Лекция №8

Семантики на рекурсивните програми

В тази глава ще въведем един много прост учебен език за функционално програмиране — езикът REC. За този език ще дефинираме операционна и денотационна семантика в двете версии — с предаване на параметрите по стойност и по име. Тук ще докажем и един от централните резултати в курса, а именно, че операционният и денотационният подход към рекурсивните програми водят до един и същ резултат.

3.1 Езикът REC

3.1.1 Синтаксис

Най-напред да разгледаме един пример за програма на този език:

$$
\begin{array}{lcl}
F(X,1) & & \texttt{where} \\
F(X,Y) & = & \texttt{if}\ X == 0\ \ \texttt{then}\ \ Y\ \ \texttt{else}\ \ F(X-1, G(X,Y)) \\
G(X,Y) & = & \texttt{if}\ X == 0\ \ \texttt{then}\ \ 0\ \ \texttt{else}\ \ G(X-1,Y)+Y
\end{array}
$$

Елементите на езика REC включват:

- по една *константа* n за всяко $n \in \mathbb{N}$
- изброимо много *обектови* променливи $X_1, X_2, X_3, \ldots$
- изброимо много *функционални* променливи $F_1, F_2, F_3, \ldots$
- *базисни операции* op от множеството $\{+, *, -, <, ==, ||, \&\&, \ldots\}$. Ще предполагаме, че всички базисни операции са на два аргумента и това е единствено с цел да си спестим писането на индекси в доказателствата по-нататък.

Всяка функционална променлива F_i притежава своя *местност* (или *арност*) — естествено число, определящо броя на аргументите ѝ. Когато формулираме дефиниции, твърдения и пр., обикновено експлицитно ще казваме какъв е този брой, ако контекстът не го подсказва. Има и друг начин — да приемем, че за всяко i имаме цяла редица от променливи $F_i^1, F_i^2, \ldots, F_i^m, \ldots$, като всяка от променливите F_i^m е на m аргумента. Това, разбира се, ще е за сметка на претоварения запис, който ние се стремим да избягваме.

Определение 3.1. *Програмен терм* (или само *терм*) τ в езика *REC* дефинираме по следния начин:

$$\tau ::= n \;\mid\; X_i \mid\; (\tau \; op \; \tau) \mid\; \texttt{if } \tau \texttt{ then } \tau \texttt{ else } \tau \;\mid\; F_i(\tau, \ldots, \tau)$$

Да отбележим че зад горната Бекус-Наурова форма всъщност се крие следното индуктивно определение, което ще използваме в следващите дефиниции и доказателства:

1) За всяко $n \in \mathbb{N}$, константата n е терм.

2) За всяко $i = 1, 2, \ldots$, обектовата променлива X_i е терм.

3) Ако τ_1 и τ_2 са термове, а op е базисна операция, то $(\tau_1 \; op \; \tau_2)$ е терм.

4) Ако τ_1, τ_2 и τ_3 са термове, то **if** τ_1 **then** τ_2 **else** τ_3 е терм.

5) Ако F_i е m-местна функционална променлива, а $\tau_1, \ldots, \tau_m$ са термове, то $F_i(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ е терм.

Примери. $5, \quad X_1, \quad 5X_1, \quad F_1(X_1, 5), \quad \texttt{if } X_1 > 5 \texttt{ then } X_2 \texttt{ else } F_1(X_2)$

По-нататък ще пишем $\tau(X_1, \ldots, X_n, F_1, \ldots, F_k)$, за да означим, че променливите на терма τ са измежду $X_1, \ldots, X_n, F_1, \ldots, F_k$.

3.1.2 Програми на езика *REC*

Определение 3.2. *Програма на езика REC* (или *рекурсивна програма*) е синтактичен обект от следния вид:

$$\tau_0(X_1, \ldots, X_n, F_1, \ldots, F_k) \quad \texttt{where} \qquad \textit{глава на R}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} F_1(X_1, \ldots, X_{m_1}) & = & \tau_1(X_1, \ldots, X_{m_1}, F_1, \ldots, F_k) \\ \vdots & & \\ F_k(X_1, \ldots, X_{m_k}) & = & \tau_k(X_1, \ldots, X_{m_k}, F_1, \ldots, F_k) \end{array}\right\} \quad \textit{тяло на R}$$

където $\tau_0, \ldots, \tau_k$ са програмни термове.

Терма $\tau_0(X_1, \ldots, X_n, F_1, \ldots, F_k)$ ще наричаме *глава* на програмата, а следващите k на брой равенства определят *тялото* на програмата.

Ще казваме, че термът τ_i задава *дефиницията* (или декларацията) на i-тата функционална променлива F_i. Всяка функционална променлива участва със своята дефиниция в програмата. На нея можем да гледаме като на система от k уравнения с k неизвестни — функционалните променливи на програмата.

Една програма можем да си представяме и в следния по-симетричен вид:

$$\begin{aligned}
F_0(X_1, \ldots, X_n) \quad &= \quad \tau_0(X_1, \ldots, X_n, F_1, \ldots, F_k) \\
F_1(X_1, \ldots, X_{m_1}) \quad &= \quad \tau_1(X_1, \ldots, X_{m_1}, F_1, \ldots, F_k) \\
&\vdots \\
F_k(X_1, \ldots, X_{m_k}) \quad &= \quad \tau_k(X_1, \ldots, X_{m_k}, F_1, \ldots, F_k)
\end{aligned}$$

като приемаме, че F_0 е *главната функция* (main function). Забележете, обаче, че симетрията не е пълна — в τ_0 не участва функционалната променлива F_0.

