Инвариантни подпространства

Опр. V – ЛП над F; $U \leq V$; $\varphi \in \operatorname{Hom} V$

Казваме, че U е φ-инвариантно, ако

$\forall u \in U \quad \varphi(u) \in U$

Пр. • $\forall \lambda \in F \quad V_\lambda := \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda . id)$ е φ-инв. подпр.

• $\operatorname{Ker} \varphi$, $\operatorname{Im} \varphi$ също са φ-инв.

λ е СС $\quad V_\lambda = \{\text{СВ за } \lambda\} \cup \{0\}$

$v \in V_\lambda \Leftrightarrow (\varphi - \lambda\, id)(v) = \theta \Leftrightarrow \varphi(v) = \underline{\lambda v}$

λ не е СС $\quad V_\lambda = \{0\}$

Пр. φ – с прост спектър – $\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_n}_{\neq}$ $(\dim V = n)$

$g_i : \varphi(g_i) = \lambda_i g_i$ за $i = 1, \dots, n$

$g_1, \dots, g_n$ – базис (от СВ) ; $V_{\lambda_i} = \ell(g_i)$

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}$$

Пр. $e_1, \dots, e_n$ – базис V ; $e_1, \dots, e_k$ – базис $U \leq V$ $(k \leq n)$

$\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$; U – φ-инв.

Зад. U – $\underline{\varphi\text{-инв.}}$ $\quad \varphi|_U : U \to \overset{\checkmark}{U}$, $\forall u \in U$ $\varphi|_U(u) = \overset{\in U}{\varphi(u)}$

$\varphi|_U \in \mathrm{Hom}\, U$

$A = M_e^e(\varphi|_U)$; $B = M_e^e(\varphi)$

$e \leftarrow e_1 \dots e_k$; $e \leftarrow e_1 \dots e_n$

$A \in M_k(F)$; $B = M_n(F)$

Тогда
$$B = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} e_1 \dots e_k & e_{k+1} \dots e_n \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right) & k \end{array}$$

Зам. $V = U \oplus W$; $e_1 \dots e_k$ - базис на U

$e_{k+1} \dots e_n$ - базис на W ($\Rightarrow e_1 \dots e_n$ - базис на V)

$\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$; U, W - φ-инв.

$A = M_e^e(\varphi|_U)$, $B = M_e^e(\varphi|_W)$, $C = M_e^e(\varphi)$

$$\Rightarrow \quad C = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

Евклидови пространства

<u>Опр.</u> V – КМЛП над $\underline{F = \mathbb{R}}$ е евклидово пространство (ЕП), ако е дефинирано скаларно произведение $(\cdot,\cdot)$:

$$(\ , \ ) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underbrace{(v_1, v_2)}_{\text{наредени двойки}} \longmapsto \underbrace{(v_1, v_2)}_{\text{ск. пр. на } v_1 \text{ и } v_2}$$

и удовлетворява свойства:

1) $\forall\, v_1', v_1'', v_2 \in V$

$$(v_1' + v_1'', v_2) = (v_1', v_2) + (v_1'', v_2)$$

2) $\forall\, v_1, v_2 \in V$ и $\forall\, \lambda \in F$

$$(\lambda v_1, v_2) = \lambda (v_1, v_2)$$

3) $\forall\, v_1, v_2 \in V$

$$(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$$

4) $\forall\, v \in V \quad (v, v) \geq 0$ и

$$(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = \vartheta$$

Св-ва

1) $\forall v_1, v_2', v_2'' \in V$

$$(v_1, v_2' + v_2'') = (v_1, v_2') + (v_1, v_2'') \qquad (\Leftarrow 1, 3)$$

2) $\forall v_1, v_2 \in V$ и $\forall \lambda \in F$

$$(v_1, \lambda v_2) = \lambda (v_1, v_2) \qquad (\Leftarrow 2, 3)$$

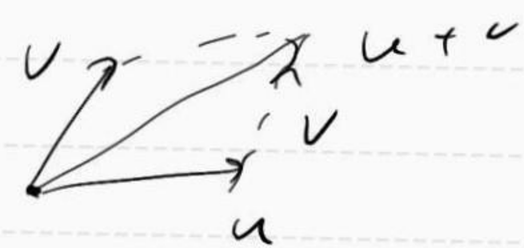
Зам. (u, v) — ПЛФ, но симметрична (св-во 3)

