Криви линии в евклидовото пр-во. Допирателна към крива, нормална равнина.

(1)

1. Векторна функция на числов аргумент (в E_3)

Деф. В-рна ф-я на числов аргумент наричаме изображение $\vec{r}: J \to E_3$ ($\mathbb{R}^3$), което на всяко число $q \in J(a,b)$, $J \subseteq \mathbb{R}$ съпоставя вектор ($\vec{r}(q)$) в 3-мерното пр-во. $\vec{r} = \vec{r}(q)$

Знанията си за числовите ф-ции естествено се пренасят за векторните. Както следва:
(с известни условия)

1.1. Дължина на векторна ф-ция $\vec{r}(q)$ – $|\vec{r}(q)| = f(q)$ е числова ф-ция, която на $q \in J$, където е дефинирана $\vec{r}(q)$ съпоставя д-ната на в-ра $\vec{r}(q)$.

Нека $\vec{r}$ е дефин. в J

1.2. Граница на в-рната ф-ция: $\vec{r}(q)$ при $q \to q_0$, $q_0 \in J$ наричаме (константния, константната в-рна ф-ция $\vec{a}$, за която $\lim\limits_{q \to q_0} |\vec{r}(q) - \vec{a}| = 0$
$|\vec{r}(q) - \vec{a}|$ е числова ф-я, за която понятието граница е дефинирано

За векторните функции са изпълнени теореми за границите, аналогични (и обусловени) от теоремите за числовите функции.

Нека $\vec{r}(q)$ и $\vec{u}(q)$ са в-рни ф-ции, $q \in J$ и $\lim\limits_{q \to q_0} \vec{r}(q) = \vec{a}$, (2)

$\lim\limits_{q \to q_0} \vec{u}(q) = \vec{b}$, $q_0 \in J$, то ① $\lim\limits_{q \to q_0} (\vec{r}(q) \pm \vec{u}(q)) = \vec{a} \pm \vec{b}$

$\lambda = \lambda(q)$ - числова $\lambda : R \to R$ ② $\lim\limits_{q \to q_0} \lambda(q) \vec{r}(q) = l . \vec{a}$

$\lambda(q_0) = l$

③ $\lim\limits_{q \to q_0} (\vec{r}(q) \vec{u}(q)) = \vec{a} \vec{b}$ и $\lim\limits_{q \to q_0} (\vec{r}(q) \times \vec{v}(q)) = \vec{a} \times \vec{b}$.

$\Rightarrow$ тресм. над-на и т.н.

Док-вото - аналог. из тези за числови ф-ции.

1.3. Непрекъснатост на векторна функция.

Деф. Векторната ф-ция $\vec{r} = \vec{r}(q)$ се нар. непрекъсната ~~в~~ в т. $q_0 \in J$, ако $\lim\limits_{q \to q_0} \vec{r}(q) = \vec{r}(q_0)$ (J в г).

Деф. Производна на векторната ф-ция $\vec{r}(q)$ в т. q_0 се нар. границата

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\vec{r}(q_0+h) - \vec{r}(q_0)}{h} := \dot{\vec{r}}(q)$ $q_0+h \in J$ $\dfrac{d\vec{r}}{dq} = \dot{\vec{r}}(q)$, ако съществува в J

$\vec{r}(q)$ се нар. диференцируема, ако $\dot{\vec{r}}(q)$ съществува за ~~на~~ $\in J$

За диференцирането на произведение на: числова ф-я $f(q)$, векторна ф-я $\vec{r}(q)$, в-рни ф-ии $\vec{r}(q), \vec{u}(q)$ е изпълнено (3)

① $(f(q).\vec{r}(q))^{\cdot} = \dot{f}(q).\vec{r}(q) + f(q).\dot{\vec{r}}(q)$; ② $(\vec{r}(q) \pm \vec{u}(q))^{\cdot} = \dot{\vec{r}}(q) \pm \dot{\vec{u}}(q)$

③ $[\vec{r}(q).\vec{u}(q)]^{\cdot} = \dot{\vec{r}}(q).\vec{u}(q) + \vec{r}(q).\dot{\vec{u}}(q)$; ④ $(\vec{r}_{q} \times \vec{u}(q))^{\cdot} = \dot{\vec{r}} \times \vec{u} + \vec{r} \times \dot{\vec{u}}$

интегруема...