Идеята е, грубо казано, че тялото на програмата

$$\begin{aligned}
F_1(X_1, \ldots, X_{m_1}) \quad &= \quad \tau_1(X_1, \ldots, X_{m_1}, F_1, \ldots, F_k) \\
&\vdots \\
F_k(X_1, \ldots, X_{m_k}) \quad &= \quad \tau_k(X_1, \ldots, X_{m_k}, F_1, \ldots, F_k)
\end{aligned}$$

определя k на брой функции $f_1, \ldots, f_k$ (в смисъл, който ще уточняваме по-нататък), и тези функции, заместени в τ_0, задават n-местната функция, която тази програма пресмята.

Да определим термовете τ_i в примерната програма, с която започнахме:

$$\overbrace{F_1(X_1, 1)}^{\tau_0(X_1, F_1)} \qquad \texttt{where}$$

$$F_1(X_1, X_2) \; = \; \underbrace{\texttt{if } X_1 == 0 \;\; \texttt{then} \;\; X_2 \;\; \texttt{else} \;\; F_1(X_1 - 1, F_2(X_1, X_2))}_{\tau_1(X_1, X_2, F_1, F_2)}$$

$$F_2(X_1, X_2) \; = \; \underbrace{\texttt{if } X_1 == 0 \;\; \texttt{then} \;\; 0 \;\; \texttt{else} \;\; F_2(X_1 - 1, X_2) + X_2}_{\tau_2(X_1, X_2, F_1, F_2)}$$

Да отбележим, че някои от термовете могат да имат фиктивни променливи, каквато е например F_1 в терма τ_2. За нас ще е важно да си представяме τ_1 и τ_2 като термове *и на двете* променливи F_1 и F_2, за да можем да съставим коректна *система*, която съответства на рекурсивната програма. За да определим тази система, първо ще трябва да определим понятието оператор, зададен чрез терм, или *термален оператор*.

3.2 Денотационна семантика с предаване на параметрите по стойност

3.2.1 Термални оператори

Нека $\tau(X_1, \dots, X_n, F_1, \dots, F_k)$ е произволен терм, в който всяка от функционалните променливи F_i е на m_i аргумента, $1 \leq i \leq k$. За да зададем *стойност* на τ, фиксираме n на брой естествени числа $x_1, \dots, x_n$, с които да се заместят обектовите променливи $X_1, \dots, X_n$ и k на брой функции $f_1 \in \mathcal{F}_{m_1}, \dots, f_k \in \mathcal{F}_{m_k}$ — за функционалните променливи $F_1, \dots, F_k$.

Стойността на терма τ в точката $(x_1, \dots, x_n, f_1, \dots, f_k)$ ще означаваме така:

$$\tau(x_1, \dots, x_n, f_1, \dots, f_k), \text{ или за по-кратко } - \ \tau(\bar{x}, \bar{f}).$$

Дефиницията на $\tau(\bar{x}, \bar{f})$ е с индукция по построението на терма τ:

Определение 3.3. 1) Ако τ е константата n, то $\tau(\bar{x}, \bar{f}) = n$.

2) Ако τ е обектовата променлива X_i, то $\tau(\bar{x}, \bar{f}) = x_i$.

3) Ако τ е от вида $(\tau_1 \ op \ \tau_2)$, то $\tau(\bar{x}, \bar{f}) \simeq \tau_1(\bar{x}, \bar{f}) \ op \ \tau_2(\bar{x}, \bar{f})$.

4) Ако τ е от вида **if** τ_1 **then** τ_2 **else** τ_3, то

$$\tau(\bar{x}, \bar{f}) \simeq \begin{cases} \tau_2(\bar{x}, \bar{f}), & \text{ако } \ \tau_1(\bar{x}, \bar{f}) > 0 \\ \tau_3(\bar{x}, \bar{f}), & \text{ако } \ \tau_1(\bar{x}, \bar{f}) \simeq 0 \\ \neg !, & \text{ако } \ \neg ! \tau_1(\bar{x}, \bar{f}). \end{cases}$$

5) Ако τ е от вида $F_i(\tau_1, \dots, \tau_{m_i})$, то $\tau(\bar{x}, \bar{f}) \simeq f_i(\tau_1(\bar{x}, \bar{f}), \dots, \tau_{m_i}(\bar{x}, \bar{f}))$.

От дефиницията на стойност на израз от вида **if** τ_1 **then** τ_2 **else** τ_3 се вижда, че числовата константа 0 интерпретираме като булевата константа $false$, а всички положителни числа отъждествяваме с $true$. Това правим с цел да си спестим въвеждането на допълнителен булев тип. Разбира се, в задачите условията ще бъдат предикати ($=$, $\leq$, $\geq$, $\dots$), които връщат булеви стойности.

Да вземем отново произволен терм $\tau(X_1, \dots, X_n, F_1, \dots, F_k)$, в който всяка от променливите F_i е на m_i аргумента. По един естествен начин този терм определя оператор Γ_τ, който ще наричаме *термален оператор*. Този оператор ще е на k на брой аргумента $f_1, \dots, f_k$ (които са с местност $m_1, \dots, m_k$), а резултатът $\Gamma_\tau(f_1, \dots, f_k)$ ще е n-местна функция. Ето точното определение:

Определение 3.4. Нека $\tau(X_1, \dots, X_n, F_1, \dots, F_k)$ е терм, в който всяка функционална променлива F_i е на m_i аргумента, $1 \le i \le k$. *Термалният оператор* $\Gamma_\tau : \mathcal{F}_{m_1} \times \dots \times \mathcal{F}_{m_k} \longrightarrow \mathcal{F}_n$ дефинираме както следва:

$$\Gamma_\tau(f_1, \dots, f_k)(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau(x_1, \dots, x_n, f_1, \dots, f_k) \tag{3.1}$$

за всички $f_1 \in \mathcal{F}_{m_1}, \dots f_k \in \mathcal{F}_{m_k}$ и $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$.

