Лекция №10:

3.4 Еквивалентност между денотационната и операционната семантика по стойност

Предстои ни да докажем една от най-важните теореми в нашия курс, която се изказва съвсем кратко: за всяка рекурсивна програма R:

$$O_V(R) \;=\; D_V(R).$$

Този резултат хвърля мост между двата съвършено различни подхода към определянето на формална семантика на рекурсивните програми, които разгледахме дотук. При денотационния поход функцията, която се определя от програмата R, в нашите означения — $D_V(R)$, се дефинира посредством най-малката неподвижна точка на подходящ непрекъснат оператор в подходяща област на Скот, *Определение* 3.5 (или еквивалентно, посредством най-малкото решение на системата от функционални уравнения 2.11, която този оператор задава).

От друга страна, функцията $O_V(R)$, която се пресмята операционно от програмата R, въведохме по един по-естествен начин — чрез правилата за синтактичен извод 3.9. Фактът, че тези два типа семантики съвпадат, е сам по себе си интересен и нетривиален. Но той също така е от изключителна важност за верификацията на рекурсивните програми, защото дава възможност да се използват техники от типа на μ-индуктивния принцип на Скот, които вървят за най-малки неподвижни точки. Този феномен — че функцията, която се пресмята от една рекурсивна програма може да се опише чрез подходяща най-малка неподвижна точка — позволява тези техники да се използват и за доказване на коректност на рекурсивни програми.

В следващия раздел ще докажем, че подобна характеризация е в сила и при предаване на параметрите *по име*.

Да покажем равенството на двете частични функции $D_V(R)$ и $O_V(R)$ означава да покажем двете включвания

$$O_V(R) \subseteq D_V(R) \quad \text{и} \quad D_V(R) \subseteq O_V(R).$$

Това ще направим в двата следващи подраздела.

3.4.1 Доказателство на включването $O_V(R) \subseteq D_V(R)$

Ще започнем с една спомагателна лема, която, ще използваме многократно по-надолу.

Лема 3.3. Нека $\tau(X_1, \ldots, X_n, F_1, \ldots, F_k)$ е терм, в който всяка от функционалните променливи F_i е на m_i аргумента, $1 \leq i \leq k$. Нека още $c_1, \ldots, c_n$ са естествени числа, а $f_1, \ldots, f_k$ са частични функции, съответно на $m_1, \ldots, m_k$ аргумента. Тогава

$$\tau[X_1/c_1, \ \ldots \ , X_n/c_n](f_1, \ldots, f_k) \ \simeq \ \tau(c_1, \ldots, c_n, f_1, \ldots, f_k).$$

Доказателството на тази лема е със съвсем рутинна индукция по построението на терма τ, затова ще го пропуснем.

Да обърнем отново внимание, че в лявата страна на горното равенство $c_1, \ldots, c_n$ се употребяват като *константи*, докато в дясната страна — като *числа*. Термът $\tau[X_1/c_1, \ \ldots \ , X_n/c_n]$ вляво е *функционален*, т.е. терм без обектови променливи, затова пресмятаме стойността му в точка от вида $(f_1, \ldots, f_k)$.

Пример. Нека $\tau(X, F)$ е $F(X) + X$. Да означим с S функцията "прибавяне на 1", т.е. $S(x) = x + 1$ за всяко x. Тогава

$$\tau(5, S) = S(5) + 5 = 11.$$

От друга страна, за стойността на функционалния терм $\tau[X/5]$в т. S ще имаме:

$$\tau[X/5](S) = (F(5) + 5)(S) = S(5) + 5 = 11.$$

Оттук до края на този раздел ще считаме, че е фиксирана произволна програма R от нашия език REC:

$$\begin{aligned}
&\tau_0(X_1, \ldots, X_n, F_1, \ldots, F_k) \qquad \texttt{where} \\
&F_1(X_1, \ldots, X_{m_1}) = \tau_1(X_1, \ldots, X_{m_1}, F_1, \ldots, F_k) \\
&\vdots \\
&F_i(X_1, \ldots, X_{m_i}) = \tau_i(X_1, \ldots, X_{m_i}, F_1, \ldots, F_k) \\
&\vdots \\
&F_k(X_1, \ldots, X_{m_k}) = \tau_k(X_1, \ldots, X_{m_k}, F_1, \ldots, F_k)
\end{aligned}$$

