# Лекция №6

# Области на Скот

Областите на Скот (ОС) са абстрактната математическа среда, в която се развива т. нар. Теория на неподвижните точки — математически подход, чрез който се дефинира *денотационна семантика* или *семантика с неподвижни точки* (*fixpoint semantics*) на някои видове програми — рекурсивни, логически и пр. Всичко, което правихме дотук в глава Оператори, беше всъщност работа в една конкретна област на Скот (*Твърдение* 2.1).

## 2.1 Определение и най-важни примери

### 2.1.1 Пълни наредби

Да напомним, че бинарната релация $\leqslant$ в множеството $A$ е *частична наредба* на $A$, ако тя е рефлексивна, транзитивна и антисиметрична.

Ще казваме, че частичната наредба $\leqslant$ е *пълна* (*complete*), ако всяка монотонно растяща редица

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \ \ldots$$

от елементи на $A$ (или всяка *верига в* $A$) има точна горна граница $\underset{n}{lub}\, a_n$, която принадлежи на $A$.

В конкретните ОС, които по-нататък ще ни интересуват, ще използваме специфични означения за точната горна граница — например $\bigcup_n f_n$, както беше в предишната глава, или $\bigsqcup_n f_n$, както ще е в раздел 3.5, където ще разглеждаме една друга важна ОС. За общата теория на областите на Скот предпочитаме, обаче, по-неутралното $lub$ (от **l**east **u**pper **b**ound).

**Определение 2.1.** *Област на Скот (Scott domain)* наричаме наредена тройка $\boldsymbol{A} = (A, \leqslant, a_0)$, за която са изпълнени условията:

1) $A$ е непразно множество;

2) $\leqslant$ е пълна частична наредба на $A$;

3) $a_0 \in A$ е най-малкият елемент на $A$ (относно наредбата $\leqslant$), с други думи, $a_0 \leqslant a$ за всяко $a \in A$.

Множеството $A$ ще наричаме *носител* или *домейн* на структурата $\boldsymbol{A}$. В англоезичната литература областите на Скот се наричат още *cpo* — от *complete partial order*.

Горните аксиоми на ОС са минималните изисквания, които са необходими, за да може в структурата $(A, \leqslant, a_0)$ да се докаже теорема на Кнастер-Тарски.

### 2.1.2 Областта на Скот $(\mathcal{F}_n,\ \subseteq,\ \emptyset^{(n)})$ и други примери

Ето няколко примера за структури, които са (или не са) области на Скот.

**Примери:**

1) Нека $M$ е произволно множество, а $\mathscr{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$. Тогава наредената тройка $(\mathscr{P}(M),\ \subseteq,\ \emptyset)$ е област на Скот.

**Доказателство.** Добре известно е, че релацията $\subseteq$ е частична наредба в $\mathscr{P}(M)$. Това, че тя е пълна, следва от факта, че за всяка фамилия $\{A_i|\ i \in I\}$ от подмножества на $M$, обединението

$$\bigcup_{i\in I} A_i$$

се явява точна горна граница на тази фамилия. В частност, това ще е вярно и за всяка *редица* $A_0, A_1, \ldots$ в $\mathscr{P}(M)$. Да отбележим, че тук не е необходимо редицата да е монотонно растяща, за да притежава точна горна граница. $\square$

2) Структурата $(\mathbb{N},\ \leq,\ 0)$ *не* е област на Скот (тук $\leq$ е обичайното неравенство в $\mathbb{N}$).

**Доказателство.** Релацията $\leq$ е наредба на $\mathbb{N}$ (дори е тотална наредба), но очевидно не всяка монотонно растяща редица има граница. Пример за такава редица е, да кажем, редицата $0,\ 1,\ 2, \ldots$. $\square$

3) Област на Скот е разширената структура $(\mathbb{N} \cup \{\infty\},\ \leq,\ 0)$, където $0 \leq \infty,\ 1 \leq \infty, \ldots$, т.е. $\infty$ е най-големият елемент на $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

**Доказателство.** Множеството $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ изглежда така: $0 \leq 1 \leq \cdots \leq \infty$. Сега ако растящата редица $a_0 \leq a_1 \leq\ \ldots$ е ограничена, то тя очевидно има вида $a_0 \leq a_1 \leq \ldots a_n = a_{n+1} = \ldots$ и значи нейната граница е $a_n$. Ако тази редица е неограничена, то нейната граница ще е $\infty$. $\square$

4) Структурата $(\{a,b\}^\star,\ \preccurlyeq,\ \varepsilon)$, където $\preccurlyeq$ е релацията "префикс", а $\varepsilon$ е празният низ, *не* е област на Скот.

