$$\textcircled{1}\quad \left|\begin{array}{l} x + y - z = 6 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - y + z = -2 \end{array}\right.$$

$R_2 - R_3$

$R_3 + R_1$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & x & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ x \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right] \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2$$

$$X = 2$$

$$x + z = 1$$

$$z = 1 - x = 1 - 2 = -1$$

$$y = x + z + 2 = 2 - 1 + 2 = 3$$

2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$x_1 = 2$

$x_3 - x_2 = -4$

$x_3 = p$

$x_2 = p + 4$

3 неизв. 2 ненулеви реда

$3 - 2 = 1$ парам.

PEF

Решения: $(2, p+4, p)$

Системата е неопр.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x + \underline{y} + \underline{z} = 2$$

$$y = p \qquad z = q$$

$$x = 2 - p - q$$

$$(2 - p - q, p, q)$$

③
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & +2 & -2 & 7 \end{array}\right] \sim$$

$R_1 + R_2$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$R_3 - 2R_1$

$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -1$

несовместима

$$\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & -2 & 7 \\ -\,0 & 2 & -2 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

Хомогенни системи

- свободните коеф. са 0

определени неопр.

Нулевото решение винаги е решение

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 1y + z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

4

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 5 & -9 & 11 & 8 \\ 9 & -18 & 19 & 13 \\ 3 & -8 & 7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 8 & 25 \\ 0 & 0 & 19 & 64 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 8 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 312 \\ 0 & 2 & 0 & 9 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = 0$ $x_2 = 0$

$x_3 = 0$ $x_4 = 0$

5

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda \end{array}\right] + \sim$$

Да се реши системата в зависмост от ламба

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & t & 1-\lambda \end{array}\right]$$

$$t = 1-\lambda^2 + 1-\lambda = \underline{-\lambda^2 - \lambda + 2} = \boxed{(1-\lambda)(2+\lambda)}$$

1) $\lambda = 1$ $\quad t = 0$ $\quad R_3: 0x + 0y + 0z = 0 \rightarrow$ неопр.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$y = p, \; z = q \qquad x = 1 - p - q$

$p, q \in \mathbb{R}$

2) $\lambda = -2$

несъвместима

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

3) $\lambda \notin \{1, -2\} \Rightarrow t \neq 0$

$$x_3 = \frac{1-\lambda}{t}$$

$(\lambda - 1)x_2 + (1 - t)x_3 = 0$

$$x_2 = \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1} \quad x_3 = x_3$$

$$x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1$$

$$x_1 = 1 - x_2 - \lambda x_3 =$$

$$= 1 - x_3 - \lambda x_3 =$$

$$= 1 - (1+\lambda) x_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 & \lambda \\ 6 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 11 & -6 & -1 & 7+\mu & 2\lambda-6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 9 & \lambda-4 \\ 7 & -4 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 12 & -7 & 0 & 5+\mu & 2\lambda-5 \end{array}\right] \sim$$

Не избирайте реда или стълба, в който е мюто

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 9 & \lambda-4 \\ -1 & 0 & 0 & 33 & 4\lambda-16 \\ 1 & 0 & -1 & -7 & 3-\lambda \\ -2 & 0 & 0 & \mu+68 & 9\lambda-33 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 57 & 7\lambda-28 \\ -1 & 0 & 0 & 33 & 4\lambda-16 \\ 0 & 0 & -1 & 26 & 3\lambda-13 \\ 0 & 0 & 0 & \mu+2 & \lambda-1 \end{array}\right]$$

то

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 57 & 7\lambda-28 \\ -1 & 0 & 0 & 33 & 4\lambda-16 \\ 0 & 0 & -1 & 26 & 3\lambda-13 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\mu+2} & \underline{\lambda-1} \end{array}\right]$$

1) $\mu+2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mu=-2$

1.1) $\lambda-1\neq 0 \Leftrightarrow$
$\lambda\neq 1$

системата е несъвместима

1.2) $\lambda=1$

$0\cdot x_4=0 \Leftrightarrow \boxed{x_4=p}$ $\quad p\in\mathbb{F}$

$-x_3+26x_4=3\lambda-13 \Leftrightarrow x_3=26x_4-3\lambda+13=$
$=\boxed{26p+10}$; $\boxed{x_2=57p+21}$; $\boxed{x_1=33p+12}$

Системата е неопределена

то

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 57 & 7\lambda-28 \\ -1 & 0 & 0 & 37 & 4\lambda-16 \\ 0 & 0 & -1 & 26 & 3\lambda-13 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\mu+2} & \underline{\lambda-1} \end{array}\right]$$

$$\boxed{x_2 = 28-7\lambda+57\cdot\frac{\lambda-1}{\mu+2}}$$

$$\boxed{x_1 = 16-4\lambda+37\cdot\frac{\lambda-1}{\mu+2}}$$

<u>2 сл.</u> $\mu \neq -2$

$$(\mu+2)x_4 = \lambda-1 \quad / : \mu+2$$

определена

$$x_4 = \frac{\lambda-1}{\mu+2}$$

$$\boxed{x_3 = 13-3\lambda+26\cdot\frac{\lambda-1}{\mu+2}}$$

Линейни пространства

Нека F е поле и $V \neq \emptyset$ елементите му се наричат вектори

$\oplus : V \times V \to V$ $\quad (F, \cdot_F, +_F)$

$\odot : F \times V \to V$

$(V, \oplus, \odot)$ е ЛП, ако:

1) $(V, \oplus)$ — абелева

-затвореност
-асоциативност
-неутрален елемент (нулев вектор)
-съществуване на обратен(в случая противоположен) елемент
-комутативност

2) -затвореност относно умножението

3) $\exists 1 \in F : 1 \odot a = a$

4) Дистрибутивност относно скаларите

$\lambda, \mu \in F \quad a \in V :$

$(\lambda +_F \mu) \odot a = \lambda \odot a \oplus \mu \odot a$

5) Дистрибутивност относно векторите

$\lambda \in F,\ a, b \in V$

$$\lambda \odot (a \oplus b) = \lambda \odot a \oplus \lambda \odot b$$

6) $\lambda, \mu \in F,\ a \in V$

$$\lambda \odot (\mu \odot a) = (\lambda \cdot_F \mu) \odot a$$

Пр: $V = \mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ $F = \mathbb{R}$

$$\oplus : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13}) \oplus (a_{21}, a_{22}, a_{23}) = (a_{11} +_F a_{21}, a_{12} +_F a_{22}, a_{13} +_F a_{23})$$

$$\odot \; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\lambda \odot (a_1, a_2, a_3) = (\lambda \cdot_F a_1, \lambda \cdot_F a_2, \lambda \cdot_F a_3)$$

Пр: 1) $\mathbb{F}_{m\times n}$ над F

2) $\mathbb{F}^n$

3) $F^{n+1}[x] = \{f \in \mathbb{F}[x] \mid \deg f \leq n\}$

Полиномите от
степен <= n

Св. Нулевият вектор е единствен

Д-во: Нека има поне два нулеви в-ра $0', 0''$

$$\begin{cases} 0' + 0'' = 0'' \\ 0' + 0'' = 0' \end{cases} \Rightarrow 0' = 0''$$

Сх. Противоположният вектор е единствен

Д-во: Нека $a \in V$ и a', a'' - противопол. на a.

$$(a' \oplus a) \oplus a'' = 0 \oplus a'' = a''$$

$$a' \oplus (a \oplus a'') = a' \oplus 0 = a'$$

асоц. $\Longrightarrow a' = a''$