В раздел 3.2.2 показахме, че операторът $\Gamma \ = \ \Gamma_{\tau_1} \times \cdots \times \Gamma_{\tau_k}$ е непрекъснат в областта на Скот

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_{m_1} \times \cdots \times \mathcal{F}_{m_k}, \ \subseteq, \ (\emptyset^{(m_1)}, \ldots, \emptyset^{(m_k)}) \ )$$

и следователно той има най-малка неподвижна точка $\bar{f}_\Gamma \ = \ (f^1_\Gamma, \ldots, f^k_\Gamma)$.

Чрез $\bar{f}_\Gamma$ определихме функцията $D_V(R)$ — *денотационна семантика по стойност* на програмата R посредством равенството:

$$D_V(R)(c_1, \ldots, c_n) \ \simeq \ \tau_0(c_1, \ldots, c_n, f^1_\Gamma, \ldots, f^k_\Gamma)$$

за всички естествени $c_1, \ldots, c_n$.

По-надолу това равенство ще съкращаваме до

$$D_V(R)(\bar{c}) \simeq \tau_0(\bar{c}, \bar{f}_\Gamma).$$

В раздел 2.3.3 забелязахме, че вместо да говорим за неподвижни точки на оператора Γ, интуитивно по-ясно е да си представяме решенията на следната система, определена от R:

$$\left|\begin{array}{l} \mathbb{X}_1 = \Gamma_{\tau_1}(\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_k) \\ \vdots \\ \mathbb{X}_k = \Gamma_{\tau_k}(\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_k). \end{array}\right. \tag{3.10}$$

Видяхме, че всяка неподвижна точка на Γ е решение на системата (3.10) и обратно, всяко решение на (3.10) е н.т. на оператора Γ. В частност, най-малката неподвижна точка $(f^1_\Gamma, \ldots, f^k_\Gamma)$ на Γ ще бъде най-малко решение на тази система.

Близката ни цел е да покажем включването $O_V(R) \subseteq D_V(R)$, което може да се изкаже така: всяка стойност, която се извежда от R с правилата за извод, се получава на определен етап от итерацията на оператора $\Gamma = \Gamma_{\tau_1} \times \cdots \times \Gamma_{\tau_k}$.

Съгласно определението за подфункция, $O_V(R) \subseteq D_V(R)$, ако за всички естествени $c_1, \ldots, c_n$ и d е в сила импликацията

$$O_V(R)(\bar{c}) \simeq d \implies D_V(R)(\bar{c}) \simeq d,$$

или преписана чрез съответните дефиниции на $O_V(R)$ и $D_V(R)$:

$$R \vdash_V \tau_0[\bar{X}/\bar{c}] \ \to \ d \quad \implies \quad \tau_0(\bar{c}, \bar{f}_\Gamma) \simeq d.$$

Съгласно *Лема* 3.3, стойността на израза вдясно можем да запишем и така:

$$\tau_0(\bar{c}, \bar{f}_\Gamma) \ \simeq \ \underbrace{\tau_0[\bar{X}/\bar{c}]}_{\mu}(\bar{f}_\Gamma).$$

Да означим за момент с μ функционалния терм $\tau_0[\bar{X}/\bar{c}]$. Тогава импликацията по-горе добива вида:

$$R \vdash_V \mu \ \to \ d \quad \implies \quad \mu(\bar{f}_\Gamma) \simeq d. \tag{3.11}$$

Ясно е, че ще се наложи да докажем (3.11) не само за $\mu = \tau_0[\bar{X}/\bar{c}]$, а за *всеки* функционален терм $\mu(F_1, \ldots, F_k)$, чиито функционални променливи $F_1, \ldots, F_k$ са като тези на програмата R, т.е. имат местност $m_1, \ldots, m_k$, съответно.

