Текстовете са от: Т. Генчев, Обикновени диференциални уравнения, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 1991 г.

Устойчивост по първо (линейно) приближение

Нашата главна задача в този параграф е да докажем една класическа теорема на руския математик А. М. Ляпунов (1857 — 1918), която дава прост, но твърде важен критерий за устойчивост на особените точки на автономните системи

$$(1) \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{f} \in C^1(D), \qquad D \text{ — област от } \mathbf{R}^n.^*$$

Теорема 1 (на Ляпунов). Нека точка $\mathbf{a}$ е точка на равновесие на (1) и нека собствените числа на якобиана $A = \left(\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}(\mathbf{a})\right) \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ имат отрицателни реални части. Тогава точката $\mathbf{a}$ е асимптотично устойчива.

Коментар. Според теорема 1 $\mathbf{a}$ е асимптотично устойчива точка на равновесие на системата (1), когато е асимптотично устойчива точка на линеаризацията

$$(2) \qquad \dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

на изходната система. Понеже формулата на Тейлор ни позволява да представим (1) във вида

$$(3) \qquad \dot{x} = A(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{h}(\mathbf{x}), \qquad A = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(\mathbf{a})\right),$$

където остатъчният член $\mathbf{h}$ принадлежи на $C^1(D)$ и удовлетворява условието $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \dfrac{|h(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} = 0$, функцията $\mathbf{x} \longrightarrow A(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ може да се разглежда като първо приближение на $\mathbf{f}$ в близост на точката $\mathbf{a}$. Оттук и названието на теоремата.

Читателите не могат да не доловят приликата между теоремата на Хартман и Гробман и теорема 1. Разбира се, теоремата на Ляпунов е значително по-слаба, но не трябва да се забравя, че тя е доказана повече от половин век преди теоремата на Хартман и Гробман.

Вместо самата теорема на Ляпунов ще докажем едно нейно обобщение, дадено от немския математик О. Перон. По всяка вероятност простото доказателство, което следва също, е негово.

Както често се случва, по-лесно е да осъзнаем същността на дефиницията за устойчивост, ако разгледаме въпроса в достатъчно широк контекст. Ето дефиницията в общия случай:

Дефиниция 1. Нека D е област от $\mathbf{R}^n$ и $G = [0, +\infty) \times D$. Да разгледаме нормалната система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \tag{4}$$

при предположение, че $\mathbf{F}: G \longrightarrow \mathbf{R}^n$ е функция от $C^1(G)$. Нека $t \longrightarrow \psi(t) = \varphi(t, \mathbf{x}_0)$, $\varphi(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ е решение на (4), дефинирано в целия интервал $[0, +\infty)$. Ще казваме, че ψ е *устойчиво*, ако на всяко $\varepsilon > 0$ може да се съпостави $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ по такъв начин, че за всяко $\mathbf{x} \in D$, за което $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$, да бъдат верни следните твърдения:

а) Непродължимото решение $t \longrightarrow \varphi(t, \mathbf{x})$, $\varphi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ на (4) е дефинирано в интервала $[0, +\infty)$.

б) За $t \geqq 0$ имаме $|\varphi(t, \mathbf{x}) - \psi(t)| < \varepsilon$.

Ако освен това δ може да се избере така, че освен а) и б) за $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ да бъде в сила и

в) $\lim\limits_{t \to +\infty} |\varphi(t, \mathbf{x}) - \psi(t)| = 0$,

решението ψ се нарича асимптотично устойчиво.

