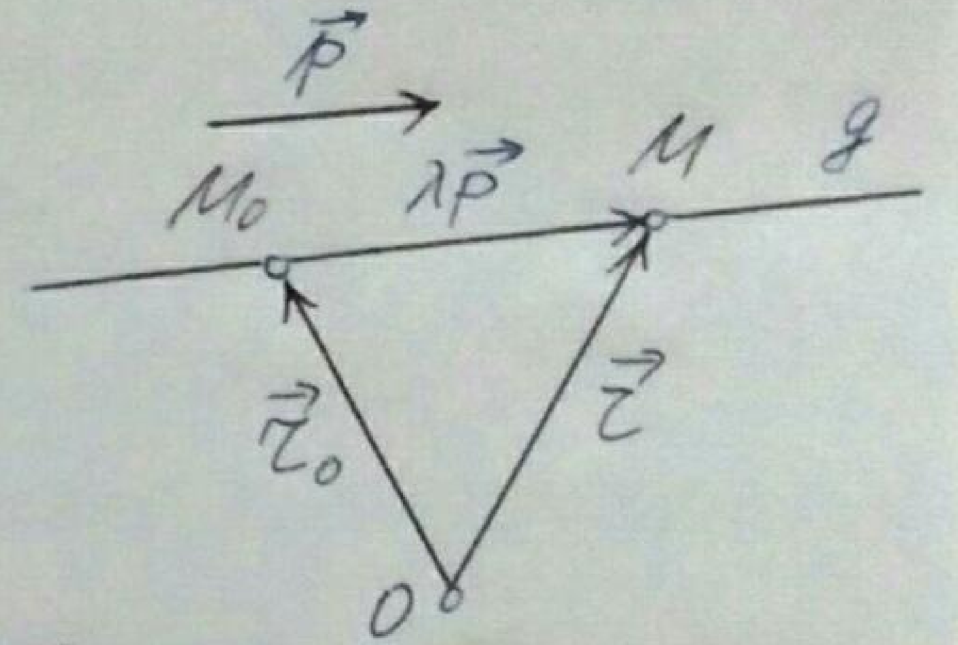
8. Параметрични уравнения на права и равнина



Нека g е права, колинеарна с вектор $\vec{p}$ и M_0 е фиксирана точка от g. Тогава точка M е от правата g точно тогава, когато векторът $\overrightarrow{M_0M} \parallel g \iff \overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{p}$.

Нека O е фиксирана точка, $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ – радиус векторите съответно на M_0 и M $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda\vec{p}$, където $\lambda \in (-\infty, \infty)$

(1) $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{p}$

Кое да е от уравненията (1) се нарича векторно параметрично уравнение на правата g

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е афинна координатна система и координатите на M_0, M и $\vec{p}(\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3})$ са съответно $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$ и $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$. Тогава уравненията (2) се наричат координатно параметрични уравнения на g спрямо K.

$$(2)\quad g: \begin{cases} x = x_0 + \lambda p_1 \\ y = y_0 + \lambda p_2 \\ z = z_0 + \lambda p_3 \end{cases}, \quad \lambda \in (-\infty, \infty)$$

Ако разглеждаме правата g в равнина α спрямо афинна координатна система $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$, то координатно параметричните уравнения на g спрямо K са $g: \begin{cases} x = x_0 + \lambda p_1 \\ y = y_0 + \lambda p_2 \end{cases}, \lambda \in (-\infty, \infty)$,

където $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$, а $\vec{p}(p_1, p_2)$ е вектор, колинеарен с g. Да отбележим, че права както в равнина, така и в пространство е еднопараметрична съвкупност от точки. Когато λ пробягва интервала $(-\infty, \infty)$ получаваме точките от g. Например за $\lambda = 0$ получаваме точката M_0.

Пример. Ако спрямо $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ $M_0(\sqrt{3}, -2, 5)$ и $\vec{p}(-1, \sqrt{2}, \frac{1}{5})$, то

$$g: \begin{cases} x = \sqrt{3} + \lambda(-1) \\ y = -2 + \lambda(\sqrt{2}) \\ z = 5 + \lambda \cdot (\frac{1}{5}) \end{cases} \Rightarrow g \begin{cases} x = \sqrt{3} - \lambda \\ y = -2 + \lambda\sqrt{2} \\ z = 5 + \lambda \frac{1}{5} \end{cases}, \lambda \in (-\infty, \infty)$$

са координатно параметричните уравнения на g спрямо K.

Ясно е, че уравненията на g могат да се получат, ако се вземе друг вектор, колинеарен с g – векторът $\sqrt{3} \cdot \vec{p}$ – $\vec{q}$

$\vec{q}\left(-\sqrt{3}, \sqrt{6}, \frac{\sqrt{3}}{5}\right)$. Тогава $g: \begin{cases} x = \sqrt{3} - \lambda\sqrt{3} \\ y = -2 + \lambda\sqrt{6} \\ z = 5 + \lambda\frac{\sqrt{3}}{5} \end{cases}$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$. 8.3