**Доказателство.** Редицата $a \sqsubseteq aa \sqsubseteq aaa\ldots$ очевидно няма точна горна граница. $\square$

За една друга структура — $(\mathcal{F}_n,\ \subseteq,\ \emptyset^{(n)})$ — на практика вече знаем, че е област на Скот. И тъй като този факт ще е от особена важност, ще го формулираме като отделно твърдение, което ще цитираме многократно по-нататък.

**Твърдение 2.1.** За всяко $n \geq 1$ структурата $\boldsymbol{\mathcal{F}_n} = (\mathcal{F}_n,\ \subseteq,\ \emptyset^{(n)})$ е област на Скот.

**Доказателство.** Имаме, че за всяка $f \in \mathcal{F}_n$

$$\emptyset^{(n)} \subseteq f,$$

т.е. празната функция $\emptyset^{(n)}$ е най-малкият елемент на $\mathcal{F}_n$. Освен това вече видяхме, че релацията $\subseteq$ е частична наредба (*Твърдение* 1.1), която при това е пълна (*Твърдение* 1.4).

Следователно $\boldsymbol{\mathcal{F}_n} = (\mathcal{F}_n,\ \subseteq,\ \emptyset^{(n)})$ е област на Скот. $\square$

Да отбележим, че ако се ограничим до множеството на всички *крайни* $n$-местни функции $\mathcal{F}_n^{fin} \subseteq \mathcal{F}_n$, структурата с носител $\mathcal{F}_n^{fin}$ вече не е област на Скот.

**Задача 2.1.** Докажете, че за всяко $n \geq 1$ структурата $\boldsymbol{\mathcal{F}_n^{fin}} = (\mathcal{F}_n^{fin}, \subseteq, \emptyset^{(n)})$ *не* е област на Скот.

**Решение.** Проблемът е в това, че границата на монотонно растяща редица от крайни функции може да е безкрайна, или другояче казано, свойството

$$P(f) \iff f \text{ е крайна}$$

не е непрекъснато в $\mathcal{F}_n^{fin}$ — нещо, което вече установихме в *Задача* 1.6. Това означава, че частичната наредба $\subseteq$ в множеството на *крайните* $n$-местни функции не е пълна. $\square$

Накрая да отбележим и очевидния факт, че ако разглеждаме частични функции в *произволно множество* $D$, наредени с релацията $\subseteq$, отново имаме област на Скот.

**Задача 2.2.** Да фиксираме $n \geq 1$. Нека $D$ е произволно множество, а $F_n = \{f \mid f : D^n \longrightarrow\!\!\!\circ\; D\}$. За $f, g \in F_n$ да положим $f \subseteq g \iff G_f \subseteq G_g$. Нека още $\emptyset^{(n)}$ е никъде недефинираната функция в $D$. Докажете, че наредената тройка $(F_n,\ \subseteq,\ \emptyset^{(n)})$ е област на Скот.

**Решение.** Повтаря доказателството на *Твърдение* 2.1. $\square$

### 2.1.3 Плоската наредба и плоската ОС $(D_\perp, \sqsubseteq, \perp)$

Сега ще въведем една много семпла бинарна релация в произволно множество $D$ — тъй наречената *плоска наредба (flat order)*. Макар и да е съвсем проста, тя стои в основата на едната от двете най-важни за теоретичната информатика области на Скот — тази, която е модел за *call-by-name*.

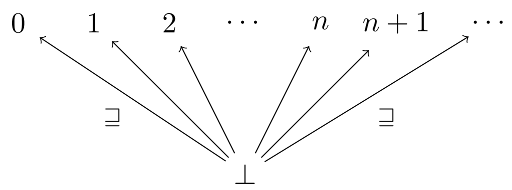
Да фиксираме произволно непразно множество $D$ и да изберем един обект $\perp$, такъв че $\perp \notin D$. Предназначението на $\perp$ е да бъде нещо като *име на недефинираността*, т.е. грубо казано, в този модел вместо $\neg ! f(5)$ ще пишем $f(5) = \perp$. Ако ви се струва, че това е едно и също, изчакайте до следващата глава $\ddot\smile$.

