Съдържание

част 1

Индукция във фундирани множества

1.1 Индукция в естествените числа

Най-общо, с *индукция* в множеството на естествените числа доказваме *твърдения* от вида $\forall n P(n)$.

Да си припомним двата принципа за индукция в естествените числа, които са ни известни още от училищната математика:

Принцип на обичайната индукция:

$$\frac{P(0), \quad \forall n \; (P(n) \implies P(n+1))}{\forall n P(n)} \qquad \mathbf{(1)}$$

Принцип на пълната индукция:

$$\frac{P(0), \quad \forall n \; (\; (P(0) \;\&\; \dots \;\&\; P(n)) \Longrightarrow \; P(n+1) \;)}{\forall n P(n)} \qquad \mathbf{(2)}$$

Тази индукция е известна още като *възвратна* или *силна* индукция (*course-of-values induction*).

Да приложим този принцип в решението на следната задача:

Задача 1.1. Докажете, че всяко естествено число, по-голямо или равно на 2, се разлага на прости множители.

Решение. Нека $P(n) \overset{\text{деф}}{\iff} n$ се разлага на прости множители.

База $n = 2$: очевидно 2 се разлага. Фиксираме $n > 2$ и приемаме, че всички числа $m \leq n$ се разлагат (*индуктивна хипотеза*). Имаме 2 случая:

1 сл. $n + 1$ е просто. Този случай е ясен.

2 сл. $n + 1$ е съставно. Тогава за някои k и l, такива че $2 \leq k \leq n$ и $2 \leq l \leq n$, ще имаме $n + 1 = k.l$. Сега не ни остава нищо друго, освен да приложим индуктивната хипотеза $P(k)$ и $P(l)$. $\square$

Привидно изглежда, че тази задача не може да се реши като се използва обичайна индукция. Всъщност само изглежда. Двата принципа са еквивалентни, т.е. всяко твърдение, което можем да докажем с пълна индукция, можем да докажем и с обикновена индукция.

Задача 1.2. Докажете, че принципът на обичайната индукция е еквивалентен на принципа на пълната индукция.

Решение. Ясно е, че ако $\forall n P(n)$ можем да докажем с обичайна индукция, то (толкова повече) можем и със силна.

Сега обратно, нека $\forall n P(n)$ е изведено с втория индуктивен принцип. Това означава, че за P са били изпълнени условията над чертата на правилото за пълна индукция **(2)**:

$$P(0) \quad \text{и} \quad \forall n\ (\ (P(0)\ \&\ \ldots\ \&\ P(n)) \Longrightarrow\ P(n+1)\ ). \tag{1.1}$$

Трябва да покажем, че $\forall n P(n)$, като използваме принципа **(1)**. Ясно е, че директно не можем да приложим този принцип към свойството $P(n)$, но не е и нужно. По условие ни е дадено, че принципът за обичайната индукция е валиден за *всякакви* едноместни свойства в $\mathbb{N}$, ето защо се ориентираме да приложим **(1)** към свойство, което е по-силно от нашето P (с идея, че тогава и индуктивната хипотеза ще е по-силна). Да пробваме със следното свойство $Q(n)$:

$$Q(n) \overset{\text{деф}}{\iff} P(0)\ \&\ \ldots\ \&\ P(n).$$

Сега със "слабия" принцип **(1)** ще се опитаме да покажем, че е вярно "силното" свойство $Q(n)$.

База $n = 0$: по определение

$$Q(0) \iff P(0),$$

а $P(0)$ е вярно, съгласно (1.1), значи и $Q(0)$ ще е вярно.

Да допуснем, че за някое n е вярно $Q(n)$, т.е. верни са $P(0)\ \&\ \ldots\ \&\ P(n)$. Но тогава отново от (1.1) ще имаме, че е вярно и $P(n + 1)$. Значи общо можем да твърдим, че е в сила

$$P(0)\ \&\ \ldots\ \&\ P(n)\ \&\ P(n+1).$$

Но това е точно $Q(n+1)$! Така индукционната стъпка е проведена и вече можем да твърдим, че $\forall n Q(n)$. Понеже

$$Q(n) \implies P(n),$$

то от $\forall n Q(n)$, разбира се, ще следва и $\forall n P(n)$, което и трябваше да покажем.

Да отбележим, че твърдението $Q(n)$ е по-силно от твърдението $P(n)$, обаче

$$\forall n Q(n) \text{ е еквивалентно на } \forall n P(n),$$

така че не сме доказали нищо повече от това, което трябваше ⌣̈. $\square$

Принципът на пълната индукция можем да препишем еквивалентно, като използваме релацията $<$.

Принцип на пълната индукция

$$\frac{\forall n \ (\ \forall m_{m<n} P(m) \implies P(n) \ )}{\forall n P(n)} \quad \textbf{(3)}$$

Убедете се, че правилата **(2)** и **(3)** са еквивалентни. Според вас къде изчезна базата на индукцията $P(0)$ в правилото **(3)**?

1.2 Фундирани наредби

Нека A е множество, а $<$ е бинарна релация в A. Тази релация наричаме *строга наредба*, ако тя е антирефлексивна и транзитивна (откъдето лесно се вижда, релацията е и антисиметрична).

Примери:

1) $(\mathbb{N}, <)$;

2) $(2^{\mathbb{N}}, \subset)$;

3) $(Fin, \subset)$, където $Fin = \{M \mid M \subseteq \mathbb{N} \ \& \ M \text{ е крайно}\}$;

4) $(\mathcal{F}_n, \subset)$;

5) $(\mathbb{N}^2, \prec)$, където по определение:

$$(x, y) \prec (x', y') \stackrel{\text{деф}}{\iff} x < x' \ \vee \ (x = x' \ \& \ y < y').$$

Тази наредба се нарича *лексикографска наредба* на $\mathbb{N}^2$. Ясно е, че тя е антирефлексивна. За да съобразим, че е и транзитивна, да приемем, че

$(x, y) \prec (x', y')$ и $(x', y') \prec (x'', y'')$. От първото условие имаме, че $x \leq x'$. Разглеждаме поотделно случаите $x < x'$ и $x = x'$:

1 сл. $x < x'$. Тогава от $x' \leq x''$ получаваме $x < x''$ и значи $(x, y) \prec (x'', y'')$.

2 сл. $x = x'$. Ако $x' < x''$, то ще имаме както по-горе $x < x''$. Ако пък $x' = x''$, със сигурност $y < y'$ и $y' < y''$. Получаваме общо $y < y''$, което заедно с $x = x' = x''$ отново ни дава $(x, y) \prec (x'', y'')$.

Определение 1.1. Нека A е непразно множество. Ще казваме, че строгата наредба $<$ в A е *фундирана* (или че $(A, <)$ е *фундирано множество*), ако не съществува редица $x_0, x_1, x_2, \dots$ от елементи на A, такава че:

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots$$

Един еквивалентен начин да кажем, че множеството $(A, <)$ е фундирано е следният: всяко непразно множество $B \subseteq A$ има поне един минимален елемент.

Задача 1.3. Определете кои от изброените по-горе строги частични наредби са фундирани.

Упътване. 1) $(\mathbb{N}, <)$ е фундирано.

2) $(2^{\mathbb{N}}, \subset)$ не е фундирано. Наистина, да означим с M_n множеството $\mathbb{N} \setminus \{0, \dots, n\}$. Тогава редицата $M_0, M_1, M_2, \dots$ е строго намаляваща:

$$M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots$$

3) $(Fin, \subset)$ е фундирано, защото не може да има строго намаляваща редица от крайни множества.

4) $(\mathcal{F}_n, \subset)$ не е фундирано — разсъждавайте както при $(2^{\mathbb{N}}, \subset)$.

5) Лексикографската наредба на $\mathbb{N}^2$ е фундирана.

$\square$

1.3 Индукция в множества с фундирана наредба

Принцип на пълната индукция във фундирани множества. Нека $(A, <)$ е фундирано множество, а P е свойство в A, такова че за всяко $x \in A$ е изпълнено условието:

$$\text{ако за всяко } y < x \text{ е вярно } P(y), \text{то е вярно и } P(x). \qquad \textbf{(Ind)}$$

Тогава за всяко $x \in A$ е вярно $P(x)$.

Да запишем и този принцип във вид на правило:

$$\frac{\forall x\ (\ \forall y_{y<x} P(y) \implies P(x)\ )}{\forall x P(x)}$$

Забележете приликата с принципа за пълна индукция над $\mathbb{N}$ във формулировката **(3)**.

Доказателство. Да допуснем, че съществува $x_0 \in A$, за което $\neg P(x_0)$. Ако допуснем, че

$$\forall y_{y<x_0}\ P(y), \tag{1.2}$$

то тогава съгласно **(Ind)** ще е вярно и $P(x_0)$, а ние имаме $\neg P(x_0)$. Следователно допускането ни (1.2) е погрешно и значи съществува $x_1 < x_0$, такова че $\neg P(x_1)$. Като повторим горното разсъждение, ще получим, че ще съществува $x_2 < x_1$, за което $\neg P(x_2)$, и т.н. Итерирайки тази процедура, достигаме до безкрайно намаляващата редица

$$x_0 > x_1 > x_2 > \ \ldots,$$

което влиза в противоречие с фундираността на наредбата $<$. Следователно допускането, че съществува $x_0 : \ \neg P(x_0)$ е погрешно, с други думи, вярно е, че $\forall x P(x)$. □

Ако използваме еквивалентната дефиниция за фундирана наредба, доказателството на горното твърдение е малко по-кратко. Отново допускаме, че съществува поне едно $x \in A$, за което $\neg P(x)$ и разглеждаме множеството

$$B \ = \ \{x \mid \neg P(x)\}.$$

То не е празно и следователно има минимални елементи. Нека x_0 е такъв елемент. Тогава за всички $y < x_0$ ще е вярно, че $y \notin B$, т.е. $P(y)$. Но P удовлетворява **(Ind)** и следователно $P(x_0)$ също ще е вярно. Обаче $x_0 \in B$ и значи $\neg P(x_0)$ — противоречие.

1.4 Задачи

Ще илюстрираме в няколко задачи индуктивния принцип, който току-що изведохме. Първата задача е свързана с *функцията на Акерман*

Задача 1.4. (Функция на Акерман) Нека $f\colon\ \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ удовлетворява условията:

$$\begin{aligned} f(0,y) &= y+1 \\ f(x+1,0) &= f(x,1) \\ f(x+1,y+1) &= f(x,f(x+1,y)). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Докажете, че съществува единствена функция f с това свойство и тази функция е тотална.

Внимание! Тази функция расте с шеметна скорост — например $f(4,2)$ е число с 19 729 цифри в десетичния си запис (за справка: всички атоми във вселената са "само" около 10^{80}).

Решение. Нека за f са изпълнени условията (1.3). Да означим с $P(x,y)$ свойството:

$$P(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\iff} f \text{ има единствена стойност в т. } (x,y).$$

Ще разсъждаваме с индукция по лексикографската наредба $\prec$ на $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, за която вече знаем, че е фундирана.

Наистина, да фиксираме произволни $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ и да приемем, че

$$\forall (x',y')_{(x',y')\prec(x,y)}\ P(x',y') \qquad \textbf{(индуктивна хипотеза).}$$

Искаме да покажем, че и $P(x,y)$ е вярно. Разглеждаме различните възможности за (x,y):

1 сл. $x=0$. Но тогава $f(0,y) \stackrel{(1.3)}{=} y+1$ и очевидно $P(x,y)$ е вярно.

2 сл. $x>0, y=0$. Тук имаме

$$f(x,0) \stackrel{(1.3)}{=} f(x-1,1).$$

Но $(x-1,1) \prec (x,0)$ и значи съгласно индуктивната хипотеза $P(x-1,1)$ ще имаме, че $f(x-1,1)$ е еднозначно определена, откъдето и $f(x,0)$ ще е еднозначно определена.

3 сл. $x>0, y>0$. В този случай

$$f(x,y) \stackrel{(1.3)}{=} f(x-1,\underbrace{f(x,y-1)}_{z}).$$

Но $(x,y-1) \prec (x,y)$ и по индуктивната хипотеза, $f(x,y-1)$ ще има единствена стойност, примерно z. Колкото и да е голямо това z, със сигурност $(x-1,z) \prec (x,y)$ и по индуктивната хипотеза, $f(x-1,z)$ ще има еднозначно определена стойност, а оттам същото можем да твърдим и за $f(x,y)$. $\square$

Ако си мислите, че горната рекурсивна схема поначало е сложна, защото рекурсията е двойна — ами не винаги е така. Да вземем следната рекурсивна дефиниция на функция g, която се различава с точно една единица в базовия случай на дефиницията на функцията на Акерман:

$$\begin{aligned} g(0,y) &= y \\ g(x+1,0) &= g(x,1) \\ g(x+1,y+1) &= g(x,g(x+1,y)). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Тази функция, обаче, вече е "почти" константна:

Задача 1.5. (Задача от Домашно 1.) Нека g удовлетворява условията (1.4). Докажете, че тогава g е следната функция:

$$g(x,y) \ = \ \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Препоръчвам ви да решите тази задача с индукция по лексикографската наредба на $\mathbb{N}^2$, както направихме в предишната задача, за да се убедите, че сте разбрали принципа за пълна индукция. Ние ще я решим с обикновена индукция, за да направим разликата.

Наистина, да приемем, че g удовлетворява равенствата (1.4). Тогава очевидно $g(0,y)=y$ за всяко $y \in \mathbb{N}$. По-интересното е защо в останалите случаи g е константата 1. Трябва да покажем, че

$$\forall x_{x\geq 1} \underbrace{\forall y\ g(x,y)=1}_{P(x)}.$$

С обикновена индукция относно x ще покажем, че $\forall x_{x\geq 1} P(x)$, където $P(x)$ е свойството, което сме означили по-горе.

База $x=1$:

$$\forall y \ \ \underbrace{g(1,y)=1}_{Q(y)}.$$

Трябва да покажем, че $\forall y\ Q(y)$, което ще направим с индукция относно y. При $y=0$ от (1.4) получаваме:

$$g(1,0) \ = \ g(0,1) \ = \ 1.$$

Да допуснем, че за някое y е вярно $Q(y)$. Тогава за $Q(y+1)$ ще имаме, съгласно (1.4):

$$g(1,y+1) \ = \ g(0,g(1,y)) \overset{\text{и.х. } Q(y)}{=} g(0,1) \ = \ 1.$$

С това приключва вътрешната индукция по y, с която показахме, че $\forall y Q(y)$, което беше точно базата $P(1)$ на външната индукция по x.

Сега да допуснем, че за някое $x \geq 1$ е изпълнено $P(x)$. Трябва да покажем $P(x+1)$, т.е.

$$\forall y \underbrace{g(x+1, y) = 1}_{R(y)}.$$

За да покажем $\forall y\ R(y)$, ще разсъждаваме отново с индукция относно y. Наистина, при $y = 0$ ще имаме

$$g(x+1, 0) \overset{(1.4)}{=} g(x, 1) \overset{\text{и.х. } P(x)}{=} 1.$$

Сега да приемем, че $R(y)$ е вярно за някое y. Тогава за $y+1$ ще имаме:

$$g(x+1, y+1) \overset{(1.4)}{=} g(x, \underbrace{g(x+1, y)}_{1}) \overset{\text{и.х. } R(y)}{=} g(x, 1) \overset{\text{и.х. } P(x)}{=} 1.$$

$\square$

Задача 1.6. (**91-функция на Маккарти.**) Нека $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ удовлетворява условията:

$$f(x) = \begin{cases} x - 10, & \text{ако } x > 100 \\ f(f(x+11)), & \text{ако } x \leq 100. \end{cases} \tag{1.5}$$

Докажете, че в такъв случай f е следната функция:

$$f(x) = \begin{cases} x - 10, & \text{ако } x > 100 \\ 91, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Да направим няколко експеримента:

$$f(100) \overset{(1.5)}{=} f(f(111)) \overset{(1.5)}{=} f(101) \overset{(1.5)}{=} 91.$$

$$f(99) \overset{(1.5)}{=} f(f(110)) \overset{(1.5)}{=} f(100) = 91.$$

Виждаме, че $f(99)$ се обръща към $f(100)$, което ни навежда на мисълта да разгледаме следната релация $\prec$ в множеството $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \ \&\ x \leq 100\}$:

$$x \prec y \overset{\text{деф}}{\iff} x > y.$$

Ясно е, че тази релация е строга наредба, която при това е фундирана, защото A е ограничено отгоре.

Нека

$$P(x) \overset{\text{деф}}{\iff} f(x) = 91.$$

С индукция относно фундираната наредба $\prec$ ще покажем, че $P(x)$ е вярно за всяко $x \in A$.

Наистина, да фиксираме произволно $x \in A$ и да приемем, че за всички $y \prec x$ е в сила $P(y)$ (**индукционна хипотеза**). Имаме

$$f(x) \stackrel{(1.5)}{=} f(f(x+11)).$$

сл. 1. $x + 11 > 100$. Тогава $f(x+11) \stackrel{(1.5)}{=} x + 11 - 10 = x + 1$ и значи

$$f(x) \stackrel{(1.5)}{=} f(f(x+11)) \;=\; f(x+1).$$

сл. 1.1. Ако $x + 1 \notin A$, което ще рече $x + 1 > 100$. Но x принадлежи на множеството A, т.е. $x \leq 100$. Двете неравенства ни дават общо $x = 100$. Но ние вече се убедихме, че $f(100) = 91$. Да отбележим, че $x = 100$ всъщност е "дъното на индукцията", т.е. числото 100 се явява минимален елемент на нашето множество A (който в случая е и най-малък елемент на A).

сл. 1.2. Ако $x + 1 \in A$, то $x + 1 \prec x$ и по индукционната хипотеза $f(x+1) = 91$, откъдето и $f(x) = 91$.

сл. 2. $x + 11 \leq 100$. Имаме отново

$$f(x) \stackrel{(1.5)}{=} f(f(x+11)).$$

Тук вече $x + 11 \in A$, като при това $x + 11 \prec x$, и значи съгласно индукционната хипотеза $f(x+11) = 91$. Тогава

$$f(x) \;=\; f(\underbrace{f(x+11)}_{91}) \;=\; f(91) \;=\; 91.$$

За последното равенство $f(91) = 91$ използвахме, че сме в случая, когато $x + 11 \leq 100$, т.е. $x \leq 89$. Тогава $91 \prec x$ и значи за 91 индукционната хипотеза е в сила. $\square$

Задача 1.7. (Задача от Домашно 1.) Нека за $f\colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ е изпълнено:

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ f(x, y-x), & \text{ако } y \geq x > 0 \\ f(y,x), & \text{ако } y < x. \end{cases} \tag{1.6}$$

Докажете, че $f(x,y) = \text{НОД}(x,y)$ за всяко $(x,y) \in \mathbb{N}^2$.
(Приемаме, че $\text{НОД}(0,0) = 0$.)

Задача 1.8. Нека за $f\colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ е изпълнено:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x < y \\ f(x-y,y)+1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажете, че $\forall x \forall y_{y>0}\ f(x,y) = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$, където $\lfloor \frac{x}{y} \rfloor \overset{\text{деф}}{=}$ цялата част от делението на x на y.

Решение. Искаме да покажем, че

$$\forall x \forall y > 0\ f(x,y) = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor,$$

което е еквивалентно на

$$\forall y > 0 \underbrace{\forall x\ f(x,y) = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor}_{P(x)}.$$

Да фиксираме произволно $y > 0$. С пълна индукция относно $x \in \mathbb{N}$ ще покажем, че $\forall x P(x)$. Ще следваме схемата за пълна индукция

$$\frac{\forall x\ (\ \forall x'_{<x} P(x') \implies P(x))}{\forall x P(x)} \qquad (*)$$

Наистина, да вземем произволно $x \in \mathbb{N}$ и да приемем, че $\forall x'_{<x} P(x')$ е вярно (индукционна хипотеза). Ще докажем, че $P(x)$ също е вярно. За целта е подходящо да разгледаме поотделно случаите $x < y$ и $x \geq y$.

1 сл. $x < y$. Тогава $f(x,y) \overset{(1.6)}{=} 0$ и следователно $f(x,y) = 0 = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$ т.е. $P(x)$ е вярно.

2 сл. $x \geq y$. Тук имаме, съгласно избора на f, че

$$f(x,y) \overset{(1.6)}{\simeq} f(x-y,y)+1.$$

Но $y > 0$, и значи $x - y < x$. Тогава индукционна хипотеза $P(x-y)$ е в сила, т.е. $f(x-y,y) = \lfloor \frac{x-y}{y} \rfloor$, откъдето

$$f(x,y) = f(x-y,y)+1 = \lfloor \frac{x-y}{y} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor.$$

Следователно и $P(x)$ е вярно.

Така доказахме, че условието над чертата на $(*)$ е изпълнено. Следователно е вярно и условието под чертата $\forall x P(x)$. $\square$

Задача 1.9. (Задача от Домашно 1.) Нека за $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ е изпълнено:

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} y, & \text{ако } x < y \\ f(x-y,y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажете, че тогава $\forall x \forall y_{y>0}\ f(x,y) = \{\frac{x}{y}\}$, където $\{\frac{x}{y}\} \stackrel{\text{деф}}{=}$ остатъка от делението на x на y.

Задача 1.10. (Задача за ЕК.) Функцията f, която е дефинирана върху списъци, удовлетворява равенствата:

$$\begin{aligned}
&f(x,y,[\,]) = [\,]\\
&f(x,[\,],[a]) = [x@[a]]\\
&f(x,y,[a|z]) = f(x@[a],[\,],y@z)@f(x,y@[a],z), \text{ ако } y \neq [\,]\ \vee\ z \neq [\,].
\end{aligned}$$

(Тук @ е операцията конкатенация.) Докажете, че f е тотална функция.

Задача 1.11. (Задача за ЕК.) В множеството $\mathbb{N}^*$ на всички крайни редици от естествени числа дефинираме релацията $\prec$ по следния начин. За всеки две редици α и β полагаме

$$\alpha \prec \beta$$

точно когато α може да се получи от β след замяната на число n от β с редица от числа $(m_1,\dots,m_k)$, такива че $m_i < n$ за всяко $i = 1,\dots,k$. Нека $\prec^*$ е рефлексивното и транзитивно затваряне на релацията $\prec$. Докажете, че $(\mathbb{N}^*, \prec^*)$ е фундирано множество.

част 2

Оператори

2.1 Частични функции

Навсякъде под *функция* ще имаме предвид частична функция

$$f : \mathbb{N}^n \multimap\!\!\to \mathbb{N}$$

в множеството на естествените числа $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$.

Ако f е дефинирана в т. $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, ще пишем $!f(\bar{x})$, а ако не е дефинирана — ще пишем $\neg!f(\bar{x})$. *Дефиниционно множество (домейн)* на f е множеството

$$Dom(f) = \{\bar{x} |\ !f(\bar{x})\}.$$

Съвкупността от всички n-местни функции ще отбелязваме с $\mathcal{F}_n$:

$$\mathcal{F}_n = \{f \mid f\colon\ \mathbb{N}^n \multimap\!\!\to\ N\}.$$

Ако $Dom(f) = \mathbb{N}^n$, ще казваме, че f е *тотална (навсякъде дефинирана)*. Разбира се, всяка тотална функция може да се разглежда и като частична, т.е. тя също е от $\mathcal{F}_n$.

Когато пишем равенство между изрази, в които участват частични функции, е необходимо да уточним какво ще разбираме в случаите, когато някоя от двете страни (или и двете едновременно) не са дефинирани. За тази цел ще използваме нова релация, която ще наричаме *условно равенство* и ще означаваме с $\simeq$.

Определение 2.1. Нека $\alpha(\bar{x})$ и $\beta(\bar{x})$ са изрази, в които участват частични функции. Тогава

$$\begin{aligned} \alpha(\bar{x}) \simeq \beta(\bar{x}) \quad \stackrel{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad & !\alpha(\bar{x})\ \&\ !\beta(\bar{x})\ \&\ \alpha(\bar{x}) = \beta(\bar{x}) \\ & \vee\ \neg!\alpha(\bar{x})\ \&\ \neg!\beta(\bar{x}). \end{aligned}$$

С други думи, условното равенство има стойност *истина* или когато и двете му страни са дефинирани и имат една и съща стойност, или когато и двете му страни не са дефинирани. В останалите случаи то е *лъжа*. В частност, $f(\bar{x}) \simeq y$ ще е вярно точно когато f е дефинирана в $\bar{x}$ и нейната стойност е y.

В множеството $\mathcal{F}_n$ въвеждаме релацията "включване" ($\subseteq$):

Определение 2.2. За $f, g \in \mathcal{F}_n$ полагаме

$$f \subseteq g \stackrel{\text{деф}}{\iff} \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y \; (f(x_1, \dots, x_n) \simeq y \implies g(x_1, \dots, x_n) \simeq y).$$

В този случай ще казваме, че f е *подфункция* на g (или че f *се включва в* g).

От определението се вижда, че

$$f \subseteq g \iff G_f \subseteq G_g.$$

По определение две функции са равни точно когато графиките им съвпадат. Така получаваме:

$$f = g \iff G_f = G_g \iff G_f \subseteq G_g \;\&\; G_g \subseteq G_f \iff f \subseteq g \;\&\; g \subseteq f.$$

С други думи, имаме следната връзка между релациите равенство и включване:

$$f = g \quad \iff \quad f \subseteq g \;\&\; g \subseteq f. \tag{2.1}$$

От тази еквивалентност се вижда, че за да покажем, че две функции са равни, е достатъчно да проверим, че едната е подфункция на другата и обратно.

За всяко $n \geq 1$, с $\emptyset^{(n)}$ ще означаваме *никъде недефинираната* (или *празната*) функция на n аргумента. Както се вижда от името ѝ, тази функция не е дефинирана в нито една n-торка $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$. Ясно е, че за всяка функция $f \in \mathcal{F}_n$ ще е изпълнено

$$\emptyset^{(n)} \subseteq f.$$

Нека f е произволна n-местна функция, а A е подмножество на $\mathbb{N}^n$. *Рестрикция на f до множеството A* ще наричаме функцията $g \in \mathcal{F}_n$, за която:

$$Dom(g) \;=\; Dom(f) \cap A \quad \& \quad g(\bar{x}) \simeq f(\bar{x}) \text{ за всяко } \bar{x} \in Dom(g).$$

Рестрикцията на f до множеството A ще означаваме с $f \restriction A$.

Задача 2.1. Нека f и g са n-местни функции. Докажете, че $f = g$ тогава и само тогава, когато са изпълнени условията:

1) $f \subseteq g$;

2) $Dom(g) \subseteq Dom(f)$.

Решение. Ако $f = g$, то $f \subseteq g$ и $g \subseteq f$ и от последното, в частност, следва и включването между домейните $Dom(g) \subseteq Dom(f)$.

