Линейни изображения

Нека $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}'$ са ЛП над $\mathbb{F}$ и $\varphi: \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$.

Казваме, че φ е линейно изображение, ако:

1) $(\forall a, b \in \mathbb{V})\left[\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)\right]$

2) $(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall a \in \mathbb{V})\left[\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)\right]$

$\varphi \in \underline{Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V}')}$.

<u>Сл.</u> $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

$$\varphi(v) = \varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) =$$

$$= \varphi(\lambda_1 v_1) + \varphi(\lambda_2 v_2) + \dots + \varphi(\lambda_n v_n) =$$

$$= \lambda_1 \varphi(v_1) + \cancel{\varphi}\, \lambda_2 \varphi(v_2) + \dots + \lambda_n \varphi(v_n)$$

$V = \mathbb{R}$ $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ $V' = \mathbb{R}$

$\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ $\varphi(x) = 8\underline{x}$

$x, y \in \mathbb{V}$

$\varphi(x+y) = 8(x+y) = \underline{8x} + \underline{8y} = \varphi(x) + \varphi(y)$

$\varphi(\lambda x) = 8(\lambda x) = 8\lambda x = \lambda(8x)$

$\Rightarrow \underline{\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{V}')}$

Когато $\mathbb{V} = \mathbb{V}'$ казваме че φ е линеен оператор и пишем $\varphi \in \mathrm{Hom}\,\mathbb{V}$

<u>Пр:</u> $\varphi(x) = 8x + 3$

$\varphi(x+y) = 8(x+y) + 3 = 8x + 8y - 3 \Rightarrow \varphi \notin \mathrm{Hom}\,\mathbb{V}$

$\varphi(x) + \varphi(y) = 8x + 3 + 8y + 3$

<u>Пр:</u> производна $\delta : \mathbb{F}^{\leq n}[x] \to \mathbb{F}^{\leq n}[x]$

1) $\delta(f+g) = \delta(f) + \delta(g)$; 2) $\delta(\lambda f) = \lambda\delta(f)$ $\Rightarrow$ ЛО

Пр: O; $O(a)=0_{V}$; $\forall a\in V$

$\varepsilon: V\to V$ $\quad a\in V$ $\quad \varepsilon(a)=a$

$m,n\in\mathbb{N}$ $\quad m\geq n$

$\varphi:\mathbb{F}^{m}\to\mathbb{F}^{n}$

$$\varphi\left(\underline{(a_1,\dots,a_n,a_{n+1},\dots,a_m)}\right)=\underline{(a_1,a_2,\dots,a_n)}$$

$\varphi:\mathbb{F}^{m}\to\mathbb{F}^{n}$

$$\varphi((a_1,\dots,a_m))=(a_1,\dots,a_m,0,\dots,0)$$

за $n\geq m$

Следствия от деф за ЛИ

1) $\varphi(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{V}'}$

<u>Д-во:</u> $(\forall v \in \mathbb{V})\ [0 . v = 0_{\mathbb{V}}]$

$$\varphi(0 . \mathbb{V}) = 0 . \underbrace{\varphi(\mathbb{V})}_{\mathbb{V}'} = 0_{\mathbb{V}'}$$

2) $\varphi(-a) = -\varphi(a)$

<u>Д-во:</u> $\varphi((-1)a) = (-1)\varphi(a) = -\varphi(a)$

3) $a_1, \dots, a_k$ са ЛЗ $\Rightarrow \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)$ са ЛЗ

Вижте д-во от лекции или файла на Иво Стратев

Th: Основна теорема за ЛИ

Нека $\mathbb{V}, \mathbb{V}'$ - ЛП и $\dim \mathbb{V} = n$ - крайно.

Тогава за всеки базис $e_1, \dots, e_n$ на $\mathbb{V}$ и $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}'$ $\exists! \varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V}')$:

$\varphi(e_i) = v_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

Деф Ако φ е ЛИ и φ е биекция, то казваме, че φ е изоморфизъм, а пространствата изоморфни.

Пр: $\varphi: \mathbb{F}^{\leq n}_{[x]} \to \mathbb{R}^n$

$\varphi((a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

Пр: $\varphi: M_2(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}^4 \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, b, c, d)$

Тв. Ако φ е изоморфизъм, то φ праща ЛНЗ в-ри в ЛНЗ в-ри, т.е ако $v_1, \dots, v_n$ - ЛНЗ, то $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ са ЛНЗ

Th: $V \cong V' \Leftrightarrow \dim V = \dim V'$

Деф.: V, V' - КМЛП и $\varphi \in Hom(V, V')$

$e_1, \dots, e_n$ - базис на V

$f_1, \dots, f_m$ - базис на V'

$$\varphi(e_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \dots + a_{m1} f_m$$
$$\varphi(e_2) = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 + \dots + a_{m2} f_m$$
$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$\varphi(e_n) = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 + \dots + a_{mn} f_m$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = M_e^f(\varphi)$$

