Уравнения, произхождащи от пълни диференциали

В областта $\Omega \subseteq \mathrm{R}^2$, разглеждаме уравнението

(1) $$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

където $P(x, y), Q(x, y) \in \mathrm{C}^1(\Omega)$.

Дефиниция. Казваме, че уравнението (1) произхожда от пълен диференциал, ако съществува функция $F(x, y) \in \mathrm{C}^2(\Omega)$, такава че $F'_x(x, y) = P(x, y)$ и $F'_y(x, y) = Q(x, y)$.

Теорема 1. Нека P и Q са дефинирани и непрекъснати в няканква околност Ω на точката (x_0, y_0) и $P^2(x_0, y_0)+Q^2(x_0, y_0) \neq 0$. Нека освен това диференциалната форма $Pdx + Qdy$ е пълен диференциал, т.е. съществува функция F, дефинирана в Ω и такава, че

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q, \qquad (x, y) \in \Omega. \tag{4}$$

При тези предположения през точката (x_0, y_0) минава единствено решение на (3) и то се получава, като решим уравнението

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) \tag{5}$$

или спрямо x, или спрямо y в зависимост от това, коя от функциите P и Q е различна от нула.

Доказателство. Да предположим за определеност, че $Q(x_0, y_0) \neq 0$. Съгласно казаното по-горе ще интерпретираме (3) като

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0, \tag{6}$$

което заедно с (4) ни дава

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)y' = 0. \tag{7}$$

За да се ориентираме в обстановката, да допуснем, че $y = \varphi(x)$, $\varphi(x_0) = y_0$ е решение на (7), дефинирано в някаква околност Δ: $|x - x_0| < \delta$ на точката x_0. Понеже по предположение за $x \in \Delta$ точката $(x,\ \varphi(x))$ не напуска Ω, можем да образуваме функцията

(8) $$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} F(x,\ \varphi(x)), \qquad x \in \Delta.$$

Тъй като F и φ са диференцируеми, според теоремата за диференциране на съставните функции и g има това свойство. Диференцирайки (8), получаваме

(9) $$g'(x) = F'_x(x,\ \varphi(x)) + F'_y(x,\ \varphi(x))\varphi'(x) = 0,$$

защото φ е решение на (7). И така g се оказа константа в целия интервал Δ. Полагайки $x = x_0$ в (8), получаваме $g(x_0) = F(x_0,\ y_0)$, т.е.

$$F(x,\ \varphi(x)) = F(x_0,\ y_0), \qquad x \in \Delta.$$

По този начин се убедихме, че всяко решение на (6), минаващо през точката $(x_0,\ y_0)$, удовлетворява уравнението (5).

Понеже $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,\ y_0) = Q(x_0,\ y_0) \neq 0$, според теоремата за неявните функции (5) има *единствено* решение, за което $y(x_0) = y_0$. Следователно и (6) има най-много едно решение, минаващо през точката $(x_0,\ y_0)$. От казаното вече е ясно, че теоремата за неявните функции ни дава и съществуването. За да бъдем прецизни, да разгледаме функцията

$$\Phi(x,\ y) \stackrel{\text{def}}{=} F(x,\ y) - F(x_0,\ y_0),$$

която е дефинирана в Ω. Понеже $\Phi(x_0,\ y_0) = 0$, $\Phi'_{y_0}(x_0,\ y_0) = F'_{y_0}(x_0,\ y_0) = Q(x_0,\ y_0) \neq 0$ и функциите Φ, Φ'_x и Φ'_y са непрекъснати, уравнението $\Phi = 0$, т.е. (5), притежава единствено диференцируемо решение $y = y(x)$, за което $y(x_0) = y_0$. Диференцирайки (5), получаваме (6) и завършваме доказателството.

Теорема 2. Нека в едносвързаната област G, $G \subset \mathbf{R}^2$, ни е дадена диференциалната форма

$$P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy, \tag{12}$$

където P и Q са непрекъснати функции, за които частните производни $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ съществуват и са непрекъснати.

Оказва се, че (12) е пълен диференциал тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad (x,\ y) \in G. \tag{13}$$

Интегриращ множител

Да се върнем отново към общия случай. Да разгледаме уравнението

(20) $$P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy = 0, \qquad P'_y - Q'_x \not\equiv 0,$$

в някаква едносвързана област $G \subset \mathbf{R}^2$. Нека $\mu = \mu(x,\ y) \in C^1(G)^*$ е функция, която не се анулира в нито една точка от G. В такъв случай уравненията (20) и

(21) $$\mu P dx + \mu Q dy = 0$$

са равносилни. Естествено е да се опитаме да изберем μ по такъв начин, че (21) да се окаже уравнение, произхождащо от пълен диференциал. Всяко такова μ се нарича *интегриращ множител*. Според теорема 2 функцията μ ще има това свойство точно когато удовлетворява уравнението

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q),$$

т.е.

(22) $$\frac{\partial \mu}{\partial y} P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

За съжаление (22) е частно диференциално уравнение, което изобщо е по-сложно от изходното. Следователно експлицитното намиране на интегриращ множител в общия случай е безнадеждна задача. Обаче, ако уравнението има специална структура, която да ни подсеща от каква група от променливи зависи евентуалният интегриращ множител, (22) се опростява и се превръща в обикновено диференциално уравнение.