Базис. Допълване и редуциране до базис

Люба Конова

Ноември 2021

1 Теория:

- **Линейна обвивка** ще наричаме множеството от всички линейни комбинации на елементи от $\mathbb{A}$ с коефициенти от $\mathbb{F}$, където $\mathbb{A}$ е произволно непразно подмножество на линейното пространство $\mathbb{V}$.
- Ще казваме, че векторите a_1, a_2, ..., a_n са **линейно независими**, ако от това, че някоя тяхна линейна комбинация е равна на 0, следва, че **всички** коефициенти в линейната комбинация са нули.
- Казваме, че едно подмножество на линейно пространство е негов **базис**, ако е линейно независима система вектори и всеки един вектор от линейното пространство може да бъде изразен като линейна комбинация на вектори от подмножеството.
- **Размерност** на едно линейно пространство наричаме броя на векторите в произволен негов базис.
- Максималния брой линейно независими вектори в една система от вектори наричаме **ранг**. Рангът съвпада с размерността на линейното пространство, образувано от линейната обвивка на същите вектори

2 Задачи:

2.1 Редуциране на вектори до базис

Задача 1: Редуцирайте векторите до базис на F^3:
a) $a_1 = (1, 1, 2),\ a_2 = (-1, 0, 3),\ a_3 = (4, 2, 1),\ a_4 = (11, 7, 11)$;
b) $a_1 = (-1, 2, 3),\ a_2 = (2, 1, -4),\ a_3 = (1, 3, -2),\ a_4 = (0, 1, 1)$;
c) $a_1 = (0, 6, 6),\ a_2 = (3, 1, 1),\ a_3 = (1, -1, 3), a_4 = (-2, 3, 1),\ a_5 = (2, 3, 5),\ a_6 = (1, -6, 4)$;

2.2 Доказване на базис:

Задача 2: Векторите $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ образуват базис на тримерното пространство $\mathbb{V}$. Да се докаже, че векторите $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ също образуват базис и да се намерят координатите на вектора $2\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} + 2\mathbf{e_3}$ в този базис, където:
a) $a_1 = e_1 + e_2 + e_3,\ a_2 = e_1 + e_2 + 2e_3,\ a_3 = e_1 + 2e_2 + 3e_3;$
b) $a_1 = 2e_1 + 2e_2 - e_3,\ a_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3,\ a_3 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3;$
c) $a_1 = e_1 + 5e_2 + 3e_3,\ a_2 = 2e_1 + 7e_2 + 3e_3,\ a_3 = 3e_1 + 9e_2 + 4e_3;$
d) $a_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3,\ a_2 = 2e_1 + 5e_2 + 7e_3,\ a_3 = 3e_1 + 7e_2 + 11e_3;$

2.3 Допълване до базис:

Задача 3: Да се докаже, че системата вектори:
a) $a_1 = (-1, 2, 3, -2),\ a_2 = (2, 1, -4, -3),\ a_3 = (1, 3, -2, -3);$
b) $a_1 = (1, -1, 2, 3),\ a_2 = (2, -2, 1, 1);$
c) $a_1 = (1, 2, -1, 3),\ a_2 = (-1, -2, 1, 1);$
е линейно независима и да се допълни тази система до базис на F^4.

2.4 Определяне на размерност и координати

Задача 4: Да се намерят стойностите на параметъра λ, за които векторът v е линейна комбинация на векторите a_1, a_2, a_3 и да се изрази v чрез тези вектори, където:
a) $a_1 = (1, 2, -1),\ a_2 = (2, 3, 1),\ a_3 = (1, 0, 5),\ v = (2, -3, \lambda);$
b) $a_1 = (1, 2, 3, 4),\ a_2 = (7, 14, 20, 27),\ a_3 = (5, 10, 16, 19),\ v = (2, \lambda, 5, 5)$

Задача 5: Нека

$$\mathbb{V} = \{(a + \sqrt{3}b, c + \sqrt{3}d, 2a - 2\sqrt{3}b, -c + \sqrt{3}d) \in \mathbb{R}^4 | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

а) Докажете, че $\mathbb{V}$ е линейно пространство над $\mathbb{Q}$

б) Намерете $\dim \mathbb{V}$ и негов базис.

в) Докажете, че $W = v \in V | a + \sqrt{3}b = 2(c + \sqrt{3}d) - (c - \sqrt{3}d)$ е линейно подпространство на V. Намерете подходящ базис и dim W.

Задача 6: Намерете координатите на вектора $p(x) = 2 - x - x^2$ спрямо базиса $f_1(x) = 1 + x,\ \ f_2(x) = 1 + x^2,\ f_3(x) = x + x^2$

2.5 Определяне на ранг на система вектори

Задача 7: Да се намери рангът на системата вектори:
a) $a_1 = (2, 1, -3),\ a_2 = (3, 1, -5),\ a_3 = (1, 0, -7),\ a_4 = (4, 2, -1),\ a_5 = (-2, -5, -9)$
b) $a_1 = (3, 5, -13, 11),\ a_2 = (3, -1, 3, -3),\ a_3 = (3, 2, -5, 4), a_4 = (3, 8, -21, 18)$

c) $a_1 = (1, -1, 2, -1, 3)$, $a_2 = (2, 1, -3, 1, -2)$, $a_3 = (2, -1, 1, 3, 2)$, $a_4 = (1, 2, 1, -2, 1)$, $a_5 = (1, -1, 3, -1, 7)$