Нашата близка цел бъде да докажем, че всеки термален оператор е компактен. Да напомним дефинициите за монотонност и компактност на оператор на много променливи от раздел 1.2.4.

Операторът $\Gamma : \mathcal{F}_{m_1} \times \dots \times \mathcal{F}_{m_k} \longrightarrow \mathcal{F}_n$ е *монотонен*, ако е вярно, че

$$f_1 \subseteq g_1 \ \& \ \dots \ \& \ f_k \subseteq g_k \implies \Gamma(f_1, \dots, f_k) \subseteq \Gamma(g_1, \dots, g_k)$$

за всички $(f_1, \dots, f_k) \in \mathcal{F}_{m_1} \times \dots \times \mathcal{F}_{m_k}$ и $(g_1, \dots, g_k) \in \mathcal{F}_{m_1} \times \dots \times \mathcal{F}_{m_k}$.

Операторът $\Gamma : \mathcal{F}_{m_1} \times \dots \times \mathcal{F}_{m_k} \longrightarrow \mathcal{F}_n$ наричаме *компактен*, ако за всяка $f_1 \in \mathcal{F}_{m_1}, \dots, f_k \in \mathcal{F}_{m_k}$, за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$ и за всяко $y \in \mathbb{N}$ е в сила еквивалентността:

$$\begin{aligned}\Gamma(f_1, \dots, f_k)(\bar{x}) \simeq y \iff & \exists \theta_1 \dots \exists \theta_k (\theta_1 \subseteq f_1 \ \& \ \dots \ \& \ \theta_k \subseteq f_k \ \& \\ & \theta_1, \dots, \theta_k \text{ са крайни } \& \ \Gamma(\theta_1, \dots, \theta_k)(\bar{x}) \simeq y).\end{aligned}$$

От *Твърдение* 1.2 от глава 1 знаем, че един оператор е компактен точно когато е монотонен и краен. По определение операторът Γ е *краен*, ако е в сила правата посока на условието за компактност:

$$\begin{aligned}\Gamma(f_1, \dots, f_k)(\bar{x}) \simeq y \implies & \exists \theta_1 \dots \exists \theta_k (\theta_1 \subseteq f_1 \ \& \ \dots \ \& \ \theta_k \subseteq f_k \ \& \\ & \theta_1, \dots, \theta_k \text{ са крайни } \& \ \Gamma(\theta_1, \dots, \theta_k)(\bar{x}) \simeq y).\end{aligned}$$

По-надолу ще пишем $\bar{f} \subseteq \bar{g}$ като съкращение за $f_1 \subseteq g_1 \ \& \ \dots \ \& \ f_k \subseteq g_k$.

Твърдение 3.1. За всеки терм τ операторът Γ_τ е монотонен.

Доказателство. Отново ще предполагаме, че всяка от функционалните променливи F_i на терма $\tau(X_1, \dots, X_n, F_1, \dots, F_k)$ е на m_i аргумента, $1 \le i \le k$.

Избираме вектори от функции $\bar{f}$ и $\bar{g}$ от $\mathcal{F}_{m_1} \times \dots \times \mathcal{F}_{m_k}$, такива че $\bar{f} \subseteq \bar{g}$. Трябва да покажем, че $\Gamma_\tau(\bar{f}) \subseteq \Gamma_\tau(\bar{g})$. Последното означава да покажем, че за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$ и y е изпълнена импликацията:

$$\Gamma_\tau(\bar{f})(\bar{x}) \simeq y \implies \Gamma_\tau(\bar{g})(\bar{x}) \simeq y.$$

Наистина, да фиксираме $\bar{x}$ и y и да предположим, че $\Gamma_\tau(\bar{f})(\bar{x}) \simeq y$. За да покажем, че и $\Gamma_\tau(\bar{g})(\bar{x}) \simeq y$, ще използваме индукция по построението на терма τ.

1) Ако τ е константата n, то $\Gamma_\tau(\bar{f})(\bar{x}) \overset{\text{деф } \Gamma_\tau}{\simeq} \tau(\bar{x}, \bar{f}) \overset{\text{деф}}{=} n = \Gamma_\tau(\bar{g})(\bar{x})$.

2) Ако τ е обектовата променлива X_i за някое $1 \leq i \leq n$, то

$$\Gamma_\tau(\bar{f})(\bar{x}) \overset{\text{деф } \Gamma_\tau}{\simeq} \tau(\bar{x}, \bar{f}) \overset{\text{деф}}{=} x_i = \Gamma_\tau(\bar{g})(\bar{x}).$$

3) Нека τ е от вида $(\tau_1 \ op\ \tau_2)$. Тогава

$$\Gamma_\tau(\bar{f})(\bar{x}) \overset{\text{деф } \Gamma_\tau}{\simeq} \tau(\bar{x}, \bar{f}) \overset{\text{деф}}{\simeq} \tau_1(\bar{x}, \bar{f}) \ op\ \tau_2(\bar{x}, \bar{f}) \simeq \Gamma_{\tau_1}(\bar{f})(\bar{x}) \ op\ \Gamma_{\tau_2}(\bar{f})(\bar{x}).$$