Обратно, нека са верни 1) и 2). Трябва да покажем, че $f \subseteq g$ и $g \subseteq f$. Първото включване е точно условието 1). За да покажем, че и $g \subseteq f$, да приемем, че за произволни $\bar{x}, y$ $g(\bar{x}) \simeq y$. Тогава $\bar{x} \in Dom(g)$, а оттук съгласно 2) ще имаме и $\bar{x} \in Dom(f)$, и значи $f(\bar{x}) \simeq z$ за някое z. Сега от условието 1) ще имаме, че и $g(\bar{x}) \simeq z$, откъдето $y = z$. И така, получихме, че за произволни $\bar{x}, y$:

$$g(\bar{x}) \simeq y \implies f(\bar{x}) \simeq y,$$

което по дефиницията на $\subseteq$ означава, че $g \subseteq f$. $\square$

2.2 Компактни оператори

2.2.1 Основни определения

Най-общо, *оператор* ще наричаме всяко изображение, което преработва функции във функции. Ако операторът Γ е на един аргумент, той изглежда така:

$$\Gamma : \mathcal{F}_k \longrightarrow \mathcal{F}_m$$

за някои естествени $k \geq 1$ и $m \geq 1$. Константите k и m определят *типа на оператора*, който ще означаваме с $(k \to m)$.

Примери.

1) Операторът *идентитет*: $\Gamma_{id}(f) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f$ от тип $(k \to k)$.

2) $\Gamma(f)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(x) + f(y)$, който е от тип $(1 \to 2)$.

3) Операторът за диагонализация $\Gamma_d(f)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(x,x)$ от тип $(2 \to 1)$.

4) Операторът от тип $(1 \to 1)$

$$\Gamma(f)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.f(x-1), & \text{иначе,} \end{cases}$$

който е свързан с рекурсивната дефиниция на функцията *факториел*.

На лекции въведохме два вида оператори. Първият е типичен за структури, в които има наредба — това са операторите, които запазват тази наредба:

Определение 2.3. Казваме, че операторът $\Gamma : \mathcal{F}_k \longrightarrow \mathcal{F}_m$ е *монотонен*, ако за всяка двойка функции $f, g \in \mathcal{F}_k$ е изпълнено:

$$f \subseteq g \implies \Gamma(f) \subseteq \Gamma(g).$$

За да въведем втория тип оператори — компактните оператори, ще ни трябва понятието *крайна функция*. Това е функция, която е дефинирана в краен брой точки (може и 0). Никъде недефинираната функция $\emptyset^{(n)}$ е първият ни пример за крайна функция. Крайните функции ще означаваме с θ, евентуално с индекси.

Определение 2.4. Операторът $\Gamma : \mathcal{F}_k \longrightarrow \mathcal{F}_m$ наричаме *компактен*, ако за всяка функция $f \in \mathcal{F}_k$, всяка m-орка $\bar{x} \in \mathbb{N}^m$ и всяко $y \in \mathbb{N}$ е в сила еквивалентността:

$$\Gamma(f)(\bar{x}) \simeq y \iff \exists\theta(\theta \subseteq f \ \&\ \theta \text{ е крайна } \&\ \Gamma(\theta)(\bar{x}) \simeq y). \tag{2.2}$$

Интуитивно, за всеки компактен оператор Γ е вярно, че ако $\Gamma(f)(\bar{x})$ има стойност, то тази стойност се получава като се използва само крайна информация от аргумента f — това е точно крайната функция θ от горното определение. Например, при оператора за диагонализация имаме, че ако

$$\Gamma_d(f)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(x,x) \simeq y,$$

то резултатът y се определя от стойността на f само в една точка — (x,x).

За да покажем, че даден оператор е компактен, ще е удобно да използваме следното твърдение от лекциите:

Твърдение 2.1. Операторът $\Gamma \colon \mathcal{F}_k \longrightarrow \mathcal{F}_m$ е компактен тогава и само тогава, когато са изпълнени условията:

1) Γ е монотонен;

2) За всички $f \in \mathcal{F}_k$, $\bar{x} \in \mathbb{N}^m$ и $y \in \mathbb{N}$ е в сила импликацията:

$$\Gamma(f)(\bar{x}) \simeq y \implies \exists\theta(\theta \subseteq f \ \&\ \theta \text{ е крайна } \&\ \Gamma(\theta)(\bar{x}) \simeq y). \tag{2.3}$$

Горното условие 2) всъщност е правата посока на условието за компактност (2.2). Операторите с това свойство понякога се наричат *крайни*.

Задача 2.2. Докажете, че следващите оператори са компактни:

а) операторът за диагонализация $\Gamma_d : \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_1$, който се дефинира така: $\Gamma_d(f)(x) \simeq f(x,x)$ за всяко $x \in \mathbb{N}$;

б) операторът $\Gamma_{sq} \colon \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ със следната дефиниция: $\Gamma_{sq}(f) = f \circ f$;

в) операторът за сумиране $\Gamma_{sum}: \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$, който за всяко $x \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma_{sum}(f)(x) \simeq \sum_{z=0}^{x} f(z);$$

г) операторът Γ, свързан с функцията на Акерман:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} y+1, & \text{ако } x=0 \\ f(x-1,0), & \text{ако } x>0 \;\&\; y=0 \\ f(x-1,f(x,y-1)), & \text{ако } x>0 \;\&\; y>0. \end{cases}$$

Решение. За всеки от операторите показваме, че е монотонен и че за него е в сила правата посока (2.3) на условието за компактност, след което прилагаме *Твърдение* 2.1.

а) Монотонност: да вземем две функции f и g от $\mathcal{F}_2$, такива че $f \subseteq g$. За да видим, че и $\Gamma_d(f) \subseteq \Gamma_d(g)$, следваме определението на релацията $\subseteq$:

$$\Gamma_d(f) \subseteq \Gamma_d(g) \stackrel{\text{деф}}{\iff} \forall x \forall y\ (\Gamma_d(f)(x) \simeq y \implies \Gamma_d(g)(x) \simeq y).$$

Наистина, да вземем произволни естествени x и y и да приемем, че $\Gamma_d(f)(x) \simeq y$. Трябва да покажем, че и $\Gamma_d(g)(x) \simeq y$.

Условието $\Gamma_d(f)(x) \simeq y$ означава $f(x,x) \simeq y$. Но $f \subseteq g$, следователно и $g(x,x) \simeq y$, или все едно $\Gamma_d(g)(x) \simeq y$. Понеже x и y бяха произволни, можем да заключим, че $\Gamma_d(f) \subseteq \Gamma_d(g)$.

Да проверим, че за Γ_d е в сила импликацията

$$\forall f_{\in \mathcal{F}_1} \forall x \forall y\ (\Gamma_d(f)(x) \simeq y \implies \exists \theta(\theta \subseteq f \;\&\; \theta \text{ е крайна } \&\; \Gamma_d(\theta)(x) \simeq y)).$$

За целта фиксираме функция $f \in \mathcal{F}_1$ и естествени числа x и y и приемаме, че $\Gamma_d(f)(x) \simeq y$, което ще рече — $f(x,x) \simeq y$. Очевидно резултатът y зависи само от стойността на f в точката (x,x). Тогава е ясно коя крайна функция $\theta \subseteq f$ да изберем, така че да си осигурим $\Gamma_d(\theta)(x) \simeq y$ — полагаме θ да е *рестрикцията на* f до множеството $\{(x,x)\}$:

$$\theta := f \restriction \{(x,x)\}.$$

От избора на θ автоматично следва, че тя е подфункция на f, дефинирана в най-много една точка — точката (x,x). Но ние имаме, че $(x,x) \in Dom(f)$, откъдето

$$\theta(x,x) = f(x,x)\ (= y).$$

Оттук веднага $\Gamma_d(\theta)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \theta(x,x) \simeq y$.

б) По дефиниция

$$\Gamma_{sq}(f)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} (f \circ f)(x) \simeq f(f(x)).$$

За да се убедим, че и този оператор е монотонен, вземаме отново произволни функции f, g от $\mathcal{F}_1$, такива че $f \subseteq g$. Да приемем, че $\Gamma_{sq}(f)(x) \simeq y$ за някои $x, y \in \mathbb{N}$. Това означава, че $f(f(x)) \simeq y$. В такъв случай, съгласно нашата дефиниция за суперпозиция, със сигурност $f(x)$ ще е дефинирано, т.е. $f(x) \simeq z$ за някое z. Понеже x и z са от $Dom(f)$, а $f \subseteq g$, то веднага $f(x) = g(x)$ и $f(z) = g(z)$. Но тогава

$$\Gamma_{sq}(g)(x) \simeq g(g(x)) \simeq g(\underbrace{f(x)}_{z}) \simeq f(\underbrace{f(x)}_{z}) \simeq y,$$

което и трябваше да покажем.

Насочваме се към проверка на импликацията

$$\forall f_{\in \mathcal{F}_1} \forall x \forall y \; (\Gamma_{sq}(f)(x) \simeq y \implies \exists \theta (\theta \subseteq f \;\&\; \theta \text{ е крайна } \&\; \Gamma_{sq}(\theta)(x) \simeq y)).$$

Избираме произволни $f \in \mathcal{F}_1$, x и y и приемаме, че $\Gamma_{sq}(f)(x) \simeq y$, т.е. $f(f(x)) \simeq y$. Вече видяхме, че оттук следва, в частност, че $f(x)$ е дефинирана. Можем да вземем

$$\theta := f \restriction \{x,\; f(x)\}.$$

Да отбележим, че това всъщност е единственият възможен избор за θ, ако искаме тя да е подфункция на f, защото само за точките x и $f(x)$ знаем със сигурност, че принадлежат на дефиниционната област на f.

Ясно е, че $\theta(x) = f(x)$ и $\theta(f(x)) = f(f(x))$. Тогава

$$\Gamma_{sq}(\theta)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \theta(\underbrace{\theta(x)}_{=f(x)}) \simeq \theta(f(x)) \simeq f(f(x)) \simeq y.$$

в) Оставяме проверката за монотонността на Γ_{sum} за упражнение и се насочваме директно към условието (2.3).

За целта, нека $\Gamma_{sum}(f)(x) \simeq y$, т.е. $f(0) + \dots + f(x) \simeq y$ за някои f, x и y. В частност, $!f(0), \dots, !f(x)$. Резултатът y се определя от стойностите на f в точките $0, 1, \dots, x$, и следователно $Dom(\theta)$ трябва да включва тези точки (и само тях, ако искаме θ да е подфункция на f). Наистина, нека

$$\theta := f \restriction \{0, \dots, x\}.$$

Така ще имаме

$$\Gamma_{sum}(\theta)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \theta(0) + \dots + \theta(x) \simeq f(0) + \dots + f(x) \simeq y.$$

г) Тъй като операторът

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} y+1, & \text{ако } x=0 \\ f(x-1,0), & \text{ако } x>0 \ \&\ y=0 \\ f(x-1,f(x,y-1)), & \text{ако } x>0 \ \&\ y>0. \end{cases}$$

се дефинира с разглеждане на случаи, ще се наложи и ние да разгледаме тези случаи, когато доказваме неговата компактност.

За да видим, че Γ е монотонен, вземаме произволни двуместни функции f и g, такива че $f \subseteq g$ и приемаме, че $\Gamma(f)(x,y) \simeq z$ за някои x, y и z. Искаме да покажем, че $\Gamma(g)(x,y) \simeq z$. Разглеждаме поотделно трите случая от дефиницията на Γ.

1 сл. $x=0$. Тук очевидно $\Gamma(f)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} y+1 \simeq \Gamma(g)(x,y)$.

2 сл. $x>0 \ \&\ y=0$. В този случай $\Gamma(f)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(x-1,0) \simeq z$. Но $f \subseteq g$, значи и $g(x-1,0) \simeq z$, откъдето $\Gamma(g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} g(x-1,0) \simeq z$.

3 сл. $x>0 \ \&\ y>0$. По определение $\Gamma(f)(x,y) \simeq f(x-1,f(x,y-1))$. От допускането $\Gamma(f)(x,y) \simeq z$ ще имаме $f(x-1,f(x,y-1)) \simeq z$. От дефиницията за суперпозиция следва, че и $f(x,y-1)$ ще е дефинирана. Понеже $f \subseteq g$, ще имаме, че

$$f(x,y-1) = g(x,y-1) \quad \text{и} \quad f(x-1,f(x,y-1)) = f(x-1,g(x,y-1)).$$

Оттук

$$\Gamma(g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} g(x-1,g(x,y-1)) \simeq g(x-1,f(x,y-1)) \simeq f(x-1,f(x,y-1)) \simeq y.$$

Сега се насочваме към проверката на импликацията

$$\forall f_{\in \mathcal{F}_2} \forall x \forall y\, \forall z(\Gamma(f)(x,y) \simeq z \implies \exists \theta(\theta \subseteq f \ \&\ \theta \text{ е крайна} \ \&\ \Gamma(\theta)(x,y) \simeq z)).$$

Да приемем, че $\Gamma(f)(x,y) \simeq z$ за някои f, x и y. Отново се налага да следваме случаите от дефиницията на Γ.

1 сл. $x=0$. В този случай $\Gamma(f)$ не зависи от f и значи ако вземем

$$\theta := \emptyset^{(2)}$$

ще имаме със сигурност, че $\theta \subseteq f$ и $\Gamma(\theta)(x,y) \simeq z$. Да отбележим, че това е единственият възможен избор на θ, защото допускането $\Gamma(f)(x,y) \simeq z$ не ни дава никаква информация за $Dom(f)$, в частност, напълно възможно е и f да е $\emptyset^{(2)}$.

2 сл. $x>0 \ \&\ y=0$. Условието $\Gamma(f)(x,y) \simeq z$ тук означава $f(x-1,0) \simeq z$. Тогава за

$$\theta := f \restriction \{(x-1,y)\}$$

очевидно ще е изпълнено $\Gamma(\theta)(x,y) \simeq z$.

3 сл. $x > 0$ & $y > 0$. В този случай имаме, че $f(x-1, f(x,y-1)) \simeq z$. Съобразете, че за функцията

$$\theta := f \restriction \{(x,y-1),(x-1,f(x,y-1))\}$$

ще е в сила $\Gamma(\theta)(x,y) \simeq z$. □

2.2.2 Задачи за оператори от домашни и изпити

Задача 2.3. Да означим с $\Gamma\colon \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ оператора, който се дефинира с условието

$$\Gamma(f) = \begin{cases} f, & \text{ако } \; Dom(f) \text{ е безкрайно множество} \\ \emptyset^{(1)}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажете, че този оператор е монотонен, но не е компактен.

Решение. Монотонността на Γ се вижда с разглеждане на двата случая от дефиницията му:

1 сл. Ако $Dom(f)$ е безкрайно, то $\Gamma(f) \stackrel{\text{деф}}{=} f$ и тогава за всяка функция g, за която $f \subseteq g$, ще е вярно, че $Dom(g)$ също е безкрайно, така че

$$\Gamma(f) \stackrel{\text{деф}}{=} f \subseteq g \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma(g).$$

2 сл. Ако $Dom(f)$ е крайно множество, то $\Gamma(f) \stackrel{\text{деф}}{=} \emptyset^{(1)}$. Но тогава $\Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)$ за всяка функция g.

Не е трудно да се съобрази, че Γ не може да е компактен. Причината е, че за всяка крайна функция $\theta \in \mathcal{F}_1$ имаме $\Gamma(\theta) = \emptyset^{(1)}$, докато за тотална функция f вече $\Gamma(f) = f$. Тогава за всяка такава тотална f и за всяко x ще е вярна лявата част на еквивалентността (2.2) $\Gamma(f)(x) \simeq y$ (за $y = f(x)$), докато дясната не може да е изпълнена за никоя крайна функция θ. □

Задача 2.4. Да дефинираме $\Gamma\colon \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ както следва:

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } \; \forall y f(x,y) > 0 \\ 1, & \text{ако } \; \exists y f(x,y) \simeq 0 \\ \neg!, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

Докажете, че операторът Γ е монотонен. Вярно ли е, че той е компактен? Обосновете отговора си.

Решение. Монотонността на Γ се показва леко с разглеждане на случаите от неговата дефиниция.

Наистина, да вземем произволни $f, g \in \mathcal{F}_2$, такива че $f \subseteq g$. Трябва да покажем, че $\Delta(f) \subseteq \Delta(g)$, или все едно:

$$\Gamma(f)(x) \simeq z \implies \Gamma(g)(x) \simeq z \tag{2.4}$$

за всички $x, z \in \mathbb{N}$. Да фиксираме произволно $x \in \mathbb{N}$.

1 сл. $\forall y f(x,y) > 0$. Тогава очевидно и $\forall y g(x,y) > 0$ и значи

$$\Gamma(f)(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} 0 \quad \text{и} \quad \Gamma(g)(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} 0.$$

2 сл. $\exists y f(x,y) \simeq 0$. Тогава $\exists y g(x,y) \simeq 0$, следователно

$$\Gamma(f)(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} 1 \quad \text{и} \quad \Gamma(g)(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} 1.$$

3 сл. Ако f не попада в никой от горните два случая, то $\neg!\Gamma(f)(x)$ и значи горната импликация (2.4) ще е тривиално вярна.

Операторът Γ не е компактен. Достатъчно е да вземем например функцията $f = \lambda x, y.1$. Тогава за всяко x, $\Gamma(f)(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} 0$, докато за всяка крайна $\theta \subseteq f$ ще имаме, че $\neg!\Gamma(\theta)(x)$ и условието за компактност (2.2) очевидно пропада. □

Задача 2.5. За функцията $f\colon\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ и естествените числа $x, y \in \mathbb{N}$ ще казваме, че f е (x,y)-*кладенец*, ако:

$$!f(x)\ \&\ !f(y)\ \&\ \forall z(x < z < y \implies !f(z)\ \&\ f(z) \leq f(x)\ \&\ f(z) \leq f(y)).$$

Нека $\Gamma\colon\ \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ е операторът, зададен като:

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} \neg!, & \text{ако } \{t\,|\,t > x+1\ \&\ f \text{ е } (x,t)\text{-кладенец}\} = \emptyset, \\ \max\{f(z)\,|\,x < z < y\}, & \text{където } y = \min\{t\,|\,t > x+1\ \&\ f \text{ е } (x,t)\text{-кладенец}\}, \\ & \text{иначе} \end{cases}$$

Проверете дали:

а) Γ е монотонен;

б) Γ е компактен.

Решение. За да проверим монотонността, отново вземаме произволни едноместни функции f и g, такива че $f \subseteq g$. Искаме да покажем, че за произволни x и v:

$$\Gamma(f)(x) \simeq v \implies \Gamma(g)(x) \simeq v.$$

Наистина, да приемем, че $\Gamma(f)(x) \simeq v$. Това означава, че сме минали по втория клон на дефиницията на $\Gamma(f)(x)$, т.е. f е (x,t)-кладенец за поне едно t. Можем да си мислим, че t е най-малкото с това свойство. Тъй като $f \subseteq g$, то очевидно и g ще (x,t)-кладенец за същото t (и t отново ще е първото такова). Тогава

$$\Gamma(g)(x) \simeq \max\{g(z)\,|\,x < z < t\} = \max\{f(z)\,|\,x < z < t\} = v.$$

Този оператор вече е компактен, защото ако $\Gamma(f)(x) \simeq v$, то стойността v зависи от крайно много стойности на f, по-точно, зависи от стойностите на f в точките от (x,t)-кладенеца.

Сега формално: достатъчно е да покажем само правата посока на условието за компактност: за всички f, x и v:

$$\Gamma(f)(x) \simeq v \implies \exists\theta(\theta \subseteq f \;\&\; \theta \text{ е крайна } \&\; \Gamma(\theta)(x) \simeq v).$$

Наистина, нека $\Gamma(f)(x) \simeq v$. Тогава f е (x,t)-кладенец за някое t, като отново можем да предполагаме, че t е най-малкото с това свойство. Тогава

$$\Gamma(f)(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} \max\{f(z)\,|\,x < z < t\} = v.$$

Да положим $\theta = f \restriction \{z\,|\,x \leq z \leq t\}$. Ясно е, че θ също е (x,t)-кладенец и освен това

$$\Gamma(\theta)(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} \max\{\theta(z)\,|\,x < z < t\} = \max\{f(z)\,|\,x < z < t\} = v.$$

$\square$

Задача 2.6. (Писмен изпит, 01.09.2016, спец. И и КН) Казваме, че една частична функция $f : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ е *растяща*, ако

$$\forall x \forall y(x \leq y \;\&\; !f(x) \;\&\; !f(y) \implies f(x) \leq f(y)).$$

Нека Γ е следният оператор:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} f(y) - f(x), & \text{ако } f \text{ е растяща} \\ f(y) + f(x), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вярно ли е че:

а) Γ е монотонен оператор?

б) Γ е компактен оператор?

Обосновете отговорите си.

Отговор. Операторът е компактен. Съобразете го, като разгледате поотделно двата случая за f от дефиницията на Γ.

2.3 Неподвижни точки на оператори

2.3.1 Неподвижни точки

Ще разглеждаме оператори от тип $(k \to k)$, т.е. изображения от вида

$$\Gamma: \mathcal{F}_k \longrightarrow \mathcal{F}_k.$$

За такива оператори можем да разглеждаме функции f, такива че

$$f = \Gamma(f). \tag{2.5}$$

Всяка функция f, за която това е в сила, ще наричаме *неподвижна точка (н.т.)* на оператора Γ.

Всъщност условието (2.5) е едно уравнение с неизвестно функцията f. То може да има различен брой решения, в частност, може да няма решения, както ще наблюдаваме в примерите от следващата задача.

Задача 2.7. Опишете всички неподвижни точки на операторите:

а) Константния оператор $\Gamma_c(f) = g$ от тип $(1 \to 1)$, където g е някаква фиксирана едноместна функция

Решение. Нека f е неподвижна точка на Γ_c. Тогава $f = \Gamma(f)$ означава, че $f = g$ и значи този оператор има *единствена* неподвижна точка – g.

б) Оператора идентитет $\Gamma_{id}(f) \stackrel{\text{деф}}{=} f$ от тип $(1 \to 1)$

Решение. Ако f е неподвижна точка на Γ_{id}, то условието $f = \Gamma(f)$ се свежда до $f = f$. Следователно всяка функция е неподвижна точка на Γ_{id} и значи този оператор има *континуум* много неподвижни точки.

в)

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} f(x), & \text{ако } x = 0 \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Нека f е неподвижна точка на Γ. Тогава

$$f(x) \simeq \begin{cases} f(x), & \text{ако } x = 0 \\ x, & \text{иначе,} \end{cases}$$

което означава, че за $x > 0$ $f(x)$ *трябва* да е равно на x. При $x = 0$ имаме $f(0) \simeq f(0)$, което е изпълнено винаги. Значи всяка н.т. на Γ зависи от един параметър — стойността ѝ в 0, или тя изглежда по следния начин:

$$f_c(x) \simeq \begin{cases} c, & \text{ако } x = 0 \\ x, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Тук c е естествено число или е означение за недефинираност, т.е. във втория случай под f_c разбираме функцията

$$f_{\neg !}(x) \simeq \begin{cases} \neg !, & \text{ако } x = 0 \\ x, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

г)

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x \ = \ 0 \\ f(x+1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Ако f е неподвижна точка на Γ, то за нея е вярно, че

$$f(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x \ = \ 0 \\ f(x+1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Значи $f(0) \simeq 0$, а при всяко $x > 0$ би трябвало $f(x) \simeq f(x+1)$, което означава, че

$$f(1) \simeq f(2) \simeq f(3) \simeq \dots \ .$$

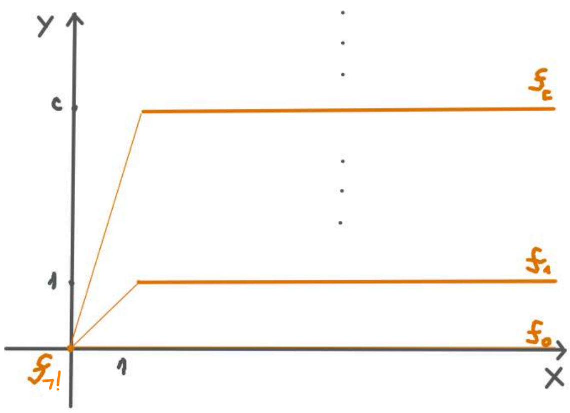
Следователно f трябва да има една и съща стойност при $x > 0$ или въобще да няма стойност. С други думи, f или е някоя от функциите f_c, $c \in \mathbb{N}$, където f_c има вида

$$f_c(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ c, & \text{ако } x > 0, \end{cases}$$

или f е $f_{\neg!}$, където

$$f_{\neg!}(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \neg!, & \text{ако } x > 0, \end{cases}$$

Ето как изглеждат графично тези функции.



Операторите, които разгледахме дотук, имаха неподвижни точки — една или повече. Дали има оператори, които нямат неподвижни точки? Да, макар че тези оператори са доста неестествени. Ето един такъв пример.

Задача 2.8. Да фиксираме две различни функции f_0 и f_1 и да определим оператора Γ както следва:

$$\Gamma(f) = \begin{cases} f_1, & \text{ако } f = f_0 \\ f_0, & \text{ако } f \neq f_0. \end{cases}$$

Докажете, че този оператор няма неподвижни точки.

Упътване. Разглеждаме поотделно двата случая за f от дефиницията на Γ и стигаме до извода, че равенството $\Gamma(f) = f$ е невъзможно. $\square$

Задача 2.9. Докажете, че всеки от изброените оператори има единствена неподвижна точка и намерете явния ѝ вид. **а)**

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.f(x-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Нека f е неподвижна точка на Γ. Тогава

$$f(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.f(x-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Твърдо сме убедени, че f може да е само функцията *факториел* $\ddot\smile$, но да го докажем все пак. Ще разсъждаваме с индукция, по точно, с индукция по x ще докажем, че

$$\forall x \in \mathbb{N}\ f(x) = x!.$$

За $x = 0$ имаме $f(0) = 1 \stackrel{\text{деф}}{=} 0!$. Да допуснем, че $f(x) = x!$ за някое $x \geq 0$. Тогава за $x+1$ ще имаме, съгласно индуктивната хипотеза:

$$f(x+1) \ \simeq\ (x+1).f(x) = (x+1).x! = (x+1)!.$$ **б)**

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2.f(x-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Упътване. Следвайки пунктуално схемата от по-горе, показваме, че ако $f = \Gamma(f)$, то $f(x) = 2^x$ за всяко x.

в)

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ (f(\frac{x}{2}))^2, & \text{ако } x > 0 \text{ е четно} \\ 2(f(\frac{x-1}{2}))^2, & \text{ако } x \text{ е нечетно.} \end{cases}$$

Решение. Нека f е неподвижна точка на Γ, т.е. за f е изпълнено:

$$f(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ (f(\frac{x}{2}))^2, & \text{ако } x > 0 \text{ е четно} \\ 2(f(\frac{x-1}{2}))^2, & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

Сигурно съобразявате, че всеки ред от дефиницията на f съответства на алгоритъма за бързо степенуване и значи би трябвало f да е функцията 2^x. Ако не забележите веднага това, направете си няколко експеримента — пресметнете $f(1), f(2)\dots$ и ще се ориентирате.

