Сноп криви от втора степен.

Нека k' и k'' са две различни криви от втора степен с полиноми съответно $g = g(x,y,t)$ и $h = h(x,y,t)$, т.е. с уравнения съответно $k' : g(x,y,t) = 0$ и $k'' : h(x,y,t) = 0$.

Тогава за всяка двойка реални числа $\lambda, \mu : (\lambda,\mu) \neq (0,0)$ уравнението (2) $\lambda g(x,y,t) + \mu h(x,y,t) = 0$ е крива от втора степен. Това е ясно от условието $k' \neq k''$ – Имаме, че полиномите им g и h не са пропорционални (Теорема 2.), т.е. не съществува $\rho \neq 0$ такова, че за съответните коефициенти a''_{ij} и a'_{ij} на g и h да е изпълнено $a''_{ij} = \rho a'_{ij}$, $i,j = 1,2,3$, $i \leq j$.

От $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ имаме, че поне едно числата $a_{ij} = \lambda a'_{ij} + \mu a''_{ij}$ е различно от нула. Следователно, за всяка ненулева двойка λ, μ реални числа уравнението (2) е уравнение на крива от втора степен $k_{\lambda,\mu}$.

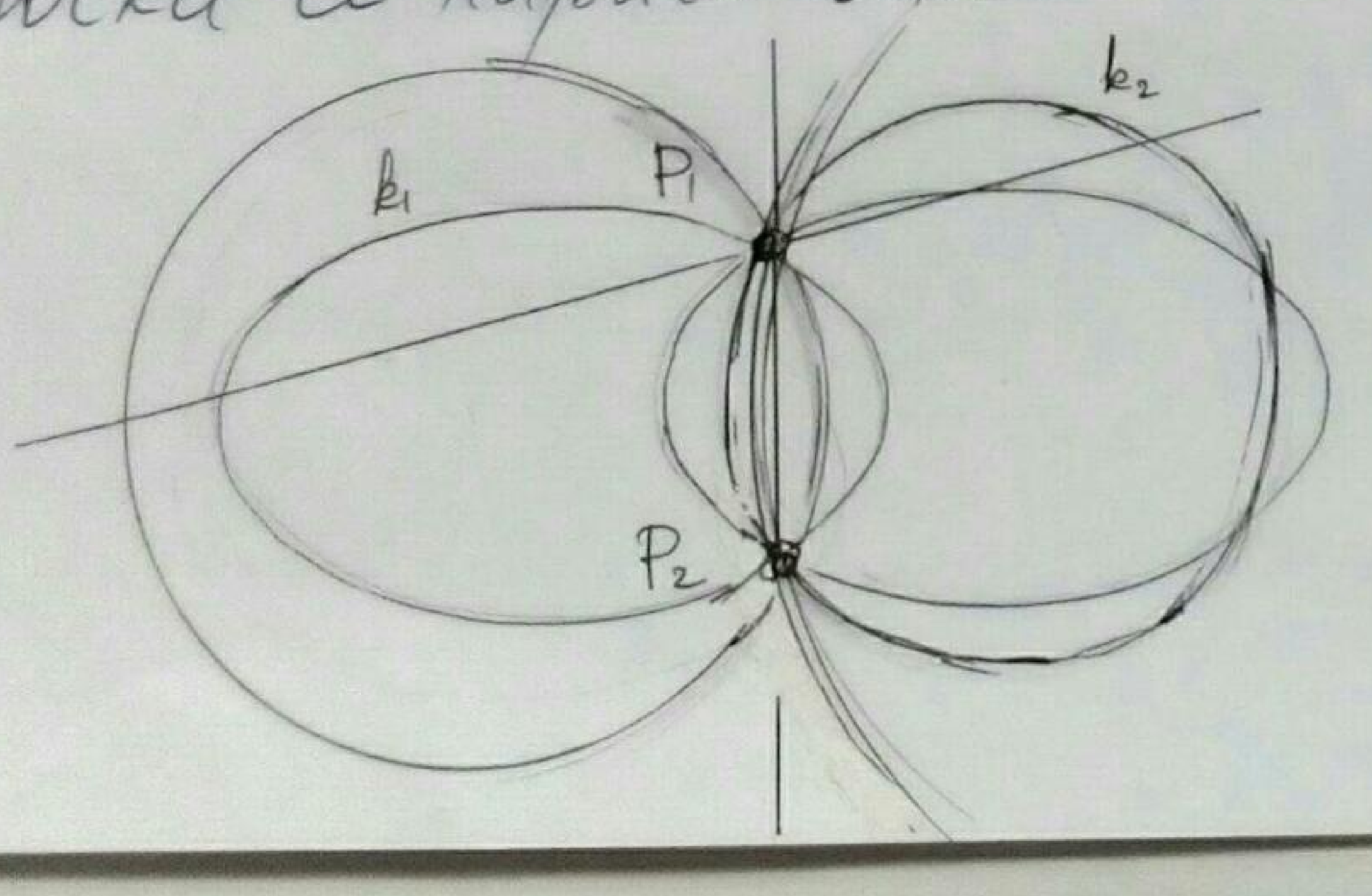
Това наблюдение оправдава следната дефиниция
Множеството