З а б е л е ж к а 1. Ако фиксираме произволно $T > 0$, според теоремата за глобална непрекъснатост винаги съществува $\delta = \delta(\varepsilon, T)$ такова, че щом $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$, $\mathbf{x} \in D$, непродължимото решение $t \longrightarrow \varphi(t, \mathbf{x})$, $\varphi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ е дефинирано поне в интервала $[0, T]$ и удовлетворява условието $|\varphi(t, \mathbf{x}) - \psi(t)| < \varepsilon$ за $0 \leqq t \leqq T$. Следователно дефиницията за устойчивост не е нищо друго освен изискване да съществува δ, което не зависи от T, а само от ε. Това изискване обаче е твърде съществено. Например даже и за системата $\dot{x}^1 = x^1$, $\dot{x}^2 = x^2$ с неустойчив възел в началото на всяка двойка $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ може да се съпостави $\delta = \delta(\varepsilon, T)$ с необходимите свойства. Наистина в случая $\psi(t) = 0$,

$\varphi(t,\ \mathbf{x}) = e^t\mathbf{x}$ и следователно, ако вземем $\delta = \frac{\varepsilon}{2}e^{-T}$, ще имаме $|\varphi(t,\ \mathbf{x}) - \psi(t)| = |e^t\mathbf{x}| < \varepsilon$ в целия интервал $[0,\ T]$, въпреки че в случая нямаме устойчивост.

Забележка 2. Дефиниция 1 е очевидно приложима и към автономните системи (1). В частния случай, когато ψ е константа (т.е. точка на равновесие), дефиниция 1 съвпада с дефиницията от § 3, гл.6.

Време е да формулираме теоремата на Перон.

Теорема 2. Нека D е околност на началото в $\mathbf{R}^n$, а $G = [0,\ +\infty) \times D$ е цилиндър в $\mathbf{R}^{n+1}$. Да разгледаме системата

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t,\ \mathbf{x}), \tag{5}$$

където $\mathbf{f} : G \longrightarrow \mathbf{R}^n$ е функция от $C^1(G)$, за която

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to 0} \frac{|\mathbf{f}(t,\ \mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} = 0 \quad \text{равномерно относно} \quad t \in [0,\ +\infty).^* \tag{6}$$

В такъв случай, ако собствените стойности на матрицата A имат отрицателни реални части, равновесната точка $\mathbf{x} = 0$ е асимптотично устойчива.

Ще започнем доказателството с една почти очевидна лема.

Лема 1. Ако собствените числа на $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ лежат в полуравнината $\mathrm{Re}\lambda \leqq -2\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$, съществува константа $M > 0$ такава, че да имаме

$$\left|e^{tA}\right| \leqq Me^{-\varepsilon_0 t} \quad \text{за} \quad t \geqq 0. \tag{7}$$

Доказателство. Според теорема 1 от т. 2.1, гл. 5 матрицата $e^{At} = (a_j^i(t))$, $1 \leqq i,\ j \leqq n$, е фундаментална за системата

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \tag{8}$$

т.е. векторите стълбове $\mathbf{x}_j(t) = \{a_j^i(t)\}_{i=1}^n$, $1 \leqq j \leqq n$, удовлетворяват (8). Следователно равенство (9) от т. 6.1, гл. 4 ни дава $a_j^i(t) = P_j^i(t)e^{\lambda_{ij}t}$, където собствените числа $\lambda_{ij} \in S_pA$ не са непременно различни, а P_j^i е полином от степен, по-малка от алгебричната кратност на λ_{ij}. Останалото е ясно. За $t \geqq 0$ имаме

$$|a_j^i(t)| = |P_j^i(t)|e^{(\mathrm{Re}\lambda_{ij})t} \leqq |P_j^i(t)|e^{-2\varepsilon_0 t} \leqq M_j^i e^{-\varepsilon_0 t},$$

---

*От (6) очевидно следва тъждеството $f(t,\ 0) = 0$ за $t \geqq 0$.

където $M_j^i = \sup\limits_{t \geqq 0} |P_j^i(t) e^{-\varepsilon_0 t}|$. Полученото неравенство ни дава

$$(9) \quad |e^{tA}| = \left(\sum_{i,\ j=1}^{n} |a_j^i(t)|^2 \right)^{1/2} \leqq \left(\sum_{i,\ j=1}^{n} (M_j^i)^2 \right)^{1/2} e^{-\varepsilon_0 t}, \quad t \geqq 0,$$

с което доказателството е завършено.