Ние все пак искаме да имаме *доказателство*, че $f = \lambda x.2^x$, което означава, че трябва да отново използваме индукция. В случая се налага тя да е *пълна*, защото $f(x)$ „вика себе си" не в "предишната" точка $x-1$, както беше в предните два примера. Това, което е важно, за да върви индукцията, е че

$$\frac{x}{2} < x \quad \text{за } x > 0 \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{2} < x.$$

За базата $x = 0$ имаме $f(0) \overset{\text{деф}}{=} 1 = 2^0$. Сега да фиксираме някакво $x > 0$ и да предположим, че за всички $x' < x$ е вярно, че $f(x') = 2^{x'}$. Ако x е четно, за него ще имаме:

$$f(x) \simeq (f(\frac{x}{2}))^2 \overset{\text{и.х.}}{=} (2^{\frac{x}{2}})^2 = 2^x,$$

а ако x е нечетно, то отново от избора на f и индукционното предположение получаваме:

$$f(x) \simeq 2(f(\frac{x-1}{2}))^2 \overset{\text{и.х.}}{=} 2.(2^{\frac{x-1}{2}})^2 = 2^x.$$

г)

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 2x+1, & \text{ако } x \le 1 \\ f(x-1) + 6f(x-2), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Нека за f е изпълнено:

$$f(x) \simeq \begin{cases} 2x+1, & \text{ако } x \le 1 \\ f(x-1) + 6f(x-2), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.6}$$

За да си съставим хипотеза за f, да опипаме почвата:

$$f(2) \overset{(2.6)}{\simeq} f(1) + 6f(0) \overset{(2.6)}{\simeq} 3 + 6.1 = 9 = 3^2;$$

$$f(3) \overset{(2)}{\simeq} f(2) + 6f(1) \overset{(2)}{\simeq} 9 + 6.3 = 27 = 3^3 \dots$$

Това, което се набива на очи, че вероятно $f(x) = 3^x$. Да проверим. Ясно е, че отново трябва да разсъждаваме с пълна индукция относно x. Базовите случаи $x = 0$ и $x = 1$ се проверяват непосредствено. Сега да фиксираме $x > 1$ и да приемем, че за всяко $x' < x, f(x') = 3^{x'}$. Тогава

$$f(x) \overset{(2.6)}{\simeq} f(x-1) + 6f(x-2) \overset{\text{и.х.}}{=} 3^{x-1} + 6.3^{x-2} = 3^{x-1} + 2.3^{x-1} = 3^x.$$

2.3.2 Най-малки неподвижни точки

Казваме, че f е *най-малка неподвижна точка (н.м.н.т.)* на оператора Γ, ако f е най-малката сред неподвижните точки на Γ, което означава две неща:

1) f е неподвижна точка на Γ;

2) за всяка друга неподвижна точка g е вярно, че $f \subseteq g$.

Ако съществува, най-малката неподвижна точка на Γ е единствена: наистина, ако f и g са две н.м.н.т., то от второто условие на дефиницията ще имаме, че $f \subseteq g$ и $g \subseteq f$ и значи $f = g$. Тази единствена най-малка неподвижна точка на Γ ще отбелязваме с f_Γ. (В темите за спец. КН ще я срещате и като $lfp(\Gamma)$ - от ***least fix point***).

Задача 2.10. Определете най-малките неподвижни точки на всеки от операторите от *Задача* 2.7.

Решение. **а)** Видяхме, че константният оператор $\Gamma_c(f) \stackrel{\text{деф}}{=} g$ има единствена неподвижна точка g; следователно тя е и най-малката.

б) За оператора Γ_{id}, на който всяка функция е неподвижна точка, очевидно най-малката ще е $\emptyset^{(1)}$.

в) Ясно е, че сред всички неподвижни точки на този оператор най-малката ще е

$$f_{\neg!}(x) \simeq \begin{cases} \neg!, & \text{ако } x = 0 \\ x, & \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

г) Най-малката н.т. на Γ ще е функцията $f_{\neg!}$. □

Задача 2.11. Опишете всички неподвижни точки на операторите подолу и определете най-малката сред тези неподвижни точки.

а)

$$\Gamma(f)(x, y) \simeq \begin{cases} 0 & \text{ако } x < y \\ f(x - y, y) + 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

б)

$$\Gamma(f)(x, y) \simeq \begin{cases} x, & \text{ако } x < y \\ f(x - y, y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. **а)** Функцията f е неподвижна точка на Γ, ако за всяко x и y е изпълнено:

$$f(x, y) \simeq \begin{cases} 0 & \text{ако } x < y \\ f(x - y, y) + 1, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Нашата цел е да опишем решенията на това функционално уравнение. Ще покажем, че всъщност то има единствено решение и ще намерим явния му вид.

I начин: Нека f удовлетворява (2.7). Ще разгледаме поотделно случаите $y > 0$ и $y = 0$.

1 сл. $y > 0$. Тогава за произволно $x \in \mathbb{N}$ ще имаме:

$$f(x,y) \overset{(2.7)}{\simeq} f(x-y,y)+1 \overset{(2.7)}{\simeq} \dots \overset{(2.7)}{\simeq} f(x-ky,y)+k \overset{(2.7)}{\simeq} k,$$

където k е първото естествено число, такова че $x - ky < y$ (ясно е, че щом $y > 0$, такова k трябва да съществува). Ако $k = 0$, това просто означава, че $x < y$. Нека $k > 0$. Тогава от избора му (да е първото ...) ще имаме, че все още $x-(k-1)y \geq y$, т.е. $x \geq ky$. Към това неравенство добавяме и първоначалното $x - ky < y$, или все едно $x < (k+1)y$. Двете неравенства ни дават общо

$$ky \leq x < (k+1)y.$$

Сега разделяме почленно на $y \neq 0$ и получаваме

$$k \leq \frac{x}{y} < (k+1),$$

което по дефиниция означава, че $k = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$.
Ако $k = 0$, което, както отбелязахме, се случва само когато $x < y$, отново е вярно, че $k = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$. Така получихме, че за произволни $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}^+$

$$f(x,y) = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor.$$

2 сл. $y = 0$. От избора на f ще имаме, че за всяко x:

$$f(x,0) \overset{(2.7)}{\simeq} f(x-0,0)+1 \ \simeq f(x,0)+1, \text{т.е.} \quad f(x,0) \simeq f(x,0)+1,$$

което е вярно само ако $\neg!f(x,0)$.
Следователно този оператор има единствена неподвижна точка f и тя е функцията *целочислено делене:*

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor & \text{ако } y > 0 \\ \neg!, & \text{ако } y = 0. \end{cases}$$

Разбира се, тогава и най-малката неподвижна точка f_Γ ще горната функция.

II начин: Ако вече имаме хипотеза, че неподвижната точка на Γ е свързана с целочисленото делене, можем да разсъждаваме с индукция. Отново вземаме произволна неподвижна точка f, т.е. функция, която удовлетворява условието (2.7). Искаме да покажем, че

$$\forall x \forall y > 0 \; f(x,y) = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor,$$

което е еквивалентно на

$$\forall y > 0 \underbrace{\forall x \;\; f(x,y) = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor}_{P(x)}.$$

Да фиксираме някакво $y > 0$. С пълна индукция относно $x \in \mathbb{N}$ ще покажем, че $\forall x P(x)$. Ще следваме педантично схемата за пълна индукция, която разгледахме на първото упражнение:

Принцип на пълната индукция:

$$\frac{\forall x \; (\; \forall x'_{<x} P(x') \implies P(x))}{\forall x P(x)} \qquad (*)$$

Наистина, да вземем произволно $x \in \mathbb{N}$ и да приемем, че $\forall x'_{<x} P(x')$ е вярно (индуктивна хипотеза). Ще докажем, че $P(x)$ също е вярно. За целта разглеждаме двата случая:

1 сл. $x < y$. Тогава $f(x,y) \stackrel{(2.7)}{=} 0$ и следователно $f(x,y) = 0 = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$ т.е. $P(x)$ е вярно.

2 сл. $x \geq y$. Тук имаме, съгласно избора на f, че

$$f(x,y) \stackrel{(2.7)}{\simeq} f(x-y,y) + 1.$$

Но $y > 0$, и значи $x - y < x$. Тогава индуктивната хипотеза $P(x-y)$ е в сила, т.е. $f(x-y,y) = \lfloor \frac{x-y}{y} \rfloor$, откъдето и

$$f(x,y) \simeq f(x-y,y) + 1 = \lfloor \frac{x-y}{y} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor.$$

Следователно е $P(x)$ отново е налице.

Така доказахме, че условието над чертата на правилото $(*)$ е изпълнено. Следователно е вярно и условието под чертата $\forall x P(x)$.

Фактът, че при $y = 0$ $\neg ! f(x,y)$ показваме както при първия начин погоре.

б) Тръгваме от произволна неподвижна точка f на оператора. Този път f удовлетворява условието

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} x, & \text{ако } x < y \\ f(x-y,y), & \text{ако } x \geq y. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Отново е подходящо да разгледаме поотделно случаите $y = 0$ и $y > 0$. При $y > 0$ ще имаме последователно:

$$f(x,y) \overset{(2.8)}{\simeq} f(x-y,y) \overset{(2.8)}{\simeq} \dots \overset{(2.8)}{\simeq} f(x-ky,y) \overset{(2.8)}{\simeq} x-ky,$$

където отново k е първото, за което $x - ky < y$. Видяхме по-горе, че в такъв случай $k = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$, което означава, че изразът $x - ky$ ще е точно *остатъкът* от делението на x на y.

Ако $y = 0$, от (2.8) получаваме

$$f(x,0) \overset{(2.8)}{\simeq} f(x-0,0),$$

което този път е изпълнено винаги. Следователно тук, за разлика от предишния случай, ще имаме безброй много неподвижни точки от вида f_g, където $g \in \mathcal{F}_1$ е параметър, определящ стойностите на функцията в "свободните" точки $(x,0)$. По-конкретно:

$$f_g(x,y) \simeq \begin{cases} x \ mod \ y, & \text{ако } y > 0 \\ g(x), & \text{ако } y = 0. \end{cases}$$

Най-малката очевидно е $f_{\emptyset^{(1)}}$.

Разбира се, тази задача също може да се реши с пълна индукция, както по-горе направихме при втория начин за решаване на подусловие а). □

2.3.3 Задачи за неподвижни точки от изпити

Задача 2.12. (Устен изпит, 06.07.2018, гр. А, спец. И) На кои от изброените оператори функцията $x!$ се явява неподвижна точка. А на кои е най-малка неподвижна точка? Обосновете отговорите си.

а) $\Gamma_1(f)(x) = x!$

б) $\Gamma_2(f)(x) \simeq x.f(x \dot{-} 1)$, където $x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ x-1, & \text{ако } x > 0 \end{cases}$

в) $\Gamma_3(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x \leq 1 \\ x.f(x-1), & \text{ако } x > 1 \end{cases}$

г) $\Gamma_4(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ \lfloor \frac{f(x+1)}{x+1} \rfloor, & \text{ако } x > 0 \end{cases}$

Решение. **а)** Операторът Γ_1 е константен, и както видяхме от *Задача* 2.7, той има единствена неподвижна точка, в случая $x!$.

б) Изглежда доста вероятно $x!$ да е неподвижна точка на Γ_2, но да го проверим внимателно. За целта да дадем някакво име на функцията *факториел*, например φ. Трябва да проверим дали $\Gamma_2(\varphi) = \varphi$, което ще рече — дали $\Gamma_2(\varphi)(x) \simeq \varphi(x) \stackrel{\text{деф}}{=} x!$ за всяко $x \in \mathbb{N}$.

За *положително* x това наистина е така, защото

$$\Gamma_2(\varphi)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \ x.\varphi(x \dot{-} 1) \ \simeq \ x.\varphi(x-1) = x(x-1)! = x!.$$

При $x = 0$, обаче, това вече не е вярно, защото

$$\Gamma_2(\varphi)(0) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \ 0.\varphi(0 \dot{-} 1) = 0.\varphi(0) = 0 \neq 0!,$$

което означава, че $x!$ НЕ е неподвижна точка на Γ_2. Всъщност неподвижните точки на този оператор нямат нищо общо с факториела; те са никъде недефинираната функция $\emptyset^{(1)}$ и едноместната константна функция $f = \lambda x 0$ — може да го проверите за упражнение $\ddot\smile$.

в) Този оператор вече обсъждахме в *Задача* 2.9, където видяхме че неподвижната му точка е единствена и тя е $x!$.

г) Тук вече функцията $x!$ Е неподвижна точка на оператора.

Наистина, при $x = 0$ имаме, че $\Gamma_4(\varphi)(0) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \ 1 = 0! = \varphi(0)$.

При $x > 0$ минаваме по другия клон от дефиницията на Γ_4 и получаваме последователно:

$$\Gamma_4(\varphi)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \ \lfloor \frac{\varphi(x+1)}{x+1} \rfloor \stackrel{\text{деф}}{=} \ \lfloor \frac{(x+1)!}{x+1} \rfloor = x! = \varphi(x).$$

Получихме, че $x!$ е неподвижна точка на Γ_4. Тя, обаче, не е *най-малката* неподвижна точка на оператора. Непосредствено се проверява, че всъщност f_{Γ_4} е следната функция:

$$f_{\Gamma_4}(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решете самостоятелно задачата на група Б, за да се ориентирате дали сте разбрали предишната.

Задача 2.13. (Устен изпит, 06.07.2018, гр. Б, спец. И) На кои от изброените оператори функцията x^2 се явява неподвижна точка. А на кои е най-малка неподвижна точка? Обосновете отговорите си.

а) $\Gamma_1(f)(x) = x^2$,

б) $\Gamma_2(f)(x) \simeq f(x \dot{-} 1) + (2x \dot{-} 1)$, където $x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ x-1, & \text{ако } x > 0 \end{cases}$

в) $\Gamma_3(f)(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ f(x+1) - 2x - 1, & \text{ако } x > 0 \end{cases}$

г) $\Gamma_4(f)(x) \simeq \begin{cases} x, & \text{ако } x \leq 1 \\ f(x-1) + 2x - 1, & \text{ако } x > 1. \end{cases}$

Задача 2.14. (II контролно, 17.12.2016, спец. КН)

а) Дайте пример за оператор $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$, който има изброимо много неподвижни точки, всяка от които е крайна функция, но няма най-малка неподвижна точка.

б) Възможно ли е да съществува оператор $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$, който има безкрайно много неподвижни точки и има най-малка неподвижна точка, която е тотална функция? Обосновете отговора си!

Решение. **а)** Ясно е, за да няма н.м.н.т., този оператор трябва да е твърде особен. Ще го конструираме, като укажем явно в дефиницията му, че неговите неподвижни точки са функциите от една фиксирана редица от крайни функции и само те. Тази редица от крайни функции $g_0, g_1, \ldots$ можем да изберем по най-различни начини. Да се спрем, например, на следната редица $\{g_a\}_a$:

$$g_a(x) \simeq \begin{cases} a, & \text{ако } x = 0 \\ \neg!, & \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

Сега да дефинираме Γ по следния начин:

$$\Gamma(f) \; = \; \begin{cases} g_a, & \text{ако } f = g_a \text{ за някое } a > 0 \\ g_0, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

Ясно е, че всяка от функциите g_a е неподвижна точка на Γ: за $a > 0$ минаваме по първия клон от определението на Γ, а за $a = 0$ — по втория. Очевидно е също, че други неподвижни точки този оператор няма как да има, защото за всяка f, $\Gamma(f)$ е винаги нещо от вида g_a.

б) Отговорът е НЕ, заради следното просто наблюдение, което коментирахме още на първата лекция:

$$\text{ако } f \text{ е тотална и } f \subseteq g, \text{ то } f = g.$$

Ясно е сега, че ако f_Γ е тотална, а g е някаква неподвижна точка на Γ, то от това, че $f_\Gamma \subseteq g$ получаваме $f_\Gamma = g$, с други думи, ако най-малката неподвижна точка е тотална, то тя е единствена неподвижна точка. $\square$

2.4 Теорема на Кнастер-Тарски

2.4.1 Основни сведения от теорията

Тази теорема е позната и като теорема на *Кнастер-Тарски-Клини* или *теорема за неподвижната точка.*

За всеки оператор $\Gamma : \ \mathcal{F}_k \longrightarrow \ \mathcal{F}_k$, с $\Gamma^n(f)$ ще означаваме функцията, която се дефинира с индукция по nкакто следва:

$$\begin{aligned} &\Gamma^0(f) = f;\\ &\Gamma^{n+1}(f) = \Gamma(\Gamma^n(f)). \end{aligned}$$

С други думи, $\Gamma^n(f) \ = \ \underbrace{\Gamma(\dots\Gamma}_{n \text{ пъти}}(f)\dots)$.

Теорема на Кнастер-Тарски. Нека $\Gamma : \ \mathcal{F}_k \longrightarrow \ \mathcal{F}_k$ е непрекъснат (компактен) оператор. Тогава Γ притежава най-малка неподвижна точка f_Γ, която се конструира по следния начин:

$$f_\Gamma \ = \ \bigcup_n \Gamma^n(\emptyset^{(k)}).$$

Теоремата на Кнастер-Тарски не само твърди, че всеки непрекъснат оператор има най-малка неподвижна точка, но дава и *начин* за нейното конструиране.

Функцията $\Gamma^n(\emptyset^{(k)})$ ще наричаме *n-та апроксимация* на f_Γ и ще означаваме с f_n. По определение

$$f_{n+1} = \ \Gamma^{n+1}(\emptyset^{(k)}) = \Gamma(\Gamma^n(\emptyset^{(k)})) = \Gamma(f_n),$$

следователно редицата $f_0, f_1, f_2, \dots$ от последователните апроксимации на f_Γ удовлетворява рекурентната схема

$$\left| \begin{aligned} &f_0 = \emptyset^{(k)}\\ &f_{n+1} = \Gamma(f_n). \end{aligned} \right. \tag{2.9}$$

Теоремата на Кнастер-Тарски ни дава, че границата на тази редица е точно най-малката неподвижна точка f_Γ:

$$f_\Gamma = \bigcup_n f_n. \tag{2.10}$$

На лекции доказахме, че всяка монотонно растящата редица $\{f_n\}_n$ има точна горна граница (да я означим с f) и тя се дефинира посредством еквивалентността: за всяко $\bar{x}$ и y

$$f(\bar{x}) \simeq y \iff \exists n \ f_n(\bar{x}) \simeq y. \tag{2.11}$$

В задачите от този раздел ще приемаме наготово, че операторите са компактни, и следователно теоремата на Кнастер-Тарски може да се прилага към тях.

Задача 2.15. Нека $\Gamma\colon \mathcal{F}_k \longrightarrow \mathcal{F}_k$ е компактен оператор. За редицата $f_0, f_1, f_2, \dots$ от апроксимациите на f_Γ, дефинирана чрез (2.9), докажете, че:

а) тя е монотонна, т.е. $f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq \dots$

б) ако за някое n е вярно, че $f_n = f_{n+1}$, то тогава

$$f_n = f_{n+1} = f_{n+2} = \dots$$

Разбира се, в този случай ще имаме, че границата на редицата $\{f_n\}_n$ ще е f_n, с други думи f_Γ ще е f_n.

Решение. **а)** С индукция относно n ще покажем, че за всяко естествено n

$$f_n \subseteq f_{n+1}.$$

При $n = 0$ по определение $f_0 = \emptyset^{(k)}$ и значи $f_0 \subseteq f_1$.

Да приемем, че за някое $n \in \mathbb{N}$ $f_n \subseteq f_{n+1}$. Но операторът Γ е компактен, което значи и монотонен. Прилагаме го почленно към двете страни на неравенството и получаваме

$$\Gamma(f_n) \subseteq \Gamma(f_{n+1}),$$

или все едно $f_{n+1} \subseteq f_{n+2}$, с което индукцията е приключена.

б) Нека за някое n е изпълнено $f_n = f_{n+1}$. С индукция относно $m \geq n$ ще покажем, че

$$f_n = f_m \text{ за всяко } m \geq n.$$

Случаят $m = n$ е ясен, а приемайки, че

$$f_n \ = \ f_m$$

за някое $m \geq n$, след почленно прилагане на Γ ще имаме

$$\Gamma(f_n) \ = \ \Gamma(f_m),$$

или все едно, $f_{n+1} \ = \ f_{m+1}$. Но ние имаме $f_n = f_{n+1}$, откъдето веднага $f_n = f_{m+1}$, с което индуктивната стъпка е проведена.

Ако n е първото естествено число със свойството $f_n = f_{n+1}$, редицата $\{fn\}_n$ ще изглежда така:

$$f_0 \stackrel{\text{деф}}{=} \emptyset^{(k)} \subset \ f_1 \ \dots \subset f_n = \ f_{n+1} \ = f_{n+2} \dots$$

В този случай се казва, че рекурсията "се затваря" на стъпка n. Разбира се, тогава $\bigcup_n f_n$ ще е тази функция f_n. □

2.4.2 Задачи върху теоремата на Кнастер-Тарски

Операторът от следващата задача задава рекурсия, която се затваря още на стъпка $n = 1$.

Задача 2.16. С теоремата на Кнастер-Тарски намерете най-малката неподвижна точка на оператора Γ, дефиниран като:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ f(x-1, f(x,y)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Означаваме с f_n функцията $\Gamma^n(\emptyset^{(2)})$. Искаме да намерим *явния вид* на всяка f_n, а оттам — и на самата f_Γ.

Ще използваме, че редицата $\{f_n\}_n$ удовлетворява рекурентната схема

$$\begin{aligned} &f_0 = \emptyset^{(2)} \\ &f_{n+1} = \Gamma(f_n). \end{aligned}$$

Така за първата апроксимация f_1 на f_Γ ще имаме:

$$f_1(x,y) \simeq \Gamma(\emptyset^{(2)})(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \emptyset^{(2)}(x-1, \emptyset^{(2)}(x,y)), & \text{ако } x > 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \neg!, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

За следващата апроксимация f_2 получаваме:

$$f_2(x,y) \simeq \Gamma(f_1)(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ f_1(x-1, \underbrace{f_1(x,y)}_{\neg!}\ ), & \text{ако } x > 0 \end{cases} \overset{\text{деф } f_1}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \neg!, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Оказа се, че двете апроксимации f_1 и f_2 съвпадат. Но тогава, съгласно *Задача* 2.15, всички следващи апроксимации ще са равни на f_1, т.е. редицата от последователните приближения на f_Γ изглежда така:

$$f_0 \overset{\text{деф}}{=} \emptyset^{(2)} \subset f_1 = f_2 = f_3 \ldots.$$

Ясно е, че границата на тази редица е f_1, и значи $f_\Gamma = f_1$. □

Решете горната задача за операторите от *Задача* 2.7. При всички тях рекурсията се затваря на съвсем начална стъпка.

Задача 2.17. Като използвате теоремата на Кнастер-Тарски, е намерете най-малката неподвижна точка на всеки от операторите:

а)

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2.f(x-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Ще намерим *явния вид* на последователните приближения на f_Γ. По определение $f_0 = \emptyset^{(1)}$. За функцията f_1 ще имаме:

$$f_1(x) \overset{(2.9)}{\simeq} \Gamma(\emptyset^{(1)})(x) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2.\emptyset^{(1)}(x-1), & \text{ако } x > 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ \neg!, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

За следващата апроксимация f_2 можем да запишем:

$$f_2(x) \overset{(2.9)}{\simeq} \Gamma(f_1)(x) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2.f_1(x-1), & \text{ако } x > 0 \end{cases} \overset{\text{деф } f_1}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2.1, & \text{ако } x = 1 \\ \neg!, & \text{ако } x > 1. \end{cases}$$

От *Задача* 2.9 б) знаем, че всъщност f_Γ е функцията $\lambda x.2^x$. Следователно за всяко n имаме, че $f_n \subseteq \lambda x.2^x$. Тогава f_2 можем да препишем по този начин:

$$f_2(x) \simeq \begin{cases} 2^x, & \text{ако } x < 2 \\ \neg!, & \text{ако } x \geq 2, \end{cases}$$

което ни подсказва, че f_n може би ще е ето тази функция:

$$f_n(x) \simeq \begin{cases} 2^x, & \text{ако } x < n \\ \neg!, & \text{ако } x \geq n. \end{cases}$$

Ще използваме индукция относно n, за докажем, че това е така. Базовият случай $n = 0$ е ясен. Да предположим, че f_n има горния вид. Тогава за f_{n+1} ще имаме последователно:

$$f_{n+1}(x) \overset{(2.9)}{\simeq} \Gamma(f_n)(x) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2.f_n(x-1), & \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

$$\overset{\text{и.х. } f_n}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2.2^{x-1}, & \text{ако } x > 0 \ \& \ x-1 < n \\ \neg!, & \text{ако } x - 1 \geq n \end{cases} \simeq \begin{cases} 2^x, & \text{ако } \ x < n+1 \\ \neg!, & \text{иначе}, \end{cases}$$

което потвърждава нашата хипотеза за f_{n+1}. Сега остана да намерим границата $\bigcup_n f_n$ на редицата $f_0, f_1, \ldots, f_n \ldots$.

Интуитивно е ясно, че тази редица трябва да клони към 2^x, защото f_n е рестрикцията на 2^x върху множеството $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, но да го докажем все пак.

Наистина, да означим с f точната горна граница на редицата $\{f_n\}_n$. По определение

$$f(x) \simeq y \iff \exists n \ f_n(x) \simeq y.$$

Да фиксираме произволно x и да изберем $n = x+1$. Понеже $Dom(f_n) = \{0, \ldots, n-1\}$, то $x \in Dom(f_n)$. Но там, където е дефинирана, f_n се държи като 2^x; в частност, за нашето x ще имаме, че $f_n(x) = 2^x$. Тогава и $f(x)$ ще е 2^x. Но x беше произволно, следователно за всяко x, $f(x) = 2^x$, или все едно, $f_\Gamma(x) = 2^x$, съгласно (2.10).

$\square$

б)

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.f(x-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Отново искаме да намерим *явния вид* на всяка функция от редицата от апроксимации $f_0, f_1, \ldots$, чиято граница се явява f_Γ.

Започваме с първата апроксимация f_1:

$$f_1(x) \simeq \Gamma(\emptyset^{(1)})(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.\emptyset^{(1)}(x-1), & \text{ако } x > 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ \neg!, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

За следващата апроксимация f_2 ще имаме:

$$f_2(x) \simeq \Gamma(f_1)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.f_1(x-1), & \text{иначе} \end{cases} \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 1.1, & \text{ако } x = 1 \\ \neg!, & \text{ако } x > 1. \end{cases}$$

Функцията f_2 можем да препишем още като

$$f_2(x) \simeq \begin{cases} x!, & \text{ако } x < 2 \\ \neg!, & \text{иначе,} \end{cases}$$

което ни дава идея какъв би могъл да е общият вид на f_n:

$$f_n(x) \simeq \begin{cases} x!, & \text{ако } x < n \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ще използваме индукция относно $n \in \mathbb{N}$, за да се убедим, че това е така.

На практика вече проверихме случаите $n = 0, 1$ и 2. Да предположим сега, че f_n има горния вид. Тогава за f_{n+1} ще имаме последователно:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) \;&\simeq\; \Gamma(f_n)(x) \;\simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.f_n(x-1), & \text{ако } x > 0 \end{cases} \\ &\overset{\text{и.х. } f_n}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.(x-1)!, & \text{ако } x > 0 \;\&\; x-1<n \\ \neg!, & \text{ако } x-1 \geq n \end{cases} \simeq \begin{cases} x!, & \text{ако } x<n+1 \\ \neg!, & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned}$$

и значи индукционната хипотеза се потвърждава и за $n+1$. Остана да съобразим, че границата на редицата $\{f_n\}_n$ е функцията $x!$, което се показва с разсъждения, подобни на тези от предишния пример.