$$S_{\lambda,\mu} : f(x,y,t) = \lambda g(x,y,t) + \mu h(x,y,t)$$

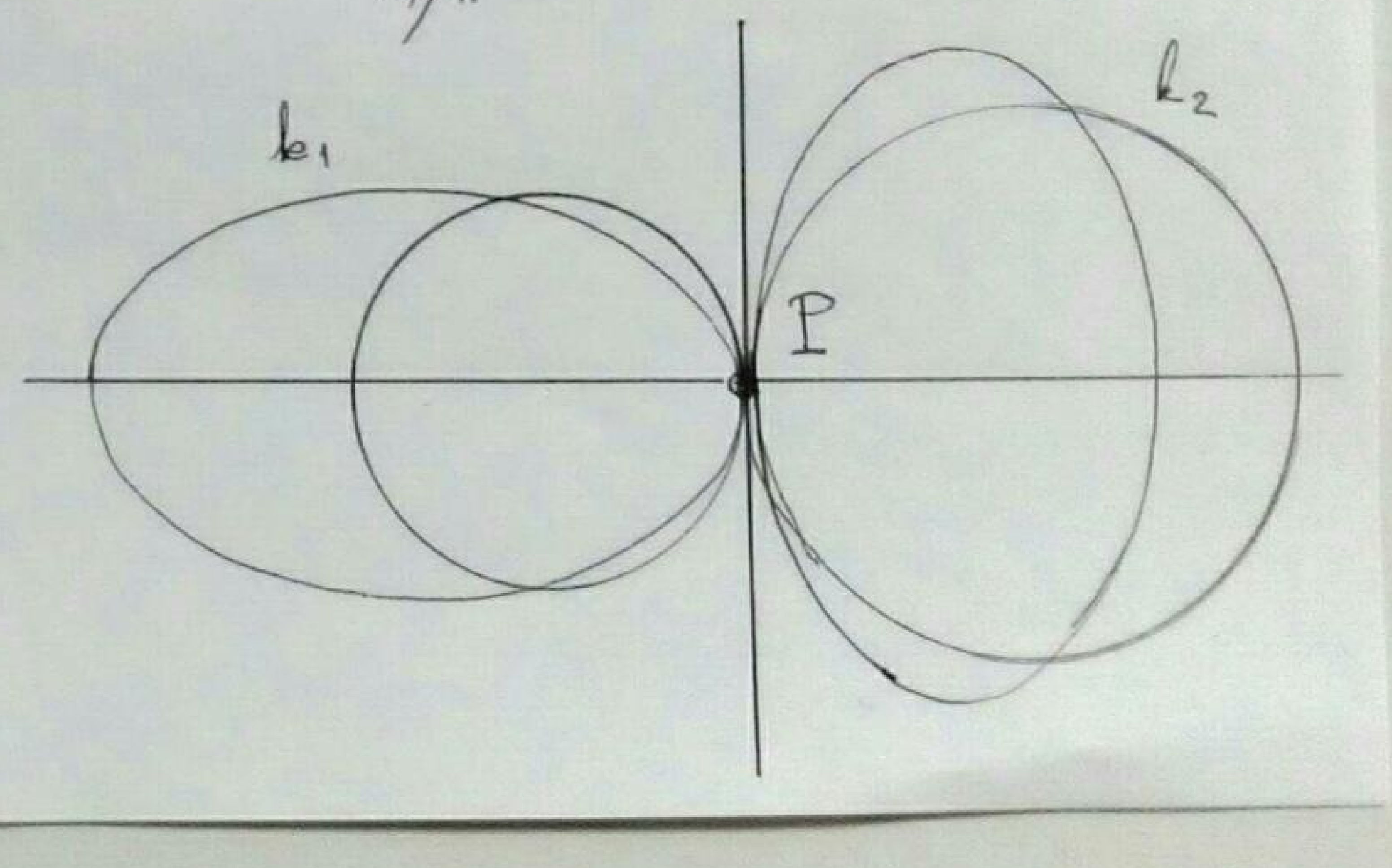
$(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ се нарича сноп криви от втора степен.
За всяка двойка $(\lambda,\mu) \neq 0$ уравнението