Опр. $v \in V$ $\quad \|v\| = \sqrt{(v,v)}$ — длина на V

Зауб. 1) $\|v\| \geq 0$; $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \theta$

2) $\|\lambda v\| = \sqrt{(\lambda v, \lambda v)} = \sqrt{\lambda^2 \cdot (v,v)} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{(v,v)} = |\lambda| \cdot \|v\|$

Зоб 3) н-во тр Δ $\quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$



Зауб. $e_1 \ldots e_n$ - базис

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j (e_i, e_j)$$

Знаем СП $\Leftrightarrow$ Якщо знаем $A = ((e_i, e_j))$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j\right) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (e_i, e_j) = \sum_{i,j} \lambda_i a_{ij} \mu_j =$$

$$= (\lambda_1, \dots, \lambda_n)\, A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

<u>Зад.</u> За матрица $A \in M_n(F)$ горното дефинира СП $\Leftrightarrow$ са изпълнени $1 \div 4$ за СП

1, 2 са изп.

$3 \Leftrightarrow \forall \lambda, \mu \in F^n$ (ред) $\quad \underline{\lambda A \mu^t} = \mu A \lambda^t = \underbrace{(\lambda A^t \mu^t)^t}_{\text{число}} = \lambda A^t \mu^t$

$\Leftrightarrow A = A^t$

4) $\Leftrightarrow \forall \lambda \in F^n$ (ред) $\quad \lambda A \lambda^t \geq 0$ и $\lambda A \lambda^t = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

$$\lambda A \lambda^t = \sum_{i,j} a_{ij} \lambda_i \lambda_j$$

<u>Зад.</u> $e_i A e_j^t = a_{ij}$

$e_1, \dots, e_n$ – станд. базис на F^n

<u>Пр</u> 1) $V = F^n \quad ((\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \dots, \mu_n)) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$

$1 \div 3$ OK; $((\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \geq 0$; $= 0 \Leftrightarrow \forall \lambda_i = 0$

2) $f, g \in C[0,1]$ – ЛП над $\mathbb{R}$ (∞ мерно)

$(f,g) := \int_0^1 fg\,dx$ $\quad$ 1÷3 OK

$(f,f) = \int_0^1 f^2\,dx \geq 0$; $= 0 \overset{f^2 \geq 0}{\Leftrightarrow} f^2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$

<u>Опр.</u> 1) $u \perp v$ - u, v ортогональны, если $(u,v) = 0$

2) $e_1 \dots e_n$ - ортогональны, если $\forall i \neq j$ $(e_i, e_j) = 0$

3) $e_1 \dots e_n$ - ортогональный базис (ОБ), если $e_1 \dots e_n$ - ортогональны

4) $e_1 \dots e_n$ - ортонормированы, если $\forall i \neq j$ $(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

5) $e_1 \dots e_n$ - ортонормированный базис (ОНБ), если $e_1 \dots e_n$ ортонорм.

Зад. 1) $u \perp u \iff u = 0$

2) $e_1 \ldots e_n$ – ОБ $\quad (u, v) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i (e_i, e_i)$

3) $e_1 \ldots e_n$ – ОНБ $\quad (u, v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$

4) $\|u\| = 1$ – u - единичен в-р

$u \neq 0 \quad \left\| \frac{1}{\|u\|} \cdot u \right\| = 1$ нормиране на $\underline{u}$

5) $e_1, \ldots e_n$ – ОБ $\Rightarrow \frac{1}{\|e_1\|} e_1, \frac{1}{\|e_2\|} e_2, \ldots \frac{1}{\|e_n\|} e_n$ – ОНБ