$\frac{d\dot{\vec{r}}(q)}{dq} = \ddot{\vec{r}}(q)$ се нар. втора производна (ако $\exists$-ва...). Аналог. $\dddot{\vec{r}}$ ...

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е ОКС в E_3. Тогава ? Лемите... приложение (извън класно...)

$\vec{r}(q) = x^1(q)\vec{e}_1 + x^2(q)\vec{e}_2 + x^3(q)\vec{e}_3 = \sum_1^3 x^i(q)\vec{e}_i = x^i(q)\vec{e}_i$, x^i - числови ф-ии.

Лесно се установява, че $\vec{r}(q)$ е непрекъсната и диференцируема $\Leftrightarrow$ числовите ф-ции $x^i(q)$ са съответно непрекъснати и диференцируеми.

Също така, за $\vec{r}(q)$ е в сила формулата на Тейлър.

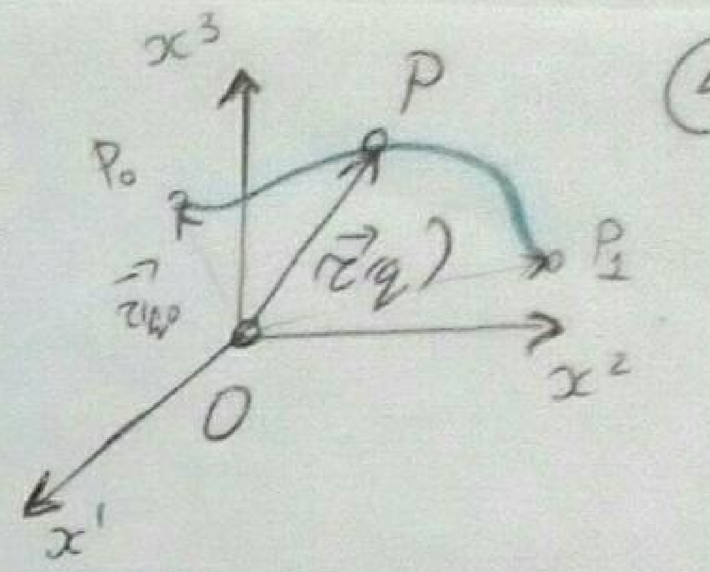
$$\vec{r}(q+h) = \vec{r}(q) + h\dot{\vec{r}}(q) + \frac{h^2}{2!}\ddot{\vec{r}}(q) + \dots + \frac{h^n}{n!}(\vec{r}^{(n)}(q) + \vec{\varepsilon}(q,h)),$$

където $\vec{\varepsilon}(q,h) \xrightarrow[h \to 0]{} \vec{o}$.

Верността ѝ следва от $\vec{r}(q) = x^i(q).\vec{e}_i$ след прилагането на ф-лата на Тейлър за числовите ф-ции $x^i = x^i(q)$) (ва так в i интервал...

Криви линии в E_3 ...тополотично изменение на отсечка...

(а ли освен прави линии и криви...)



4

Нека $\vec{r} = \vec{r}(q)$ е в-рна ф-ция, дефинирана в $J, q \in J$

O - фиксирана т-ка в E_3, $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ - ОКС

Множеството (съвкупността от т-ки

$$c := \{ P : \overrightarrow{OP} = \vec{r}(q),\ q \in J \}$$ се нарича (непрек.) крива в E_3.