$$k_{\lambda,\mu} : f(x,y,t) = \lambda g(x,y,t) + \mu h(x,y,t) = 0$$

е уравнение на крива от втора степен от снопа $S_{\lambda,\mu}$.
Ясно е, че ако точка P принадлежи както на k', така и на k'', то P принадлежи на всяка крива $k_{\lambda,\mu}$ от снопа $S_{\lambda,\mu}$. Такава точка се нарича основна точка на снопа $S_{\lambda,\mu}$.



или



21.9

Основните свойства на снопа $S = S_{\lambda,\mu}$ са формулирани в следната

Теорема 3. Нека S е сноп криви от втора степен

$$S: f = \lambda g + \mu h.$$

1. Ако $k_1: f_1: \lambda_1 g + \mu_1 h$ и $k_2: f_2: \lambda_2 g + \mu_2 h$ са две криви от снопа S с полиноми съответно f_1 и f_2, то $k_1 \equiv k_2$ точно тогава, когато $\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = 0$.

2. През всяка неосновна точка на снопа S минава точно една крива от втора степен от S.

3. Ако различните криви k_1 и k_2 от снопа S са с полиноми съответно f_1 и f_2, то $S = S_{\alpha,\beta}: f = \alpha f_1 + \beta f_2$, където $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$.

4. Ако P е основна точка на S и l е тангента в P за две криви от S, то l е тангента за всяка крива от снопа S.

21.10

Доказателство. 1. Това твърдение е непосредствено следствие от Теорема 2. - кривите k_1 и k_2 съвпадат точно тогава, когато $f_2 = \rho f_1$, $\rho \neq 0 \iff \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = 0$.

2. Нека точката M_0 е неосновна за снопа S. Ще покажем, че през M_0 има точно една крива от S.

От това, че M_0 не е основна за S имаме, че поне едно от числата $g(M_0)$, $h(M_0)$ е различно от нула. Тогава за $\lambda_0 = h(M_0)$ и $\mu_0 = -g(M_0)$ кривата k_0 с полином $f_0 = \lambda_0 g + \mu_0 h$ е крива от снопа S, минаваща през точката M_0.

Имаме $f_0(M_0) = -h(M_0).g(M_0) - g(M_0).h(M_0) = 0$.

Нека сега k^* е произволна крива от снопа S, минаваща през точката M_0. Тогава $k^* : f^* = \lambda^* g + \mu^* h$ - се получава за някои $(\lambda^*, \mu^*) \neq (0,0)$. и

Системата $\left| \begin{array}{l} \lambda_0 g(M_0) + \mu_0 h(M_0) = 0 \\ \lambda^* g(M_0) + \mu^* h(M_0) = 0 \end{array} \right.$

има ненулево решение $g(M_0), h(M_0)$, а това е в сила точно

21.11

тогава, когато $\begin{vmatrix} \lambda_0 & \mu_0 \\ \lambda^* & \mu^* \end{vmatrix} = 0$, т.е. $\Leftrightarrow \exists \rho \neq 0$, така че

$\lambda^* = \rho\lambda$ и $\mu^* = \rho\mu \Rightarrow k^* \equiv k_0$ (от 1).

3. Да разгледаме множеството

$$\bar{S} : \bar{f} = \alpha f_1 + \beta f_2 \quad , (\alpha, \beta) \neq (0,0)$$

от криви от втора степен, определени от различните криви k_1 и k_2 от снопа S, съответно с уравнения $k_1 : \lambda_1 g(x,y,t) + \mu_1 h(x,y,t) = 0$
$k_2 : \lambda_2 g(x,y,t) + \mu_2 h(x,y,t) = 0$. Ще покажем, че $\bar{S} \equiv S$.

