Ранг на система вектори. Ранг на матрица.

Нека V е линейно пространство, а $c_1, c_2, \dots, c_k \in V$ е крйна система вектори, в която поне един е различен от нулевия вектор. Казваме, че системата има *ранг* r, ако в нея има r на брой линейно независими вектора и всеки $r+1$ вектора в нея са линейно зависими. (Иначе казано, r е максималният брой линейно независими вектори в системата). Ясно е, че $1 \leq r \leq k$. ($r = k$ точно когато всичките вектори $c_1, c_2, \dots, c_k$ са линейно независими.) За системата, състояща се само от нулевият вектор, казваме че има ранг 0. Означение: $\operatorname{rank}(c_1, c_2, \dots, c_k)$.

Твърдение. $\operatorname{rank}(c_1, c_2, \dots, c_k) = \dim \ell(c_1, c_2, \dots, c_k)$.

Доказателство. Нека $\operatorname{rank}(c_1, c_2, \dots, c_k) = r$ и без ограничение считаме, че векторите $c_1, \dots, c_r$ са линейно независими. За произволен вектор $c_i, r+1 \leq i \leq k$ (ако $r < k$) допускаме, че $c_i \notin \ell(c_1, \dots, c_r)$. Това обаче означава, че векторите $c_1, \dots, c_r, c_i$ са линейно независими и са $r+1$ на брой, което противоречи на условието $\operatorname{rank}(c_1, \dots, c_k) = r$. Следователно $c_{r+1}, \dots, c_k \in \ell(c_1, \dots, c_r)$ и всеки вектор от $\ell(c_1, \dots, c_k)$ е линейна комбинация на векторите $c_1, \dots, c_r$. Така $c_1, \dots, c_r$ е базис на $\ell(c_1, \dots, c_k)$ и $\dim \ell(c_1, \dots, c_k) = r = \operatorname{rank}(c_1, \dots, c_k)$. $\square$

Да разгледаме матрицата

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in F_{m \times n}.$$

Нека $k \leq m, k \leq n$. В A фиксираме k на брой реда и k на брой стълба. Елементите на A в тях образуват детерминанта от ред k, наречена *минор* *от ред* k на A. Нека конкретните редове са с номера $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, а стълбовете са $j_1 < j_2 < \dots < j_k$. Тогава минорът от ред k е

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i_1j_1} & \alpha_{i_1j_2} & \cdots & \alpha_{i_1j_k} \\ \alpha_{i_2j_1} & \alpha_{i_2j_2} & \cdots & \alpha_{i_2j_k} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \alpha_{i_kj_1} & \alpha_{i_kj_2} & \cdots & \alpha_{i_kj_k} \end{vmatrix}.$$

За матрица $A \neq \mathbb{O}$ казваме, че има ранг r, ако в A има поне един минор от ред r, който е различен от нула и всички минори от ред $r+1$ са равни на нула. (Т.е. числото r е максималният ред на ненулев минор на матрицата A.) В случая $A = \mathbb{O}$ казваме, че рангът е 0. Означение: $\operatorname{rank} A$.

Да отбележим, че в случая, когато $A \in F_{n\times n}$ е квадратна матрица от ред n, $\operatorname{rank} A = n$ точно тогава, когато $\det A \neq 0$.

Пример:
За матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in F_{3\times 4}$$

имаме, че $A \neq \mathbb{O}$ и $\operatorname{rank} A \leq 3, \operatorname{rank} A \leq 4$. Следователно $1 \leq \operatorname{rank} A \leq 3$. Минор от ред 2, различен от 0 е

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Всички минори от ред 3 са:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ и } \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Следователно $\operatorname{rank} A = 2$.

Свойства на $\operatorname{rank} A$, (които са следствие от свойствата на детерминантите):
1) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A^t)$,
2) $\operatorname{rank} A$ не се променя при разместване на редовете или стълбовете на

матрицата A.

Нека за матрицата

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in F_{m\times n}$$

означим $a_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1n}), a_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{2n}), \ldots,$
$a_m = (\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \cdots, \alpha_{mn}) \in F^n;\quad b_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{m1}),$
$b_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{m2}), \ldots, b_n = (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{mn}) \in F^m$. Векторите $a_1, \ldots, a_m$ се наричат *вектор-редове*, а $b_1, \ldots, b_n$ *вектор-стълбове* на матрицата A.

Теорема. $\operatorname{rank}(a_1, \ldots, a_m) = \operatorname{rank}(b_1, \ldots, b_n) = \operatorname{rank} A$.