И в двата примера по-горе наблюдавахме, че n-тата апроксимация на f_Γ е с дефиниционна област множеството $\{0, \dots, n-1\}$. Това беше, защото рекурсията при тях беше примитивна, т.е. $\Gamma(f)(x)$ се дефинираше чрез $f(x-1)$. В следващата задача, обаче, $Dom(f_n)$ е по-голямо множество.

Задача 2.18. (зад. 4а) от Домашно №2.) С помощта на теоремата на Кнастер-Тарски намерете най-малката неподвижна точка на оператора

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x \leq 1 \\ x.f(x-2), & \text{иначе;} \end{cases}$$

Решение. Отново търсим явния вид на всяка от апроксимациите $f_0, f_1, \dots$ на f_Γ. Целта ни е да покажем, че $f_\Gamma = \lambda x.x!!$, където

$$x!! \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 1.3\dots x, & \text{ако } x \text{ е нечетно} \\ 2.4\dots x, & \text{ако } x > 0 \text{ е четно.} \end{cases}$$

Започваме с първата апроксимация f_1:

$$f_1(x) \simeq \Gamma(\emptyset^{(1)})(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x \leq 1 \\ x.\emptyset^{(1)}(x-2), & \text{ако } x > 1 \end{cases} \simeq \begin{cases} x!!, & \text{ако } x < 2 \\ \neg!, & \text{ако } x \geq 2. \end{cases}$$

За следващата апроксимация f_2 ще имаме:

$$f_2(x) \simeq \Gamma(f_1)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x \leq 1 \\ x.\underbrace{f_1(x-2),}_{(x-2)!! \text{ за } x-2<2} & \text{ако } x > 1 \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} x!!, & \text{ако } x \leq 1 \\ x.(x-2)!!, & \text{ако } x > 1 \ \& \ x-2 < 2 \\ \neg!, & \text{ако } x-2 \geq 2 \end{cases} \simeq \begin{cases} x!!, & \text{ако } x < 4 \\ \neg!, & \text{ако } x \geq 4. \end{cases}$$

Хипотеза за общия вид на f_n:

$$f_n(x) \simeq \begin{cases} x!!, & \text{ако } x < 2n \\ \neg!, & \text{ако } x \geq 2n. \end{cases}$$

Ще използваме индукция относно $n \in \mathbb{N}$, за да се убедим, че това е така. На практика вече проверихме случаите $n = 0, 1$ и 2. Да предположим сега, че f_n има горния вид. Тогава за f_{n+1} можем да запишем:

$$f_{n+1}(x) \simeq \Gamma(f_n)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x \leq 1 \\ x. \underbrace{f_n(x-2),}_{(x-2)!! \text{ за } x-2<2n} & \text{ако } x > 1 \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} x!!, & \text{ако } x \leq 1 \\ x.(x-2)!!, & \text{ако } x > 1 \ \& \ x-2 < 2n \\ \neg!, & \text{ако } x-2 \geq 2n \end{cases} \simeq \begin{cases} x!!, & \text{ако } x < 2(n+1) \\ \neg!, & \text{ако } x \geq 2(n+1). \end{cases}$$

Индукционната хипотеза се потвърди и за $n+1$. Остана да съобразим, че границата на редицата $\{f_n\}_n$ е функцията $x!!$, което следва съвсем директно от дефиницията за точна горна граница (2.11). $\square$

Задача 2.19. Като използвате теоремата на Кнастер-Тарски, намерете най-малката неподвижна точка на оператора

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ (f(\frac{x}{2}))^2, & \text{ако } x > 0 \text{ е четно} \\ 2(f(\frac{x-1}{2}))^2, & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

Решение. Ще действаме по схемата от предишната задача: най-напред ще намерим явния вид на всяка от апроксимациите $f_0, f_1, \ldots$, а после ще намерим границата на тази редица, която съгласно (2.10) е точно f_Γ.

По дефиниция $f_0 = \emptyset^{(1)}$, а за f_1 получаваме последователно:

$$f_1(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} \Gamma(f_0)(x) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ f_0^2(\frac{x}{2}), & \text{ако } x > 0 \text{ е четно} \\ 2f_0^2(\frac{x-1}{2}), & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases} \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ \neg!, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Като имаме предвид явния вид на f_1, за f_2 получаваме:

$$f_2(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} \Gamma(f_1)(x) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ f_1^2(\frac{x}{2}), & \text{ако } x > 0 \text{ е четно} \\ 2f_1^2(\frac{x-1}{2}), & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases} \overset{\text{деф } f_1}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2.1^2, & \text{ако } x = 1 \\ \neg!, & \text{ако } x > 1. \end{cases}$$

Отново можем да препишем f_2 във вида

$$f_2(x) \simeq \begin{cases} 2^x, & \text{ако } x < 2 \\ \neg!, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и тя изглежда абсолютно като функцията f_2 от *Задача* 2.17 а). Да не се подвеждаме, обаче; следваща апроксимация f_3 вече изглежда по-различно:

$$f_3(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} \Gamma(f_2)(x) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ f_2^2(\frac{x}{2}), & \text{ако } x > 0 \text{ е четно} \\ 2f_2^2(\frac{x-1}{2}), & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases} \overset{\text{деф } f_2}{\simeq} \begin{cases} 2^x, & \text{ако } x < 4 \\ \neg!, & \text{иначе,} \end{cases}$$

Хипотезата ни за $f_n, n \geq 1$, е такава:

$$f_n(x) \simeq \begin{cases} 2^x, & \text{ако } x < 2^{n-1} \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вече наблюдавахме, че при $n = 1, 2, 3$, f_n имаше този вид. Приемаме, че и за произволно n това е така и пресмятаме внимателно f_{n+1}:

$$f_{n+1}(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} \Gamma(f_n)(x) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ f_n^2(\frac{x}{2}), & \text{ако } x > 0 \text{ е четно} \\ 2f_n^2(\frac{x-1}{2}), & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

$$\overset{\text{и.х. } f_n}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ (2^{\frac{x}{2}})^2, & \text{ако } x > 0 \text{ е четно } \& \ \frac{x}{2} < 2^{n-1} \\ 2(2^{\frac{x-1}{2}})^2, & \text{ако } x \text{ е нечетно } \& \ \frac{x-1}{2} < 2^{n-1} \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2^x, & \text{ако } x > 0 \text{ е четно } \& \ x < 2^n \\ 2^x, & \text{ако } x \text{ е нечетно } \& \ x - 1 < 2^n \end{cases} \qquad \simeq \begin{cases} 2^x, & \text{ако } x < 2^n \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

За последната еквивалентност използвахме, че при нечетно x имаме:

$$x - 1 < 2^n \implies x \leq 2^n \implies x < 2^n.$$

Сега с разсъждения, съвсем подобни на тези от *Задача* 2.17 а) показваме, че и тази редица $\{f_n\}_n$ има граница 2^x.

Забележете експоненциалната скорост, с която расте броят на елементите на $Dom(f_n)$. Това, разбира се, е в тясна връзка с логаритмичната сложност на бързия алгоритъм за степенуване, тъй като $Dom(f_n)$ на практика дава тези входове, за които рекурсивната програма, определена от оператора, спира за $\leq n$ рекурсивни обръщения. □

По подобен начин решете и следващата задача:

Задача 2.20. С помощта на теоремата на Кнастер-Тарски да се намери най-малката неподвижна точка на оператора

$$\Gamma(f)(x, y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } y = 0 \\ (f(x, \frac{y}{2}))^2, & \text{ако } y > 0 \text{ е четно} \\ x.(f(x, \frac{y-1}{2}))^2, & \text{ако } y \text{ е нечетно.} \end{cases}$$

Задача 2.21. С теоремата на Кнастер Тарски намерете най-малката неподвижна точка на оператора

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x < y \\ f(x-y,y)+1, & \text{ако } x \geq y. \end{cases}$$

Решение. Отново искаме да опишем общия вид на n-тата апроксимация f_n. Имайки предвид, че $f_0 = \emptyset^{(2)}$, за f_1 ще имаме:

$$f_1(x,y) \overset{(2.9)}{\simeq} \Gamma(f_0)(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x < y \\ f_0(x-y,y)+1, & \text{ако } x \geq y \end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x < y \\ \neg!, & \text{ако } x \geq y. \end{cases}$$

Както беше и в примерите по-горе, f_1 е дефинирана в точките, които са базови за оператора (в случая това са тези $(x,y)\colon x < y$). Това все още не може да ни ориентира за общия вид на f_n, затова продължаваме с експериментите:

$$f_2(x,y) \overset{(2.9)}{\simeq} \Gamma(f_1)(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x < y \\ f_1(x-y,y)+1, & \text{ако } x \geq y \end{cases}$$

$$\overset{\text{деф } f_1}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x < y \\ 0+1, & \text{ако } x \geq y \ \&\ x-y < y \\ \neg!, & \text{в останалите случаи} \end{cases} \simeq \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & \text{ако } y \neq 0 \ \&\ \lfloor \frac{x}{y} \rfloor < 2 \\ \neg!, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

За последната еквивалентност използвахме, че

$$y \leq x < 2y \iff 1 \leq \frac{x}{y} < 2 \iff \lfloor \frac{x}{y} \rfloor = 1.$$

Освен това условията $x < y$ и $x - y < y$ ни гарантират, че $y \neq 0$ и следователно частното $\frac{x}{y}$ е дефинирано.

Звучи правдоподобно да предположим, че f_n има следния вид:

$$f_n(x,y) \simeq \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & \text{ако } y \neq 0 \ \&\ \lfloor \frac{x}{y} \rfloor < n \\ \neg!, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

Наистина, да приемем, че това е така, и да видим какво можем да кажем за f_{n+1}:

$$f_{n+1}(x,y) \overset{(2.9)}{\simeq} \Gamma(f_n)(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x < y \\ f_n(x-y,y)+1, & \text{ако } x \geq y \end{cases}$$

$$\overset{\text{и.х. } f_n}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x < y \\ \lfloor \frac{x-y}{y} \rfloor + 1, & \text{ако } x \geq y \ \&\ y \neq 0 \ \&\ \lfloor \frac{x-y}{y} \rfloor < n \\ \neg!, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & \text{ако } y \neq 0 \ \& \ \lfloor \frac{x}{y} \rfloor = 0 \\ \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & \text{ако } y \neq 0 \ \& \ 1 \leq \lfloor \frac{x}{y} \rfloor < n+1 \\ \neg!, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & \text{ако } y \neq 0 \ \& \ \lfloor \frac{x}{y} \rfloor < n+1 \\ \neg!, & \text{в останалите случаи,} \end{cases}$$

с което индуктивната ни хипотеза се потвърди. В преобразованията погоре използвахме наблюдението, че при $x \geq y > 0$:

$$\lfloor \frac{x-y}{y} \rfloor = \lfloor \frac{x}{y} - 1 \rfloor = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor - 1.$$

Остана да намерим границата на редицата $f_0, f_1, \ldots$. Нека отново

$$f = \bigcup_n f_n.$$

Да фиксираме произволни x, y, като $y \neq 0$. Тогава $\lfloor \frac{x}{y} \rfloor$ е определено. Да изберем n така, че $\lfloor \frac{x}{y} \rfloor < n$ (бихме могли направо да вземем $n := \lfloor \frac{x}{y} \rfloor + 1$). Тогава точката (x, y) принадлежи на $Dom(f_n)$ и $f_n(x, y) = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$. Сега от дефиницията на точна горна граница (2.11) ще имаме, че и $f(x, y) = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$.

Ако $y = 0$, то каквото и да е x, от общия вид на f_n виждаме, че $f_n(x, 0)$ не е дефинирано, като това е за всяко n. Тогава е ясно, че и граничната функция f няма да е дефинирана в $(x, 0)$: ако допуснем, че съществува $z : f(x, 0) \simeq z$, това би означавало, съгласно (2.11), че непременно за някое n и $f_n(x, 0) \simeq z$ — противоречие.

Финално, за $f_\Gamma = \bigcup_n f_n$ получаваме:

$$f_\Gamma(x, y) \simeq \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & \text{ако } y > 0 \\ \neg!, & \text{ако } y = 0. \end{cases}$$

□

2.4.3 Задачи от изпити, които могат да се решат с теоремата на Кнастер-Тарски

Задача 2.22. (Писмен изпит, 01.07.2018, спец. И и КН)
Да разгледаме следния компактен оператор $\Gamma\colon\ \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$:

$$\Gamma(f)(x, y) \simeq \begin{cases} 7, & \text{ако } f(x, y) \simeq y \\ f(x+1, f(x, y)), & \text{ако } f(x, y) < y \\ f(f(x+1, y), y), & \text{ако } f(x, y) > y \\ \neg!, & \text{ако } \neg! f(x, y). \end{cases}$$

а) Намерете най-малката неподвижна точка на оператора Γ.

б) Ако Γ има други неподвижни точки, то посочете поне една.

Решение. Тази задача изглежда ужасно, но всъщност е съвсем тривиална. За подточка **а)** прилагаме рутинно процедурата от теоремата на Кнастер-Тарски: тръгвайки от $f_0 = \emptyset^{(2)}$, за f_1 ще имаме:

$$f_1(x,y) \simeq \Gamma(f_0)(x,y) \simeq \begin{cases} 7, & \text{ако } f_0(x,y) \simeq y \\ f_0(x+1, f_0(x,y)), & \text{ако } f_0(x,y) < y \\ f_0(f_0(x+1,y),y), & \text{ако } f_0(x,y) > y \\ \neg!, & \text{ако } \neg! f_0(x,y). \end{cases}$$

И тук ни очаква изненада — f_1 също е $\emptyset^{(2)}$! Но това автоматично означава, че за всяко n, f_n ще е $\emptyset^{(2)}$, и тогава $f_\Gamma = \bigcup_n f_n$ също ще е $\emptyset^{(2)}$.

За подточка **б)** отново не се налага да се замисляме много. Лесно се вижда, че друга неподвижна точка на този оператор е функцията $\lambda x, y.7$. Дали Γ има и други неподвижни точки? □

Следващите две задачи са много подобни на горната. Убедете се сами:

Задача 2.23. (Второ контролно, 10.05.2019, спец. И) Докажете, че операторът $\Gamma : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2$, дефиниран както следва:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} x, & \text{ако } f(x,y) \simeq 0 \\ f(x+1,y), & \text{ако } f(x,y) > 0 \\ \neg!, & \text{ако } \neg! f(x,y), \end{cases}$$

има безброй много неподвижни точки.

Задача 2.24. (Първо контролно, 17.04.2018, спец. И)
Да разгледаме оператора $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$, където:

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} f^{x+1}(x+1), & \text{ако } x \text{ е четно} \\ 3, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тук $f^0(x) = x$, а $f^{i+1}(x) \simeq f(f^i(x))$. Намерете f_Γ.

Задача 2.25. (Писмен изпит, 26.08.2018, спец. И и КН)
Да разгледаме следния компактен оператор $\Gamma : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2$, където:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ f(x, y+1) + 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

а) Намерете най-малката неподвижна точка на оператора Γ.

б) Докажете, че Γ има единствена неподвижна точка.

Решение. Задачата е формулирана в две подточки най-вече за хора, които ще използват теоремата на Кнастер-Тарски.

I начин. Можем да я решим само със знания от училищната математика, като при това докажем и двете неща — че Γ има единствена неподвижна точка и тя е функцията … Наистина, нека f е неподвижна точка на Γ, с други думи, за f е изпълнено:

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ f(x,y+1)+1, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.12}$$

Не е трудно да забележим, че при $x \geq y$ f връща разликата $x - y$. Ще го докажем с индукция относно $k = x - y$. Да означим

$$P(k) \overset{\text{деф}}{\iff} \forall x \forall y (x \geq y \ \&\ x - y = k \implies f(x,y) \simeq x - y).$$

Ако $k = 0$, т.е. $x = y$, от избора на f веднага получаваме $f(x,y) \overset{(2.12)}{\simeq} 0 = x - y$ и значи $P(0)$ е в сила.

Да приемем, че за някое k е вярно $P(k)$.

Сега да вземем произволни x, y, за които $x - y = k + 1$. Тогава

$$f(x,y) \overset{(2.12)}{\simeq} f(\underbrace{x, y+1}_{x-(y+1)=k}) + 1 \overset{\text{и.х.}}{=} x - (y+1) + 1 = x - y,$$

с което показахме, че и $P(k+1)$ е изпълнено. Дотук показахме, че за всеки две числа x, y, такива че $x \geq y$, е изпълнено $f(x,y) = x - y$.

Сега ще покажем, че при $x < y$, $f(x,y)$ не е дефинирана. Наистина, да допуснем, че $f(x,y) \simeq k$ за някои x, y, такива че $x < y$. От избора на f имаме:

$$f(x,y) \overset{(2.12)}{\simeq} f(x,y{+}1){+}1 \overset{(2.12)}{\simeq} \dots \overset{(2.12)}{\simeq} f(x,y{+}n){+}\underbrace{1{+}\dots{+}1}_{n \text{ пъти}} \simeq f(x,y{+}n){+}n$$

и това е за всяко n. В частност, при $n = k + 1$ ще имаме

$$k \simeq f(x,y) \simeq \underbrace{f(x,y+k+1)}_{\geq 0} + k + 1.$$

Ясно е, че $f(x, y + k + 1)$ трябва да има стойност, която, разбира се, е неотрицателна. Но тогава горното равенство очевидно не може да е в сила — противоречие, което показва, че $\neg ! f(x,y)$ при $x < y$.

Да обобщим: получихме, че *произволната* неподвижна точка f на Γ трябва да изглежда по следния начин:

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} x - y, & \text{ако } x \geq y \\ \neg !, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.13}$$

Следователно Γ има единствена неподвижна точка и това е f.

II начин. Функцията f_Γ можем да намерим и със стандартната техника от теоремата на Кнастер-Тарски. Разсъжденията са много подобни на тези от *Задача* 2.21: тръгвайки от $f_0 = \emptyset^{(2)}$, за f_1 ще имаме:

$$f_1(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ f_0(x,y+1)+1, & \text{иначе} \end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ \neg !, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Сега за апроксимацията f_2 получаваме:

$$f_2(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \Gamma(f_1)(x,y) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ f_1(x,y+1)+1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\stackrel{\text{деф } f_1}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ 0+1, & \text{ако } x+1 = y \\ \neg !, & \text{в останалите случаи} \end{cases} \simeq \begin{cases} x-y, & \text{ако } 0 \leq x-y < 2 \\ \neg !, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

Да приемем, че за произволно n, f_n изглежда по подобен начин:

$$f_n(x,y) \simeq \begin{cases} x-y, & \text{ако } 0 \leq x-y < n \\ \neg !, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

Базата на индукцията я имаме, така че пристъпваме директно към проверката за f_{n+1}:

$$f_{n+1}(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \Gamma(f_n)(x,y) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ f_n(x,y+1)+1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\stackrel{\text{и.х. } f_n}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ x-(y+1)+1, & \text{ако } x \neq y \ \& \ 0 \leq x-(y+1) < n \\ \neg !, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} x-y, & \text{ако } 0 \leq x-y < n+1 \\ \neg !, & \text{в останалите случаи,} \end{cases}$$

което потвърждава индуктивното ни предположение. С разсъждения, подобни на тези от решението на *Задача* 2.21 показваме, че границата на редицата $f_0, f_1, \ldots$ е точно функцията, дефинирана с (2.13).

Остана да покажем, че операторът Γ има единствена неподвижна точка. Можем да разсъждаваме така: да приемем, че f и g са неподвижни точки на Γ, т.е.

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ f(x,y+1)+1, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \text{и}$$

$$g(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ g(x,y+1)+1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

С индукция относно $k = x - y$ показваме, че за всички x, y, такива че $x \geq y$,

$$f(x,y) \simeq g(x,y).$$

Наистина, при $k = 0$ имаме $x = y$ и тогава $f(x,y) = 0 = g(x,y)$. Да приемем, че

$$\forall x \forall y (x \geq y \;\&\; x - y = k \implies f(x,y) \simeq g(x,y)).$$

Тогава за $k+1$ ще имаме

$$f(x,y) \simeq f(x,y+1)+1 \overset{\text{и.х.}}{\simeq} g(x,y+1)+1 \simeq g(x,y).$$

Когато $x < y$, разсъждавайки както при начин I по-горе, се убеждаваме, че $\neg !f(x,y)$ и $\neg !g(x,y)$. Така за всяко x, y ще е изпълнено $f(x,y) \simeq g(x,y)$, и следователно $f = g$.

$\square$

Задача 2.26. (Писмен изпит, 14.06.2016, спец. И, гр.А) Да разгледаме операторите $\Gamma_{1,2} : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2$, където:

$$\Gamma_1(f)(x,y) \simeq \begin{cases} f(x, y-x), & \text{ако } x \leq y \\ f(x-y, x), & \text{ако } x > y \end{cases}$$

$$\Gamma_2(f)(x,y) \simeq \begin{cases} f(x, y-x), & \text{ако } x < y \\ f(x-y, x), & \text{ако } x > y \\ 0, & \text{ако } x = y. \end{cases}$$

За всеки от двата оператора:

а) Намерете най-малката неподвижна точка.

б) Кажете дали имат други неподвижни точки.

Обосновете отговорите си.

Следващата задача формално е за доказване на свойство на f_Γ, но на практика се решава с теоремата на Кнастер-Тарски. Да се убедим:

Задача 2.27. (Генерално контролно, 13.06.2021.) Нека $\Gamma\colon \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ е операторът, зададен чрез равенството:

$$\Gamma(f)(x) \;\simeq\; \begin{cases} x+1, & \text{ако } \; x < 2 \\ \sum_{i=f(x-2)}^{f(x-1)} f(i), & \text{ако } \; x \geq 2. \end{cases}$$

1) Докажете, че Γ е компактен.

2) Докажете, че ако f_Γ е най-малката неподвижна точка на оператора Γ, то:

$$\forall x \in \mathbb{N}\ (!f_\Gamma(x) \implies f_\Gamma(x) \text{ е число от редицата на Фибоначи}).$$

Забележка: Има се предвид следната дефиниция на редицата $\{a_n\}_n$ на Фибоначи:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Решение. Дефиницията на оператора Γ се разбира така:

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} x+1, & \text{ако } \ x < 2 \\ \sum_{i=f(x-2)}^{f(x-1)} f(i), & \text{ако } \ x \geq 2 \ \&\ !f(x-2) \ \&\ !f(x-1) \ \&\ f(x-2) \leq f(x-1) \\ \neg!, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

1) Да покажем, че този оператор е компактен. Най-напред ще съобразим, че Γ е монотонен. За целта да вземем две функции f и g от $\mathcal{F}_1$, такива, че $f \subseteq g$. Трябва да покажем, че $\Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)$.

Наистина, нека $x, y \in \mathbb{N}$ са такива че $\Gamma(f)(x) \simeq y$. Искаме да покажем, че и $\Gamma(g)(x) \simeq y$.

1 сл. $x < 2$. Тогава $\Gamma(f)(x) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{=} x+1 = y$, така че и $\Gamma(g)(x) = x+1 = y$.

2 сл. $x \geq 2$. Ние приехме, че $\Gamma(f)(x) \simeq y$, което съгласно дефиницията на Γ означава, че $!f(x-2)\ \&\ !f(x-1)\ \&\ f(x-2) \leq f(x-1)$ и

$$\sum_{i=f(x-2)}^{f(x-1)} f(i) \simeq\ y.$$

В частност, $f(i)$ ще е дефинирана за всяко $i = f(x-2), \dots, f(x-1)$. Понеже $f \subseteq g$, то и $g(i)$ ще е дефинирана за всяко такова i и освен това

$$g(i) \simeq f(i) \ \text{ за всяко } \ i = f(x-2),\ \dots\ , f(x-1).$$

Разбира се, ще имаме също, че $g(x-2) \simeq f(x-2)$ и $g(x-1) \simeq f(x-1)$. Лесно се вижда, че в такъв случай $\Gamma(g)(x) \simeq \sum_{i=g(x-2)}^{g(x-1)} g(i)$, откъдето

$$\Gamma(g)(x)\ \simeq \sum_{i=g(x-2)}^{g(x-1)} g(i) \simeq \sum_{i=f(x-2)}^{f(x-1)} f(i) \simeq\ y.$$

Тъй като x и y бяха произволни, от казаното по-горе можем да заключим, че $\Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)$.

Сега нека $\Gamma(f)(x) \simeq y$ за някои x и y. Ще покажем, че

$$\exists\theta\ (\theta \subseteq f\ \&\ \theta\ \text{ е крайна }\ \&\ \Gamma(\theta)(x) \simeq y). \tag{2.14}$$

Отново разглеждаме двата случая от дефиницията на Γ:

1 сл. $x < 2$. Тук $\Gamma(f)(x)$ не зависи от f, така че за $\theta = \emptyset^{(1)}$ условието (2.14) очевидно ще е в сила.

2 сл. $x \geq 2$. По-горе видяхме, че $\Gamma(f)(x) \simeq y$ в този случай влече $!f(x-2)\ \&\ !f(x-1)\ \&\ f(x-2) \leq f(x-1)$ и $\sum_{i=f(x-2)}^{f(x-1)} f(i) \simeq y$.

Да означим $k = f(x-2)$, $n = f(x-1)$ и да положим

$$\theta \ := \ f \restriction \{x-2, x-1, k, k+1, \dots, n\}.$$

Ясно е, че тази θ е крайна функция и $\theta \subseteq f$. Понеже f е дефинирана във всички точки от множеството $\{x-2, x-1, k, k+1, \dots, n\}$, то и θ ще е дефинирана в тези точки и ще има същите стойности като f. Но тогава

$$\Gamma(\theta)(x) \ \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \sum_{i=\theta(x-2)}^{\theta(x-1)} \theta(i) \ \simeq \sum_{i=f(x-2)}^{f(x-1)} f(i) \ \simeq \ y.$$

Така проверихме, че условието (2.14) е изпълнено за произволни x и y, което завършва доказателството за компактността на оператора Γ.

