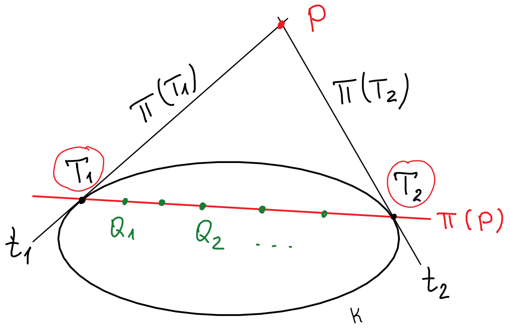
Полярност спрямо крива от II степен - аналитично задаване

E_2^*, хомогенни координати

фиг. 1



$$K: F(x,y,t) = a_{11}.x^2 + 2a_{12}.xy + a_{22}.y^2 + 2a_{13}.xt + 2a_{23}.yt + a_{33}.t^2 = 0$$

$\det A \neq 0$

$$F_1(x,y,t) = \frac{1}{2}.\frac{\partial F}{\partial x} = a_{11}.x + a_{12}.y + a_{13}.t$$

$$F_2(x,y,t) = \frac{1}{2}.\frac{\partial F}{\partial y} = a_{12}.x + a_{22}.y + a_{23}.t$$

$$F_3(x,y,t) = \frac{1}{2}.\frac{\partial F}{\partial t} = a_{13}.x + a_{23}.y + a_{33}.t$$

т. $P(x_P, y_P, t_P) \neq (0,0,0) \Rightarrow F_1(P), F_2(P), F_3(P) \neq (0,0,0)$

$\pi(P): F_1(P).x + F_2(P).y + F_3(P).t = 0$

Опр: $\pi: \underset{\text{точка, полюс}}{P} \longrightarrow \underset{\text{права, поляра}}{\pi(P)}$ е биекция

π е полярност спр. кривата K.

т. $P(x_P, y_P, t_P) \xleftrightarrow{\pi} \pi(P)\left[F_1(P), F_2(P), F_3(P)\right]$

Свойства:

1) т. P и т. Q са полярно спрегнати спр. $K \Leftrightarrow$ $P \, Z \, \pi(Q) \Leftrightarrow Q \, Z \, \pi(P)$

$F(P,Q) = 0$ $\quad F(P,Q) = F(Q,P) = \underline{F_1(P).x_Q + F_2(P).y_Q + F_3(P).t_Q} =$

$= \underline{F_1(Q).x_P + F_2(Q).y_P + F_3(Q).t_P} = 0$

2) Ако т. $\overset{F(x_P,y_P,t_P)=0}{P \in K}$, то $\pi(P)$ е допирателната към K в т. P

3) Ако т. P е външна за K $\{F(x_P,y_P,t_P) > 0\}$, то

$\pi(P) \cap K = \{T_1, T_2\} \Rightarrow \pi(T_1) \equiv t_1$, $\pi(T_2) \equiv t_2$

---

1 зад. E_2^*

$K: x^2 - 2y^2 - 5xt + 4yt + 6t^2 = 0$

Да се намерят допирателните към K в пресечните ѝ точки

1) $K \cap Ox = ?$

2) $\pi(T_1)$ $\pi(T_2)$

c $O_x: y=0$

1) $\kappa \cap O_x \quad \left| \begin{array}{l} x^2-2\underset{\smile}{y}^2-5xt+4\underset{\smile}{y}t+6t^2=0 \\ y=0 \end{array}\right. \qquad \left| \begin{array}{l} x^2-5xt+6t^2=0 \;/: t^2\neq 0 \\ y=0 \end{array}\right.$

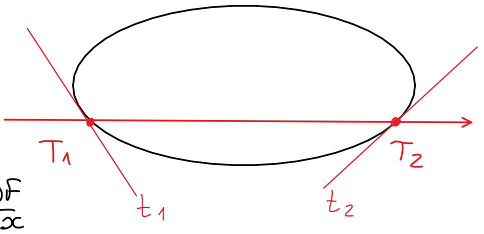
$\left| \begin{array}{l} \left(\frac{x}{t}\right)^2-5\cdot\frac{x}{t}+6=0 \\ y=0 \end{array}\right. \qquad \left| \begin{array}{l} \left(\frac{x}{t}\right)_1=2 \\ y=0 \end{array}\right. \qquad \left| \begin{array}{l} \frac{x}{t}=3 \\ y=0 \end{array}\right.$