В доказателството на импликацията (3.11), което ще проведем по-долу, никъде няма да използваме, че $\bar{f}_\Gamma$ е *най-малката* сред неподвижните точки на оператора Γ. Затова ще формулираме твърдението за *произволна* неподвижна точка $\bar{f}$ на Γ.

Твърдение 3.4. Нека $\mu(F_1,\dots,F_k)$ е функционален терм, а $\bar{f} = (f_1,\dots,f_k)$ е неподвижна точка на оператора $\Gamma = \Gamma_{\tau_1} \times \dots \times \Gamma_{\tau_k}$. Тогава е в сила импликацията:

$$R \vdash_V \mu \ \to \ d \quad \Longrightarrow \quad \mu(\bar{f}) \simeq d. \tag{3.12}$$

Преди да сме пристъпили към доказателството на твърдението, да изкажем следствието, което получаваме от него при $\mu \ = \ \tau_0[\bar{X}/\bar{c}]$:

Следствие 3.1. За всяка рекурсивна програма R

$$O_V(R) \subseteq D_V(R).$$

Доказателство. Нека $R \vdash_V \mu \ \to \ d$ с дължина на извода l. Ще покажем, че $\mu(\bar{f}) \simeq d$, като разсъждаваме с пълна индукция по l.

Наистина, да приемем, че за всяко опростяване $\mu' \ \to \ d'$:

$$\text{ако } R \vdash_V \mu' \ \to \ d' \text{ с дължина на извода } l' < l, \quad \text{то } \mu'(\bar{f}) \simeq d'$$

(*индуктивната хипотеза*).

Разглеждаме различните възможности за функционалния терм μ.

1) μ е константа. Тогава $R \vdash_V \mu \ \to \ d$ може да е изпълнено само ако $\mu = d$ и в такъв случай $\mu(\bar{f}) \stackrel{\text{деф}}{=} d$.

2) μ е обектова променлива. Този случай е невъзможен, защото μ е функционален терм.

3) μ е от вида $\mu_1 \ op \ \mu_2$. Имаме по условие, че

$$R \vdash_V \ \mu_1 \ op \ \mu_2 \ \to \ d,$$

откъдето по *Лема* 3.1 получаваме, че с дължина на извода, по-малка от l, са били изведени условията над чертата на правило (1):

$$R \vdash_V \ \mu_1 \ \to \ c_1 \quad \text{и} \quad R \vdash_V \ \mu_2 \ \to \ c_2$$

за някои c_1 и c_2, такива че $c_1 \ op \ c_2 \ = d$. Прилагаме индукционната хипотеза към тези опростявания и получаваме, че

$$\mu_1(\bar{f}) \simeq c_1 \quad \text{и} \quad \mu_2(\bar{f}) \simeq c_2.$$

Тогава от дефиницията за *стойност на терм* и факта, че $c_1 \ op \ c_2 \ = d$ ще имаме:

$$\mu(\bar{f}) \ \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \ \mu_1(\bar{f}) \ op \ \mu_2(\bar{f}) \ \simeq \ c_1 \ op \ c_2 = d.$$

4) μ е от вида **if** μ_1 **then** μ_2 **else** μ_3, разсъждаваме по много подобен начин, като разглеждаме двата случая, отговарящи на правилата $(2_{\mathbf{t}})$ и $(2_{\mathbf{f}})$.