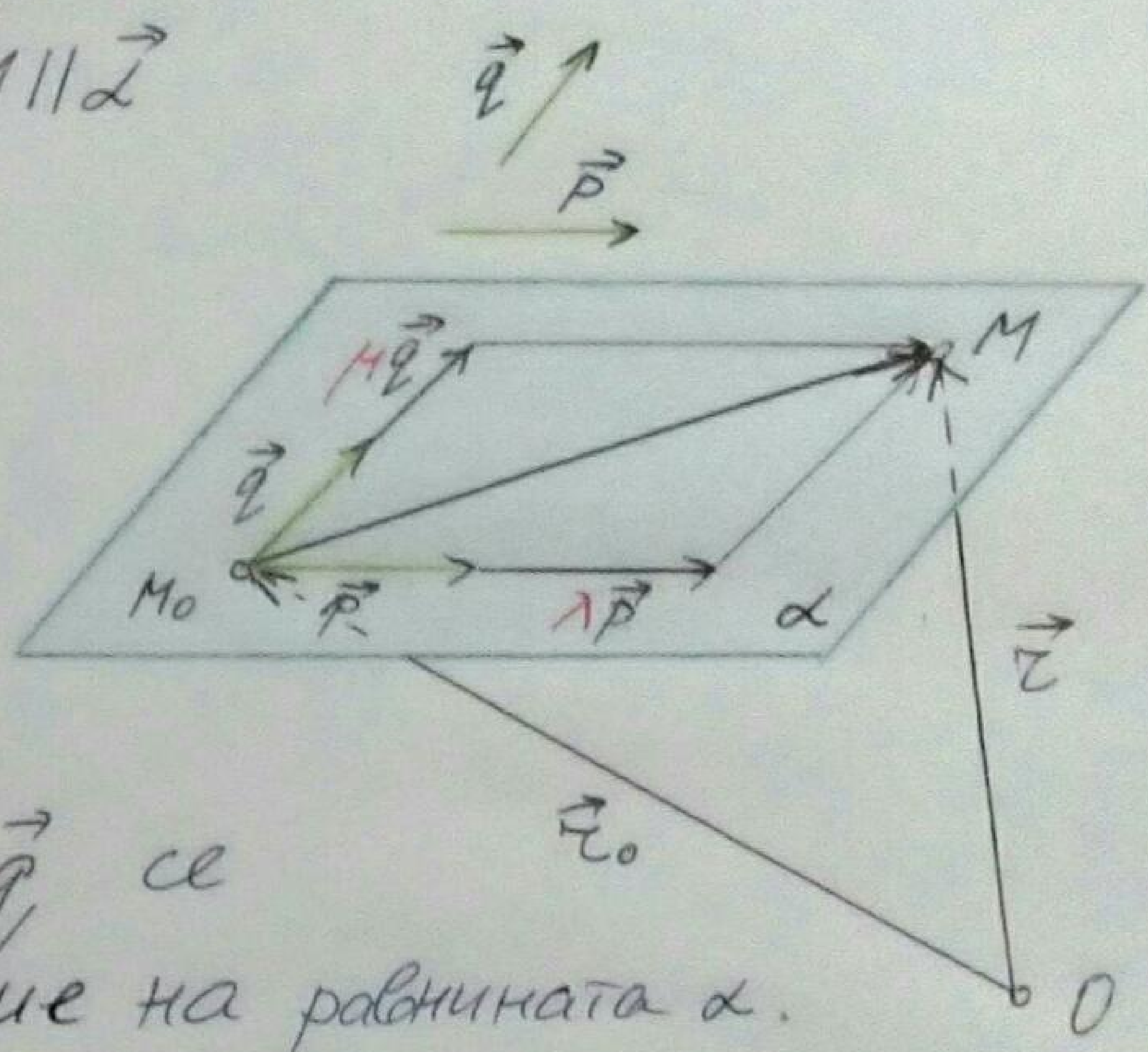
Специално за $\lambda = 1$ получаваме точката $M_3\left(0, -2+\sqrt{6}, 5+\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$, която е пресечната точка на g с координатната равнина $O\vec{e_2}\vec{e_3}$, която стандартно означаваме с Oyz.

За да намерим пресечната точка на g с координатната равнина $O\vec{e_1}\vec{e_2}$ - Oxy - т.е. за кой параметър λ точка от g има трета координата нула, решаваме $z = 0 \Rightarrow$
$5 + \lambda\frac{\sqrt{3}}{5} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{25}{\sqrt{3}}$. Следователно координатите на тази точка са $M_1\left(\sqrt{3} - 25, -2 - 25\sqrt{2}, 0\right)$.

Да отбележим, че ако g е ос, ориентирана с противоположните лъчи с начало M_0, то точките от единия лъч се получават за $\lambda > 0$, а от противоположния - за $\lambda < 0$.

Нека α е равнина, $M_0 \in \alpha$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ - ненулеви вектори, компланарни с α. Тогава $M \in \alpha \iff \overrightarrow{M_0M} \parallel \alpha$

$\iff \overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$



Нека O е фиксирана точка и $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ са радиус векторите съответно на точките M и M_0.
Тогава кое да е от уравненията
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$ се нарича **векторно параметрично уравнение** на равнината α.

Ако спрямо афинна координатна система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ координатите на $M_0, M, \vec{p}$ и $\vec{q}$ са съответно $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$, $\vec{p}(p_1,p_2,p_3)$ и $\vec{q}(q_1,q_2,q_3)$, то уравненията

$$\alpha: \begin{cases} x = x_0 + \lambda p_1 + \mu q_1 \\ y = y_0 + \lambda p_2 + \mu q_2 \\ z = z_0 + \lambda p_3 + \mu q_3 \end{cases}, \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

се наричат **координатно параметрични уравнения** на α.

Забележка. Равнина в евклидово пространство се задава като двупараметрична съвкупност от точки, независимо от размерността на пространството.