждащата функция на X получаваме

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X=k)\, s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k\, e^{-\lambda}}{k!}\, s^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}.$$

Тогава математическото очакване на X е

$$\mathrm{E}X = g_X'(1) = \lambda e^{\lambda(s-1)}\Big|_{s=1} = \lambda.$$

За дисперсията на X получаваме

$$\mathrm{D}X = g_X''(1) + g_X'(1) - \left(g_X'(1)\right)^2 = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}\Big|_{s=1} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

3.5.5 Хипергеометрично разпределение - $X \in HG(N, M, n)$

Определение 3.7 *Казваме, че случайната величина X е хипергеометрично разпределена, ако тя взима целочислени стойности с вероятност, съответно*

$$\mathrm{P}(X = k) = p_k = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \tag{3.5.16}$$
$$k = \max\{0, n+M-N\}, \max\{0, n+M-N\}+1, \ldots, \min\{M, n\}.$$

Хипергеометричното разпределение се означава съкратено с $X \in HG(N, M, n)$.

Хипергеометричното разпределение съответства на урнов модел, при който от урна с M бели от общо N топки се изваждат случайно n топки. Вероятността точно k от $n-$ те да са бели е p_k. Фактът, че $\sum_k p_k = 1$ ледва от равенството

$$\binom{N}{n} = \sum_k \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k},$$

което следва от подреждането на всички извадки на брой $\binom{N}{n}$ в групи, в които броят на белите топки е точно k. Всяка извадка в такава група се представя като $\binom{M}{k}$ извадки на бели топки, комбинирани с $\binom{N-M}{n-k}$ на брой извадки от черни топки.

Свойства на хипергеометричното разпределение:

1.

$$\mathrm{E}X = \sum_k k\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} =$$

$$\sum_k k\frac{\frac{M!}{k!(M-k)!}\binom{N-M}{n-k}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} =$$

$$n\frac{M}{N}\sum_k \sum_k \frac{\frac{(M-1)!}{(k-1)!(M-k)!}\binom{N-M}{n-k}}{\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}} =$$

$$n\frac{M}{N}\sum_k k\frac{\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N-1}{n-1}} = n\frac{M}{N}$$

.

2.

$$Var(X) = n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N-1}$$

3.

$$p_k = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{M-k}}{\binom{N}{M}}.$$

Формулата за пълната вероятност дава следното рекурентно уравнение за $p_k(n, M, N)$:

$$p_k(n+1, M, N) = p_k(n, M, N)\frac{N-M-n+k}{N-n} + p_{k-1}(n, M, N)\frac{M-n+k}{N-n}.$$

Хипергеометричното разпределение намира приложение в т. нар. статистически контрол на качеството. В партида от N изделия M са дефектни. При случайно избрани n изделия (извадка без връщане с обем n), броят на дефектните изделия в извадката е сл.в. X с хипергеометрично разпределение

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

В играта Спорт-тото ‘"6 от 49„ вероятността с един фиш от 6 числа да се спечели тройка, четворка, петица или шестица се пресмята като броят на познатите числа има хипергеометрично разпределение

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

или вероятност за k познати резултата от $M = 6$ печеливши от общо $N = 49$ числа.

3.6 Съвместни (двумерни) разпределения

Определение 3.8 *Съвместно разпределение на случайните величини X и Y, наричаме следната таблица:*

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
y_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$\dots$	$p_{1,n}$	$\dots$
y_2	$p_{2,1}$	$\dots$			$\dots$
$\dots$	$\dots$				
y_m	$p_{m,1}$	$p_{m,2}$	$\dots$	$p_{m,n}$	$\dots$

където x_i и y_j са съответно стойностите на сл.в. X и Y и те могат да бъдат краен или най-много изброим брой;
$p_{j,i} = \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j)$ са вероятностите с които случайните величини вземат съответните стойности, при това

$$\sum_{i,j} p_{j,i} = 1$$