2) Нека f е произволна неподвижна точка на Γ, т.е. за нея е изпълнено:

$$f(x) \simeq \begin{cases} x+1, & \text{ако } \ x < 2 \\ \sum_{i=f(x-2)}^{f(x-1)} f(i), & \text{ако } \ x \geq 2. \end{cases} \tag{2.15}$$

Виждаме, че при $x = 2$ за тази f ще имаме:

$$f(2) \stackrel{(2.15)}{\simeq} \Gamma(f)(2) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \sum_{i=f(0)}^{f(1)} f(i) \stackrel{(2.15)}{\simeq} \sum_{i=1}^{2} f(i) \ \simeq f(1) + f(2).$$

С други думи, за f трябва да е изпълнено $f(2) \simeq f(1) + f(2)$. Тази "лоша" рекурсия ни подсказва, че най-вероятно $f_\Gamma(2)$ няма да е дефинирана, а оттук няма да са дефинирани и $f_\Gamma(x)$ за всяко $x \geq 2$. Но да се убедим формално, че това е така, като приложим теоремата на Кнастер-Тарски, според която

$$f_\Gamma \ = \ \bigcup_n \Gamma^n(\emptyset^{(1)}).$$

Да означим $f_n := \Gamma^n(\emptyset^{(1)})$. Тогава

$$f_1(x) \simeq \Gamma(\emptyset^{(1)})(x) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} x+1, & \text{ако } \ x < 2 \\ \neg!, & \text{ако } \ x \geq 2. \end{cases} \tag{2.16}$$

Оттук за $f_2 = \Gamma(f_1)$ ще получим:

$$f_2(x) \simeq \begin{cases} x+1, & \text{ако } \ x < 2 \\ \sum_{i=f_1(x-2)}^{f_1(x-1)} f_1(i), & \text{ако } \ x \geq 2. \end{cases} \overset{(2.16)}{\simeq} \begin{cases} x+1, & \text{ако } \ x < 2 \\ \sum_{i=1}^{2} f_1(i), & \text{ако } \ x = 2 \\ \neg!, & \text{ако } \ x > 2 \end{cases} \overset{(2.16)}{\simeq} \begin{cases} x+1, & \text{ако } \ x < \\ f_1(1) + \underbrace{f_1(2)}_{\neg!}, & \text{ако } \ x = \\ \neg!, & \text{ако } \ x > \end{cases}$$

или начисто:

$$f_2(x) \simeq \begin{cases} x+1, & \text{ако } \ x < 2 \\ \neg!, & \text{ако } \ x \geq 2. \end{cases}$$

Получихме че двете апроксимации f_1 и f_2 са равни, откъдето, както знаем, следва, че $f_\Gamma = f_1$, т.е.

$$f_\Gamma(x) \simeq \begin{cases} x+1, & \text{ако } \ x < 2 \\ \neg!, & \text{ако } \ x \geq 2. \end{cases}$$

Но тази функция очевидно удовлетворява условието от подточка **2)**. $\square$

2.5 Индуктивен принцип на Скот

Синоними:

Индуктивен принцип на Скот и Де Бакер

Правило/принцип за μ-индукция на Скот

Индукционно правило на Скот

На английски ще го срещнете и като

Scott's fixed-point induction principle

Индуктивният принцип на Скот е *метод за доказване на свойства на най-малките неподвижни точки на непрекъснати оператори* в области на Скот. Сега ще го прилагаме за оператори над ОС $(\mathcal{F}_n, \subseteq, \emptyset^{(n)})$, а по-нататък — за оператори в произволни области на Скот. И тъй като денотационната семантика на рекурсивните програми се дефинира посредством н.м.н.т. на такива оператори, то индуктивният принцип на Скот всъщност се явява *метод за доказателство на коректност на рекурсивни програми.* Както ще съобразим по-долу, с правилото на Скот ще можем да доказваме само *частична коректност* на такива програми. Това не бива да ни разочарова — все пак, никое правило не е универсално ⌣̈. А и за доказване на *завършване* на програми вече имаме позната техника — *индукцията над фундирани множества*, която, оказва се, работи перфектно и в случая на рекурсивни програми.

Да си припомним твърденията от лекцията за правило на Скот, които ще ни трябват за задачите.

Индуктивен принцип на Скот. Нека $\Gamma : \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathcal{F}_n$ е непрекъснат (компактен) оператор, а P е свойство в $\mathcal{F}_n$, удовлетворяващо условията:

1) $P(\emptyset^{(n)})$;

2) за всяка $f \in \mathcal{F}_n$ е вярно, че $P(f) \implies P(\Gamma(f))$;

3) свойството P е непрекъснато.

Тогава P е вярно за най-малката неподвижна точка f_Γ на оператора Γ.

Тук по определение свойството P в множеството $\mathcal{F}_n$ е *непрекъснато*, ако за всяка монотонно растяща редица $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \dots$ в $\mathcal{F}_n$ е изпълнено:

$$\forall i P(f_i) \implies P(\bigcup_i f_i). \tag{2.17}$$

С други думи, P е непрекъснато, ако то "издържа" на граничен преход.

2.5.1 Свойства от тип частична и тотална коректност

По-голямата част от задачите, които ще разглеждаме, ще са за един специален вид свойства — т.нар. свойства от тип частична коректност. Да фиксираме някакво входно условие $I(x_1, \dots, x_n)$ и изходно условие $O(x_1, \dots, x_n, y)$. Свойството от тип *частична коректност* $P_{p.c.}$ в $\mathcal{F}_n$ (относно дадените I и O) се определя с еквивалентността:

$$P_{p.c.}(f) \iff \forall x_1 \dots \forall x_n(\ (I(\bar{x})\ \&\ !f(\bar{x})) \implies O(\bar{x}, f(\bar{x}))).$$

Тук $\bar{x}$ е съкращение за $(x_1, \dots, x_n)$.

В някои от задачите входното условие $I(\bar{x})$ ще е "истина" за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$, или все едно — няма да има специално изискване за входните данни. Тогава горното свойство за частична коректност изглежда по-просто:

$$P_{p.c.}(f) \iff \forall x_1 \dots \forall x_n(!f(\bar{x}) \implies O(\bar{x}, f(\bar{x}))).$$

От лекциите знаем, че всяко свойство от тип частична коректност е непрекъснато. Освен това, всяко такова свойство тривиално е вярно за $\emptyset^{(n)}$:

$$P_{p.c.}(\emptyset^{(n)}) \iff \forall x_1 \dots \forall x_n(\ \underbrace{\underbrace{(I(\bar{x})\ \&\ \underbrace{!\emptyset^{(n)}(\bar{x})}_{false})}_{false} \implies O(\bar{x}, \emptyset^{(n)}(\bar{x}))}_{true}\ ).$$

Тъй като предпоставката на импликацията е винаги "лъжа", то цялата импликация е винаги "истина", т.е. първото от трите условия в правилото на Скот $P_{p.c.}(\emptyset^{(n)})$ е вярно за всяко свойство от тип частична коректност.

Точно обратното е положението със свойствата от тип *тотална коректност* $P_{t.c.}$, които които имат следния общ вид:

$$P_{t.c.}(f) \iff \forall x_1 \ldots \forall x_n (I(\bar{x}) \implies (\ !f(\bar{x}) \ \& \ O(\bar{x}, f(\bar{x}))\ )\ ).$$

При тях $P_{t.c.}(\emptyset^{(n)})$ е винаги "лъжа", защото

$$P_{t.c.}(\emptyset^{(n)}) \iff \underbrace{\forall x_1 \ldots \forall x_n (I(\bar{x}) \implies \underbrace{(\ \underbrace{!(\emptyset^{(n)}(\bar{x})}_{false} \ \& \ O(\bar{x}, (\emptyset^{(n)}(\bar{x}))\ )}_{false}\ )}_{false}.$$

Изводът, разбира се е, че тези свойства не могат да се доказват с индуктивния принцип на Скот. В частност, така не може да се показва и *завършване* (*терминация*) при условие I, защото свойството P_{term} е частен случай на $P_{t.c.}$:

$$P_{term}(f) \iff \forall x_1 \ldots \forall x_n (I(\bar{x}) \implies !f(\bar{x})).$$

Свойства от този тип ще доказваме с индукция по някаква фундирана наредба, която обикновено се вижда лесно от дефиницията на Г. Разбира се, при някои от задачите със структурна индукция можем да доказваме директно свойства от тип тотална коректност.

Тъй като проверката за компактност беше тема на предишно упражнение, във всички задачи от този раздел ще приемаме без доказателство, че съответният оператор е компактен и следователно можем да прилагаме индуктивния принцип на Скот.

2.5.2 Задачи върху индуктивния принцип на Скот

Задача 2.28. Даден е операторът $\Gamma : \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$, който се дефинира по следния начин:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x < y \\ f(x-y, y)+1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нека f_Γ е най-малката неподвижна точка на оператора.

а) Докажете, че за f_Γ е изпълнено условието:

$$\forall x \forall y > 0 (!f_\Gamma(x,y) \implies f_\Gamma(x,y) \simeq \lfloor \frac{x}{y} \rfloor).$$

б) Докажете, че $\forall x \forall y > 0 \ !f_\Gamma(x,y)$.
в) Докажете, че $\forall x \ \neg !f_\Gamma(x,0)$.

Решение. **а)** Да означим с P свойството от условието на задачата:

$$P(f) \stackrel{\text{деф}}{\iff} \forall x \forall y > 0 (!f(x,y) \implies f(x,y) \simeq \lfloor \frac{x}{y} \rfloor).$$

За да покажем, че $P(f_\Gamma)$ е вярно, е достатъчно да проверим трите изисквания на правилото на Скот:

1) $P(\emptyset^{(2)})$;

2) $P(f) \implies P(\Gamma(f))$ за всяка $f \in \mathcal{F}_2$;

3) P е непрекъснато.

Свойството P можем да препишем като:

$$P(f) \iff \forall x \forall y (\underbrace{y > 0}_{I(x,y)} \ \& \ !f(x,y) \implies \underbrace{f(x,y) \simeq \lfloor \frac{x}{y} \rfloor}_{O(x,y,f(x,y))}),$$

откъдето се вижда, че то е свойство от тип "частична коректност и съгласно това, което казахме по-горе, P е непрекъснато свойство. За такива свойства видяхме още, че условието $P(\emptyset^{(2)})$ винаги е вярно.

Следователно остана да проверим само второто изискване от правилото на Скот, което впрочем е единственото, в което участва операторът Γ.

Наистина, да вземем произволна функция $f \in \mathcal{F}_2$ и да приемем, че за нея $P(f)$ е вярно, т.е. изпълнено е:

$$\forall x \forall y > 0 (!f(x,y) \implies f(x,y) \simeq \lfloor \frac{x}{y} \rfloor). \tag{2.18}$$

Да отбележим, че допускането, че $P(f)$ е вярно, е всъщност *индукционната хипотеза* при този тип индукция. *Индукционната стъпка* се състои в това да покажем, че и $P(\Gamma(f))$ е вярно.

Свойството P, разписано за $\Gamma(f)$ изглежда така:

$$P(\Gamma(f)) \iff \forall x \forall y > 0 (!\Gamma(f)(x,y) \implies \Gamma(f)(x,y) \simeq \lfloor \frac{x}{y} \rfloor).$$

За да покажем $P(\Gamma(f))$, фиксираме произволни естествени x и $y > 0$ и приемаме, че за тях $!\Gamma(f)(x,y)$. Трябва да проверим, че

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \lfloor \frac{x}{y} \rfloor.$$

Ясно е, че стойността на $\Gamma(f)(x,y)$ зависи от това дали $x<y$ или $x\geq y$. Да разгледаме поотделно двата случая:

1 сл. $x<y$. Този случай е базисен за Γ, т.е. тук $\Gamma(f)(x,y)$ въобще не зависи от f. Имаме

$$\Gamma(f)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{=} 0 = \lfloor\frac{x}{y}\rfloor,$$

тъй като при $x<y$ очевидно $\lfloor\frac{x}{y}\rfloor = 0$.

2 сл. $x\geq y$. В този случай $\Gamma(f)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(x-y,y)+1$.

Но ние приехме, че $\Gamma(f)(x,y)$ има стойност, което в случая означава, че и $f(x-y,y)$ има стойност. Но в такъв случай можем да приложим индукционното предположение $P(f)$ (или (2.18)), когато аргументите на f са $(x-y$ и y. Ще имаме

$$f(x-y,y) \simeq \lfloor\frac{x-y}{y}\rfloor,$$

откъдето

$$\Gamma(f)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(x-y,y)+1 \simeq \lfloor\frac{x-y}{y}\rfloor + 1 = \lfloor\frac{x}{y}\rfloor.$$

По този начин направихме индукционната стъпка, т.е. прехода $P(f) \implies P(\Gamma(f))$. И понеже f беше произволна, можем да твърдим, че второто условие от индуктивния принцип на Скот е вярно също.

Да резюмираме: показахме, че и трите изисквания от индуктивния принцип на Скот са изпълнени и следователно свойството P ще е в сила за f_Γ, т.е. ще е изпълнено, че:

$$\forall x\forall y>0(!f_\Gamma(x,y) \implies f_\Gamma(x,y) \simeq \lfloor\frac{x}{y}\rfloor).$$

б) Свойството $\forall x\forall y>0\ !f_\Gamma(x,y)$ вече не можем да докажем с индуктивния принцип на Скот, защото това е свойство от тип „завършване":

$$P_{term}(f) \iff \forall x\forall y(\underbrace{y>0}_{I(x,y)} \implies !f(x,y))$$

и за такива свойства видяхме, че пропада изискването $P_{term}(\emptyset^{(2)})$. Затова ще използваме друг тип индукция, която обикновено се нарича *индукция по структурата на данните* (или *структурна индукция*). На практика това е индукция по някаква фундирана наредба.

За да се ориентираме каква трябва да е тази наредба, можем да разгледаме рекурсивната програма, определена от оператора Γ:

$R:\quad F(\,X,\,Y\,) \;=\; \mathit{if}\;\; X < Y \;\; \mathit{then}\; 0 \;\; \mathit{else}\; F(\,X-Y,\,Y\,) + 1$

Виждаме, че ако $Y > 0$, при всяко рекурсивно обръщение първият аргумент на F *намалява*. Това ни навежда на мисълта да разсъждаваме с пълна индукция относно този аргумент.

Да отбележим, че когато доказваме свойство на f_Γ със структурна индукция, никъде в доказателството не използваме, че става въпрос за *най-малката неподвижна точка* на оператора. Разсъжденията вървят за *всяка* неподвижна точка на Γ. Да видим как става това в тази задача.

Фиксираме *произволна* неподвижна точка f на оператора Γ:

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x < y \\ f(x-y,y)+1, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.19}$$

Искаме да покажем, че

$$\forall x \forall y > 0 \; !f(x,y).$$

Да препишем еквивалентно това условие:

$$\forall y > 0 \; \forall x \; \underbrace{!f(x,y)}_{Q(x)}.$$

Сега да фиксираме някакво $y > 0$. С пълна индукция относно $x \in \mathbb{N}$ ще покажем, че $\forall x Q(x)$, където $Q(x)$ е свойството:

$$Q(x) \iff !f(x,y).$$

База $x = 0$: понеже $0 = x < y$, то от избора на f (условието (2.19)) ще имаме, че $f(x,y) = 0$, и в частност, $!f(x,y)$.

Сега да вземем произволно $x > 0$ и да приемем, че за всички $x' < x$ е вярно $Q(x')$, т.е. вярно е, че $!f(x',y)$ (индуктивна хипотеза). Трябва да покажем, че е вярно и $Q(x)$. Ще разгледаме поотделно случаите $x < y$ и $x \geq y$.

1 сл. $x < y$. Тогава $f(x,y) \overset{(2.19)}{=} 0$ и следователно $!f(x,y)$.

2 сл. $x \geq y$. Тук вече е моментът да приложим индуктивната хипотеза $Q(x')$ за $x' = x - y < x$. Наистина,

$$f(x,y) \overset{(2.19)}{\simeq} f(x-y,y)+1,$$

и понеже по и.х. $!f(x-y,y)$, то значи и $!f(x,y)$.

Така показахме, че за кое да е $y > 0$ е вярно, че $\forall x Q(x)$, откъдето окончателно

$$\forall y > 0 \forall x \; !f(x,y).$$

Да отбележим, че случаят $x < y$ е базов за рекурсивната схема (2.19), която f удовлетворява, което автоматично означава, че той трябва да е базов случай и при доказателствата по индукция, свързани с f (по-горе наистина беше така: при $x < y$ не използвахме индуктивната хипотеза). Ако искаме случаят $x < y$ да бъде базата на нашата индукция (и да не разглеждаме отделно случая $x = 0$, който, разбира се, се включва в $x < y$), можем да разсъждаваме така: ще следваме педантично схемата за пълна индукция, която разгледахме на първото упражнение:

Принцип на пълната индукция:

$$\frac{\forall x\ (\ \forall x'_{<x} Q(x') \implies Q(x))}{\forall x Q(x)} \qquad (*)$$

Отново фиксираме някакво $y > 0$. Като използваме принципа $(*)$, ще покажем, че за $\forall x Q(x)$, където отново $Q(x) \stackrel{\text{деф}}{\iff} !f(x,y)$.

Наистина, да вземем произволно $x \in \mathbb{N}$ и да приемем, че $\forall x'_{<x} Q(x')$ е вярно (индуктивна хипотеза). Ще докажем, че $Q(x)$ също е вярно. За целта разглеждаме двата случая:

1 сл. $x < y$. Тогава $f(x,y) \stackrel{(2.19)}{=} 0$ и следователно $!f(x,y)$, т.е. $Q(x)$ е вярно.

2 сл. $x \geq y$. Тук имаме, съгласно избора на f, че

$$f(x,y) \stackrel{(2.19)}{\simeq} f(x-y,y)+1.$$

Но $y > 0$, и значи $x - y < x$. Тогава индуктивната хипотеза $Q(x-y)$ е в сила, т.е. $!f(x-y,y)$, откъдето и $!f(x,y)$, т.е. вярно е $Q(x)$.

Така доказахме, че условието над чертата на правилото $(*)$ е изпълнено. Следователно е вярно и условието под чертата $\forall x Q(x)$.

в) Да означим с R свойството

$$R(f) \iff \forall x\ \neg !f(x,0).$$

Тук отново можем да разсъждаваме с индуктивния принцип на Скот. За да покажем, че $R(f_\Gamma)$ е вярно, проверяваме последователно трите условия:

1) $R(\emptyset^{(2)})$, което е еквивалентно на $\forall x \neg ! \emptyset^{(2)}(x,0)$ и значи е вярно.

2) Да приемем, че $R(f)$ е изпълнено за произволна $f \in \mathcal{F}_2$, т.е. вярно е, че за всяко $x \in \mathbb{N}, \neg !f(x,0)$. Защо е вярно и $R(\Gamma(f))$, т.е. защо $\neg !\Gamma(f)(x,0)$ за всяко $x \in \mathbb{N}$? Наистина, избирайки произволно $x \in \mathbb{N}$, можем да запишем:

$$\Gamma(f)(x,0) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(x-0,0)+1 \simeq f(x,0)+1.$$

Но съгласно индукционната хипотеза $R(f)$, $f(x,0)$ няма стойност, а оттук и $\Gamma(f)(x,0)$ няма стойност.

3) Остана да проверим, че R е непрекъснато свойство. Наистина, да вземем произволна монотонно растяща редица $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \dots$ и да приемем, че всеки неин член f_n има свойството R, т.е. вярно е, че

$$\forall x\ \neg ! f_n(x, 0).$$

Да означим с f точната горна граница на тази редица. Трябва да видим, че $R(f)$ също е вярно, т.е. $\forall x \neg ! f(x, 0)$.

Да си припомним, че т.г.гр. f на една монотонно растяща редица $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \dots$ се дефинира с условието: за всички естествени $\bar{x}, z$:

$$f(x, y) \simeq z \iff \exists n\ f_n(x, y) \simeq z.$$

Сега да вземем произволно x. Понеже за всяко n, $f_n(x, 0)$ няма стойност, то от горната еквивалентност е ясно, че $f(x, 0)$ също няма стойност (ако допуснем, че $f(x, 0) \simeq z$ за някое z, то би трябвало да съществува n : $f_n(x, 0) \simeq z$, а такова n няма). $\square$

От трите подусловия на тази задача можем да заключим, че f_Γ е следната функция:

$$f_\Gamma(x, y) \simeq \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & \text{ако } y > 0 \\ \neg !, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тя, разбира се, е същата, като функцията, която пресметнахме с Теоремата на Кнастер-Тарски в предишния раздел (*Задача* 2.21).

Задача 2.29. Даден е операторът $\Gamma : \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$, който се дефинира както следва:

$$\Gamma(f)(x, y) \simeq \begin{cases} x, & \text{ако } x = y \\ f(x - y, y), & \text{ако } x > y \\ f(x, y - x), & \text{ако } x < y. \end{cases}$$

Нека f_Γ е най-малката неподвижна точка на оператора.
а) Докажете, че за f_Γ е изпълнено условието:

$$\forall x \forall y (! f_\Gamma(x, y) \implies f_\Gamma(x, y) \simeq \text{НОД}(x, y)).$$

б) Докажете, че $\forall x > 0 \forall y > 0\ ! f_\Gamma(x, y)$.

в) Докажете, че $\forall x \forall y\ ((x = 0\ \dot{\vee}\ y = 0) \implies \neg ! f_\Gamma(x, y))$.

Решение. **а)** Стандартно приложение на индуктивния принцип на Скот. Означаваме с $P(f)$ свойството от тази подточка:

$$P(f) \overset{\text{деф}}{\iff} \forall x \forall y (! f(x, y) \implies f(x, y) \simeq \text{НОД}(x, y)).$$

То е от тип "частична коректност" и съгласно това, което обсъждахме по-горе, на практика трябва да проверим само условието 2): за всяка $f \in \mathcal{F}_2$

$$P(f) \implies P(\Gamma(f))$$

Наистина, да вземем произволна функция $f \in \mathcal{F}_2$ и да предположим, че за нея е вярно $P(f)$:

$$\forall x \forall y (!f(x,y) \implies f(x,y) \simeq \text{НОД}(x,y)). \qquad \textit{(индукционна хипотеза)}$$

Трябва да покажем, че е в сила и $P(\Gamma(f))$, което в случая означава:

$$\forall x \forall y (!\Gamma(f)(x,y) \implies \Gamma(f)(x,y) \simeq \text{НОД}(x,y)).$$

Приемаме, че за някои x, y, $!\Gamma(f)(x,y)$ и преминаваме към разглеждане на трите случая от дефиницията на оператора:

1 сл. $x = y$. Тук по определение $\Gamma(f)(x,y) \ = \ x \ = \text{НОД}(x,y)$.

2 сл. $x > y$. Тогава $\Gamma(f)(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(x-y,y)$ и значи $!f(x-y,y)$. Но тогава можем да приложим индуктивната хипотеза $P(f)$, според която $f(x-y,y) = \text{НОД}(x-y,y)$. Така общо ще имаме:

$$\Gamma(f)(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(x-y,y) \overset{\text{и.х. } P(f)}{=} \text{НОД}(x-y,y) = \text{НОД}(x,y).$$

3 сл. $x < y$. Съвсем симетричен на горния.

б) Подобно на *Задача* 2.28, и тук свойството

$$P(f) \overset{\text{деф}}{\iff} \forall x > 0 \ \forall y > 0 \ !f(x,y)$$

не може да се атакува с принципа за μ-индукция на Скот. Затова опитваме с друга индукция. Отново разсъжденията ще бъдат за *произволна* неподвижна точка на Γ. Наистина, да фиксираме една такава f:

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} x, & \text{ако } x = y \\ f(x-y,y), & \text{ако } x > y \\ f(x,y-x), & \text{ако } x < y. \end{cases}$$

Нека Q е свойството

$$Q(x,y) \iff !f(x,y).$$

Ще използваме индукция по лексикографската наредба $\prec$ на $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ (за която знаем, че е фундирана), за да покажем, че

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \ Q(x,y).$$

Базата на индукцията е най-малкият относно $\prec$ елемент на $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ — $(1,1)$, за който имаме $f(1,1) = 1$ и значи $!f(1,1)$.

Сега да фиксираме произволни $(x, y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ и да приемем, че

$$\forall (x', y') \prec (x, y)\ Q(x', y') \qquad \textit{(индукционна хипотеза)}$$

За да покажем, че и $Q(x, y)$ е вярно, отново разглеждаме трите случая за x и y:

1 сл. $x = y$. Тук само от избора на f (без да използваме индуктивната хипотеза) имаме, че $!f(x, y)$.

2 сл. $x > y$**.** В този случай $f(x, y) \simeq f(x - y, y)$. Понеже $y > 0$, със сигурност $(x - y, y) \prec (x, y)$ и тогава по и.х. $Q(x - y, y)$ ще имаме, че $!f(x - y, y)$, а оттук и $!f(x, y)$.

3 сл. $x < y$**.** Аналогичен на горния, като използваме, че за $x > 0$ е вярно, че $(x, y - x) \prec (x, y)$.

За упражнение: прередактирайте горното доказателство така, че базата на индукцията да бъдат всички двойки $(x, y) :\ x = y$.

в) Да означим с R свойството от тази подточка:

$$R(f) \iff \forall x \forall y\ (x = 0 \mathbin{\dot\vee} y = 0 \implies \neg !f(x, y)).$$

Тогава $R(\emptyset^{(2)})$ е очевидно, а непрекъснатостта на това свойство се проверява както в *Задача* 2.28 в). Остана да видим, че

$$R(f) \implies R(\Gamma(f)).$$

Вземаме произволна функция $f \in \mathcal{F}_2$, за която $R(f)$ е вярно. Избираме естествени числа x, y: $x = 0 \mathbin{\dot\vee} y = 0$, т.е. такива, че точно едното от двете числа е 0. Нека например $x = 0$, а $y > 0$. Тогава

$$\Gamma(f)(x, y) \overset{\text{деф }\Gamma}{\simeq} f(x, y - x) \simeq f(0, y) \overset{\text{и.х. } R(f)}{\simeq} \neg !.$$

Случаят $x > 0$ и $y = 0$ е аналогичен. Съгласно индуктивния принцип на Скот можем да твърдим, че $R(f_\Gamma)$ е налице. □

Като следствие от тази задача получаваме, че

$$f_\Gamma(x, y) \simeq \begin{cases} \neg !, & \text{ако } x = 0 \mathbin{\dot\vee} y = 0 \\ \text{НОД}(x, y), & \text{иначе,} \end{cases}$$

ако, разбира се, приемем, че $\text{НОД}(0, 0) \overset{\text{деф}}{=} 0$.

Задача 2.30. Даден е операторът $\Gamma :\ \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$, който се дефинира с условията:

$$\Gamma(f)(x, y) \simeq \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ f(x - 1, 1), & \text{ако } x > 0\ \&\ y = 0 \\ f(x - 1, f(x, y - 1)), & \text{ако } x > 0\ \&\ y > 0. \end{cases}$$

Докажете, че за f_Γ е изпълнено:

$$\forall x > 0 \forall y\ (!f_\Gamma(x, y) \implies f_\Gamma(x, y) = 1).$$

Решение. Това е първият ни пример за свойство P, което трябва *да усилим*, за да можем да направим индуктивния преход

$$P(f) \implies P(\Gamma(f)).$$

Но да видим защо се налага това. Да тръгнем за начало със свойството от условието на задачата, както беше в предишните ни примери. В случая то трябва да е

$$P(f) \iff \forall x > 0 \forall y\ (!f(x, y) \implies f(x, y) = 1).$$

Да приемем, че $P(f)$ е вярно и да се опитаме да покажем $P(\Gamma(f))$. За целта трябва да вземем произволни $x > 0$ и y, такива че $!\Gamma(f)(x, y)$.

Наистина, да изберем $x = 1$ и $y = 0$, примерно. Тогава от дефиницията на Γ ще имаме, че

$$\Gamma(f)(1, 0) \simeq f(0, 1).$$

Единственото, което знаем за f е това, което сме предположили в индукционната хипотеза $P(f)$. Но в нея не се казва нищо за стойностите на f в точки от вида $(0, y)$ и очевидно доказателството не може да продължи.

Така стигаме до извода, че трябва да *допълним* P с още някакво свойство — да кажем P_1, в което е включена информация за всички стойности от вида $f(0, y)$. Но какви трябва да бъдат те?

