21.1

21. Определяне на крива от втора степен с пет точки. Снопове криви от втора степен.

В тази тема представяме необходими и достатъчни условия за еднозначното определяне на крива от втора степен. Примерно окръжност се определя еднозначно от кои да е три свои точки. Имаме, че през три неколинеарни точки минава точно една окръжност.

За произволна крива от втора степен е в сила следната

<u>Теорема 1.</u> В равнината през всеки пет точки, никои четири от които не са колинеарни, минава точно една крива от втора степен.

Доказателство. Нека петте точки $M_i(x_i, y_i, t_i)$, $i=1,2,\dots,5$ удовлетворяват условието на теоремата, а именно, никои четири от тях не са колинеарни.

За да има крива от втора степен, минаваща през точките M_i, $i=1,2,\dots,5$ е необходимо да съществува ненулев полином f, $f(x,y,t)$, $a_{ij}\neq 0$ за поне два индекса i,j, $i\leq j$, $i,j=1,2,3$.

$$f(x,y,t)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xt+2a_{23}yt+a_{33}t^2,$$ 21.2

такъв, че точките $M_1, M_2, \dots, M_5$ го анулират – $f(M_i)=0, i=1,2,\dots,5.$ т.е. системата

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1y_1+a_{22}y_1^2+2a_{13}x_1t_1+2a_{23}y_1t_1+a_{33}t_1^2=0 \\ a_{11}x_2^2+2a_{12}x_2y_2+a_{22}y_2^2+2a_{23}x_2t_2+2a_{23}y_2t_2+a_{33}t_2^2=0 \\ \dots \\ a_{11}x_5^2+2a_{12}x_5y_5+a_{22}y_2^2+2a_{23}x_5t_5+2a_{23}y_5t_5+a_{33}t_5^2=0 \end{array}\right.$$

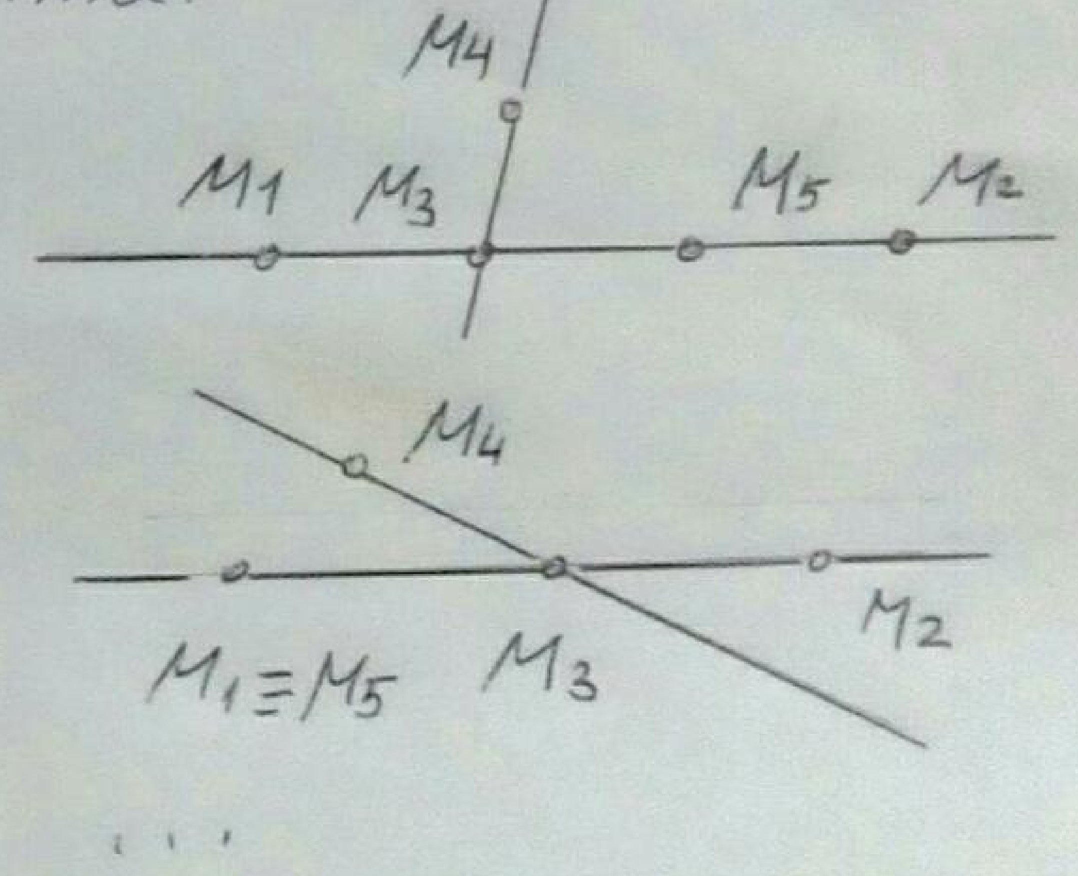
има ненулево решение.

