ЗАДАЧИ ПО ОБИКНОВЕНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

1. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЩИ СЕ ПРОМЕНЛИВИ

Това са уравненията, които могат да бъдат записани във вида

$$y'=f(x)g(y)$$

или

$$M(x)N(y)+P(x)Q(y)y'=0.$$

Имат общо решение

$$\int\frac{M(x)}{P(x)}dx+\int\frac{Q(y)}{N(y)}dy=0.$$

Освен това допълнително трябва да проверим дали при делението не сме изпуснали решения, за които $P(x)=0$ или $N(y)=0$.

Пример: $x^2y^2y'+1=y$

$$x^2y^2dy=(y-1)dx \quad (:x^2(y-1)\neq 0),$$

$$\frac{y^2}{y-1}dy=\frac{dx}{x^2} \quad \text{(променливите са разделени)},$$

$$\int\frac{y^2}{y-1}dy=\int\frac{dx}{x^2},\quad \frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=-\frac{1}{x}+C.$$

Сега трябва да проверим дали при делението на $x^2(y-1)$ не сме загубили решения $x=0$ или $y-1=0$. Непосредствено се проверява, че $y=1$ е решение на уравнението, а $x=0$ не е решение ($x=0$ е решение на уравнението $x^2y^2=(y-1)x'$).

Уравненията от вида $y'=f(ax+by)$ се свеждат до уравнения с разделящи се променливи със смяната $z=ax+by$ (или $z=ax+by+c$, където c е подходящо избрано число).

В следващите задачи се иска да бъдат решени уравненията и да бъде намерено решението, което удовлетворява началното условие (ако такова е посочено).

1.1. $xy+(x+1)y'=0$.
1.2. $\sqrt{y^2+1}=xyy'$.
1.3. $(x^2-1)y'+2xy^2=0,\ y(0)=1$.
1.4. $y'\operatorname{ctg}x+y=2,\ y(0)=-1$.
1.5. $y'=3\sqrt[3]{y^2},\ y(2)=0$.
1.6. $xy'+y=y^2,\ y(1)=0{,}5$.
1.7. $2x^2yy'+y^2=2$.
1.8. $y'-xy^2=2xy$
1.9. $z'=10^{x+z}$
1.10. $y'=\cos(y-x)$
1.11. $y'-y=2x-3$.
1.12. $(x+2y)y'=1,\ y(0)=-1$.
1.13. $y'=\sqrt{4x+2y-1}$.
1.14. $2xy'+y^2=1$.

2. ХОМОГЕННИ УРАВНЕНИЯ

Това са уравненията, които могат да бъдат записани във вида $y'=f(\frac{y}{x})$ или $M(x,y)+N(x,y)y'=0$, където $M(x,y)$ и $N(x,y)$ са хомогенни функции от една и съща степен s (Казваме, че функцията $M(x,y)$ е хомогенна от степен $s\in R$, ако $M(kx,ky)=k^sM(x,y)\ \forall\ k\in R$). За да решим

хомогенното уравнение правим смяната $y/x=z$. Тогава $y=xz$ и следователно $y'=xz'+z=f(z)$, т.е. стигаме до уравнението с разделящи се променливи $xz'=f(z)-z$.

Пример. $xy'=x+y$, т.е. $y'=1+y/x$. Полагаме $y=xz$.
$y'=xz'+z=1+z,\ xz'=1,\ dz=dx/x,\ z=\ln|x|+C,\ y=x(\ln|x|+C)$.

Уравненията от вида $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{mx+ny+p}\right)$ свеждаме до хомогенни чрез смяната $x=\xi+x_0, y=\eta+y_0$, където (x_0,y_0) е пресечната точка на правите с уравнения $ax+by+c=0$ и $mx+ny+p=0$. Ако тези прави не се пресичат, то $ax+by=k(mx+ny)$ и уравнението има вида $y'=F(mx+ny)$. Както вече посочихме, това уравнение се свежда до уравнение с разделящи се променливи чрез смяната $z=mx+ny$.

Пример. $2x-4y+6+(x+y-3)y'=0$.
От системата $2x-4y+6=0,\ x+y-3=0$ намираме $x_0=1,\ y_0=2$.

Полагаме $x=\xi+1,\quad y=\eta+2$. Тогава $y'=dy/dx=d\eta/d\xi$ и следователно $2\xi-4\eta+(\xi+\eta)d\eta/d\xi=0$, т.е. стигнахме до хомогенно уравнение.

Някои уравнения се свеждат до хомогенни чрез смяната $y=z^m$, където числото m определяме след заместване в уравнението. Ако не е възможно да намерим такова число m, то уравнението не може да бъде сведено до хомогенно по този специален начин.

Пример. $2x^4yy'+y^4=4x^6$
След смяната $y=z^m$ уравнението има вида $2mx^4z^{2m-1}z'+z^{4m}=4x^6$. То ще бъде хомогенно, ако $4+(2m-1)=4m=6$, което е възможно само при $m=3/2$. Следователно уравнението свеждаме до хомогенно със смяната $y=z^{3/2}$.

2.1. $(x+2y)dx-xdy=0$.
2.2. $(x-y)dx+(x+y)dy=0$.
2.3. $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$.
2.4. $2x^3y'=y(2x^2-y^2)$.
2.5. $y^2+x^2y'=xyy'$.
2.6. $(x^2+y^2)y'=2xy$.
2.7. $xy'-y=x\operatorname{tg}(y/x)$.
2.8. $xy'=y-xe^{(y/x)}$.
2.9. $xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$.
2.10. $xy'=y\cos\ln(y/x)$.
2.11. $(y+\sqrt{xy})dx=xdy$.
2.12. $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$.
2.13. $(2x-4y+6)dx+(x-y-3)dy=0$.
2.14. $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$.
2.15. $x-y-1+(y-x+2)y'=0$.
2.16. $(x+4y)y'=2x+3y-5$.
2.17. $(y+2)dx=(2x+y-4)dy$.
2.18. $y'=2[(y+2)/(x+y-1)]^2$
2.19. $(y'+1)\ln(y+x)/(x+3)=(y+x)/(x+3)$
2.20. $y'=(y+2)/(x+1)+\operatorname{tg}(y-2x)/(x+1)$.
2.21. $x^3(y'-x)=y^2$.
2.22. $2x^2y'=y^3+xy$.
2.23. $2xdy+(x^2y^4+1)ydx=0$.
2.24. $ydx+x(2xy+1)dy=0$.
2.25. $2y'+x=4\sqrt{y}$.
2.26. $y'=y^2-2/x^2$.
2.27. $2xy'+y=y^2\sqrt{x-x^2y^2}$.
2.28. $(2/3)xyy'=\sqrt{x^6-y^4}+y^2$.

3. ЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ НА БЕРНУЛИ И РИКАТИ

Уравненията от вида $y'+a(x)y=b(x)$ наричаме линейни. Като умножим уравнението по интегриращия множител $e^{\int a(x)dx}$, то приема вида $\left(ye^{\int a(x)dx}\right)'=b(x)e^{\int a(x)dx}$, откъдето последователно получаваме

$$ye^{\int a(x)dx} = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx+C,$$

$$y(x)=e^{-\int a(x)dx}\left[\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx+C\right].$$

Пример. $y'=2x(x^2+y)$.

$$y'-2xy=2x^3\,|\,.e^{-x^2},\ \left(ye^{-x^2}\right)'=2x^3e^{-x^2},\ ye^{-x^2}=2\int x^3e^{-x^2}dx+C,$$

$$y'e^{-x^2}=-(x^2+1)e^{-x^2}+C,\ y(x)=Ce^{x^2}-(x^2+1).$$

Някои уравнения са линейни, ако разглеждаме x като функция на y. Например уравнението $y=(2x+y^3)y'$ можем да запишем във вида $\frac{dx}{dy}\,y=2x+y^3$, т.е. $\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}\,x=y^2$, откъдето се вижда, че то е линейно при $x=x(y)$.

Уравнението на Бернули $y'+a(x)y=b(x)y^n$ при $n\neq 0,1$ решаваме като разделим двете му страни на y^n, след което полагаме $y^{-n+1}=z$ и получаваме линейно уравнение за $z=z(x)$.

Уравнението на Рикати

$$y'=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$$

в общия случай не може да бъде решено в квадратури. Ако познаваме едно негово частно решение $y_1(x)$, то след полагането $y=y_1(x)+z$ получаваме за $z=z(x)$ уравнение на Бернули, което решаваме по описания по-горе начин. Частно решение на уравнението на Рикати понякога ни се отдава да намерим с налучкване, при което се ръководим от вида на уравнението. Например за уравнението $y'-y^2=x^2-2x$ търсим частно решение от вида $y=ax+b$, където неопределените коефициенти a и b намираме след заместване в уравнението. За уравнението $y'+2y^2=6/x^2$ търсим частно решение от вида $y=a/x$, като отново константата a определяме след заместване в уравнението.

3.1. $(2x+1)y'=4x+2y$.

3.2. $y'+ytgx=1/\sin x$.

3.3. $x(y'-y)=e^x$.

3.4. $x^2y'+xy+1=0$.

3.5. $y=x(y'-x\cos x)$.

3.6. $y'=2x(x^2+y)$.

3.7. $(xy'-1)\ln x=2y$.

3.8. $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$.

3.9. $(x+y^2)dy=ydx$.

3.10. $(2e^y-x)y'=1$.

3.11. $(\sin^2y+x\,ctgy)y'=1$.

3.12. $(2x+y)dy=ydx+4\ln y\,dy$.

3.13. $y'=y/(3x-y^2)$.

3.14. $(1-2xy)y'=y(y-1)$.

3.15. $y'+2y=y^2e^x$.

3.16. $(x+1)(y'+y^2)=-y$.

3.17. $y'=y^4\cos x+ytgx$.

3.18. $xy^2y'=x^2+y^3$.

3.19. $xydy=(y^2+x)dx$.

3.20. $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$.

3.21. $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$.

3.22. $2y'-\frac{x}{y}=xy/(x^2-1)$.

3.23. $y'x^3\sin y=xy'-2y$.

3.24. $(2x^2y\ln y-x)y'=y$.

3.25. $x^2y'+xy+x^2y^2=4$.

3.26. $3y'+y^2+\frac{2}{x^2}=0$.

3.27. $xy'-(2x+1)y+y^2=-x^2$.

3.28. $y'-2xy+y^2=5-x^2$.

3.29. $y'+2ye^x-y^2=e^{2x}+e^x$.

4. УРАВНЕНИЯ ПРОИЗЛИЗАЩИ ОТ ПЪЛЕН ДИФЕРЕНЦИАЛ.

ИНТЕГРИРАЩ МНОЖИТЕЛ

Казваме, че уравнението $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ произлиза от пълен диференциал, ако лявата му страна е пълен диференциал, т.е. съществува такава функция $U(x,y)$, че $U_x(x,y) = P(x,y)$, $U_y(x,y) = Q(x,y)$. Напомняме, че записът на уравнението чрез диференциал разглеждаме като симетричен начин за записване на всяко едно от уравненията $x' = -Q(x,y)/P(x,y)$, $y' = -P(x,y)/Q(x,y)$.

Необходимо условие за да произлиза уравнението от пълен диференциал е да бъде изпълнено равенството $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$. Ако $P,Q \in C^1(D)$ и $P_y = Q_x$ в D, където D е едносвързана област в равнината, то в D съществува функция $U(x,y)$, т.е. необходимото условие е и достатъчно.

За да решим уравнението, най-напред от равенствата $U_x = P$, $U_y = Q$ определяме функцията $U(x,y)$. Тогава общото решение се дава с формулата $U(x,y) = C$, където C е произволна константа.

Пример 1. $2x + 3x^2y + (x^3 - 3y^2)y' = 0$, т.е.

$$(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0.$$

Тъй като $(2x + 3x^2y)_y = 3x^2 = (x^3 - 3y^2)_x$, то уравнението произлиза от пълен диференциал. Функцията $U(x,y)$ търсим от равенствата

$$U_x = 2x + 3x^2y\ ,\ U_y = x^3 - 3y^2.$$

При фиксирано y интегрираме първото уравнение по x, като интеграционната константа се получава функция на y, т.е.

$$U = \int(2x + 3x^2y)dx = x^2 + x^3y + \varphi(y).$$

Функцията $\varphi(y)$ определяме като заместим получения израз за U във второто уравнение:

$$(x^2 + x^3y + \varphi(y))_y = x^3 - 3y^2,\ \varphi(y)' = -3y^2,\ \varphi(y) = -y^3 + const,$$

т.е. $U(x,y) = x^2 + x^3y - y^3$ (U се определя с точност до константа). Следователно общото решение на уравнението има вида

$$x^2 + x^3y - y^3 = C.$$

Ако уравнението не произлиза от пълен диференциал търсим подходящ интегриращ множител.

Функцията $\mu(x,y) \neq 0$ наричаме интегриращ множител за уравнението

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

ако е такава, че уравнението

$$(\mu M)dx + (\mu N)dy = 0$$

произлиза от пълен диференциал. Необходимо условие за това е

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x.$$

Обикновено търсим интегриращ множител от вида $\mu(\varphi(x,y))$, където $\varphi(x,y)$ е предварително избрана функция, вида на която определяме изхождайки от вида на изразите участвуващи в уравнението. Тогава от горното равенство получаваме, че функцията на една променлива $\mu(t)$ удовлетворява условието

$$\frac{\mu'(\varphi(x,y))}{\mu(\varphi(x,y))} = \frac{N_x(x,y) - M_y(x,y)}{\varphi_y(x,y)M(x,y) - \varphi_x(x,y)N(x,y)} .$$

Ако се случи дясната страна да има вида $F(\varphi(x,y))$, то функцията μ определяме веднага от равенството

$$(\ln|\mu(t)|)' = F(t).$$

В противен случай опитваме отново с друга функция $\varphi(x,y)$.