Тъй като след прилагане на принципа на Скот, трябва да стигнем до извода, че $P_1(f_\Gamma)$ е вярно, излиза, че това трябва да са стойностите на f_Γ в точките от вида $(0, y)$. Да ги пресметнем:

$$f_\Gamma(0, y) \simeq \Gamma(f_\Gamma)(0, y) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} y,$$

следователно допълнителното свойство P_1 би трябвало да е нещо такова:

$$P_1(f) \iff \forall y\ f(0, y) \simeq y.$$

Но сега изниква друг проблем — това свойство P_1 очевидно не е вярно за $\emptyset^{(2)}$! Да пробваме да го "адаптираме" към условията на принципа на Скот, като го напишем в условен вид, така че да е тривиално вярно за $\emptyset^{(2)}$:

$$P_1(f) \iff \forall y\ (!f(0, y) \implies f(0, y) \simeq y).$$

Да означим с P_2 първоначалното свойство, което трябваше да докажем, а именно:

$$P_2(f) \iff \forall x > 0\ \forall y\ (!f(x, y) \implies f(x, y) = 1)$$

и да обединим двете свойства в едно общо:

$$P(f) \iff P_1(f) \ \& \ P_2(f).$$

Двете части на P са свойства от тип „частична коректност“ и следователно те са верни за $\emptyset^{(2)}$, откъдето следва, че и $P(\emptyset^{(2)})$ е вярно. Освен това P_1 и P_2 са непрекъснати, и значи тяхната конюнкция също е непрекъснато свойство (Твърдение 1.13 от записките). Така остана да проверим само че P се запазва при прехода от f към $\Gamma(f)$.

Наистина, да фиксираме произволна $f \in \mathcal{F}_2$ и да приемем, че за нея е вярно $P(f)$. Да покажем $P(\Gamma(f))$ означава да покажем поотделно, че са верни $P_1(\Gamma(f))$ и $P_2(\Gamma(f))$. Първото условие изглежда така:

$$P_1(\Gamma(f)) \iff \forall y \ (!\Gamma(f)(0,y) \implies \Gamma(f)(0,y) \simeq y).$$

От дефиницията на Γ имаме

$$\Gamma(f)(0,y) \simeq y,$$

и значи $P_1(\Gamma(f))$ е вярно (забележете, че тук никъде не използвахме предпоставката на импликацията $!\Gamma(f)(0,y)$ от $P_1(\Gamma(f))$.

Пристъпваме към проверката на $P_2(\Gamma(f))$, което изглежда така:

$$P_2(\Gamma(f)) \iff \forall x > 0 \ \forall y \ (!\Gamma(f)(x,y) \implies \Gamma(f)(x,y) = 1).$$

Избираме произволни $x > 0$ и y, за които приемаме, че $!\Gamma(f)(x,y)$. Трябва да покажем, че $\Gamma(f)(x,y) = 1$. Имаме две възможности: $y = 0$ и $y > 0$, които ще разгледаме поотделно.

1 сл. $y = 0$. В този случай $\Gamma(f)(x,0) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(x-1,1)$ и следователно $!f(x-1,1)$. Сега възникват два подслучая:
1.1 $x = 1$. Тогава

$$\Gamma(f)(1,0) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(0,1) \overset{\text{и.х. } P_1(f)}{\simeq} 1.$$

1.2 $x > 1$. В този случай

$$\Gamma(f)(x,0) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(\underbrace{x-1}_{>0},1) \overset{\text{и.х. } P_2(f)}{\simeq} 1.$$

2 сл. $y > 0$. Тук вече $\Gamma(f)(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(x-1, f(x,y-1))$. Тогава ще са дефинирани изразите $f(x,y-1)$ и $f(x-1,f(x,y-1))$. Отново трябва да разгледаме два случая.
2.1 $x = 1$. Тогава

$$\Gamma(f)(1,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(0,f(1,y-1)) \overset{\text{и.х. } P_1(f)}{\simeq} f(1,y-1) \overset{\text{и.х. } P_2(f)}{\simeq} 1.$$

2.2 $x > 1$. В този случай

$$\Gamma(f)(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} f(\underbrace{x-1}_{>0}, f(x,y-1)) \overset{\text{и.х. } P_2(f)}{\simeq} 1.$$

Сега вече можем да твърдим, че $P_1(\Gamma(f))$ & $P_2(\Gamma(f))$ е вярно, т.е. $P(f)$ е вярно, с което индуктивната стъпка е проведена и следователно, съгласно правилото на Скот, $P(f_\Gamma)$ ще е изпълнено. Тогава, в частност, и $P_2(f_\Gamma)$ ще е изпълнено, което и трябваше да докажем. $\square$

Задача 2.31. Нека p е едноместен предикат в $\mathbb{N}$, а h е едноместна тотална функция в $\mathbb{N}$. Да означим с $\Gamma\colon \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ оператора, дефиниран като:

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} x, & \text{ако } \ p(x) \\ f(f(h(x))), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажете, че за най-малката неподвижна точка f_Γ на оператора Γ е вярно, че за всяко $x \in \mathbb{N}$:

$$f_\Gamma(f_\Gamma(x)) \simeq f_\Gamma(x).$$

Решение. Лесно се съобразява, че ако препишем директно свойството от условието на задачата, т.е. ако положим

$$P(f) \iff \forall x\ f(f(x)) \simeq f(x),$$

за това P в общия случай няма да е вярно, че $P(f) \implies P(\Gamma(f))$.

Да пробваме с

$$Q(f) \iff \forall x(!f(x) \implies p(f(x))).$$

Това свойство е от тип частична коректност, тъй че за него са изпълнени първото и третото изискване от правилото на Скот. Остана да проверим, че за всяка $f \in \mathcal{F}_1$:

$$Q(f) \implies Q(\Gamma(f)).$$

Вземаме произволна f и приемаме, че за нея е изпълнено $Q(f)$. Трябва да покажем $Q(\Gamma(f))$, или все едно:

$$\forall x(!\Gamma(f)(x) \implies p(\Gamma(f)(x))).$$

Фиксираме произволно x и приемаме, че $!\Gamma(f)(x)$. Искаме да покажем, че $p(\Gamma(f)(x))$. Ще разглеждаме поотделно двете възможности за x:

1 сл. $p(x)$. В този случай $\Gamma(f)(x) \overset{\text{деф}}{=} x$ и значи $p(\Gamma(f)(x))$ е истина.

2 сл. $\neg p(x)$. Тук

$$\Gamma(f)(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} f(f(h(x))).$$

Ние имаме, че $!\Gamma(f)(x)$, т.е. $!f(f(h(x)))$. В частност, $!f(h(x))$ и нека $f(h(x)) = y$.
Според индуктивната хипотеза $Q(f)$, за това y ще е вярно, че $p(f(y))$, или все едно, ще е вярно $p(\underbrace{f(f(h(x)))}_{\Gamma(f)(x)})$, QED.

Прилагайки правилото на Скот, можем да твърдим, че ще е в сила $Q(f_\Gamma)$:

$$\forall x(!f_\Gamma(x) \implies p(f_\Gamma(x))).$$

Сега се насочваме към условието на задачата:

$$\forall x\ f_\Gamma(x) \simeq f_\Gamma(f_\Gamma(x)).$$

Избираме произволно x и разглеждаме случаите:
1 сл. $!f_\Gamma(x)$. Тогава от $Q(f_\Gamma)$ ще имаме, че $p(f_\Gamma(x))$ е вярно. Но f_Γ е неподвижна точка на оператора Γ, т.е.$f_\Gamma = \Gamma(f_\Gamma)$. Следователно

$$f_\Gamma(\underbrace{f_\Gamma(x)}_{y}) \simeq \Gamma(f_\Gamma)(\underbrace{f_\Gamma(x)}_{y}) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \underbrace{f_\Gamma(x)}_{y}.$$

2 сл. $\neg!f_\Gamma(x)$. Тук вече условното равенство $f_\Gamma(x) \simeq f_\Gamma(f_\Gamma(x))$ е очевадно.

Тази задача може да се реши и като се използва и следното свойство R:

$$R(f) \iff \forall x\ f(x) \simeq f_\Gamma(f(x)).$$

□

2.5.3 Задачи от изпити върху правилото на Скот

Задача 2.32. (Писмен изпит, 30.06. 2014, спец. КН и И)
Операторът $\Gamma : \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ действа по правилото:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x+y \text{ е просто} \\ f(x+y,y)+1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажете, че:

а) операторът Γ е компактен;

б) ако f_Γ е най-малката неподвижна точка на Γ, то:

$$\forall x \forall y(!f_\Gamma(x,y) \implies x + y.f_\Gamma(x,y) \text{ е просто})$$

Решение. **б)** Да дефинираме свойството P като

$$P(f) \iff \forall x \forall y(!f(x,y) \implies x+y.f(x,y) \text{ е просто}).$$

Това е свойство от тип частична коректност и следователно е непрекъснато. $P(\emptyset^{(2)})$ е очевидно, тъй че остана да проверим само второто условие от индукционното правило на Скот.

Наистина, да приемем, че за някоя $f \in \mathcal{F}_2$ е изпълнено $P(f)$. Ще докажем, че $P(\Gamma(f))$, т.е.

$$\forall x \forall y(!\Gamma(f)(x,y) \implies x+y.\Gamma(f)(x,y) \text{ е просто}).$$

Избираме произволни естествени числа x и y и приемаме, че $!\Gamma(f)(x,y)$. Отново ще трябва да разгледаме двете възможности за x и y от определението на Γ.

1 сл. $x+y$ е просто число. Тогава от дефиницията на Γ имаме, че $\Gamma(f)(x,y) \simeq 1$ и значи

$$x+y.\Gamma(f)(x,y) \simeq x+y.1 = x+y$$

е просто число.

2 сл. $x+y$ не е просто число. Тогава

$$\begin{aligned} x+y.\Gamma(f)(x,y) &\overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} x+y.(f(x+y,y)+1)) \\ &\simeq (x+y)+y.f(x+y,y). \end{aligned}$$

Но ние имаме $!\Gamma(f)(x,y)$, откъдето и $!f(x+y,y)$. Следователно можем да приложим индуктивната хипотеза $P(f)$ и да получим, че

$$(x+y)+y.f(x+y,y) \text{ е просто число.}$$

Значи и стойността на израза $x+y.\Gamma(f)(x,y)$, за която видяхме, че е равна точно на $(x+y)+y.f(x+y,y)$, също ще е просто число.

Получихме, че $P(\Gamma(f))$ също е вярно, което приключва проверката на второто изискане от индукционното правило на Скот. Прилагаме го и получаваме, че $P(f_\Gamma)$ е вярно. $\square$

Задача 2.33. Даден е операторът

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ако } x \text{ е четно} \\ f(f(\frac{3x+1}{2})), & \text{ако } x \text{ е нечетно.} \end{cases}$$

Докажете, че за f_Γ е изпълнено:

$$\forall x(!f_\Gamma(x) \implies f_\Gamma(x) \leq \frac{x}{2}).$$

Решение. Да означим с P свойството от условието на задачата, т.е. свойството, което се дефинира с еквивалентността

$$P(f) \iff \forall x(!f(x) \implies f(x) \leq \frac{x}{2}).$$

Горното свойство е от тип "частична коректност" и значи е непрекъснато; освен това $P(\emptyset^{(1)})$ е винаги вярно. Това, което отново остава, е да проверим само второто условие от правилото на Скот.

Наистина, да фиксираме произволна функция $f \in \mathcal{F}_1$ и да приемем, че за нея $P(f)$ е вярно. Ще покажем, че и $P(\Gamma(f))$ е вярно.

$P(\Gamma(f))$ изглежда така:

$$P(\Gamma(f)) \iff \forall x(!\Gamma(f)(x) \implies \Gamma(f)(x) \leq \frac{x}{2}).$$

Избираме произволно x и приемаме, че за него $!\Gamma(f)(x)$. Трябва да покажем, че

$$\Gamma(f)(x) \leq \frac{x}{2}.$$

Разглеждаме поотделно двата случая от дефиницията на Γ.

1 сл. x е четно. По определение $\Gamma(f)(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \frac{x}{2} \leq \frac{x}{2}$.

2 сл. x е нечетно. В този случай $\Gamma(f)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(f(\frac{3x+1}{2}))$.
Нашето предположение е, че $\Gamma(f)(x)$ има стойност, т.е. изразът $f(f(\frac{3x+1}{2}))$ има стойност. Това означава, съгласно определението за суперпозиция, че и изразът $f(\frac{3x+1}{2})$ трябва да има стойност. Сега прилагаме двукратно индукционното предположение $P(f)$ и получаваме последователно:

$$f(f(\frac{3x+1}{2})) \stackrel{\text{и.х. } P(f)}{\leq} \frac{f(\frac{3x+1}{2})}{2} \stackrel{\text{и.х. } P(f)}{\leq} \frac{\frac{\frac{3x+1}{2}}{2}}{2} = \frac{3x+1}{8} \leq \frac{x}{2}.$$

Така направихме индуктивната стъпка, т.е. преходът $P(f) \implies P(\Gamma(f))$. Понеже f беше произволна, можем да твърдим, че условието 2) е в сила за всяка $f \in \mathcal{F}_1$. Финално, прилагайки правилото на Скот, можем да твърдим, че $P(f_\Gamma)$ вярно, т.е. наистина

$$\forall x(!f_\Gamma(x) \implies f_\Gamma(x) \leq \frac{x}{2}).$$

Внимание! Не можем да извършим горната оценка отвътре навън, макар привидно да изглежда, че и така получаваме верния резултат:

$$f(f(\frac{3x+1}{2})) \stackrel{\text{и.х. } P(f)}{\leq} f(\frac{\frac{3x+1}{2}}{2}) = f(\frac{3x+1}{4}) \stackrel{\text{и.х. } P(f)}{\leq} \frac{3x+1}{8} \leq \frac{x}{2}.$$

Намерете грешката $\ddot\smile$. $\square$

Отговор. В това разсъждение всъщност има две грешки. Едната е, че за първото неравенство се предполага неявно монотонност на f, която не следва отникъде. Другата грешка е, че при второто прилагане на индуктивната хипотеза трябва да сме осигурили, че $f(\frac{3x+1}{4})$ има стойност. Това отново по никакъв начин не се гарантира от предположението, което имаме за f, а именно — $f(f(\frac{3x+1}{2}))$.

Задача 2.34. (Писмен изпит, 14.02. 2018, спец. КН и И)
Даден е следният оператор $\Gamma : \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} y+1, & \text{ако } x = y \\ f(f(x+1, y-1), y), & \text{ако } x < y \\ f(f(x-1, y+1), x), & \text{ако } x > y. \end{cases}$$

Докажете, че за най-малката му неподвижна точка f_Γ е изпълнено:

$$\forall x \forall y (|x-y| \text{ е четно } \& \; !f_\Gamma(x,y) \implies f_\Gamma(x,y) \simeq \max(x,y)+1).$$

част 3

Денотационна семантика на рекурсивните програми

3.1 Денотационна семантика по стойност

3.1.1 Как изглеждат нещата на теория?

Ще припомним основните факти от теорията за частния случай на рекурсивна програма с *две* функционални променливи. Всяка такава програма е синтактичен обект от вида

$$\begin{array}{l} \tau_0(X_1,\dots,X_n,F,G) \qquad \texttt{where} \\ F(X_1,\dots,X_k)=\tau_1(X_1,\dots,X_k,F,G) \\ G(X_1,\dots,X_m)=\tau_2(X_1,\dots,X_m,F,G) \end{array}$$

Тук $X_1, X_2, \dots$ са *обектови променливи*, F и G са *функционални променливи*, а τ_0, τ_1 и τ_2 са *термове*.

На тялото на програмата R съответства системата

$$\left| \begin{array}{lcl} f(x_1,\dots,x_k) & \simeq & \underbrace{\tau_1(x_1,\dots,x_k,f,g)}_{\Gamma(f,g)(\bar{x})} \\ g(x_1,\dots,x_m) & \simeq & \underbrace{\tau_2(x_1,\dots,x_m,f,g)}_{\Delta(f,g)(\bar{x})}. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

За да я препишем във вид, удобен за прилагане на общата теория на ОС, въвеждаме т. нар. *термални* оператори. В случая те са два:

$$\Gamma:\ \mathcal{F}_k\times\mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_k \quad \text{и} \quad \Delta:\ \mathcal{F}_k\times\mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_m,$$

които се определят от термовете τ_1 и τ_2 както следва:

$$\Gamma(f,g)(x_1,\dots,x_k)\simeq\tau_1(x_1,\dots,x_k,f,g)$$

$$\Delta(f,g)(x_1,\dots,x_m) \simeq \tau_2(x_1,\dots,x_m,f,g).$$

Така горната система (3.1) можем да препишем по-компактно като

$$\left|\begin{array}{lcl} f & = & \Gamma(f,\ g) \\ g & = & \Delta(f,\ g). \end{array}\right. \tag{3.2}$$

Да означим с $\mathbf{\Gamma} = \Gamma \times \Delta$ декартовото произведение на Γ и Δ. По определение, за всяка двойка функции $(f,g) \in \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m$:

$$\mathbf{\Gamma}(f,g) \ \stackrel{\text{деф}}{=}\ (\Gamma(f,g),\ \Delta(f,g)).$$

Да отбележим, че $\mathbf{\Gamma}$ е изображение от вида

$$\mathbf{\Gamma}:\ \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m \ \longrightarrow\ \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m$$

и следователно можем да говорим за *неподвижни точки* на $\mathbf{\Gamma}$ — нещо, което очевидно не е възможно при операторите Γ и Δ.

От общата теория знаем, че термалните оператори Γ и Δ са непрекъснати. Следователно непрекъснат е и операторът $\mathbf{\Gamma}$, разглеждан като изображение в областта на Скот

$$(\mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m,\ \subseteq,\ (\emptyset^{(k)},\emptyset^{(m)})).$$

Съгласно обобщената теорема на Кнастер-Тарски, операторът Γ има *най-малка неподвижна точка* $f_{\mathbf{\Gamma}} = (f^*,g^*)$. Двойката (f^*,g^*) всъщност се явява най-малкото (относно $\subseteq$) решение на системата (3.2).

Чрез тази най-малка неподвижна точка (f^*,g^*) въвеждаме денотационната семантика по стойност на програмата R — функцията $D_V(R)$:

Денотационна семантика по стойност на програмата R е функцията $D_V(R):\ \mathbb{N}^n \ \multimap\ \mathbb{N}$, която се определя с равенството:

$$D_V(R)(x_1,\dots,x_n) \ \simeq\ \tau_0(x_1,\dots,x_n,f,g)$$

за всички естествени $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{N}^n$.

Теоремата на Кнастер-Тарски ни казва още, че $f_{\mathbf{\Gamma}}$ има следното представяне:

$$f_{\mathbf{\Gamma}} \ = \ \bigcup_n \underbrace{\mathbf{\Gamma}^n(\emptyset^{(k)},\emptyset^{(m)})}_{(f_n,g_n)}. \tag{3.3}$$

Да означим с (f_n,g_n) функцията $\Gamma^n(\emptyset^{(k)},\emptyset^{(m)})$, която има смисъл на *апроксимация* на f_Γ. От горното представяне за f_Γ получаваме

$$f_{\mathbf{\Gamma}} \ = \ (f^*,g^*) \ = \ \bigcup_n (f_n,g_n) \ \stackrel{\text{по теорема}}{=}\ (\bigcup_n f_n,\ \bigcup_n g_n),$$

или разписано по всяка от двете компоненти:

$$f^* = \bigcup_n f_n \qquad \text{и} \qquad g^* = \bigcup_n g_n.$$

За да видим как са свързани функциите от горните редици $\{f_n\}_n$ и $\{g_n\}_n$, използваме наблюдението, че редицата от *двойките* функции $\{(f_n, g_n)\}_n$ удовлетворява следната рекурентна схема:

$$\left|\begin{array}{l} (f_0, g_0) = (\emptyset^{(k)}, \emptyset^{(m)}) \\ (f_{n+1}, g_{n+1}) = \mathbf{\Gamma}(f_n, g_n) = (\ \Gamma(f_n, g_n), \Delta(f_n, g_n)\ ). \end{array}\right.$$

Това означава, че за функциите от редиците $\{f_n\}_n$ и $\{g_n\}_n$ ще имаме:

$$\left|\begin{array}{l} f_0 = \emptyset^{(k)} \\ f_{n+1} = \Gamma(f_n, g_n) \end{array}\right. \tag{3.4}$$

$$\left|\begin{array}{l} g_0 = \emptyset^{(m)} \\ g_{n+1} = \Delta(f_n, g_n). \end{array}\right. \tag{3.5}$$

3.1.2 Задачи за определяне на $D_V(R)$

Задача 3.1. Определете $D_V(R)$ за следната програма R:

$F(X, 1)$ `where`
$F(X, Y)$ = `if` $X == 0$ `then` Y `else` $F(X-1, G(X, Y))$
$G(X, Y)$ = `if` $X == 0$ `then` 0 `else` $G(X-1, Y) + Y$

Решение. Означаваме с

$$\Gamma : \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \quad \text{и} \quad \Delta : \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$$

операторите, определени от дефинициите на F и G:

$$\Gamma(f, g)(x, y) \simeq \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ f(x-1, g(x, y)), & \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

$$\Delta(f, g)(x, y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ g(x-1, y) + y, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Забелязваме, че Δ не зависи от първия си аргумент и затова решаваме първо да пресметнем функциите от редицата $g_0, g_1, \ldots$.

Тръгвайки от $g_0 = \emptyset^{(2)}$, за g_1 ще имаме:

$$g_1(x, y) \overset{(3.5)}{\simeq} \Delta(\emptyset^{(2)}, \emptyset^{(2)})(x, y) \overset{\text{деф } \Delta}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \emptyset^{(2)}(x-1, y) + y, & \text{ако } x > 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \neg!, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

За следващата апроксимация g_2 на g можем да напишем:

$$g_2(x,y) \overset{(3.5)}{\simeq} \Delta(f_1,g_1)(x,y) \overset{\text{деф }\Delta}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ g_1(x-1,y)+y, & \text{ако } x>0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ 0+y, & \text{ако } x=1 \\ \neg!, & \text{ако } x>1, \end{cases}$$

и като обединим първите два реда, преписваме g_2 като

$$g_2(x,y) \simeq \begin{cases} x.y, & \text{ако } x<2 \\ \neg!, & \text{ако } x\geq 2. \end{cases}$$

Това ни подсказва, че g_n може би има следния общ вид:

$$g_n(x,y) \simeq \begin{cases} x.y, & \text{ако } x<n \\ \neg!, & \text{ако } x\geq n. \end{cases} \tag{3.6}$$

Наистина, по-горе видяхме, че за началните стойности на n това е така. Сега ако допуснем, че за произволно n горното представяне (3.6) е в сила, то за $n+1$ ще имаме:

$$g_{n+1}(x,y) \overset{(3.5)}{\simeq} \Delta(f_n,g_n)(x,y) \overset{\text{деф }\Delta}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ g_n(x-1,y)+y, & \text{ако } x>0 \end{cases} \overset{(3.6)}{\simeq}$$

$$\begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ (x-1).y+y, & \text{ако } x>0 \;\&\; x-1<n \\ \neg!, & \text{ако } x-1\geq n \end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ xy, & \text{ако } 0<x<n+1 \\ \neg!, & \text{ако } x\geq n+1 \end{cases} \simeq \begin{cases} xy, & \text{ако } x<n+1 \\ \neg!, & \text{ако } x\geq n+1. \end{cases}$$

Границата g на редицата $\{g_n\}_n$ формално няма да ни трябва при определянето на $D_V(R)$, затова няма да я намираме.

Като знаем как изглежда всяка функция g_n, можем да пристъпим към пресмятането на функциите от първата редица $\{f_n\}_n$. Началната функция f_0 отново е $\emptyset^{(2)}$, а за f_1 ще имаме:

$$f_1(x,y) \overset{(3.4)}{\simeq} \Gamma(\emptyset^{(2)},\emptyset^{(2)})(x,y) \overset{\text{деф }\Gamma}{\simeq} \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ \emptyset^{(2)}(x-1,\emptyset^{(2)}(x,y)), & \text{ако } x>0 \end{cases} \simeq \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ \neg!, & \text{ако } x>0. \end{cases}$$

Оттук за следващата функция f_2 получаваме:

$$f_2(x,y) \overset{(3.4)}{\simeq} \Gamma(f_1,g_1)(x,y) \overset{\text{деф }\Gamma}{\simeq} \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ f_1(x-1,\underbrace{g_1(x,y)}_{\neg!}), & \text{ако } x>0 \end{cases} \simeq \begin{cases} y, & \text{ако } x=0 \\ \neg!, & \text{ако } x>0. \end{cases}$$

Излезе, че $f_1 = f_2$, което обаче не означава (както беше при операторите на един аргумент), че рекурсията „ще се затвори“ на стъпка 2 (т.е. ще имаме $f_1 = f_2 = f_3 \dots$). Това е защото следващата апроксимация f_3 зависи както от f_2, така и от g_2, а g_2 е различна от g_1. Да видим:

$$f_3(x, y) \overset{(3.4)}{\simeq} \Gamma(f_2, g_2)(x, y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ f_2(x-1, g_2(x, y)), & \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ \underbrace{g_2(1, y)}_{y}, & \text{ако } x = 1 \\ \neg!, & \text{ако } x > 1 \end{cases} \simeq \begin{cases} x!.y, & \text{ако } x < 2 \\ \neg!, & \text{ако } x \geq 2. \end{cases}$$

Очертава се хипотезата, че при $n \geq 2$ функцията f_n ще изглежда така:

$$f_n(x, y) \simeq \begin{cases} x!.y, & \text{ако } x < n-1 \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Наистина, експериментите ни по-горе потвърдиха, че f_2 и f_3 имат този вид. Да приемем, че за произволно $n \geq 2$ това е така. Тогава за $n+1$ ще имаме:

$$f_{n+1}(x, y) \overset{(3.4)}{\simeq} \Gamma(f_n, g_n)(x, y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ f_n(x-1, g_n(x, y)), & \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

$$\overset{(3.6)}{\simeq} \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ f_n(x-1, xy), & \text{ако } x > 0 \ \& \ \underbrace{x < n}_{x-1<n-1} \\ \neg!, & \text{в останалите случаи} \end{cases} \overset{(3.7)}{\simeq} \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ (x-1)!(x.y), & \text{ако } x > 0 \ \& \ x < n \\ \neg!, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} x!.y, & \text{ако } x < n \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Като знаем общия вид (3.7) на всяка от функциите f_n, не е трудно да съобразим, че тяхната граница $f = \bigcup_n f_n$ ще е функцията $x!.y$. Тогава за $D_V(R)(x)$ ще имаме:

$$D_V(R)(x) \ \simeq \ \tau_0(x, f) \ \simeq \ f(x, 1) \ = \ x! \quad \text{за всяко } x \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Следващата задача е съвсем проста; дадена е на изпит единствено с цел да се провери дали човек знае съответните дефиниции (всъщност тя има и втора част — да се направи същото и за денотационната семантика по име).