5) Последната възможност за μ е да е от вида $F_i(\mu_1, \dots, \mu_{m_i})$. Тук имаме

$$R \vdash_V \ F_i(\mu_1, \dots, \mu_{m_i}) \ \to \ d$$

с дължина на извода l. Прилагаме отново *Лема* 3.1 и получаваме, че преди това (т.е. с дължина на извода, по-малка от l) *трябва* да са били изведени условията в предпоставката на правило (3_V), т.е. за някои константи $c_1, \dots, c_{m_i}$ са били изведени

$$R \vdash_V \mu_1 \to c_1, \ \dots \ , R \vdash_V \mu_{m_i} \to c_{m_i} \quad \text{и} \quad R \vdash_V \tau_i[X_1/c_1, \dots, X_{m_i}/c_{m_i}] \to d$$

с дължина на извода, по-малка от l. Прилагаме индуктивната хипотеза към тези опростявания и получаваме, че

$$\mu_1(\bar{f}) \simeq c_1, \ \dots \ , \mu_{m_i}(\bar{f}) \simeq c_{m_i} \quad \text{и} \quad \tau_i[\bar{X}/\bar{c}](\bar{f}) \simeq d.$$

Следователно

$$\mu(\bar{f}) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f_i(\mu_1(\bar{f}), \dots, \mu_{m_i}(\bar{f})) \ \simeq \ f_i(c_1, \dots, c_{m_i}). \tag{3.13}$$

Този е моментът да използваме, че векторът $\bar{f} = (f_1, \dots, f_k)$ е неподвижна точка на оператора $\Gamma = \Gamma_{\tau_1} \times \dots \times \Gamma_{\tau_k}$. По дефиниция това означава, че $\Gamma(\bar{f}) = \bar{f}$, или разписано:

$$\Gamma(\bar{f}) \ \stackrel{\text{деф}}{=} \ (\Gamma_{\tau_1}(\bar{f}), \dots, \Gamma_{\tau_k}(\bar{f})) \ = (f_1, \dots, f_k).$$

В частност, за нашето i ще имаме

$$\Gamma_{\tau_i}(\bar{f}) = f_i.$$

Оттук при $\bar{c} = (c_1, \dots, c_{m_i})$ ще е изпълнено

$$\Gamma_{\tau_i}(\bar{f})(\bar{c}) \simeq f_i(\bar{c}). \tag{3.14}$$

Но колко е $\Gamma_{\tau_i}(\bar{f})(\bar{c})$? От определението на термален оператор (3.1) имаме

$$\Gamma_{\tau_i}(\bar{f})(\bar{c}) \ \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \ \tau_i(\bar{c}, \bar{f}) \ \stackrel{\text{Лема 3.3}}{\simeq} \ \tau_i[\bar{X}/\bar{c}](\bar{f}) \ \stackrel{\text{и.х.}}{\simeq} \ d.$$

Сега от равенствата (3.13) и (3.14) получаваме финално

$$\mu(\bar{f}) \ \simeq \ f_i(\bar{c}) \ \simeq \ \Gamma_{\tau_i}(\bar{f})(\bar{c}) \ \simeq \ d,$$

което и трябваше да покажем.

$\square$

3.4.2 Доказателство на включването $D_V(R) \subseteq O_V(R)$

За да покажем това включване, се оказва полезно да въведем k на брой спомагателни функции, които ще означим с $g_1, \ldots, g_k$. Техният интуитивен смисъл е следният: $g_i : \mathbb{N}^{m_i} \multimap \mathbb{N}$ е функцията, която се определя операционно по стойност от F_i. Формалното определение на g_i е следното:

$$g_i(c_1, \ldots, c_{m_i}) \simeq d \quad \stackrel{\text{деф}}{\iff} \quad R \vdash_V F_i(c_1, \ldots, c_{m_i}) \ \to \ d \tag{3.15}$$

за всички естествени $c_1, \ldots, c_{m_i}$ и d.

Разбира се, от това определение никак не следва, че $g_1, \ldots, g_k$ наистина са *еднозначни* функции. Това ще се изясни по-надолу. Нещо повече, ще се окаже, че векторът $(g_1, \ldots, g_k)$ всъщност е най-малката неподвижна точка на оператора Γ, т.е. ще бъде вярно, че

$$\bar{g} = \bar{f}_\Gamma.$$

Когато докажем това, ще сме на една крачка от включването $D_V(R) \subseteq O_V(R)$, което е нашата цел в този раздел.

