$\boxed{\text{Упражнение IV}}$

(★) Определимо ли е мн-вото $\{\{aw \mid w \in \Sigma^*\}\}$ за фиксирано $a \in \Sigma$? $|\Sigma| > 1$?
(В структурата $S = (\mathcal{P}(\Sigma^*), cat^S, cup^S)$)

Нека $h' : \Sigma \to \Sigma$ е такова, че $h'(x) = \begin{cases} a, & x = b \\ b, & x = a \\ x, & \text{иначе} \end{cases}$
за $a, b \in \Sigma$.

$h'' : \Sigma^* \to \Sigma^*$, $h''(a_1 \ldots a_n) = h'(a_1) \ldots h'(a_n)$

$h : \mathcal{P}(\Sigma^*) \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$, където

$h(L) = \{h''(w) \mid w \in L\}$ за ве $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$

Вече доказахме, че h е автоморфизъм в S.

Нека предположим, че $\{\{aw \mid w \in \Sigma^*\}\}$ за $a \in \Sigma$ е определимо с ф-ла $f_{aw}(x)$. Нека $L_0 = \{aw \mid w \in \Sigma^*\}$, $a \in \Sigma$. Тогава $h(L_0) = \{h''(aw) \mid w \in \Sigma^*\} = \{b\,h''(w) \mid w \in \Sigma^*\}$. Имаме, че $f_{aw}(L_0) \Longleftrightarrow f_{aw}(h(L_0))$ но думите в $h(L_0)$ са от вида $b\,h''(w)$ за $w \in \Sigma^*$, откъдето стигаме до противоречие.

Следователно $\{\{aw \mid w \in \Sigma^*\}\}$ не е определимо.

Задача

Нека $\mathcal{L} = (\{p\}, \emptyset, \emptyset, I)$

$S = (E_2, \{p^S\}, \emptyset, \emptyset)$, където

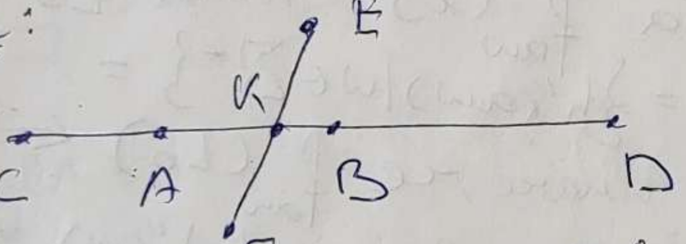
E_2 – Евклидовата равнина

$p^S(A,B,C,D) \overset{def}{\Longleftrightarrow} AB \cap CD \neq \emptyset$

Определими ли са:

1. $\{(A,B,C,D) \mid AB \subseteq CD\}$
2. $\{(A,B,C,D) \mid AB \parallel CD\}$
3. $\{(A,B,C) \mid B \in AC$ и $B \neq A$ и $B \neq C\}$
4. $\{(A,B,C,D) \mid ABCD$ е успоредник$\}$
5. $\{(A,B,M) \mid M$ е среда на $AB\}$
6. $\{(A,B,C) \mid \measuredangle ABC = 60^\circ\}$

Решение:

1. 

$f_{\subseteq}(A,B,C,D) \leftrightharpoons \forall E \forall F (p(E,F,A,B) \Rightarrow p(E,F,C,D))$

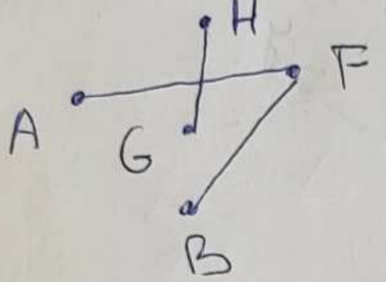
Нека $AB \subseteq CD$, тогава за вс. $K \in AB$, $K \in CD$. Оттук, ако $E, F \in E_2$ са такива, че $EF \cap AB = \{K\}$, то $EF \cap CD = \{K\}$. Обратно, нека $AB \nsubseteq CD$. Тогава има $K \in AB$ такова, че $K \notin CD$, т.е. можем да изберем $E, F \in E_2$ такива че $AB \cap EF = \{K\}$ ~~Тогава~~ и $CD \cap EF = \emptyset$.

2. Ще използваме, че продълженията на успоредни прави не се пресичат.