$c : \vec{r} = \vec{r}(q)$ - векторно парам-но у-ние на c $\Rightarrow$ от $\vec{r}(q) = x^i(q)\vec{e_i}$ $\rightarrow$

$$c : \begin{cases} x^1 = x^1(q) \\ x^2 = x^2(q) \\ x^3 = x^3(q) \end{cases}, q \in J$$ - параметрични у-ния на c

примери... $c : \begin{cases} x^1 = \cos q \\ x^2 = \sin q \\ x^3 = q \\ q \in R \end{cases}$

c се нарича проста, ако $\forall q_1 \neq q_2,\ q_i \in J$

$\vec{r}(q_1) \neq \vec{r}(q_2)$ - т.е. без самопресичане и ... $\Leftrightarrow$

$$\sum (x^i(q_1) - x^i(q_2)) = 0 \Leftrightarrow q_1 = q_2$$

Гладкост на крива

Кривата $c : \vec{r} = \vec{r}(q)$ се нар. k-кратно гладка, ако $\vec{r}(q)$ има непрекъснати производни от ред $i = 1, \dots, k$ включително и $\dot{\vec{r}}(q) \neq \vec{O}$

(т.е. $\vec{r}$ не е константна ... т.е. c не е точка...)

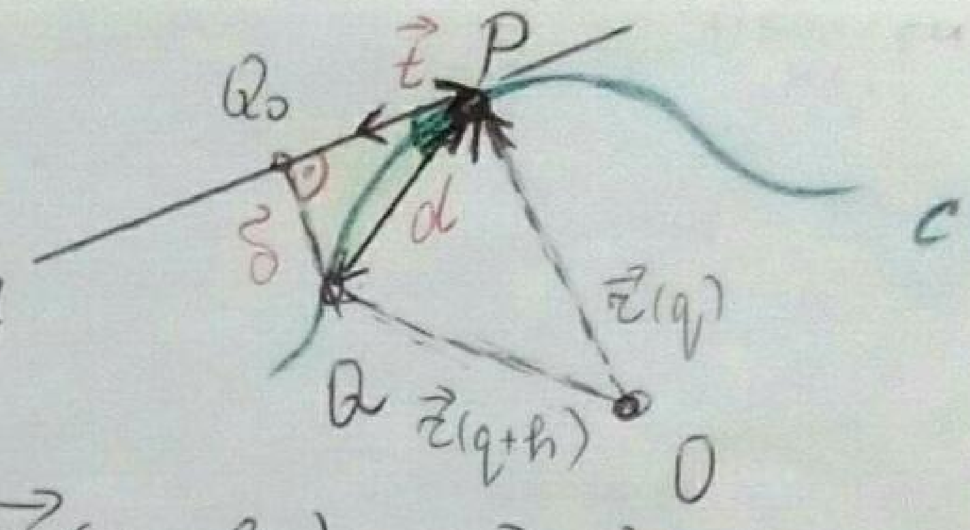
Смяна на параметризацията:

Нека $c : \vec{r} = \vec{r}(q),\ q \in J$ и $q = q(\rho),\ \rho \in J_\rho \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(q) = \vec{r}(q(\rho)) = \vec{r}(\rho)$

например $q = \frac{1}{2}\rho,\ q = \sqrt{2}\rho,\ q = \sin\rho \dots$

отнесена спрямо друг параметър

Допирателна към крива



Нека c е крива… c: $\vec r=\vec r(q)$, $q\in J$

$P\in c$: $\vec{OP}=\vec r(q)$ и $Q\in c \Rightarrow \vec{OQ}=\vec r(q+h)$

Казваме, че Q клони към P по c, ако $\lim\limits_{h\to 0}\vec r(q+h)=\vec r(q)$.

$Q\to P$

Нека g е права през P.

Означаваме с $d=|PQ|$ ($d=d(q)$) и с $\delta=|Q,g|$ $\delta=\delta(q)$

Д. Казваме, че $g=g(q)$ е допирателна към c в т. P, ако отношението

$$\frac{\delta}{d}\to 0 \text{ при } Q\to P.$$

Теорема: Нека c: $c(q)$: $\vec r=\vec r(q)$ е гладка крива. Тогава c има единствена допирателна във всяка т-ка, като $g(q)$: $\vec y(q)=\vec r(q)+\lambda\dot{\vec r}(q)$.

