Домашна работа 2 по Линейна алгебра
спец. Информатика

Нека P е последната цифра от факултетния Ви номер.

Задача 1. *Нека* $V = \{f \in \mathbb{R}^{(\leq 4)}[x] : f(1)+f(-1) = 0\}$ *е подмножество на полиномите на* x *от степен не повече от 4. Докажете, че* V *е линейно пространство относно събиране на полиноми и умножение на полином с число. Намерете един базис на* V *и* $\dim V$.

Задача 2. *Намерете детерминантата от ред* n: $\Delta_n = \begin{vmatrix} P & -1 & 0 & \dots & 0 \\ P+1 & P & -1 & \dots & 0 \\ 0 & P+1 & P & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P \end{vmatrix}$

Задача 3. *Пресметнете* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Задача 4. *Решете матричното уравнение* $X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 14 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

Задача 5. *Нека* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *е определено от*

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 - x_2 + x_3, -2x_1 + x_2 - x_3).$$

Докажете, че φ *е линеен оператор и намерете матрицата му спрямо стандартния базис на* $\mathbb{R}^3$. *Намерете базиси на пространствата* $\ker \varphi$ *и* $Im\varphi$.

Покажете, че $\ker \varphi \subset Im\varphi$ *и намерете* $r(\varphi^2)$.