Домашно №3

Задача 1. Нека R е следната рекурсивна програма в типа данни Nat:

$\tau_0(X, Y, F_1, F_2)$ `where`

$F_1(X) = \tau_1(X, F_1, F_2)$

$F_2(X, Y) = \tau_2(X, Y, F_1, F_2)$

Дефинирайте $D_V(R)$ — денотационната семантика по стойност на R (т.е. определете съответната област на Скот, съответния оператор в нея и т.н.).

Задача 2. Нека R е следната рекурсивна програма в типа данни Nat:

$F_1(X)$ `where`

$$F_1(X) = \texttt{if}\ \ X == 0\ \ \texttt{then}\ \ 1\ \ \texttt{else}\ \ F_1(X-1) + F_2(X-1)$$
$$F_2(X) = \texttt{if}\ \ X == 0\ \ \texttt{then}\ \ 0\ \ \texttt{else}\ \ F_2(X+1)$$

Като използвате теоремата на Кнастер-Тарски, пресметнете $D_V(R)$.

Задача 3. Нека R е следната рекурсивна програма:

$F(X)$ `where`

$$F(X) = \texttt{if}\ \ X == 0\ \ \texttt{then}\ \ 1\ \ \texttt{else}\ \ \alpha(X).[F(G(X))]^2$$
$$G(X) = \texttt{if}\ \ X \leq 1\ \ \texttt{then}\ \ 0\ \ \texttt{else}\ \ G(X-2) + 1$$

където

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако}\ \ x \equiv 0\ mod\ 2 \\ 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажете, че за $D_V(R)$ е изпълнено:

$$\forall x (!D_V(R)(x) \implies D_V(R)(x) = 2^x).$$

Задача 4. Да означим с R следната рекурсивна програма:

$G(X, Y)$ `where`

$$F(X, Y) = \texttt{if}\ \ Y == 0 \vee X == Y\ \ \texttt{then}\ \ 1\ \ \texttt{else}\ \ F(X \dot{-} 1, Y-1) + F(X \dot{-} 1, Y)$$
$$G(X, Y) = \texttt{if}\ \ Y == 0\ \ \texttt{then}\ \ 1\ \ \texttt{else}\ \ G(X, Y-1) + F(X+Y, Y)$$

Докажете, че за $D_V(R)$ е изпълнено условието:

$$\forall x \forall y \left[!D_V(R)(x, y) \implies D_V(R)(x, y) = \binom{x+y+1}{y} \right].$$

Забележка. По дефиниция

$$x \dot{-} 1 = \begin{cases} x - 1, & \text{ако}\ \ x > 0 \\ 0, & \text{ако}\ \ x = 0. \end{cases}$$

Задача 5. На всяка частична функция $f \in \mathcal{F}_n$ съпоставяме следната тотална функция $f^* \in \mathcal{F}_n^\perp$, която ще наричаме *естествено продължение* на f:

$$f^*(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{ако } \bar{x} \in \mathbb{N}^n \ \& \ !f(\bar{x}) \\ \perp, & \text{иначе} \end{cases}$$

Докажете, че всички $f, g \in \mathcal{F}_n$:

$$f \subseteq g \iff f^* \sqsubseteq g^*.$$

Задача 6. Кои от изброените функции от $\mathcal{F}_1^\perp$ и $\mathcal{F}_2^\perp$ са точни? А кои от тях са монотонни? Обосновете се.

а)

$$f(x) = 0;$$

б)

$$g(x,y) = x +^* y;$$

в)

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = \perp \\ 1, & \text{иначе;} \end{cases}$$

г)

$$u(x,y) = \begin{cases} \perp, & \text{ако } x = \perp \\ 1, & \text{иначе;} \end{cases}$$

д)

$$v(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ xy, & \text{ако } x \in \mathbb{N}^+ \ \& \ y \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

И две задачи са върху темата от Упражнение 14, които не се включват в материала за третото контролно, но ги слагам за пълнота.

Задача 7. Докажете, че $D_V(R) \neq D_N(R)$, където R е следната рекурсивна програма:

$F(X,\ Y)$ $\quad$ `where`

$F(X,\ Y) \ = \ \texttt{if}\ X \bmod 2 \ = \ 0 \ \ \texttt{then} \ \ X/2 \ \ \texttt{else} \ \ F(X+Y,\ F(X, Y+1))$

Задача 8. Да означим с $\Gamma\colon \mathcal{F}_2^\perp \longrightarrow \mathcal{F}_2^\perp$ оператора, определен от тялото на следната рекурсивна програма:

$F(X,\ Y)$ $\quad$ `where`

$F(X,\ Y) \ = \ \texttt{if}\ X \bmod 2 \ = \ 0 \ \texttt{then}\ X/2 \ \texttt{else}\ F(X+Y, F(X, Y+1))$

Намерете явния вид на функцията $f_2 = \Gamma^2(\Omega^{(2)})$.