Най-напред да забележим, че когато викаме F_i с аргументи, които са *константи* (а не произволни *термове*), е в сила еквивалентността:

Лема 3.4. За произволни константи $c_1, \ldots, c_{m_i}$ и d:

$$R \vdash_V F_i(c_1, \ldots, c_{m_i}) \ \to \ d \quad \iff \quad R \vdash_V \tau_i[\bar{X}/\bar{c}] \ \to \ d$$

за всяко $1 \leq i \leq k$.

Доказателство. Ако $R \vdash_V F_i(c_1, \ldots, c_{m_i}) \ \to \ d$, то съгласно *Лема* 3.1 преди това трябва да е било изведено опростяването

$$\tau_i[X_1/c_1, \ldots, X_{m_i}/c_{m_i}] \to d.$$

Обратно, нека $R \vdash_V \tau_i[\bar{X}/\bar{c}] \ \to \ d$. Трябва да покажем, че са изпълнени предпоставките на правило (3_V), което е единственото правило, от което можем да изведем $R \vdash_V F_i(c_1, \ldots, c_{m_i}) \ \to \ d$:

$$\frac{R \vdash_V c_1 \to c_1 \quad \cdots \quad R \vdash_V c_{m_i} \to c_{m_i} \quad R \vdash_V \tau_i[X_1/c_1, \ldots, X_{m_i}/c_{m_i}] \to d}{R \vdash_V F_i(c_1, \ldots, c_{m_i}) \ \to \ d} \quad (3_V)$$

Но това наистина е така, защото първите опростявания над чертата са аксиоми, а това, че $R \vdash_V \tau_i[X_1/c_1, \ldots, X_{m_i}/c_{m_i}] \to d$ ни е дадено по условие. $\square$

Сега можем да пристъпим към доказателството на едната половина от равенството $\bar{g} = \bar{f}_\Gamma$, а именно:

Твърдение 3.5.

$$\bar{g} \subseteq \bar{f}_\Gamma.$$

Доказателство. Да фиксираме $1 \leq i \leq k$, както и произволни константи $c_1, \ldots, c_{m_i}, d$ и да приложим *Твърдение* 3.4 към функционалния терм $\mu = F_i(c_1, \ldots, c_{m_i})$ и н.м.н.т. $\bar{f}_\Gamma = (f^1_\Gamma, \ldots, f^k_\Gamma)$ на Г. Ще получим

$$R \vdash_V \underbrace{F_i(c_1, \ldots, c_{m_i})}_{\mu} \to d \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{F_i(c_1, \ldots, c_{m_i})}_{\mu}(\bar{f}_\Gamma) \simeq d,$$

или все едно,

$$\underbrace{R \vdash_V F_i(c_1, \ldots, c_{m_i}) \to d}_{g_i(c_1,\ldots,c_{m_i}) \simeq d} \quad \Longrightarrow \quad f^i_\Gamma(c_1, \ldots, c_{m_i}) \simeq d.$$

Но предпоставката на тази импликация е точно дефиницията (3.15) на g_i. Излезе, че за произволни $c_1, \ldots, c_{m_i}$ и d

$$g_i(c_1, \ldots, c_{m_i}) \simeq d \quad \Longrightarrow \quad f^i_\Gamma(c_1, \ldots, c_{m_i}) \simeq d,$$

което означава, че $g_i \subseteq f^i_\Gamma$. Понеже i беше произволно, имаме всъщност $\bar{g} \subseteq \bar{f}_\Gamma$. $\square$

Да помислим как да покажем обратното включване $f^i_\Gamma \subseteq g_i$. Разсъждаваме така: щом g_i са функциите, които се пресмятат операционно по стойност от F_i, то звучи логично операционната семантика по стойност на R — функцията $O_V(R)$ — да може да се дефинира и така:

$$O_V(R)(\bar{c}) \;\simeq\; \tau_0(\bar{c}, \bar{g}).$$

Оказва се, че това наистина е така. Всъщност търсеното от нас включване $\bar{f}_\Gamma \subseteq \bar{g}$ ще следва от едната половина на горното равенство $O_V(R) = \lambda\bar{c}.\tau_0(\bar{c}, \bar{g})$, затова ще докажем само тази половина.