Нека $D_\perp = D \cup \{\perp\}$. В $D_\perp$ дефинираме следната бинарна релация:

$$a \sqsubseteq b \overset{\text{деф}}{\iff} a = \perp \ \vee \ a = b. \tag{2.1}$$

Ясно е, че $\perp \sqsubseteq a$ за всяко $a \in D_\perp$, т.е. $\perp$ е най-малкият елемент на $D_\perp$. Образно казано, той е на дъното на $D_\perp$, затова понякога се нарича *bottom* елемент. Ясно е още, че $a \sqsubseteq a$ за всяко $a \in D_\perp$, и това всъщност са всички връзки между елементите на $D_\perp$.

Ето как изглежда графично релацията $\sqsubseteq$ в множеството $\mathbb{N}_\perp$ (без примките $n \sqsubseteq n$):




**Твърдение 2.2.** За всяко множество $D$ структурата $\boldsymbol{D_\perp} = (D_\perp,\ \sqsubseteq,\ \perp)$ е област на Скот.

**Доказателство.** Вече забелязахме, че $\perp$ е най-малкият елемент на $D_\perp$. Да проверим условията от дефиницията за частична наредба:

- *рефлексивност*: При $a = b$ дясната част на (2.1) е винаги вярна и следователно $a \sqsubseteq a$ за всяко $a \in D_\perp$ (което вече отбелязахме по-горе).

- *транзитивност*: За произволни $a, b, c \in D_\perp$ нека $a \sqsubseteq b \;\&\; b \sqsubseteq c$. Трябва да видим, че $a \sqsubseteq c$. Ако $a = \perp$, то очевидно $a \sqsubseteq c$. Ако $a \neq \perp$, то съгласно (2.1) трябва $a = b$, и понеже $b \sqsubseteq c$, значи отново $a \sqsubseteq c$.

- *антисиметричност*: За произволни $a$ и $b$ от $D_\perp$ нека $a \sqsubseteq b$ & $b \sqsubseteq a$. Трябва да покажем, че $a = b$. От $a \sqsubseteq b$ имаме според (2.1) два случая: $a = b$ или $a = \perp$. Ако е налице първият случай — чудесно; ако пък $a = \perp$, то от $b \sqsubseteq a$ ще имаме, че и $b = \perp$, и значи отново $a = b$.

Остана да видим, че $\sqsubseteq$ е пълна. Да вземем една монотонно растяща редица в $D_\perp$ :

$$a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \dots$$

Как изглежда тя? Ако първият ѝ член $a_0$ не е $\perp$, то тогава

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots$$

и значи границата на тази редица е $a_0$.

Ако $a_0 = \perp$, отново имаме два случая: първият е всички елементи на редицата да са $\perp$, който е ясен, а вторият — да съществува $n : a_n \neq \perp$. Ако $n$ е първото естествено число, за което това се случва, то редицата ще изглежда така:

$$\underbrace{\perp, \dots \perp}_{n \text{ пъти}}, a_n, a_n, \dots$$

и очевидно нейната граница е $a_n$. □

**Определение 2.2.** Наредбата $\sqsubseteq$ на $D_\perp$ ще наричаме *плоска наредба*, а наредената тройка $(D_\perp,\ \sqsubseteq,\ \perp)$ — *плоска област на Скот*.

Да отбележим отново, че всяка монотонно растяща редица (верига) $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \dots$ в областта $(D_\perp,\ \sqsubseteq,\ \perp)$ изглежда по един от следните три начина:

- $\perp,\ \perp,\ \perp, \dots$
- $\underbrace{\perp, \dots \perp}_{n \geq 1}, a,\ a, \dots$
- $a,\ a,\ a, \dots$

Точната горна граница на редицата $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \dots$ ще означаваме с

$$\bigsqcup_n a_n$$

или само с $\bigsqcup a_n$. За нас най-голям интерес ще представлява плоската област с носител $\mathbb{N}_\perp$.

