Решения на контролното по ДАА, Информатика II, 19.04.2011

Зад. 1 Подредете по асимптотично нарастване следните осем функции. Обосновете отговорите си кратко. От отговора Ви трябва да е абсолютно ясно и недвусмислено каква подредба сте намерили. Препоръчително е да напишете в явен вид самата подредба.

$$n^2, \quad 3+\frac{1}{\lg n}, \quad 3+n^{\frac{1}{\lg n}}, \quad \lg\left((n^3)!\right),$$
$$n! + \sqrt[3]{\lg\lg n}, \quad 2^{3n}, \quad (3n+3)!, \quad 7+\sqrt{7+17n}$$

Решение: Първо ще докажем, че $(3n+3)! \succ n! + \sqrt[3]{\lg\lg n}$. Тъй като $\sqrt[3]{\lg\lg n} \prec n!$, вярно е, че $n! + \sqrt[3]{\lg\lg n} \approx n!$. Желаното твърдение следва непосредствено, тъй като $(3n+3)! = (3n+3)\dots(n+1)n!$, следователно $(3n+3)! \succ n!$.
Второ, ще докажем, че $n! + \sqrt[3]{\lg\lg n} \succ 2^{3n}$. Както вече отбелязахме, $n! + \sqrt[3]{\lg\lg n} \approx n!$, а от друга страна, $n! \succ 2^{3n}$. Последното се доказва чрез логаритмуване на двете функции, при което функцията вляво има (след логаритмуването) асимптотика $\Theta(n\lg n)$, а тази вдясно, $3n = \Theta(n)$.
Трето, ще докажем, че $2^{3n} \succ \lg\left((n^3)!\right)$. Знаем, че $\lg m! = \Theta(m\lg m)$, следователно $\lg\left((n^3)!\right) = \Theta(n^3\left(\lg n^3\right)) = \Theta(n^3\lg n)$. Фактът, че $2^{3n} \succ n^3\lg n$, е очевиден.
Четвърто, ще докажем, че $\lg\left((n^3)!\right) \succ n^2$. Вече отбелязахме, че $\lg\left((n^3)!\right) = \Theta(n^3\lg n)$, а очевидно $\Theta(n^3\lg n) \succ n^2$.
Пето, ще докажем, че $n^2 \succ 7+\sqrt{7+17n}$. Разглеждаме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{7+\sqrt{7+17n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{\sqrt{n}}}{\frac{7+\sqrt{7+17n}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{\frac{7}{\sqrt{n}}+\sqrt{\frac{7}{n}+17}} = \infty$$

Шесто, ще докажем, че $7+\sqrt{7+17n} \succ 3+n^{\frac{1}{\lg n}}$. Първо ще покажем, че $n^{\frac{1}{\lg n}} = 2$. Действително, ако логаритмуваме двете функции, получаваме съответно $\frac{1}{\lg n}\lg n = 1$ и $\lg 2 = 1$. Следователно, $3+n^{\frac{1}{\lg n}} = \Theta(1)$. Тъй като $\lim_{n\to\infty} 7+\sqrt{7+17n} = \infty$, следва, че $7+\sqrt{7+17n} \succ 3+n^{\frac{1}{\lg n}}$.
И накрая ще докажем, че $3+n^{\frac{1}{\lg n}} \approx 3+\frac{1}{\lg n}$. Вече доказахме, че $3+n^{\frac{1}{\lg n}} = \Theta(1)$. От друга страна, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lg n} = 0$, следователно $3+\frac{1}{\lg n} = \Theta(1)$.
Подредбата е:

$$(3n+3)! \succ n! + \sqrt[3]{\lg\lg n} \succ 2^{3n} \succ \lg\left((n^3)!\right) \succ n^2 \succ 7+\sqrt{7+17n}$$
$$3+n^{\frac{1}{\lg n}} \approx 3+\frac{1}{\lg n}$$

□

Зад. 2 Решете следните шест рекурентни отношения чрез мастър теоремата (Master Theorem).

