Тема 12: (съответства на тема 15 от конспекта)

Съдържание: Минимално и максимално покриващо дърво на граф. МПД-свойство. Алгоритми на Прим и Крускал. Коректност на тези алгоритми.

Деф: Минимално покриващо дърво (МПД): нека G е неориентиран свързан тегловен граф, като тегловната функция е $w: E \to \mathbb{R}$. Нека $\mathcal{T}$ е м-вото от покриващите дървета на G. Минимално покриващо дърво на G е всяко $T \in \mathcal{T}$, такова че:

$$w(T) = \min\{w(D) \mid D \in \mathcal{T}\}$$

Максимално покриващо дърво: същото като горното с единствената разлика: $w(T) = \max\{w(D) \mid D \in \mathcal{T}\}$

Деф: Срез в граф: Нека $G = (V, E)$ е граф. Срез в G наричаме всяко 2-разбиване X на V. Ако $X = \{V_1, V_2\}$, то срез-множеството на X е: $E' = \{(u,v) \in E \mid u \in V_1 \wedge v \in V_2\}$.

- За всяко ребро $e \in E'$ казваме, че е пресичащо среза X.
- Теглото на X е $|E'|$. (ако G е тегловен, то теглото на X е сумата от теглата на ребрата от E').
- Страните на среза са V_1 и V_2

Т.52 МПД теорема: Нека $G = (V, E)$ е неориентиран свързан тегловен граф, като тегловната ф-я е $w: E \to \mathbb{R}$. Нека $\{U, W\}$ е произволен срез в G. Тогава $\forall e \in E^{min}_{U,W}$ съществува МПД D, което съдържа e.

Заб. С $E_{U,W}$ означаваме срез-м-вото (за среза $\{U, W\}$), а с $E^{min}_{U,W} \subseteq E_{U,W}$ означаваме м-вото от ребрата с минимално тегло.

Алгоритъм на Прим (Prim)

Вход: неориентиран, свързан граф $G = (V, E)$ с теглова ф-я $w: E \to \mathbb{R}$.

Изход: МПД D на G.

① Конструирай $D = (\{1\}, \emptyset)$ (D - дърво)

② Ако $V(D) = V$, върни D и приключи изпълнението.

③ В противен случай, нека E' е срез-м-вото на среза $\{V(D), V \setminus V(D)\}$. Нека $E'_{min} \subseteq E'$ е м-вото от ребрата с минимално тегло. Нека $e = (u, v)$ е произволно от E'_{min}, като $u \in V(D)$, което влече $v \notin V(D)$.
Направи: $V(D) \leftarrow V(D) \cup \{v\}$
$E(D) \leftarrow E(D) \cup \{e\}$ и отиди на ②.

Заб. Алгоритъмът на Прим склонно добавя нов връх към дървото докато то не стане покриващо. (накратко обяснено).

Алгоритъм на Крускал (Kruskal)

Вход: неориентиран свързан граф $G = (V, E)$ с теглова ф-я $w: E \to \mathbb{R}$.

Изход: МПД F на G.

① Конструирай покриваща гора $F = (V, \emptyset)$ на G
(очевидно първоначално няма никакви ребра, а само върхове).

② Ако F има точно една свързана компонента, върни F и приключи алгоритъма.

③ В противен случай, нека $E' \subseteq E$ са точно тези ребра, чиито краища са от различни свързани компоненти (дървета) на F.
Нека E'_{min} е м-вото от ребрата с минимално тегло в E'. $\xrightarrow{\text{стр.}3}$

Нека $e=(u,v)$ е произволно ребро от E'_{min}. Нека T' и T'' са тези дървета в F, за които $u \in V(T')$ и $v \in V(T'')$. Конструирай дървото $D=(V(T') \cup V(T''), E(T') \cup E(T'') \cup \{e\})$. Във F замени дърветата T', T'' с D и отиди на (2)

Зад. За разлика от алгоритъма на Prim, където започваме с едно дърво и му добавяме върхове, тук за почване с $|V|$ на брой дървета, които постепенно сливаме.

<u>Коректност на алгоритъма на Prim</u>

<u>Първо:</u> М-вото E' в (3) е непразно, иначе G няма да е свързан, следователно $E'_{min} \neq \emptyset$, откъдето следва, че реброто $e \in E'_{min}$ е добре дефинирано.

<u>Второ:</u> Алгоритъмът строи <u>покриващ</u> подграф D. Наистина при всяко изпълнение на ~~ред~~ стъпка (3) добавяме връх към D. Алгоритъмът терминира, когато е изпълнено условието за край в (2).

<u>Трето:</u> D е дърво. Д-во с индукция по броя на достиганията на (2).

<u>1. База:</u> ~~реб~~ при първото достигане на (2) $D=(\{1\}, \emptyset)$, което очевидно е дърво.

~~Стъпка~~ <u>2. ИП:</u> допускаме, че за някое достигане на (2), което не е последно D е дърво.

<u>3. Стъпка:</u> в (3) добавяме точно един нов връх и ребро между него и някой връх от D, значи резултатът е отново дърво.

Значи алгоритъмът връща покриващо дърво.

<u>Четвърто</u>: D е ~~мн~~ минимално. Това следва от Т. 52, приложена към избраното $e \in E'_{min}$ във всяко изпълнение на (3): срезът е $\{V(D), V \setminus V(D)\}$, срез-м-вото е E', най-леките ребра от E' са точно елементите на E'_{min}, а Т. 52 казва, че всяко от тях е елемент на някое МПД, така че "не може да сбъркаме", кое от тях да вземем. $\square$

<u>Коректност на алг. на Крускал</u>

<u>Първо</u>: М-вото E' в (3) е непразно (иначе G няма да е свързан), а значи и E'_{min} е непразно, откъдето следва, че $e \in E'_{min}$ е добре дефинирано.

<u>Второ</u>: Върнатото F е покриващо дърво. Д-во с индукция по броя на достиганията на (2):

1. <u>База</u>: при първото достигане на (2), F е гора с n дървета (така е дефинирано в 1).
2. <u>ИП</u>: допускаме, че достигаме (2) с гора F, която има k дървета, като $k > 1$.
3. <u>Стъпка</u>: ~~в (3) "залепяме" две дървета T', T'' от~~ полученото D в (3) е дърво, защото T', T'' са дървета, които свързваме с ребро e, което не се съдържа нито в T', нито в T''.

   Значи при следващото достигане на (2), F е покриваща гора с $k-1$ дървета.

И така алгоритъмът връща покриваща гора с 1 дърво (т.е. ~~гор~~ покриващо дърво).

<u>Трето:</u> F е минимално. Следва от <u>Т.52</u> приложена спрямо избраното $e \in E'_{min}$ при всяко изпълнение на (3): срезът е $\{U(T'), U \setminus U(T')\}$, срез-м-вото е E', най-леките ребра от E' са точно ребрата от E'_{min}, а <u>Т.52</u> казва, че всяко от тях е елемент на някое МПД, така че "не може да сбъркаме", кое и от тях да вземем.

бар