$\kappa \cap O_x = \{T_1, T_2\} \qquad T_1(2,0,1) \qquad T_2(3,0,1)$

2) $t_1 \equiv \pi(T_1) \qquad t_2 \equiv \pi(T_2)$

$\kappa: x^2-2y^2\overset{2a_{13}}{-5}xt+\overset{2a_{23}}{4}yt+6t^2=0$

$a_{11}=1,\ a_{12}=0,\ a_{22}=-2,\ a_{13}=-\frac{5}{2},\ a_{23}=2,\ a_{33}=6$



$F_1 = a_{11}.x+a_{12}.y+a_{13}.t = x+0.y-\frac{5}{2}.t = \frac{1}{2}.\frac{\partial F}{\delta x}$

$F_2 = a_{12}.x+a_{22}.y+a_{23}.t = 0.x-2y+2.t$

$F_3 = a_{13}.x+a_{23}.y+a_{33}.t = -\frac{5}{2}.x+2.y+6.t$

За $t_1=\pi(T_1) \quad T_1(2,0,1)$

$F_1(T_1) = -\frac{1}{2}$

$F_2(T_1) = 2$

$F_3(T_1) = 1$

$t_1=\pi(T_1): -\frac{1}{2}.x+2y+t=0 \,/.(-2)$

$t_1: x-4y-2t=0$

За $t_2 \quad T_2(3,0,1)$

$F_1(T_2) = \frac{1}{2}$

$F_2(T_2) = 2$

$F_3(T_2) = -\frac{3}{2}$

$t_2=\pi(T_2): \frac{1}{2}.x+2y-\frac{3}{2}t=0 \,/.2$

$t_2: x+4y-3t=0$

---

2 зад. (Упр.)

$\kappa: x^2-2y^2-5xt+4yt+6t^2=0$ (Какъв е типа по брой безкр. точки?)

$g: y-4t=0$

Да се намерят уравн. на допирателните към κ в пресечните ѝ точки с g.

3 зад.

$\kappa: x^2+4xy+y^2-4xt-2yt=0$

$g: x+2y-3t=0$

Да се нам. коорд. на полюса P на правата g спр. κ

$P(x,y,t):\ \pi(P) \equiv g$

$$F_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial F}{\partial x} = x + 2y \boxed{-2}t$$

$$F_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} = 2x + y - 1t$$

$$F_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial F}{\partial t} = \boxed{-2}x - 1y$$

$\pi(P):\ F_1(P).x + F_2(P).y + F_3(P).t = 0$

$g:\ 1.x + 2.y - 3.t = 0$

$\pi(P) \equiv g \iff$

$$\frac{F_1}{1} = \frac{F_2}{2} = \frac{F_3}{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+2y-2t}{1} = \frac{2x+y-t}{2} = \frac{+2x+y}{+3} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 2(x+2y-2t) = 2x+y-t \\ 3(x+2y-2t) = 2x+y \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} y = t \\ x + 5y - 6t = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} y = t \\ x = t \end{array}\right.$$

$x = y = t = 1$

$P(1,1,1)$

---

4 зад. (Упр.)

$к:\ x^2+4xy+y^2-4xt-2yt=0$

$g:\ 3x-3y+4t=0$

Да се намерят координатите на полюса P на правата g спр. к.

Отг. $P(3,-2,1)$

---

5 зад. фиг. 1

$к:\ 3x^2-2xy+3y^2+4xt+4yt-4t^2=0$

$P(3,1,1)$ $\{F(P)>0\}$

През т. P минават 2 допирателни t_1 и t_2 към к.

Да се намерят уравнения на t_1 и t_2.