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$$

$$\varphi(v) = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots + \mu_m f_m$$

$$M_e^f(\varphi) \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}}_{\overline{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix}}_{\overline{v}'}$$

При $\mathbb{V} = \mathbb{V}'$ где имате квадратна матрица, която се озн. $M_e(\varphi)$.

$$\overline{v} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \overline{v'} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{M_e(\varphi) \cdot \overline{v} = \overline{v'}}$$

$$\overline{v} = (M_e(\varphi))^{-1} \cdot \overline{v'}$$

Действия

$\varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V}')$ $\quad \varphi + \psi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V}')$ $\quad \lambda\varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V}')$

$\psi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V}')$

$$M_e^f(\varphi + \psi) = M_e^f(\varphi) + M_e^f(\psi)$$

$$\lambda \cdot M_e^f(\varphi)$$

$\varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V}')$, $\psi \in Hom(\mathbb{V}', \mathbb{V}'')$

$$\psi \circ \varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V}'')$$

$$\mathcal{M}_e^f(\psi) \cdot \mathcal{M}_e^f(\varphi)$$

$\dim(\underline{Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V}')}) = \dim \mathbb{V} \cdot \dim \mathbb{V}'$

① Нека $\mathbb{V} = M_n(\mathbb{F})$ и A и B са фиксирани матрици от $\mathbb{V}$. Да се док. че $\varphi: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ е ЛО, където

а) $\varphi(X) = X^T$

1) Нека $X, Y \in M_n(\mathbb{F})$

$$\varphi(X+Y) \stackrel{?}{=} \varphi(X) + \varphi(Y)$$

$$\varphi(X+Y) = (X+Y)^T = \underbrace{X^T}_{\varphi(X)} + \underbrace{Y^T}_{\varphi(Y)} = \varphi(X) + \varphi(Y) \checkmark$$

2) Нека $\lambda \in \mathbb{F}$ и $X \in M_n(\mathbb{F})$

$$\varphi(\lambda . X) = (\lambda X)^T = \lambda X^T = \lambda \varphi(X) \checkmark$$

$$\xRightarrow{1) \text{ и } 2)} \varphi \in \operatorname{Hom} \mathbb{V}$$

б) $\varphi(X) = AXB$ - дом в) $\varphi(X) = AX + XB$

При $n = 2$ да се намери матрицата на φ в базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, където $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

в) 1) Нека $X, Y \in M_n(\mathbb{F})$

$$\varphi(X+Y) = A(X+Y) + (X+Y)B = AX + AY + XB + YB =$$

$$= \underbrace{AX + XB}_{\varphi(X)} + \underbrace{AY + YB}_{\varphi(Y)} = \varphi(X) + \varphi(Y)$$

2) Нека $\lambda \in \mathbb{F}$ и $X \in M_n(\mathbb{F})$

$$\varphi(\lambda X) = A(\lambda X) + (\lambda X)B = \lambda AX + \lambda XB =$$

$$= \lambda(\underbrace{AX + XB}_{\varphi(X)}) = \lambda\varphi(X)$$

$\xrightarrow{1) \text{ и } 2)} \varphi \in Hom$ ✓

$$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix};\ E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix};\ E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix};\ E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\varphi(E_{11})=A\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\3&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\3&0\end{bmatrix}=2E_{11}+1E_{12}+3E_{21}+0\cdot E_{22}$$

$$\varphi(E_{12})=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-1\\0&0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$$

$$\varphi(E_{21})=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\4&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}2&0\\5&1\end{bmatrix};\ \varphi(E_{22})=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0&2\\0&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\2&3\end{bmatrix}$$

$$M_E(\varphi) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

② Нека $\mathbb{V}$ е ЛП на полиноми от степен ≤ 3 с коеф. реални числа и базис $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$, $e_4 = x^3$ и $A: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ $A(f) = 8f'' - 7f''$, $f \in \mathbb{V}$

а) Да се док че A е ЛО

б) Да се намери матрицата му в този базис

Решение: Нека $f, g \in \mathbb{V}$

1) $A(f+g) = 8(f+g)'' - 7(f+g)' = 8(f''+g'') - 7(f'+g') =$

$= 8f'' + 8g'' - 7(f'+g') = 8f'' + 8g'' - 7f' - 7g' =$

$= 8f'' - 7f' + 8g'' - 7g' = A(f) + A(g)$

2) $\lambda \in \mathbb{R},\ f \in \mathbb{V}$

$A(\lambda f) = 8(\lambda f)'' - 7(\lambda f)' = 8(\lambda f'') - 7(\lambda f') =$