За $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, $\bar{f} = \alpha(\lambda_1 g + \mu_1 h) + \beta(\lambda_2 g + \mu_2 h) =$

$$= (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2) g + (\alpha\mu_1 + \beta\mu_2) h = \lambda . g + \mu . h \qquad (3)$$

е ненулев полином. Ако допуснем, че $\lambda = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 0$ и $\mu = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2 = 0$, то тъй като системата $\begin{vmatrix} \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta = 0 \\ \mu_1\alpha + \mu_2\beta = 0 \end{vmatrix}$

има ненулево решение $- (\alpha,\beta) \neq (0,0)$, то

$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ от 1. $\Rightarrow k_1 \equiv k_2$, противоречие.

21.12

Следователно $\bar{f}$ е полином на крива от втора степен и всяка крива от снопа $\bar{S}$ принадлежи на снопа $S \Rightarrow \bar{S} \subseteq S$.

От (3) е ясно, че кривите k_1 и k_2 като криви от S се получават съответно за $\alpha = \mu_2, \beta = -\mu_1$ и $\alpha = \lambda_2, \beta_2 = -\lambda_1$. Така, като проведем аналогичните разсъждения, или казано по друг начин като разменим ролите на S и $\bar{S}$ и проведем аналогични разсъждения получаваме, че всяка крива от снопа S е и от снопа $\bar{S}$, т.е. $S \subseteq \bar{S}$.

От $\bar{S} \subseteq S$ и $S \subseteq \bar{S}$ следва $S \equiv \bar{S}$.

4. Нека P е основна точка за снопа S и l е тангента в P към кривите k' и k''. Ще покажем, че l е тангента на всяка крива от S.

Нека $k: f = \lambda g + \mu h = 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ е произволна крива от S. Тогава за полупроизводните на полинома на f имаме

$$f_i(x,y,t) = \lambda g_i(x,y,t) + \mu h_i(x,y,t),$$

където $g_i(x,y,t)$ и $h_i(x,y,t)$ са полупроизводните на $g(x,y,t)$ и $h(x,y,t)$ съответно по x, y и t $(i=1,2,3)$. 21.13.

От условието, че l е тангента към k_1 в точката P имаме, че l е с уравнение

$$l: g_1(P).x + g_2(P)y + g_3(P)t = 0,$$

както и от l тангента на k_2 в P, l ще има и уравнение

$$l: h_1(P).x + h_2(P).y + h_3(P)t = 0.$$

$\Rightarrow h_i(P) = \rho g_i(P)$

Сега, ако права l^* е тангента към k в точката P, то l^* е с уравнение

$$l^*: f_1(P).x + f_2(P)y + f_3(P)t = 0.$$ т.е.

$$l^*: (\lambda g_1(P) + \mu h_1(P))x + (\lambda g_2(P) + \mu h_2(P)).y + (\lambda g_3(P) + \mu h_3(P)).t = 0$$

$$l^*: (\lambda + \mu\rho)[g_1(P)x + g_2(P)y + g_3(P).t] = 0$$

$\Rightarrow l^* \equiv l.$ $\square$

В следващите теореми и следствията от тях установяваме още условия за еднозначно определяне на крива от втора степен при дадени условия.

Теорема 4. Нека P_1, P_2, P_3 и P_4 са четири точки, никои три от които не са колинеарни и полиномите на правите P_iP_j, $i \neq j$ са означени с $l_{ij} = l_{ij}(x, y, t)$. Тогава множеството