а) $T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{\lg n}$

б) $T(n) = 6T\left(\frac{n}{6}\right) + 1$

в) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n^3(\lg n)^9 + n^2$

г) $T(n) = 11T\left(\frac{n}{3}\right) + \sqrt[4]{n}$

д) $T(n) = \left(4+\sqrt{3}\right)T\left(\frac{n}{4+\sqrt{3}}\right) + n + \sqrt{102n + \lg n}$

е) $T(n) = 7T\left(\frac{n}{\sqrt{7}}\right) + n^3$

Решение:
а) По първия случай на МТ, $T(n) = \Theta\left(n^{\log_2 5}\right)$.
б) По първия случай на МТ, $T(n) = \Theta(n)$.
в) Нека $\log_4 3 = k$. Тъй като $k < 1$, вярно е, че $n^3(\lg n)^9 + n^2 \succ n^{k+\epsilon}$ за някое положително ϵ, примерно $\epsilon = 1$. Да проверим условието за регулярност, за да видим дали третият случай на МТ е приложим.

$$3\left(\left(\frac{n}{4}\right)^3\left(\lg\left(\frac{n}{4}\right)\right)^9 + \left(\frac{n}{4}\right)^2\right) \leq \frac{3}{16}(n^3(\lg n)^9 + n^2)$$

следователно условието за регулярност е изпълнено за, примерно, $c = \frac{3}{16}$. Съгласно третият случай на МТ, $T(n) = \Theta(n^3(\lg n)^9 + n^2) = \Theta(n^3(\lg n)^9)$.
г) Нека $\log_3 11 = k$. Тъй като $k > 1$, $n^{\frac{1}{4}} = O\left(n^{k-\epsilon}\right)$ за някое положително ϵ. По първия случай на МТ, $T(n) = \Theta(n^k)$.
д) Нека $4+\sqrt{3} = k$. От една страна, $n^{\log_k k} = n$, а от друга страна, $n+\sqrt{102n + \lg n} = \Theta(n)$. По втория случай на МТ, $T(n) = \Theta(n \lg n)$.
е) Тъй като

$$\log_{\sqrt{7}} 7 = \frac{\log_7 7}{\log_7 \sqrt{7}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

вярно е, че $n^3 = n^{(\log_{\sqrt{7}} 7)+\epsilon}$ за някое положително ϵ. По третия случай на МТ, $T(n) = \Theta(n^3)$. Условието за регулярност е изпълнено, понеже

$$7\left(\frac{n}{\sqrt{7}}\right)^3 \leq cn^3$$

е изпълнено за, примерно, $c = \frac{1}{\sqrt{7}}$. □

Зад. 3 Решете следните четири рекурентни отношения чрез метода с характеристичното уравнение.

а) $T(n) = 3T(n-1) + 3^n + 2^n + 12n2^n$

б) $T(n) = 5T(n-1) + 6T(n-2) + 3n3^n$

в) $T(n) = 3T(n-1) - 2T(n-2) + 1$

г) $T(n) = 2T(n-2) + \left(\sqrt[3]{2}\right)^{3n+3}$

Решение:
а) Мултимножеството от корените е $\{3, 3, 2, 2\}_M$, следователно $T(n) = \Theta(3^n)$.

б) Характеристичното уравнение има корени $\{6, -1\}_M$. Нехомогенната част дава още $\{3, 3\}_M$. Ясно е, че $T(n) = \Theta(6^n)$.
в) Характеристичното уравнение има корени $\{2, 1\}_M$. Нехомогенната част дава още $\{1\}_M$. Ясно е, че $T(n) = \Theta(2^n)$.
г) Характеристичното уравнение е

$$x^2 - 2 = 0$$

Мултимножеството от корените му е $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}_M$. Нехомогенната част е $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{3n+3} = 2^{n+1} = 2.2^n$ Заради нехомогенната част добавяме $\{2\}_M$ към мултимножеството от корените. Решението е $T(n) = 2^n$. □

Зад. 4 Докажете по индукция, че $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^2$ има решение $T(n) = \Theta(n^2)$.

Решение: Първо ще покажем, че $T(n) = O(n^2)$. Ще покажем, че $\exists c > 0 : T(n) \leq cn^2$. Индуктивното предположение е $T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c\left(\frac{n}{2}\right)^2$. Оттам имаме

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2c\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n^2 \\ &= \frac{1}{2}cn^2 + n^2 \\ &\leq cn^2 \text{ , ако } n^2 \leq \frac{1}{2}cn^2 \Leftrightarrow c \geq 2 \end{aligned}$$

Сега ще покажем, че $T(n) = \Omega(n^2)$. Ще покажем, че $\exists d > 0 : T(n) \geq dn^2$. Индуктивното предположение е $T\left(\frac{n}{2}\right) \geq d\left(\frac{n}{2}\right)^2$. Оттам имаме

$$\begin{aligned} T(n) &\geq 2d\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n^2 \\ &= \frac{1}{2}dn^2 + n^2 \\ &\geq dn^2 \text{ , ако } n^2 \geq \frac{1}{2}dn^2 \Leftrightarrow d \leq 2 \end{aligned}$$

□

Зад. 5 Дадени са следните четири програмни фрагмента. За всеки от тях, намерете асимптотичната сложност по време като функция на n. Приемете, че n е достатъчно голямо цяло число. В подзадача **б)** имате 2 точки бонус, ако изведете правилно освен асимптотиката и точен израз за стойността, която връща `iterfunc`, като функция на n.

