1.3 Индукция в множества с фундирана наредба

Принцип на пълната индукция във фундирани множества. Нека $(A, <)$ е фундирано множество, а P е свойство в A, такова че за всяко $x \in A$ е изпълнено условието:

$$\text{ако за всяко } y < x \text{ е вярно } P(y), \text{то е вярно и } P(x). \qquad \textbf{(Ind)}$$

Тогава за всяко $x \in A$ е вярно $P(x)$.

Да запишем и този принцип във вид на правило:

$$\frac{\forall x \ (\ \forall y_{y<x} P(y) \implies P(x) \ )}{\forall x P(x)}$$

Забележете приликата с принципа за пълна индукция над $\mathbb{N}$ във формулировката **(3)**.

Доказателство. Да допуснем, че съществува $x_0 \in A$, за което $\neg P(x_0)$. Ако допуснем, че

$$\forall y_{y<x_0} \ P(y), \tag{1.2}$$

то тогава съгласно **(Ind)** ще е вярно и $P(x_0)$, а ние имаме $\neg P(x_0)$. Следователно допускането ни (1.2) е погрешно и значи съществува $x_1 < x_0$, такова че $\neg P(x_1)$. Като повторим горното разсъждение, ще получим, че ще съществува $x_2 < x_1$, за което $\neg P(x_2)$, и т.н. Итерирайки тази процедура, достигаме до безкрайно намаляващата редица

$$x_0 > x_1 > x_2 > \ \ldots,$$

което влиза в противоречие с фундираността на наредбата $<$. Следователно допускането, че съществува $x_0 : \ \neg P(x_0)$ е погрешно, с други думи, вярно е, че $\forall x P(x)$. $\square$

Ако използваме еквивалентната дефиниция за фундирана наредба, доказателството на горното твърдение е малко по-кратко. Отново допускаме, че съществува поне едно $x \in A$, за което $\neg P(x)$ и разглеждаме множеството

$$B \ = \ \{x \mid \neg P(x)\}.$$

То не е празно и следователно има минимални елементи. Нека x_0 е такъв елемент. Тогава за всички $y < x_0$ ще е вярно, че $y \notin B$, т.е. $P(y)$. Но P удовлетворява **(Ind)** и следователно $P(x_0)$ също ще е вярно. Обаче $x_0 \in B$ и значи $\neg P(x_0)$ — противоречие.

1.4 Задачи

Ще илюстрираме в няколко задачи индуктивния принцип, който току-що изведохме. Първата задача е свързана с *функцията на Акерман*

Задача 1.4. (Функция на Акерман) Нека $f\colon\ \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ удовлетворява условията:

$$\begin{aligned} f(0,y) &= y+1 \\ f(x+1,0) &= f(x,1) \\ f(x+1,y+1) &= f(x,f(x+1,y)). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Докажете, че съществува единствена функция f с това свойство и тази функция е тотална.

Внимание! Тази функция расте с шеметна скорост — например $f(4,2)$ е число с 19 729 цифри в десетичния си запис (за справка: всички атоми във вселената са "само" около 10^{80}).

Решение. Нека за f са изпълнени условията (1.3). Да означим с $P(x,y)$ свойството:

$$P(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\iff} f \text{ има единствена стойност в т. } (x,y).$$

Ще разсъждаваме с индукция по лексикографската наредба $\prec$ на $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, за която вече знаем, че е фундирана.

Наистина, да фиксираме произволни $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ и да приемем, че

$$\forall (x',y')_{(x',y')\prec(x,y)}\ P(x',y') \qquad \textbf{(индуктивна хипотеза)}.$$

Искаме да покажем, че и $P(x,y)$ е вярно. Разглеждаме различните възможности за (x,y):

1 сл. $x=0$. Но тогава $f(0,y) \stackrel{(1.3)}{=} y+1$ и очевидно $P(x,y)$ е вярно.

2 сл. $x>0, y=0$. Тук имаме

$$f(x,0) \stackrel{(1.3)}{=} f(x-1,1).$$

Но $(x-1,1)\prec(x,0)$ и значи съгласно индуктивната хипотеза $P(x-1,1)$ ще имаме, че $f(x-1,1)$ е еднозначно определена, откъдето и $f(x,0)$ ще е еднозначно определена.

3 сл. $x>0, y>0$. В този случай

$$f(x,y) \stackrel{(1.3)}{=} f(x-1,\underbrace{f(x,y-1)}_{z}).$$

Но $(x,y-1)\prec(x,y)$ и по индуктивната хипотеза, $f(x,y-1)$ ще има единствена стойност, примерно z. Колкото и да е голямо това z, със сигурност $(x-1,z) \prec (x,y)$ и по индуктивната хипотеза, $f(x-1,z)$ ще има еднозначно определена стойност, а оттам същото можем да твърдим и за $f(x,y)$. □

Ако си мислите, че горната рекурсивна схема поначало е сложна, защото рекурсията е двойна — ами не винаги е така. Да вземем следната рекурсивна дефиниция на функция g, която се различава с точно една единица в базовия случай на дефиницията на функцията на Акерман:

$$\begin{aligned} g(0,y) &= y \\ g(x+1,0) &= g(x,1) \\ g(x+1,y+1) &= g(x,g(x+1,y)). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Тази функция, обаче, вече е "почти" константна:

Задача 1.5. (Задача от Домашно 1.) Нека g удовлетворява условията (1.4). Докажете, че тогава g е следната функция:

$$g(x,y) \;=\; \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Препоръчвам ви да решите тази задача с индукция по лексикографската наредба на $\mathbb{N}^2$, както направихме в предишната задача, за да се убедите, че сте разбрали принципа за пълна индукция. Ние ще я решим с обикновена индукция, за да направим разликата.