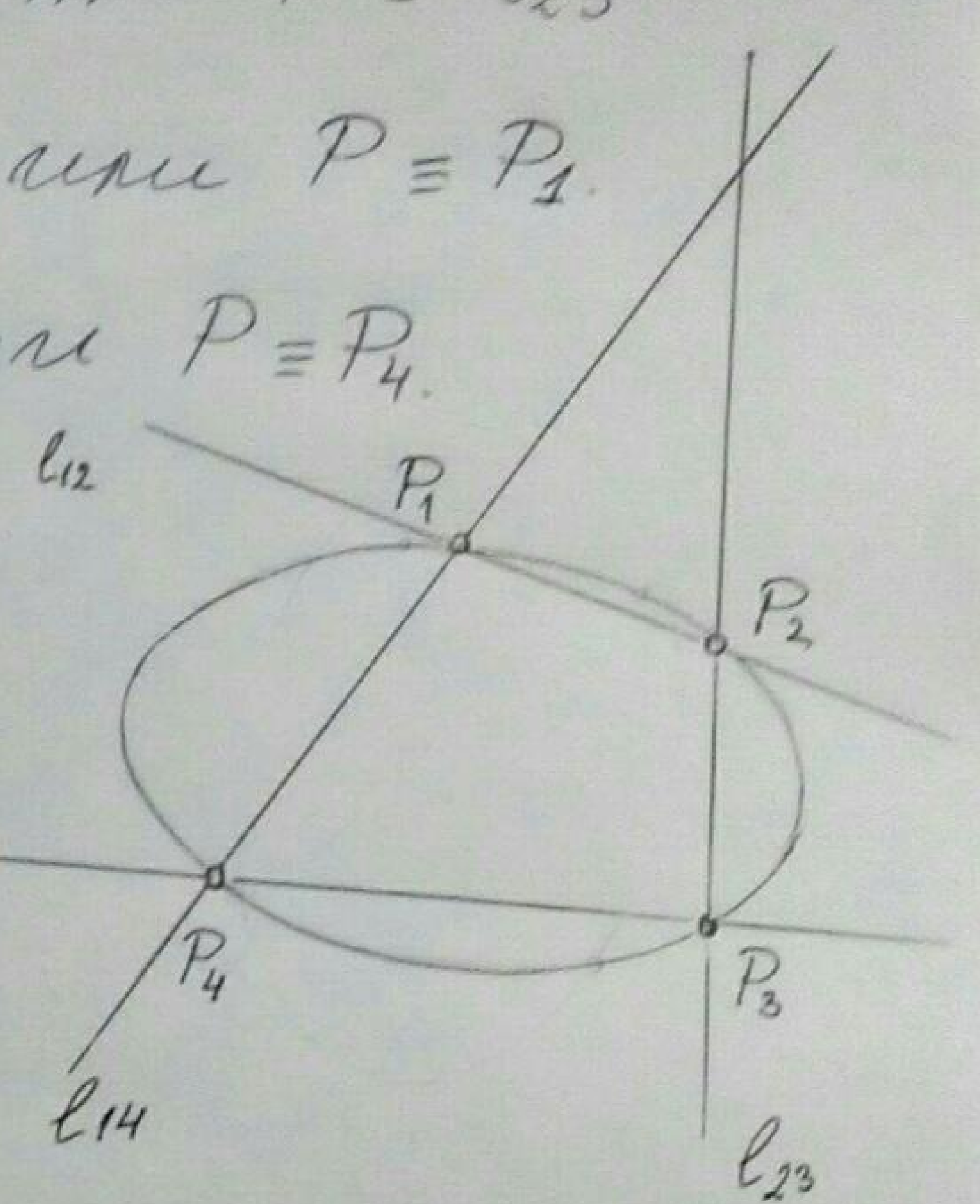
$$S \div f = \lambda l_{12} l_{34} + \mu l_{23} l_{41}$$

е сноп криви от втора степен с основни точки P_1, P_2, P_3 и P_4.

Доказателство. Непосредствено от условието имаме, че P_1, P_2, P_3 и P_4 са основни точки – анулират уравнението на коя да е крива от снопа. Това, че $P_1, \dots, P_4$ са единствените основни точки за S следва от това, че ако допуснем, че точката P е основна за S. Следователно за кой да е $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, P анулира f, т.е. $f(P) = 0$. В частност, за $\lambda = 1$ и $\mu = 0$ имаме

$l_{12}(P)\, l_{34}(P) = 0$. Ако $l_{12}(P) = 0$, то $P \in l_{23}$ или $P \in l_{41}$. Следователно или $P \equiv P_2$ или $P \equiv P_1$. Аналогично - ако $P \in l_{34}$, то $P \equiv P_3$ или $P \equiv P_4$.

Такъв сноп наричаме сноп от първи тип.



