Тройни интеграли

Въвеждането на двоен интеграл може да се обобщи към повече измерения. Ако $K \subseteq \mathbb{R}^3$ и $f: K \to \mathbb{R}$, можем да дефинираме разбиване на D и съответните Риманови суми.

В задачите, които ще разглеждаме f - непрекъсната, K - "хубаво множество", и интеграл $\iiint\limits_K f(x,y,z)\,dxdydz$ винаги ще съществува.

Ще посочим два начина за пресмятане на троен интеграл:

Тв. (цилиндрично тяло) Ако $K: \begin{cases} h(x,y) \le z \le g(x,y) \\ (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \end{cases}$, $h(x,y) \le g(x,y)$ за всяко $(x,y) \in D$,

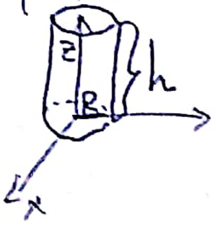
то $$\iiint\limits_K f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_D \left[\int_{h(x,y)}^{g(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dxdy$$

Изразът в квадратните скоби е функция само на x и y и така свеждаме тройния интеграл към двоен. Нататък двойния интеграл смятаме с всички познати средства досега - представяме D като криволинеен трапец или правим смяна на променливите.

Множество от вида $\begin{cases} h(x,y) \le z \le g(x,y) \\ (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \end{cases}$ се нарича цилиндрично тяло ($h(x,y) \le g(x,y)$ за всяко $(x,y) \in D$).

Пр. Познатият (прав кръгов) цилиндър е цилиндрично тяло:

$K \begin{cases} 0 \le z \le h \\ x^2 + y^2 \le R^2 \end{cases}$



Прав кръгов конус, сфера, куб, ... също се представят като цилиндрични тела.

Тв. (Принцип на Кавалиери) $K: \begin{cases} a \le x \le b \\ (y,z) \in D_x \subseteq \mathbb{R}^2 \end{cases}$.

Тогава $$\iiint\limits_K f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \underbrace{\left[\iint\limits_{D_x} f(x,y,z)\,dydz \right]}_{\text{функция само на } x.} dx$$

Тройният интеграл представяме като повторение на двоен и единичен. При цилиндрично тяло, единичния е вътре; при Кавалиери - единичния отвън.

Зад. 1. Пресметнете $\iiint_K (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$ в паралелепипеда $K: \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \\ 0 \le z \le c \end{cases}$.

Реш. Може да приложим Кавалиери (а може и цилиндрично тяло).

$K: \begin{cases} 0 \le x \le a \\ D_x: \begin{cases} 0 \le y \le b \\ 0 \le z \le c \end{cases} \end{cases}$ В общия случай, D_x зависи от x, но тук не зависи.

$$\iiint_K (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^a \left[\iint_{D_x} (x+y+z)\,dy\,dz \right] dx.$$

Пресмятаме вътрешния интеграл. D_x е правоъгълник, в частност криволинеен трапец. При това пресмятане третираме x като константа.

$$\iint_{D_x} (x+y+z)\,dy\,dz = \int_0^b \left(\int_0^c (x+y+z)\,dz \right) dy = \int_0^b \left[(x+y)z + \frac{z^2}{2} \Big|_0^c \right] dy =$$

$$= \int_0^b \left[(x+y).c + \frac{c^2}{2} \right] dy = \int_0^b \left(cx + \frac{c^2}{2} + cy \right) dy = \left(cx + \frac{c^2}{2} \right) b + c.\int_0^b y\,dy =$$

$$= \left(cx + \frac{c^2}{2} \right) b + c.\frac{b^2}{2} = cbx + \frac{c^2 b}{2} + \frac{cb^2}{2} = \frac{cb}{2}(2x + c + b).$$

Заместваме и пресмятаме най-външния интеграл:

$$\int_0^a \frac{cb}{2}(2x+c+b)\,dx = \frac{cb}{2}\int_0^a (2x+c+b)\,dx = \frac{cb}{2}\left(x^2 + (c+b)x\right)\Big|_0^a =$$

$$= \frac{cb}{2}\left(a^2 + (c+b)a\right) = \frac{cb}{2}.a(a+c+b) = \frac{abc}{2}(a+b+c).$$

Бел. Твърдението за интегриране в цилиндрично тяло и принципа на Кавалиери могат да се прилагат по всяка променлива (стига множеството да има подходящия вид).

