1.3.3 Условна вероятност

Пример 1.22 *Каква е вероятността от 4 изтеглени карто от едно тесте, всичките да са аса?*

Първият начин е да преброим колко са всички възможни начини да изтеглим 4 карти. те са $\binom{52}{4}$*. От тях един е благоприятният – 4 аса. Тогава отговорът е* $\frac{1}{\binom{52}{4}}$*.*

Може да разсъждаваме обаче и така: за първата изтеглена карта имаме вероятност $\frac{4}{52}$ *тя да е асо. Ако първата е асо, то за втората вероятността също да е асо е* $\frac{3}{51}$*, и така за останалите. Окончателно получаваме* $\frac{4}{52}\frac{3}{51}\frac{2}{50}\frac{1}{49}$*, което е равно на* $\frac{1}{\binom{52}{4}}$ *(проверете).*

Разсъждението "ако (нещо се е случило), то вероятността (да се случи нещо друго)" е в основата на понятието *условна вероятност.*

Определение 1.18 *Нека* A *и* B *са събития в* Ω *и нека* $P(B) > 0$*. Тогава условната вероятност на* A *при условие* B *дефинираме по следния начин:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Иначе казано, това е вероятността да се случат едновременно (съвместната вероятност на) двете събития, разделена на вероятността на събитието-условие. Забелязваме, че $P(B|B) = 1$, т.е. събитието B се явява заместител на Ω при условната вероятност.

Пример 1.23 *Продължаваме с пример 1.22. Нека сега пресметнем вероятността да изтеглим 4 аса от 4 карти, ако първите* i *от тях вече са аса, за* $i = 1, 2, 3$.

$$P(4 \text{ аса от } 4 \text{ карти}|i \text{ аса от } i \text{ карти}) = \frac{P(4 \text{ аса от } 4 \text{ карти})}{P(i \text{ аса от } i \text{ карти})} = \frac{\frac{\binom{4}{i}}{\binom{52}{i}}}{\frac{1}{\binom{52}{4}}} = \frac{1}{\binom{52-i}{4-i}}.$$

Мултипликативно правило: От $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, получаваме $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$, което дава възможност да намерим съвместната вероятност на две събития, ако знаем условната на едното спрямо другото.

Пример 1.24 *Знае се, че* 49% *от инфекциите се дължат на анаеробни бактерии.* 70% *от всички анаеробни инфекции са полимикробни. Каква е вероятността даден инфекция да е анаеробна и полимикробна едновременно?*
$P(\text{полимикробна и анаеробна}) = P(\text{полимикробна}|\text{анаеробна})P(\text{анаеробна}) = 0.7 * 0.49 = 0.343$

Обобщение на мултипликативното правило за повече от две събития е следната теорема:

Теорема 1.3 *За съвместната вероятност за сбъдване на произволни събития* $A_1, \ldots, A_n$ *е в сила следната формула:*

$$P(\prod_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}). \qquad (1.1.3.1)$$

Доказателство: Твърдението на теоремата се доказва по индукция. При $n = 1$ твърдението е очевидно. При $n = 2$ ледва от мултипликативното правило. Допускаме, че твърдението е изпълнено при някое n, т.е., че е изпълнено (1.1.3.1) и искаме да проверим, че ще бъде в сила и при $n+1$. Наистина, от дефиницията на условна вероятност имаме

$$\begin{aligned} P(\prod_{i=1}^{n+1} A_i) &= P(\prod_{i=1}^{n} A_i \bigcap A_{n+1}) \quad \text{от мултипликативното свойство} \\ &= P(A_{n+1}|\prod_{i=1}^{n} A_i) P(\prod_{i=1}^{n} A_i) \quad \text{от (1.1.3.1)} \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1})P(A_{n+1}|\prod_{i=1}^{n} A_i), \end{aligned}$$

с което твърдението е доказано.