Ние имаме $\Gamma_\tau(\bar{f})(\bar{x}) \simeq y$, т.е.

$$\Gamma_{\tau_1}(\bar{f})(\bar{x}) \ op\ \Gamma_{\tau_2}(\bar{f})(\bar{x}) \simeq y.$$

Оттук, съгласно дефиницията на суперпозиция, *трябва* да съществуват естествени числа z_1 и z_2, такива че

$$\Gamma_{\tau_1}(\bar{f})(\bar{x}) \simeq z_1, \ \Gamma_{\tau_2}(\bar{f})(\bar{x}) \simeq z_2 \quad \text{и} \quad z_1 \ op\ z_2 \simeq y.$$

Но термовете τ_1 и τ_1 са построени *преди* τ и за тях индукционната хипотеза е в сила. Следователно $\Gamma_{\tau_1}(\bar{g})(\bar{x}) \simeq z_1$ и $\Gamma_{\tau_2}(\bar{g})(\bar{x}) \simeq z_2$, откъдето

$$\Gamma_\tau(\bar{g})(\bar{x}) \simeq \Gamma_{\tau_1}(\bar{g})(\bar{x}) \ op\ \Gamma_{\tau_1}(\bar{g})(\bar{x}) \overset{\text{и.х.}}{\simeq} z_1 \ op\ z_2 \simeq y.$$

4) Нека τ е от вида `if` τ_1 `then` τ_2 `else` τ_3.

Имаме по допускане, че $\Gamma_\tau(\bar{f})(\bar{x}) \simeq y$. Съгласно дефиницията на стойност на такъв терм, са възможни два случая:

1 сл. $\Gamma_{\tau_1}(\bar{f})(\bar{x}) > 0$ и $\Gamma_{\tau_2}(\bar{f})(\bar{x}) \simeq y$ или

2 сл. $\Gamma_{\tau_1}(\bar{f})(\bar{x}) \simeq 0$ и $\Gamma_{\tau_3}(\bar{f})(\bar{x}) \simeq y$.

Ще се спрем само на първия случай, тъй като другият е аналогичен на него. Понеже τ_1 и τ_2 са построени *преди* текущия терм τ, то по индуктивната хипотеза ще имаме, че $\Gamma_{\tau_1}(\bar{g})(\bar{x}) > 0$ и $\Gamma_{\tau_2}(\bar{g})(\bar{x}) \simeq y$, или все едно — $\tau_1(\bar{x}, \bar{g}) > 0$ и $\tau_2(\bar{x}, \bar{g}) \simeq y$. Но тогава съгласно дефиницията на стойност на условен терм ще е вярно, че $\tau(\bar{x}, \bar{g}) \simeq y$, или преписано чрез термалния оператор — $\Gamma_\tau(\bar{g})(\bar{x}) \simeq y$.

5) Последната възможност за τ е да е от вида $F_i(\tau_1, \dots, \tau_{m_i})$. Тук

$$\Gamma_\tau(\bar{f})(\bar{x}) \overset{\text{деф } \Gamma_\tau}{\simeq} \tau(\bar{x}, \bar{f}) \overset{\text{деф}}{\simeq} f_i(\tau_1(\bar{x}, \bar{f}), \dots, \tau_{m_i}(\bar{x}, \bar{f}))$$
$$\simeq f_i(\Gamma_{\tau_1}(\bar{f})(\bar{x}), \dots, \Gamma_{\tau_{m_i}}(\bar{f})(\bar{x})).$$

По условие $\Gamma_\tau(\bar{f})(\bar{x}) \simeq y$, и следователно

$$f_i(\Gamma_{\tau_1}(\bar{f})(\bar{x}), \dots, \Gamma_{\tau_{m_i}}(\bar{f})(\bar{x})) \simeq y.$$

От дефиницията за суперпозиция имаме, че *трябва* да съществуват естествени числа $z_1, \ldots, z_{m_i}$, такива че

$$\Gamma_{\tau_1}(\bar{f})(\bar{x}) \simeq z_1, \ldots,\ \Gamma_{\tau_{m_i}}(\bar{f})(\bar{x}) \simeq z_{m_i} \text{ и } f_i(z_1, \ldots, z_{m_i}) \simeq y.$$

Индукционната хипотеза за термовете $\tau_1, \ldots, \tau_{m_i}$ ни дава

$$\Gamma_{\tau_1}(\bar{g})(\bar{x}) \simeq z_1, \ldots,\ \Gamma_{\tau_{m_i}}(\bar{g})(\bar{x}) \simeq z_{m_i}.$$

Тук вземаме предвид, че по условие $f_i \subseteq g_i$ (впрочем, това е единственото място, където използваме, че $\bar{f} \subseteq \bar{g}$). Тогава от $f_i(z_1, ..., z_{m_i}) \simeq y$ ще получим, че и $g_i(z_1, \ldots, z_{m_i}) \simeq y$. Следователно общо ще имаме:

$$\Gamma_{\tau_1}(\bar{g})(\bar{x}) \simeq z_1, \ldots,\ \Gamma_{\tau_{m_i}}(\bar{g})(\bar{x}) \simeq z_{m_i} \text{ и } g_i(z_1, \ldots, z_{m_i}) \simeq y.$$

Оттук

$$\Gamma_{\tau}(\bar{g})(\bar{x}) \simeq g_i(\Gamma_{\tau_1}(\bar{g})(\bar{x}), \ldots, \Gamma_{\tau_{m_i}}(\bar{g})(\bar{x})) \simeq y.$$

$\square$

Твърдение 3.2. За всеки терм τ операторът Γ_τ е краен.