Доказателство на теорема 2. Нека ε е положително число, подчинено на единственото условие $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{M}$. (Предполагаме, че $M \geqq 1$, което не нарушава общността.) Според условията на теоремата съществува такова $\delta = \delta(\varepsilon)$, че от неравенството $|\mathbf{x}| \leqq \delta(\varepsilon)$ да следва, че $\mathbf{x} \in D$ и $|\mathbf{f}(t,\ \mathbf{x})| \leqq \frac{\varepsilon}{2}|\mathbf{x}|$ за $t \geqq 0$.

Нека сега $U: \ |\mathbf{x}| < \eta,\ \eta < \delta$, е околност на началото в $\mathbf{R}^n$. Нашата цел е да докажем, че когато началната стойност $\mathbf{x}_0$ се намира в кълбото $V: \ |\mathbf{x}| < \frac{\eta}{M}$, непродължимото решение $t \longrightarrow \varphi(t,\ \mathbf{x}_0)$, $\varphi(0,\ \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ е дефинирано в $[0,\ +\infty)$ и не напуска околността U. С това устойчивостта на точката $\mathbf{x} = 0$ ще бъде установена.

И така нека $|\mathbf{x}_0| < \frac{\eta}{M}$ и $[0,\ m_2)$ е дефиниционният интервал на непродължимото решение $\mathbf{x}(t) = \varphi(t,\ \mathbf{x}_0)$, $\varphi(t,\ \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. Да допуснем, че $t \longrightarrow \mathbf{x}(t)$ напуска кълбото $|\mathbf{x}| < \delta$, и да означим с T най-малкото положително число, за което $|\mathbf{x}(t)| = \delta$. В такъв случай за $t \in [0,\ T]$ ще бъде в сила оценката $|\mathbf{f}(t,\ \mathbf{x}(t))| \leqq \frac{\varepsilon}{2}|\mathbf{x}(t)|$. Понеже $t \longrightarrow \mathbf{x}(t)$ удовлетворява (5), имаме

$$(10) \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{h}(t), \qquad 0 \leqq t < m_2,$$

където сме положили за момент $\mathbf{h}(t) = f(t,\ \mathbf{x}(t))$.

Нищо не ни пречи да разглеждаме $t \longrightarrow \mathbf{x}(t)$ като решение на линейната нехомогенна система (10) и да приложим формула (23) от т. 5.3, гл. 4. Понеже в нашия случай фундаменталната матрица е тъкмо e^{tA}, получаваме

$$(11) \qquad \mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\mathbf{h}(\tau)d\tau, \qquad 0 \leqq t < m_2.$$

Нека сега t се мени само в интервала $[0,\ T]$. Тъй като за такива t имаме $|\mathbf{x}(t)| \leqq \delta$, изборът на δ ни осигурява неравенството

$|\mathbf{h}(\tau)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}|\mathbf{x}(\tau)|$ за $0 \leqq \tau \leqq t$. Ето защо, привличайки на помощ лема 1, от (11) получаваме

$$(12) \qquad |\mathbf{x}(t)| \leqq M|\mathbf{x}_0|e^{-\varepsilon_0 t} + \int_0^t \frac{M\varepsilon}{2} e^{-(t-\tau)\varepsilon_0}|\mathbf{x}(\tau)|d\tau, \qquad 0 \leqq t \leqq T,$$

т.е.

$$(13) \qquad e^{\varepsilon_0 t}|\mathbf{x}(t)| \leqq M|\mathbf{x}_0| + \int_0^t \frac{M\varepsilon}{2} e^{\varepsilon_0 \tau}|\mathbf{x}(\tau)|d\tau, \qquad 0 \leqq t \leqq T.$$

След като стигнахме дотук, не се иска особена прозорливост, за да се досетим да приложим неравенството на Гронуол. Намираме

$$e^{\varepsilon_0 t}|\mathbf{x}(t)| \leqq M|\mathbf{x}_0|e^{\int_0^t \frac{M\varepsilon}{2}d\tau} = M|\mathbf{x}_0|e^{\frac{M\varepsilon}{2}t}, \qquad 0 \leqq t \leqq T,$$

т.е.

