Лекция №11:

3.5 Денотационна семантика с предаване на параметрите по име

3.5.1 Функционалната област на Скот $\boldsymbol{\mathcal{F}_k^\perp} = (\mathcal{F}_k^\perp,\ \sqsubseteq,\ \Omega^{(k)})$

Тази ОС въведохме, когато разглеждахме общата теория на областите на Скот. Сега ще припомним основните понятия и факти от раздели 2.1.3 и 2.2.2, които ще използваме тук.

Фиксираме някакъв елемент $\perp \notin \mathbb{N}$ и полагаме

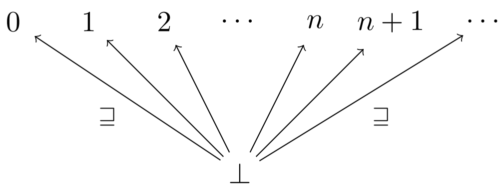
$$\mathbb{N}_\perp = \mathbb{N} \cup \{\perp\}.$$

Плоската наредба на $\mathbb{N}_\perp$ се дефинира посредством еквивалентността:

$$x \sqsubseteq y \stackrel{\text{деф}}{\iff} x = \perp \ \vee \ x = y. \tag{3.17}$$

Ясно е, че $\perp \sqsubseteq x$ за всяко $x \in N_\perp$, т.е. $\perp$ е най-малкият елемент на $\mathbb{N}_\perp$. Образно казано, той е на дъното на $\mathbb{N}_\perp$, затова се нарича *bottom* елемент. Това ще е елементът, с който ще обозначаваме, че една функция няма стойност в дадена точка; например $f(5) = \perp$ ще означава, че f няма стойност в 5.

Ето как изглеждаше графиката на релацията $\sqsubseteq$ върху множеството $\mathbb{N}_\perp$ (без примките $n \sqsubseteq n$):



Да наблегнем отново на това, че релацията $\sqsubseteq$ няма нищо общо с числовото $\leq$. Две *числа* x и y са свързани с тази релация, т.е. $x \sqsubseteq y$, само когато $x = y$.

От *Твърдение* 2.2 знаем, че структурата $\boldsymbol{N_\perp} = (N_\perp, \sqsubseteq, \perp)$ е ОС; ще я наричаме *плоска област на Скот*. Точната горна граница на монотонно растящата редица $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq \ldots$ в $N_\perp$ ще означаваме с

$$\bigsqcup_n x_n.$$

В декартовото произведение $\mathbb{N}_\perp^k \;=\; \underbrace{\mathbb{N}_\perp \times \cdots \times \mathbb{N}_\perp}_{k}$ дефинираме *покомпонентната наредба*, индуцирана от плоската наредба в $\mathbb{N}_\perp$, по следния начин:

$$(x_1, \dots, x_k) \sqsubseteq (y_1, \dots, y_k) \;\stackrel{\text{деф}}{\iff}\; x_1 \sqsubseteq y_1 \;\&\; \dots \;\&\; x_k \sqsubseteq y_k.$$

Забележка. Тази наредба в $\mathbb{N}_\perp^k$ ще означаваме със същия символ $\sqsubseteq$ и също ще наричаме плоска наредба.

Ще пишем $\bar{x} \sqsubset \bar{y}$, за да означим, че $\bar{x} \sqsubseteq \bar{y}$ и $\bar{x} \neq \bar{y}$.

Съгласно *Твърдение* 2.5, структурата

$$\boldsymbol{\mathbb{N}_\perp^k} = (\underbrace{\mathbb{N}_\perp \times \cdots \times \mathbb{N}_\perp}_{k},\; \sqsubseteq,\; \underbrace{(\perp, \dots, \perp)}_{k}\;)$$

също е област на Скот. И нея ще наричаме *плоска* ОС.

Да напомним и дефиницията (2.3) на *функционалната* област на Скот, породена от плоската ОС $\boldsymbol{\mathbb{N}_\perp^k}$:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_k^\perp} = (\mathcal{F}_k^\perp,\; \sqsubseteq,\; \Omega^{(k)}).$$

Тази област е с домейн множеството $\mathcal{F}_k^\perp$ от всички *тотални* k-местни функции в $\mathbb{N}_\perp$:

$$\mathcal{F}_k^\perp = \{f \mid f\colon\; \mathbb{N}_\perp^k \;\to \mathbb{N}_\perp\}.$$

Приехме да я означаваме така по аналогия с ОС на *частичните* функции $\boldsymbol{\mathcal{F}_k} = (\mathcal{F}_k,\; \subseteq,\; \emptyset^{(k)})$, в която работехме дотук.