## 2.2 Конструкции на области на Скот

По-горе отбелязахме, че плоската ОС $(\mathbb{N}_\perp,\ \sqsubseteq,\ \perp)$ ще ни трябва за моделиране на семантиката с отложени пресмятания на рекурсивните програми в $\mathbb{N}$. Всъщност истината е, че за да моделираме тези пресмятания, ще ни е нужна една по-друга област — тази на *тоталните функции* в $\mathbb{N}_\perp$, и по-общо — на тоталните функции в $\mathbb{N}^n_\perp$. Целта на този раздел е да покажем, че тези функции също образуват област на Скот. Този факт ще получим като частен случай на две много общи конструкции, чрез които по дадени ОС ще получаваме нова ОС. Първата конструкция е декартово произведение.

### 2.2.1 Декартово произведение на ОС

Нека са дадени $k$ на брой области на Скот

$$\boldsymbol{A_1} = (A_1,\ \leqslant_1,\ \perp_1),\ \dots\ ,\boldsymbol{A_k} = (A_k,\ \leqslant_k,\ \perp_k).$$

В декартовото произведение $A = A_1 \times \dots \times A_k$ определяме нова релация $\leqslant$, породена от локалните наредби във всяка от дадените области. По-конкретно, за произволни $(a_1, \dots, a_k) \in A$ и $(b_1, \dots, b_k) \in A$ полагаме:

$$(a_1, \dots, a_k) \leqslant (b_1, \dots, b_k) \ \stackrel{\text{деф}}{\Longleftrightarrow}\ a_1 \leqslant_1 b_1\ \&\ \dots\ \&\ a_k \leqslant_k b_k. \tag{2.2}$$

**Твърдение 2.3.** Така въведената релация $\leqslant$ е частична наредба в $A = A_1 \times \dots \times A_k$ с най-малък елемент $\perp = (\perp_1, \dots, \perp_k)$.

**Доказателство.** Очевидно от дефинициите $\smile$. $\square$

Тази наредба ще наричаме *покомпонентна наредба*. Да се убедим, че тя е пълна:

**Твърдение 2.4.** Нека $\boldsymbol{A_1} = (A_1,\ \leqslant_1,\ \perp_1),\ \dots\ ,\boldsymbol{A_k} = (A_k,\ \leqslant_k,\ \perp_k)$ са области на Скот. Тогава е вярно, че:

1) Редицата $\{(a_1^n, \dots, a_k^n)\}_n$ е монотонно растяща в $A_1 \times \dots \times A_k$ тогава и само тогава, когато всяка от редиците $\{a_i^n\}_n$ е монотонно растяща в $A_i$, за $i = 1, \dots, k$.

2) Ако редицата $\{(a_1^n, \dots, a_k^n)\}_n$ е монотонно растяща в $A_1 \times \dots \times A_k$, то тя има точна горна граница $(b_1, \dots, b_k)$, където $b_i, 1 \le i \le k$ е точната горна граница на редицата $\{a_i^n\}_n$ в $A_i$.

**Доказателство.** 1) За произволно $n$ имаме по определение:

$$(a_1^n, \dots, a_k^n) \leqslant (a_1^{n+1}, \dots, a_k^{n+1}) \iff a_1^n \leqslant_1 a_1^{n+1} \ \& \ \dots \ \& \ a_k^n \leqslant_k a_k^{n+1}.$$

Следователно редицата от $k$-орките е растяща в $A_1 \times \dots \times A_k$ точно когато локално по всяка компонента са растящи редиците $\{a_i^n\}_n$.

2) Нека $\{(a_1^n, \dots, a_k^n)\}_n$ е монотонно растяща в $A_1 \times \dots \times A_k$. Току-що видяхме, че тогава и всяка от редиците $\{a_i^n\}_n$ ще е монотонно растяща в $A_i$. Но $(A_i, \leqslant_i, \perp_i)$ е област на Скот. Следователно там $\{a_i^n\}_n$ има точна горна граница, да я означим с $b_i$:

$$b_i = \underset{n}{lub}\ a_i^n.$$

Изглежда логично $k$-орката $(b_1, \dots, b_k)$ да е точната горна граница на редицата $\{(a_1^n, \dots, a_k^n)\}_n$. Това наистина е така и в доказателството няма нищо неочаквано, но да го проведем все пак.

