Функции на две променливи - 3

Диференцуемост на функции на две променливи

1. Непрекъсната функция

Нека функцията $f(x;y)$ е дефинирана в множеството D.

Казваме, че функцията $f(x;y)$ е непрекъсната в точката $(x_0;y_0)\in D$, ако за **всяка** сходяща редица от точки $(x_n;y_n)\in D$, клоняща към $(x_0;y_0)$, съответната редица от функционални стойности $f(x_n;y_n)$ клони към $f(x_0;y_0)$.

2. Частни производни

Нека функцията $f(x;y)$ е дефинирана в множеството D и точката $(x_0;y_0)\in D$.

Ако функцията $\varphi(x)=f(x;y_0)$ е диференцуема в т. x_0, казваме, че функцията $f(x;y)$ има **частна производна по** x в т. $(x_0;y_0)$.

(Разглеждаме функцията $f(x;y)$ само по правата през $(x_0;y_0)$, успоредно на оста Ox).

Производната $\varphi'(x_0)$ се означава така

$f_x'(x_0;y_0)$ или $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)$.

Аналогично се дефинира частна производна по y, която се означава $f_y'(x_0;y_0)$ или $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)$.

3. Диференцуемост

Както знаем, ако една функция на една променлива е диференцуема, то тя е непрекъсната. Функция на две променливи може да има частни производни в една точка, но да не бъде непрекъсната. Например за функцията

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{при } x^2+y^2=0\end{cases}$$

във Функции-1 доказахме, че не е непрекъсната в т. $(0;0)$, а във Функции-2 видяхме, че $f_x'(0;0)=0$ и $f_y'(0;0)=0$.

Да разгледаме понятието производна на функция на една променлива.

Дефиниция. Ако съществува границата $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\to A$, казваме че функцията $f(x)$ е диференцуема в т. x_0.

Нека $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-A$. Тогава $\varphi(x)\to 0$. Ь

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-A \Leftrightarrow f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+(x-x_0)\varphi(x).$$

Така дефиницията за диференцуемост на функция на една променлива е еквивалентна с:

Казваме, че функцията $f(x)$ е диференцуема в т. x_0, ако съществува константа A и функция $\varphi(x)$, такава че $f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+(x-x_0)\varphi(x)$ и $\varphi(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}0$.

(Линейната функция $y=f(x_0)+A(x-x_0)$ е допирателната в т. x_0, константата A е производната на $f(x)$ в т. x_0).

Сега ще дадем аналогична дефиниция на диференцуема функция на две променливи.

Дефиниция. Казваме, че функцията $f(x;y)$ е диференцуема в т. $(x_0;y_0)$, ако съществуват две константи A и B и функция $\varphi(x,y)$, такава че

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(x-x_0)+\rho\varphi(x,y)$$

и $\varphi(x,y)\underset{\rho\to 0}{\longrightarrow}0$, където $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

Теорема 1. (Необходимо условие). Ако една функция е диференцуема в т. $(x_0;y_0)$, то съществуват частни производни и по x, и по y, и $A=f_x'(x_0;y_0)$ и $B=f_y'(x_0;y_0)$ (Докажете).

Ясно е, че ако не съществува някоя от частните производни, то функцията не е диференцуема

Теорема 2. (Достатъчно условие) Ако в околност на т. $(x_0;y_0)$ съществуват частните производни $f_x'(x;y)$ и $f_y'(x;y)$ и те са **непрекъснати в** т. $(x_0;y_0)$, функцията е $f(x;y)$ е диференцуема в т. $(x_0;y_0)$.

Линейната функция $z(x;y)=f(x_0;y_0)+f_x'(x_0;y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0;y_0)(y-y_0)$ е уравнение на равнина, допираща се до повърхнината $z=f(x;y)$ в т. $(x_0;y_0)$.

Векторът $(f_x'(x_0;y_0);f_y'(x_0;y_0))$ се нарича градиент на функцията.

Теорема 3. Ако една функция е диференцуема в $(x_0;y_0)$, тя е непрекъсната в тази точка.

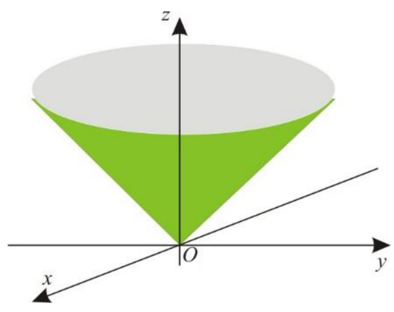
Задача 1. Изследвайте за диференцуемост в т. $(0;0)$ функцията:

а) $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$; б) $f(x;y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$;

в) $f(x;y)=\sqrt[3]{xy}$; г) $f(x;y)=\sqrt[3]{x^2y^2}$;

д) $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{при } x^2+y^2=0\end{cases}$; е) $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{при } x^2+y^2=0\end{cases}$;

ж) $f(x;y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{при } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{при } x^2+y^2=0\end{cases}$;



Решение. а) Тъй като функцията $f(x;0)=\sqrt{x^2+0^2}=|x|$ няма производна в т. $O(0;0)$, то не съществува $f_x'(0;0)$. Съгласно теорема 1 функцията не е диференцуема.