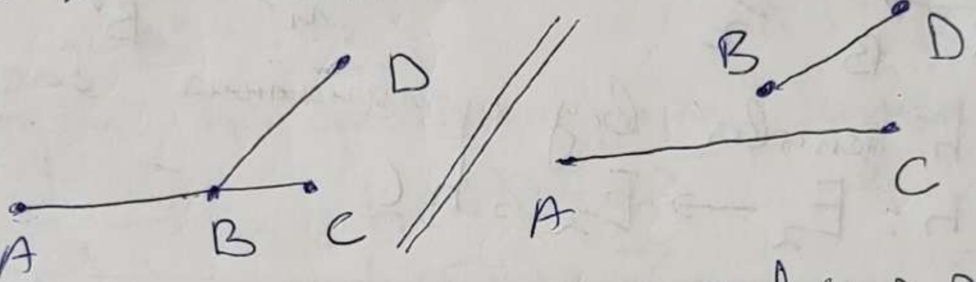
$f_{\parallel}(A,B,C,D) \leftrightharpoons \forall E \forall F \forall G \forall H$
$(f_{\subseteq}(A,B,E,F) \,\&\, f_{\subseteq}(C,D,G,H) \Longrightarrow \neg p(E,F,G,H))$

3. Първо дефинираме предикатна ф-ла, която разпознава съвпадащи точки.

$$eq(A,B) \leftrightharpoons \forall F \forall G \forall H (p(A,F,G,H) \Longleftrightarrow p(B,F,G,H))$$



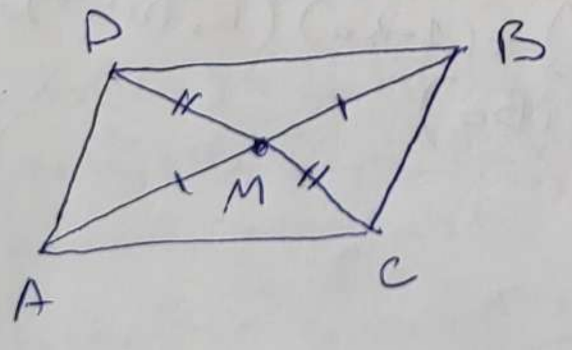
$$f_{between}(A,B,C) \leftrightharpoons \forall D (p(B,D,A,C) \,\&\, \neg eq(A,B) \,\&\, \neg eq(B,C))$$



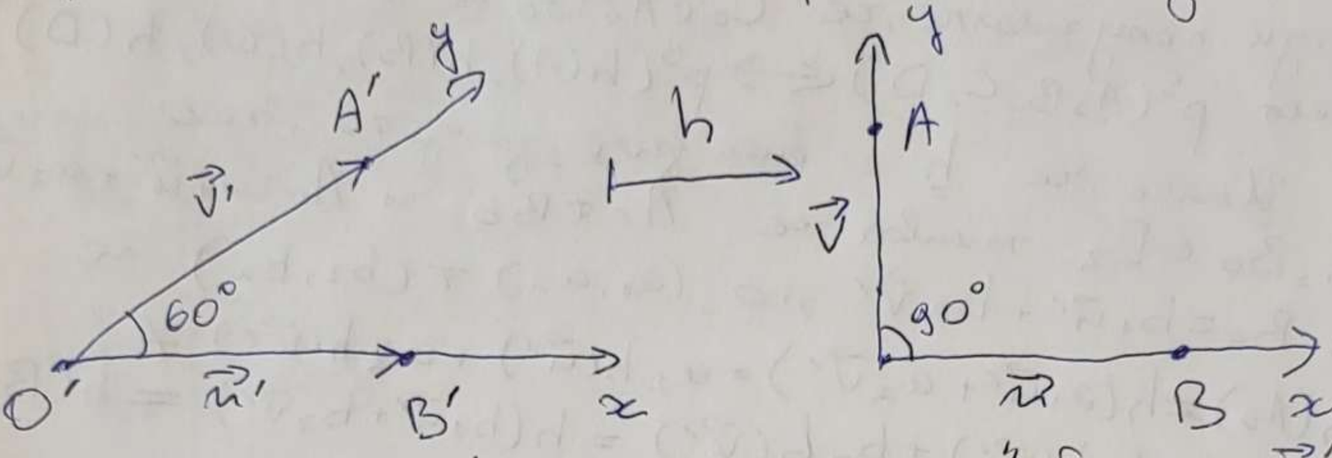
4. $$f_{\square}(A,B,C,D) \leftrightharpoons f_{\parallel}(A,B,C,D) \,\&\, f_{\parallel}(A,D,B,C)$$

5. $$f_{mid}(A,B,M) \leftrightharpoons \exists C \exists D (f_{\square}(A,C,B,D) \,\&\, f_{between}(A,M,B) \,\&\, f_{between}(C,M,D))$$

Използваме идеята, че в успоредник диагоналите се разполовяват.