Пример 2. $(x+y^2)dx - 2xydy = 0$.
Уравнението не произлиза от пълен диференциал, защото

$$(x+y^2)_y = 2y \neq -2y = (-2xy)_x .$$

Най-напред търсим μ от възможно най-прост вид. Ще започнем с $\mu = \mu(x)$, т.е. $\varphi(x,y) = x$. Изхождайки от горното равенство получаваме $\mu'/\mu = -2/x$ и виждаме че можем да намерим интегрираш множител зависещ само от x. Последователно получаваме

$$(\ln|\mu(x)|)' = -2/x, \ \ln|\mu(x)| = -2\ln|x|, \ \mu(x) = 1/x^2.$$

Уравнението

$$\frac{x + y^2}{x^2} dx - 2\frac{xy}{x^2} dy = 0$$

произлиза от пълен диференциал и както в пример 1 получаваме

$$U_x = 1/x + y^2/x^2, \ U_y = -2y/x,$$

$$U = -y^2/x + \varphi(x), \ y^2/x^2 + \varphi'(x) = 1/x + y^2/x^2, \ \varphi'(x) = 1/x,$$

$$\varphi(x) = \ln|x|, \ U(x,y) = -y^2/x + \ln|x|,$$

следователно общото решение е

$$-y^2/x + \ln|x| = C,$$

откъдето лесно следва, че общото решение можем да запишем и във вида

$$x\, e^{-y^2/x} = C \text{ или } x = C\, e^{y^2/x}.$$

Пример 3. $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})dy = 0$.
Ако опитаме да търсим интегрираш множител зависещ само от x ще видим, че

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{\varphi_y M - \varphi_x N} = - \frac{2x - 2x(\ln y + 1)}{x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}}$$

и тъй като дясната страна не зависи само от x то няма да успеем да намерим да намерим интегрираш множител $\mu = \mu(x)$. Тогава опитваме да намерим интегрираш множител от вида $\mu = \mu(y)$.

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{\varphi_y M - \varphi_x N} = - 1/y$$

и следователно

$$(\ln|\mu|)' = -1/y, \ \mu = 1/y.$$

Уравнението

$$\frac{2xy \ln y}{y} dx + \frac{x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}}{y} dy = 0$$

произлиза от пълен диференциал и както по горе намираме общото решение

$$x^2 \ln y + 1/3(y^2 + 1)^{3/2} = C.$$

Пример 4. $(\sqrt{x^2-y} + 2x)dx - dy = 0$.
Ако опитаме да търсим интегрираш множител зависещ само от x или само от y,това няма да ни доведе до успех. Тогава, ръководейки се от вида на уравнението опитваме с $\mu = \mu(x^2-y)$.

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{\varphi_y M - \varphi_x N} = - \frac{1}{2(x^2-y)} .$$

Тогава

$$(\ln|\mu(t)|)' = - \frac{1}{2t}$$

и следователно

$$|\mu(t)| = e^{-\int \frac{1}{2t}dt} = t^{-1/2}$$

т.е интегриращият множител е $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y}}$. Уравнението

$$\frac{\sqrt{x^2-y} + 2x}{\sqrt{x^2-y}} dx - \frac{1}{\sqrt{x^2-y}} dy = 0 \quad (x^2- y \neq 0)$$

произлиза от пълен диференциал и има общо решение

$$x + 2\sqrt{x^2-y} = C.$$

Освен тези решения, решение на първоначалното уравнение е и функцията $y = x^2$, за която знаменателят на интегриращия множител е равен на нула.

Проверете, че написаните по-долу уравнения произлизат от пълен диференциал и ги решете.

4.1. $2xy\, dx + (x^2- y^2)\, dy = 0$.
4.2. $(2 - 9xy^2)x\, dx + (4y^2-6x^3)y\, dy = 0$.
4.3. $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})\, dy = 0$.
4.4. $y/x\, dx + (y^3 + \ln x)\, dy = 0$.
4.5. $2x(1 + \sqrt{x^2-y})\, dx - \sqrt{x^2-y}\, dy = 0$.
4.6. $(x/\sin y + 2)\, dx + (x^2+ 1)\cos y/(\cos 2y -1)\, dy = 0$.

Намерете интегриращия множител и решете уравненията:

4.7. $(1 - x^2y)\, dx + x^2(y - x)\, dy = 0, \ \mu = \mu(x)$.
4.8. $(2x^2y + 2y + 5)\, dx + (2x^3 + 2x)\, dy = 0$.
4.9. $(2xy^2 - 3y^3)\, dx + (7 - 3xy^2)\, dy = 0$.
4.10. $(3y^2 - x)\, dx + (2y^3 - 6xy)\, dy = 0, \ \mu = \mu(x + y^2)$.
4.11. $(x^2 + y^2 + 1)\, dx - 2xy\, dy = 0, \ \mu = \mu(y^2 - x^2)$.
4.12. $(x - xy)\, dx + (y + x^2)\, dy = 0, \ \mu = \mu(x^2 + y^2)$.
4.12. $xy + \sqrt{x^2+y^2} + (x^2 + 2y^2)y' = 0$.

4.13. $1 - xy \operatorname{tg} xy = x^2(\operatorname{tg} xy)y'$.

4.14. $(x^2 + y^2 + x)\,dx + y\,dy = 0$.

5. УРАВНЕНИЯ, НЕРЕШЕНИ ОТНОСНО ПРОИЗВОДНАТА

За да решим уравнение от вида $F(x,y,y') = 0$ най-естествено е да се опитаме да изразим от него y'. Ще получим едно или няколко уравнения от вида $y' = f(x,y)$, за чието решаване разполагаме вече с цял набор от методи.

Пример 1. $yy'^2 + (x - y)y' - x = 0$.

Това е едно квадратно уравнение относно y'. Като го решим намираме, че $y' = 1$ или $y' = -x/y$. Общото решение на първото уравнение е $y = x + C$, а на второто $y^2 + x^2 = C$.

В много случаи е удобно вместо да търсим решението във вида $y = y(x)$, да търсим интегралната крива на уравнението, като считаме, че е зададена параметрично и търсим нейните параметрични уравнения.

За уравненията от вида $F(x,y')=0$, които не съдържат явно y методът на въвеждане на параметър се прилага по следния начин. Нека съществуват двойка функции φ и ψ, такива че

$$x = \varphi(t),\ y' = dy/dx = \psi(t),\ F(\varphi(t),\psi(t)) = 0.$$

За да намерим каква функция на t е y най-напред намираме

$$dy/dt = dy/dx.dx/dt = \psi(t)\varphi'(t)$$

и следователно решението записано в параметричен вид е

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \int\psi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

Нека за уравнението $F(y,y') = 0$ съществува параметрично представяне, т.е. при $y = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$ имаме $F(\varphi(t),\psi(t)) = 0$.