Наредбата в $\mathcal{F}_k^\perp$ е *поточковата наредба*, индуцирана от плоската наредба в $\mathbb{N}_\perp^k$, по-точно:

$$f \sqsubseteq g \;\stackrel{\text{деф}}{\iff}\; \forall x_1 \in \mathbb{N}_\perp \dots \forall x_k \in \mathbb{N}_\perp \; f(x_1, \dots, x_k) \sqsubseteq g(x_1, \dots, x_k). \tag{3.18}$$

Наредбата $\sqsubseteq$ е пълна, т.е. всяка монотонно растяща редица $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq \dots$ в $\mathcal{F}_k^\perp$ има *точна горна граница*. Тази граница ще означаваме с $\bigsqcup\limits_n f_n$.

Очаквано, и тя се дефинира поточково:

$$\underbrace{(\bigsqcup_n f_n)(\bar{x})}_{lub \text{ в } \mathcal{F}_k^\perp} \;\stackrel{\text{деф}}{=}\; \underbrace{\bigsqcup_n f_n(\bar{x})}_{lub \text{ в } \mathbb{N}_\perp}. \tag{3.19}$$

Най-малкият елемент на $\mathcal{F}_k^\perp$ — функцията $\Omega^{(k)}$ — дефинираме така: за всяка $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}_\perp^k$

$$\Omega^{(k)}(x_1, \dots, x_k) \stackrel{\text{деф}}{=} \perp$$

При доказателствата в този раздел се оказва удобен следният еквивалентен запис на релацията $\sqsubseteq$:

Твърдение 3.8. За произволни функции $f, g \in \mathcal{F}_k^\perp$:

$$f \sqsubseteq g \iff \forall \bar{x} \in \mathbb{N}_\perp^k \ (f(\bar{x}) \neq \perp \implies f(\bar{x}) = g(\bar{x})).$$

Доказателство. Директно от дефиницията (3.17) на плоска наредба и това, че дизюнкцията $p \vee q$ е еквивалентна на $\neg p \implies q$:

$$\begin{aligned} f \sqsubseteq g &\overset{(3.18)}{\iff} \forall \bar{x} \in \mathbb{N}_\perp^k \ (f(\bar{x}) \sqsubseteq g(\bar{x})) \overset{(3.17)}{\iff} \forall \bar{x} \in \mathbb{N}_\perp^k \ (f(\bar{x}) = \perp \ \vee \ f(\bar{x}) = g(\bar{x})) \\ &\iff \forall \bar{x} \in \mathbb{N}_\perp^k \ (f(\bar{x}) \neq \perp \implies f(\bar{x}) = g(\bar{x})). \end{aligned}$$

□

Забележка. Обърнете внимание колко си приличат горната характеризация на $\sqsubseteq$ и дефиницията на релацията $\subseteq$ между частични функции:

$$f \subseteq g \iff \forall \bar{x} \in \mathbb{N}^k \ (!f(\bar{x}) \implies f(\bar{x}) \simeq g(\bar{x})).$$

Подобна аналогия забелязваме и между дефиницията на точна горна граница $g = \bigcup_n f_n$ на монотонно растяща редица $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \dots$ в $\mathcal{F}_k$:

$$g(\bar{x}) \simeq y \iff \exists n \ f_n(\bar{x}) \simeq y$$

и следващото свойство на точната горна граница в $\mathcal{F}_k^\perp$:

Твърдение 3.9. Нека $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq \dots$ е монотонно растяща редица в $\mathcal{F}_k^\perp$ и $g = \bigsqcup_n f_n$ е нейната точна горна граница. Тогава за всяка k-орка $\bar{x} \in \mathbb{N}_\perp^k$ и $y \in \mathbb{N}$ е вярно, че:

а) $g(\bar{x}) = \perp \iff \forall n \ f_n(\bar{x}) = \perp$;

б) $g(\bar{x}) = y \iff \exists n \ f_n(\bar{x}) = y$.

Доказателство. Нека $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq \dots$ е монотонно растяща. За произволно $\bar{x} \in \mathbb{N}_\perp^k$ и да означим $y_n \overset{\text{деф}}{=} f_n(\bar{x})$. От това, че редицата от функции е монотонно растяща в $\mathcal{F}_k^\perp$ следва, че и редицата от стойностите им ще е монотонно растяща в $\mathbb{N}_\perp$, т.е. ще имаме

$$y_0 \sqsubseteq y_1 \sqsubseteq y_2 \sqsubseteq \dots.$$

От основните свойства на плоската наредба от раздел 2.1.3 знаем, че всяка монотонно растяща редица в $\mathbb{N}_\perp$ изглежда по един от следните два начина:

- $\perp, \ \perp, \ \perp, \ \dots$ с граница $\perp$;
- $\underbrace{\perp, \dots \perp}_{n \geq 0}, y, \ y, \ \dots$ с граница $y \in \mathbb{N}$.

