Тема 3 (отговаря на тема 12 от конспекта)

Съдържание: Подграфи, индуцирани подграфи. Свързаност и свързани компоненти в неориентирани графи. ~~Силна~~ Силна и слаба свързаност, силно и слабо свързани компоненти в ориентирани графи. Оцветяване на графи. Двуделност - НДУ. Планарност на графи.

Деф: Подграф: Нека $G=(V,E)$ е граф. Подграф на G е всеки граф $G'=(V',E')$, такъв че $V'\subseteq V$ и $E'\subseteq E$.

Деф: Индуциран от подм-во върхове подграф: Нека $G=(V,E)$ е граф, и $U\subseteq V$, $U\neq\emptyset$. Подграфът на G, индуциран от U е графът $G'=(U,E')$, където $E'=\{(u,v)\in E \mid u,v\in U\}$

Деф: Индуциран от под-м-во ребра подграф: Нека $G=(V,E)$ е граф и $E'\subseteq E$. Подграфът на G, индуциран от E', е графът $G'=(U,E')$, където $U=\{u\in V \mid \exists e\in E': u\in e\}$.

Деф: Свързаност в граф. Свързан граф: Нека $G=(V,E)$ е граф. За всеки два върха $u,v\in V$ казваме, че са свързани, ако съществува u-v път.[2] G е свързан, ако всеки два върха в него са свързани.

Деф: Свързани компоненти (в неориентирани графи): Нека $G=(V,E)$ е граф и Q_G е релацията на достижимост върху G. Подграфите на G[1], индуцирани от класовете на еквивалентност на Q_G, се нар. свързани компоненти на G. ~~[illegible]~~

1. деф: $\forall u,v\in V: uQ_Gv \leftrightarrow u$ и v са свързани

2. Тук "път" означава прост път.

Заб. За силната/слабата свързаност наличието на примки и паралелни ребра е без значение.

Деф: Силна свързаност в ориентиран граф. Силно свързан ориентиран граф.

Нека $G=(V,E)$ е ориентиран граф. За всеки два върха $u,v \in V$ казваме, че u и v са силно свързани, ако съществува път от u до v и съществува път от v до u.

G е силно свързан, ако всеки два върха в него са силно свързани.

Деф: Силно свързани компоненти: Нека $G=(V,E)$ е ориентиран граф. Подграфите на G, индуцирани от класовете на екв. на релацията на силна свързаност, се нар. силно свързани компоненти на G.

Деф: Слабо свързани компоненти: Нека $G=(V,E)$ е ориентиран граф. Нека H е съответният му неориентиран граф. Подграфите на G, индуцирани от класовете на екв. на релацията на свързаност върху H, се нар. слабо свързаните компоненти на G.

Деф: Оцветяване на върхове: Нека $G=(V,E)$ е граф. Оцветяване на върховете на G е ф-я $f: V \to C$, където C е м-во, чиито елементи наричаме цветове, като се $\forall (u,v) \in E$, $f(u) \neq f(v)$.

Деф: Хроматично число на граф: Минималният брой цветове, с които може да бъде оцветен даден граф G. Бележим с $\chi(G)$.

Деф: Оцветяване на ребра: Нека $G=(V,E)$ е граф. Оцветяване на ребрата на G е ф-я $h: E \to C$, която $\forall e \in E\ \forall e' \in J(e)$: $h(e) \neq h(e')$.

Деф: Двуделен граф: Нека $G=(V,E)$ е граф. Ако съществува разбиване на V, $\{V_1, V_2\}$, такова че $\forall (u,v)\in E$, $u\in V_1$ и $v\in V_2$, казваме, че G е двуделен граф. М-вата V_1 и V_2 са дяловете на G.

НДУ: G е двуделен $\iff \chi(G) \leq 2$.

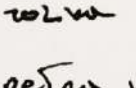
Заб. Паралелните ребра и примките нямат значение за хроматичността.

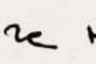
Заб. Разглеждаме само свързани графи.

Заб. Разглеждаме неориентирани мултиграфи.

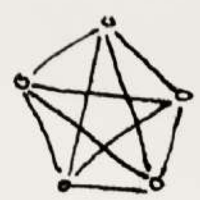
Деф: Планарно влагане на мултиграф:

Планарно влагане на мултиграф е всяка наредена двойка $G'=(V',E')$, където V', E' - крайни м-ва, $V'\neq\emptyset$, V' - м-во от точки в равнината наречени планарни върхове, а E' е м-во от прости отворени и прости затворени криви в равнината наречени планарни ребра. За всяко планарно ребро, ако е отворена крива, то двата ѝ края съвпадат с точно два от планарните върхове, а ако е затворена крива, точно една точка от кривата съвпада с някой планарен връх. Планарните ребра не се пресичат с изключение на това, че може да имат общи точки в планарните върхове.

Заб. Отворена крива е от вида:  - не се пресича, има два края

Затворена крива:  - не се самопресича, затворена е.

Заб./Пр.- Следният граф не е планарен:



Деф: <u>Планарен мултиграф</u>: Нека $G=(V,E)$ е мултиграф. G е планарен т.с.т.к. $\exists$ планарно вписване на мултиграф $G'=(V',E')$, т.че:

1. $\exists$ биекция $\varphi: V \to V'$
2. $\exists$ биекция $\psi: E \to E'$, т.че $\forall e_1 \in E$:
   - ако e_1 не е примка и краищата му са x и y, то $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ са краищата на $\psi(e_1)$ в равнината.
   - ако e_1 е примка, инцидентна с връх x, то единственият планарен връх, принадлежащ на $\psi(e_1)$, е $\varphi(x)$.