Задачи за контролно 3 по висша алгебра

Задача 1. *Нека* $f, g \in \mathbb{R}[x]$, *като* $f = x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x + 8$, $g = x^3 + 2x^2 - 4x - 5$.
Намерете (f, g), *както и полиноми* $u, v \in \mathbb{R}[x]$, *такива че* $(f, g) = fu + gv$.

Задача 2. *Докажете, че факторпръстенът* $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + \overline{2}x + \overline{1})$ *е поле.*
Пресметнете $(\overline{2}x^2 + 1)(x^2 + x + \overline{1})^{-1}$ *в това поле.*

Задача 3. *Намерете полином* f *от трета степен с реални коефициенти със следните свойства:*

- f *дава остатък* $-3x - 10$ *при деление с полинома* $x^2 + 1$;
- *За корените* x_1, x_2, x_3 *на* f *е изпълнено* $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1$ *и* $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = 19$.

Задача 4. *Нека* $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 + px + 16 \in \mathbb{R}[x]$. *Намерете* p, *ако за корените* x_1, x_2, x_3, x_4 *на* f *е в сила равенството* $x_1 + x_2 + x_3 = x_4$.

Задача 5. *За кои* $\lambda \in \mathbb{C}$ *полиномът* $g = x^4 - x^3 + \lambda x^2 - x - 6 \in \mathbb{C}[x]$ *има два противоположни корена?*

Задача 6. *За кои стойности на* p *и* q *полиномът* $f = x^4 + 2px^3 + qx + 1 \in \mathbb{C}[x]$ *има трикратен корен?*

Задача 7. *Представете сумата* $\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_1+x_3} + \frac{x_3}{x_1+x_2}$ *чрез елементарните симетрични полиноми* σ_1, σ_2, σ_3.

Задача 8. *Нека* x_1, x_2, x_3 *са корените на полинома* $f = x^3 + px + q$. *Намерете* $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

Задача 9. *Нека* x_1, x_2, x_3 *са корените на полинома* $f = x^3 + px + q$, *като* $f(1) \neq 0$. *Изразете чрез* p *и* q *сумата* $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{(1 - x_i)^2}$.