Графиката на $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$ е конична повърхнина (вж. картинката). В точката $O(0;0)$ няма допирателна равнина.

б) Пресмятаме частните производни

От $f(x;0)=\sqrt[3]{x.0}=0$ виждаме, че $f_x'(0;0)=0$

и от $f(0;y)=\sqrt[3]{0.y}=0$ намираме $f_y{}'(0;0)=0$.

Разглеждаме разликата $\rho\varphi(x;y)=f(x;y)-f(x_0;y_0)-(x-x_0)f_x{}'(x_0;y_0)-(y-y_0)f_y{}'(x_0;y_0)$:

$$\rho\varphi(x;y)=f(x;y)-f(0;0)-0.x-0.y=\sqrt[3]{xy}$$

За да бъде диференцуема функцията трябва да проверим дали $\varphi(x;y)\underset{\rho\to 0}{\longrightarrow}0$

Нека $x=\rho\cos\varphi$ и $y=\rho\sin\varphi$, $\rho\to 0$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

$$\varphi(x;y)=\frac{\sqrt[3]{xy}}{\rho}=\frac{\sqrt[3]{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}}{\rho}=\frac{\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[3]{\rho^2}}\to\infty.$$

Така функцията $\varphi(x;y)$ не клони към нула при $\rho\to 0$. Функцията не е диференцуема в т. $(0;0)$.

в) Пресмятаме частните производни

От $f(x;0)=\sqrt[3]{x^3+0^3}=x$ виждаме, че $f_x{}'(0;0)=1$

и от $f(0;y)=\sqrt[3]{0^3+y^3}=y$ намираме $f_y{}'(0;0)=1$.

Разглеждаме разликата

$$f(x;y)-f(0;0)-1.x-1.y=\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y=\rho\varphi(x;y)$$

За да бъде диференцуема функцията трябва да проверим дали $\varphi(x;y)\underset{\rho\to 0}{\longrightarrow}0$

Нека $x=\rho\cos\varphi$ и $y=\rho\sin\varphi$, $\rho\to 0$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt[3]{\rho^3\cos^3\varphi+\rho^3\sin^3\varphi}-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}=\sqrt[3]{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}-\cos\varphi-\sin\varphi=$$

$$=\sqrt[3]{\cos^3\frac{\pi}{4}+\sin^3\frac{\pi}{4}}-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt[3]{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}.2\neq 0$$

Така функцията $\varphi(x;y)$ не клони към нула при $\rho\to 0$. Следователно функцията не е диференцуема в т. $(0;0)$.

г) Пресмятаме частните производни

От $f(x;0)=\sqrt[3]{x^2.0^2}=0$ виждаме, че $f_x{}'(0;0)=0$

и от $f(0;y)=\sqrt[3]{0^2.y^2}=0$ намираме $f_y{}'(0;0)=0$.

$$\rho\varphi(x;y)=f(x;y)-f(0;0)-0.x-0.y=\sqrt[3]{x^2y^2}$$

За да бъде диференцуема функцията трябва да проверим дали $\varphi(x;y)\underset{\rho\to 0}{\longrightarrow}0$

Нека $x=\rho\cos\varphi$ и $y=\rho\sin\varphi$, $\rho\to 0$:

$$0\le\varphi(x;y)=\frac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{\rho}=\frac{\sqrt[3]{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}}{\rho}\le\frac{\sqrt[3]{\rho^4}}{\rho}=\sqrt[3]{\rho}.$$

Така от теоремата за двамата полицаи виждаме, че функцията $\varphi(x;y)$ клони към нула при $\rho\to 0$. Функцията е диференцуема в т. $(0;0)$.

д) Функцията не е непрекъсната в т. $(0;0)$, и съгласно теорема 3 не е диференцуема.

е) Пресмятаме частните производни

От $f(x;0)=\dfrac{x^2.0^2}{x^2+0^2}=0$ виждаме, че $f_x{}'(0;0)=0$

и от $f(0;y)=\dfrac{0^2.y^2}{0^2+y^2}=0$ намираме $f_y{}'(0;0)=0$.

Разглеждаме разликата

$$\rho\varphi(x;y)=f(x;y)-f(0;0)-0.x-0.y=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

За да бъде диференцуема функцията трябва да проверим дали $\varphi(x;y)\underset{\rho\to 0}{\longrightarrow}0$

Нека $x=\rho\cos\varphi$ и $y=\rho\sin\varphi$, $\rho\to 0$:

$$0\le\varphi(x;y)=\frac{x^2y^2}{\rho(x^2+y^2)}=\rho\cos^2\varphi\sin^2\varphi\le\rho.$$

Така от теоремата за двамата полицаи виждаме, че функцията $\varphi(x;y)$ клони към нула при $\rho\to 0$. Функцията е диференцуема в т. $(0;0)$.