$$(14) \qquad |\mathbf{x}(t)| \leqq e^{\left(\frac{M\varepsilon}{2}-\varepsilon_0\right)t} \leqq M|\mathbf{x}_0|e^{-\frac{\varepsilon_0}{2}t}, \qquad 0 \leqq t \leqq T,$$

защото изборът на ε ни осигурява неравенството $\frac{M\varepsilon}{2} - \varepsilon_0 < \frac{-\varepsilon_0}{2}$. Остава ни да си спомним, че $|\mathbf{x}_0| < \frac{\eta}{M}$, за да получим

$$(15) \qquad |\mathbf{x}(t)| \leqq \eta e^{-\frac{\varepsilon_0}{2}t} \quad \text{за} \quad 0 \leqq t \leqq T.$$

Понеже $\eta < \delta$, (15) показва, че $|\mathbf{x}(T)| \leqq \eta e^{-\frac{\varepsilon}{2}T} < \delta$, противно на предположението $|\mathbf{x}(T)| = \delta$. И така, оказа се, че за всяко $t \in [0,\ m_2)$ имаме $|\mathbf{x}(t)| < \delta$ — резултат, който ни позволява да твърдим, че (15) е в сила за всяко $t \in [0,\ m_2)$. След тази констатация теоремата за компактите ни дава $m_2 = +\infty$ (използвайт цилиндъра от теорема 2, § 4, гл. 4).

За да завършим, остава ни да погледнем отново (15), което, както видяхме, е в сила за $t \in [0,\ +\infty)$. Това неравенство ни осигурява две неща:

1) $\mathbf{x}(t) \in U$ за $t \geqq 0$, т.е. точката $\mathbf{x} = 0$ е устойчива,

2) $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbf{x}(t) = 0$, което означава асимптотична устойчивост.

С това теоремата на Перон е доказана.

Теорема (Хартман и Гробман). Нека $\mathbf{x} = 0$ е точка на равновесие на системата

$$(21) \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{f} \in C^1(D), \qquad D \text{ — област в } \mathbb{R}^n,$$

и нека

$$(22) \qquad \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \qquad A = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0)\right) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),$$

е нейната линеаризация около началото. Ако матрицата A няма собствени числа с нулеви реални части, системите (21) и (22) са топологично еквивалентни около началото. С други думи, съществуват околности O_1 и O_2 на $x = 0$ и хомеоморфизъм $\mathbf{h}: O_1 \longrightarrow O_2$ такъв, че $\mathbf{g}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{h}e^{At}\mathbf{h}^{-1}(x)$ ($\mathbf{g}$ е фазовият поток на (21)).

Особените точки $\mathbf{a}$, за които якобианът $\left(\dfrac{\partial f^i(\mathbf{a})}{\partial x^j}\right)$ няма собствени числа с нулеви реални части, се наричат *хиперболични*. Ясно е, че теоремата на Хартман и Гробман остава в сила за всяка хиперболична особена точка и редуцирайки изследването на фазовия портрет на (21) около началото към изследването на (22), не ни оставя да желаем нещо повече.

Съществува и диференциален аналог на тези теорема, но той не е така прост и така удобен — за дифеоморфната еквивалентност на (21) и (22) около началото са необходими допълнителни изисквания за спектъра на A. Повече подробности, както и доказателства читателят би могъл да намери в [12] и [13]. Тук ще се ограничим с един пример:

Да разгледаме системата

$$(23) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + y - y(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

В случая $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и има собствени числа $\lambda = 1 \pm i$ с ненулеви реални части, т.е. точката $(0,\ 0)$ е неустойчив фокус за $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Следователно фазовите криви (23) имат аналогично поведение около началото. В частност точката $(0,\ 0)$ е неустойчива.

Първи интеграли

Още в знаменитото изследване на задачата на Кеплер, дадено от Нютон (1642 — 1727), ключова роля играят т.нар. първи интеграли, които, както ще се убедим, не са нищо друго освен фамилии от инвариантни многообразия от специален вид.

Дефиниция 3. Функцията $u : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $u \in C^1(D)$, се нарича (глобален) *пръв интеграл на системата*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{f} \in C^1(D), \tag{1}$$

ако каквото и да бъде решението $t \longrightarrow \varphi(t)$, $m_1 < t < m_2$, на (1), функцията на една променлива $t \longrightarrow u(\varphi(t))$, $m_1 < t < m_2$, е константа.