1) $\pi(P)=?$

$F_1 = 3x - y + 2t$ $\qquad F_1(P) = 9-1+2 = 10$

$F_2 = -x + 3y + 2t$ $\qquad F_2(P) = -3+3+2 = 2$

$F_3 = 2x + 2y - 4t$ $\qquad F_3(P) = 6 + 2 - 4 = 4$

$\pi(P):\ 10x + 2y + 4t = 0 \ |:2$

2) $к \cap \pi(P) = ? \Rightarrow \left|\ 3x^2-2xy+3y^2+4xt+4yt-4t^2=0\right.$

2) $K \cap \pi(P) = ?$ $\Rightarrow$ $\left| \begin{array}{l} 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4xt + 4yt - 4t^2 = 0 \\ y = \boxed{-5x - 2t} \end{array} \right.$

$$\left| \begin{array}{l} 3x^2 - 2x.(-5x-2t) + 3(-5x-2t)^2 + 4xt + 4.(-5x-2t).t - 4t^2 = 0 \\ y = -5x - 2t \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \utilde{3x^2} + \utilde{10x^2} + \underline{4xt} + \utilde{75x^2} + \underline{60xt} + \cancel{12t^2} + \underline{4xt} - \underline{20xt} - \cancel{8t^2} - \cancel{4t^2} = 0 \\ y = -5x - 2t \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} 88x^2 + 48xt = 0 \\ y = -5x - 2t \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} \overset{\overset{0}{\parallel}}{8x}.(\overbrace{11x + 6t}^{\parallel 0}) = 0 \\ y = -5x - 2t \end{array} \right.$$

$$\swarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -2\underset{\underset{1}{\parallel}}{t} \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} 11x + 6t = 0 \\ y = -5x - 2t \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} \text{изб. } x = 6,\ t = -11 \\ y = -5.6 - 2.(-11) = -8 \end{array} \right.$$

$T_1(0, -2, 1)$ $\qquad$ $T_2(6, -8, -11)$

3) $t_1 = \pi(T_1)$ $\qquad$ $t_2 = \pi(T_2)$

Упр.

$F_1 = 3x - y + 2t$ $\qquad$ $F_1(T_2) = 4$

$F_2 = -x + 3y + 2t$ $\qquad$ $F_2(T_2) = -52$

$F_3 = 2x + 2y - 4t$ $\qquad$ $F_3(T_2) = 40$

$t_2 = \pi(T_2) : 4x - 52y + 40t = 0$

Център, диаметри и асимптоти на крива от II степен

Опр. Полюсът C на безкрайната права ω спрямо кр. k се нарича център на k.

$k : F(x, y, t) = 0$

$\pi(C) : F_1(C).x + F_2(C).y + F_3(C).t = 0$ $\qquad$ $\pi(C) \equiv \omega \Leftrightarrow$

$\omega : 0.x + 0.y + 1.t = 0$

$$\left| \begin{array}{l} F_1(C) = 0 \\ F_2(C) = 0 \\ F_3(C) \neq 0 \end{array} \right.$$

Елипса и хипербола имат по 1 краен център -> централни.

Параболата има 1 безкраен център.

6 зад.

а) $k_1: 2x^2 - 4xy - 3y^2 + 2xt + 6yt - 5t^2 = 0$ (Типа на кр. по брой безкр., брой особени точки)

т. $C = ?$ - център на k

$$F_1 = 2x - 2y + t \qquad \left|\begin{array}{l} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \\ F_3 \neq 0 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} 2x - 2y + t = 0 \\ -2x - 3y + 3t = 0 \\ F_3 \neq 0 \end{array}\right. + \qquad \left|\begin{array}{l} -5y + 4t = 0 \\ 2x - 2y + t = 0 \end{array}\right. \qquad y = \frac{4}{5} \cdot t$$

$$F_2 = -2x - 3y + 3t$$

$$F_3 = x + 3y - 5t$$

изб. $t = 5 \Rightarrow y = 4$

$2x - 2 \cdot 4 + 5 = 0$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

$$C\left(\frac{3}{2}, 4, 5\right) \Leftrightarrow C(3, 8, 10) \qquad F_3(C) \overset{?}{\neq} 0$$