Сега вече условията от твърдението изглеждат съвсем очевидни. □

3.5.2 Точни функции

Ще въведем едно подмножество на функциите от $\mathcal{F}_k^{\perp}$, което в някакъв смисъл е аналог на частичните функции $\mathcal{F}_k$.

Определение 3.14. Казваме, че функцията $f\colon \mathbb{N}_{\perp}^k \longrightarrow \mathbb{N}_{\perp}$ е *точна* (или *стриктна, strict*), ако за всички $(x_1, \dots x_k) \in \mathbb{N}_{\perp}^k$ е изпълнено:

$$(\exists i\colon x_i = \perp) \implies f(x_1, \dots x_k) = \perp.$$

С други думи, една функция е точна, ако всеки път, когато някой от аргументите ѝ е $\perp$, стойността ѝ също е $\perp$.

На пръв поглед между една частична функция $f\colon \mathbb{N}^k \multimap\!\!\rightarrow \mathbb{N}$ и една точна функция $f\colon \mathbb{N}_{\perp}^k \longrightarrow \mathbb{N}_{\perp}$ няма разлика, ако приемем, че случаят $\neg! f(\bar{x})$ отговаря на $f(\bar{x}) = \perp$. Да не забравяме, обаче, че сред аргументите на $f\colon \mathbb{N}_{\perp}^k \longrightarrow \mathbb{N}_{\perp}$ може да има $\perp$, за разлика от аргументите на частичната функция $f\colon \mathbb{N}^k \multimap\!\!\rightarrow \mathbb{N}$, които са само числа.

Множеството на всички k-местни точни функции ще означаваме с $\mathcal{S}_k$, с други думи

$$\mathcal{S}_k \;=\; \{f \mid f\colon \mathbb{N}_{\perp}^k \longrightarrow \mathbb{N}_{\perp} \;\&\; f \text{ е точна}\}.$$

Частичните функции от $\mathcal{F}_k$ "потапяме" в множеството $\mathcal{S}_k \subseteq \mathcal{F}_k^{\perp}$ по следния начин: на всяка функция $f \in \mathcal{F}_k$ съпоставяме следната точна функция:

$$f^*(\bar{x}) \;=\; \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{ако } \bar{x} \in \mathbb{N}^k \;\&\; !f(\bar{x}) \\ \perp, & \text{иначе} \end{cases}$$

за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}_{\perp}^k$. Случаят "иначе" ще рече, че или сред елементите на k-орката $\bar{x}$ има $\perp$, или $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$, но $\neg! f(\bar{x})$.

Функцията f^* ще наричаме *естествено продължение* на f. Тя очевидно е точна функция.

Примери. Ето няколко примера за естествени продължения на функции и предикати:
а) Нека $f(x, y) = x + y$. Нейното естествено продължение f^* е функцията

$$f^*(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \;\&\; y \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \;\vee\; y = \perp. \end{cases}$$

б) Нека $x \;\texttt{div}\; y$ е функцията целочислено деление

$$x \;\texttt{div}\; y \simeq \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & \text{ако } y > 0 \\ \neg!, & \text{ако } y = 0. \end{cases}$$

Нейното естествено продължение $x\ \mathtt{div}^* y$ вече е тоталната функция

$$x\ \mathtt{div}^* y = \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \ \& \ y \in \mathbb{N}^+ \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \ \vee \ y = \perp \ \vee \ y = 0. \end{cases}$$

в) Да означим с E предиката "равенство". Неговото естествено продължение E^* има следната дефиниция:

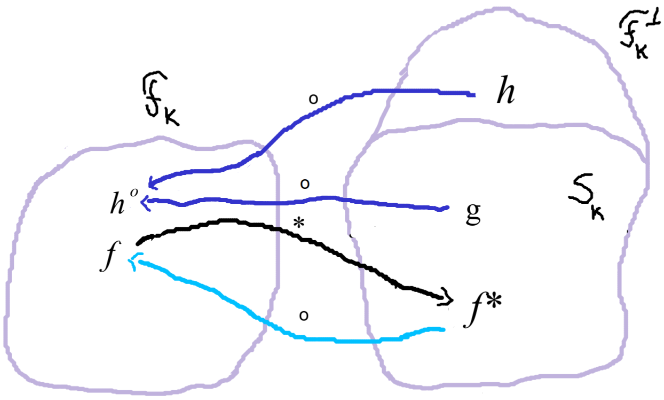
$$E^*(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \ \& \ y \in \mathbb{N} \ \& \ x = y \\ 0, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \ \& \ y \in \mathbb{N} \ \& \ x \neq y \\ \perp, & x = \perp \ \vee \ y = \perp. \end{cases}$$

Лесно се съобразява, че изображението * е биекция между $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{S}_k$. Следователно една функция от $\mathcal{F}_k^\perp$ е точна тогава и само тогава, когато се явява естествено продължение на някоя частична функция от $\mathcal{F}_k$.

