11. Подобности.

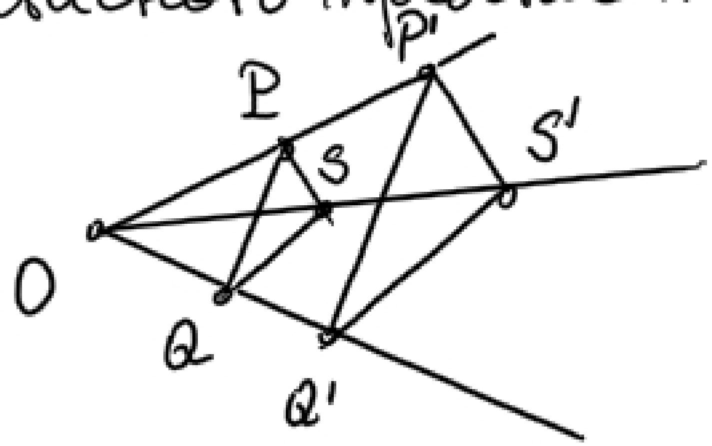
Нека $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ е ОКС и $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ са дилатации съответно по осите $O\vec{e_1}, O\vec{e_2}, O\vec{e_3}$ с един и същ коефициент k.

$$\delta_1: \begin{cases} x' = kx \\ y' = y \\ z' = z' \end{cases}, \quad \delta_2: \begin{cases} x' = x \\ y' = ky \\ z' = z \end{cases}, \quad \delta_3: \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = kz \end{cases}, \quad k \neq 0.$$

<u>Дефиниция.</u> Линейната трансформация $\chi = \delta_3\delta_2\delta_1$ се нарича хомотетия с център O и коефициент k.

От дефиницията следва, че аналитичното представяне на χ спрямо K е

$$\chi: \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \\ z' = kz. \end{cases}$$



Свойства на хомотетията χ:

1. χ е афинна трансформация
2. Единствената неподвижна при χ точка е центърът ѝ O.
3. Неподвижните при χ прави са правите през O.

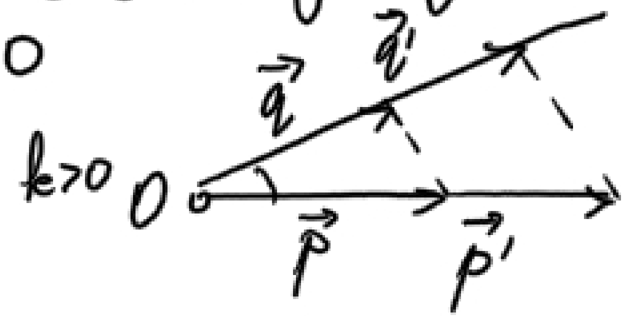
Нека $P \neq O \Rightarrow \chi(P) = P' \Rightarrow \vec{OP'} = k.\vec{OP}$

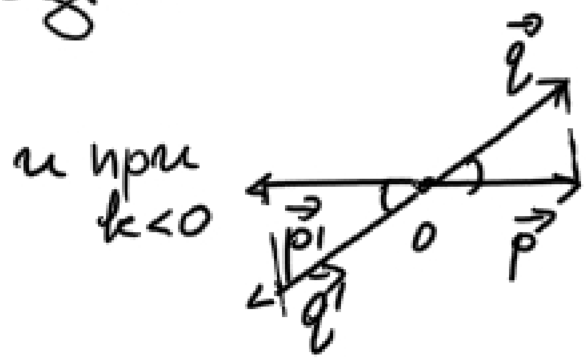
Ако $P(x,y,z) \neq O$, то $\chi(P) = P'(kx,ky,kz)$. $\Rightarrow \overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$.
$\Rightarrow$ Ако $Q \neq P$, $Q \neq O$, то $\overrightarrow{OQ'} = k\overrightarrow{OQ} \Rightarrow \overrightarrow{P'Q'} = k\overrightarrow{PQ} \Rightarrow \dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = k$.

Нека $\vec{p}$ и $\vec{q}$ са произволни вектори и $\chi(\vec{p}) = \vec{p}'$; $\chi(\vec{q}) = \vec{q}'$. Тогава $\vec{p}' = k\vec{p}$ и $\vec{q}' = k\vec{q} \Rightarrow$

$$\cos\sphericalangle(\vec{p}', \vec{q}') = \frac{\vec{p}'\vec{q}'}{|\vec{p}'||\vec{q}'|} = \frac{\cancel{k^2}\,\vec{p}\vec{q}}{\cancel{k^2}\,|\vec{p}||\vec{q}|} = \cos\sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}).$$

Като се вземе предвид, че векторите $\vec{p}$ и $\vec{p}'$ са еднопосочни точно тогава, когато $k > 0$ ($\Leftrightarrow \vec{q}$ и $\vec{q}'$ са еднопосочни) и противопосочни $\Leftrightarrow k < 0$





получаваме, че при χ се запазват ъглите.
В сила е следната теорема

Теорема 1. При хомотетия отношението на съответните отсечки е постоянно число и всяка хомотетия изобразява ъгъл в равен на него ъгъл.