Зад. 2. Намерете $\iiint_K \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, $K: \begin{cases} x, y, z \ge 0 \\ x+y+z \le 1 \end{cases}$.

Реш. В K, $x+y+z \ge 0 \Rightarrow x+y+z+1 \ge 1 > 0$ и знаменателят не се нулира. Решаваме неравенствата за K относно z: $\begin{matrix} z \ge 0 \\ z \le 1-x-y \end{matrix}$.

Така $\begin{cases} 0 \le z \le 1-x-y \\ x, y \ge 0 \end{cases}$. За да е цилиндрично тяло, трябва $1-x-y \ge 0$, т.е. $x+y \le 1$.

Така: $K: \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ (x,y) \in D \end{cases}$, където $D: \begin{cases} x, y \ge 0 \\ x+y \le 1 \end{cases}$.

Интегриране в цилиндричното тяло K.

$$\iiint_K \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3} = \iint_D \left[\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \right] dxdy =$$

Вътрешния интеграл: $\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^{1-x-y} \frac{d(1+x+y+z)}{(1+x+y+z)^3} =$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x+y+z)^2} \Big|_0^{1-x-y} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x+y+1-x-y)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x+y+0)^2} =$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right].$$

Нататък представяме D като трапец по x: $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x+y \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x \end{cases}$.

$$\iint_D \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right) dxdy = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right) dy\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{(1+x+y)} - \frac{1}{4} y\right)\Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{1+x+1-x} - \frac{1}{4}(1-x) + \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{1+x}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{3}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{1+x}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8} + \ln|1+x|\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \ln 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-6+1+8\ln 2}{8}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{8\ln 2 - 5}{16}}$$

(Когато интегрираме положителна функция, трябва да получим положително число. $\ln 2 \approx 0{,}69 > 0{,}625 = 5/8$ $\Rightarrow$ $\ln 2 > 5/8$ и $8\ln 2 - 5 > 0$).

---

3. При пресмятане на двойни интеграли често ползваме смени на променливите. Смени можем да правим и при повече променливи.

$$\begin{cases} x = f(u,v,w) \\ y = g(u,v,w) \\ z = h(u,v,w) \end{cases}$$

- Еднозначна смяна
- f, g, h имат непрекъснати първи частни производни
- $(x,y,z) \in K \iff (u,v,w) \in T$ – образ при смяната.

При смени на 2 променливи, пресмятаме Якобианът на смяната, който е абсолютната стойност на детерминанта на 2x2 матрица. Тук единствената разлика е, че матрицата е 3x3.

$J = \begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u & h'_v & h'_w \end{vmatrix}$. Якобианът на тази смяна е $|J|$.

Тогава $\iiint\limits_K p(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_T p(f(u,v,w), g(u,v,w), h(u,v,w)) \cdot |J|\,du\,dv\,dw$.

Ще посочим две основни смени и ще пресметнем Якобианите им.

Цилиндрична смяна $\boxed{\begin{matrix} x = r\cos\varphi & , r \geq 0 \\ y = r\sin\varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = t & t \in \mathbb{R} \end{matrix}}$ (по същество полярна смяна)

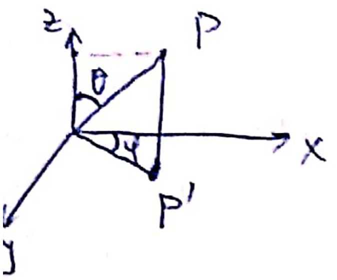
$$|J| = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_t \\ y'_r & y'_\varphi & y'_t \\ z'_r & z'_\varphi & z'_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Напомняме, че и при полярната смяна Якобианът е r.

Сферична смяна Всяка точка от повърхността на Земята се определя от географската си ширина и дължина, т.е. от два ъгъла.
географската дължина е между -180° и $+180^\circ$, т.е. между $-\pi$ и π.
географската ширина е между -90° и 90°, т.е. между $-\pi/2$ и $\pi/2$.

В нашите разглеждания точка от сфера ще определяме с два ъгъла: $\varphi \in [-\pi; \pi]$ и $\theta \in [0; \pi]$ за разлика от географията.

Нека P е на разстояние r от началото O.