Да дефинираме и обратното изображение $^\circ$, което се прилага не само върху точните, а върху всички функции от $\mathcal{F}_k^\perp$. За всяка $f \in \mathcal{F}_k^\perp$ полагаме

$$f^\circ(\bar{x}) \simeq \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{ако } \ f(\bar{x}) \neq \perp \\ \neg !, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3.20}$$

за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$.



Като лесно упражнение съобразете, че:

Задача 3.1. а) За всяка функция $f \in \mathcal{F}_k$ е вярно, че $(f^*)^\circ = f$.
б) За всяка *точна* функция от $\mathcal{F}_k^\perp$ е вярно, че $(f^\circ)^* = f$.
в) Дайте пример за функция $f \in \mathcal{F}_k^\perp$, за която това равенство вече не е в сила.

Видяхме, че точните функции са някакъв аналог на частичните функции, затова не е изненадващо, че те също образуват област на Скот.

Задача 3.2. Докажете, че наредената тройка $\boldsymbol{\mathcal{S}_k} = (\mathcal{S}_k,\ \sqsubseteq,\ \Omega^{(k)})$ е област на Скот.

Областта на Скот $\boldsymbol{\mathcal{S}_k} = (\mathcal{S}_k,\ \sqsubseteq\ \Omega^{(k)})$ на практика е идентична с областта $\boldsymbol{\mathcal{F}_k} = (\mathcal{F}_k,\ \subseteq,\ \emptyset^{(k)})$, поради което няма да представлява особен интерес за нас. Ако търсим модел, в който да дефинираме денотационна семантика за *call by name*, е ясно, че ще трябва да отидем отвъд множеството на точните функции.

Ако се питате защо този модел да не е *цялата* ОС $\boldsymbol{\mathcal{F}_k^\perp} = (\mathcal{F}_k^\perp,\ \sqsubseteq,\ \Omega^{(k)})$ — погледнете примера по-долу $\ddot\smile$. Проблемът е, че има термове τ, за които съответният им термален оператор Γ_τ не е непрекъснат и значи идеята за семантика с най-малка неподвижна точка не може да се осъществи.

Ето един прост пример за такъв терм τ:

Пример 3.1. Да разгледаме терма $\tau(X, F, G) = F(G(X))$. Да се убедим, че операторът Γ_τ, който той определя, не е монотонен, и следователно не е непрекъснат.

Доказателство. Термалният оператор $\Gamma_\tau \colon \mathcal{F}_1^\perp \times \mathcal{F}_1^\perp \longrightarrow \mathcal{F}_1^\perp$, който съответства на терма $\tau = F(G(X))$, е следният:

$$\Gamma_\tau(f, g)(x) \stackrel{\text{деф}}{=} f(g(x))$$

за всяко $x \in \mathbb{N}_\perp$. Да покажем, че Γ_τ не е монотонен означава да посочим две двойки функции (f_1, g_1) и (f_2, g_2), такива че $(f_1, g_1) \sqsubseteq (f_2, g_2)$, но $\Gamma_\tau(f_1, g_1) \not\sqsubseteq \Gamma_\tau(f_2, g_2)$. Последното, съгласно определение (3.18) означава, че за поне едно $x \in \mathbb{N}_\perp$:

$$\Gamma_\tau(f_1, g_1)(x) \not\sqsubseteq \Gamma_\tau(f_2, g_2)(x).$$

Да вземем например g_1 и g_2 да са следните функции:

$$g_1(x) = \begin{cases} \perp, & \text{ако } x = 0 \\ x, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \text{и} \qquad g_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно е, че $g_1 \sqsubseteq g_2$. Нека f е функцията, която се дефинира като:

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{ако } x = \perp \\ 10, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно $(f, g_1) \sqsubseteq (f, g_2)$. Да видим какво се случва с $\Gamma_\tau(f, g_1)$ и $\Gamma_\tau(f, g_2)$. Да пресметнем стойността им за $x = 0$:

$$\Gamma_\tau(f, g_1)(0) \stackrel{\text{деф}}{=} f(g_1(0)) = f(\perp) = 5, \text{ а}$$

$$\Gamma_\tau(f, g_2)(0) \stackrel{\text{деф}}{=} f(g_2(0)) = f(0) = 10.$$

Следователно $\Gamma_\tau(f, g_1)(0) \not\sqsubseteq \Gamma_\tau(f, g_2)(0)$, откъдето и

$$\Gamma_\tau(f_1, g_1) \not\sqsubseteq \Gamma_\tau(f_2, g_2),$$

и значи Γ_τ наистина е много "дефектен" — той дори не е монотонен. $\square$

Ако разгледаме по-внимателно горния контрапример, виждаме, че функцията f също е дефектна в известен смисъл. Ако гледаме на нея като на функция, която се пресмята от някаква програма, тогава фактът, че $f(\bot) = 5$ може да се тълкува така: резултатът 5 е получен от аргумент $\bot$, който на практика не съществува. Следователно той е получен без да се използва този аргумент (или все едно — аргументът x на $f(x)$ е фиктивен аргумент). Но това означава, че би трябвало $f(x) = 5$ за *всяко* $x \in \mathbb{N}$, а това не е така. В този смисъл f не е "хубава" функция.