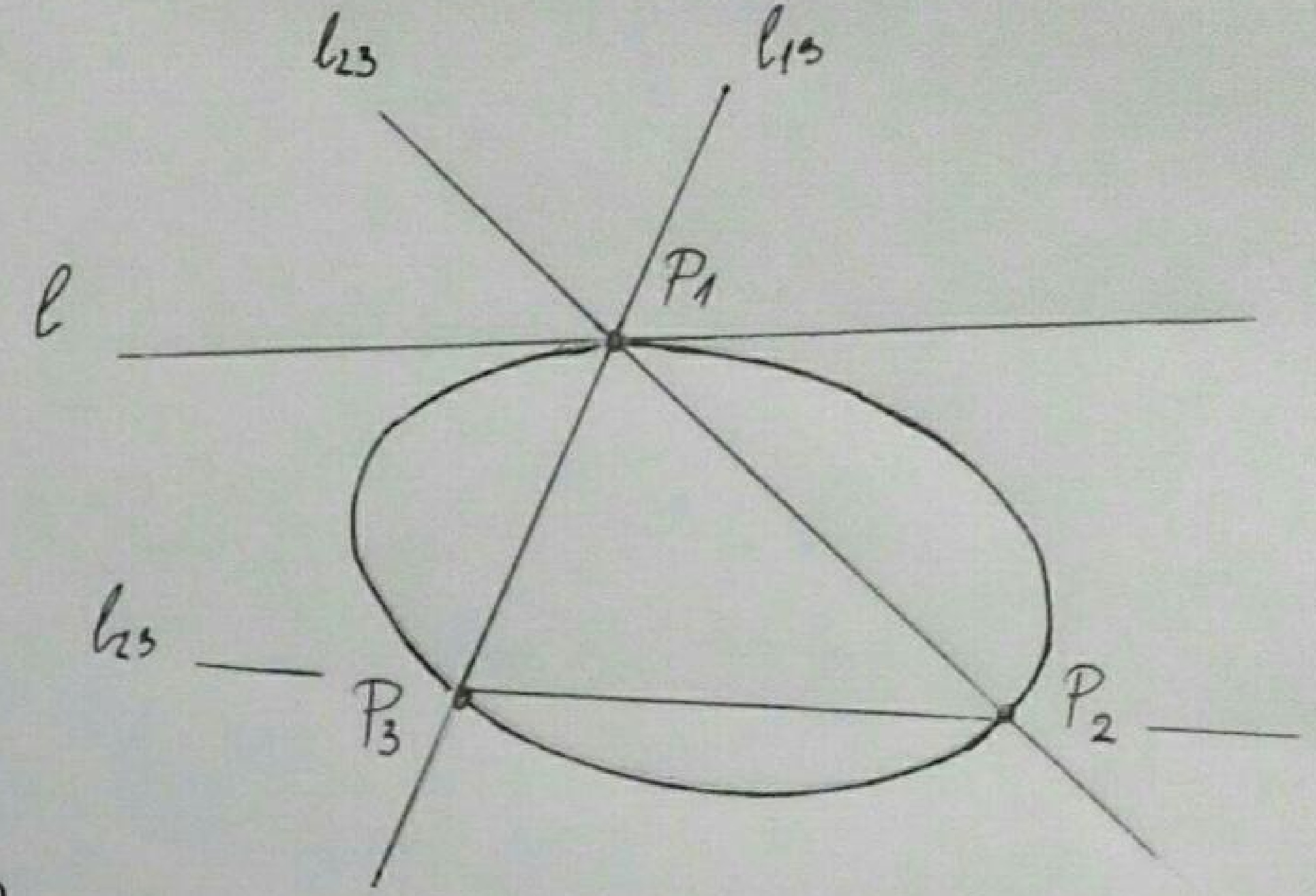
Теорема 5 Нека P_1, P_2 и P_3 са три неколинеарни точки, l е права, инцидентна с P_1, но неинцидентна нито с P_2 нито с P_3 и полиномите на правите P_iP_j, $i \neq j$ са означени с l_{ij}. Тогава множеството

$$S: f = \lambda l_{12} l_{13} + \mu l_{23} l = 0,$$

където l е полиномът на правата l, е сноп криви от втора степен с основни точки P_1, P_2, P_3 и обща тангента l.

Доказателство. 1. Както в предишната теорема се установява, че точките P_1, P_2 и P_3 са основни, при това единствените такива за снопа S.

2. Ще покажем, че l е тангента към всяка крива от снопа S.



Нека $k_0 \in S$ е произволна крива от снопа, минаваща през точка M_0, където M_0 не е инцидентна с никоя от правите $l, l_{ij}, i<j$. Тогава за $\lambda_0 = l_{23}(M_0) l(M_0) \neq 0$ и $\mu_0 = -l_{12}(M_0) l_{13}(M_0) \neq 0$, k_0 се получава като линейна комбинация на кривите от втора степен $\{l_{12} l_{13}\}$ и $\{l_{23} l\}$:

$$k_0 : \lambda_0 l_{12} l_{13} + \mu_0 l_{23} l = 0.$$

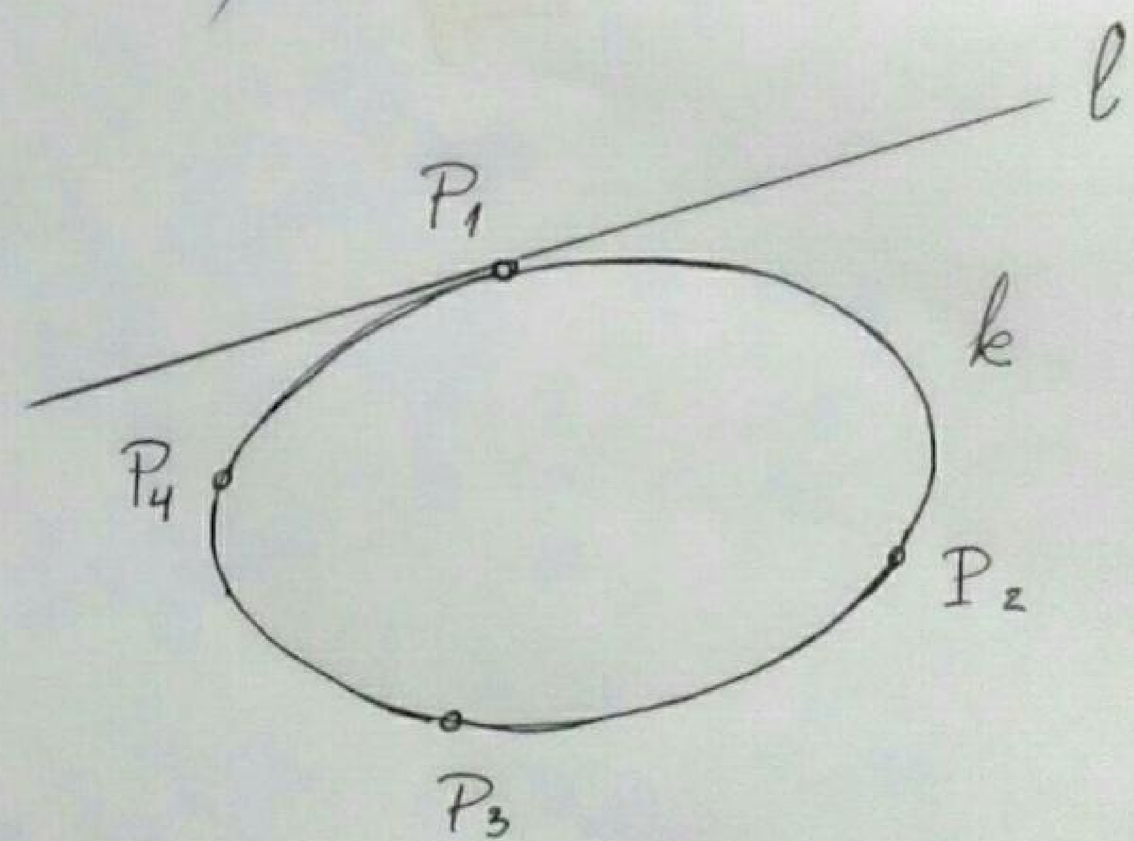
Нека $l \cap k_0 = \{P_1, X\}$. Тогава имаме $(\lambda_0 l_{12} l_{13} + \mu_0 l_{23} l)(X) = 0$ и $l(X) = 0$

Следователно за X имаме, че или $l_{12}(X) = 0$ или $l_{13}(X)$. От $l(X) = 0$ и в двата случая получаваме, че $X \equiv P_1$. Следователно l е тангента на k_0 в P_1. От k_0 - произволна крива, следва, че l е тангента към всяка крива от снопа S. □

Сноп от горния тип наричаме сноп от втори тип.

От Теорема 5. и от факта, че през неосновна за сноп криви от втора степен минава единствена крива от снопа (виж. 2 Теорема 3.) получаваме

Следствие. Нека P_1, P_2, P_3 и P_4 са четири точки, никои три от които не са колинеарни и l е права през точно една от тях, да речем P_1. Тогава съществува единствена крива от втора степен, която минава през P_1, P_2, P_3 и P_4 и се допира до правата l в точката P_1.



По сходен на доказателствата на Теорема 4 и Теорема 5 се доказва следната.