Системата (1) е линейна хомогенна система от пет уравнения с шест неизвестни. Известно е, че такава система има ненулево решение точно тогава, когато е независима система от линейни уравнения, т.е. никое уравнение не е линейна комбинация на останалите.

Да допуснем, че системата (1) е линейно зависима. Без ограничение на общността приемаме, че петото уравнение е зависимо от останалите, т.е. е линейна комбинация на първите четири уравнения на системата. Следователно всяка крива от втора степен, която минава през точките M_1, M_2, M_3 и M_4 съдържа и точката M_5. Една такава крива е кривата k_1, $k_1 : \{M_1M_2, M_3M_4\}$ - т.е. k_1 е определена от двете си образуващи M_1M_2 и M_3M_4. Следователно $M_5 \in M_1M_2$ или $M_5 \in M_3M_4$ или M_5 е пресечната точка на M_1M и M_3M_4. Друга крива от втора степен е $k_2 : \{M_1M_3, M_2M_4\}$. Следователно $M_5 \in M_1M_3$ или (и) $M_5 \in M_24$.

Без ограничение на общността приемаме, че $M_5 \in M_1M_2$.

Ако $M_5 \in M_1M_3$ и $M_5 \in M_1M_3 \Rightarrow M_1M_2 \equiv M_1M_5 \equiv M_2M_5 \equiv M_3M_5$ т.е. точките M_1, M_2, M_3 и M_5 са колинеарни, или $M_5 \equiv M_1$ или $M_5 \equiv M_2$; ... което противоречи на условието на теоремата.



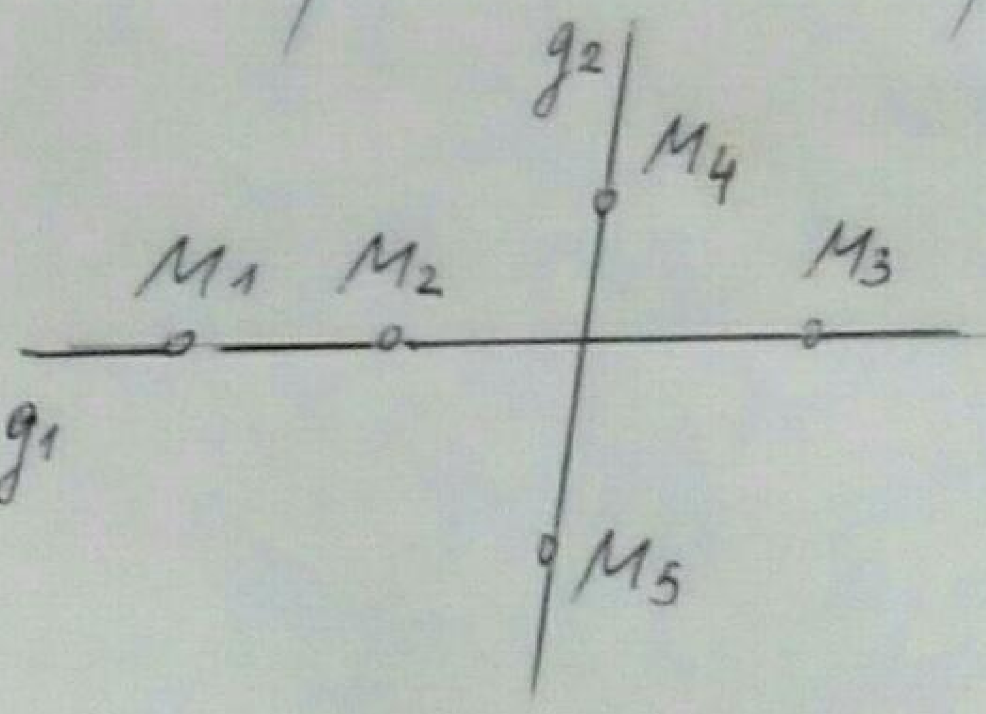
Ако $M_5 \in M_1M_2$ и $M_5 \in M_4M_5$, то или $M_1M_2 \equiv M_1M_5 \equiv M_2M_5 \equiv M_4M_5 \Rightarrow$ или точките M_1, M_2, M_4 и M_5 са колинеарни, или M_5 съвпада с някоя от точките M_1, M_2 или M_4, противоречие.