1.4 Формула за пълната вероятност и формула на Бейс

Да напомним дефиницията 1.16, че съвкупността от събития $H_1, H_2, \dots, H_n$ наричаме **пълна група от събития** на Ω, ако
1. $H_i \cap H_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$
2. $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$, т.е. пространството на елементарни изходи Ω се разбива на несъвместими събития $H_1, H_2, \dots, H_n$.

Теорема 1.4 ***(Формула за пълната вероятност)*** *За вероятността на произволно събитие $A \in \mathcal{A}$ е изпълнено*

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \mid H_i)\, \mathbf{P}(H_i), \tag{1.1.4.2}$$

където събитията $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуват пълна група от събития.

Доказателство: Имаме представянето

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \bigcap \Omega) = P\left(A \bigcap \left(\sum_{i=1}^{n} H_i\right)\right) \\ &= P((H_1 \cap A) \cup ((H_2 \cap A)) \cup \dots \cup (H_n \cap A)) \quad \text{т.к. } H_i \cap A \text{ са несъвместими} \\ &= P((H_1 \cap A) + ((H_2 \cap A)) + \dots + (H_n \cap A)) \quad \text{от адитивността на P} \\ &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n) \\ &\qquad \text{по дефиницията на условна вероятност} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \mid H_i)\, \mathbf{P}(H_i.) \end{aligned}$$

Теорема 1.5 ***(Формула на Бейс)*** *Нека събитията $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуват пълна група от събития и събитието* A *е такова, че $P(A) > 0$. Тогава е изпълнено, че*

$$\mathbf{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathbf{P}(A \mid H_k)\, \mathbf{P}(H_k)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A \mid H_k)\, \mathbf{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \mid H_i)\, \mathbf{P}(H_i)},$$

за к $= 1, 2, \dots, n$.

Доказателство: Да разгледаме събитията A и B, такива че $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$. От дефиницията на условна верочтност имаме $P(A|B).P(B) = P(A \cap B)$ и $P(B|A).P(A) = P(A \cap B)$, откъдето поради равенство на десните страни следва, че

$$P(A|B).P(B) = P(B|A).\frac{P(A)}{P(B)}.$$

Тогава

$$P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{P(A)} = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)},$$

за всички $k = 1, \ldots, n$, където последното следва от формулата за пълната вероятност (1.1.4.2).

1.5 Независимост на събития

Използвайки условната вероятност, ще определим и кога две събития A и B са независими. Нека казваме, че те са независими, ако условната вероятност на A при условие B е равна на безусловната вероятност да се случи A: $P(A|B) = P(A)$ (или обратното, $P(B|A) = P(B)$). От определението за условна вероятност, получаваме следната (симетрична относно A и B) дефиниция:

Определение 1.19 *Събитията A и B наричаме независими тогава и само тогава, когато $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*

Пример 1.25 *Нека A е събитието "изтеглената карта е пика", а събитието $B = \{10, J, Q, K, A\}$. Покажете, че A и B са независими.*

Пример 1.26 *(Three Mile Island, 1978) Вероятността за ядрена авария в тази електроцентрала е била оценена на 1/10 млн., но се случва. Определянето на вероятността се е базирало на дърво на събитията, като те са се считали за независими. Например, на 1/1000 е била оценена вероятността да е затворена помощна клапа за захранване с вода. Поради независимостта, за две такива клапи, рисът и двете да са затворени е бил оценен на 1/1000000. При разследването на причините за аварията обаче, се оказало, че две такива клапи са били оставени затворени, и то от един и същ служител. Всъщност, те никога не са били отваряни поотделно, което напълно противоречи на теоретичното предположение за независимост. В случая това е довело до огромно подценяване на риска за авария.*

1.6 Видове независимост и свойства

1.7 Безкрайни вероятностни пространства

1.7.1 Безкрайни вероятностни пространства

В следващото изложение ще покажем, че вероятността е непрекъсната функция на събития. За целта ще въведем понятията монотонно растяща и монотонно намаляваща редица от събития.