Става въпрос за включването $\lambda\bar{c}.\tau_0(\bar{c}, \bar{g}) \subseteq O_V(R)$, което разписано поточково изглежда така: за произволни $c_1, \ldots, c_{m_i}$ и d:

$$\tau_0(\bar{c}, \bar{g}) \simeq d \quad \Longrightarrow \quad O_V(R)(\bar{c}) \simeq d,$$

или преписано чрез дефиницията на O_V:

$$\tau_0(\bar{c}, \bar{g}) \simeq d \quad \Longrightarrow \quad R \vdash_V \tau_0[\bar{X}/\bar{c}] \;\to\; d.$$

От *Лема* 3.3 имаме, че $\tau_0(\bar{c}, \bar{g})$ можем да си представяме отново като $\tau_0[\bar{X}/\bar{c}](\bar{g})$. Следователно горната импликация можем да запишем по следния начин:

$$\underbrace{\tau_0[\bar{X}/\bar{c}]}_{\mu}(\bar{g}) \simeq d \quad \Longrightarrow \quad R \vdash_V \underbrace{\tau_0[\bar{X}/\bar{c}]}_{\mu} \ \to \ d.$$

Ясно е, че ще ни се наложи да доказваме тази импликация за *произволен* функционален терм μ.

Твърдение 3.6. За всеки функционален терм $\mu(F_1, \dots, F_k)$ и всяко естествено d е в сила:

$$\mu(\bar{g}) \simeq d \quad \Longrightarrow \quad R \vdash_V \mu \ \to \ d.$$

Доказателство. Доказателството отново ще е с индукция, но този път по построението на функционалния терм μ. Фиксираме произволен функционален терм $\mu(F_1, \dots, F_k)$ и приемаме, че за всички функционални термове, построени *преди* него твърдението е вярно (*индуктивна хипотеза*). Разглеждаме различните възможности за μ.

1) Нека μ е константа. Тогава равенството $\mu(\bar{g}) \simeq d$ може да се случи само при $\mu = d$, откъдето очевидно $R \vdash_V d \ \to \ d$.

2) Случаят $\mu = X_i$ е невъзможен, защото μ е функционален терм.

3) μ е от вида $\mu_1 \ op \ \mu_2$. Имаме по условие, че

$$\mu(\bar{g}) \overset{\text{деф}}{\simeq} \mu_1(\bar{g}) \ op \ \mu_2(\bar{g}) \ \simeq \ d.$$

Тогава трябва да съществуват числа d_1 и d_2, такива че

$$\mu_1(\bar{g}) \simeq d_1, \quad \mu_2(\bar{g}) \simeq d_2 \quad \text{и} \quad d_1 \ \mathbf{op} \ d_2 \simeq d.$$

Като приложим индукционната хипотеза към μ_1 и μ_2, от горните равенства ще имаме

$$R \vdash_V \ \mu_1 \ \to \ d_1, \quad R \vdash_V \ \mu_2 \ \to \ d_2 \quad \text{и} \quad d_1 \ \mathbf{op} \ d_2 \ = \ d.$$

Но това са точно условията над чертата на правилото (1). Прилагаме го и получаваме, че

$$R \vdash_V \mu_1 \ op \ \mu_2 \ \to \ d.$$

4) Нека μ е от вида **if** μ_1 **then** μ_2 **else** μ_3. По дефиниция имаме:

$$\mu(\bar{g}) \simeq \begin{cases} \mu_2(\bar{g}), & \text{ако} \ \ \mu_1(\bar{g}) \ > 0 \\ \mu_3(\bar{g}), & \text{ако} \ \ \mu_1(\bar{g}) \ = \ 0 \\ \neg!, & \text{ако} \ \ \neg!\mu_1(\bar{g}). \end{cases}$$

Понеже по условие $\mu(\bar{g}) \simeq d$, не е възможно $\neg!\mu_1(\bar{g})$, и значи остават случаите $\mu_1(\bar{g}) > 0$ и $\mu_1(\bar{g}) = 0$. Ще разгледаме само първия; при втория се разсъждава аналогично.