3.5.3 Монотонни функции в ОС $\mathcal{F}_k^\bot$

Дали не е възможно негативният резултат от примера по-горе да се дължи на факта, че приложихме Γ_τ върху "неподходящи" функции? Точно това е причината! Оказва се, че ако ограничим термалните оператори до "подходящи" функции, тогава те ще бъдат не само монотонни, но и непрекъснати. Въпросните подходящи функции са всъщност *монотонните* функции.

Определение 3.15. Казваме, че функцията $f\colon \mathbb{N}_\bot^k \longrightarrow \mathbb{N}_\bot$ е *монотонна*, ако е изпълнено условието: за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}_\bot^k$ и $\bar{y} \in \mathbb{N}_\bot^k$:

$$\bar{x} \sqsubseteq \bar{y} \implies f(\bar{x}) \sqsubseteq f(\bar{y}).$$

Един първи пример за монотонни функции са точните функции, които въведохме по-горе:

Твърдение 3.10. Всяка точна функция е монотонна.

Доказателство. Нека $f\colon \mathbb{N}_\bot^k \longrightarrow \mathbb{N}_\bot$ е точна функция. Да вземем произволни $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ и $\bar{y} = (y_1, \dots, y_k)$, такива че $\bar{x} \sqsubseteq \bar{y}$. Интересен е случаят, когато

$$(x_1, \dots, x_k) \sqsubset (y_1, \dots, y_k).$$

Тогава за поне едно $i \in \{1, \dots, k\}$ ще е изпълнено $x_i \sqsubset y_i$, което съгласно дефиницията на плоска наредба (3.17) означава, че $x_i = \bot$. Но f е точна и значи $f(\bar{x}) = \bot$, откъдето $f(\bar{x}) \sqsubseteq f(\bar{y})$. Следователно f е монотонна. $\square$

При фиксирано $k \geq 1$, множеството на всички k-местни монотонни функции ще означаваме с $\mathcal{M}_k$:

$$\mathcal{M}_k \;=\; \{f \mid f\colon \mathbb{N}_\bot^k \longrightarrow \mathbb{N}_\bot \;\&\; f \text{ е монотонна}\}.$$

От горното твърдение имаме, че $\mathcal{S}_k \subseteq \mathcal{M}_k$. Дали е строго включването? Абсолютно. Най-простият пример е може би следващият:

Пример 3.2. Нека $f : \mathbb{N}_\perp \longrightarrow \mathbb{N}_\perp$ е константната функция $\lambda x.c$, където $c \in \mathbb{N}$. Имаме $f(\perp) = c$ и следователно f не е точна. Тя, обаче, е монотонна, защото при $x \sqsubseteq y$ ще имаме:

$$f(x) \overset{\text{деф}}{=} c \overset{\text{деф}}{=} f(y), \quad \text{следователно} \quad f(x) \sqsubseteq f(y).$$

Ето как изглеждат на картинка класовете от функции в $N_\perp$, които въведохме дотук:

Ще завършим този раздел с важното наблюдение, че монотонните функции също образуват област на Скот.

Твърдение 3.11. За всяко $k \geq 1$ структурата $\boldsymbol{\mathcal{M}_k} = (\mathcal{M}_k, \sqsubseteq, \Omega^{(k)})$ е област на Скот.

Доказателство. Функцията $\Omega^{(k)}$ очевидно е монотонна. Релацията $\sqsubseteq$, която е частична наредба на $\mathcal{F}_k$, ще е частична наредба и на $\mathcal{M}_k$. Единственото, което трябва да проверим, е че тази наредба е пълна и в $\mathcal{M}_k$.

Наистина, нека $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq \dots$ е растяща редица от монотонни функции и нека $g = \bigsqcup_n f_n$ е нейната граница. Трябва да видим, че g също е монотонна. За целта вземаме произволни $\bar{x}$ и $\bar{y}$ от $\mathbb{N}_\perp^k$, такива че $\bar{x} \sqsubseteq \bar{y}$. Защо $g(\bar{x}) \sqsubseteq g(\bar{y})$?

