| вариант | ф. номер | група | поток | курс | специалност |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 45656 | 3 | | | Инф. |
| Име: | Майкъл Зарков | | | | |

Второ контролно по ЕАИ - 16.01.2023 г.

1

**Зад. 1.** (**1** точка) Постройте к.св. граматика за езика

$$L = \mathcal{L}(G) \cdot \mathcal{L}(A) \cup \{ba\}^* \cdot \{ab\}$$

като използвате изучавани конструкции или докажете, че $L$ е точно езикът на построената граматика .

$$A = \langle \{a, b\}, \{s, p, q\}, s, \Delta, \{p, s\} \rangle$$

$$\Delta(s, b) = \{s, p\}, \Delta(q, b) = \{s, p\}, \Delta(s, a) = \{q\}, \Delta(p, a) = \{p\}$$

$$G = \langle \{a, b\}, \{S, X\}, S, \{S \to XX | bX | a, X \to Sb | aS\} \rangle$$

1.5

**Зад. 2.** (**1.5** точки) Да се построи к.св. граматика $G$ за езика

$$L = \{\alpha c \beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b\}^*, |\alpha|_b = |\beta|_a\}$$

и да се докаже, че $\mathcal{L}(G) = L$.

**Зад. 3.** (**1.5** точки) Нека $\Sigma = \{a, b\}$. Със $sub_a(\alpha, \beta)$ ще означаваме думата, получена след заместването на всяко срещане на $a$ в $\alpha$ с думата $\beta$. Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е регулярен език, $\beta \in \Sigma^*$ и нека

0.75

$$L_\beta = \{\gamma \cdot sub_a(\alpha, \beta) \mid \gamma \cdot \alpha \in L, |\alpha| = |\gamma|\}$$

- Вярно ли е, че винаги езикът $L_\beta$ е регулярен?
- Вярно ли е, че винаги езикът $L_\beta$ е к.св.?

5.25

Екипът Ви пожелава успех.

4. Гр. за $\{ba\}^* \cdot \{ab\}$ : $S_4$

$S_1 \to$

$S_2 \to$

Майкъл Захариев Зарков; фн: 45655

Зад. 1 $L = \mathcal{L}(G) \cdot \mathcal{L}(A) \cup \{ba\}^* \cdot \{ab\}$

1. Граматика за $\{ab\}$: $S_1 \to ab$, ($S_1$ - начална)

2. Гр. за $\{ba\}$: $S_2 \to ba$, ($S_2$ - начална)

3. Гр. за $\{ba\}^*$: $S_3 \to S_2 S_3 \mid \varepsilon$, ($S_3$ - начална)

$S_2 \to ba$

4. Гр. за $\{ba\}^* \cdot \{ab\}$: $S_4 \to S_3 S_1$ ($S_4$ - начална)

$S_1 \to ab$

$S_2 \to ba$

$S_3 \to S_2 S_3 \mid \varepsilon$

5. Гр. за $\mathcal{L}(A)$:

$S_5$ - начална променлива

$S_5 \to bS_5 \mid bP \mid \varepsilon \mid aQ$

$P \to aP \mid \varepsilon$

$Q \to bS_5 \mid bP$

6. Граматика за $\mathcal{L}(G) \cdot \mathcal{L}(A)$:

$S_6$ - начална променлива

$S_6 \to S S_5$

правилата на ~~за~~ граматиката за $\mathcal{L}(A)$ ...

правилата на $G$ ...

(1)

7. Граматика за $L$:

$S_7$ - начална променлива

$S_7 \to S_6 \mid S_4$

$S_1 \to ab$

$S_2 \to ba$

$S_3 \to S_2 S_3 \mid \varepsilon$

$S_4 \to S_3 S_1$

$S_5 \to bS_5 \mid bP \mid aQ \mid \varepsilon$

$S_6 \to SS_5$

$P \to aP \mid \varepsilon$

$Q \to bS_5 \mid bP$

$S \to XX \mid bX \mid a$

$X \to Sb \mid aS$

Съкратено написано за $L$:

$S_7$ - начална

$S_7 \to S_6 \mid S_4$

- правилата на граматиката за езика $\{ba\}^* \cdot \{ab\}$ ...
- правилата за граматиката за езика $\mathcal{L}(G) \cdot \mathcal{L}(A)$ ...

