Фундаментална система решения

Люба Конова

Ноември 2020

Задача 1: Намерете ранга на системата вектори и размерността на линейното пространство, породено от тяхната линейна обвивка.
а) $a_1 = (-1, 4, -3, -2),\ a_2 = (3, -7, 5, 3),\ a_3 = (3, -2, 1, 0),\ a_4 = (-4, 1, 0, 1)$
б)

$$\begin{aligned} a_1 &= (\lambda + 1, \lambda, \lambda, ..., \lambda, \lambda) \\ a_2 &= (\lambda, \lambda + \frac{1}{2}, \lambda, ..., \lambda, \lambda) \\ a_3 &= (\lambda, \lambda, \lambda + \frac{1}{3}, ..., \lambda, \lambda) \\ &... \\ a_n &= (\lambda, \lambda, \lambda, ..., \lambda, \lambda + \frac{1}{n}) \end{aligned}$$

1 Фундаментална система решения. Теория:

Когато решаваме една хомогенна система от вида:

$$\left| \begin{array}{c} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + ... + a_{1n}.x_n = 0 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + ... + a_{2n}.x_n = 0 \\ ... \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + ... + a_{mn}.x_n = 0 \end{array} \right.$$

ние си задаваме въпроса: кое n-мерно пространство отговаря на всичките m изисквания. Знаем, че наредената n-орка (0,0,0,..,0) е решение, така както векторът с нулеви координати е част от всяко линейно пространство. Имаме два случая:

- Имаме само едно решение на тази система. Геометричният смисъл на това съждение е, че сечението на m-те линейни пространства, получени със съответните координати, е единствено точката 0.
  Пример: Взимаме уравненията $2x + 3y = 0$ и $4x + 7y = 0$ (това са уравнения на прави). Слагайки ги в хомогенна система, ние търсим техните пресечни точки. Получаваме единствено (0,0), тоест сечението

им е празното линейно пространство (или началото на координатната система)

- Ако получим различно от нулевото решение, то сечението на нашите m линейни пространства, зададени с координати $a_{i1}, a_{i2}, ...a_{in}$, е непразно-тоест е права, равнина, тримерно, четиримерно или т.н пространство. **Пример:** Ако разгледаме уравненията $2x + 3y = 0$ и $4x + 6y = 0$, тогава нашата ХС ще има решение (p, -$\frac{2p}{3}$),което поражда едномерно пространство.

Задача 2: Да се намери фундаментална система решения на ХС:

$$\left|\begin{array}{c} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{c} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ -3x_1 - 8x_2 - 4x_3 + 13x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{c} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 10x_3 + 5x_4 = 0 \\ 6x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 9x_4 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{c} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_5 = 0 \end{array}\right.$$

Задача 3: Да се намери ХС , пространството от решение на която съвпада с $\mathbb{W} = l(a_1, a_2, ...)$
а) $a_1 = (2, 1, -1, 3), a_2 = (3, 1, 2, 1), a_3 = (1, 1, -4, 5)$
б) $a_1 = (1, 2, -1, 1), a_2 = (-3, -5, 2, 1), a_3 = (1, 2, 3, 4)$
в) $a_1 = (2, 3, 1, 2, 4), a_2 = (3, 4, 2, 3, -1), a_3 = (6, 2, 1, -2, -4)$
г) $a_1 = (1, 1, -2, 2), a_2 = (2, 1, 3, -2), a_3 = (3, 4, 5, 6), a_4 = (3, 6, 9, 12)$

Задача 4: В линейното пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени векторите $a_1 = (25, 0, -5, -10), a_2 = (3, 4, 9, -2), a_3 = (1, -2, -5, 0), a_4 = (-3, 1, 3, 1)$. Нека $U = l(a_1, a_2, a_3, a_4)$, а W е множеството от решенията на хомогенната система:

$$\left|\begin{array}{c} 17x_1 - 9x_2 - 13x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_3 + 4x_4 = 0 \\ 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{array}\right.$$

Да се намерят базиси на $\mathbb{U}, \mathbb{W}, \mathbb{U}+\mathbb{W}$ и $\mathbb{U}\cap\mathbb{W}$.

Задача 5. Нека в линейното пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени $\mathbb{W} = l(a_1, a_2, a_3)$, където:
$a_1 = (1, 2, 3, 4), a_2 = (3, 2, 7, 6), a_3 = (1, -2, 1, -2)$
и пространството от решения $\mathbb{U}$ на линейната хомогенна система:

$$\left| \begin{array}{r} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{array} \right.$$

Намерете базиси на пространствата $\mathbb{U}+\mathbb{W}$ и $\mathbb{U}\cap\mathbb{W}$.

2 Важни изводи:

1. Имаме, че dim (U+V)= dim U + dim V - dim(U∩V);
2. Размерността на пространството, което е решение на хомогенна система A, е с размерност, равна на n- rk(A);