Пр. $V = \mathbb{R}^n$ станд. б. $e_1, \dots, e_n$ на $\mathbb{R}^n$ е ОНБ

Метод на Грам-Шмид

Нека $e_1, \dots, e_k$ $(k \le n = \dim V)$ – ЛН

Тогава $\exists\, b_1, \dots, b_k$ – ортогонални и

$\forall i = 1, \dots, k \quad l(e_1, \dots, e_i) = l(b_1, \dots, b_i)$

Забел. $\forall i \; b_i \neq \theta$ ($e_1, \dots, e_i$ – ЛН $\to$ базис на $l(e_1, \dots, e_i)$

$\Rightarrow \dim l(b_1, \dots, b_i) = i \Rightarrow b_1, \dots, \underline{b_i}$ – базис на $l(b_1, \dots, b_i)$)

Сл (k=n) $e_1, \dots, e_n$ - базис на V. Тогава

$\exists$ ОБ $f_1, \dots, f_n$ и $\forall i = 1, \dots, k$ $\; l(e_1, \dots, e_i) = l(f_1, \dots, f_i)$

Сл. $e_1 \dots e_n$ - базис на V. Тогава $\exists$ ОНБ $g_1, \dots, g_n$

и $\forall i = 1, \dots, n$ $\; l(g_1, \dots, g_i) = l(e_1, \dots, e_i)$ $\quad \left(g_i = \frac{1}{\|f_i\|} f_i\right)$

Д-во инд. по k

$k = 1 \qquad f_1 := e_1$

Нека е вярно за k. Ще го док. за $k+1$

От инд. предп. $\Rightarrow \exists f_1, \dots, f_k$:

- ортог.
- $\forall i = 1, \dots, k \quad \ell(f_1, \dots, f_i) = \ell(e_1, \dots, e_i)$

Трябва да намерим в-р f_{k+1}:

- $\forall i = 1, \dots, k \quad f_{k+1} \perp f_i$
- $\ell(f_1, \dots, f_{k+1}) = \ell(e_1, \dots, e_{k+1})$

Търсим го от вида: $f_{k+1} = e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$

Можем ли да намерим λ_i

$$f_{k+1} \perp f_i \Rightarrow 0 = (f_{k+1}, f_i) = (e_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j, f_i) =$$
$i = 1 \sim k$

$$= (e_{k+1}, f_i) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (f_j, f_i) = (e_{k+1}, f_i) + \lambda_i (f_i, f_i)$$

$$\Rightarrow \lambda_i = - \frac{(e_{k+1}, f_i)}{(f_i, f_i)}$$

$$f_{k+1} = e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i \Rightarrow e_{k+1} \in \ell(f_1, \sim f_k, f_{k+1})$$

$$\Downarrow$$

$$\ell(f_1 \sim f_k) = \ell(e_1 \sim e_k) \Rightarrow f_{k+1} \in \ell(e_1 \sim e_k, e_{k+1})$$

$$e_1, \sim e_k \in \ell(e_1 \sim e_k) = \ell(f_1 \sim f_k) \subseteq \ell(f_1 \sim f_{k+1})$$

$$f_1 \sim f_k \in \ell(f_1 \sim f_k) = \ell(e_1 \sim e_k) \subseteq \ell(e_1 \sim e_{k+1})$$

$\Rightarrow e_1 \dots e_{k+1} \in \ell(f_1 \dots f_{k+1})$ и $f_1 \dots f_{k+1} \in \ell(e_1 \dots e_{k+1})$

$\Rightarrow \ell(e_1 \dots e_{k+1}) \subseteq \ell(f_1 \dots f_{k+1})$; $\ell(f_1 \dots f_{k+1}) \subseteq \ell(e_1 \dots e_{k+1})$

$\Rightarrow \ell(e_1 \dots e_{k+1}) = \ell(f_1 \dots f_{k+1})$

Зад. $e_1 \dots e_k$ - ЛН, e_{k+1} е ЛК на $e_1 \dots e_k$
($\Leftrightarrow e_1 \dots e_{k+1}$ - ЛЗ)