Док. Нека $\vec t$ е в-рната ф-я $\vec t=\vec t(q)$: $\vec t(q)\parallel g(q)$: $|\vec t(q)|=1$, $\vec{OP}=\vec r(q)$, $\vec{OQ}=\vec r(q+h)$

$\Rightarrow d=d(q)=|\vec{PQ}|=|\vec{OQ}-\vec{OP}|=|\vec r(q+h)-\vec r(q)|$. Нека $Q_0=Q_0(q)$: $QQ_0\perp g$, $Q_0\in g \Rightarrow$

$\delta=|QQ_0|$ ($\delta=\delta(q)$) $\xRightarrow{\text{лицето на успоредник}}$ $|\vec{PQ}\times\vec t|=|\vec{PQ}|\underbrace{|\vec t|}_{=1}\sin\angle(\vec{PQ},\vec t)$. От правоъг. $\triangle PQQ_0$ имаме: $\boxed{\sin\angle(\vec{PQ},\vec t)=\frac{\delta}{d}}$

$\Rightarrow |\vec{PQ}\times\vec t|=d\,\frac{\delta}{d}=\delta$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{d}=\frac{|\vec{PQ}\times\vec t|}{|\vec{PQ}|}=\frac{|(\vec r(q+h)-\vec r(q))\times\vec t|}{|\vec r(q+h)-\vec r(q)|}=\frac{\left|\frac{\vec r(q+h)-\vec r(q)}{h}\times\vec t\right|}{\left|\frac{\vec r(q+h)-\vec r(q)}{h}\right|}\Rightarrow$$

при $Q\to P$ ($h\to 0$) имаме:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\delta}{d} = \lim_{h\to 0}\frac{\left|\frac{\vec{r}(q+h)-\vec{r}(q)}{h}\times\vec{t}\right|}{\left|\frac{\vec{r}(q+h)-\vec{r}(q)}{h}\right|} = \frac{|\dot{\vec{r}}(q)\times\vec{t}(q)|}{|\dot{\vec{r}}(q)|}$$

1). Нека g е допирателна към c в т. $P \overset{def}{\Rightarrow} \lim\limits_{h\to 0}\frac{\delta}{d}\to 0$

$\Rightarrow |\dot{\vec{r}}(q)\times\vec{t}(q)| = 0$, $\dot{\vec{r}} \neq \vec{0} \Rightarrow \dot{\vec{r}}$ е колинеарен с $\vec{t}(q)$ $\forall q \Rightarrow$

т.е. $\dot{\vec{r}}(q) \parallel g(q) \Rightarrow g(q)$ - допирателната в т. $\vec{r}(q)$, $\forall q$