а)
```
int rfunc(int n) {
 int i, s = 0;
 if (n < 1) return 1;
 for(i = 0; i < 4; i ++) {
  if(i % 2 == 0)
   s += rfunc(n-2);
  else s += rfunc(n-1); }
 return s; }
```

б)
```
int iterfunc(int n) {
 int z, k, a = 0;
 for (z = 3 * n; z > 0; z = z - 3)
  for (k = 0; k < z / 3; k ++)
   a ++;
 return a; }
```

в)

```
int bar(int);

void foo(int n) {
 int p, q;
 if(n == 1) return;
 q = bar(n);
 for(p = 0; p < n; p ++)
  foo(n-1); }

int bar(int n) {
 int i, v = 1;
 for (i = 1; i <= n; i ++)
  v = v * i;
 return v; }
```

г)

```
int myfunc(int n) {
 int a = 0, i;
 if(n > 1) {
  for (i = 2; i <= 5; i += 2)
   a += myfunc(n/2);
 return a; }
 return 1; }
```

Решение:

а) Цикълът **for** се изпълнява точно четири пъти, за $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. За $i \in \{0, 2\}$, условието на **if**-а е изпълнено и имаме рекурсивно викане с вход $n - 2$. За $i \in \{1, 3\}$, условието на **if**-а не е изпълнено и имаме рекурсивно викане с вход $n - 1$. Рекурентното отношение е

$$T(n) = 2T(n-1) + 2T(n-2) + 1$$

Характеристичното уравнение е $x^2 - 2x - 2 = 0$ с корени $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$. От нехомогенната част имаме още един корен 1, който не влияе на асимптотиката на решението. Решението е $T(n) = \Theta((1 + \sqrt{3})^n)$.

б) Външният **for** се изпълнява точно n пъти: z приема стойностите $3n, 3n - 3, \ldots, 6, 3$, в тази последователност. Да кажем, че z приема стойностите от вида $3i$, където i приема стойностите $n, n - 1, \ldots 2, 1$. За всяко от тези i, вътрешният цикъл се изпълнява точно i пъти, понеже k приема стойностите $0, 1, \ldots, (3(i-1))/3$, тоест $0, 1, \ldots, i-1$. Тъй като a се инициализира с нула и се инкрементира точно веднъж при всяко изпълнение на вътрешния цикъл, върната стойност е равна на броя изпълнения на вътрешния цикъл, които са

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

в) Всяко викане на `foo` (за достатъчно големи стойности на n) прави n рекурсивни викания, всяко с вход $n-1$, и освен това извършва изчисление със сложност по време $\Theta(n)$. Асимптотичната сложност се определя от рекурентното отношение

$$T(n) = nT(n-1) + n$$

То се решава чрез развиване така

$$
\begin{aligned}
T(n) &= nT(n-1) + n \\
&= n\big((n-1)T(n-2) + (n-1)\big) + n \\
&= n(n-1)T(n-2) + n(n-1) + n \\
&= n(n-1)\big((n-2)T(n-3) + (n-2)\big) + n(n-1) + n \\
&= n(n-1)(n-2)T(n-3) + n(n-1)(n-2) + n(n-1) + n \\
&= n(n-1)(n-2)\big((n-3)T(n-4) + (n-3)\big) + n(n-1) + n + 1 \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)T(n-4) + n(n-1)(n-2)(n-3) + n(n-1)(n-2) + n(n-1) + n \\
&= \ldots \\
&= \frac{n!}{(n-i)!}T(n-i) + \frac{n!}{(n-i)!} + \frac{n!}{(n-i+1)!} + \ldots + \frac{n!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!}
\end{aligned}
$$

Максималната стойност, която i достига, е $i_{\max} = n - 1$. За $i = i_{\max}$ имаме:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \frac{n!}{1!}T(1) + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + \frac{n!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} \\
&= n! \times \underbrace{\left(\frac{T(1)}{1!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}\right)}_{A}
\end{aligned}
$$

Но сумата A е ограничена от константа: редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}$ е сходящ, понеже бива мажориран от геометричния ред $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$, за който знаем, че е сходящ. Следователно,

$$T(n) = \Theta(n!)$$

г) Имаме две викания (за $i = 2$ и $i = 4$) с вход $\frac{n}{2}$ всяко, и освен това се върши изчисление със сложност $\Theta(1)$. Рекурентното отношение е

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

Съгласно първия случай на МТ, неговото решение с МТ е $T(n) = \Theta(n)$. $\square$