Доказателство. За да си спестим писането на двойни индекси нека приемем, че τ има само две функционални променливи F_1 и F_2, всяка от които е на аргументи m_1 и m_2, т.е. τ е от вида $\tau(X_1, \ldots, X_n, F_1, F_2)$.

Да вземем произволни $f \in \mathcal{F}_{m_1}, g \in \mathcal{F}_{m_2}, \bar{x} \in \mathbb{N}^n$ и $y \in \mathbb{N}$ и да приемем, че

$$\Gamma_\tau(f, g)(\bar{x}) \simeq y.$$

Трябва да покажем, че съществуват крайни функции $\theta \subseteq f$ и $\delta \subseteq g$, такива че

$$\Gamma_\tau(\theta, \delta)(\bar{x}) \simeq y.$$

Отново ще разсъждаваме с индукция, която следва построението на τ.

1) Ако τ е константата n, то

$$\Gamma_\tau(f, g)(\bar{x}) \ \stackrel{\text{деф } \Gamma_\tau}{\simeq}\ \tau(\bar{x}, f, g) \ = \ n$$

и стойността n очевидно не зависи от f и g. Тук бихме могли да изберем $\theta = \emptyset^{(m_1)}$ и $\delta = \emptyset^{(m_2)}$. И двете функции са крайни, подфункции са на f и g и за тях също е изпълнено

$$\Gamma_\tau(\theta, \delta)(\bar{x}) \ = \ n.$$

2) Случаят $\tau = X_i$ е аналогичен на горния, защото $\Gamma_\tau(f, g)(\bar{x}) = x_i$ и тази стойност отново не зависи от f и g.

3) Нека τ е от вида $(\tau_1 \; op \; \tau_2)$. Следователно

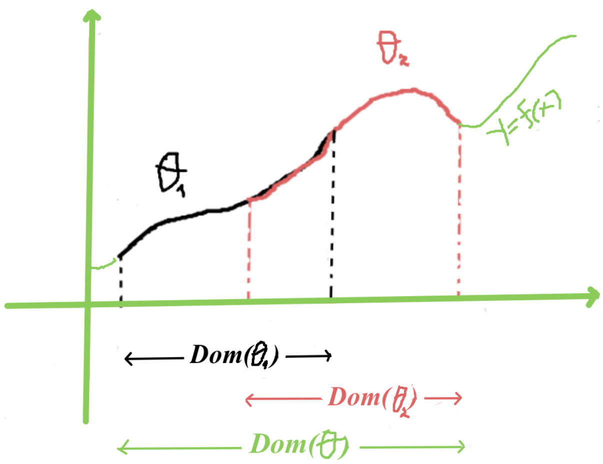
$$\Gamma_\tau(f,g)(\bar{x}) \;\simeq\; \Gamma_{\tau_1}(f,g)(\bar{x}) \; op \; \Gamma_{\tau_2}(f,g)(\bar{x}) \simeq y.$$

Нека z_1 и z_2 са такива, че:

$$\Gamma_{\tau_1}(f,g)(\bar{x}) \simeq z_1, \; \Gamma_{\tau_2}(f,g)(\bar{x}) \simeq z_2 \quad \text{и} \quad z_1 \; op \; z_2 \;\simeq y.$$

От индукционната хипотеза за τ_1 и τ_2 следва, че съществуват крайни функции $\theta_1 \subseteq f, \; \delta_1 \subseteq g, \; \theta_2 \subseteq f$ и $\delta_2 \subseteq g$ такива че

$$\Gamma_{\tau_1}(\theta_1, \delta_1)(\bar{x}) \simeq z_1 \quad \text{и} \quad \Gamma_{\tau_2}(\theta_2, \delta_2)(\bar{x}) \simeq z_2.$$



Да положим

$$\theta := \; \theta_1 \; \cup \; \theta_2 \quad \text{и} \quad \delta := \; \delta_1 \; \cup \; \delta_2.$$

Тук имаме предвид, че θ и δ са функциите, чиито графики са *обединение* на графиките на θ_1, θ_2 и δ_1, δ_2, съответно.

Тъй като $G_{\theta_1} \subseteq G_f$ и $G_{\theta_2} \subseteq G_f$, то $G_{\theta_1} \cup G_{\theta_2} \subseteq G_f$, т.е. $G_\theta \subseteq G_f$. Последното включване означава, че θ е подфункция на f, като разбира се, θ отново е крайна функция. По същия начин се вижда, че и δ е крайна подфункция на g.

Сега разсъждението продължава така: от индукционната хипотеза за τ_1 имаме, че $\Gamma_{\tau_1}(\theta_1, \delta_1)(\bar{x}) \simeq z_1$. Освен това очевидно $\theta_1 \subseteq \theta$ и $\delta_1 \subseteq \delta$. Но от предишното твърдение имаме, че Γ_{τ_1} е монотонен, и значи и $\Gamma_{\tau_1}(\theta, \delta)(\bar{x}) \simeq z_1$. Аналогично показваме, че $\Gamma_{\tau_2}(\theta, \delta)(\bar{x}) \simeq z_2$. Като отчетем и факта, че $z_1 \; op \; z_2 \;\simeq\; y$, получаваме общо

$$\Gamma_\tau(\theta, \delta)(\bar{x}) \;\simeq\; \Gamma_{\tau_1}(\theta, \delta)(\bar{x}) \; op \; \Gamma_{\tau_2}(\theta, \delta)(\bar{x}) \;\simeq\; z_1 \; op \; z_2 \;\simeq\; y.$$

4) Когато τ е от вида **if** τ_1 **then** τ_2 **else** τ_3, разсъжденията са много подобни на горните.