Наистина, да приемем, че g удовлетворява равенствата (1.4). Тогава очевидно $g(0,y)=y$ за всяко $y \in \mathbb{N}$. По-интересното е защо в останалите случаи g е константата 1. Трябва да покажем, че

$$\forall x_{x\geq 1} \underbrace{\forall y\ g(x,y)=1}_{P(x)}.$$

С обикновена индукция относно x ще покажем, че $\forall x_{x\geq 1} P(x)$, където $P(x)$ е свойството, което сме означили по-горе.

База $x=1$:

$$\forall y\ \underbrace{g(1,y)=1}_{Q(y)}.$$

Трябва да покажем, че $\forall y\, Q(y)$, което ще направим с индукция относно y. При $y=0$ от (1.4) получаваме:

$$g(1,0) \;=\; g(0,1) \;=\; 1.$$

Да допуснем, че за някое y е вярно $Q(y)$. Тогава за $Q(y+1)$ ще имаме, съгласно (1.4):

$$g(1,y+1) \;=\; g(0,g(1,y)) \overset{\text{и.х. } Q(y)}{=} g(0,1) \;=\; 1.$$

С това приключва вътрешната индукция по y, с която показахме, че $\forall y Q(y)$, което беше точно базата $P(1)$ на външната индукция по x.

Сега да допуснем, че за някое $x \geq 1$ е изпълнено $P(x)$. Трябва да покажем $P(x+1)$, т.е.

$$\forall y\, \underbrace{g(x+1,y)=1}_{R(y)}.$$

За да покажем $\forall y\ R(y)$, ще разсъждаваме отново с индукция относно y. Наистина, при $y=0$ ще имаме

$$g(x+1,0) \overset{(1.4)}{=} g(x,1) \overset{\text{и.х. } P(x)}{=} 1.$$

Сега да приемем, че $R(y)$ е вярно за някое y. Тогава за $y+1$ ще имаме:

$$g(x+1,y+1) \overset{(1.4)}{=} g(x, \underbrace{g(x+1,y)}_{1}) \overset{\text{и.х. } R(y)}{=} g(x,1) \overset{\text{и.х. } P(x)}{=} 1.$$

□

Задача 1.6. (91-функция на Маккарти.) Нека $f\colon\ \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ удовлетворява условията:

$$f(x) = \begin{cases} x-10, & \text{ако } x > 100 \\ f(f(x+11)), & \text{ако } x \leq 100. \end{cases} \tag{1.5}$$

Докажете, че в такъв случай f е следната функция:

$$f(x) = \begin{cases} x-10, & \text{ако } x > 100 \\ 91, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Да направим няколко експеримента:

$$f(100) \overset{(1.5)}{=} f(f(111)) \overset{(1.5)}{=} f(101) \overset{(1.5)}{=} 91.$$

$$f(99) \overset{(1.5)}{=} f(f(110)) \overset{(1.5)}{=} f(100) = 91.$$

Виждаме, че $f(99)$ се обръща към $f(100)$, което ни навежда на мисълта да разгледаме следната релация $\prec$ в множеството $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}\ \&\ x \leq 100\}$:

$$x \prec y \overset{\text{деф}}{\iff} x > y.$$

Ясно е, че тази релация е строга наредба, която при това е фундирана, защото A е ограничено отгоре.

Нека

$$P(x) \overset{\text{деф}}{\iff} f(x) = 91.$$

С индукция относно фундираната наредба $\prec$ ще покажем, че $P(x)$ е вярно за всяко $x \in A$.

Наистина, да фиксираме произволно $x \in A$ и да приемем, че за всички $y \prec x$ е в сила $P(y)$ (**индукционна хипотеза**). Имаме

$$f(x) \stackrel{(1.5)}{=} f(f(x+11)).$$

сл. 1. $x + 11 > 100$. Тогава $f(x+11) \stackrel{(1.5)}{=} x + 11 - 10 = x + 1$ и значи

$$f(x) \stackrel{(1.5)}{=} f(f(x+11)) \;=\; f(x+1).$$

сл. 1.1. Ако $x + 1 \notin A$, което ще рече $x + 1 > 100$. Но x принадлежи на множеството A, т.е. $x \leq 100$. Двете неравенства ни дават общо $x = 100$. Но ние вече се убедихме, че $f(100) = 91$. Да отбележим, че $x = 100$ всъщност е "дъното на индукцията", т.е. числото 100 се явява минимален елемент на нашето множество A (който в случая е и най-малък елемент на A).

