Уравнения, нерешени относно производната

Текстовете са от: Т. Генчев, Обикновени диференциални уравнения, Университетско издателство „Св. Кл.имент Охридски“, София, 1991 г.

Да разгледаме уравнението

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

където F е функция на три независими променливи x, y, z, дефинирана и непрекъсната в някаква област от $\mathbb{R}^3$ и, разбира се, подчинена на някои допълнителни предположения, които ще уточним в хода на изложението. Естествено е да се опитаме да сведем уравнението (1) към едно или няколко уравнения от вида

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

които подробно изследвахме в първа глава. Оказа се, че при подходящи предположения това може да се постигне с помощта на теоремата за неявните функции. Точките, около които такова свеждане не е възможно, са най-интересните и обикновено именно тяхното изследване води до истинско разбиране на природата на уравненията.

Да предположим, че функцията $(x, y, z) \longrightarrow F(x, y, z)$ е дефинирана и непрекъсната в цилиндъра $D = Q \times (c, d)$, където Q е област в $\mathbf{R}^2$, и нейните частни производни $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial z}$ съществуват и са непрекъснати в D.

Дефиниция 1. Точката $(x_0, y_0) \in Q$ ще наричаме *обикновена* за уравнението

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

когато са изпълнени следните изисквания:

а) уравнението $F(x_0, y_0, z) = 0$ притежава краен брой различни решения $z = b_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$;

б) във всяка от точките (x_0, y_0, b_k), $k = 1, 2, \ldots, m$, имаме $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, b_k) \neq 0$.

Дефиниция 2. Ще казваме, че точката $(x_0, y_0) \in Q$ е *особена* за (1), когато уравнението $F(x_0, y_0, z) = 0$ има поне едно решение $z = b$ такова, че $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, b) = 0$.

З а б е л е ж к а 1. Очевидно е, че в общия случай в Q съществуват точки, които не са нито обикновени, нито особени за (1). Такива са например точките $(x_0; y_0)$, за които $F(x_0, y_0, z) = 0$ няма решение относно z.

Сега вече можем да докажем основния резултат в този параграф, който гласи, че ако (x_0, y_0) е обикновена точка за (1), задачата на Коши

$$F(x, y, y') = 0, \qquad y(x_0) = y_0 \tag{9}$$

се разпада на краен брой задачи на Коши от вида

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0. \tag{10}$$

Теорема за редукция. Нека F и $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ са непрекъснати в цилиндъра $D = Q \times (c, d)$ и точката $(x_0, y_0) \in Q$ е обикновена за уравнението $F(x, y, y') = 0$. В такъв случай в достатъчно малка околност $U \subset Q$ на (x_0, y_0) съществуват краен брой непрекъснати функции $f_1, f_2, \dots, f_m$ с непрекъснати производни $\frac{\partial f_k}{\partial y}$, $k = 1, 2, \dots, m$, такива, че всяко решение на задачата на Коши

$$F(x, y, y') = 0, \qquad y(x_0) = y_0 \tag{9}$$

е решение на точно една от задачите

$$y' = f_k(x, y), \qquad y(x_0) = y_0, \qquad k = 1, 2, \dots, m, \tag{10}$$

за x, достатъчно близко до x_0. Обратно, всяко от решенията $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ на задачите (10) удовлетворява и (9) в достатъчно малка околност на x_0.

Доказателство. Понеже точката (x_0, y_0) е обикновена, уравнението $F(x_0, y_0, z) = 0$ притежава краен брой решения $z = b_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, които удовлетворяват условията

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, b_k) \neq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Прилагайки теоремата за неявните функции около точката (x_0, y_0, b_k) при фиксирано k, намираме функция $f_k(x, y)$, $f_k(x_0, y_0) = b_k$, дефинирана в достатъчно малка околност $U_k \subset Q$ на (x_0, y_0), за която $F(x, y, f_k(x, y)) \equiv 0$ в U_k и освен това $f_k \in C(U_k)$, $\dfrac{\partial f_k}{\partial y} \in C(U_k)$. Като дадем на k стойности от 1 до m и положим $U \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^{m} U_k$, получаваме функциите $f_1, f_2, \ldots, f_m$, които са ни необходими, за да можем да образуваме диференциалните уравнения

$$y' = f_k(x, y), \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \qquad (x, y) \in U.$$

Нека сега φ е решение на (9), дефинирано в някаква достатъчно малка околност Δ на точката x_0. Трябва да докажем, че в някаква евентуално по-малка околност Δ_1 на същата точка φ удовлетворява точно една от задачите (10).