Тогава $dx/dt = dx/dy.dy/dt = (dy/dt)/(dy/dx) = \varphi'(t)/\psi(t)$.

Следователно

$$x = \int\varphi'(t)/\psi(t)dt + C,$$
$$y = \varphi(t).$$

Освен тези решения, уравнението може да има и решения от вида $y = b = \mathrm{const}$, където b е решение на уравнението $F(b,0) = 0$.

Пример 2. $y = \sqrt{y'^2+1}$.

Полагаме $y' = \operatorname{sh}(t)$ и от уравнението получаваме $y = \operatorname{ch}(t)$. Следователно

$$dx/dt = (dy/dt)/(dy/dx) = (\operatorname{ch}(t))'/\operatorname{sh}(t) = \operatorname{sh}(t)/\operatorname{sh}(t) = 1,$$

т.е.

$$x = t + C,$$
$$y = \operatorname{ch}(t).$$

Като изключим параметъра t намираме $y = \operatorname{ch}(x-C)$. Освен това семейство от решения, уравнението има и решение $y = 1$ и то е обвивка на еднопараметричната фамилия от решения.

Ако уравнението може да бъде решено относно x или y, като параметър въвеждаме $p=y'(x)$. Уравнението решено относно y има вида

$$y = f(x,y').$$

Полагаме $y' = p$ и диференцирайки по x равенството $y = f(x,p)$ получаваме $p = f_x(x,p) + f_p(x,p)\,p'$, т.е. обикновено диференциално уравнение за $p = p(x)$. Ако общото решение на това диференциално уравнение е $p = \varphi(x,C)$, то общото решение на първоначалното уравнение е $y = f(x,\varphi(x,C))$. Ако намерим общото решение на уравнението

за p във вида $x = \psi(p,C)$, то получаваме общото решение на първоначалното уравнение в параметричен вид $x = \psi(p,C)$, $y = f(\psi(p,C),p)$.

За да решим уравнението $x = f(y,y')$ отново полагаме $y'=p(y)$ и диференцираме полученото равенство по x. Ако $p = \varphi(y,C)$ е решение на уравнението $1 = f_y(y,p)p + f_p(y,p)p'p$, то общото решение на уравнението можем да запишем във вида $x = f(y,\varphi(y,C))$. Ако получим $y = \psi(p,C)$, общото решение на уравнението в параметричен вид е $x = f(\psi(p,C),p)$, $y = \psi(p,C)$.

Като приложим описания способ за въвеждане на параметър към уравнението на Лагранж $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ стигаме до уравнението $p = \varphi(p) + x\varphi'(p)p' + \psi'(p)p'$, т.е. $p-\varphi(p)=(x\varphi'(p) + \psi'(p))dp/dx$, което е линейно уравнение за $x = x(p)$ и може да бъде решено.

В специалния случай, когато уравнението на Лагранж е уравнение на Клеро, т.е. $y = xy' + \psi(y')$, стигаме до уравнението $(x + \psi'(p))dp/dx = 0$. От него следва, че или $dp/dx = 0$, или $x + \psi'(p) = 0$. В първия случай $p = C = \mathrm{const}$ и получаваме общото решение на уравнението $y = Cx + \psi(C)$. Във втория случай получаваме решение в параметричен вид $x = -\psi'(p)$, $y = -p\psi'(p) + \psi(p)$, което е обвивка на еднопараметричната фамилия от прави в общото решение.

Пример 3. $y = x + y' - \ln y'$.

Полагаме $y' = p$ и диференцирайки по x получаваме

$$y = x + p - \ln p,\ p = 1 + p' - p'/p,$$
$$p - 1 = p'(p - 1)/p, \,|:(p-1)\neq 0$$
$$1 = dp/dx\, 1/p,\ dx/dp = 1/p,\ x = \ln p + C.$$

Следователно решението в параметричен вид е $x = \ln p + C, y = p + C$. В този случай можем да изключим параметъра p и получаваме

$$y = e^{x-C} + C.$$

Уравнението за p има и решение $p = 1$ и замествайки в параметричния запис на уравнението получаваме решението $y = x + 1$. (Погрешно е, ако от равенството $dy/dx = p = 1$ заключим, че $y = x + C$.)

Нека $F(x,y,z), F_y, F_z$ са непрекъснати функции. Напомняме, че една точка (x_o,y_o) наричаме особена за уравнението $F(x,y,y') = 0$, ако уравнението $F(x_o, y_o, z) = 0$ има поне едно решение $z = z_o$, за което $F_z(x_o,y_o,z_o) = 0$. Решения, всички точки от които са особени, наричаме особени решения. За да намерим всички особени точки (x,y) на уравнението трябва да изключим z от равенствата $F(x,y,z) = 0$, $F_z(x,y,z) = 0$ и ще получим уравнението $\varphi(x,y) = 0$ на така наречената дискриминантна крива. Ако едно решение на уравнението $F(x,y,y') = 0$ е особено, то е част от дискриминантната крива.

Да намерим дискриминантната крива за уравнението от пример 3.

$$y = x + z - \ln z,\ 0 = 1 - 1/z,$$

От второто уравнение намираме $z = 1$ и следователно дискриминантната крива е $y = x + 1$. Тя е интегрална крива на уравнението и следователно $y = x + 1$ е особено решение на уравнението.

Решете следващите уравнения, като предварително изразите y'. Посочете особените решения, ако такива има.

5.1. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$.

5.2. $xy'(xy' + y) = 2y^2$.

5.3. $xy'^2 - 2yy' + x = 0$.

5.4. $xy'^2 = y(2y' - 1)$.

5.5. $y'^2 + x = 2y$.

5.6. $y'^3 + (x + 2)e^y = 0$.

5.7. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$.

5.8. $(xy' + 3y)^2 = 7x$.

5.9. $y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$.

5.10. $y'(2y - y') = y^2\sin^2 x$.

5.11. $y'^4 + y^2 = y^4$.

5.11. $x(y - xy')^2 - 2yy'$.

5.13. $y(xy' - y)^2 = y - 2xy'$.

5.14. $yy'(yy' - 2x) = x^2 - 2y^2$.

За да решите следващите уравнения въведете параметър.

5.15. $x = y'^3 + y'$.

5.16. $x(y'^2 - 1) = 2y'$.

5.17. $y = y'^2 + 2y'^3$.

5.18. $y = \ln(1 + y'^2)$.

5.19. $y'^4 = 2yy' + y^2$.

5.20. $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$.

5.21. $5y + y'^2 = x(x + y')$

5.22. $x^2y'^2 = xyy' + 1$.