Да фиксираме някакво $n$. Имаме, че $a_i^n \leqslant_i b_i$ за всяко $i = 1, \dots\ k$, което означава, че

$$(a_1^n, \dots, a_k^n) \ \leqslant\ (b_1, \dots, b_k).$$

Понеже това е за всяко $n$, значи $(b_1, \dots, b_k)$ мажорира всеки член на редицата $\{(a_1^n, \dots, a_k^n)\}_n$, т.е. $(b_1, \dots, b_k)$ е горна граница на тази редица. Сега ако $(c_1, \dots, c_k)$ е друга нейна горна граница, то за произволно $n$ ще е изпълнено:

$$(a_1^n, \dots, a_k^n) \ \leqslant\ (c_1, \dots, c_k).$$

В частност, при фиксирано $i$ ще имаме $a_i^n \leqslant_i c_i$, и това е за всяко $n$, т.е. $c_i$ е горна граница за редицата $\{a_i^n\}_n$. Но $b_i$ е нейната точна горна граница и значи

$$b_i \leqslant_i c_i.$$

И тъй като това е вярно за всяко $i = 1, \dots, k$, то $(b_1, \dots, b_k) \leqslant (c_1, \dots, c_k)$. □

Точната горна граница на редицата $\{(a_1^n, \dots, a_k^n)\}_n$ ще означаваме с $\underset{n}{lub}\ (a_1^n, \dots, a_k^n)$. От доказаното по-горе можем да запишем:

$$\underset{n}{lub}\ (a_1^n, \dots, a_k^n) \ = \ (\underset{n}{lub}\ a_1^n, \dots, \underset{n}{lub}\ a_k^n) \tag{2.3}$$

Твърдения 2.3 и 2.4 ни дават общо, че декартово произведение на ОС е ОС:

**Твърдение 2.5.** Нека $\boldsymbol{A_1} = (A_1, \leqslant_1, \perp_1), \dots, \boldsymbol{A_k} = (A_k, \leqslant_k, \perp_k)$ са ОС. Тогава декартовото им произведение $\boldsymbol{A} = (A_1 \times \dots \times A_k, \leqslant, (\perp_1, \dots, \perp_k)\,)$ също е област на Скот.

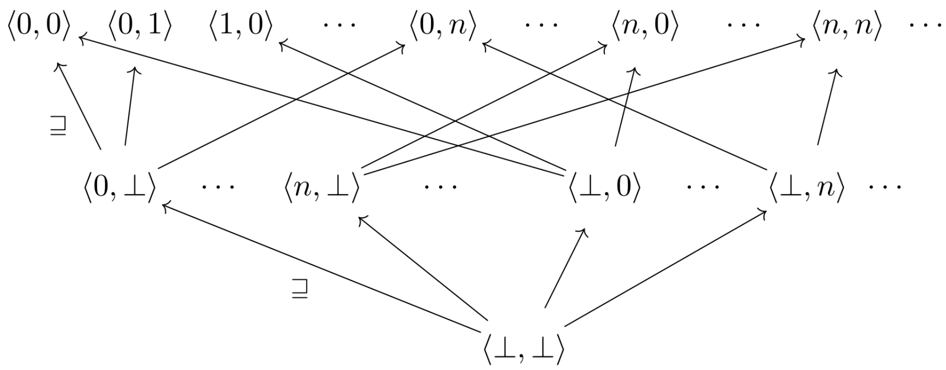
От това твърдение получаваме, че две важни за нашите разглеждания структури са области на Скот.

**Следствие 2.1.** Структурата $\mathbb{N}_\perp^n = (\underbrace{\mathbb{N}_\perp \times \cdots \times \mathbb{N}_\perp}_{n \text{ пъти}},\ \sqsubseteq,\ \underbrace{(\perp, \ldots, \perp)}_{n \text{ пъти}})$ е област на Скот.

По-нататък декартовото произведение $\underbrace{\mathbb{N}_\perp \times \cdots \times \mathbb{N}_\perp}_{n \text{ пъти}}$ ще съкращаваме до $\mathbb{N}_\perp^n$. Да обърнем внимание, че това е означение за $(\mathbb{N}_\perp)^n$, а *не* за $(\mathbb{N}^n)_\perp \stackrel{\text{деф}}{=} \mathbb{N}^n \cup \{\perp\}$ (последното множество няма да представлява никакъв интерес за нас).