Да изберем произволно $n \in \mathbb{N}$. От монотонността на f_n и от това, че $f_n \sqsubseteq g$ ще имаме

$$f_n(\bar{x}) \sqsubseteq f_n(\bar{y}) \sqsubseteq g(\bar{y}).$$

Тъй като n беше произволно, това означава, че $g(\bar{y})$ е горна граница на редицата $\{f_n(\bar{x})\}_n$. Но $g(\bar{x})$ е точната ѝ горна граница (спомнете си за поточковата дефиниция (3.19) на т.г.гр.), и значи $g(\bar{x}) \sqsubseteq g(\bar{y})$, което и искахме да покажем.

Ако това доказателство ви се вижда твърде отвлечено, ето ви едно "по-земно" $\ddot{\smile}$. То използва *Твърдение* 3.9, което може би интуитивно е по-ясно, защото има аналог и при частичните функции, с които вече сме стари познайници.

Отново тръгваме от произволни $\bar{x}$ и $\bar{y}$ от $\mathbb{N}_\perp^k$, за които $\bar{x} \sqsubseteq \bar{y}$. За да покажем, че $g(\bar{x}) \sqsubseteq g(\bar{y})$, разглеждаме двата случая за стойността $g(\bar{x})$:

1 сл. $g(\bar{x}) = \perp$.
Тук няма какво да се доказва, защото $\perp \sqsubseteq g(\bar{y})$, каквото и да е $g(\bar{y})$.

2 сл. $g(\bar{x}) = z \in \mathbb{N}$.
Тогава съгласно *Твърдение* 3.9 б) съществува $n \in \mathbb{N}$, такова че $f_n(\bar{x}) = z$. Но $\bar{x} \sqsubseteq \bar{y}$, а f_n е монотонна. Така $f_n(\bar{x}) \sqsubseteq f_n(\bar{y})$, и понеже $f_n(\bar{x}) = z \in \mathbb{N}$, то и $f_n(\bar{y}) = z \in \mathbb{N}$. Сега от обратната посока на същото *Твърдение* 3.9 б) получаваме, че и $g(\bar{y}) = z$ и значи $g(\bar{x}) = g(\bar{y})$, откъдето, разбира се, и $g(\bar{x}) \sqsubseteq g(\bar{y})$. $\square$

Като комбинираме резултатът, който току-що получихме, с доказаното в предишната глава *Твърдение* 2.5 за декартови произведения на ОС, можем да твърдим, че:

Следствие 3.3. За произволни положителни $m_1, \ldots, m_k$, структурата

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} \;=\; (\mathcal{M}_{m_1}^\perp \times \cdots \times \mathcal{M}_{m_k}^\perp,\ \sqsubseteq,\ (\Omega^{(m_1)}, \ldots, \Omega^{(m_k)}))$$

е област на Скот.

В тази област на Скот по-надолу ще дефинираме *денотационната семантика по име* на произволна рекурсивна програма от нашия език *REC*.

3.5.4 Непрекъснатост на термалните оператори в ОС $\boldsymbol{\mathcal{M}}$

Областта на Скот, в която ще дефинираме денотационната семантика по име $D_N(R)$ на рекурсивна програма R, вече се изясни. От опита си с денотационната семантика *по стойност* $D_V(R)$ знаем, че тя се въвежда посредством най-малка неподвижна точка на подходящ *непрекъснат* оператор, определен от дефинициите на R. Задачата ни в този раздел е да видим, че въпросният операторът, който вече ще действа в новата ОС

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} \;=\; (\mathcal{M}_{m_1}^\perp \times \cdots \times \mathcal{M}_{m_k}^\perp,\ \sqsubseteq,\ (\Omega^{(m_1)}, \ldots, \Omega^{(m_k)}))$$

също е непрекъснат.

За целта ще повторим пътя, изминат при дефинирането на $D_V(R)$: ще дадем дефиниция за *стойност на терм* $\tau(X_1, \dots, X_n, F_1, \dots, F_k)$, когато X_i се заместват с елементи на $\mathbb{N}_\perp$, а F_j — с тотални функции от $\mathcal{F}^\perp_{m_j}$, и ще покажем, че е непрекъснат всеки термален оператор, разглеждан като изображение над *монотонните функции*.

Да напомним индуктивната дефиницията на *терм* в езика REC:

1) Всяка константа n е терм, $n \in \mathbb{N}$.

2) За всяко $i = 1, 2, \dots$, обектовата променлива X_i е терм.

3) Ако τ_1 и τ_2 са термове, а *op* е базисна операция, то $(\tau_1\ op\ \tau_2)$ е терм.

4) Ако τ_1, τ_2 и τ_3 са термове, то **if** τ_1 **then** τ_2 **else** τ_3 е терм.

5) Ако F_i е m-местна функционална променлива, а $\tau_1, \dots, \tau_m$ са термове, то $F_i(\tau_1, \dots, \tau_m)$ е терм.