Проектираме P в равнината Oxy. Проекцията е P'.
φ е ъгълът между $\vec{Ox}$ и OP', $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
θ е ъгълът между $\vec{Oz}$ и OP, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Тогава пресмятаме Декартовите координати на P:

$z = r.\cos\theta$ като проекция на OP върху $\vec{Oz}$.
Но $z = r\cos\theta = PP'$. Тогава $OP' = r.\sin\theta$.
Нататък x и y намираме като при полярна смяна:
$x = (r\sin\theta)\cos\varphi$
$y = (r\sin\theta)\sin\varphi$

Така изводохме сферичната смяна:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{array}, \quad \begin{array}{l} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \\ r \ge 0 \end{array}, \quad |J| = r^2\sin\theta}$$

(Помни се, че средното е два синуса. От $x^2+y^2+z^2=r^2$, x и z се възстановяват)

Смяната е еднозначна освен по полуосите и в началото на КС.
Това е множество с обем 0 $\Rightarrow$ Смяната е валидна.

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & r\sin\theta(-\sin\varphi) \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} r \text{ от втори} \\ = \text{и трети} \\ \text{стълб} \\ \text{и Сарус} \end{array}$$

$$= r^2\left[\cos\theta\cos\varphi.\sin\theta\cos\varphi.\cos\theta + \sin\theta(-\sin\varphi).\sin\theta\sin\varphi.\sin\theta - \right.$$
$$\left. - \left(\sin\theta(-\sin\varphi).\cos\theta\sin\varphi.\cos\theta + \sin\theta\cos\varphi.\sin\theta\cos\varphi.(-\sin\theta)\right)\right] =$$

$$= r^2\left[\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^3\theta\sin^2\varphi + \sin\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi + \sin^3\theta\cos^2\varphi\right] =$$

$$= r^2\left[\sin\theta\cos^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + \sin^3\theta(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)\right] =$$

$$= r^2(\sin\theta\cos^2\theta + \sin^3\theta) = r^2\sin\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = \underline{r^2\sin\theta}.$$

$\theta \in [0;\pi] \Rightarrow \sin\theta \ge 0$ и $|J| = |r^2\sin\theta| = r^2\sin\theta$

Якобианите на цилиндрична и сферична смяна ползваме наготово.
Във всяка отделна задача трябва да се сметне как се преобразува множеството, в което интегрираме, под действие на смените.
Целта е преобразуваното множество да е цилиндрично тяло по някоя от променливите.

Цилиндричната смяна е удобна при израз от вида x^2+y^2.
Сферичната смяна - при израз $x^2+y^2+z^2$.

Някои задачи могат да се решат както с цилиндрична, така и със сферична смяна. Избираме тази, с която предполагаме, че се смята по-малко.

Зад. 3. Намерете $\iiint\limits_K z^2 dx\,dy\,dz$ в кълбото $K: x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

Реш. Сферична смяна: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$; $r \ge 0$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $|J| = r^2\sin\theta$

$K: x^2+y^2+z^2 \le R^2 \Leftrightarrow r^2(\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta) =$

$= r^2(\sin^2\theta(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+\cos^2\theta) = r^2 \le R^2 \Leftrightarrow \underline{0 \le r \le R}.$

Кълбото се преобразува до паралелепипед: $T: \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$z^2 dx\,dy\,dz = (r\cos\theta)^2 \cdot |J|\, dr\,d\theta\,d\varphi = r^4\cos^2\theta\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi$.

Интегриране в паралелепипед произведение от функции на един аргумент. Както при двойни интеграли, така и тук тройният интеграл е произведение от единични:

$$\iiint\limits_K z^2 dx\,dy\,dz = \iiint\limits_T r^4\cos^2\theta\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^R r^4 dr \cdot \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{r^5}{5}\Big|_0^R \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d(-\cos\theta) = \frac{R^5}{5}\cdot 2\pi\left(-\int_0^{\pi}\cos^2\theta\, d\cos\theta\right) =$$

$$= -\frac{2\pi R^5}{5}\cdot\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi} = -\frac{2\pi R^5}{5}\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

Зад. 4. $\iiint\limits_K (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, $K: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le R^2 \\ x^2+y^2 \le z^2 \\ z \ge 0. \end{cases}$

Реш. $x^2+y^2+z^2$ е подинтегралната функция и едно от ограниченията за K. Ще направим сферична смяна: $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $r \ge 0$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$x^2+y^2+z^2 \le R^2 \Leftrightarrow r^2 \le R^2 \Leftrightarrow r \le R$ (както предната задача)

$z = r\cos\theta \ge 0 \Rightarrow \cos\theta \ge 0 \Rightarrow \theta \in [0; \pi/2]$.