Дефиниция 2. Трансформация, която е произведение от еднаквост и хомотетия се нарича подобност. [3]

Следователно всяка подобност е афинна трансформация.

Тъй като при еднаквост се запазват разстоянията, следователно и ъглите, то имаме

Теорема 2. При подобност отношението на дължините на съответните отсечки е постоянно.

Следствие. Всяка подобност изобразява ъгъл в равен нему ъгъл.

Твърдението в Теорема 2 е и достатъчно условие за това афинна трансформация да е подобност.

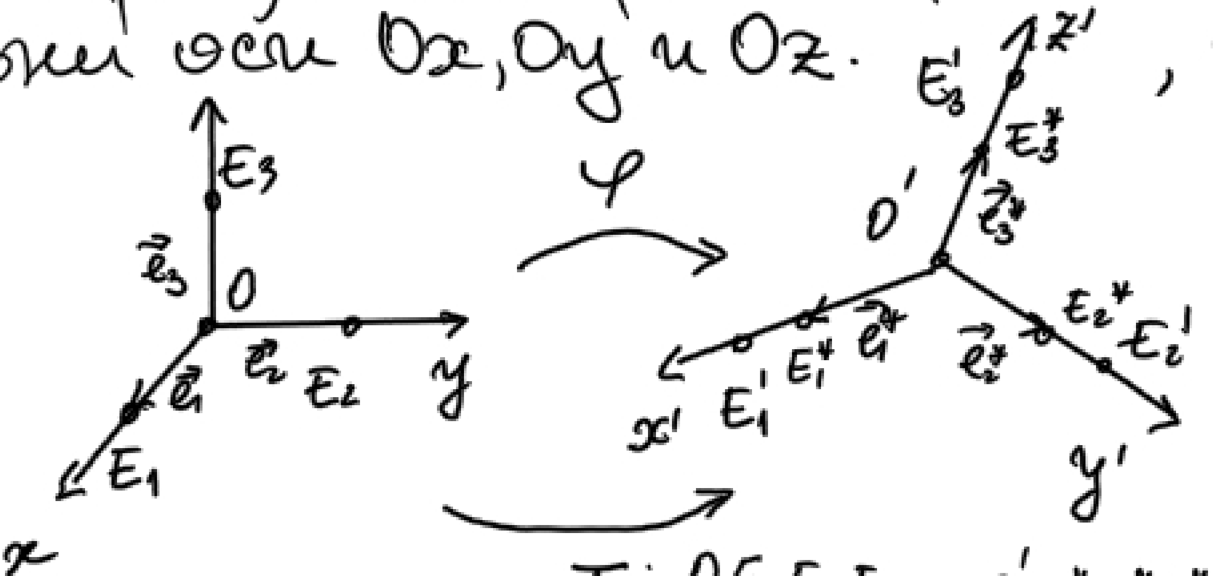
В сила е

Теорема 3. Нека φ е афинна трансформация такава, че при φ отношението на съответните отсечки е постоянно число. Тогава φ е подобност.

Доказателство. Нека φ е произволна фиксирана афинна трансформация, запазваща отношението на съответните отсечки.

Тогава $\varphi = \sigma_3\sigma_2\sigma_1 \cdot \tau$, където τ е еднаквост, а σ_i – дилатации по три взаимно перпендикулярни прави (оси).

Нека $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ е ОКС, където $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$ са единични вектори, колинеарни с трите взаимно перпендикулярни оси Ox, Oy и Oz. , $\varphi(O, E_1, E_2 E_3) = O', E_1', E_2', E_3'$.



Еднаквостта τ може да се избере така, че $K \xrightarrow{\tau} K^* = O'\vec{e_1^*}\vec{e_2^*}\vec{e_3^*}$ векторите $\vec{e_i^*}$ да са еднопосочни с векторите $\overrightarrow{O'E_i'}$.

$\tau: O, E_1, E_2, E_3 \to O', E_1^*, E_2^*, E_3^*$

По условие имаме $\dfrac{|O'E_i'|}{|OE_i|} = k$, $i=1,2,3$. Тогава, от $\overrightarrow{O'E_i'} = k\overrightarrow{OE_i}$

$\Rightarrow \sigma_1: \begin{cases} x' = kx \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$, $\sigma_2 = \begin{cases} x' = x \\ y' = ky \\ z' = z \end{cases}$ и $\sigma_3 = \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = kz \end{cases}$ и трансформацията $\chi = \sigma_3\sigma_2\sigma_1$ е хомотетия и при афинната трансформация $\varphi^* = \sigma_3\sigma_2\sigma_1 \circ \tau$ имаме, че $O, E_1, E_2, E_3 \xrightarrow{\varphi^*} O', E_1', E_2', E_3'$, където φ^* е подобност.

Тъй като действието на φ^* върху четирите точки в общо положение – O, E_1, E_2, E_3 е същото като това на φ, то следва, че $\varphi^* \equiv \varphi$, откъдето следва, че φ е подобност.