21.XI.18

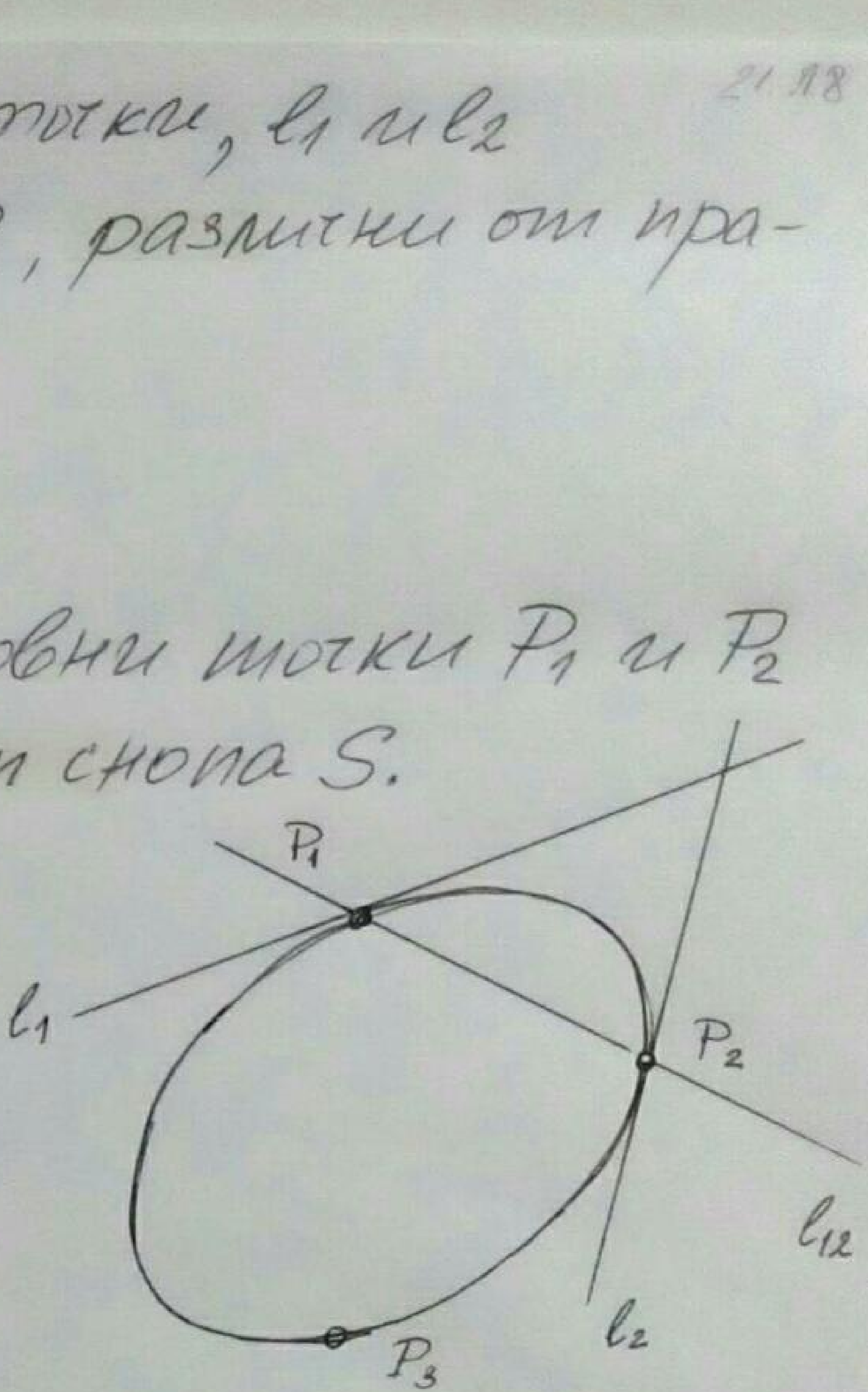
Теорема 6. Нека P_1 и P_2 са две различни точки, l_1 и l_2 две различни прави, съответно през P_1 и P_2, различни от правата $l_{12} = P_1P_2$. Тогава множеството

$$S: f = \lambda l_1 l_2 + \mu l_{12}^2$$

е сноп криви от втора степен с основни точки P_1 и P_2 с тангенти l_1 и l_2 към всяка крива от снопа S.

Сноп от този тип се нарича сноп от тип III.

От горната теорема получаваме



Следствие. Нека P_1, P_2 и P_3 са три неколиеарни точки, l_1 и l_2 две различни прави съответно през P_1 и P_2, различни от P_1P_2, като P_3 не е инцидентна нито с P_1 нито с P_2. Тогава съществува единствена крива от втора степен, която минава през P_1, P_2 и P_3, която се допира до правите l_1 и l_2 съответно в точките P_1 и P_2.

21.19

Scanned by TapScanner