$x^2+y^2 \le z^2 \Rightarrow r^2\sin^2\theta \le r^2\cos^2\theta$

θ – в първи квадрант. Последното е еквивалентно на $\sin\theta \le \cos\theta$, $\theta \in [0; \pi/4]$.

Така K се трансформира в $T: \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi/4 \end{cases}$ – паралелепипед.

$$\iiint\limits_K (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \iiint\limits_T r^2 \cdot r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi =$$ същия трик от предишната задача

$$= \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi \cdot \int_0^{\pi/4} \sin\theta\, d\theta \cdot \int_0^R r^4\, dr = 2\pi \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/4} \cdot \frac{R^5}{5} =$$

$$= \frac{2\pi R^5}{5}\left(1 - \frac{\sqrt2}{2}\right) = \frac{\cancel{2}\pi R^5 (2-\sqrt2)}{5 \cdot \cancel{2}} = \frac{(2-\sqrt2)\pi R^5}{5}.$$

<u>Зад. 5.</u> $\iiint\limits_K yz\, dxdydz$, $K: \begin{cases} x^2+y^2 \le z^2 \le 2y - x^2 - y^2 \\ z \ge 0. \end{cases}$

<u>Реш.</u> Тук по-удобна е цилиндричната смяна $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = t \end{cases}$ $r \ge 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $t \in \mathbb{R}$, $|J| = r$.

$\cancel{x^2+y^2 \le z^2}$ $z \ge 0 \Rightarrow t \ge 0$

$x^2+y^2 \le z^2 \Rightarrow r^2 \le t^2 \Rightarrow t \ge r$ (защото $t \ge 0$ и $r \ge 0$)

$z^2 \le 2y - x^2 - y^2 \Rightarrow t^2 \le 2r\sin\varphi - r^2$. В частност, $2r\sin\varphi - r^2 \ge 0$ $\Rightarrow r \le 2\sin\varphi$.

Но $r \ge 0 \Rightarrow \sin\varphi \ge r \ge 0 \Rightarrow \varphi \in [0; \pi]$.

При $2r\sin\varphi - r^2$, коренуваме: $t \le \sqrt{2r\sin\varphi - r^2}$.

$\Rightarrow r \le t \le \sqrt{2r\sin\varphi - r^2}$.

В частност, $r \le \sqrt{2r\sin\varphi - r^2} \Rightarrow r^2 \le 2r\sin\varphi - r^2$,

$2r^2 \le 2r\sin\varphi$, $\underline{r \le \sin\varphi}$.

Тъй като $\sin\varphi \ge 0 \Rightarrow \sin\varphi \le 2\sin\varphi$. $\Rightarrow$ По-добра горна граница за r е $\sin\varphi$.

Така K се преобразува до: $T: \begin{cases} r \le t \le \sqrt{2r\sin\varphi - r^2} \\ D \begin{cases} 0 \le r \le \sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases} \text{ трапец по } \varphi. \end{cases}$

T – цилиндрично тяло по t.

$$\iiint\limits_K yz\,dxdydz = \iiint\limits_T \underbrace{r\sin\varphi}_{y} \cdot \underbrace{t}_{z} \cdot \underbrace{r}_{|J|}\, dt\, dr\, d\varphi =$$

$$= \iint\limits_D \left(\int_r^{\sqrt{2r\sin\varphi - r^2}} r^2 \sin\varphi\, t\, dt \right) dr\, d\varphi = \iint\limits_D r^2 \sin\varphi \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_r^{\sqrt{2r\sin\varphi - r^2}} dr\, d\varphi$$

$$= \iint\limits_D r^2 \sin\varphi \cdot \frac12 (2r\sin\varphi - r^2 - r^2)\, dr\, d\varphi = \iint\limits_D r^2 \sin\varphi\, (r\sin\varphi - r^2)$$

$= \iint_D (r^3 \sin^2\varphi - r^4 \sin\varphi)\, dr\, d\varphi$. Де трапец: $D: \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le \sin\varphi. \end{cases}$

$= \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin\varphi} (r^3 \sin^2\varphi - r^4 \sin\varphi)\, dr \right) d\varphi =$

$= \int_0^\pi \left[\frac{r^4}{4} \sin^2\varphi - \frac{r^5}{5} \sin\varphi \Big|_0^{\sin\varphi} \right] d\varphi = \int_0^\pi \frac{\sin^6\varphi}{4} - \frac{\sin^6\varphi}{5}\, d\varphi = \frac{1}{20} \int_0^\pi \sin^6\varphi\, d\varphi.$

Да означим $I_n = \int_0^\pi \sin^n\varphi\, d\varphi$. Трябва да намерим I_6.