Нека $\mu_1(\bar{g}) > 0$. Тогава $\mu_1(\bar{g}) \simeq d_1$ за някое $d_1 > 0$. От дефиницията на стойност на условен терм се вижда, че в този случай $\mu(\bar{g}) \overset{\text{деф}}{\simeq} \mu_2(\bar{g}) \simeq d$. Да ги запишем общо:

$$\mu_1(\bar{g}) \simeq d_1 > 0 \quad \text{и} \quad \mu_2(\bar{g}) \simeq d.$$

Понеже термовете μ_1 и μ_2 са построени преди μ, то за тях индуктивната хипотеза е в сила. Така от горните две равенства получаваме

$$R \vdash_V \mu_1 \ \rightarrow \ d_1 \quad \text{за } d_1 > 0 \quad \text{и} \quad R \vdash_V \mu_2 \ \rightarrow \ d,$$

които са точно предпоставките на правилото ($2_\mathbf{t}$). Прилагаме го и получаваме търсеното

$$R \vdash_V \mu \ \rightarrow \ d.$$

5) Последният случай $\mu = F_i(\mu_1, \dots, \mu_{m_i})$ отново е най-интересен. Точно тук ще използваме специалния избор на функциите $\bar{g}$. Имаме по условие, че $\mu(\bar{g}) \simeq d$, което по дефиницията за стойност на терм означава, че

$$g_i(\mu_1(\bar{g}), \dots, \mu_{m_i}(\bar{g})) \simeq d.$$

Тогава съществуват числа $d_1, \dots, d_{m_i}$, такива че

$$\mu_1(\bar{g}) \simeq d_1, \dots, \mu_{m_i}(\bar{g}) \simeq d_{m_i} \quad \text{и} \quad g_i(d_1, \dots, d_{m_i}) \simeq d.$$

Понеже термовете $\mu_1, \dots, \mu_{m_i}$ са построени на по-ранен етап от μ, то за тях индуктивната хипотеза е в сила, т.е. ще имаме изводимостите

$$R \vdash_V \ \mu_1 \ \rightarrow \ d_1, \ \dots \ , R \vdash_V \ \mu_{m_i} \ \rightarrow \ d_{m_i}. \tag{3.16}$$

По-горе получихме $g_i(d_1, \dots, d_{m_i}) \simeq d$, което по дефиницията (3.15) на g_i означава, че

$$R \vdash_V \ F_i(d_1, \dots, d_{m_i}) \ \rightarrow \ d.$$

Оттук по *Лема* 3.4 ще имаме

$$R \vdash_V \tau_i[\bar{X}/\bar{d}] \ \rightarrow \ d.$$

Тази изводимост, заедно с другите от (3.16), всъщност са точно предпоставките на правило (3_V). Прилагаме го и получаваме търсеното

$$R \vdash_V \ \underbrace{F_i(\mu_1, \dots, \mu_{m_i})}_{\mu} \ \rightarrow \ d.$$

$\square$

Сега да видим как от твърдението, което току-що доказахме, ще следва търсеното от нас включване $\bar{f}_\Gamma \subseteq \bar{g}$:

Твърдение 3.7. $\bar{f}_\Gamma \subseteq \bar{g}$.

Доказателство. По определение $\bar{f}_\Gamma$ е най-малката неподвижна точка на оператора Γ. От теоремата на Кнастер-Тарски за произволни ОС знаем, че $\bar{f}_\Gamma$ е и най-малката *преднеподвижна точка* на Γ, т.е. тя е най-малкото решение и на *неравенството*

$$\Gamma(\bar{f}) \subseteq \bar{f}.$$

Ние ще покажем, че векторът $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_k)$ също е решение на това неравенство, т.е. $\Gamma(\bar{g}) \subseteq \bar{g}$. Оттук, понеже $\bar{f}_\Gamma$ е най-малкото решение, ще получим желаното включване $\bar{f}_\Gamma \subseteq \bar{g}$.