5) Остана случаят, при който τ започва с функционална променлива. Нека за определеност това е F_1, т.е. τ е $F_1(\tau_1, \dots, \tau_{m_1})$. В този случай

$$\Gamma_\tau(f,g)(\bar{x}) \simeq f(\Gamma_{\tau_1}(f,g)(\bar{x}), \dots, \Gamma_{\tau_{m_1}}(f,g)(\bar{x})).$$

Ние приехме, че

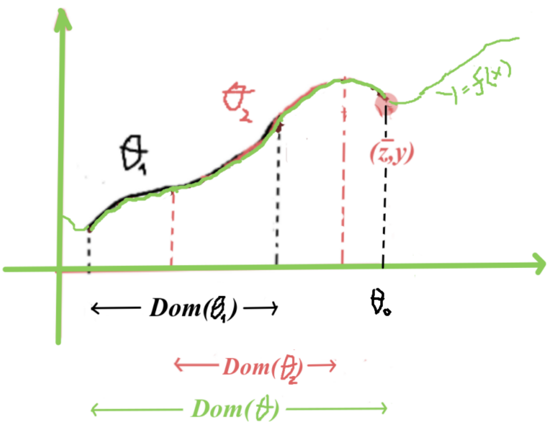
$$f(\Gamma_{\tau_1}(f,g)(\bar{x}), \dots, \Gamma_{\tau_{m_i}}(f,g)(\bar{x})) \simeq y,$$

откъдето следва, че съществуват $z_1, \dots, z_{m_1}$, такива че

$$\Gamma_{\tau_1}(f,g)(\bar{x}) \simeq z_1, \ \dots \ , \Gamma_{\tau_{m_1}}(f,g)(\bar{x}) \simeq z_{m_1} \quad \text{и} \quad f(z_1, \dots, z_{m_1}) \simeq y.$$

Прилагайки индукционното предположение за всеки от операторите $\Gamma_{\tau_1}, \dots, \Gamma_{\tau_{m_1}}$, получаваме, че съществуват крайни функции $\theta_1 \subseteq f, \ \delta_1 \subseteq g, \ \dots \ , \theta_{m_1} \subseteq f, \ \delta_{m_1} \subseteq g$, такива че

$$\Gamma_{\tau_1}(\theta_1, \delta_1)(\bar{x}) \simeq z_1, \ \dots \ , \Gamma_{\tau_{m_1}}(\theta_{m_1}, \delta_{m_1})(\bar{x}) \simeq z_{m_1}. \tag{3.2}$$



Крайните функции θ и δ, които искаме да конструираме, избираме почти както при случай 3) по-горе:

$$\theta := \underline{\theta_0} \cup \theta_1 \cup \dots \cup \theta_{m_1} \quad \text{и} \quad \delta := \delta_1 \cup \dots \cup \delta_{m_1}.$$

Разликата е в това, че към θ сме добавили още една крайна функция θ_0. Това е точно функцията с графика $\{(z_1, \dots, z_{m_1}, y)\}$. Условието $f(z_1, \dots, z_{m_1}) \simeq y$ означава точно, че $\theta_0 \subseteq f$, което заедно с

$$\theta_1 \subseteq f, \ \dots \ , \theta_{m_1} \subseteq f$$

ни дава общо $\theta \subseteq f$. Разбира се, имаме и включването $\delta \subseteq g$.

От избора на θ и δ се вижда още, че

$$\theta_1 \subseteq \theta, \dots, \theta_{m_1} \subseteq \theta \quad \text{и} \quad \delta_1 \subseteq \delta, \dots, \delta_{m_1} \subseteq \delta.$$

Оттук, като вземем предвид монотонността на операторите $\Gamma_{\tau_1}, \dots, \Gamma_{\tau_{m_1}}$ и равенствата (4.18), получаваме

$$\Gamma_{\tau_1}(\theta, \delta)(\bar{x}) \simeq z_1, \ \dots \ , \Gamma_{\tau_{m_1}}(\theta, \delta)(\bar{x}) \simeq z_{m_1}.$$

Освен това се погрижихме да осигурим $\theta(z_1, \dots, z_{m_1}) \simeq y$. Сега вече

$$\Gamma_\tau(\theta, \delta)(\bar{x}) \overset{\text{деф}}{\simeq} \theta(\Gamma_{\tau_1}(\theta, \delta)(\bar{x}), \dots, \Gamma_{\tau_{m_1}}(\theta, \delta)(\bar{x})) \simeq \theta(z_1, \dots, z_{m_1}) \simeq y,$$

което и трябваше да покажем.

□

Сега обединяваме *Твърдение* 3.1 и *Твърдение* 3.2 и получаваме

Твърдение 3.3. За всеки терм τ операторът Γ_τ е компактен.

3.2.2 Как дефинираме $D_V(R)$?

Настъпи дългоочакваният момент да приложим т. нар. *денотационен подход* към програмите от нашия език *REC*, т.е. да дефинираме тяхна формална семантика чрез неподвижни точки (*fixpoint semantics*). Тази семантика обикновено се нарича *денотационна семантика*. Ние ще ѝ викаме денотационна семантика *по стойност*, защото както ще видим в следващия раздел, тя съответства на операционната семантика с предаване на параметрите *по стойност*.