сл. 1.2. Ако $x + 1 \in A$, то $x + 1 \prec x$ и по индукционната хипотеза $f(x+1) = 91$, откъдето и $f(x) = 91$.

сл. 2. $x + 11 \leq 100$. Имаме отново

$$f(x) \stackrel{(1.5)}{=} f(f(x+11)).$$

Тук вече $x + 11 \in A$, като при това $x + 11 \prec x$, и значи съгласно индукционната хипотеза $f(x+11) = 91$. Тогава

$$f(x) \;=\; f(\underbrace{f(x+11)}_{91}) \;=\; f(91) \;=\; 91.$$

За последното равенство $f(91) = 91$ използвахме, че сме в случая, когато $x + 11 \leq 100$, т.е. $x \leq 89$. Тогава $91 \prec x$ и значи за 91 индукционната хипотеза е в сила. $\square$

Задача 1.7. (Задача от Домашно 1.) Нека за $f\colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ е изпълнено:

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ f(x, y-x), & \text{ако } y \geq x > 0 \\ f(y,x), & \text{ако } y < x. \end{cases} \tag{1.6}$$

Докажете, че $f(x,y) = \text{НОД}(x,y)$ за всяко $(x,y) \in \mathbb{N}^2$.
(Приемаме, че $\text{НОД}(0,0) = 0$.)

Задача 1.8. Нека за $f\colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ е изпълнено:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x < y \\ f(x-y,y)+1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажете, че $\forall x \forall y_{y>0}\ f(x,y) = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$, където $\lfloor \frac{x}{y} \rfloor \stackrel{\text{деф}}{=}$ цялата част от делението на x на y.

Решение. Искаме да покажем, че

$$\forall x \forall y > 0\ f(x,y) = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor,$$

което е еквивалентно на

$$\forall y > 0 \underbrace{\forall x\ f(x,y) = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor}_{P(x)}.$$

Да фиксираме произволно $y > 0$. С пълна индукция относно $x \in \mathbb{N}$ ще покажем, че $\forall x P(x)$. Ще следваме схемата за пълна индукция

$$\frac{\forall x\ (\ \forall x'_{<x} P(x') \implies P(x))}{\forall x P(x)} \qquad (*)$$

Наистина, да вземем произволно $x \in \mathbb{N}$ и да приемем, че $\forall x'_{<x} P(x')$ е вярно (индукционна хипотеза). Ще докажем, че $P(x)$ също е вярно. За целта е подходящо да разгледаме поотделно случаите $x < y$ и $x \geq y$.

1 сл. $x < y$. Тогава $f(x,y) \stackrel{(1.6)}{=} 0$ и следователно $f(x,y) = 0 = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$ т.е. $P(x)$ е вярно.

2 сл. $x \geq y$. Тук имаме, съгласно избора на f, че

$$f(x,y) \stackrel{(1.6)}{\simeq} f(x-y,y)+1.$$

Но $y > 0$, и значи $x - y < x$. Тогава индукционна хипотеза $P(x-y)$ е в сила, т.е. $f(x-y,y) = \lfloor \frac{x-y}{y} \rfloor$, откъдето

$$f(x,y) = f(x-y,y)+1 = \lfloor \frac{x-y}{y} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor.$$

Следователно и $P(x)$ е вярно.

Така доказахме, че условието над чертата на $(*)$ е изпълнено. Следователно е вярно и условието под чертата $\forall x P(x)$. $\square$

Задача 1.9. (Задача от Домашно 1.) Нека за $f\colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ е изпълнено:

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} y, & \text{ако } x < y \\ f(x-y,y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажете, че тогава $\forall x \forall y_{y>0}\ f(x,y) = \{\frac{x}{y}\}$, където $\{\frac{x}{y}\} \stackrel{\text{деф}}{=}$ остатъка от делението на x на y.

Задача 1.10. (Задача за ЕК.) Функцията f, която е дефинирана върху списъци, удовлетворява равенствата:

$$f(x,y,[\,]) = [\,]$$
$$f(x,[\,],[a]) = [x@[a]]$$
$$f(x,y,[a|z]) = f(x@[a],[\,],y@z)@f(x,y@[a],z),\ \text{ако } y \neq [\,]\ \vee\ z \neq [\,].$$

(Тук @ е операцията конкатенация.) Докажете, че f е тотална функция.

Задача 1.11. (Задача за ЕК.) В множеството $\mathbb{N}^*$ на всички крайни редици от естествени числа дефинираме релацията $\prec$ по следния начин. За всеки две редици α и β полагаме

$$\alpha \prec \beta$$

точно когато α може да се получи от β след замяната на число n от β с редица от числа $(m_1,\dots,m_k)$, такива че $m_i < n$ за всяко $i = 1,\dots,k$. Нека $\prec^*$ е рефлексивното и транзитивно затваряне на релацията $\prec$. Докажете, че $(\mathbb{N}^*,\prec^*)$ е фундирано множество.