Криволинейни интеграли

1. Криволинейни интеграли от първи род

В $\mathbb{R}^2$

Нека е дадена кривата $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, $\alpha \leq t \leq \beta$, където $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ са диференцуеми функции и нека $f(x,y)$ е непрекъсната функция, дефинирана върху Γ.

В сила е равенството

$$\int_{\Gamma} f(x,y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt$$

В $\mathbb{R}^3$

Нека е дадена кривата $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \\ z=\theta(t) \end{cases}$ $\alpha \leq t \leq \beta$, където $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\theta(t)$ са диференцуеми функции и нека $f(x,y,z)$ е непрекъсната функция, дефинирана върху Γ.

В сила е равенството

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t),\theta(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\theta'(t))^2}dt$$

Криволинейните интеграли от първи род не зависят от посоката, по която се обхожда кривата.

Приложения.

Дължина на крива. Дължината на кривата Γ е равна на $\int_{\Gamma} ds$.

Маса на линия. Ако $\rho(x,y)$ е плътността във всяка точка на кривата Γ, то масата на кривата е $\int_{\Gamma} \rho(x,y)ds$.

Криволинейни интеграли от втори род

В $\mathbb{R}^2$

Нека е дадена кривата $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, $\alpha \leq t \leq \beta$, където $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ са диференцуеми функции и нека $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ са непрекъснати функции, дефинирани върху Γ.

В сила е равенството

$$\int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt.$$

В $\mathbb{R}^3$

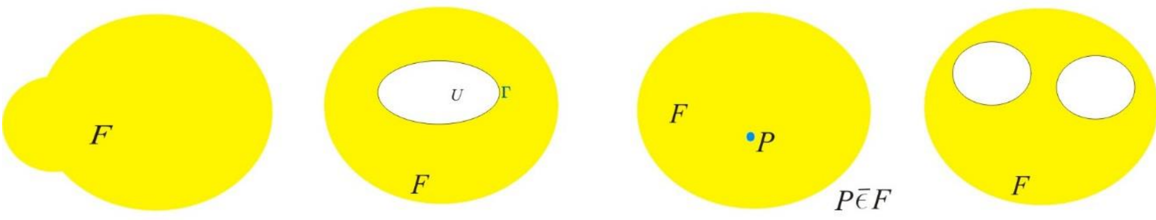
Нека е дадена кривата $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \\ z=\theta(t) \end{cases}$ $\alpha \leq t \leq \beta$, където $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\theta(t)$ са диференцуеми функции и нека $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ са непрекъснати функции, дефинирани върху Γ.

В сила е равенството

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t),\psi(t),\theta(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t),\theta(t))\psi'(t) + R(\varphi(t),\psi(t),\theta(t))\psi'(t)]dt$$

Криволинейните интеграли от втори род зависят от посоката, по която се обхожда кривата .



едносвързана   не едносвързана   не едносвързана   не едносвързана

2. Независимост от пътя на криволинейни интеграли от втори вид.

Всяка затворена крива $\Gamma : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta$, където $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ са непрекъснати, разделя равнината на две части –едната ограничена, а другата неограничена. Ограничената част се нарича вътрешна част

Една област F се нарича **едносвързана,** ако всяка подобласт U вътрешна относно произволна крива $\Gamma \subset F$, се съдържа в F .

С други думи една област е едносвързана ако в нея няма "дупки".

Точката $A(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$ се нарича **начало,** а точката $B(\varphi(\beta),\psi(\beta))$ – край на кривата $\Gamma : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta$.

Казваме, че $\int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависи от пътя, а ако стойността не интеграла е един същ за всяка крива с начало $A(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$ и $B(\varphi(\beta),\psi(\beta))$, независимо от функциите $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$.

Теорема. Необходимо и достатъчно условие за независимост на криволинейния интеграл $\int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ в **едносвързана област е** $P_y' = Q_x'$.

В този случай съществува функция $F(x,y)$, такава че $F_x'(x,y) = P(x,y)$ и $F_y'(x,y) = Q(x,y)$ и $\int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = F(B) - F(A)$.

Ако кривата $\Gamma : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta$ е затворена (т.е. началото и края и съвпадат) и върху кривата няма точки на самопресичане (т.е. точки, които се получават за различни стойности на t) и кривата се описва в посока обратна на часовниковата стрелка обикновено криволинейния интеграл се означава с

$$\oint_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,.$$

Задача 1. Да се пресметне интегралът $\int_{\Gamma} \sqrt{y}ds$, където

$$\Gamma:\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi, a > 0 \text{ (циклоида).}$$