5.23. $y'^3 + y^2 = xyy'$.

5.24. $2xy' - y = y'\ln yy'$.

5.25. $y' = e^{xy'/y}$.

5.26. $y = xy' - x^2y'^3$.

5.27. $y = 2xy' + y^2y'^3$.

5.28. $y(y - 2xy')^3 = y'^2$.

5.29. $y = xy' - y'^2$.

5.30. $y + xy' = 4\sqrt{y'}$.

5.31. $y = 2xy' - 4y'^3$.

5.32. $y = xy' - (2 + y')$.

5.33. $y'^3 = 3(xy' - y)$.

5.34. $y = xy'^2 - 2y'^3$.

6. УРАВНЕНИЯ, КОИТО ДОПУСКАТ ПОНИЖАВАНЕ НА РЕДА

1. Редът на уравнението $d/dxF(x,y, y',\dots,y^{(n)}) = 0$ понижаваме, като интегрираме по x.

Пример 1. $yy'' = y'^2$.

$y''/y' = y'/y$, $(\ln y')' = (\ln y)'$, $\ln y' = \ln y + \ln C$, $y' = Cy$. Последното уравнение е от първи ред и като го решим получаваме $y = e^{Cx} + C_1$, където C и C_1 са произволни константи.

2. Ако уравнението има вида $F(x,y^{(k)},\dots,y^{(n)}) = 0$, то като положим $y^{(k)} = z$, за намирането на $z = z(x)$ получаваме уравнение от ред n-k.

Пример 2. $y'' = y'^2 + 1$.

Полагаме $y' = z$ и получаваме уравнението $z' = z^2 + 1$, което има решение $z = tg(x+C)$. Следователно

$$y' = tg(x+C),\ y = -\ln|\cos(x+C)| + C_1,\ e^{-y} = C_2\cos(x+C).$$

3. Ако x не участвува явно в уравнението, т.е. то има вида $F(y,y',y'',\dots,y^{(n)}) = 0$, след като изберем за нова независима променлива y, за функцията $p = p(y)$, където $p(y) = y'(x)$, получаваме уравнение от ред n-1.

Пример 3. $2yy'' = y'^2 + 1$.

Полагаме $y' = p(y)$. Тогава

$$y'' = d(y')/dx = dp(y)/dx = dp/dy\ dy/dx = p'p.$$

Като заместим с $y' = p$ и $y'' = pp'$ в уравнението получаваме, че функцията $p = p(y)$ удовлетворява уравнението от първи ред $2ypp' = p^2 + 1$. Решението на това уравнение е $p = \pm\sqrt{Cy-1}$. Следователно $y' = \pm\sqrt{Cy-1}$, откъдето получаваме $4(Cy-1)=C^2(x+C_1)^2$.

4. Ако уравнението е хомогенно относно y и производните й, то за функцията $z = z(x)$, която въвеждаме чрез полагането $y' = yz$, получаваме уравнение от ред с единица по-малък от реда на уравнението за y.

Пример 4. $xyy'' - xy'^2 = yy'$.

Полагаме $y' = yz$. Тогава $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$ и като заместим в уравнението получаваме

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 = y^2z,\ xy^2z' = y^2z|:y^2\neq 0,\ xz' = z,\ z = Cx,$$

$$y'/y = Cx,\ (\ln|y|)' = Cx,\ \ln|y| = Cx^2/2 + C_1,\ y = C_2e^{C_3x^2}.$$

Решете следващите задачи, като използувате описаните способи за понижение на реда.

6.1. $yy''' + 3y'y'' = 0$.

6.2. $yy'' = y'(y' + 1)$.

6.3. $yy'' + y'^2 = 1$.

6.4. $xy'' = 2yy' - y'$.

6.5. $x^2y'' = y'^2$.

6.6. $2xy'y'' = y'^2 - 1$.

6.7. $y'^2 + 2yy'' = 0$.

6.8. $y'' = 2yy'$.

6.9. $y''(e^x + 1) + y' = 0$.

6.10. $y''' = y''^2$.

6.11. $xy''' = y'' - xy''$.

6.12. $y''^2 = y'^2 + 1$.

6.13. $y'' = e^y$.

6.14. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$.

6.15. $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$.

6.16. $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xyy'$.

6.17. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$.

6.18. $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$.

6.19. $x^2yy'' + y'^2 = 0$.

6.20. $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2$.

7. ЛИНЕЙНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННИ КОЕФИЦИЕНТИ

Да разгледаме линейното диференциално уравнение от ред n

$$Ly = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

където коефициентите и дясната страна са непрекъснати комплексно-значни функции в интервала (α,β) и $a_0(x) \neq 0$.

Ако познаваме n линейно независими решения $y_1(x),\dots,y_n(x)$ на хомогенното линейно уравнение

$$Ly = 0,$$

т.е.ако познаваме една негова фундаментална система, то общото решение на линейното хомогенно уравнение е

$$y_0(x) = C_1y_1(x) + \dots + C_ny_n(x),$$

където $C_1,\dots,C_n$ са произволни комплексни константи.

Да разгледаме линейното нехомогенно уравнение

$$Ly = f(x).$$

Тъй като разликата на две решения на нехомогенното уравнения е решение на хомогенното уравнение, то ако познаваме общото решение $y_0(x)$ на хомогенното уравнение и едно частно решение $z(x)$ на нехомогенното уравнение, общото решение на нехомогенното уравнение е

$$y(x) = y_0(x) + z(x).$$

Частното решение на линейното уравнение с дясна страна $f_1+\dots+f_p$ е сума от частните решения на уравненията със същата лява страна и десни страни съответно $f_1,\dots,f_p$.

7.1. За линейното хомогенно уравнение с постоянни коефициенти

$$Ly = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0,$$

където $a_0,\dots,a_n$ са комплексни константи и $a_0 \neq 0$, винаги можем да посочим фундаментална система от решения. Най-напред решаваме характеристичното уравнение

$$a_o\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda' + a_n = 0,$$

и намираме корените му $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. На всеки прост корен λ съответствува функция $e^{\lambda x}$ от фундаменталната система. На всеки многократен корен с кратност k съответствуват k функции

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ldots,x^{k-1}e^{\lambda x}$$

от фундаменталната система. Така получаваме общо n на брой линейно независими решения на хомогенното уравнение с постоянни коефициенти.

Ако коефициентите $a_o,\ldots,a_n$ са реални, можем да посочим фундаментална система от реални функции. Ако λ е реален корен, функциите , които му съпоставяме имат описания по-горе вид. На всяка двойка комплексно спрегнати прости корени $\lambda = \alpha \pm i\beta$ съпоставяме двойката реални функции $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$. На всяка двойка комплексно спрегнати корени $\lambda = \alpha \pm i\beta$ с кратност k съпоставяме 2k реални функции

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

По такъв начин отново получаваме n на брой линейно независими решения, т.е. фундаментална система от реални функции.

