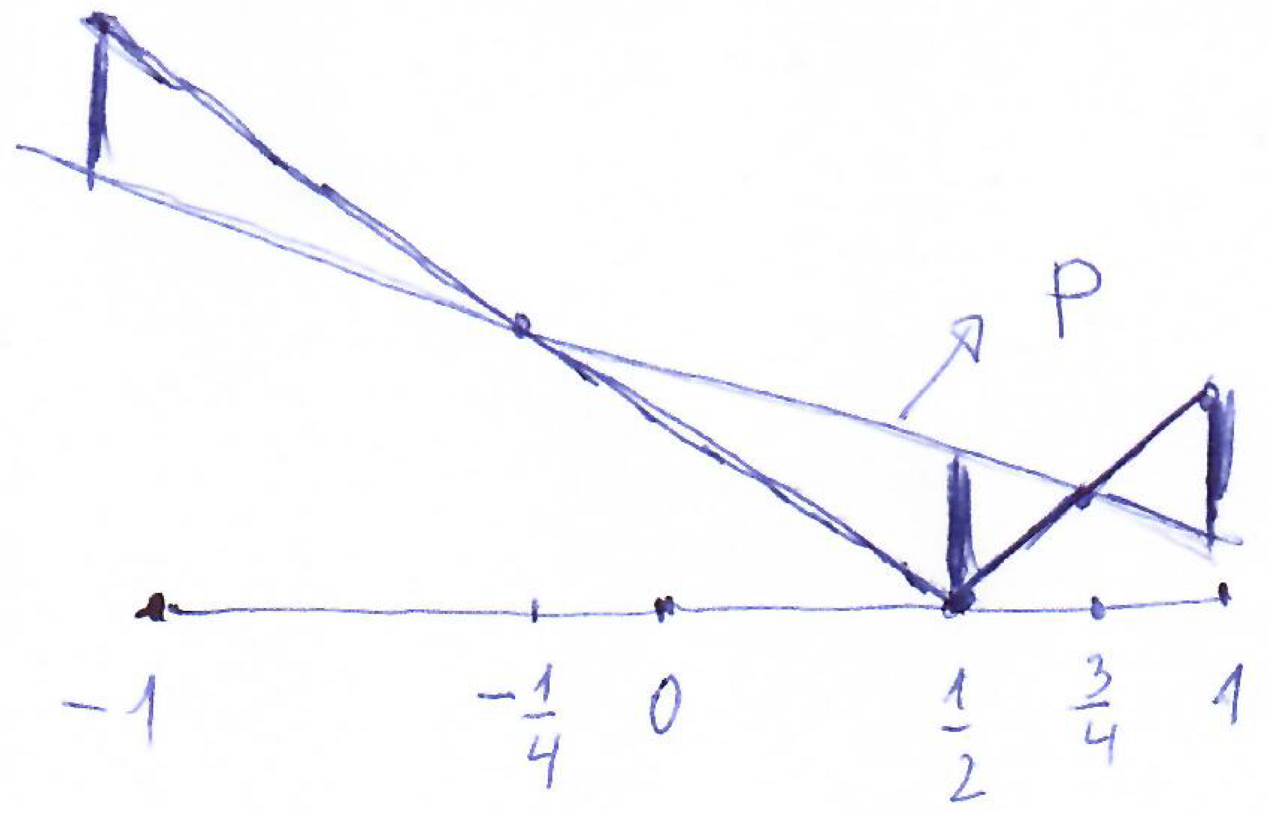
2 задача, 1 тип

Да се намери полинома на най-добро равномерно приближение от π_1 за ф-ята $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$ в $[-1, 1]$, както и $E_1(f)$.



$\rightarrow$ точките -1, $\frac{1}{2}$ и 1 са трите точки на алтернанс за разликата $f - P$

Разглеждаме полинома $P \in \pi_1$, който интерполира $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$ в точките $-\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$, т.е. в средите на интервалите $[-1, \frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2}, 1]$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left|-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{4}$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left|\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$$

$$P = P\left(-\frac{1}{4}\right) + P\left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]\left(x + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)}\left(x + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{8}$$

Ясно е, че разликата $f - P$ приема най-голямата си по модул стойност в интервала $[-1, 1]$ в трите точки $x_0 = -1$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, при това с алтернативно сменящи се знаци:

$$+\left(f(x_0) - P(x_0)\right) = -\left(f(x_1) - P(x_1)\right) = +\left(f(x_2) - P(x_2)\right) = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P(x)|$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

По теоремата на Чебишов за алтернанса $P = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{8}$ е ПНДРП от 1 степен за $f(x)$ в $[-1, 1]$

и $E_1(f) = \frac{3}{8}$