Г.Ш. $\Rightarrow$ $f_1 \dots f_k$ - ОК -- ЛН и $\ell(f_1 \dots f_k) = \ell(e_1 \dots e_k)$

$$f_{k+1} = \underbrace{e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i}, \quad \lambda_i = -\frac{(e_{k+1}, f_i)}{(f_i, f_i)} \quad \text{-- OK}$$

f_{k+1} — нормираме

$\ell(f_1 \dots f_{k+1}) = \ell(e_1 \dots e_{k+1}) = \ell(e_1 \dots e_k)$ - OK | $f_{k+1} \in \ell(\underline{f_1 \dots f_k})$ базис на ЛО (ОБ)

$f_{k+1} \perp f_i \quad \to \quad \forall v \in \ell(f_1, \dots, f_k) \quad (v, f_{k+1}) = 0$
$i = 1, \dots, k$

$\Rightarrow (f_{k+1}, f_{k+1}) = 0 \Rightarrow f_{k+1} = 0$

<u>Извод</u>. Ако приложим Г.Ш. към вектори, за които не знаем дали са ЛН и получим, че $f_{k+1} = \theta$, то e_{k+1} е ЛК на $e_1, \dots, e_k$

Ако търсим ОБ на ЛО — 2 начина

- намираме базис на ЛО и прилагаме Г.Ш.
- прилагаме Г.Ш. и „изхвърляме" векторите, за които получаваме нулев в-р (e_{k+1} и продълж. с e_{k+2})

Тб Ако $f_1, \dots, f_k$ са ненулеви и ортог., то $f_1, \dots, f_k$ - ЛН

Д-во $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i = 0 \xrightarrow{(f_j, \cdot)} 0 = \lambda_j \underbrace{(f_j, f_j)}_{\neq 0} \Rightarrow \lambda_j = 0$

Заб. $e_1, \dots, e_n$ - ОБ на V ; $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in V$

$$(v, e_j) = \lambda_j (e_j, e_j) \Rightarrow \lambda_j = \frac{(v, e_j)}{(e_j, e_j)}$$

Ако е ОНБ $\lambda_j = (v, e_j)$

<u>Теорема на Питагор</u> $e_1, \dots, e_k$ – ортог.

Тогава $\|e_1 + \dots + e_k\|^2 = \|e_1\|^2 + \dots + \|e_k\|^2$

<u>Док-во</u>

$$\left(\sum_{i=1}^{k} e_i , \sum_{j=1}^{k} e_j \right) = \sum_{i,j} (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{k} (e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{k} \|e_i\|^2$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} e_i \right\|^2$$

Изоморфизъм на ЕП

<u>Опр.</u> Нека U и V са ЕП. Тогава

$U \cong V$ (изоморфни като ЕП), ако $\exists$

$\exists\, \varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$, котре є ізом як ЛП (бієкт.) $\underline{\text{і}}$
($\Rightarrow$ ЛН)

$\forall u_1, u_2 \in U \qquad (\varphi(u_1), \varphi(u_2))_V = (u_1, u_2)_U$

(φ - зберігає СП)

<u>Тв.</u> U, V - КВЛП над $\mathbb{R}$

$$U \overset{ЕП}{\cong} V \iff \dim U = \dim V$$

<u>Д-во</u> ($\Rightarrow$) $U \overset{ЕП}{\cong} V \Rightarrow U \overset{ЛП}{\cong} V \Rightarrow \dim U = \dim V$

($\Leftarrow$) Нехай $e_1, \dots, e_n$ і $f_1, \dots, f_n$ - ОН б. на U, V

Какво при ИМ на ЛП

$\varphi : U \to V \;:\; \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$

$\to$ φ - линейно и биекция, т.е. ИМ на ЛП

$$\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j\right)\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j\right) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (f_i, f_j) \overset{\text{ОНБ}}{\underset{f}{=}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i =$$

$$\overset{\text{ОНБ}}{\underset{e}{=}} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^{n} \mu_j e_j\right)$$, т.е. запазва СП

$\Rightarrow$ ИМ на ЕП