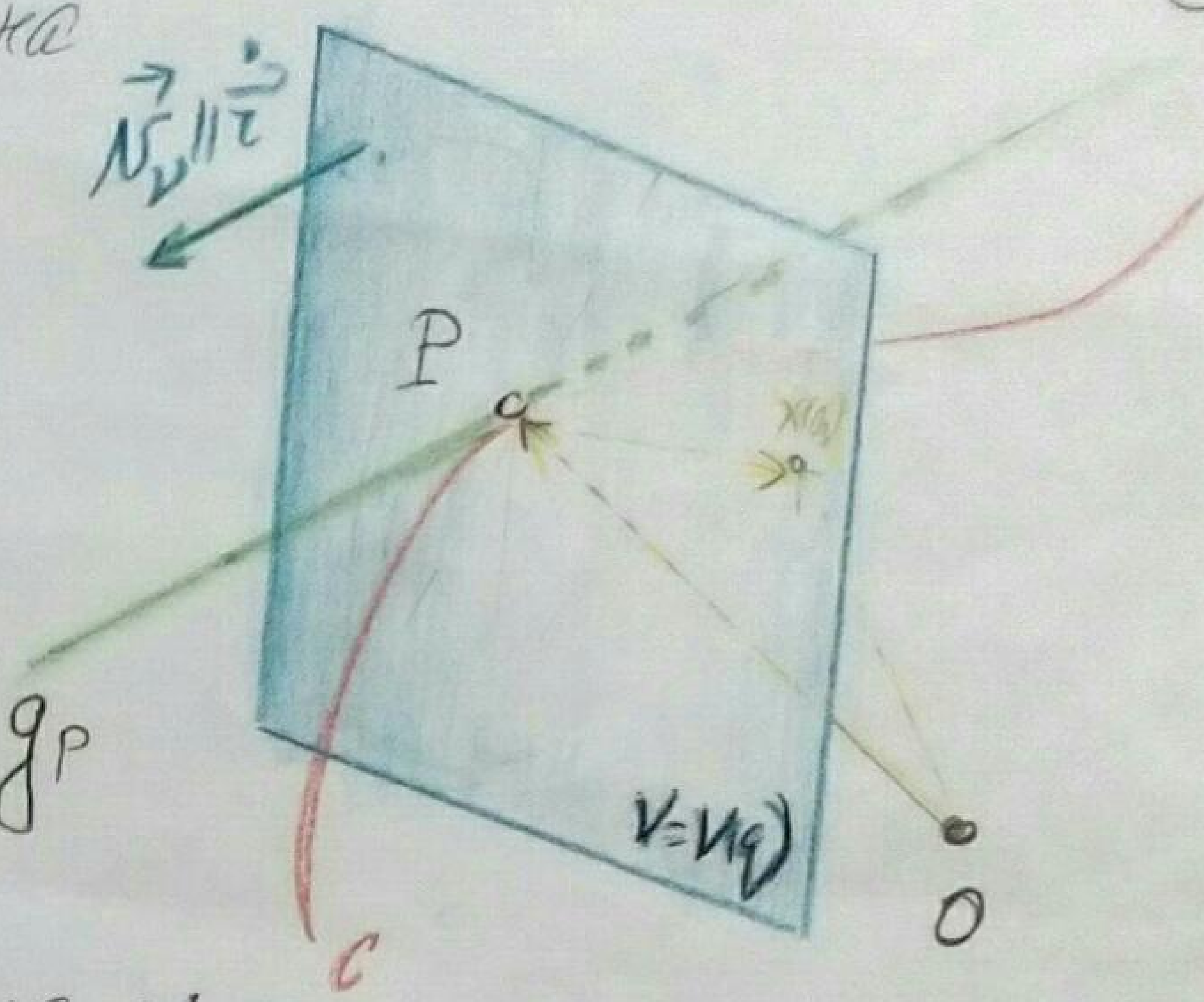
2). Обратно, нека $\dot{\vec{r}}(q)$ е колинеарен с $g = g(q)$, тогава $\dot{\vec{r}}(q)\times\vec{t}(q) = \vec{0}$ $\forall q$

$\Rightarrow |\dot{\vec{r}}\times\vec{t}| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\frac{\delta}{d} = 0.$

От доказателството на т-та непосредствено следва, че у-нието на допирателната към гладка крива в т. $P = P(q)$ е $g_P : \vec{y} = \vec{r}(q) + \mu\dot{\vec{r}}(q)$, където $\mu \in (-\infty, \infty)$

също пример–

Деф. Равнината $\nu = \nu(q)$, която минава през т-та $P = P(q)$ и е перпендикулярна на допирателната в тази точка g_P се нар. нормална равнина на c в т. P.



Всяка права през P, лежаща в ν се нар. нормала на c в т. P

Векторът $\dot{\vec{r}}(q) \neq \vec{0}$ е $\perp \nu$ =>

е нормален на ν =>

Едно векторно параметрично у-ние на ν е

$$\nu : \dot{\vec{r}}(q)(\vec{x} - \vec{r}(q)) = 0$$

(където $x = x(q) \in \nu(q)$ ...)