---

Зад.2 $L = \{ \alpha c \beta \mid \alpha, \beta \in \{a,b\}^*, |\alpha|_b = |\beta|_a \}$

Нека $G$: $S \to bSa \mid aS \mid Sb \mid c$ е граматика.

Доказвам, че $\mathcal{L}(G) = L$.

1) $\mathcal{L}(G) \overset{?}{\subseteq} L$; доказвам с индукция по дължината на извода, че ако $S \overset{*}{\Rightarrow} \gamma$, то $\gamma \in L$

1. База: $n=0$, $S \overset{0}{\Rightarrow} S$ - за нула стъпки не можем да изведем дума $\Rightarrow$ базата е тривиално изпълнена.

2. ИД: нека $\forall k \leq n$, $S \overset{k}{\Rightarrow} \gamma$, то $\gamma \in L$.

За $L$:

3. Стъпка: доказваме, че ако $S \overset{n+1}{\Rightarrow} \gamma$, то $\gamma \in L$

$S \overset{1}{\Rightarrow} \gamma' \overset{n}{\Rightarrow} \gamma$

<u>1сл.</u> $\gamma' = bSa$

$S \overset{1}{\Rightarrow} bSa \overset{n}{\Rightarrow} b\psi a = \gamma$; от ИД $\psi \in L \Rightarrow \psi = \alpha c \beta$,

$|\alpha|_b = |\beta|_a$; $\gamma = b\psi a = b \cdot \alpha c \beta \cdot a$, $|b \cdot \alpha|_b = |\alpha|_b + 1$, $|\beta \cdot a|_a = |\beta|_a + 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow |b \cdot \alpha|_b = |\beta \cdot a|_a$

$\Rightarrow \gamma$ има вида $\alpha' c \beta'$, където $|\alpha'|_b = |\beta'|_a$

$\Rightarrow \gamma = \alpha' c \beta' \in L$ ✓

<u>2сл.</u> $\gamma' = aS$

$S \Rightarrow aS \overset{n}{\Rightarrow} a\psi = \gamma$; (ИД) $\psi \in L$, $\psi = \alpha c \beta$, $|\alpha|_b = |\beta|_a$

$\gamma = a\psi = a \cdot \alpha c \beta$, $|a \cdot \alpha|_b = |\beta|_a \Rightarrow \gamma = \alpha' c \beta$ ($\alpha' = a \cdot \alpha$, $|\alpha'|_b = |\beta|_a$)

$\Rightarrow \gamma \in L$

<u>3сл.</u> $\gamma' = Sb$

$S \Rightarrow Sb \overset{n}{\Rightarrow} \gamma = \psi b$; (ИД) $\psi \in L$, $\psi = \alpha c \beta$, $|\alpha|_b = |\beta|_a$

$\gamma = \psi b = \alpha c \beta b$, $|\alpha|_b = |\beta \cdot b|_a \Rightarrow \gamma = \alpha c \beta b \in L$

<u>4сл.</u> $\gamma' = c$

$S \Rightarrow c \overset{n}{\Rightarrow} \gamma$, но $\forall k \in \mathbb{N}$ $c \overset{k}{\Rightarrow} c$, $c \in L$ (очевидно)

сл. 1, 2, 3, 4 $\Rightarrow$ $S \overset{n+1}{\Rightarrow} \gamma$, то $\gamma \in L \Rightarrow \mathcal{L}(G) \subseteq L$

3

1b

2) $\mathcal{L}(G) \overset{?}{\supseteq} L$

Доказват с инд. по $|\gamma|$: ако $\gamma \in L$, то $\gamma \in \mathcal{L}(G)$

1. База: $|\gamma| = 0 \iff \gamma = \varepsilon$, $\varepsilon \notin L$, също $\varepsilon \notin \mathcal{L}(G)$

$\Rightarrow$ базата е вярна.