Следователно системата (1) има единствено нетривиално решение за a_{ij}, $i,j=1,2,3$, $i\le j$ с точност до коефициент на пропорционалност. Следователно през петте точки $M_1, M_2, \dots, M_5$, никои четири от които не са колинеарни минава единствена крива от втора степен.

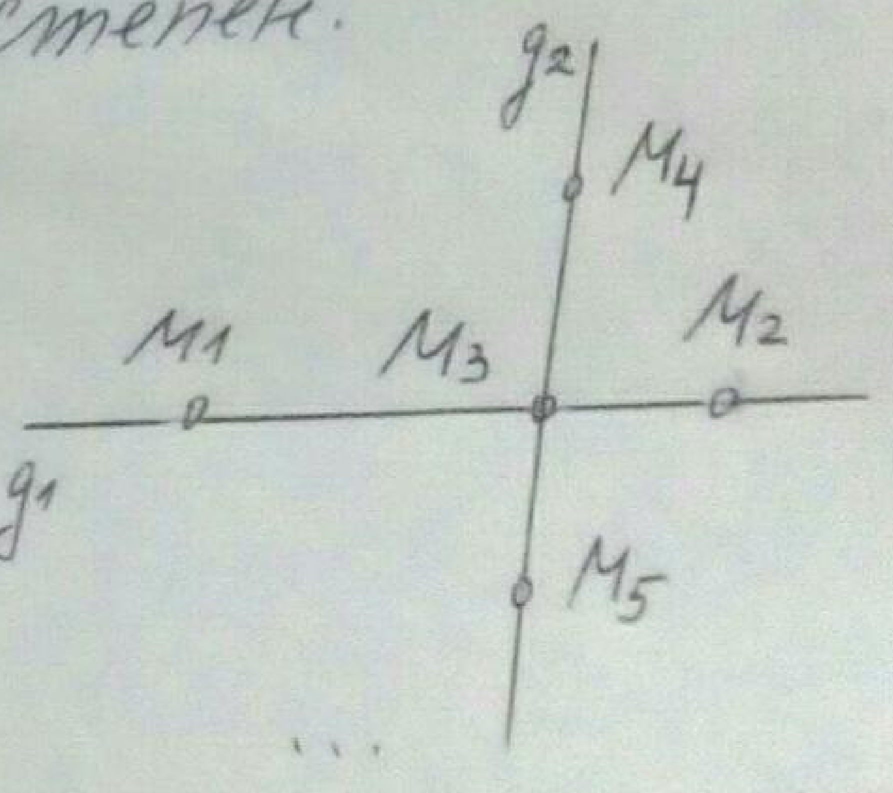
Коментар. 1. От горната теорема получаваме, че през пет точки, никои три от които не са колинеарни минава единствена крива от втора степен. Ясно е, че такава крива няма праволинейни образуващи.

2. Ако три от точките $M_1, M_2, \dots, M_5$ са колинеарни, то през тях отново има единствена крива от втора степен.