Като имаме пред вид тези правила, обикновено след като намерим корените на характеристичния полином, веднага пишем формулата за общото решение.

Пример 1. $y^{v} \pm 2y^{iv} - 16y' + 32y = 0.$
Характеристичното уравнение има вида

$$\lambda^5 + 2\lambda^4 - 16\lambda + 32 = 0.$$

Корените му намираме, като разложим лявата страна на множители.

$$(\lambda - 2)(\lambda^4 - 16) = 0,\ (\lambda - 2)^2(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4) = 0,$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -2,\ \lambda_4 = 2i,\ \lambda_5 = -2i.$$

Общото решение има вида

$$y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + C_3e^{-2x} + C_4e^{2ix} + C_5e^{-2ix},\ C_i \in \mathbb{C},\ i = 1,\ldots,5$$

(степента на многочлена $C_1 + C_2x$ е с единица по-малка от кратността на корена $\lambda = 2$). Тази формула ни дава всички комплекснозначни решения.

В разглеждания случай коефициентите на диференциалното уравнение са реални и можем да намерим и фундаментална система, която се състои само от реални функции. Формулата

$$y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + C_3e^{-2x} + C_4\cos 2x + C_5\sin 2x$$

ни дава при $C_i \in \mathbb{C}$, $i = 1,\ldots,5$ всички комплекснозначни решения, а при $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,5$ - всички реалнозначни решения. Ако коефициентите на диференциалното уравнение са реални, обикновено пишем само горната фурмула без специално указание за това, дали произволните константи C_i са реални или комплексни.

Пример 2. $y''' + 4y'' + 13y' = 0.$
Характеристичното уравнение

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$$

има корени $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2 + 3i$, $\lambda_3 = -2 - 3i$ и общото решение е

$$y = C_1 + C_2e^{-2x}\cos 3x + C_2e^{-2x}\sin 3x.$$

Пример 3. $y^{v} - 2y^{iv} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0.$
Характеристичното уравнение

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \text{ или } (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

има корени $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = i$, $\lambda_4 = \lambda_5 = -i$, а общото решение е

$$y = C_1e^{2x} + (C_2 + C_3x)\cos x + (C_4 + C_5x)\sin x.$$

Пример 4. $y^{iv} + 4y''' + 8y' + 4y = 0.$
Характеристичното уравнение

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0 \text{ или } (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0$$

има двукратните комплексни корени $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 - i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1 + i$ и общото решение е

$$y = e^{-x}(C_1 + C_2x)\cos x + e^{-x}(C_3 + C_4x)\sin x.$$

7.2. В специалния случай, когато дясната страна на едно нехомогенно линейно диференциално уравнение с постоянни коефициенти е квазиполином, т.е. произведение на полином с експонента, sin или cos, или сума от такива произведения, може да бъде намерено частно решение, което също е квазиполином. За целта използуваме метода на неопределените коефициенти.

Ако дясната страна на уравнението има вида $P_m(x)e^{\gamma x}$, където $P_m(x) = b_o + b_1x + \ldots + b_mx^m$, то частното решение търсим от вида

$$z = x^sQ_m(x)e^{\gamma x},$$

където $Q_m(x) = c_o + c_1x + \ldots + c_mx^m$ е полином от същата степен m. Числото $s = 0$, ако γ не е корен на характеристичния полином. Ако γ е корен на характеристичния полином, то s е равно на кратността му. Неопределените коефициенти $c_o, c_1, \ldots, c_m$ намираме, като заместим с формулата за z в диференциалното уравнение и приравним коефициентите пред подобните членове в лявата и дясната страна на уравнението.

Ако в дясната страна на уравнението участвуват sin или cos, като ги изразим чрез експоненти по формулите на Ойлер

$$\cos\beta x = (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x})/2,\ \sin\beta x = (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x})/2i,$$

свеждаме задачата за намиране на частно решение до вече разгледания случай.

Ако коефициентите на уравнението са реални, а дясната страна има вида

$$e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x),$$

с метода на неопределените коефициенти можем да намерим частно решение от вида

$$z = x^se^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x),$$

където s е равно на 0, ако $\alpha + i\beta$ не е корен на характеристичния полином, а в противния случай s е равно на кратността на корена $\alpha + i\beta$. $R_m(x)$ и $T_m(x)$ са полиноми с неопределени коефициенти от степен (по-малка или равна на) m, където m е по-голямата от степените на многочлените P(x) и Q(x).

Когато коефициентите на уравнението са реални, а в дясната страна има sin или cos, често е по-удобно най-напред да решим уравнението с дясна страна $P(x)e^{(\alpha+\beta i)x}$. Реалната част на полученото решение ще бъде решение на уравнението с дясна страна $e^{\alpha x}P(x)\cos\beta x$, а имагинерната част ще бъде решение на уравнението с дясна страна $e^{\alpha x}P(x)\sin\beta x$.

Пример 5. $y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} + e^{3x}\cos 2x$.

Характеристичното уравнение $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$ има двукратен корен $\lambda = 3$ и еднократен корен $\lambda = 0$. Общото решение на хомогенното уравнение е

$$y_o = (C_1 + C_2x)e^{3x} + C_3.$$

Най-напред търсим частно решение на нехомогенното уравнение

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x}.$$

$\gamma = 3$ е двукратен корен на характеристичното уравнение и следователно частното решение ще търсим във вида

$$z_1 = x^2(ax + b)e^{3x}.$$

Като заместим с този израз в уравнението и приравним коефициентите пред подобните членове в двете страни намираме $a = 1/18, b = -1/18$.

След това търсим частно решение z_2 на нехомогенното уравнение

$$y''' - 6y'' + 9y' = e^{3x}\cos 2x.$$

Тъй като $\alpha + i\beta = 3 + 2i$ не е корен на характеристичното уравнение, то z_2 можем да търсим от вида

$$z_2 = e^{3x}(a\cos 2x + b\sin 2x).$$

След като заместим в уравнението намираме $a = -3/52$, $b = -1/26$.

Общото решение на уравнението е $y = y_o + z_1 + z_2$, където y_o, z_1, z_2 са намерените по-горе.

Пример 6. $y'' + y = x\cos x$.

Корените на характеристичното уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ са $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ и общото решение на хомогенното уравнение е

$$y_o = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Тъй като $\alpha + i\beta = i$ е еднократен корен на характеристичното уравнение, то можем да търсим частно решение на нехомогенното уравнение във вида

$$z = x[(ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x],$$

но в такъв случай пресмятанията са доста. Затова използуваме втория способ, който посочихме по-горе.