2. ИД: нека е вярно $\forall \gamma, |\gamma| \leq n$, ако $\gamma \in L$, то $\gamma \in \mathcal{L}(G)$

3. Стъпка: доказвам за $|\gamma| = n+1$, $\gamma \in L$

$|\gamma| = n+1 \Rightarrow \gamma = x\gamma'$, $x \in \Sigma$, $\gamma' \in \{a,b,c\}^*$

1сл. $x = c$; единствената дума от езика $L$, започваща с "c" е "c"

$\Rightarrow \gamma' = \varepsilon \Rightarrow \gamma = c.\varepsilon = c$

$S \to c$ е извод за $\gamma$

2сл. $x = a \Rightarrow \gamma = a\gamma'$, $\gamma \in L \Rightarrow \gamma = \alpha c \beta = a\alpha' c \beta$

$|a\alpha'|_b = |\beta|_a$, $|\alpha'|_b = |\beta|_a \Rightarrow \alpha' c \beta \in L \overset{ИД}{\Rightarrow}$ съществува

извод $S \overset{*}{\Rightarrow} |\gamma'|$ $(|\gamma'| = n)$

извод за $\gamma$: $S \overset{1}{\Rightarrow} a\underline{\underline{S}} \overset{*}{\Rightarrow} a\gamma' = \gamma \in \mathcal{L}(G)$

3сл. $x = b \Rightarrow \gamma = b\gamma'$, $\gamma \in L \Rightarrow \gamma = \alpha c \beta = b\alpha' c \beta$

$|b\alpha'|_b = |\beta|_a \Rightarrow |\beta|_a \neq 0 \Rightarrow \beta = \beta_1 a b^k$, $k \in \mathbb{N}$, $\beta_1 \in \{a,b\}^*$

$\Rightarrow \gamma = \alpha c \beta = b\alpha' c \beta = b\alpha' c \beta_1 a b^k$

$|b\alpha'|_b = |\beta_1 a b^k|_a = |\beta_1 a|_a$ ; $|\alpha'|_b = |\beta_1|_a \Rightarrow \alpha' c \beta_1 \in L$

ИД ок

$\alpha' c \beta_1 \in L \overset{ИД}{\Rightarrow} \exists$ извод: $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha' c \beta_1$

$|\alpha' c \beta_1| \leq n$

Извод за $\gamma$: ~~...~~ $S \overset{k}{\Rightarrow} Sb^k \overset{1}{\Rightarrow} bSab^k \overset{*}{\Rightarrow} b\alpha' c \beta_1 a b^k = \gamma$

по-точно щеше да е да разгледаш случаите 2) $\gamma$ зап. с a 3) $\gamma$ зап. с b зав. на b 4) $\gamma$ зап. с b и $\gamma$ зав. на a

Виж втората половина от стр. 5

Зад. 3

$L_\beta = \{ \gamma \cdot sub_a(\alpha, \beta) \mid \gamma \cdot \alpha \in L, |\alpha| = |\gamma| \}$

а) Вярно ли е, че винаги езикът $L_\beta$ е регулярен?

Невинаги езикът $L_\beta$ е регулярен. Контра пример:

$L = \{ a^{2n} \mid n \in \mathbb{N} \}$, $\beta = b$

Имаме $\forall \gamma \cdot \alpha \in L, |\alpha| = |\gamma| : \gamma = a^n, \alpha = a^n, n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, sub_a(a^n, b) = b^n$.

$L_\beta = \{ a^n \cdot sub_a(a^n, b) \mid n \in \mathbb{N} \} = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ → този език не е регулярен $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ невинаги $L_\beta$ е рег.

Зад. 2 $\overset{\text{сл. 1,2,3}}{\Longrightarrow} \forall \gamma \in L, |\gamma| = n+1, \gamma \in \mathcal{L}(G)$

$\overset{\text{ММИ}}{\Longrightarrow} \forall \gamma \in L, \gamma \in \mathcal{L}(G)$

$\mathcal{L}(G) \subseteq L \wedge L \subseteq \mathcal{L}(G) \iff \mathcal{L}(G) = L$ $\square$