По условие $F(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x)) = 0$ за $x \in \Delta$ и в частност $F(x_0,\ y_0,\ \varphi'(x_0)) = 0$, защото $\varphi(x_0) = y_0$. Този резултат показва, че $\varphi'(x_0)$ съвпада с някое от числата $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Нека $\varphi'(x_0) = b_s$. Естествено е да се опитаме да докажем, че φ удовлетворява именно s-тата задача на Коши

$$y' = f_s(x,\ y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

За да стигнем до това заключение, да въведем цилиндричната околност $W = K \times \{|z - b_s| < \varepsilon\}$, $K = \{(x,\ y) \in \mathbf{R}^2,\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$, на точката $(x_0,\ y_0,\ b_s)$, която е толкова малка, че от $(x,\ y,\ z) \in W$ да следва $\frac{\partial F}{\partial z}(x,\ y,\ z) \neq 0$ и кръгът $\overline{K}$: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqq \delta^2$ да се съдържа в U. Такова W очевидно съществува, защото $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,\ y_0,\ b_s) \neq 0$ и $\frac{\partial F}{\partial z}$ е непрекъсната. След като избрахме W, да вземем толкова малко положително η, $\eta < \delta$, че интервалът Δ_1 : $|x - x_0| < \eta$ да се съдържа в Δ и от $x \in \Delta_1$ да следва, че $(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x)) \in W$, $(x,\ \varphi(x),\ f_s(x,\ \varphi(x)) \in W$. (Това може да се постигне, защото $\varphi'(x_0) = b_s$, $\varphi(x_0) = y_0$, а функциите f_s, φ и φ' са непрекъснати.)

След тази подготовка да разгледаме тъждествата

$$F(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x)) = 0, \qquad x \in \Delta_1 \subset \Delta, \tag{11}$$

$$F(x,\ y,\ f_s(x,\ y)) = 0, \qquad (x,\ y) \in K. \tag{12}$$

Като положим $y = \varphi(x)$, $x \in \Delta_1$, в (12), получаваме

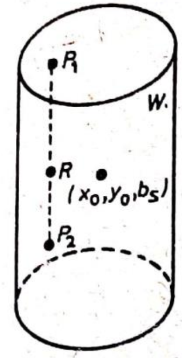
$$F(x,\ \varphi(x),\ f_s(x,\ \varphi(x))) \equiv 0, \qquad x \in \Delta_1. \tag{13}$$

Накрая изваждаме (13) от (11) и с помощта на теоремата за крайните нараствания за $x \in \Delta_1$ намираме

$$0 = F(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x)) - F(x,\ \varphi(x),\ f_s(x,\ \varphi(x))) \tag{14}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial z}(x,\ \varphi(x),\ \xi(x))[\varphi'(x) - f_s(x,\ \varphi(x))],$$

където $\xi(x)$ е число между $\varphi'(x)$ и $f_s(x,\ \varphi(x))$.



Фиг. 10

Полученото тъждество решава въпроса. Наистина, понеже за $x \in \Delta_1$ точките $P_1 = (x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x))$ и $P_2 = (x,\ \varphi(x),\ f_s(x,\ \varphi(x)))$ се съдържат в цилиндъра W, то и точката $R = (x,\ \varphi(x),\ \xi(x)) \in W$ (фиг. 10). Следователно $\frac{\partial F}{\partial z}(x,\ \varphi(x),\ \xi(x)) \neq 0$ и (14) ни дава

$$\varphi'(x) = f_s(x,\ \varphi(x))$$

за $x \in \Delta_1$, с което най-трудната част от доказателството е завършена. Остава да докажем, че всяко от решенията $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ на задачите (10) удовлетворява и (9) в достатъчно малка околност на x_0. За тази цел да разгледаме k-тата задача на Коши

$$y' = f_k(x,\ y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{15}$$

при фиксирано k. Според теоремата за съществуване и единственост $\left(f_k \text{ и } \frac{\partial f_k}{\partial y} \text{ са непрекъснати в } U\right)$ (15) притежава единствено решение $y = y_k(x)$, дефинирано поне в достатъчно малка околност Δ_2 : $|x - x_0| < h$ на точката x_0. Намалявайки h, ако това е необходимо, можем да си осигурим и включването $(x,\ y_k(x)) \in U$ за $x \in \Delta_2$. Като поставим $y = y_k(x)$, $x \in \Delta_2$, в тъждеството $F(x,\ y,\ f_k(x,\ y)) = 0$, $(x,\ y) \in U$, получаваме

$$F(x,\ y_k(x),\ f_k(x,\ y_k(x))) = 0,$$

т.е. $F(x,\ y_k(x),\ y_k'(x)) = 0$, за $x \in \Delta_2$, защото y_k е решение на (15).

Следствие 1. Ако точката $(x_0,\ y_0)$ е обикновена и уравнението $F(x_0,\ y_0,\ z) = 0$ има m решения $z = b_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, то задачата (9) има точно m различни решения, които в $(x_0,\ y_0)$ имат различни допирателни.