6. Ще покажем, че в нашия "свят" не можем да различим 60° от 90°. Ще дефинираме автоморфизъм h който ще преминава от базис $\vec{u}', \vec{v}'$, такъв че $\sphericalangle(\vec{u}', \vec{v}') = 60^\circ$, към ортогонален базис $\vec{u}, \vec{v}$.



С други думи h "ортогонализира" базиса $\vec{u}', \vec{v}'$.

$$h: E_2 \to E_2, \quad h(\vec{u}') = \vec{u}$$
$$h(\vec{v}') = \vec{v}$$

Нека $z \in E_2$ е произволна. Тогава $z = q\vec{u}' + p\vec{v}'$ за $q, p \in \mathbb{R}$. Нека h действа в/у z така:

$$h(z) = q\,h(\vec{u}') + p\,h(\vec{v}') = q\vec{u} + p\vec{v}$$

Нека $A_0, B_0 \in E_2$ са произволни, тогава отсечката

$$A_0B_0 = \{\lambda A_0 + (1-\lambda) B_0 \mid \lambda \in [0,1]\}$$

Нека $C_0 \in A_0B_0$, тогава има $\lambda_0 \in [0,1]$ такова, че

$$C_0 = \lambda_0 A_0 + (1-\lambda_0) B_0$$

Имаме, че $h(C_0) = \lambda_0 h(A_0) + (1-\lambda_0) h(B_0)$, защото ако $A_0 = a_1\vec{u}' + a_2\vec{v}'$ и $B_0 = b_1\vec{u}' + b_2\vec{v}'$, то

$$h(C_0) = h(\lambda_0 A_0 + (1-\lambda_0) B_0) =$$
$$= h(\lambda_0(a_1\vec{u}' + a_2\vec{v}') + (1-\lambda_0)(b_1\vec{u}' + b_2\vec{v}')) =$$
$$= h(\lambda_0 a_1\vec{u}' + \lambda_0 a_2\vec{v}' + (1-\lambda_0) b_1\vec{u}' + (1-\lambda_0) b_2\vec{v}')$$
$$= h(\vec{u}'(\lambda_0 a_1 + (1-\lambda_0) b_1) + \vec{v}'(\lambda_0 a_2 + (1-\lambda_0) b_2)) =$$

$= h(\vec{u}')(\lambda_0 a_1 + (1-\lambda_0) b_1) + h(\vec{v}')(\lambda_0 a_2 + (1-\lambda_0) b_2) =$

$= \lambda_0 (a_1 h(\vec{u}') + a_2 h(\vec{v}')) + (1-\lambda_0)(b_1 h(\vec{u}') + b_2 h(\vec{v}')) =$

$= \lambda_0 h(A_0) + (1-\lambda_0) h(B_0)$.

Оттук получаваме, че $C_0 \in A_0 B_0 \Longleftrightarrow h(C_0) \in h(A_0) h(B_0)$

Тоест $p^S(A, B, C, D) \Longleftrightarrow p^S(h(A), h(B), h(C), h(D))$

Имаме, че h е биекция, защото, ако $A_0, B_0 \in E_2$ такива, че $A_0 \neq B_0$ и $A_0 = a_1 \vec{u}' + a_2 \vec{v}'$ и $B_0 = b_1 \vec{u}' + b_2 \vec{v}'$, то $(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$ и

$h(A_0) = h(a_1 \vec{u}' + a_2 \vec{v}') = a_1 h(\vec{u}') + a_2 h(\vec{v}') \neq$

$\neq b_1 h(\vec{u}') + b_2 h(\vec{v}') = h(b_1 \vec{u}' + b_2 \vec{v}') = h(B_0)$

Ако $A_0 \in E_2$ и $A_0 = a_1 \vec{u} + a_2 \vec{v}$, то $\cancel{h^{-1}(A_0) = a_1 h(\vec{u}) +}$

$h^{-1}(A_0) = a_1 h^{-1}(\vec{u}) + a_2 h^{-1}(\vec{v})$.

Така получаваме, че h е автоморфизъм. Нека A', O', B' са точките от първия чертеж, т.е. $\measuredangle A'O'B' = 60^\circ$. Нека допуснем, че $\{(A, B, C) \mid \measuredangle ABC = 60^\circ\}$ е определимо с ф-ла $f_{60^\circ}(A, B, C)$. Оттук получаваме, че $f_{60^\circ}(A', O', B')$ е истина т.с.т.к. $\cancel{f_{60^\circ}(h(A'), h(O'), h}$

$f_{60^\circ}(h(A'), h(O'), h(B'))$ е истина т.с.т.к.

$f_{60^\circ}(A, O, B)$ е истина, което е абсурд.

Така получаваме, че $\{(A, B, C) \mid \measuredangle ABC = 60^\circ\}$ не е определимо.