Нека $\tau(X_1, \dots, X_n, F_1, \dots, F_k)$ е терм, в който всяка от функционалните променливи F_i е на m_i аргумента, $1 \leq i \leq k$. Ще зададем *стойност* на τ, когато неговите обектови променливи X_i заместваме с елементи на $\mathbb{N}_\perp$, а функционалните променливи F_j — с функции от $\mathcal{F}^\perp_{m_j}$.

За целта избираме произволни $x_1 \in \mathbb{N}_\perp, \dots, x_n \in \mathbb{N}_\perp$ и k на брой функции $f_1 \in \mathcal{F}^\perp_{m_1}, \dots, f_k \in \mathcal{F}^\perp_{m_k}$. Тези функции са *произволни*; в този момент не е необходимо да са монотонни.

Определение 3.16. *Стойността* на $\tau(X_1, \dots, X_n, F_1, \dots, F_k)$ в точката $(x_1, \dots, x_n, f_1, \dots, f_k)$:

$$\tau(x_1, \dots, x_n, f_1, \dots, f_k) \qquad (\text{или} \;\; \tau(\bar{x}, \bar{f})),$$

дефинираме с индукция по построението на терма τ както следва:

1) Ако τ е константата n, то $\tau(\bar{x}, \bar{f}) = n$.

2) Ако τ е обектовата променлива X_i, то $\tau(\bar{x}, \bar{f}) = x_i$.

3) Ако τ е от вида $\tau_1\ op\ \tau_2$, то

$$\tau(\bar{x}, \bar{f}) \;=\; \tau_1(\bar{x}, \bar{f})\ op^*\ \tau_2(\bar{x}, \bar{f}).$$

   Забележете, че всяка базисна функция *op* (която е функция над $\mathbb{N}$) разширяваме до функция над $\mathbb{N}_\perp$ като вземаме нейното *естествено продължение* op^*.

4) Ако τ е от вида **if** τ_1 **then** τ_2 **else** τ_3, то

$$\tau(\bar{x},\bar{f}) \;=\; \begin{cases} \tau_2(\bar{x},\bar{f}), & \text{ако} \;\; \tau_1(\bar{x},\bar{f}) > 0 \\ \tau_3(\bar{x},\bar{f}), & \text{ако} \;\; \tau_1(\bar{x},\bar{f}) = 0 \\ \perp, & \text{ако} \;\; \tau_1(\bar{x},\bar{f}) = \perp. \end{cases}$$

5) Ако τ е от вида $F_i(\tau_1,\dots,\tau_{m_i})$, то

$$\tau(\bar{x},\bar{f}) \;=\; f_i(\tau_1(\bar{x},\bar{f}),\dots,\tau_{m_i}(\bar{x},\bar{f})).$$

Забележка. Да отбележим, че тук вече всеки всеки терм τ има стойност, която е елемент на $\mathbb{N}_\perp$.

Определение 3.17. Нека $\tau(X_1,\dots,X_n,F_1,\dots,F_k)$ е терм, в който всяка от променливите F_i е на m_i аргумента, $1 \le i \le k$ Термът τ определя *термалния оператор*

$$\Gamma_\tau\colon\; \mathcal{F}^\perp_{m_1} \times \dots \times \mathcal{F}^\perp_{m_k} \;\longrightarrow\; \mathcal{F}^\perp_n,$$

дефиниран като:

$$\Gamma_\tau(f_1,\dots,f_k)(x_1,\dots,x_n) \;=\; \tau(x_1,\dots,x_n,f_1,\dots,f_k)$$

за всички $\bar{x} \in \mathbb{N}^n_\perp$ и $f_i \in \mathcal{F}^\perp_{m_i}, 1 \le i \le k$.

Вече видяхме (*Пример* 3.1), че за някои термове τ операторът Γ_τ може дори да не е монотонен. Оказва се, че когато го ограничим до изображение върху *монотонните функции*, той вече е не само монотонен, но и непрекъснат.

Първо да съобразим, че приложен върху монотонни функции, всеки термален оператор отново връща монотонна функция.

Твърдение 3.12. (без доказателство) Нека $\tau(X_1,\dots,X_n,F_1,\dots,F_k)$ е терм, в който всяка функционална променлива F_i е на m_i аргумента, $1 \le i \le k$. Нека още $f_1 \in \mathcal{M}^\perp_{m_1},\dots,f_k \in \mathcal{M}^\perp_{m_k}$ са монотонни функции. Тогава и функцията $\Gamma_\tau(f_1,\dots,f_k)$ ще е монотонна.

Твърдение 3.13. (без доказателство) За всеки терм $\tau(X_1,\dots,X_l,F_1,\dots,F_k)$ операторът

$$\Gamma_\tau : \mathcal{M}_{m_1} \times \dots \times \mathcal{M}_{m_k} \;\longrightarrow\; \mathcal{M}_l$$

е монотонен.