Наистина решенията $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ на задачите (10) са различни, защото

$$y_k'(x_0) = f_k(x_0,\ y_0) = b_k \quad \text{и} \quad b_\nu \neq b_\mu \quad \text{за} \quad \nu \neq \mu.$$

Други решения не съществуват, понеже всяко решение на (9) е решение и на някоя от задачите (10).

Уравнение на Клеро

Уравнението

$$y = xy' + f(y') \tag{1}$$

носи името на френския математик Клеро

Ще изследваме (1) при предположението, че f е дефинирана и има непрекъсната втора производна в някакъв интервал $[a, b]$ и нещо повече, за всяко $t \in [a, b]$ е в сила неравенството $f''(t) < 0$. (Случаят $f'' > 0$ се изследва съвсем аналогично.)

Дефиниция. Едно решение на уравнението $F(x, y, y') = 0$ се нарича *особено решение*, ако неговата графика се състои само от особени точки.

Да положим $F(x, y, z) = y - xz - f(z)$, където на първо време $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times (a, b)^*$, и да потърсим особените точки на (1). Според дефиницията една точка (x_0, y_0) е особена, ако съществува поне едно z, за което $F(x_0, y_0, z) = 0$, $F'_z(x_0, y_0, z) = 0$. В нашия случай тези уравнения имат вида

$$(2) \qquad \begin{aligned} y_0 &= x_0 z + f(z), \\ x_0 &= -f'(z), \end{aligned} \qquad a < z < b.$$

Ясно е, че когато z описва (a, b), точката (x_0, y_0) с координати, дефинирани чрез (2), ще опише гладката крива

$$(3) \qquad L: \quad \begin{aligned} y &= -f'(z)z + f(z), \\ x &= -f'(z), \end{aligned} \qquad a < z < b,$$

която се състои само от особени точки за (1).

Не е трудно да се провери, че L, която фактически е дефинирана и в затворения интервал $[a, b]$, удовлетворява (1). Следователно за $a < z < b$ тя ще бъде особено решение.

диференцирайки второто равенство на системата (3), намираме $x'_z = -f''(z) > 0$, $a \leq z \leq b$, и заключаваме, че функцията $-f'$ е обратима. Следователно съотношението $x = -f'(z)$ е равносилно със $z = z(x)$, където $z \longrightarrow z(x)$ е дефинирана и диференцируема** в $[-f'(a),\ -f'(b)]$. Като заместим $z = z(x)$ в (3), получаваме декартовото представяне

$$(4) \quad L: \ y = -f'(z(x))z(x) + f(z(x)), \qquad x \in [-f'(a),\ -f'(b)],$$

на същата крива. За да докажем, че L удовлетворява (1), да пресметнем y'. Диференцирайки (4), намираме

$$(5) \qquad y'(x) = -f''(z(x))z'z - f'(z(x))z' + f'(z(x))z'$$
$$= -f''(z(x))z'(x)z(x) = z(x),$$

защото от тъждеството $x = -f'(z(x))$ веднага следва $-f''(z(x))z'(x) = 1$.

И така оказа се, че $y'(x) = z(x)$. Сега вече непосредственото заместване в уравнението показва, че функцията (4) наистина го удовлетворява. Нещо повече, в сила е равенството

$$y''(x) = z'(x) = -\frac{1}{f''(z(x))} > 0, \qquad x \in [-f'(a),\ -f'(b)],$$

т.е. кривата L е изпъкнала.

Лема 1. Каквато и да бъде точката $(x_0,\ y_0) \in \mathbf{R}^2$, уравнението

$$F(x_0,\ y_0,\ z) = 0 \tag{6}$$

има най-много две решения спрямо z.

Д о к а з а т е л с т в о. Да допуснем, че (6) има поне три решения — $z_1 < z_2 < z_3$. От равенството

$$y_0 = x_0 z_i + f(z_i), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{7}$$

намираме непосредствено

$$-x_0 = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}, \qquad -x_0 = \frac{f(z_3) - f(z_2)}{z_3 - z_2},$$

откъдето с помощта на теоремата за крайните нараствания получаваме

$$-x_0 = f'(\xi_1),\ z_1 < \xi_1 < z_2, \qquad -x_0 = f'(\xi_2),\ z_2 < \xi_2 < z_3. \tag{8}$$

На свой ред от (8) следва равенството

$$0 = f'(\xi_2) - f'(\xi_1) = f''(\eta)(\xi_2 - \xi_1), \qquad \xi_1 < \eta < \xi_2,$$

което е невъзможно, защото по предположение $f'' < 0$ в целия интервал $[a,\ b]$.

Полученото противоречие доказва лемата.

Следствие. Всяка точка $(x_0,\ y_0)\overline{\in}L$, за която уравнението $F(x_0,\ y_0,\ z) = 0$ има поне едно решение спрямо z, е обикновена.

Пример. $y = xy' - (y')^2$