е) Пресмятаме частните производни

От $f(x;0)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x\neq 0 \\ 0 & \text{при } x=0 \end{cases}$.

За да пресметнем $f_x{}'(0;0)$ разглеждаме диференчното частно за $f(x;0)$.

$$\frac{f(x;0)-f(0;0)}{x-0}=\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0 \qquad \begin{pmatrix}\text{показателната функция расте} \\ \text{по бързо от степенната}\end{pmatrix}$$

Следователно $f_x{}'(0;0)=0$. Аналогично намираме $f_y{}'(0;0)=0$.

Разглеждаме разликата

$$\rho\varphi(x;y)=f(x;y)-f(0;0)-0.x-0.y=e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

За да бъде диференцуема функцията трябва да проверим дали $\varphi(x;y)\underset{\rho\to 0}{\longrightarrow}0$

Нека $x=\rho\cos\varphi$ и $y=\rho\sin\varphi$, $\rho\to 0$:

$$\varphi(x;y)=\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\rho}=\frac{\frac{1}{\rho}}{e^{\frac{1}{\rho^2}}}\underset{\rho\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Тъй като $\varphi(x;y)$ клони към нула при $\rho\to 0$, функцията е диференцуема в т. $(0;0)$

Задача 2. Изследвайте за диференцуемост в точката $P(1;1)$ функцията $z(x;y)=\sqrt{3-x^2-y^2}$ (горната част на сфера).

Решение. Пресмятаме частните производни

$$z'_x(x;y)=-\frac{-2x}{2\sqrt{3-x^2-y^2}} \quad\Rightarrow\quad z'_x(1;1)=1$$

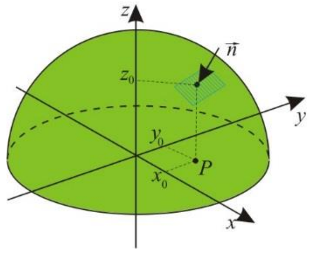
$$z'_y(x;y)=\frac{-2y}{2\sqrt{3-x^2-y^2}} \quad\Rightarrow\quad z'_y(1;1)=-1$$

Разглеждаме разликата

$$\rho\varphi(x;y)=f(x;y)-f(x_0;y_0)-(x-x_0)f_x'(x_0;y_0)-(y-y_0)f_y'(x_0;y_0),$$

където $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$:

$$\rho\varphi(x;y)=f(x;y)-f(1;1)-(-1).(x-1)-(-1).(y-1)=$$
$$=\sqrt{3-x^2-y^2}-1+(x-1)+(y-1).$$



За да докажем, че функцията е диференцуема, трябва да проверим дали $\varphi(x;y)\underset{\rho\to 0}{\longrightarrow}0$

Нека $x-1=\rho\cos\varphi$ и $y-1=\rho\sin\varphi$, $\rho\to 0$:

$$\varphi(x;y)=\frac{\sqrt{3-(1+\rho\cos\varphi)^2-(1+\rho\sin\varphi)^2}-1-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi}{\rho}=$$

(умножаваме със спрегнатия израз на числителя)

$$=\frac{3-(1+\rho\cos\varphi)^2-(1+\rho\sin\varphi)^2-(-1+\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi)^2}{\rho[\sqrt{3-(1+\rho\cos\varphi)^2-(1+\rho\sin\varphi)^2}+1-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi]}=$$

$$=\frac{-2\rho\cos\varphi-2\rho\sin\varphi-\rho^2-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin\varphi+2\rho\cos\varphi+2\rho\sin\varphi-\rho^2}{\rho[\sqrt{3-(1+\rho\cos\varphi)^2-(1+\rho\sin\varphi)^2}+1-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi]}=$$

$$=\frac{2\rho-\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\sqrt{3-(1+\rho\cos\varphi)^2-(1+\rho\sin\varphi)^2}+1-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi}.$$

От $\rho\sin\varphi\underset{\rho\to 0}{\longrightarrow}0$ и $\rho\cos\varphi\underset{\rho\to 0}{\longrightarrow}0$ следва, че $\varphi(x;y)\underset{\rho\to 0}{\longrightarrow}0$.

Следователно функцията е диференцуема в т. $(1;1)$.

Уравнението на допирателната равнина в т. $(1;1)$ е

$z=1+(x-1)+(y-1)\Leftrightarrow x+y-z=-1$.

Градиентът в точката $(1;1)$ е векторът $(-1;-1)$.

Задача 3. (За самостоятелна работа) Намерете частните производни и изследвайте за диференцуемост в точката $(0;0)$ функцията

а) $f(x;y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{при } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{при } x^2+y^2=0\end{cases}$;

б) $f(x;y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{при } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{при } x^2+y^2=0\end{cases}$.