Задача 3.2. (Писмен изпит, 05.02.2017, спец. КН) Определете $D_V(R)$ за следващата програма R:

$G(X, F(X))$ `where`
$F(X) \;=\;$ `if` $X == 0$ `then` $F(G(X, F(X)))$ `else` 0
$G(X, Y) \;=\;$ `if` $X == 0$ `then` 0 `else` $G(F(X), Y)$

Решение. Да означим отново с

$$\Gamma:\ \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \quad \text{и} \quad \Delta:\ \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$$

операторите, определени от дефинициите на F и G:

$$\Gamma(f, g)(x) \simeq \begin{cases} f(g(x, f(x))), & \text{ако } x = 0 \\ 0, & \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

$$\Delta(f, g)(x, y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ g(f(x), y), & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Вече казахме, че тази задача е много лесна. Да се убедим:

$$f_1(x) \overset{(3.4)}{\simeq} \Gamma(\emptyset^{(1)}, \emptyset^{(2)})(x) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} \emptyset^{(1)}(\emptyset^{(2)}(x, \emptyset^{(1)}(x))), & \text{ако } x = 0 \\ 0, & \text{ако } x > 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} \neg!, & \text{ако } x = 0 \\ 0, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Следващата апроксимация $f_2 \overset{\text{деф}}{=} \Gamma(f_1, g_1)$ формално зависи от g_1, но на практика g_1 не ни трябва, за да определим f_2:

$$f_2(x) \overset{(3.4)}{\simeq} \Gamma(f_1, g_1)(x) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} f_1(g_1(x, \underbrace{f_1(x)}_{\neg!})), & \text{ако } x = 0 \\ 0, & \text{ако } x > 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} \neg!, & \text{ако } x = 0 \\ 0, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Ясно е, че и за всяко $n > 0$, f_n ще има горния вид, откъдето и точната горна граница f ще е същата функция:

$$f(x) \simeq \begin{cases} \neg!, & \text{ако } x = 0 \\ 0, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Сега за функциите от редицата $g_0, g_1, \dots$ ще имаме:

$$g_1(x, y) \overset{(3.5)}{\simeq} \Delta(f_0, g_0)(x, y) \overset{\text{деф } \Delta}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \emptyset^{(2)}(\emptyset^{(1)}(x), y), & \text{ако } x > 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \neg!, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Оттук, като имаме предвид и полученото по-горе за f_1, можем да запишем следното за g_2:

$$g_2(x,y) \overset{(3.5)}{\simeq} \Delta(f_1,g_1)(x,y) \overset{\text{деф }\Delta}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ \underbrace{g_1(\underbrace{f_1(x)}_{0},y)}_{0}, & \text{ако } x>0 \end{cases} \simeq 0.$$

Излезе, че $g_2 = \lambda x,y.0$. Функцията g_2 е тотална, а от теорията знаем, че $g_2 \subseteq g_3$, което означава, че $g_2 = g_3$, а оттук и $g_2 = g_n$ за всяко $n = 2,3,\dots$. Тогава и граничната функция g ще е равна на g_2, т.е. ще имаме

$$g(x,y) \ \simeq\ 0 \quad \text{за всички} \quad x,y \in \mathbb{N}.$$

Сега финално

$$D_V(R)(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} g(x,f(x)) \ \simeq\ \begin{cases} \neg!, & \text{ако } x=0 \\ 0, & \text{ако } x>0. \end{cases}$$

3.2 Индуктивен принцип на Скот за доказване на свойства на $D_V(R)$

3.2.1 Принципът за Скот за ОС с носител $\mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m$

Тъй като ще разглеждаме основно програми с две функционални променливи, ще формулираме този принцип за ОС, които се отнасят за този тип програми, т.е. чийто домейни са от вида $\mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m$ за някои $k \geq 1, m \geq 1$.

Индуктивен принцип на Скот за ОС $(\mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m,\ \subseteq,\ (\emptyset^{(k)}, \emptyset^{(m)}))$.
Нека $\mathbf{\Gamma} :\ \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m \ \longrightarrow\ \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m$ е непрекъснат оператор, а P е свойство в $\mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m$, за което са изпълнени условията:

1) $P((\emptyset^{(k)}, \emptyset^{(m)})$;

2) за всяка двойка $(f,g) \in \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m$ е вярно, че

$$P(f,g) \implies P(\mathbf{\Gamma}(f,g));$$

3) P е непрекъснато свойство.

Тогава е вярно $P(f^*, g^*)$, където (f^*, g^*) е най-малката неподвижна точка на оператора $\mathbf{\Gamma}$.

В конкретните задачи операторът $\mathbf{\Gamma}$ ще е от вида

$$\mathbf{\Gamma} = \Gamma \times \Delta,$$

където

$$\Gamma : \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_k \quad \text{и} \quad \Delta : \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m \longrightarrow \mathcal{F}_m,$$

са термалните оператори, определени от дадената рекурсивна програма R (за чиято денотационната семантика $D_V(R)$ ще искаме да доказваме някакво свойство). Тъй като тези оператори са непрекъснати, то и $\mathbf{\Gamma}$ ще е непрекъснат.

Понеже

$$\mathbf{\Gamma}(f,g) \ = \ (\ \Gamma(f,g),\ \Delta(f,g)\ ),$$

условието 2) от принципа на Скот можем да се препишем по следния начин:

2) За всяка двойка $(f,g) \in \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m$ е вярно, че

$$P(f,g) \implies P(\Gamma(f,g), \Delta(f,g)).$$

В типичния случай свойството $P(f,g)$ ще се разпада на отделни свойства, отнасящи се поотделно до f и до g, т.е. P ще е от вида

$$P(f,g) \iff P_1(f) \ \& \ P_2(g).$$

В голяма част от задачите $P(f,g)$ ще се разпада до отделни свойства, отнасящи се поотделно до f и до g, като P ще е тяхната конюнкция, т.е. ще изглежда така:

$$P(f,g) \iff P_1(f) \ \& \ P_2(g).$$

За свойствата от този вид да съобразим, че:

Задача 3.3. Ако P_1 и P_2 са непрекъснати (като свойства в $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{F}_m$), то в областта на Скот

$$(\mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m,\ \subseteq,\ (\emptyset^{(k)}, \emptyset^{(m)}))$$

ще е непрекъснато свойството $P(f,g) \stackrel{\text{деф}}{\iff} P_1(f) \ \& \ P_2(g)$.

Решение. Нека редицата $\{(f_n, g_n)\}_n$ е монотонно растяща в $\mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m$. Тогава $\{f_n\}_n$ ще е монотонно растяща в $\mathcal{F}_k$, а $\{g_n\}_n$ — монотонно растяща в $\mathcal{F}_m$.

Да приемем, че $\forall n P(f_n, g_n)$. Оттук $\forall n P_1(f_n)$ и $\forall n P_2(g_n)$. Но P_1 и P_2 са непрекъснати свойства и следователно ще са в сила $P_1(f)$ и $P_2(g)$, където $f = \bigcup_n f_n$, а $g = \bigcup_n g_n$. Тогава ще е вярно и

$$P(f,g) \stackrel{\text{деф}}{\iff} P_1(f) \ \& \ P_2(g).$$

Но (f,g) се явява точна горна граница на редицата $\{(f_n, g_n)\}_n$, и значи свойството P е непрекъснато. $\square$

3.2.2 Задачи

Да се върнем отново на програмата от *Задача* 3.1. Целта ни е да видим как работи индуктивния принцип на Скот за тази вече добре позната ни програма.

Задача 3.4. Нека R е следната програма:

$$
\begin{array}{lclllll}
F(X,1) & & \texttt{where} & & & & \\
F(X,Y) & = & \texttt{if } X == 0 & \texttt{then} & Y & \texttt{else} & F(X-1, G(X,Y)) \\
G(X,Y) & = & \texttt{if } X == 0 & \texttt{then} & 0 & \texttt{else} & G(X-1,Y)+Y
\end{array}
$$

а) Докажете, че за $D_V(R)$ е изпълнено условието:

$$\forall x(!D_V(R)(x) \implies D_V(R)(x) = x!).$$

б) Докажете, че $D_V(R)$ е тотална функция.

Твърдението от подточка **а)** е типично условие от тип *частична коректност*, а твърдението от подточка **б)** е типично условие *за завършване*. Двете заедно ще ни дадат, че R е *тотално коректна* относно входно условие

$$I(x) \iff x \in \mathbb{N}$$

и изходно условие

$$O(x,y) \iff y = x!.$$

Разбира се, от тях отново получаваме, че $D_V(R) = \lambda x.x!$.

Решение. **а)** Да означим с Γ и Δ операторите:

$$\Gamma(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} y, & \text{ако } x = 0 \\ f(x-1, g(x,y)), & \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

$$\Delta(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ g(x-1,y)+y, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Нека $f_{\mathbf{\Gamma}} = (f^*, g^*)$ е най-малката неподвижна точка на оператора $\mathbf{\Gamma} = \Gamma \times \Delta$. Тогава по дефиниция

$$D_V(R)(x) \simeq f^*(x,1),$$

Имаме да доказваме свойство на $D_V(R)$, което ще рече — на f^*. Звучи примамливо да вземем P да е свойството от условието на задачата, преписано за едноместната функция $f(x,1)$, с други думи, да положим

$$P(f,g) \iff \forall x(!f(x,1) \implies f(x,1) = x!).$$

Но така ще имаме проблем при прехода

$$P(f,g) \implies P(\Gamma(f,g),\ \Delta(f,g)),$$

защото горното свойство P ни дава информация за стойностите на f само в точките от вида $(x,1)$. Затова, знаейки коя всъщност е функцията f^* (да, желателно е да я знаем отнапред $\ddot\smile$), решаваме да вземем по-общото свойство

$$P(f,g) \overset{\text{деф}}{\iff} \forall x\forall y(!f(x,y) \implies f(x,y) = x!.y).$$

Това свойство най-вероятно също няма да е достатъчно, защото когато трябва да го показваме за $\mathbf{\Gamma}(f,g)$, ще се намеси и функцията g, а за нея не е казано нищо в свойството P. Така се налага извода, че в дефиницията на P ще трябва да участва и g.

Ясно е, че условието за g, което трябва да добавим, трябва да съдържа информация за функцията g^* (втората компонента на $f_{\mathbf{\Gamma}}$), при това, отново записана в условен вид, за да може да мине през първото условие от принципа на Скот.

Удобно е да разделим P на две части P_1 и P_2, които се отнасят поотделно до f и g. От разсъжденията, които направихме, е ясно, че P_1 и P_2 трябва да следните:

$$P_1(f) \overset{\text{деф}}{\iff} \forall x\forall y(!f(x,y) \implies f(x,y) = x!y) \quad \text{и}$$

$$P_2(g) \overset{\text{деф}}{\iff} \forall x\forall y(!g(x,y) \implies g(x,y) = xy).$$

Сега вече полагаме

$$P(f,g) \overset{\text{деф}}{\iff} P_1(f)\ \&\ P_2(g).$$

Свойствата P_1 и P_2 са от тип "частична коректност" и следователно са непрекъснати, откъдето и тяхната конюнкция ще е непрекъснато свойство, съгласно *Задача* 3.3. Освен това, очевидно $P_1(\emptyset^{(2)})$ и $P_2(\emptyset^{(2)})$ са верни, с други думи, вярно е $P(\emptyset^{(2)}, \emptyset^{(2)})$. Следователно остана да проверим само импликацията

$$P(f,g) \implies P(\Gamma(f,g),\ \Delta(f,g)),$$

която се явява *индуктивния преход* при този тип индукция.

Наистина, да вземем произволни $(f,g) \in \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2$ и да приемем, че за тях е вярно P, т.е. верни са $P_1(f)$ и $P_2(g)$ (*индуктивна хипотеза*).

Трябва да покажем, че е вярно и $P(\Gamma(f,g), \Delta(f,g))$, или все едно — $P_1(\Gamma(f,g))$ и $P_2(\Delta(f,g))$.

Да започнем с $P_1(\Gamma(f,g))$:

$$\forall x \forall y (!\Gamma(f,g)(x,y) \implies \Gamma(f,g)(x,y) = x!y).$$

Наистина, да изберем някакви $x, y \in \mathbb{N}$ и да приемем, че $!\Gamma(f,g)(x,y)$. Разглеждаме поотделно двата случая от определението на Γ:

1 сл. $x = 0$. В този случай $\Gamma(f,g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{=} y = \ x!y$.

2 сл. $x > 0$. Тук $\Gamma(f,g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(x-1, g(x,y))$.

Понеже $!\Gamma(f,g)(x,y)$, то в частност $!g(x,y)$, и тогава от индуктивната хипотеза $P_2(g)$ получаваме, че $g(x,y) = xy$. Следователно

$$\Gamma(f,g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(x{-}1, g(x,y)) \stackrel{\text{и.х. } P_2(g)}{\simeq} \underbrace{f(x-1, xy)}_{\text{е дефинирано}} \stackrel{\text{и.х. } P_1(f)}{=} (x{-}1)!(xy) \ = \ x!y.$$

С това приключихме проверката на $P_1(\Gamma(f,g))$.

Насочваме се към второто условие $P_2(\Delta(f,g))$, което изглежда така:

$$\forall x \forall y (!\Delta(f,g)(x,y) \implies \Delta(f,g)(x,y) = xy).$$

Вземаме произволни $x, y \in \mathbb{N}$ и приемаме, че $\Delta(f,g)(x,y)$ е дефинирано. Отново разглеждаме двата случая от определението на Δ:

1 сл. $x = 0$. В този случай $\Delta(f,g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{=} 0 = xy$.

2 сл. $x > 0$. Тогава $\Delta(f,g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} g(x-1, y) + y$.

Понеже $!\Delta(f,g)(x,y)$, то значи $!g(x{-}1,y)$ и следователно можем да приложим индуктивната хипотеза $P_2(g)$. Така получаваме

$$\Delta(f,g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \ g(x-1,y) + y \stackrel{\text{и.х. } P_2(g)}{=} (x-1)y + y = xy.$$

Така проверихме и $P_2(\Delta(f,g))$, и значи общо можем да твърдим, че е в сила $P(\Gamma(f,g), \Delta(f,g))$. Това означава, че индукционният преход е завършен, т.е. условието 2) от правилото на Скот е доказано. Както казахме по-горе, другите две условия също са налице, което ни дава основание да твърдим, че свойството P е вярно за най-малката неподвижна точка (f^*, g^*) на оператора $\mathbf{\Gamma}$. В частност, вярно е $P_1(f^*)$:

$$\forall x \forall y (!f^*(x,y) \implies f^*(x,y) = x!y).$$

Оттук при $y = 1$ ще имаме

$$\forall x (!f^*(x,1) \implies f^*(x,1) = x!).$$

Вече коментирахме, че $D_V(R)(x) \simeq f^*(x,1)$, т.е. условието по-горе означава точно

$$\forall x (!D_V(R)(x) \implies D_V(R)(x) = x!),$$

което и трябваше да покажем.

б) Тук трябва да видим, че е тотална функцията $\lambda x.f^*(x,1)$, но всъщност отново се налага да покажем нещо по-общо, а именно, че е тотална двойката функции (f^*, g^*), която е най-малка неподвижна точка на оператора $\mathbf{\Gamma}$. Всъщност в доказателството никъде няма да използваме, че (f^*, g^*) е *най-малката* неподвижна точка на $\mathbf{\Gamma}$, или еквивалентно — че е *най-малкото решение на системата*

$$\left|\begin{array}{lcl} f & = & \Gamma(f,\ g) \\ g & = & \Delta(f,\ g). \end{array}\right.$$

Наистина, нека $(f,g) \in \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2$ е *произволно* решение на тази система. Това означава, че за тях е изпълнено:

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} y, & \text{ако } \ x = 0 \\ f(x-1, g(x,y)), & \text{ако } \ x > 0 \end{cases} \qquad \text{и}$$

$$g(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } \ x = 0 \\ g(x-1, y) + y, & \text{ако } \ x > 0. \end{cases}$$

Ще покажем, че тези функции са тотални. Тук е подходящо да започнем от функцията g. С обичайна индукция по $x \in \mathbb{N}$ показваме, че $\forall x Q(x)$, където

$$Q(x) \stackrel{\text{деф}}{\iff} \forall y\ !g(x,y).$$

Сега като знаем, че g е тотална, с подобна индукция се убеждаваме, че и f е тотална. Следователно можем да твърдим, че и $D_V(R)$ е тотална функция. $\square$

Следващата задача изглежда по-трудна, но всъщност е по-лесна от предишната задача, защото не се налага да допълваме свойството, което трябва да доказваме. Всичко, което ни трябва, е дадено в условието. Вижте сами:

Задача 3.5. Нека R е следната програма над *целите* числа:

$$\begin{array}{lll}
F(X,Y).X + G(X,Y).Y & \quad \texttt{where} & \\
F(X,Y) \ = \ \texttt{if } X == Y & \texttt{then } 1 & \\
& \texttt{else if } X > Y & \texttt{then } G(Y,X) \\
& & \texttt{else } F(X,Y\text{–}X)\text{–}G(X,Y\text{–}X) \\
G(X,Y) \ = \ \texttt{if } X == Y & \texttt{then } \ 0 & \\
& \texttt{else if } \ X > Y & \texttt{then } \ F(Y,X) \\
& & \texttt{else } \ G(X,Y-X)
\end{array}$$

Докажете, че за $D_V(R)$ е изпълнено:

а)

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ (!D_V(R)(x,y) \implies D_V(R)(x,y) \simeq \text{НОД}(x,y))$$

(тук отново предполагаме, че НОД$(0,0) = 0$).
б)

$$\forall x \in \mathbb{N}^{+} \forall y \in \mathbb{N}^{+}\ !D_V(R)(x,y).$$

Да отбележим, че в подточка б) условието за завършване е за *положители* x и y, докато в подточка а) условието е за *всички естествени* числа x и y. Истината е, че когато точно едното от двете x и y е 0, програмата R не завършва, т.е. $\neg !D_V(R)(x,y)$, но условието в подточка а) е вярно и за тези x и y, защото то е от тип частична коректност.

Решение. **а)** Да означим с Γ и Δ операторите, определени от дефинициите на F и G:

$$\Gamma(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако} \quad x = y \\ g(y,x), & \text{ако} \quad x > y \\ f(x,y-x) - g(x,y-x)), & \text{ако} \quad x < y \end{cases}$$

$$\Delta(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако} \quad x = y \\ f(y,x), & \text{ако} \quad x > y \\ g(x,y-x), & \text{ако} \quad x < y. \end{cases}$$

Полагаме

$$\mathbf{\Gamma}(f,g) \stackrel{\text{деф}}{=} (\Gamma(f,g), \Delta(f,g))$$

и нека отново (f^*, g^*) е най-малката неподвижна точка на $\mathbf{\Gamma}$. Чрез нея се определя функцията $D_V(R)$, която тук ще е следната:

$$D_V(R)(x,y) \simeq f^*(x,y).x + g^*(x,y).y.$$

Да заместим $D_V(R)$ в условието, което трябва да доказваме:

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ (\ \underbrace{!D_V(R)(x,y)}_{f^*(x,y).x+g^*(x,y).y} \implies \underbrace{D_V(R)(x,y)}_{f^*(x,y).x+g^*(x,y).y} = \text{НОД}(x,y)\ ).$$

Така получаваме следното свойство $P(f,g)$:

$$P(f,g) \iff \forall x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} (!f(x,y) \& !g(x,y) \implies f(x,y).x + g(x,y).y = \text{НОД}(x,y)).$$

Засега нямаме представа дали с това свойство P ще успеем да извършим индуктивния преход при μ-индукцията на Скот, но не пречи да опитаме. Най-напред, P е от тип "частична коректност" и следователно е непрекъснато. Освен това то е в сила за $(\emptyset^{(2)}, \emptyset^{(2)})$.

Сега се заемаме с проверката на второто изискване към P: за всички $(f, g) \in \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2$ да е изпълнено

$$P(f, g) \implies P(\Gamma(f, g),\ \Delta(f, g)).$$

Наистина, да вземем произволни (f, g) от $\mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2$ и да приемем, че $P(f, g)$ е вярно (*индуктивна хипотеза*).

Трябва да покажем, че и $P(\Gamma(f, g), \Delta(f, g))$ е вярно. Да го разпишем най-напред:

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ (!\Gamma(f, g)(x, y)\ \&\ !\Delta(f, g)(x, y) \implies$$

$$\Gamma(f, g)(x, y).x + \Delta(f, g)(x, y).y = \text{НОД}(x, y)).$$

Наистина, да вземем произволни *естествени числа* $x, y \in \mathbb{N}$ и да приемем, че за тях $!\Gamma(f, g)(x, y)$ и $!\Delta(f, g)(x, y)$. Разглеждаме трите възможности за x и y от дефинициите на Γ и Δ (които за късмет се оказват едни и същи):

1 сл. $x = y$. В този базов случай $\Gamma(f, g)(x, y) \stackrel{\text{деф}}{=} 1$, $\Delta(f, g)(x, y) \stackrel{\text{деф}}{=} 0$ и тогава

$$\Gamma(f, g)(x, y).x + \Delta(f, g)(x, y).y \ = x = \text{НОД}(x, y).$$

2 сл. $x > y$. Тук $\Gamma(f, g)(x, y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} g(y, x)$, а $\Delta(f, g)(x, y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(y, x)$,

Условията $!\Gamma(f, g)(x, y)$ и $!\Delta(f, g)(x, y)$ означават, че са дефинирани $g(y, x)$ и $f(y, x)$. Тогава е изпълнена предпоставката в и.х. $P(f, g)$ и значи можем да запишем:

$$\Gamma(f, g)(x, y).x + \Delta(f, g)(x, y).y \ = \ g(y, x).x + f(y, x).y$$

$$= f(y, x).y + g(y, x).x \stackrel{\text{и.х. } P(f,g)}{=} \text{НОД}(y, x) \ = \ \text{НОД}(x, y).$$

3 сл. $x < y$. По дефиниция

$$\Gamma(f, g)(x, y) \simeq f(x, y - x) - g(x, y - x), \quad \Delta(f, g)(x, y) \simeq g(x, y - x).$$

Да отбележим, че понеже $x < y$, то $y - x$ е естествено число. В този случай имаме, че със сигурност са дефинирани изразите $f(x, y - x)$ и $g(x, y - x)$. Следователно отново можем да приложим индуктивната хипотеза $P(f, g)$:

$$\Gamma(f, g)(x, y).x + \Delta(f, g)(x, y).y = (f(x, y - x) - g(x, y - x)).x + g(x, y - x).y$$

$$= f(x, y - x).x + g(x, y - x).(y - x) \stackrel{\text{и.х. } P(f,g)}{=} \text{НОД}(x, y - x) = \text{НОД}(x, y).$$

Финално, нашето свойство P удовлетворява трите изисквания на принципа на Скот, следователно то ще е изпълнено и за най-малката неподвижна точка $f_{\mathbf{\Gamma}} = (f^*, g^*)$:

$$\forall x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N}(!f^*(x,y)\ \&\ !g^*(x,y) \implies \underbrace{f^*(x,y).x + g^*(x,y).y}_{D_V(R)(x,y)} = \text{НОД}(x,y)).$$

Но вече видяхме, че това е еквивалентно точно на условието от задачата:

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}(!D_V(R)(x,y) \implies D_V(R)(x,y) = \text{НОД}(x,y)).$$

б) Трябва да покажем, че

$$\forall x \in \mathbb{N}^+ \forall y \in \mathbb{N}^+\ !D_V(R)(x,y)$$

или все едно

$$\forall x \in \mathbb{N}^+ \forall y \in \mathbb{N}^+\ !f^*(x,y)\ \&\ g^*(x,y).$$

Всъщност истината е, че това условие е в сила за *всяка* неподвижна точка (f,g) на оператора $\mathbf{\Gamma}$, с други думи, за коя да е двойка функции (f,g), такива че:

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } \ x = y \\ g(y,x), & \text{ако } \ x > y \\ f(x, y-x) - g(x, y-x)), & \text{ако } \ x < y \end{cases}$$

$$g(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } \ x = y \\ f(y,x), & \text{ако } \ x > y \\ g(x, y-x), & \text{ако } \ x < y. \end{cases}$$

Да фиксираме една такава двойка (f,g). С индукция по лексикографската наредба $\prec$ на $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ ще покажем, че

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+\ \underbrace{!f(x,y)\ \&\ !g(x,y)}_{P(x,y)}.$$

Наистина, да вземем произволни (x,y) и да приемем, че

$$\forall (x',y')_{(x',y') \prec (x,y)}\ P(x',y') \qquad \textit{(индуктивна хипотеза)}.$$

Искаме да покажем, че и $P(x,y)$ е вярно. Разглеждаме трите случая за (x,y) от определенията на Γ и Δ:

1 сл. $x = y$. Тогава $f(x,y) = 1$, а $g(x,y) = 0$ и очевидно $P(x,y)$ е вярно.

2 сл. $x > y$. Тук имаме

$$f(x,y) \simeq g(y,x) \quad \text{и} \quad g(x,y) \simeq f(y,x).$$

Но $(y,x) \prec (x,y)$ и твърдението следва от и.х. $P(y,x)$.

3 сл. $x < y$. И тук разсъжденията вървят леко — проведете ги. $\square$

Ето и още една стандартна задача на тази тема:

Задача 3.6. Дадена е следната програма R:

$F(X,Y,1)$ `where`
$F(X,Y,Z)$ = `if` $X \le 1$ `then` Z `else` $F(X-1,Y,\ Z.G(X,Y))$
$G(X,Y)$ = `if` $Y == 0$ `then` 1 `else` $X.G(X,Y-1)$

Докажете, че за $D_V(R)$ е изпълнено:

$$\forall x \forall y (!D_V(R)(x,y) \implies D_V(R)(x,y) = (x!)^y).$$

Решение. Означаваме с

$$\Gamma : \mathcal{F}_3 \times \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \quad \text{и} \quad \Delta : \mathcal{F}_3 \times \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$$

термалните оператори, които съответстват на дефинициите на F и G:

$$\Gamma(f,g)(x,y,z) \simeq \begin{cases} z, & \text{ако } x \le 1 \\ f(x-1,y,z.g(x,y)), & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\Delta(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } y = 0 \\ x.g(x,y-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

и съответно полагаме

$$\mathbf{\Gamma}(f,g) \ = \ (\Gamma(f,g), \Delta(f,g)).$$

Разбира се, $\mathbf{\Gamma}$ вече е в подходящия формат

$$\mathbf{\Gamma} : \ \mathcal{F}_3 \times \mathcal{F}_2 \ \longrightarrow \ \mathcal{F}_3 \times \mathcal{F}_2,$$

за да говорим за негови неподвижни точки.

Да означим с (f^*, g^*) най-малката неподвижна точка на $\mathbf{\Gamma}$. Тогава по определение

$$D_V(R)(x,y) \ \simeq \ f^*(x,y,1).$$

Не е трудно да се ориентираме, че най-вероятно $f^*(x,y,z) = z.(x!)^y$, а $g^*(x,y) = x^y$. Това ни навежда на мисълта да изберем следните свойства P_1 и P_2:

$$P_1(f) \stackrel{\text{деф}}{\iff} \forall x \forall y \forall z (!f(x,y,z) \implies f(x,y,z) = z.(x!)^y),$$

$$P_2(g) \stackrel{\text{деф}}{\iff} \forall x \forall y (!g(x,y) \implies g(x,y) = x^y).$$

Понеже P_1 и P_2 са от тип частична коректност, те са непрекъснати. Съгласно *Задача* 3.3, непрекъсната ще е и тяхната конюнкция

$$P(f,g) \iff P_1(f) \,\&\, P_2(g).$$

Освен това $P(\emptyset^{(3)}, \emptyset^{(2)})$ е тривиално вярно. Значи остана да покажем, че свойството P се запазва при прехода $(f,g) \Longrightarrow\ (\Gamma(f,g),\ \Delta(f,g))$.