$= \lambda(8f'') + \lambda(-7f') = \lambda(8f'' - 7f') = \lambda A(f)$

$\xRightarrow{1), 2)} A \in \mathrm{Hom}\,\mathbb{V}$

б) $A(e_1) = A(1) = 8(1)'' - 7(1)' = 8 \cdot 0 - 7 \cdot 0 = 0 =$

$= 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$

$A(e_2) = 8(x)'' - 7(x)' = 8 \cdot 1' - 7 \cdot 1 = -7 =$

$= -7 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$

$A(e_3) = 8(x^2)'' - 7(x^2)' = 8 \cdot 2 - 7 \, 2x =$

$= 16 - 14x = 16 \cdot e_1 - 14 e_2 + 0 e_3 + 0 e_4$

$A(e_4) = 8(x^3)'' - 7(x^3)' = 8 \cdot 6x - 21x^2 =$

$= 48x - 21x^2 = 0 \cdot e_1 + 48 e_2 + -21 e_3 + 0 e_4$

$$M_e(A) = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ранг, дефект, ядро и образ

$\varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V}')$

$Ker\,\varphi = \{v \in \mathbb{V} \mid \varphi(v) = 0_{\mathbb{V}'}\}$ - ядро на φ

$Im\,\varphi = \{v' \in \mathbb{V}' \mid \exists v \in \mathbb{V} : \varphi(v) = v'\}$ - образ на φ

<u>Тв.</u> $Ker\,\varphi = \{0_{\mathbb{V}}\} \iff \varphi$ е инекция

<u>Тв.</u> $Im\,\varphi = \mathbb{V}' \iff \varphi$ е сюрекция

$Ker\,\varphi \leq \mathbb{V}$; $Im\,\varphi \leq \mathbb{V}'$

Деф. Ранг на изобр. наричаме $\dim Im\,\varphi$ и го бележим с $r(\varphi)$

<u>Деф.</u> Дефект на изобр. наричаме $\dim Ker\,\varphi$ и го бележим с $d(\varphi)$.

Тв $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}'$ - КМЛП и $e_1, \dots, e_n$ - базис на $\mathbb{V}$. Тогава $r(M_e^f(\varphi)) = r(\varphi)$

$f_1, \dots, f_m$ - $\mathbb{V}'$ базис

Th: $\mathbb{V}$ - КМЛП, $\varphi \in Hom(\mathbb{V}, \mathbb{V}')$. Тогава $r(\varphi) + d(\varphi) = \dim \mathbb{V}$. Теорема за ранга и дефекта.

③ Нека e_1, e_2, e_3, e_4 - базис на V и $\varphi \in \operatorname{Hom} V$ с матрица

а) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Да се намерят бази на $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$, $\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi$, $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$

Решение: $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ф.С.Р.

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \underset{R_3+R_4}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ \hline \end{matrix}$$

$$\sim \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A}$$

$\dim V - r(A) = 4 - 2$ парам

$x_3 = p \quad x_4 = -p$

$x_1 = q \quad x_2 = \frac{-q-p}{2}$

Решения: $\left(q, \frac{-q-p}{2}, p, -p\right)$

1) $p = 2, q = 0$ 2) $p = 0, q = 2$

$c_1 = (0, -1, 2, -2)$; $c_2 = (2, -1, 0, 0)$

$\underline{\operatorname{Ker}\varphi = \ell(c_1, c_2)}$

Базис на $\operatorname{Im}\varphi$. 1) Транспонираме A и търсим МНЗП

$$r(\varphi) = \dim V - d(\varphi) = 4-2=2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{R_1-2R_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{rrrr} 3 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} -2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

$d_1 = (-1,1,0,0)$; $d_2 = (0,1,-1,1)$

$\operatorname{Im}\varphi = \ell(d_1, d_2)$

$\mathrm{Ker}\,\varphi + \mathrm{Im}\,\varphi$

$$\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ - \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \\ + \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \quad -1 \quad 2 \quad -2 \\ + \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline -1 \quad 0 \quad 2 \quad -2 \end{array}$$

$\mathrm{Ker}\,\varphi + \mathrm{Im}\,\varphi = \ell(c_1, c_2, d_1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$x_1 = p$

$x_3 = q$

$x_2 = 2p$

$x_4 = -\dfrac{2p+2q}{2} = -p+q$

1) $p = 1, q = 0$

$(1, 2, 0, -1)$ 2) $p = 0, q = 1$

$(0, 0, 1, 1)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ & & & \end{bmatrix}$$

$x_2 = p$

$x_3 = q$ Решения: $(p, p, q, p-q)$

$x_1 = p$ 1) $p = 1, q = 0$, 2) $p = 0$,

$x_4 = p - q$ $(1,1,0,1)$ $q = 1$

$(0,0,1,-1)$

$\mathrm{Im}\,\varphi$: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

$\ker\varphi \cap \mathrm{Im}\,\varphi$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

не изпързах сметките

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$