и още примери.

<u>Приложение 1</u> За векторна функция на числов аргумент $-\vec{r}=\vec{r}(q)$ са в сила следните леми. В тях се предполага необходимата диференцируемост на $\vec{r}(q)$

<u>Лема 1</u> Необходимото и достатъчно условие $\vec{r}=\vec{r}(q)$ да е с постоянна дължина е $\vec{r}(q).\dot{\vec{r}}(q)=0$

коментар

<u>Док.</u> $(\Rightarrow)$ Нека $\vec{r}(q)$ е с постоянна дължина, т.е. $|\vec{r}(q)|=c_0=const \Rightarrow$
$\vec{r}(q)^2=0 \Rightarrow 2\vec{r}(q).\dot{\vec{r}}(q)=0$

$(\Leftarrow)$ Нека $\vec{r}(q).\dot{\vec{r}}(q)=0 \Rightarrow \int \vec{r}(q)\dot{\vec{r}}(q)dq=c_0 \Rightarrow \frac{1}{2}\vec{r}(q)^2=c \Rightarrow |\vec{r}(q)|=c_1$

<u>Лема 2</u> НДУ $\vec{r}(q)$ да има постоянна посока е $\vec{r}(q)\times\dot{\vec{r}}(q)=\vec{0}$.

<u>Док.</u> Нека $\vec{r}(q)=f(q).\vec{e}(q)$, където $|\vec{e}(q)|=1$, $f(q)$ - числова ф-ция (ясно откъде се получава)

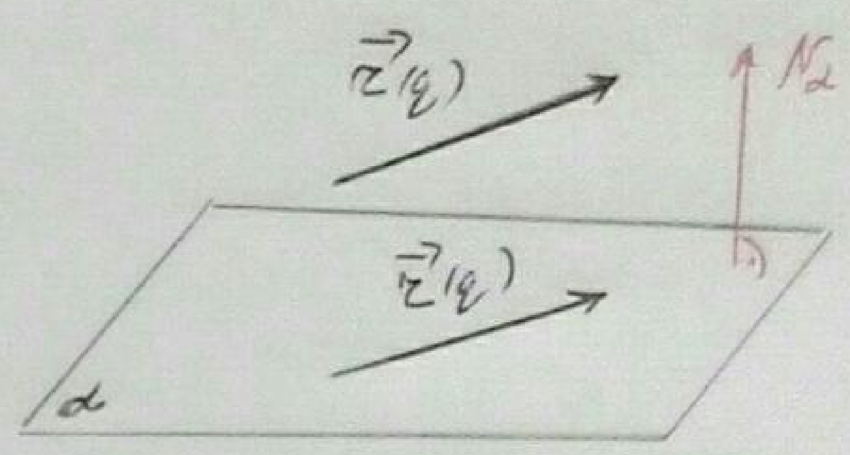
$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(q)=\dot{f}(q)\vec{e}(q)+f(q)\dot{\vec{e}}(q) \Rightarrow \vec{r}\times\dot{\vec{r}}=f\vec{e}\times(\dot{f}\vec{e}+f\dot{\vec{e}})=$

$=f\dot{f}\underbrace{\vec{e}\times\vec{e}}_{=\vec{0}}+f^2\vec{e}\times\dot{\vec{e}} \Rightarrow \underline{\vec{r}\times\dot{\vec{r}}=f^2\vec{e}\times\dot{\vec{e}}}$

Сега, ако $\vec{r}$ има постоянна посока $\Rightarrow \vec{e}(q)=const \Rightarrow \dot{\vec{e}}=\vec{0} \Rightarrow$
$\vec{r}(q)\times\dot{\vec{r}}(q)=\vec{0}$.