Ще намерим рекурентна връзка за I_n с интегриране по части:

$I_n = \int_0^\pi \sin^n\varphi\, d\varphi = \int_0^\pi \sin^{n-1}\varphi \cdot \sin\varphi\, d\varphi = -\int_0^\pi \sin^{n-1}\varphi\, d\cos\varphi =$

$= \underbrace{-\sin^{n-1}\varphi \cos\varphi \Big|_0^\pi}_{0,\text{ ако } n-1 \ge 1 \text{ т.е. за } n \ge 2} + \int_0^\pi \cos\varphi \cdot (n-1)\sin^{n-2}\varphi \cdot \cos\varphi\, d\varphi =$

$= \int_0^\pi (n-1)\sin^{n-2}\varphi \cdot (1 - \sin^2\varphi)\, d\varphi =$

$= (n-1)\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi\, d\varphi - (n-1)\int_0^\pi \sin^n\varphi\, d\varphi = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n.$

Така при $n \ge 2$, $I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$, решаваме спрямо I_n:

$n I_n = (n-1) I_{n-2} \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$

В частност, $I_6 = \frac{5}{6} I_4 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot I_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0$ (формулата важи за $n=2$)

$I_0 = \int_0^\pi \sin^0\varphi\, d\varphi = \int_0^\pi 1\, d\varphi = \pi. \Rightarrow I_6 = \frac{5 \cdot \cancel{3} \cdot 1}{\cancel{6}_2 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \pi = \frac{5\pi}{16}.$

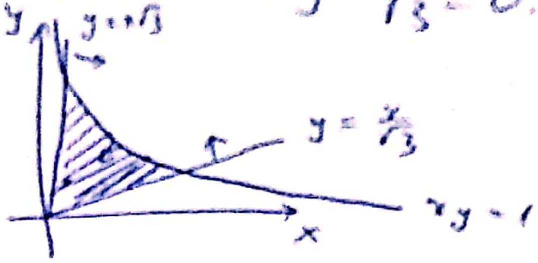
Търсеният интеграл е $\frac{1}{20} \cdot I_6 = \frac{1}{\cancel{20}_4} \cdot \frac{\cancel{5}\pi}{16} = \boxed{\frac{\pi}{64}}$.

Зад. 6. $\iiint_K xy e^{-z}\, dx\, dy\, dz$, $K: \begin{cases} x \le y\sqrt{3} \\ y \le x\sqrt{3} \\ xy \le z \le 1 \end{cases}$.

Реш. $xy \le z \le 1$ ни подсказва, че K е цилиндрично тяло по z.

$K: \begin{cases} xy \le z \le 1 \\ (x,y) \in D \end{cases}$, където: $D: \begin{cases} x \le y\sqrt{3} \\ y \le x\sqrt{3} \\ xy \le 1 \end{cases}$

От $x \le y\sqrt{3}$ и $y \le x\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $x \le y\sqrt{3} \le (x\sqrt{3})\sqrt{3} = 3x$
$\Rightarrow 2x \ge 0 \Rightarrow x \ge 0$. Тогава $y \ge \frac{x}{\sqrt{3}} \ge 0$.
$\Rightarrow$ D е в първи квадрант.



$$\iiint_K xye^{-z}dz = \iint_D \left(\int_{xy}^{1} xye^{-z}dz\right)dxdy$$

$$= \iint_D xy\cdot(-e^{-z})\Big|_{xy}^{1} dxdy = \iint_D xy(e^{-xy} - e^{-1})\,dxdy.$$

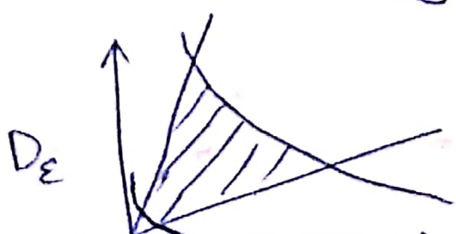
D може да представим като обединение от трапци.
Ще решим задачата по друг начин. D се определя от стойността на xy (≤ 1) и $\frac{x}{y}$ (между $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\sqrt{3}$).
Затова да положим $\begin{cases} xy = u \\ x/y = v \end{cases}$. Решаваме относно x и y:

$$x^2 = xy\cdot\frac{x}{y} = uv \qquad\Rightarrow\quad x = \sqrt{uv}$$
$$y^2 = xy/(x/y) = u/v \qquad y = \sqrt{u/v}$$

При тази смяна D се трансформира в $T\begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 1/\sqrt{3} \le v \le \sqrt{3} \end{cases}$.