Разбира се, в общия случай константата C_φ в равенството $u(\varphi(t)) = C_\varphi$ се мени заедно с φ. Например за решението $t \longrightarrow (t,\ \mathbf{x}_0)$, $\varphi(0,\ \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ получаваме $C_\varphi = u(\mathbf{x}_0)$.

С други думи, $u : D \longrightarrow \mathbf{R}$ е пръв интеграл, ако траекторията на кое да е решение на (1) лежи върху някоя от повърхнините на ниво $u = \mathrm{const}$.

От дадената дефиниция е ясно, че константите са първи интеграли на всички автономни системи. Те обаче са напълно безполезни. Напротив, наличието на нетривиален пръв интеграл очевидно улеснява изследването на съответната система и, общо взето, позволява да намалим нейния ред с единица. От този факт произхожда и самият термин — естествено е да разглеждаме намирането на пръв интеграл като стъпка към крайния успех — интегрирането на системата.

Глобални първи интеграли далеч невинаги съществуват. Тяхното наличие подсказва, че фазовият портрет не е много сложен.

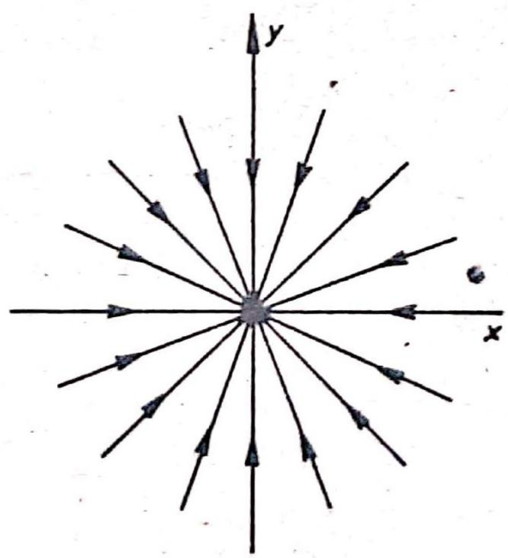
Ще илюстрираме това твърдение с три примера.

Да разгледаме линейните системи

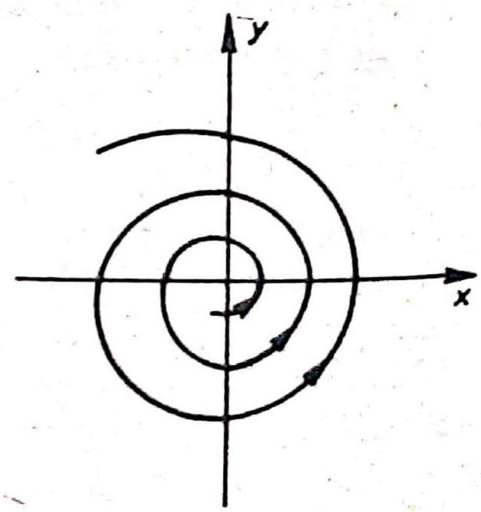
$$\text{A)}\ \dot{x} = -y, \quad \text{B)}\ \dot{x} = -x, \quad \text{C)}\ \dot{x} = x - y,$$

$$\dot{y} = x, \quad\quad \dot{y} = -y, \quad\quad \dot{y} = x + y.$$

Лесно се вижда, че A) притежава нетривиален пръв интеграл. Наистина нека $\varphi(t) = (x(t),\ y(t))$ е решение на A). Като умножим първото уравнение с $x(t)$, второто — с $y(t)$ и ги съберем, получаваме $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$, т.е. $\frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) = 0$, което означава, че функцията $u(x,\ y) = x^2 + y^2$ е пръв интеграл на A). Напротив, с един поглед върху фазовите портрети на B) и C) (фиг. 54 и 55) се убеждаваме, че B) и C) нямат нетривиални първи интеграли.



Фиг. 54



Фиг. 55