2. Линейни трансформации в разширената евклидова равнина.

Нека в $E_2 = E_2^* \setminus \{\omega\}$ е фиксирана афинна координатна система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Хомогенните координати на точките и правите спрямо K означаваме съответно с $M(x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$ и $g: [u_1, u_2, u_3] \neq [0,0,0]$.

<u>Линейна трансформация в E_3^*.</u>

Нека $A = (a_{ij}),\ a_{ij} \in \mathbb{R}$ е матрица от ред 3 $(i, j = 1,2,3)$.

Трансформацията φ_A в E_2^*, дефинирана по следния начин

$$\text{т. } M(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\varphi_A} M'(x_1', x_2', x_3'),$$

където

$$\varphi_A: \rho \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \rho \in \mathbb{R}, \rho \neq 0.$$

се нарича <u>линейна трансформация</u> в E_2^*.

Като означения използваме $M \xrightarrow{\varphi_A} M'$, $\varphi_A(M) = M'$

В зависимост от ранга на φ_A имаме следните факти. Първият от тях е формулиран в следната теорема.

<u>Теорема 1.</u> Нека φ_A е линейна трансформация с $\mathrm{rank}(A)=3$. Тогава φ_A е еднозначно обратимо точково съответствие, което индуцира еднозначно обратимо съответствие между правите на E_2^* и φ_A запазва инцидентността.

Доказателство. От $r(A)=3 \Rightarrow \det A \neq 0$

1. φ_A - еднозначно обратимо точково съответствие?

   1.1. Ще покажем, че всяка точка има образ при φ_A.

Да допуснем противното. Следователно $\exists M(x_1,x_2,x_3) : \varphi_A(M)=(0,0,0) \Rightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} 0=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ 0=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ 0=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{array}\right.$$

, е линейна хомогенна система с три уравнения с ...

три уравнения с три неизвестни, която има ненулево решение $-(x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ – по условие φ_A е с пълен ранг. Следователно всяка точка M има образ при φ_A.

Аналогично,

1.2. От $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ е обратима, т.е. $\exists A^{-1}$ и е определено съответствието $\varphi_A^{-1} \equiv \varphi_{A^{-1}}$

$$\varphi_A^{-1}: \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

(ясно е, че $r(A^{-1}) = 3$)

Следователно всяка точка има точно един първообраз.

2. Нека $g[u_1, u_2, u_3] \neq [0,0,0]$ е права. Тогава образ при φ_A на правата g наричаме правата $g'[u_1', u_2', u_3']$, за която

$$\sigma[u_1' \; u_2' \; u_3'] = [u_1 \; u_2 \; u_3]A^{-1}, \sigma \in \mathbb{R}, \rho \neq 0.$$

Аналогично. От $\det A^{-1} \neq 0 \Rightarrow \varphi_A$ е еднозначно обратимо съответствие между правите.

Имаме

$$\varphi_A^{-1} : \frac{1}{\sigma}(u_1 u_2 u_3) = (u_1 u_2 u_3) A$$

Нека $M(x_1, x_2, x_3)$ и $g[u_1, u_2, u_3]$ са съответно точка и права. Тогава $M \, z \, g \Leftrightarrow u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$

Ако $\varphi_A(M) = M'(x_1', x_2', x_3')$ и $\varphi_A(g) = g'$ $g'[u_1' u_2' u_3']$, то имаме

$$(u_1' u_2' u_3')\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \sigma^{-1}(u_1 u_2 u_3) A^{-1} \rho A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M' \, z \, g' \Leftrightarrow M \, z \, g$. □

В случая, когато линейната трансформация е изродена, т.е. не е от пълен ранг, то може да имаме -

при rank A = 2

<u>Теорема 2</u>. Нека φ_A е линейна трансформация с $r(A)=2$. Тогава φ_A изобразява точките на E_2^* в точките на една права. Съществува точно една точка, която няма образ при φ_A.

Доказателство. Нека φ_A е линейна трансформация на E_2^* с $r(A)=2$. Тогава линейната хомогенна система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

има единствено ненулево решение (x_1^0, x_2^0, x_3^0), т.е. $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \neq (0,0,0)$ и всички останали решения са от вида $(\lambda x_1^0, \lambda x_2^0, \lambda x_3^0)$, $\lambda \neq 0$. Следователно точката $S(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ няма образ при φ_A и е единствената такава точка.

От $\operatorname{rank} A = 2 \Rightarrow \operatorname{rank} A^T = 2$.

Разглеждаме линейната хомогенна система относно u_1, u_2, u_3

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 = 0 \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 = 0 \\ a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3 = 0 \end{cases},$$

т.е. $A^T \underline{u} = \underline{0}$ $\quad (A^T\underline{u} = \underline{u}^T A)$

От $\operatorname{rank} A = 2 \Rightarrow$ горната система има единствено ненулево решение (u_1^0, u_2^0, u_3^0) с точност до коефициент на пропорционалност, т.е. всички останали решения са от вида $(\mu u_1^0, \mu u_2^0, \mu u_3^0)$ $\forall \mu \neq 0$. Нека g е правата с хомогенни координати $[u_1^0, u_2^0, u_3^0]$, където

$$A^T \underline{u}_0 = \underline{u}_0^T A \quad \left(A^T \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \end{pmatrix} = (u_1^0\ u_2^0\ u_3^0) A \right)$$

Нека $M(x_1, x_2, x_3)$ е произволна точка, различна от $S \Rightarrow \varphi(M) = M'(x_1', x_2', x_3')$

$M' \in g \iff u_1^0 x_1' + u_2^0 x_2' + u_3^0 x_3' = 0.$

Имаме $u_1^0 x_1' + u_2^0 x_2' + u_3^0 x_3' = (u_1^0\, u_2^0\, u_3^0) \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$

$$= \underline{u}^{0T} \frac{1}{\rho} A x = \frac{1}{\rho} (\underline{u}^{0T} A) x = \frac{1}{\rho} \underline{o}^T x =$$

$$\frac{1}{\rho} (0, 0, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} (0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3) = 0.$$

$\Rightarrow M' \in g \;\; \forall M \neq S. \;\square$

При rank $A = 1$ $\mathbb{E}_2^*$ се „смачква" в точка и има точно една права в $\mathbb{E}_2^*$, чиито точки нямат образ при φ_A.