Има проблем с точката $(0,0) \in D$. В нея $v = \frac{0}{0}$ не е дефинирано.
Затова ще я отрежем: Разглеждаме $T_\varepsilon\begin{cases} \varepsilon \le u \le 1 \\ 1/\sqrt{3} \le v \le \sqrt{3} \end{cases}$, $\varepsilon > 0$

$(0,0) \notin \left\{(x,y) \,\middle|\, \begin{array}{l} \varepsilon \le xy \le 1 \\ 1/\sqrt{3} \le x/y \le \sqrt{3} \end{array}\right\}$.



Якобианът е

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \\ \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{u}}{v^{3/2}} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}\cdot\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v^3}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}\cdot\frac{1}{\sqrt{uv}} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{v} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{v} = -\frac{1}{2v}.$$

Тук при $u = 0$, x'_u, y'_u не съществуват.
Затова с отрязването на $(0,0)$ смяната е легална, $|J| = \frac{1}{2v}$.

$$\iint_D xy(e^{-xy}-e^{-1})\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{T_\varepsilon} u\left(e^{-u}-\frac{1}{e}\right)\cdot\frac{1}{2v}\,du\,dv$$

$$\iint_{T_\varepsilon} u\left(e^{-u}-\frac{1}{e}\right)\cdot\frac{1}{2v}\,du\,dv = \int_\varepsilon^1\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(ue^{-u}-\frac{u}{e}\right)\frac{1}{2v}\,du\,dv =$$

$$= \int_\varepsilon^1\left(ue^{-u}-\frac{u}{e}\right)du\cdot\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{dv}{2v} = \int_\varepsilon^1\left(ue^{-u}-\frac{u}{e}\right)du\,\frac{\ln|v|}{2}\Big|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \int_\varepsilon^1\left(ue^{-u}-\frac{u}{e}\right)du\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{\ln 3}{2}\int_\varepsilon^1\left(ue^{-u}-\frac{u}{e}\right)du.$$

$$\int ue^{-u}du = -\int ue^{-u}d(-u) = -\int u\,de^{-u} = -ue^{-u}+\int e^{-u}du =$$

$$= -ue^{-u}-\int e^{-u}d(-u) = -ue^{-u}-e^{-u} = -(u+1)e^{-u}.$$

Тогава $\int_\varepsilon^1\left(ue^{-u}-\frac{u}{e}\right)du = -(u+1)e^{-u}-\frac{u^2}{2e}\Big|_\varepsilon^1 =$

$$= -2\cdot e^{-1}-\frac{1}{2e}+(\varepsilon+1)e^{-\varepsilon}+\frac{\varepsilon^2}{2e} = -\frac{2^2}{2e}-\frac{1}{2e}+(\varepsilon+1)e^{-\varepsilon}+\frac{\varepsilon^2}{2e} =$$

$$= -\frac{5}{2e}+(\varepsilon+1)e^{-\varepsilon}+\frac{\varepsilon^2}{2e}.$$

$$\Rightarrow \iint_{T_\varepsilon} u\left(e^{-u}-\frac{1}{e}\right)\frac{1}{2v}\,du\,dv = \frac{\ln 3}{2}\left(-\frac{5}{2e}+(\varepsilon+1)e^{-\varepsilon}+\frac{\varepsilon^2}{2e}\right).$$

$$\iint_D xy\left(e^{-xy}-\frac{1}{e}\right)dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln 3}{2}\left(-\frac{5}{2e}+\underbrace{(\varepsilon+1)e^{-\varepsilon}}_{\downarrow 1}+\underbrace{\frac{\varepsilon^2}{2e}}_{\downarrow 0}\right) =$$

$$= \frac{\ln 3}{2}\left(-\frac{5}{2e}+1\right) = \frac{2e-5}{2e}\cdot\frac{\ln 3}{2} = \boxed{\frac{2e-5}{4e}\cdot\ln 3}$$

Освен нестандартната смяна, в тази задача идеята че $\iint_T = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{T_\varepsilon}$ прилича на дефиницията за стойност на несобствен интеграл. Може да се дефинира сходимост (абсолютна сходимост) на несобствен кратен интеграл. С такива въпроси няма да се занимаваме в курса.