Твърдение 3.14. (без доказателство) За всеки терм $\tau(X_1,\dots,X_l,F_1,\dots,F_k)$ операторът

$$\Gamma_\tau : \mathcal{M}_{m_1} \times \dots \times \mathcal{M}_{m_k} \;\longrightarrow\; \mathcal{M}_l$$

е непрекъснат.

3.5.5 Как дефинираме $D_N(R)$?

Вече имаме опит в прилагането на *денотационния подход* към програмите от функционалния език REC и това, което ще направим тук, за да дефинираме *денотационна семантика по име*, ще ни изглежда доста познато.

Да вземем произволна програма R от езика REC:

$$
\begin{aligned}
&\tau_0(X_1,\dots,X_n,F_1,\dots,F_k) \qquad \texttt{where}\\
&F_1(X_1,\dots,X_{m_1}) = \tau_1(X_1,\dots,X_{m_1},F_1,\dots,F_k)\\
&\vdots\\
&F_i(X_1,\dots,X_{m_i}) = \tau_i(X_1,\dots,X_{m_i},F_1,\dots,F_k)\\
&\vdots\\
&F_k(X_1,\dots,X_{m_k}) = \tau_k(X_1,\dots,X_{m_k},F_1,\dots,F_k)
\end{aligned}
$$

В този и другия раздел (с които всъщност прилючва главата за семантиките) ще считаме, че R е фиксирана.

Всеки от термовете $\tau_i(X_1,\dots,X_{m_i},F_1,\dots,F_k)$ определя термален оператор Γ_{τ_i}, който разглеждаме като оператор над *монотонните функции* в $\mathbb{N}_\perp$:

$$\Gamma_{\tau_i}\colon\ \mathcal{M}_{m_1}\times\dots\times\mathcal{M}_{m_k}\ \longrightarrow\ \mathcal{M}_{m_i}.$$

Твърдение 3.14 ни гарантира, че термалните оператори, ограничени до *монотонните функции*, вече са непрекъснати. Да означим с

$$\Gamma\ =\ \Gamma_{\tau_1}\times\dots\times\Gamma_{\tau_k}$$

декартовото произведение на операторите $\Gamma_{\tau_1},\dots,\Gamma_{\tau_k}$. Тогава и Γ ще е непрекъснат, съгласно *Твърдение* 2.8.

Операторът Γ е от следния вид:

$$\Gamma:\mathcal{M}_{m_1}\times\dots\times\mathcal{M}_{m_k}\ \longrightarrow\ \mathcal{M}_{m_1}\times\dots\times\mathcal{M}_{m_k}.$$

Той е непрекъснат в областта на Скот

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}\ =\ (\mathcal{M}_{m_1}\times\dots\times\mathcal{M}_{m_k},\ \sqsubseteq,\ (\Omega^{(m_1)},\dots,\Omega^{(m_k)})).$$

Тогава към Γ можем да приложим теоремата на Кнастер-Тарски и да получим, че той има най-малка неподвижна точка

$$f_\Gamma\ =\ (f_\Gamma^1,\dots,f_\Gamma^k).$$

Да означим с $h : \mathbb{N}^n_\perp \longrightarrow \mathbb{N}_\perp$ функцията, определена от главата $\tau_0(X_1, \dots, X_n, F_1, \dots, F_k)$ на програмата R по следния начин:

$$h(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{деф}}{=} \tau_0(x_1, \dots, x_n, f^1_\Gamma, \dots, f^k_\Gamma).$$

Ако разсъждаваме по аналогия с денотационната семантика *по стойност*, би трябвало да положим $D_N(R) \stackrel{\text{деф}}{=} h$. Проблемът е, че h е функция в $\mathbb{N}_\perp$, докато нашата програма работи само над естествени числа. Затова трябва да "върнем" h в света на естествените числа, което ставаше чрез изображението $^\circ$, дефинирано с равенството (3.20). Сега вече можем да положим $D_N(R) = h^\circ$.

Определение 3.18. *Денотационна семантика с предаване на параметрите по име* на програмата R е функцията

$$D_N(R) : \mathbb{N}^n \multimap \mathbb{N},$$

която се определя с условното равенство:

$$D_N(R)(x_1, \dots, x_n) \simeq \begin{cases} \tau_0(x_1, \dots, x_n, f^1_\Gamma, \dots, f^k_\Gamma)), & \text{ако } \ \tau_0(\bar{x}, f^1_\Gamma, \dots, f^k_\Gamma)) \neq \perp \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

за всяка n-торка $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$.

Теорема. За всяка рекурсивна програма R:

$$O_N(R) = D_N(R).$$

Доказателството на тази теорема, най-общо, следва доказателството на аналогичната теорема за денотаиионната семантика по стойност, но иска повече грижи (въвеждане на допълнителни понятия, доказване на спомагателни твърдения и пр.). Ако сте любопитни, може да го прочетете във файла с лекциите.