Тъй като $x\cos x = \mathrm{Re}(xe^{ix})$, най-напред разглеждаме уравнението

$$y'' + y = xe^{ix}.$$

Според правилото то има частно решение от вида

$$w = x(ax + b)e^{ix}.$$

Заместваме в уравнението и намираме $a = -i/4$, $b = 1/4$, т.е.

$$w = (-(i/4)x^2 + (1/4)x)e^{ix} = (-(i/4)x^2 + (1/4)x)(\cos x + i\sin x) =$$
$$= (x\cos x + x^2\sin x)/4 + i(x\sin x - x^2\cos x)/4.$$

Следователно търсеното частно решение на първоначалното уравнение е

$$z = \mathrm{Re}(w) = (x\cos x + x^2\sin x)/4,$$

а общото решение е

$$y = y_o + z = C_1\cos x + C_2\sin x + (x\cos x + x^2\sin x)/4.$$

7.3. Линейното нехомогенно уравнение

$$Ly = a_o(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

с постоянни или променливи коефициенти и произволна дясна част $f(x)$ решаваме с метода на Лагранж за вариране на произволните константи. Ако общото решение на линейното хомогенно уравнение $Ly=0$ е $y_o=C_1y_1+\ldots+C_ny_n$, то частно решение на нехомогенното уравнение $Ly=f(x)$ търсим във вида

$$z=C_1(x)y_1+\ldots+C_n(x)y_n.$$

Функциите $C_i(x)$ определяме от системата

$$C_1'(x)y_1 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0$$
$$C_1'(x)y_1' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0$$
$$C_1'(x)y_1^{(n-2)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-2)}=0$$
$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x)/a_o(x).$$

Пример 7. $y'' + y = 1/\cos x$

Общото решение на хомогенното уравнение е $y_o=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Частно решение на нехомогенното уравнение търсим във вида

$$z(x)=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x.$$

За целта решаваме системата

$$C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0,$$
$$-C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=1/\cos x.$$

Последователно намираме $C_1'(x)=-\mathrm{tg}(x)$, $C_2'(x)=1$, откъдето следва $C_1(x)=\ln|\cos x|+C_1$, $C_2'(x)=x+C_2$. След заместване в израза за $z(x)$ получаваме общото решение на нехомогенното уравнение

$$y = y_o + z = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln|\cos x| + x\sin x.$$

7.4. Уравнението на Ойлер

$$a_ox^ny^{(n)} + a_1x^{(n-1)}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x)$$

свеждаме до линейно уравнение с постоянни коефициенти при $x>0$ чрез смяната $x=e^t$ ($x=-e^t$ при $x<0$).

Пример 8. $x^2y'' + 2xy' - 6y=0$.

При $x>0$ полагаме $x=e^t$. Последователно изразяваме производните по x чрез производните по t.

$$y'=dy/dx= (dy/dt)/(dx/dt)=(dy/dt)e^{-t}$$
$$y''=dy'/dx=(dy'/dt)/(dx/dt)=(d^2y/dt^2-dy/dt)e^{-t}/e^t=$$
$$=(d^2y/dt^2-dy/dt)e^{-2t}.$$

След заместване в уравнението получаваме уравнението с постоянни коефициенти

$$d^2y/dt^2 + dy/dt - 6y = 0,$$

което има общо решение $y=C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}$. Тъй като $x=e^t$, то окончателно намираме $y=C_1x^{-3} + C_2x^2$. Тази формула важи очевидно и при $x<0$.

Пример 9. $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3$.

При $x>0$ полагаме $x=e^t$. Последователно получаваме

$$y' = dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt) = (dy/dt)e^{-t},$$
$$y'' = dy'/dx = (d^2y/dt^2 - dy/dt)e^{-2t},$$
$$y''' = dy''/dx = (d^3y/dt^3 - 3d^2y/dt^2 + 2dy/dt)e^{-3t}.$$

Като заместим в ойлеровото уравнение стигаме до уравнението с постоянни коефициенти

$$d^3y/dt^3 - 4d^2y/dt^2 + 5dy/dt - 2y = e^{3t}.$$

То има общо решение

$$y = (C_1 + C_2t)e^t + C_3e^{2t} + (1/4)e^{3t}.$$

Следователно при $x>0$ ойлеровото уравнение има общо решение

$$y = (C_1 + C_2\ln x)x + C_3x^2 + (1/4)x^3.$$

Ясно е, че $z=(1/4)x^3$ е частно решение на нехомогенното ойлерово уравнение и при $x<0$. Тъй като хомогенното ойлерово уравнение не променя вида си, ако заменим x с $-x$, то $y_o=(C_1+C_2\ln|x|)x+C_3x^2$ е общо решение на хомогенното ойлерово уравнение и при $x<0$, а общото решение на нехомогенното уравнение е $y = y_o + z$.

7.5. Редът на линейното хомогенно уравнение от ред n с променливи коефициенти може да бъде понижен, ако познаваме едно негово частно решение y_1. Като положим $y=y_1z$ стигаме до линейно уравнение, в което не участвува z и реда му понижаваме чрез полагането $z'=u$.

Линейното хомогенно уравнение от втори ред

$$a_o(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

можем да решим, ако ни е известно едно негово частно решение y_1. За целта е по удобно да използуваме формулата на Лиувил-Остроградски

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int a_1(x)/a_o(x)dx},$$

Пример 10. $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Непосредствено се проверява, че $y_1=x$ е частно решение. Ако y_2 е произволно друго решение на уравнението от формулата на Лиувил-Остроградски получаваме

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int(-2x)/(x^2+1)dx}, \quad y_1y_2' - y_1'y_2 = C(x^2+1).$$

Следователно

$$(y_2/y_1)' = (y_1y_2' - y_1'y_2)/y_1^2 = C(x^2+1)/y_1^2$$

и след интегриране намираме

$$y_2/y_1 = \int C(x^2+1)/x^2dx + C_1 = C(x-1/x) + C_1,$$
$$y_2 = C(x^2-1) + C_1x,$$

като последната формула ни дава общото решение на уравнението.

Няма общ метод за намиране на частно решение на уравнението от втори ред. Понякога такова решение ни се отдава да намерим с налучкване, като го търсим от определен вид, например полином или линейна комбинация с неопределени коефициенти от положителни и

отрицателни степени на x.

В следващите задачи намерете общото решение.

7.1. $y''+y'-2y=0$.
7.2. $y''+2y'+10y=0$.
7.3. $y''-2y'=0$.
7.4. $y'''-8y=0$.
7.5. $y''+4y=0$.
7.6. $y''''+2y''+y=0$.
7.7. $y''''-y=0$.
7.8. $y'''''+8y'''+16y'=0$.
7.9. $y'''-3y''+3y'-y=0$.
7.10. $y''+y=4xe^x$.
7.11. $y''+3y'-4y=e^{-4x}+xe^{-x}$.
7.12. $y''+y'-2y=3xe^x$.
7.13. $y''-4y'+8y=e^{2x}+\sin 2x$.
7.14. $y'''+y=e^{x/2}\cos^2\sqrt{3}\,x/4$.

За да решите следващите задачи, използувайте метода на Лагранж.