Примерно, ако $M_1, M_2, M_3 \in g_1$, то $M_5 M_4 \in g_2$, $g_2 \ne g_1$



,



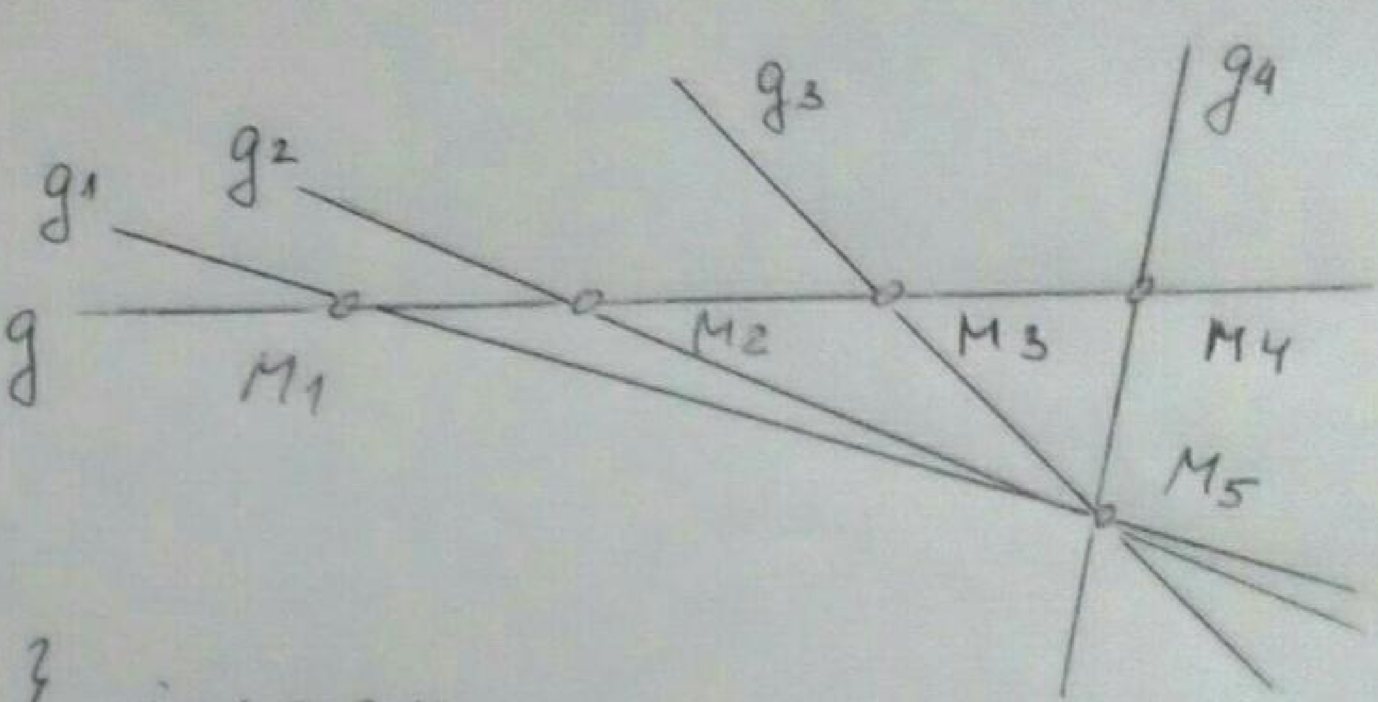
...

21.5.

3. Ако четири от точките $M_1, M_2, \dots, M_5$ са колинеарни, примерно M_1, M_2, M_3 и M_4 да са колинеарни с права g.

Ако $M_5 \notin g$, то кривите от втора степен, съдържащи петте точки са $k_i = \{M_i M_5, g\}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

(или $k_i = \{g_i, g\}$, $g_i = M_i M_5$, $i = 1, 2, 3, 4$.)