Ако $\vec{r}\times\dot{\vec{r}}=\vec{0} \Rightarrow \vec{e}\times\dot{\vec{e}}=\vec{0}$. Но от Л1 $\vec{e}\dot{\vec{e}}=0 \Rightarrow \begin{cases}\vec{e}\dot{\vec{e}}=0 \\ \vec{e}\times\dot{\vec{e}}=\vec{0}\end{cases} \Rightarrow \dot{\vec{e}}=\vec{0}$
$\Rightarrow \vec{e}=const$ в р

<u>Лема 3</u> НДУ $\vec{r}=\vec{r}(q)$ да е компланарна с постоянна дълнина е $\vec{r}(q)\dot{\vec{r}}(q)\ddot{\vec{r}}(q)=0$.



<u>Док.</u> 1. Нека $\vec{r}(q)\parallel\alpha$, α – постоянна р-нина и $\vec{N}_\alpha\perp\alpha$
$\Rightarrow \vec{r}(q)\perp\vec{N}_\alpha\ \forall q\in J \Leftrightarrow \vec{r}(q)\vec{N}_\alpha=0\ \forall q\Rightarrow$
$\dot{\vec{r}}(q)\vec{N}_\alpha+\vec{r}(q)\dot{\vec{N}}_\alpha=0$. От $\vec{N}_\alpha$ = константен в-р $\Rightarrow \dot{\vec{N}}_\alpha=\vec{0}\Rightarrow\dot{\vec{r}}(q)\vec{N}_\alpha=0$
$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(q)\parallel\alpha\ \forall q$. Аналогично $\ddot{\vec{r}}(q)\vec{N}_\alpha+\dot{\vec{r}}(q)\dot{\vec{N}}_\alpha=0\Rightarrow\ddot{\vec{r}}(q)\vec{N}_\alpha=0\ \forall q$ и т.н.
$\Rightarrow \dddot{\vec{r}}(q)\parallel\alpha\ \forall q\ \ldots\ \vec{r}^{(n)}\parallel\alpha)\Rightarrow\vec{r}(q)\dot{\vec{r}}(q)\ddot{\vec{r}}(q)=0$.

2. Нека сега е изпълнено $\vec{r}\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}=0$. Ще покажем, че $\vec{r}(q)$ е компланарна с постоянна равнина.

Нека $\vec{v}=\vec{v}(q)$ е векторната ф-ция $\vec{v}(q)=\vec{r}(q)\times\dot{\vec{r}}(q)$. Ако $\vec{v}(q)=\vec{0}$, то от Лема 2 $\Rightarrow\vec{r}(q)$ има пост. посока $\Rightarrow\vec{r}(q)$ е компланар. с всички р-нини успоредни на правата, задаваща посоката. Нека $\vec{r}$ – гладка – т.е. $\vec{v}(q)\neq\vec{0}$.

$\dot{\vec{v}}(q)=\underbrace{\dot{\vec{r}}(q)\times\dot{\vec{r}}(q)}_{\vec{0}}+\vec{r}(q)\times\ddot{\vec{r}}(q)\Rightarrow\dot{\vec{v}}=\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}\Rightarrow\vec{v}\times\dot{\vec{v}}=(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})\times(\vec{r}\times\ddot{\vec{r}})$

$=\underbrace{(\vec{r}\vec{r}\ddot{\vec{r}})}_{=0}.\dot{\vec{r}}-(\dot{\vec{r}}\vec{r}\ddot{\vec{r}}).\vec{r}=(\vec{r}_1\dot{\vec{r}}_1\ddot{\vec{r}}_1).\vec{r}\overset{от}{\Rightarrow}\vec{r}\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}=0\Rightarrow$

$\vec{v}(q)\times\dot{\vec{v}}(q)=0\ \forall q\overset{Лема 2}{\Rightarrow}\vec{v}(q)$ има постоянна посока $\vec{v}_0\Rightarrow\vec{r}(q)\times\dot{\vec{r}}(q)$ има постоянна посока $\Rightarrow\vec{r}(q)\perp\vec{v}_0\Rightarrow$ е компланарна с равнините, перпендикулярни на $\vec{v}_0$