7.15. $y''-2y'+y=e^x/x$.
7.16. $y''+3y'+2y=1/(e^x+1)$.
7.17. $y''+y=1/\sin x$.
7.18. $y''+4y=2\mathrm{tg}x$.

Решете уравненията на Ойлер:

7.19. $x^2y''-4xy'+6y=0$.
7.20. $x^2y''-xy'-3y=0$.
7.21. $x^3y'''+xy'-y=0$.
7.22. $x^2y'''=2y'$.
7.23. $x^3y''-2xy=6\ln x$.
7.24. $x^2y''-3xy'+5y=3x^2$.
7.25. $(x-2)^2y''-3(x-2)y'+4y=x$.
7.26. $(2x+3)^3y'''+3(2x+3)y'-6y=0$.

Решете уравненията с променливи коефициенти, като намерите едно частно решение, ако такова не е посочено.

7.27. $(2x+1)y''+4xy'-4y=0$.
7.28. $x^2(x+1)y''-2y=0$, $y_1=1+1/x$.
7.29. $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0$.
7.30. $xy''+2y'-xy=0$, $y_1=e^x/x$.
7.31. $y''-2(1+\mathrm{tg}^2x)y=0$, $y_1=\mathrm{tg}x$.
7.32. $x(x-1)y''-xy'+y=0$.
7.33. $(e^x+1)y''-2y'-e^xy=0$, $y_1=e^x-1$.

В следващите две задачи по известни две частни решения на нехомогенното уравнение намерете общото решение. Използувайте, че разликата на тези частни решения е решение на хомогенното уравнение.

7.34. $(x^2-1)y''+4xy'+2y=6x$, $y_1=x$, $y_2=(x^2+x+1)/(x+1)$.
7.35. $(3x^3+x)y''+2y'-6xy=4-12x^2$, $y_1=2x$, $y_2=(x+1)^2$.

ТЕОРЕМА ЗА СЪЩЕСТВУВАНЕ И ЕДИНСТВЕНОСТ

В равнината разглеждаме ограничения затворен правоъгълник

$$\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}.$$

Казваме, че $f(x, y)$ е липшицова функция в правоъгълника Π (по y, равномерно относно x), ако

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq L|x_1 - x_2| \, \forall \, (x_i, y) \in \Pi, \, i = 1, 2.$$

Теорема (Локална теорема за същ. и единств.). Нека $f \in C(\Pi)$ е липшицова функция в Π (по y, равномерно относно x). Задачата на Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ притежава единствено решение, дефинирано поне при $|x - x_0| \leq h$, където $h = \min(a, b/M)$, а $M = \max\limits_{\Pi} |f(x, y)|$.

Нека G е област в равнината и $(x_0, y_0) \in G$. Казваме, че решението на задачата на Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ е единствено, ако кои да е две решения на задачата на Коши съвпадат в сечението на дефиниционните си интервали.

Функцията $f(x, y)$ ще наричаме локално-липшицова в G, ако за всяка точка от G съществува правоъгълник с център в нея, който се съдържа в G и в който функцията е липшицова (по y, равномерно относно x).

Теорема (Глобална теорема за единственост). Нека $f \in C(G)$ е локално-липшицова функция в G и $(x_0, y_0) \in G$. Решението на задачата на Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ е единствено.

Казваме, че решението $\varphi(x)$ с дефиниционен интервал Δ_φ на уравнението $y' = f(x, y)$ е продължение на решението $\psi(x)$ с дефиниционен интервал Δ_ψ на същото уравнение, ако $\Delta_\psi \subset \Delta_\varphi$ и $\varphi(x) = \psi(x)$ в Δ_ψ.

Едно решение на уравнението наричаме непродължимо решение, ако съвпада с всяко свое продължение.

Теорема (Глобална теорема за същ. и единств.). Нека $f \in C(G)$ и е локално-липшицова функция в G. За всяка точка $(x_0, y_0) \in G$ задачата на Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ притежава единствено непродължимо решение.

Теорема (Теорема за напускане на компактите). Нека $f \in C(G)$ е локално-липшицова функция в G и $\varphi(x)$ с дефиниционен интервал (α, β) е непродължимо решение на уравнението $y' = f(x, y)$. Тогава за всяко компактно подмножество K на G съществува такова число $\varepsilon > 0$, че $(x, \varphi(x)) \notin K$ за $x \in (\alpha, \alpha + \varepsilon) \cup (\beta - \varepsilon, \beta)$.

Теорема (Принцип за сравняване) Нека $f, g \in C(G)$ са локално-липшицови функции и $f(x, y) > g(x, y)$ в областта G. Ако $\varphi(x)$ с дефиниционен интервал Δ_φ е решение на задачата на Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, а $\psi(x)$ с дефиниционен интервал Δ_ψ е решение на задачата на Коши $y' = g(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, то е в сила неравенството $\varphi(x) > \psi(x)$ в $\Delta_\varphi \cap \Delta_\psi \cap \{x > x_0\}$ (Разбира се- [illegible]

1. Намерете първите две (три) последователни приближения за решението на задачата на Коши:

$$\begin{aligned} a) \quad y' &= x - y^2, \; y(0) = 0, \\ b) \quad y' &= y^2 + 3x^2 - 1, \; y(1) = 1, \\ c) \quad y' &= y + e^{y-1}, \; y(0) = 1, \\ d) \quad y' &= 1 + x \sin y, \; y(\pi) = 2\pi. \end{aligned}$$

2. Посочете интервал (възможно най-голям), в който съществува решение на задачата на Коши:

$$\begin{aligned} a) \quad y' &= x + y^3, \; y(0) = 0, \\ b) \quad y' &= 2y^2 - x, \; y(1) = 1, \\ c) \quad y' &= x^2 + y^2, \; Y(1) = 0. \end{aligned}$$

3. За всяко от написаните по-долу уравнения докажете, че решението на задачата на Коши с произволно начално условие $y(x_0) = y_0$, (например $y(0) = 0$ или $y(1) = 0$) съществува за всяко $x \geq x_0$:

$$\begin{aligned} a) \quad y' &= x^2 - y^2, \\ b) \quad y' &= x^3 - y^3, \\ c) \quad y' &= x^3 - xy^2. \end{aligned}$$

4. Докажете, че решението на задачата на Коши с произволно начално условие $y(x_0) = y_0$ не съществува за всички $x \geq x_0$ и има вертикална асимптота, ако уравнението има вида

$$\begin{aligned} a) \quad y' &= x^2 + y^2, \\ b) \quad y' &= x^3 + y^3, \\ c) \quad y' &= x^3 + xy^2. \end{aligned}$$

5. За всяко едно от уравненията в задачи 3 и 4 направете пълно изследване на поведението на интегралните криви.

6. Докажете, че решението на задачата на Коши $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$ е нечетна функция, а решението на задачата на Коши $y' = x^3 - xy^2$, $y(0) = 0$ е четна функция.