Да фиксираме произволна програма R от езика *REC*:

$$\begin{aligned}
&\tau_0(X_1, \dots, X_n, F_1, \dots, F_k) \qquad \texttt{where} \\
&F_1(X_1, \dots, X_{m_1}) = \tau_1(X_1, \dots, X_{m_1}, F_1, \dots, F_k) \\
&\vdots \\
&F_k(X_1, \dots, X_{m_k}) = \tau_k(X_1, \dots, X_{m_k}, F_1, \dots, F_k)
\end{aligned}$$

Всеки от термовете $\tau_i(X_1, \dots, X_{m_i}, F_1, \dots, F_k)$ определя оператор Γ_{τ_i} от тип $(m_1, \dots, m_k \ \to \ m_i)$, т.е.

$$\Gamma_{\tau_i} : \mathcal{F}_{m_1} \times \dots \times \mathcal{F}_{m_k} \ \longrightarrow \ \mathcal{F}_{m_i}.$$

Да означим с $\Gamma = \Gamma_{\tau_1} \times \cdots \times \Gamma_{\tau_k}$ декартовото произведение на термалните оператори $\Gamma_{\tau_1}, \ldots, \Gamma_{\tau_k}$. Току-що се убедихме (*Твърдение* 3.3), че тези оператори са компактни, което съгласно *Твърдение* 1.8 означава, че те са и непрекъснати. Но тогава според *Твърдение* 2.8 и Γ ще е непрекъснат като декартово произведение на непрекъснати оператори. По определение

$$\Gamma(f_1, \ldots, f_k) \stackrel{\text{деф}}{=} (\Gamma_1(f_1, \ldots, f_k), \ldots, \Gamma_k(f_1, \ldots, f_k)).$$

Следователно Γ е изображение от следния вид:

$$\Gamma\colon \mathcal{F}_{m_1} \times \cdots \times \mathcal{F}_{m_k} \longrightarrow \mathcal{F}_{m_1} \times \cdots \times \mathcal{F}_{m_k}.$$

Можем да говорим *за неподвижни точки* на Γ, тъй като входът и изходът на Γ са от един и същи тип. Знаем, че Γ е непрекъснат в областта на Скот

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_{m_1} \times \cdots \times \mathcal{F}_{m_k}, \subseteq, (\emptyset^{(m_1)}, \ldots, \emptyset^{(m_k)})).$$

Да приложим към оператора Γ теоремата на Кнастер-Тарски за тази област на Скот. Така ще получим, че Γ има най-малка неподвижна точка

$$f_\Gamma = (f_\Gamma^1, \ldots, f_\Gamma^k).$$

Да напомним, че съгласно това, което изведохме в раздел 2.3.3, векторът $(f_\Gamma^1, \ldots, f_\Gamma^k)$ се явява най-малко решение на системата

$$\left|\begin{array}{lcl} \mathbb{X}_1 & = & \Gamma_{\tau_1}(\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_k) \\ \vdots & & \\ \mathbb{X}_k & = & \Gamma_{\tau_k}(\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_k). \end{array}\right.$$

Чрез това най-малко решение $(f_\Gamma^1, \ldots, f_\Gamma^k)$ определяме денотационната семантика по стойност на рекурсивната програма R.

Определение 3.5. *Денотационна семантика с предаване на параметрите по стойност* на програмата R е функцията

$$D_V(R) : \mathbb{N}^n \multimap \mathbb{N},$$

която се определя посредством равенството:

$$D_V(R)(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau_0(x_1, \ldots, x_n, f_\Gamma^1, \ldots, f_\Gamma^k)$$

за всяка n-торка $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$.

3.2.3 Един пример

Да се върнем към примерната програма R, с която започнахме тази глава, и да пресметнем $D_V(R)$ по начина, който описахме току-що.

$$
\begin{array}{lcl}
F(X,1) & & \texttt{where} \\
F(X,Y) & = & \texttt{if } X=0 \texttt{ then } Y \texttt{ else } F(X-1,G(X,Y)) \\
G(X,Y) & = & \texttt{if } X=0 \texttt{ then } 0 \texttt{ else } G(X-1,Y)+Y
\end{array}
$$

Да означим с $\Gamma\colon \mathcal{F}_2\times\mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ и $\Delta\colon \mathcal{F}_2\times\mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ операторите, определени от дефинициите на F и G:

$$\Gamma(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} y, & \text{ако } \ x=0 \\ f(x-1,g(x,y)), & \text{ако } \ x>0 \end{cases}$$

$$\Delta(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } \ x=0 \\ g(x-1,y)+y, & \text{ако } \ x>0. \end{cases}$$

Нека $\mathbf{\Gamma} = \Gamma\times\Delta$ е декартовото произведение на Γ и Δ. Имаме, че

$$\mathbf{\Gamma}:\ \mathcal{F}_2\times\mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2\times\mathcal{F}_2$$

е непрекъснат и по теоремата на Кнастер-Тарски той има най-малка неподвижна точка (f^*,g^*). Да си спомним, че всяка от компонентите f^* и g^* на $f_{\mathbf{\Gamma}}$ се получава като граница на рекурентна редица, определена от равенствата (2.13). В случая конкретно ще имаме, че

$$f^* \ = \bigcup_n f_n, \qquad g^* \ = \bigcup_n g_n,$$

където функциите от редиците $f_0, f_1,\dots$ и $g_0, g_1,\dots$ се дефинират със следната взаимна рекурсия:

$$\left|\begin{array}{lcl} f_0 & = & \emptyset^{(2)} \\ f_{n+1} & = & \Gamma(f_n,g_n) \quad \text{и} \end{array}\right. \tag{3.3}$$

$$\left|\begin{array}{lcl} g_0 & = & \emptyset^{(2)} \\ g_{n+1} & = & \Delta(f_n,g_n). \end{array}\right. \tag{3.4}$$