Решение. Съгласно формулата $\int_{\Gamma} f(x,y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt$ имаме

$$\int_{\Gamma} \sqrt{y}ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{a(1-\cos t)}\sqrt{[a(t-\sin t)']^2 + [a(1-\cos t)']^2}dt =$$

$$= \sqrt{a^3}\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)}\sqrt{[(1-\cos t)]^2 + [(\sin t)]^2}dt =$$

$$= \sqrt{a^3}\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)}\sqrt{2 - 2\cos t}dt = \sqrt{2a^3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)dt = 2\pi\sqrt{2a^3}.$$

Задача 2. Да се пресметне интегралът $\int_{\Gamma} \frac{z^2 ds}{x^2 + y^2}$, където

$$\Gamma:\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \quad 0 \le t \le 2\pi, a > 0 \text{ (витлова линия).} \\ z = at \end{cases}$$

Решение. Съгласно формулата

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2 ds}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{(at)^2}{(a\cos t)^2 + (a\sin t)^2}\sqrt{[(a\cos t)']^2 + [(a\sin t)']^2 + [(at)']^2}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} t^2.a\sqrt{1+1}dt = a\frac{(2\pi)^3\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}a\pi^3}{3}\,.$$

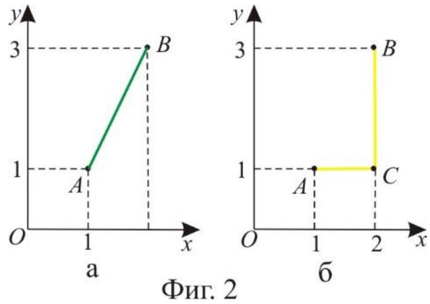
Задача 3. Намерете масата на частта от окръжност, разположена в първи квадрант, ако плътността във всяка точка е равна на ординатата на точката.

Решение. Параметричното представяне на частта от окръжността в първи квадрант е $\Gamma:\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Съгласно условието плътността е $\rho(x,y) = y$. Тогава

$$m = \int_{\Gamma} \rho(x,y)ds = \int_{\Gamma} yds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin t\sqrt{[(a\cos t)']^2 + [(a\sin t)']^2}dt =$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = a^2\,.$$

Задача 4. Дадени са точките $A(1,1)$, $B(2,3)$ и $C(2,1)$



Фиг. 2

Да са пресметне интеграла $\int\limits_{\Gamma} xydx + (y-x)dy$

а) където Γ е отсечката AB;
б) където Γ е начупената линия АСВ.

Решение. а) Уравнението на правата AB е

$\dfrac{y-1}{3-1} = \dfrac{x-1}{2-1} \Leftrightarrow y-1 = 2x-2 \Leftrightarrow y = 2x-1$.

Тогава параметричното представяне на отсечката AB е $AB:\begin{cases} x=t \\ y=2t-1 \end{cases}$, $1 \le t \le 2$

и съгласно формулата

$$\int\limits_{\Gamma} xydx + (y-x)dy = \int\limits_{1}^{2} [t(2t-1)t' + (2t-1-t)(2t)']dt =$$

$$= \int\limits_{1}^{2} [t(2t-1) + 2(t-1)]dt = \int\limits_{1}^{2} (2t^2 + t - 2)dt = \left(\frac{2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t\right)\Big|_1^2 = \frac{25}{6}.$$

б) Ще разгледаме двете отсечки $AC:\begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases}$, $1 \le t \le 2$ и $CB:\begin{cases} x=2 \\ y=t \end{cases}$, $1 \le t \le 3$

Тогава $\int\limits_{\Gamma} xydx + (y-x)dy = \int\limits_{AC} xydx + (y-x)dy + \int\limits_{CB} xydx + (y-x)dy =$

$$= \int\limits_{1}^{2} (t.1.t' + (1-t).0')dt + \int\limits_{1}^{3} (2.t.2' + (t-2)t')dt =$$

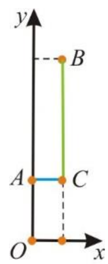
$$== \int\limits_{1}^{2} tdt + \int\limits_{1}^{3} (t-2)dt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^2 + \frac{(t-2)^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{3}{2}.$$

Задача 5. Проверете, че криволинейният интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (\sin y + y\sin x + 2x)dx + (x\cos y - \cos x - 3y^2)dy$$

не зависи от пътя и пресметнете стойността му по частично гладка крива с начало $A(0,\pi)$ и край $B(\frac{\pi}{2}, 3\pi)$.

Решение. Тъй като функцията е дефинирана в цялата равнина ,то тя е дефинирана в едносвързано множество и за да не зависи от пътя трябва да проверим, че $P_y{}' = Q_x{}'$:



Фиг. 3

$$P_y{}' = (\sin y + y\sin x + 2x)_y{}' = \cos y + \sin x$$

$$Q_x{}' = (x\cos y - \cos x - 3y^2)_x{}' = \cos y + \sin x.$$

Условието е изпълнено и следователно интегралът не зависи от пътя

Да го пресметнем може по два начина.