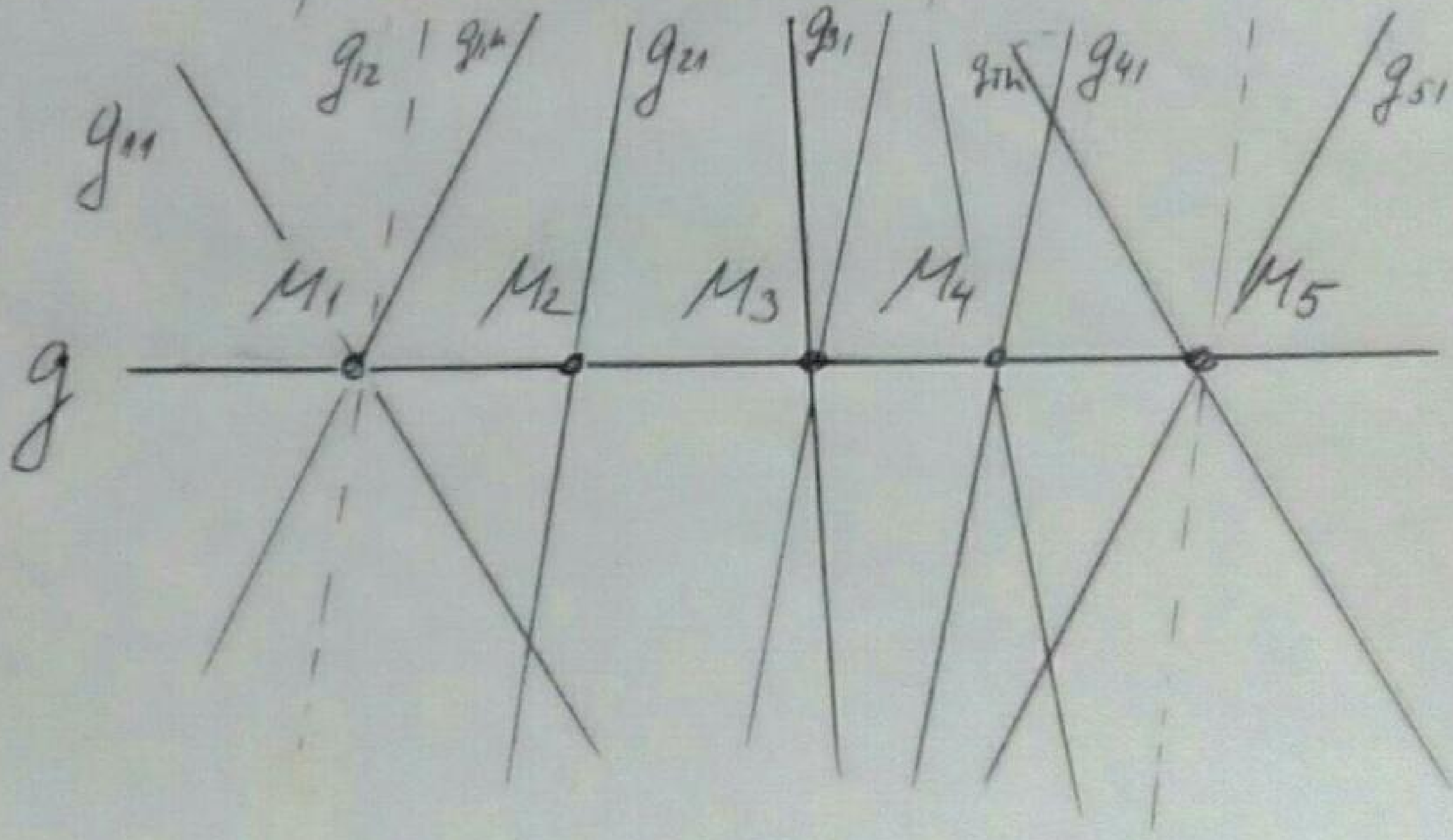


Ако $M_5 \in g$, то има безброй много криви от втора степен, минаващи през тези точки.

Една крива е $k = \{g, g\}$

Другите криви са $k_{ij} = \{g, g_{ij}\}$

$i = 1, \dots, n, \dots$, $j = 1, \dots n, \dots$



21.6

Следващата теорема отговаря на въпроса, кога от полиномите на две криви можем да заключим дали кривите съвпадат или са различни.

<u>Теорема 2.</u> Нека $k': f(x,y,t)=0$ и $k'': g(x,y,t)=0$ са две криви от втора степен. Тогава кривите k' и k'' съвпадат точно тогава, когато съществува $\rho \in \mathbb{R}, \rho \neq 0$, така че $g(x,y,t)=\rho f(x,y,t)$.

Доказателство. 1.) Ако $g=\rho f$, то $k' \equiv k''$, тъй като всяка точка от k' принадлежи на k'' и обратно.

2. Нека сега $k' \equiv k''$. Ако има пет точки от k', такива че никои четири от тях не са колинеарни, то от Теорема 1. следва, че $g(x,y,t)=\rho f(x,y,t)$, $\rho \neq 0$.

Ако всеки четири точки от k' са колинеарни, то всички точки от k' са колинеарни с права $l: ax+by+ct=0$, $[a,b,c] \neq [0,0,0]$.

Тогава $f(x,y,t)=\lambda(ax+by+ct)^2$ и $g(x,y,t)=\mu(ax+by+ct)^2$, $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$.

Следователно $g(x,y,t)=\rho f(x,y,t)$, $\rho \neq 0$. $\square$