Разбира се, наредбата $\sqsubseteq$ в новата ОС $\mathbb{N}_\perp^n = (\mathbb{N}_\perp^n,\ \sqsubseteq,\ (\perp, \ldots, \perp))$ е релация между $n$-торки в $\mathbb{N}_\perp^n$, макар че ние ще я означаваме със същия символ, с който бележехме плоската наредба в първоначалната ОС $(\mathbb{N}_\perp,\ \sqsubseteq,\ \perp)$. Областта на Скот $\mathbb{N}_\perp^n$ ще изучим подробно, когато стигнем до денотационната семантика с предаване на параметрите по име в раздел 3.5.

Ето как изглежда тази наредба при $n = 2$, т.е. за областта на Скот




Вече видяхме (*Твърдение* 2.1), че за произволно $n$ структурата $(\mathcal{F}_n,\ \subseteq,\ \emptyset^{(n)})$ е ОС. Сега отново прилагаме доказаното по-горе *Твърдение* 2.5 и получаваме още една важна за нас ОС:

**Следствие 2.2.** За произволни положителни $n_1, \ldots, n_k$, структурата $\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_{n_1} \times \cdots \times \mathcal{F}_{n_k},\ \subseteq,\ (\emptyset^{(n_1)}, \ldots, \emptyset^{(n_k)})\ )$ е област на Скот.

Точно в тази ОС в следващата глава ще дефинираме денотационната семантика с предаване на параметрите *по стойност*.

### 2.2.2 Функционални пространства над ОС

Нека $M$ е произволно множество, а $\boldsymbol{A} = (A,\ \leqslant,\ a_0)$ е някаква ОС. Ще ни интересуват *тоталните* изображения от $M$ към $A$. Нека $\mathcal{F}$ е съвкупността от всички такива изображения:

$$\mathcal{F} = \{f \mid f\colon M \longrightarrow A\}.$$

В $\mathcal{F}$ въвеждаме бинарна релация $\preccurlyeq$, породена от наредбата в $A$, по следния естествен начин: за произволни $f, g \in \mathcal{F}$ полагаме

$$f \preccurlyeq g \stackrel{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in M \ f(x) \leqslant g(x). \tag{2.4}$$

Както ще се убедим след малко, тази релация също е частична наредба. Ще я наричаме *поточкова наредба*. Нещо повече, тази наредба ще се окаже пълна. Ясно кой ще е най-малкият елемент на $\mathcal{F}$ — това ще е функцията, която винаги връща най-малкия елемент на $A$. Тази функция ще означаваме с $\Omega$:

$$\Omega(x) \stackrel{\text{деф}}{=} a_0$$

за всяко $x \in M$.
Наистина, да вземем произволна $f \in \mathcal{F}$. Имаме, че за всяко $x \in M$:

$$\Omega(x) = a_0 \leqslant f(x),$$

и следователно $\Omega \preccurlyeq f$, т.е. действително $\Omega$ е най-малката функция в $\mathcal{F}$. Вече сме готови да покажем, че:

**Твърдение 2.6.** При означенията от по-горе, структурата $\boldsymbol{\mathcal{F}} = (\mathcal{F},\ \preccurlyeq,\ \Omega)$ е област на Скот.

**Доказателство.** Аксиомите за частична наредба се проверяват непосредствено. Да видим, например, защо $\preccurlyeq$ е транзитивна:

Наистина, нека за $f, g, h \in \mathcal{F}$ е вярно, че

$$f \preccurlyeq g \text{ и } g \preccurlyeq h.$$

За да видим, че и $f \preccurlyeq h$, да вземем произволно $x \in M$. От определение (2.4) имаме, че

$$f(x) \leqslant g(x) \quad \text{и} \quad g(x) \leqslant h(x).$$

Но $f(x), g(x)$ и $h(x)$ са елементи на носителя $A$ на ОС $\boldsymbol{A} = (A,\ \leqslant,\ a_0)$. Тогава от транзитивността на $\leqslant$ ще имаме $f(x) \leqslant h(x)$. Но $x \in M$ беше произволно и значи

$$\forall x \in M \ f(x) \leqslant h(x),$$

което съгласно (2.4) означава точно $f \preccurlyeq h$.