Първи начин. Тъй като интегралът не зависи от пътя ще изберем произволна линия – например начупената линия ACB (фиг. 3):

$$AC:\begin{cases} x=t \\ y=\pi \end{cases}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad CB:\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}, \\ y=t \end{cases} \quad \pi \le t \le 3\pi$$

Тогава $\int\limits_{\Gamma}(\sin y+y\sin x+2x)dx+(x\cos y-\cos x-3y^2)dy=$

$$=\int\limits_{AC}(\sin y+y\sin x+2x)dx+(x\cos y-\cos x-3y^2)dy+$$

$$+\int\limits_{CB}(\sin y+y\sin x+2x)dx+(x\cos y-\cos x-3y^2)dy=$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\pi+\pi\sin t+2t).1.dt+\int\limits_{\pi}^{3\pi}(\frac{\pi}{2}\cos t-3t^2)dt=$$

(в първия интеграл използвахме, че по $AC-\ y'=0$, а във втория $-x'=0$)

$$=\frac{\pi}{2}\sin\pi+\pi\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t dt+t^2\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}\int\limits_{\pi}^{3\pi}\cos t dt-t^3\Big|_{\pi}^{3\pi}=$$

$$=\pi+\frac{\pi^2}{4}-27\pi^3+\pi^3=\pi+\frac{\pi^2}{4}-26\pi^3.$$

Втори начин. Ще търсим функция $F(x,y)$, такава че $F_x'(x,y)=P(x,y)$ и $F_y'(x,y)=Q(x,y)$. Интегрираме равенство $F_x'(x,y)=P(x,y)$ при фиксирано *y*:

$$F_x'(x,y)=\sin y+y\sin x+2x \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad F(x,y)=\int(\sin y+y\sin x+2x)dx=x\sin y-y\cos x+x^2+C(y).$$

Полученото равенство диференцираме по *y* (*x* е константа):

$$F_y'(x,y)=x\cos y-\cos x+C'(y)=Q(x,y)=x\cos y-\cos x-3y^2,$$

откъдето $C'(y)=-3y^2 \quad\Rightarrow\quad C(y)=-y^3+C$.

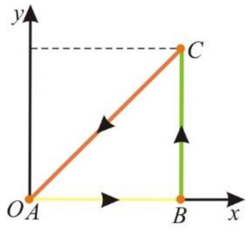
Така функцията е $F(x,y)=x\sin y-y\cos x+x^2-y^3+C$ и стойността на интеграла е

$$\int\limits_{\Gamma}(\sin y+y\sin x+2x)dx+(x\cos y-\cos x-3y^2)dy=$$

$$=F(\frac{\pi}{2},3\pi)-F(0,\pi)=(\frac{\pi^2}{4}-27\pi^3)-(-\pi-\pi^3)=\pi+\frac{\pi^2}{4}-26\pi^3.$$

Задача 5. Дадени са точките $A(0,0)$, $B(1,0)$ и $C(1,1)$

Да са пресметне интеграла $\oint\limits_{\Gamma}x\cos(y^2)dx+xydy$, където Γ е контура на триъгълника *ABC* описван в положителна посока.



Фиг. 4

Решение. Кривата Γ се състои от трите отсечки

$$AB:\begin{cases}x=t\\y=0\end{cases},\quad 0\le t\le 1,\ BC:\begin{cases}x=1\\y=t\end{cases},\quad 0\le t\le 1\ \text{ и }\ CA:\begin{cases}x=1-t\\y=1-t\end{cases},\quad 0\le t\le 1.$$

(Ако отсечката *CA* представим параметрично $CA:\begin{cases}x=t\\y=t\end{cases},\quad 0\le t\le 1$, то тя ще има начало *A* и край *C*).

Тогава

$$\oint\limits_{\Gamma}x\cos(y^2)dx+xydy=\int\limits_{AB}x\cos(y^2)dx+xydy+\int\limits_{BC}x\cos(y^2)dx+xydy+\int\limits_{CA}x\cos(y^2)dx+xydy=$$

$$=\int_0^1 t\cos 0dt+\int_0^1 tdt+\int_0^1 (1-t)\cos(1-t)^2(-1)+(1-t)(1-t)(-1)dt=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1 \cos(1-t)^2 d(1-t)^2+\int_0^1 (1-t)^2 d(1-t)=$$

$$=1+\frac{1}{2}\sin(1-t)^2\Big|_0^1+\frac{1}{3}(1-t)^3\Big|_0^1=1-\frac{1}{2}\sin 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\sin 1.$$

Забележка. Този резултат показва, че интегралът зависи от пътя. в противен случай той трябва да е равен на 0.

За домашна работа

Задача 6. Проверете, че криволинейният интеграл

$$\int_\Gamma (e^y+ye^{-x}+2xy)dx+(xe^y-e^{-x}+x^2)dy$$

не зависи от пътя и пресметнете стойността му по частично гладка крива с начало $A(0,-1)$ и край $B(3,0)$.