Понеже операторът Δ не зависи от първия си аргумент f, е удобно първо да пресметнем функциите от редицата $\{g_n\}_n$:

$$g_1(x,y) \overset{(3.4)}{\simeq} \Delta(\emptyset^{(2)},\emptyset^{(2)})(x,y) \overset{\text{деф }\Delta}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ \emptyset^{(2)}(x-1,y)+y, & \text{ако } x>0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ \neg!, & \text{ако } x>0. \end{cases}$$

За следващата апроксимация g_2 ще имаме:

$$g_2(x,y) \overset{(3.4)}{\simeq} \Delta(f_1,g_1)(x,y) \overset{\text{деф } \Delta}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x=0 \\ g_1(x-1,y)+y, & \text{ако } x>0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ 0+y, & \text{ако } x=1 \\ \neg !, & \text{ако } x>1, \end{cases}$$

което можем да препишем като:

$$g_2(x,y) \simeq \begin{cases} x.y, & \text{ако } x<2 \\ \neg !, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Това ни подсказва, че g_n може би ще изглежда по този начин:

$$g_n(x,y) \simeq \begin{cases} x.y, & \text{ако } x<n \\ \neg !, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3.5}$$

Наистина, по-горе видяхме, че за началните стойности на n това е така. Сега ако допуснем, че за произволно n горното представяне (3.5) е в сила, то за $n+1$ ще имаме:

$$g_{n+1}(x,y) \overset{(3.4)}{\simeq} \Delta(f_n,g_n)(x,y) \overset{\text{деф } \Delta}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x=0 \\ g_n(x-1,y)+y, & \text{ако } x>0 \end{cases} \overset{(3.5)}{\simeq}$$

$$\begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ (x-1).y+y, & \text{ако } x>0 \ \& \ x-1<n \\ \neg !, & \text{ако } x-1\geq n \end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ xy, & \text{ако } 0<x<n+1 \\ \neg !, & \text{ако } x\geq n+1 \end{cases} \simeq \begin{cases} xy, & \text{ако } x<n+1 \\ \neg !, & \text{ако } x\geq n+1. \end{cases}$$

Границата g^* на редицата $\{g_n\}_n$ е функцията $x.y$ (макар че формално g^* няма да ни трябва при определянето на $D_V(R)$).

Като знаем общия вид на g_n, можем да пристъпим към пресмятането на функциите от редицата $\{f_n\}_n$:

$$f_1(x,y) \overset{(3.3)}{\simeq} \Gamma(\emptyset^{(2)},\emptyset^{(2)})(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ \emptyset^{(2)}(x-1,\emptyset^{(2)}(x,y)), & \text{ако } x>0 \end{cases} \simeq \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ \neg !, & \text{ако } x>0. \end{cases}$$

За следващата функция f_2 ще имаме:

$$f_2(x,y) \overset{(3.3)}{\simeq} \Gamma(f_1,g_1)(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ f_1(x-1,\underbrace{g_1(x,y)}_{\neg !}), & \text{ако } x>0 \end{cases} \simeq \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ \neg !, & \text{ако } x>0. \end{cases}$$

Получихме, че $f_1 = f_2$, което обаче не означава, че непременно ще имаме $f_1 = f_2 = f_3 \ldots$, защото дефиницията на следващата апроксимация f_3 зависи и от g_2, а тя е различна от g_1. Да се убедим:

$$f_3(x,y) \overset{(3.3)}{\simeq} \Gamma(f_2, g_2)(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ f_2(x-1, g_2(x,y)), & \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ \underbrace{g_2(1,y)}_{y}, & \text{ако } x = 1 \\ \neg!, & \text{ако } x > 1 \end{cases} \simeq \begin{cases} x!.y, & \text{ако } x < 2 \\ \neg!, & \text{ако } x \geq 2. \end{cases}$$

Очертава се хипотезата, че при $n \geq 2$ функцията f_n би тярвбало да изглежда така:

$$f_n(x,y) \simeq \begin{cases} x!.y, & \text{ако } x < n-1 \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Наистина, експериментите ни по-горе потвърдиха, че f_2 и f_3 имат горния вид. Да приемем, че и за произволно $n \geq 2$ това е така. Тогава за $n+1$ ще имаме:

$$f_{n+1}(x,y) \overset{(3.3)}{\simeq} \Gamma(f_n, g_n)(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ f_n(x-1, g_n(x,y)), & \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

$$\overset{(3.5)}{\simeq} \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ f_n(x-1, x.y), & \text{ако } x > 0 \ \& \ \underbrace{x < n}_{x-1<n-1} \\ \neg!, & \text{в останалите случаи} \end{cases} \overset{(3.6)}{\simeq} \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ (x-1)!(x.y), & \text{ако } x > 0 \ \& \ x < n \\ \neg!, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} x!.y, & \text{ако } x < n \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Сега като имаме общия вид (3.6) на всяка от функциите f_n, не е трудно да съобразим, че тяхната граница $f^* = \bigcup_n f_n$ ще е функцията $x!.y$. Тогава по дефиниция

$$D_V(R)(x) \simeq \tau_0(x, y, f^*, g^*) \simeq f^*(x,1) = x!.$$