б) $k_2: \boxed{x^2 - 2xy + y^2} - 2xt + 4yt + 7t^2 = 0$

Тип: $a_{11} = 1 \quad a_{12} = -1 \quad a_{22} = 1$

$D = a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 0$

параболичен тип

$F_1 = \cancel{2}x - y - t$

$F_2 = -x + y + 2t$

$F_3 = -x + 2y + 7t$

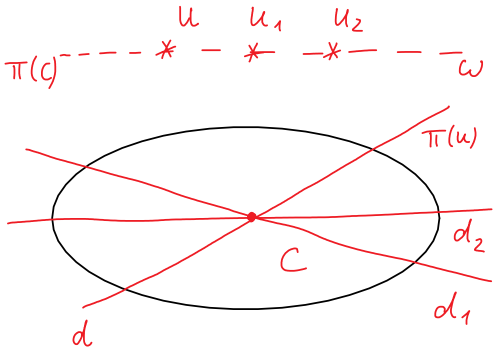
$$\left|\begin{array}{l} F_1 = \cancel{2}x - y - t = 0 \\ F_2 = -x + y + 2t = 0 \end{array}\right. + \qquad \left|\begin{array}{l} t = 0 \\ x - y - t = 0 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} t = 0 \\ x = y \neq 0 \end{array}\right. \qquad C(1, 1, 0)$$

в) (Упр.) $k_3: 3x^2 - 6xy + 5y^2 - 4xt + 8yt - 4t^2 = 0$, т. $C = ?$ - център на k_3

Опр: Диаметър на крива k от II степен е права, която минава през център C на k.

т. $C \to \pi(C) = \omega$

т. $u \to \pi(u) \ni C$



7 зад. Да се намери общият диаметър d на k_1 и k_2, ако:

(Упр.)

$k_1: x^2 - xy - y^2 - xt - yt = 0 \to$ т. C_1

$k_2: x^2 + 2xy + y^2 - xt + yt = 0 \to$ т. C_2

$$\Rightarrow d \begin{cases} \ni C_1 \\ \ni C_2 \end{cases}$$

$$d \begin{vmatrix} x & y & t \\ \ldots & C_1 & \ldots \\ \ldots & C_2 & \ldots \end{vmatrix} = 0$$

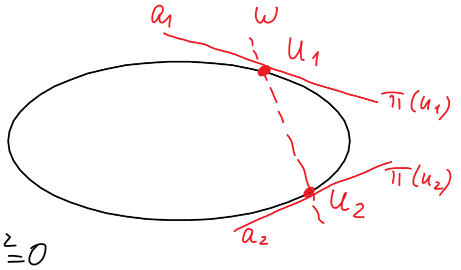
$d: 5x + 5y + 2t = 0$

8 зад. (Упр.) $k: 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18xt - 18yt + 3t^2 = 0$

$B(2, -2, 1)$

Да се намери уравнение на онзи диаметър на k, който минава през т. B.

Опр.: Асимптота на крива от II степен е допирателна към к в нейна безкрайна точка.



9 зад.

$k: 3x^2+10xy+7y^2+4xt+2yt+t^2=0$

Да се намерят асимптотите на к.

1) $k \cap \omega = ? \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 3x^2+10xy+7y^2+\underset{\sim}{4xt}+\underset{\sim}{2yt}+\underset{\sim}{t^2}=0 \\ t=0 \end{array} \right.$

$$\left| \begin{array}{r} 3x^2+10xy+7y^2=0 \;|:y^2\neq 0 \\ t=0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{r} 3\left(\frac{x}{y}\right)^2+10\cdot\frac{x}{y}+7=0 \\ t=0 \end{array} \right.$$

$D=25-3.7=4$

$\frac{x}{y}=\frac{-5+2}{3}=-1$

$\frac{x}{y}=\frac{-5-2}{3}=\frac{-7}{3}$

$u_1(1,-1,0) \qquad u_2(-7,3,0)$

2) к има 2 асимптоти $a_1=\pi(u_1)$

$a_2=\pi(u_2)$

$3x^2+10xy+7y^2+4xt+2yt+t^2=0$

$F_1=3x+5y+2t$

$F_2=5x+7y+t$

$F_3=2x+y+t$

За $\pi(u_1)$, $u_1(1,-1,0)$

$F_1(u_1)=-2$

$F_2(u_1)=-2$

$F_3(u_1)=1$

$a_1: 2x+2y-t=0$

$u_2(-7,3,0)$

$F_1(u_2)=-6$

$F_2(u_2)=-14$

$F_3(u_2)=-11$

$a_2: 6x+14y+11t=0$