Да покажем $\Gamma(\bar{g}) \subseteq \bar{g}$ означава да покажем, че за всяко $i = 1, \ldots k$

$$\Gamma_{\tau_i}(\bar{g}) \subseteq g_i.$$

Да фиксираме произволно $1 \leq i \leq k$, както и произволни естествени числа $c_1, \ldots, c_{m_i}$ и d. Ще покажем, че за тях е в сила импликацията:

$$\Gamma_{\tau_i}(\bar{g})(\bar{c}) \simeq d \implies g_i(\bar{c}) \simeq d. \tag{3.17}$$

Наистина, от определението за термален предикат имаме:

$$\Gamma_{\tau_i}(\bar{g})(\bar{c}) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \tau_i(\bar{c}, \bar{g}) \stackrel{\text{Лема } 3.3}{\simeq} \tau_i[\bar{X}/\bar{c}](\bar{g}).$$

Сега нека приемем, че предпоставката $\Gamma_{\tau_i}(\bar{g})(\bar{c}) \simeq d$ на импликацията (3.17) е в сила. Оттук, като използваме горните равенства, получаваме

$$\underbrace{\tau_i[\bar{X}/\bar{c}]}_{\mu}(\bar{g}) \ \simeq \ d.$$

Тук е моментът да приложим последното *Твърдение* 3.6 за $\mu = \tau_i[\bar{X}/\bar{c}]$. Ще получим, че

$$R \vdash_V \tau_i[\bar{X}/\bar{c}] \ \to \ d.$$

Съгласно *Лема* 3.4 това условие е еквивалентно на

$$R \vdash_V F_i(\bar{c}) \ \to \ d,$$

откъдето по дефиницията (3.15) на g_i, получаваме търсеното $g_i(\bar{c}) \simeq d$. С това проверката на (3.17) е завършена и следователно $\Gamma_{\tau_i}(\bar{g}) \subseteq g_i$. Тъй като i беше произволно, това ни дава общо, че $\Gamma(\bar{g}) \subseteq \bar{g}$, т.е. $\bar{g}$ е преднеподвижна точка на оператора Γ и следователно $\bar{f}_\Gamma \subseteq \bar{g}$. $\square$

Като следствие от доказаните до тук *Твърдение* 3.5 и *Твърдение* 3.7 получаваме това, което беше нашата цел:

Следствие 3.2. $\bar{f}_\Gamma = \bar{g}$.

Вече подготвихме всичко за финалната

Теорема 3.2. За всяка рекурсивна програма R

$$O_V(R) = D_V(R).$$

Доказателство. Първото включване $O_V(R) \subseteq D_V(R)$ всъщност е *Следствие* 3.1, което доказахме в предишния раздел.

За да покажем и обратното включване $D_V(R) \subseteq O_V(R)$, да приемем, че за произволни $c_1, \dots, c_{m_i}$ и d

$$D_V(R)(\bar{c}) \simeq d.$$

Това означава, съгласно дефиницията на $D_V(R)$, че

$$\tau_0(\bar{c}, \bar{f}_\Gamma) \simeq d.$$

Но $\bar{f}_\Gamma = \bar{g}$ и значи

$$\tau_0(\bar{c}, \bar{g}) \simeq d,$$

което, използвайки, *Лема* 3.3 можем да препишем като

$$\tau_0[\bar{X}/\bar{c}](\bar{g}) \simeq d.$$

Но тогава от *Твърдение* 3.6 ще имаме, че

$$R \vdash_V \tau_0[\bar{X}/\bar{c}] \rightarrow d,$$

което по дефиницията (3.7) на операционна семантика означава точно

$$O_V(R)(\bar{c}) \simeq d.$$

Това завършва доказателството на включването $D_V(R) \subseteq O_V(R)$ и на теоремата. □

Накрая да направим важното уточнение, че никъде в доказателството на тази теорема не използвахме, че програмата R е над естествените числа. Това означава, че този резултат остава в сила и за рекурсивни програми над *произволен* тип данни.