За да се убедим, че новата наредба $\preccurlyeq$ е пълна, да вземем една монотонно растяща редица в $\mathcal{F}$:

$$f_0 \preccurlyeq f_1 \preccurlyeq \dots$$

Тогава от определението на релацията $\lesssim$ ще имаме, че за кое да е $x \in M$:

$$f_0(x) \leqslant f_1(x) \leqslant \dots,$$

с други думи, тази редица е монотонно растяща в $A$. Но там релацията $\leqslant$ е пълна, следователно тя има т. г. граница

$$\underset{n}{lub}\ f_n(x).$$

Звучи логично точната горна границата на редицата $\{f_n\}_n$ да е функцията $f$, която се дефинира с равенството

$$f(x) \overset{\text{деф}}{=} \underset{n}{lub}\ f_n(x) \tag{2.5}$$

за всяко $x \in M$.

За да се убедим, че това е така, да проверим най-напред, че

$$\forall n\ f_n \lesssim f,$$

т.е. че $f$ е горна граница на редицата $\{f_n\}_n$. За целта да фиксираме произволно $n \in \mathbb{N}$. Неравенството $f_n \lesssim f$ е еквивалентно на

$$\forall x \in M\ f_n(x) \leqslant f(x),$$

което е вярно, защото по дефиниция $f(x)$ мажорира $f_n(x)$ за всяко $x \in M$.

Нека сега $g$ е друга горна граница на редицата $\{f_n\}_n$, т.е.

$$\forall n\ f_n \lesssim g.$$

Тогава съгласно определение (2.4):

$$\forall n\ \forall x \in M\ f_n(x) \leqslant g(x).$$

Последното е еквивалентно на

$$\forall x \in M\ \forall n\ f_n(x) \leqslant g(x).$$

Сега да фиксираме $x \in M$. Имаме $\forall n\ f_n(x) \leqslant g(x)$, което означава, че $g(x)$ е горна граница на редицата $\{f_n(x)\}_n$. Но $f(x)$ е точната горна граница на тази редица и значи $f(x) \leqslant g(x)$. Това неравенство е изпълнено за всяко $x \in M$, което ни дава финално $f \lesssim g$, т.е. $f$ е най-малката сред горните граници на $\{f_n\}_n$. $\square$

Да запишем още веднъж как се дефинира точната горна граница $\underset{n}{lub}\ f_n$ на една монотонно растяща редица $f_0 \leqslant f_1 \leqslant \dots$:

$$(\underset{n}{lub}\ f_n)(x) \ = \ \underset{n}{lub}\ f_n(x) \tag{2.6}$$

Тук първата точна горна граница е в областта на Скот $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, а втората — в областта $\boldsymbol{A}$.

Да приложим току-що доказаното за случая, когато множеството $M$ е $\mathbb{N}_\perp^n$, а областта на Скот $\boldsymbol{A}$ е $(\mathbb{N}_\perp,\ \sqsubseteq,\ \perp)$. Новополучената функционална ОС ще е с домейн — множеството от всички *тотални* $n$-местни функции в $\mathbb{N}_\perp$. Това множество ще означаваме с $\mathcal{F}_n^\perp$, по подобие на множество на $n$-местните ***частични*** функции в $\mathbb{N}$, което означавахме с $\mathcal{F}_n$. С други думи,

$$\mathcal{F}_n^\perp = \{f \mid f\colon\ \mathbb{N}_\perp^n \longrightarrow \mathbb{N}_\perp\}.$$

Нека още

$$\Omega^{(n)}(x_1,\dots,x_n) \ \stackrel{\text{деф}}{=}\ \perp$$

за всяко $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{N}_\perp^n$.

Сега от *Твърдение* 2.6 получаваме важното

**Следствие 2.3.** Структурата $\boldsymbol{\mathcal{F}_n^\perp} \ = (\mathcal{F}_n^\perp,\ \sqsubseteq,\ \Omega^{(n)})$ е област на Скот.

Комбинираме този факт с доказаното по-горе за декартови произведения на ОС (*Твърдение* 2.5) и получаваме по-общо, че

**Следствие 2.4.** За произволни положителни $n_1,\dots,n_k$, структурата

$$\boldsymbol{\mathcal{F}^\perp} = (\mathcal{F}_{n_1}^\perp \times \dots \times \mathcal{F}_{n_k}^\perp,\ \sqsubseteq,\ (\Omega^{(n_1)},\dots,\Omega^{(n_k)}))$$

е област на Скот.

Точно в тази ОС ще дефинираме денотационната семантика с предаване на параметрите *по име*.