Доказателство. Ще докажем, че $\operatorname{rank}(b_1, \ldots, b_n) = \operatorname{rank} A$. Нека $\operatorname{rank} A = r$. Ако $r = 0$, то $A = \mathbb{O}$ и следователно $b_1 = \cdots = b_n = o$, а оттам и $\operatorname{rank}(b_1, \ldots, b_n) = 0$. Готово. Нека сега $r \geq 1$. Без ограничение (след евентуално разместване на редовете и стълбовете на A) може да считаме, че в A различен от 0 е минорът от ред r

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2r} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rr} \end{vmatrix}.$$

В такъв случай вектор-стълбовете $b_1, \ldots, b_r$ са линейно независими. Наистина, ако допуснем противното, то линийната им зависимост ще се запази и в стълбовете на минора Δ. Тогава от свойствата на детерминантите ще следва, че $\Delta = 0$, което е противоречие.

Сега ще докажем, че всеки от останалите стълбове $b_{r+1}, \ldots, b_n$ (ако $r < n$) е линейна комбинация на първите r стълба $b_1, \ldots, b_r$. Фиксираме индекс $k : r + 1 \leq k \leq n$ и разглеждаме вектор-стълба b_k. Нека индексът $i = 1, \ldots, m$ пробягва номерата на редовете на A. Разглеждаме помощната детерминанта от ред $r+1$:

$$D_i = \left|\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} & \alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{rk} \\ \hline \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ir} & \alpha_{ik} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc|c} & & & & \alpha_{1k} \\ & \Delta & & & \alpha_{2k} \\ & & & & \dots \\ & & & & \alpha_{rk} \\ \hline \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ir} & \alpha_{ik} \end{array}\right|.$$

Ако $i \leq r$, то последният ред на D_i е равен на $i-$тия и седователно $D_i = 0$. Ако $i > r$, то D_i е минор от ред $r+1$ на матрицата A, получен от редовете $1, 2, \dots, r, i$ и стълбовете $1, 2, \dots, r, k$, но т.к. $\operatorname{rank} A = r$, то $D_i = 0$. И така $D_i = 0$ за $\forall i = 1, 2, \dots, m$. Означаваме с $A_1, A_2, \dots, A_r$ адюнгираните количества на $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir}$; адюнгираното количество на $\alpha_{ik} = (-1)^{r+1+r+1}\Delta = \Delta$. Развиваме D_i по адюнгираните количества на последния ред:

$$D_i = \alpha_{i1}A_1 + \alpha_{i2}A_2 + \dots + \alpha_{ir}A_r + \alpha_{ik}\Delta.$$

Имайки предвид, че $D_i = 0$ и разделяйки на $\Delta \neq 0$, получаваме

$$\alpha_{ik} = -\frac{A_1}{\Delta}\alpha_{i1} - \frac{A_2}{\Delta}\alpha_{i2} - \dots - \frac{A_r}{\Delta}\alpha_{ir}.$$

Полагаме $-\dfrac{A_j}{\Delta} = \lambda_j$ за $j = 1, 2, \dots, r$. $A_1, \dots, A_r$ не съдържат елементи от последния ред на D_i и не зависят от i; Δ също не зависи от i и поради тези причини коефициентите $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ не зависят от i. Така получваме, че

$$\alpha_{ik} = -\frac{A_1}{\Delta}\alpha_{i1} - \frac{A_2}{\Delta}\alpha_{i2} - \dots - \frac{A_r}{\Delta}\alpha_{ir}$$

с едни и същи коефициенти $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ за менящо се $i = 1, 2, \dots, m$, което всъщност е равносилно на векторното равенство

$$b_k = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_r b_r.$$

Тези разсъждения са в сила за $k = r+1, \dots, n$ и с това доказахме, че векторите $b_{r+1}, \dots, b_n$ са линейна комбинация на векторите $b_1, \dots, b_r$.

Разглеждаме $\ell(b_1, \dots, b_n)$. Всеки вектор от тази линейна обвивка е линейна комбинация на $b_1, \dots, b_n$ и следователно е линейна комбинация на стълбовете $b_1, \dots, b_r$, които са и линейно независими. Така $b_1, \dots, b_r$ е базис на $\ell(b_1, \dots, b_n)$ и $\dim \ell(b_1, \dots, b_n) = r$. Но според предното твърдение $\dim \ell(b_1, \dots, b_n) = \operatorname{rank}(b_1, \dots, b_n)$ и следователно $\operatorname{rank}(b_1, \dots, b_n) = r = \operatorname{rank} A$. Сега от свойството $\operatorname{rank} A^t = \operatorname{rank} A$ следва и че $\operatorname{rank}(a_1, \dots, a_m) = \operatorname{rank} A$. С това теоремата е доказана. $\square$

Следствие. *За квадратна матрица A е в сила:* $\det A = 0 \Leftrightarrow$ *редовете (стълбовете) на A са линейно зависими.*

Доказателство. $\Rightarrow$) Ако $\det A = 0$, то $\operatorname{rank} A < n$, т.е. $\operatorname{rank}(a_1, \dots, a_n) < n$ и вектор-редовете $a_1, \dots, a_n$ са линейно зависими.
$\Leftarrow$) Очевдино от свойствата на детерминантите. $\square$