Наистина, да приемем, че $P(f,g)$ е изпълнено за произволна двойка функции (f,g). Трябва да покажем $P(\Gamma(f,g),\ \Delta(f,g))$, което ще рече да покажем $P_1(\Gamma(f,g))$ и $P_2(\Delta(f,g))$.

Да се заемем първо с $P_1(\Gamma(f,g))$, което разписано изглежда така:

$$\forall x \forall y \forall z (!\Gamma(f,g)(x,y,z) \implies \Gamma(f,g)(x,y,z) \simeq z.(x!)^y).$$

Наистина, да изберем *произволни* естествени x, y и z и да приемем, че $!\Gamma(f,g)(x,y,z)$. Разглеждаме поотделно двата случая от определението на Γ:

1 сл. $x \leq 1$. В този случай $\Gamma(f,g)(x,y,z) \stackrel{\text{деф}}{=} z =\ z.(x!)^y$.

2 сл. $x > 1$. Тук $\Gamma(f,g)(x,y,z) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(x-1, y, z.g(x,y))$.

Понеже $!\Gamma(f,g)(x,y,z)$, то в частност $!g(x,y)$ и съгласно и.х. $P_2(g)$ ще имаме, че $g(x,y) \simeq x^y$. Тогава

$$\Gamma(f,g)(x,y,z)\ \simeq\ f(x-1, y, z.\underbrace{g(x,y)}_{x^y})\ \stackrel{\text{и.х. } P_1(f)}{\simeq}\ (z.x^y).[(x-1)!]^y\ =\ z.(x!)^y.$$

С това показахме $P_1(\Gamma(f,g))$. Второто условие $P_2(\Delta(f,g))$ изглежда така:

$$\forall x \forall y (!\Delta(f,g)(x,y) \implies \Delta(f,g)(x,y) = x^y).$$

Отново избираме произволни $x, y \in \mathbb{N}$ и приемаме, че $!\Delta(f,g)(x,y)$. Пак разглеждаме поотделно двата случая от определението на Δ:

1 сл. $y = 0$. В този случай $\Delta(f,g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{=} 1 = x^y$.

2 сл. $x > 0$. Тогава $\Delta(f,g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} x.g(x, y-1)$.

Понеже $!\Delta(f,g)(x,y)$, то значи и $!g(x,y-1)$ и следователно можем да приложим индукционната хипотеза $P_2(g)$. Така получаваме

$$\Delta(f,g)(x,y)\ \simeq\ x.g(x,y-1) \stackrel{\text{и.х. } P_2(g)}{=} x.x^{y-1}\ =\ x^y,$$

което приключва проверката на $P_2(\Delta(f,g))$. Значи общо можем да твърдим, че $P(\Gamma(f,g), \Delta(f,g))$ е вярно, т.е. изискването 2) от индуктивния принцип на Скот е изпълнено. Тогава свойството P ще вярно за най-малката неподвижна точка (f^*, g^*) на оператора $\mathbf{\Gamma}$. В частност, ще е вярно $P_1(f^*)$:

$$\forall x \forall y \forall z(!f^*(x,y,z) \implies f^*(x,y,z) = z.(x!)^y).$$

Оттук при $z = 1$ ще имаме

$$\forall x \forall y(!f^*(x,y,1) \implies f^*(x,y,1) = (x!)^y)$$

и значи за $D_V(R)(x,y) \overset{\text{деф}}{\simeq} f^*(x,y,1)$ ще е изпълнено

$$\forall x \forall y(!D_V(R)(x,y) \implies D_V(R)(x,y) = (x!)^y).$$

$\square$

Задача 3.7. Докажете, че програмата

$F(N,1,1)$ `where`
$F(N,X,Y)$ = `if` $N == 0$ `then` X `else` $F(N-1, Y, X+Y)$

пресмята функцията на Фибоначи.

Решение. Трябва да покажем, че за $D_V(R)$ е изпълнено

$$\forall n \; D_V(R)(n) = fib_n,$$

където fib_n е n-тият член на редицата, дефинирана с рекурентната схема:

$$\begin{aligned} &fib_0 = 1 \\ &fib_1 = 1 \\ &fib_n = fib_{n-1} + fib_{n-2} \quad \text{за } n \geq 2. \end{aligned}$$

Ясно е, че тук интересното условие е частичната коректност на R; това, че тя винаги завършва е очевадно.

Да означим с Γ оператора, който декларацията на F определя:

$$\Gamma(f)(n,x,y) \simeq \begin{cases} x, & \text{ако } \; n = 0 \\ f(n-1, y, x+y), & \text{ако } \; n > 0. \end{cases}$$

Като имаме предвид, че $D_V(R)(n) \overset{\text{деф}}{\simeq} f_\Gamma(n,1,1)$, свойството P, което казва, че R е частично коректна, трябва да изглежда така:

$$P(f) \iff \forall n(!f(n,1,1) \implies f(n,1,1) \simeq fib_n).$$

Ясно е, че такова P трудно ще мине през условието $P(f) \implies P(\Gamma(f))$, затова се опитваме да си съставим хипотеза за "цялата" функция $f_\Gamma(n,x,y)$.

Наистина, да вземем някаква неподвижна точка на Γ (всъщност това ще е със сигурност f_Γ, защото този оператор има единствена н.т.):

$$f(n,x,y) \;\simeq\; \begin{cases} x, & \text{ако } \; n=0 \\ f(n-1,y,x+y), & \text{ако } \; n>0. \end{cases}$$

Забелязваме, че

$$f(0,x,y)=x, \quad f(1,x,y)=y, \quad f(2,x,y) \stackrel{\text{деф}}{=} f(1,y,x+y)=x+y.$$

Това ни навежда на мисълта, че може би за $n \geq 2$ стойностите на $f(n,x,y)$ ще се получават както при редицата на Фибоначи — като сума на предишните две стойности $f(n-1,x,y)$ и $f(n-2,x,y)$.

Да изберем следните свойства:

$$\begin{aligned} P_0(f) &\iff \forall x \forall y\ (!f(0,x,y) \implies f(0,x,y)=x) \\ P_1(f) &\iff \forall x \forall y\ (!f(1,x,y) \implies f(1,x,y)=y) \\ Q(f) &\iff \forall n_{n \geq 2} \forall x \forall y\ (!f(n,x,y) \ \&\ !f(n-1,x,y) \ \&\ !f(n-2,x,y) \\ &\implies f(n,x,y)=f(n-1,x,y)+f(n-2,x,y)\ ). \end{aligned}$$

Нека

$$R(f) \iff P_0(f) \ \&\ P_1(f) \ \&\ Q(f).$$

Насочваме се директно към проверката на второто изискване от правилото на Скот. За целта да приемем, че за някоя функция f е изпълнено $R(f)$. Искаме да покажем $R(\Gamma(f))$.

Условието $P_0(\Gamma(f))$ е тривиално:

$$P_0(\Gamma(f)) \iff \forall x \forall y\ (!\Gamma(f)(0,x,y) \implies \underbrace{\Gamma(f)(0,x,y)}_{\stackrel{\text{деф}}{=} x} = x).$$

За $P_1(\Gamma(f))$:

$$P_1(\Gamma(f)) \iff \forall x \forall y\ (!\Gamma(f)(1,x,y) \implies \Gamma(f)(1,x,y) \simeq y.)$$

Нека $!\Gamma(f)(1,x,y)$. Вече видяхме, че $\Gamma(f)(1,x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(0,y,x+y)$. Тогава $!f(0,y,x+y)$ и от и.х. $P_0(f)$ ще имаме, че $f(0,y,x+y)=y$, което доказва и $P_1(\Gamma(f))$.

Остана да покажем и $Q(\Gamma(f))$, което изглежда така:

$$\begin{aligned} Q(\Gamma(f)) &\iff \forall n_{n \geq 2} \forall x \forall y\ (!\Gamma(f)(n,x,y) \ \&\ !\Gamma(f)(n-1,x,y) \ \&\ !\Gamma(f)(n-2,x,y) \\ &\implies \Gamma(f)(n,x,y)=\Gamma(f)(n-1,x,y)+\Gamma(f)(n-2,x,y)\ ). \end{aligned}$$

За целта избираме $n \geq 2$ и приемаме, че $!\Gamma(f)(n,x,y)$, $!\Gamma(f)(n-1,x,y)$ и $!\Gamma(f)(n-2,x,y)$.

1 сл. $n = 2$. Тогава

$$\Gamma(f)(2, x, y) \simeq f(1, y, x + y).$$

В частност, $!f(1, y, x + y)$ и съгласно $P_1(f)$, $f(1, y, x + y) \simeq x + y$. Следователно в този случай

$$\Gamma(f)(2, x, y) \simeq \underbrace{\Gamma(f)(1, x, y)}_{y} + \underbrace{\Gamma(f)(0, x, y)}_{x}.$$

2 сл. $n > 2$. Тук

$$\Gamma(f)(n, x, y) = f(n-1, y, x+y), \quad \Gamma(f)(n-1, x, y) \simeq f(n-2, y, x+y)$$
$$\text{и} \quad \Gamma(f)(n-2, x, y) \simeq f(n-3, y, x+y).$$

Понеже всички тези изрази са определени, от индуктивната хипотеза $Q(f)$ ще имаме, че

$$f(n-1, y, x+y) = f(n-2, y, x+y) + f(n-3, y, x+y),$$

което завършва проверката на $Q(\Gamma(f))$. Прилагайки правилото на Скот, получаваме, че ще е вярно $R(f_\Gamma)$, от което твърдението от задачата следва непосредствено. $\square$

Задача 3.8. Решете горната задача, като използвате свойството

$$Q(f) \iff \forall n_{n \geq 2} \forall x \forall y (!f(n, x, y) \implies f(n, x, y) = x.fib_{n-2} + y.fib_{n-1}),$$

разбира се, отново допълнено за случаите $n = 0$ и $n = 1$.

Задача 3.9. (зад. 4 от Домашно №3.) Да означим с R следната рекурсивна програма:

$G(X, Y)$ `where`
$F(X, Y)$ = `if` $Y == 0 \lor X == Y$ `then` 1
`else` $F(X \dot{-} 1, Y - 1) + F(X \dot{-} 1, Y)$
$G(X, Y)$ = `if` $Y == 0$ `then` 1 `else` $G(X, Y - 1) + F(X + Y, Y)$

Докажете, че за $D_V(R)$ е изпълнено условието:

$$\forall x \forall y (!D_V(R)(x, y) \implies D_V(R)(x, y) \simeq \binom{x + y + 1}{y}).$$

Решение. Нека Γ и Δ са операторите, определени от дефинициите на F и G:

$$\Gamma(f, g)(x, y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } y = 0 \ \lor \ x = y \\ f(x \dot{-} 1, y - 1) + f(x \dot{-} 1, y), & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\Delta(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } y = 0 \\ g(x,y-1) + f(x+y,y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ако дефиницията на F ви навява някаква асоциация с ето това свойство на биномните коефициенти:

$$\binom{x}{y} = \binom{x-1}{y-1} + \binom{x-1}{y} \quad \text{за} \quad x \geq y > 0$$

— на прав път сте ‿̈. В такъв случай свойството $P_1(f)$ би трябвало да е следното:

$$P_1(f) \iff \forall x \forall y (!f(x,y) \ \& \ x \geq y \Longrightarrow \ f(x,y) \simeq \binom{x}{y}).$$

Да означим с (f^*, g^*) най-малката неподвижна точка на оператора $\Gamma \times \Delta$. Понеже в условието се казва, че $D_V(R)(x,y) \simeq \binom{x+y+1}{y}$ (там, където е дефинирана), а от друга страна $D_V(R) = g^*$, за свойството $P_2(g)$ няма какво да се замисляме — то трябва да е

$$P_2(g) \iff \forall x \forall y (!g(x,y) \Longrightarrow \ g(x,y) \simeq \binom{x+y+1}{y}).$$

Сега вече прилагаме принципа за μ-индукция на Скот към свойството

$$P(f,g) \overset{\text{деф}}{\iff} P_1(f) \ \& \ P_2(g).$$

Насочваме се директно към най-интересната част — проверка на условието $P(f,g) \implies P(\Gamma(f,g))$.

Наистина, да приемем, че $P(f,g)$ е изпълнено за произволна двойка функции (f,g). Трябва да покажем $P_1(\Gamma(f,g))$ и $P_2(\Delta(f,g))$. Да се заемем най-напред с първото от тях, което разписано изглежда така:

$$\forall x \forall y (!\Gamma(f,g)(x,y) \ \& \ x \geq y \implies \Gamma(f,g)(x,y) \simeq \binom{x}{y}).$$

Да изберем произволни естествени x и y, такива, че $x \geq y$ и нека за тях $!\Gamma(f,g)(x,y)$. Разглеждаме случаите от определението на Γ:

1 сл. $y = 0$. В този случай $\Gamma(f,g)(x,y) \overset{\text{деф}}{\simeq} 1 = \binom{x}{0}$.

2 сл. $x = y$. Тук отново $\Gamma(f,g)(x,y) \overset{\text{деф}}{\simeq} 1 = \binom{x}{y}$.

3 сл. $y \neq 0 \ \& \ x \neq y$. Тук $\Gamma(f,g)(x,y) \overset{\text{деф}}{\simeq} f(x \dot{-} 1, y-1) + f(x \dot{-} y)$.
От това, че $x > 0$ (защото $x \geq y \neq 0$) ще имаме $x \dot{-} 1 = x - 1$. Като имаме предвид и горното, условието $!\Gamma(f,g)(x,y)$ става еквивалентно на $!f(x-1,y-1)$ и $!f(x-1,y)$.

Понеже $x \geq y$ и $y \neq 0$, то $x-1 \geq y-1 \geq 0$. Имаме още $!f(x-1, y-1)$ и следователно можем да приложим индуктивната хипотеза $P_1(f)$. Ще получим, че

$$f(x-1, y-1) \simeq \binom{x-1}{y-1}.$$

Аналогично, от $x \geq y$ и $x \neq y$ ще имаме $x-1 \geq y$; освен това $!f(x-1, y)$ и значи

$$f(x-1, y) \simeq \binom{x-1}{y}.$$

Сега вече

$$\Gamma(f,g)(x,y) \overset{\text{деф}}{\simeq} f(x-1,y-1)+f(x-1,y) \overset{P_1(f)}{\simeq} \binom{x-1}{y-1}+\binom{x-1}{y} = \binom{x}{y}.$$

С това показахме $P_1(\Gamma(f,g))$.
Второто условие $P_2(\Delta(f,g))$ изглежда така:

$$\forall x \forall y(!\Delta(f,g)(x,y) \implies \Delta(f,g)(x,y) \simeq \binom{x+y+1}{y}).$$

Отново избираме произволни $x, y \in \mathbb{N}$ и приемаме, че $!\Delta(f,g)(x,y)$. Пак разглеждаме поотделно двата случая от определението на Δ:

1 сл. $y = 0$. В този случай $\Delta(f,g)(x,y) \overset{\text{деф}}{\simeq} 1 = \binom{x+1}{0}$.

2 сл. $y > 0$. Тогава $\Delta(f,g)(x,y) \overset{\text{деф}}{\simeq} g(x, y-1) + f(x+y, y)$..
Понеже $!\Delta(f,g)(x,y)$, значи имаме $!g(x, y-1)$ и $!f(x+y, y)$. Следователно можем да приложим индуктивните хипотези $P_1(f)$ и $P_2(g)$. Така получаваме

$$\Delta(f,g)(x,y) \ \simeq \ g(x,y-1)+f(x+y,y) \simeq \binom{x+y}{y-1}+\binom{x+y}{y} = \binom{x+y+1}{y},$$

което приключва проверката на $P_2(\Delta(f,g))$, а оттук и на изискването 2) от индуктивния принцип на Скот. Тогава свойството P ще вярно за н.м.н.т. (f^*, g^*) на $\mathbf{\Gamma}$. В частност, $P_2(g^*)$ ни дава точно условието от задачата. $\square$

3.3 Областта на Скот $\boldsymbol{\mathcal{F}_k^\perp} = (\mathcal{F}_k^\perp,\ \sqsubseteq,\ \Omega^{(k)})$

3.3.1 Основни сведения

Да изберем елемент $\perp \notin \mathbb{N}$ и да положим

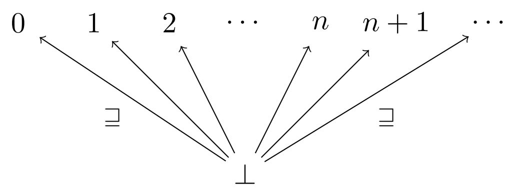
$$\mathbb{N}_\perp = \mathbb{N} \cup \{\perp\}.$$

Плоската наредба на $\mathbb{N}_\perp$ дефинираме посредством еквивалентността:

$$x \sqsubseteq y \iff x = \perp \ \vee \ x = y. \tag{3.8}$$

Ясно е, че $\perp \sqsubseteq x$ за всяко $x \in N_\perp$, т.е. $\perp$ е най-малкият елемент на $\mathbb{N}_\perp$. Образно казано, той е на дъното на $\mathbb{N}_\perp$, затова се нарича *bottom* елемент. Това ще е елементът, с който ще обозначаваме, че една функция няма стойност в дадена точка; например $f(5) = \perp$ ще означава, че f няма стойност в 5.

Ето как изглеждаше графиката на релацията $\sqsubseteq$ върху множеството $\mathbb{N}_\perp$ (без примките $n \sqsubseteq n$):



Да наблегнем отново на това, че релацията $\sqsubseteq$ няма нищо общо с числовото $\leq$. Две *числа* x и y са свързани с тази релация, т.е. $x \sqsubseteq y$, само когато $x = y$.

От лекциите знаем, че структурата $\boldsymbol{N_\perp} = (N_\perp, \sqsubseteq, \perp)$ е ОС; ще я наричаме *плоска област на Скот*. Точната горна граница на монотонно растящата редица $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq \dots$ в $N_\perp$ ще означаваме с

$$\bigsqcup_n x_n.$$

В декартовото произведение $\mathbb{N}_\perp^k = \underbrace{\mathbb{N}_\perp \times \dots \times \mathbb{N}_\perp}_{k}$ дефинираме *покомпонентната наредба*, индуцирана от плоската наредба в $\mathbb{N}_\perp$, по следния начин:

$$(x_1, \dots, x_k) \sqsubseteq (y_1, \dots, y_k) \overset{\text{деф}}{\iff} x_1 \sqsubseteq y_1 \ \& \ \dots \ \& \ x_k \sqsubseteq y_k.$$

Тази наредба в $\mathbb{N}_\perp^k$ ще отбелязваме със същия символ $\sqsubseteq$ и отново ще наричаме *плоска наредба.*

Ще пишем $\bar{x} \sqsubset \bar{y}$, за да означим, че $\bar{x} \sqsubseteq \bar{y}$ и $\bar{x} \neq \bar{y}$.

На лекции видяхме, че структурата

$$\boldsymbol{\mathbb{N}_\perp^k} = (\underbrace{\mathbb{N}_\perp \times \cdots \times \mathbb{N}_\perp}_{k},\ \sqsubseteq,\ \underbrace{(\perp, \dots, \perp)}_{k}\ )$$

също е област на Скот. И нея ще наричаме *плоска област на Скот.*

Да напомним и дефиницията на *функционалната* област на Скот, породена от плоската ОС $\boldsymbol{\mathbb{N}_\perp^k}$:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_k^\perp} = (\mathcal{F}_k^\perp,\ \sqsubseteq,\ \Omega^{(k)}).$$

Тази област е с домейн множеството $\mathcal{F}_k^\perp$ от всички *тотални* k-местни функции в $\mathbb{N}_\perp$:

$$\mathcal{F}_k^\perp = \{f |\ f\colon\ \mathbb{N}_\perp^k\ \to \mathbb{N}_\perp\}.$$

Означаваме я така по аналогия с областта на Скот на *частичните* функции $\boldsymbol{\mathcal{F}_k} = (\mathcal{F}_k,\ \subseteq,\ \emptyset^{(k)})$, в която работехме дотук.

Наредбата в $\mathcal{F}_k^\perp$ е *поточковата наредба*, индуцирана от плоската наредба в $\mathbb{N}_\perp$, по-точно:

$$f \sqsubseteq g \ \stackrel{\text{деф}}{\Longleftrightarrow}\ \forall x_1 \in \mathbb{N}_\perp \dots \forall x_k \in \mathbb{N}_\perp\ f(x_1, \dots, x_k) \sqsubseteq g(x_1, \dots, x_k). \quad (3.9)$$

Наредбата $\sqsubseteq$ е пълна, т.е. всяка монотонно растяща редица $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq \dots$ в $\mathcal{F}_k^\perp$ има *точна горна граница* (*least upper bound* или *lub*). Тази граница ще означаваме с $\bigsqcup\limits_n f_n$. Очаквано, и тя се дефинира поточково:

$$\underbrace{(\bigsqcup_n f_n)(\bar{x})}_{lub\text{ в }\mathcal{F}_k^\perp} \ \stackrel{\text{деф}}{=}\ \underbrace{\bigsqcup_n f_n(\bar{x})}_{lub\text{ в }\mathbb{N}_\perp}. \quad (3.10)$$

Най-малкият елемент на $\mathcal{F}_k^\perp$ — функцията $\Omega^{(k)}$ — дефинираме така:

$$\Omega^{(k)}(x_1, \dots, x_k) \stackrel{\text{деф}}{=}\ \perp$$

за всяка k-орка $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}_\perp^k$.

Функцията $\Omega^{(k)}$ съответства на никъде недефинираната функция $\emptyset^{(k)}$ при частичните функции, която беше такава, че

$$\neg!\emptyset^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$$

за всяка k-орка $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$.

Задача 3.10. Докажете, че за произволни функции $f, g \in \mathcal{F}_k^{\perp}$:

$$f \sqsubseteq g \iff \forall \bar{x} \in \mathbb{N}_{\perp}^k \ (f(\bar{x}) \neq \perp \implies f(\bar{x}) = g(\bar{x})).$$

Решение. Следва директно от дефиницията (3.8) на плоска наредба и това, че дизюнкцията $p \ \vee \ q$ е еквивалентна на $\neg p \implies q$:

$$f \sqsubseteq g \overset{(3.9)}{\iff} \forall \bar{x} \in \mathbb{N}_{\perp}^k \ (f(\bar{x}) \sqsubseteq g(\bar{x})) \overset{(3.8)}{\iff} \forall \bar{x} \in \mathbb{N}_{\perp}^k \ (f(\bar{x}) = \perp \ \vee \ f(\bar{x}) = g(\bar{x}))$$
$$\iff \forall \bar{x} \in \mathbb{N}_{\perp}^k \ (f(\bar{x}) \neq \perp \implies f(\bar{x}) = g(\bar{x})).$$

□

Обърнете внимание колко си приличат горната характеризация на $f \sqsubseteq g$ и дефиницията на релацията $\subseteq$ между частични функции:

$$f \subseteq g \iff \forall \bar{x} \in \mathbb{N}^k \ (!f(\bar{x}) \implies f(\bar{x}) \simeq g(\bar{x})).$$

Подобна аналогия забелязваме и между определението на точна горна граница $g = \bigcup_n f_n$ на монотонно растяща редица $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \ldots$ в $\mathcal{F}_k$:

$$g(\bar{x}) \simeq y \iff \exists n \ f_n(\bar{x}) \simeq y$$

и следващото свойство на точната горна граница в $\mathcal{F}_k^{\perp}$:

Задача 3.11. Нека $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq \ldots$ е монотонно растяща редица в $\mathcal{F}_k^{\perp}$ и $g = \bigsqcup\limits_n f_n$ е нейната точна горна граница. Докажете, че за всяка k-орка $\bar{x} \in \mathbb{N}_{\perp}^k$ и $y \in \mathbb{N}$ е изпълнено:

а) $g(\bar{x}) = \perp \iff \forall n \ f_n(\bar{x}) = \perp$;

б) $g(\bar{x}) = y \iff \exists n \ f_n(\bar{x}) = y$.

Решение. Нека $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq \ldots$ е монотонно растяща. За произволно $\bar{x} \in \mathbb{N}_{\perp}^k$ и да означим $y_n \overset{\text{деф}}{=} f_n(\bar{x})$. От това, че редицата от функции е монотонно растяща в $\mathcal{F}_k^{\perp}$ следва, че и редицата от стойностите им ще е монотонно растяща в $\mathbb{N}_{\perp}$, т.е. ще имаме

$$y_0 \sqsubseteq y_1 \sqsubseteq y_2 \sqsubseteq \ldots.$$

От основните свойства на плоската наредба от лекциите знаем, че всяка монотонно растяща редица в $\mathbb{N}_{\perp}$ изглежда по един от следните два начина:

– $\perp, \ \perp, \ \perp, \ \ldots$ с граница $\perp$;

– $\underbrace{\perp, \ldots \perp}_{n \geq 0}, y, \ y, \ \ldots$ с граница $y \in \mathbb{N}$.

Сега вече условията от твърдението изглеждат съвсем очевидни. □

Да обобщим наблюдението от края на това доказателството:

Задача 3.12. Докажете, че всяка монотонно растяща редица в областта на Скот $(\mathbb{N}_\perp^k,\ \sqsubseteq,\ \underbrace{(\perp,\dots,\perp)}_{k})$ има краен брой различни елементи.

Решение. Ако $(x_1,\dots,x_k) \sqsubset (y_1,\dots,y_k)$, то за поне едно $i \in \{1,\dots,k\}$ ще е вярно, че $x_i \sqsubset y_i$. Това според дефиницията на плоска наредба (3.8) означава, че $x_i = \perp$, а $y_i \in \mathbb{N}$. Когато имаме монотонно растяща редица от k-орки, е ясно, че това може да се случи най-много k пъти и следователно различните елементи в редицата ще са най-много $k+1$.

Ето един пример за $k = 3$, който казва всичко:

$$(\perp,\perp,\perp)\ \sqsubset\ (\perp,\ 5,\perp)\ \sqsubset\ (\perp,5,3)\ \sqsubset\ (0,5,3).$$

□

3.3.2 Точни функции

Казваме, че функцията $f\colon\ \mathbb{N}_\perp^k\ \longrightarrow\ \mathbb{N}_\perp$ е *точна* (или *стриктна, strict*), ако за всяка k-орка $(x_1,\dots\ x_k) \in \mathbb{N}_\perp^k$ е изпълнено:

$$(\exists i\colon x_i = \perp)\ \Longrightarrow\ f(x_1,\dots\ x_k) = \perp.$$

С други думи, една функция е точна, ако всеки път, когато някой от аргументите ѝ е $\perp$, стойността ѝ също е $\perp$.

На пръв поглед между една частична функция $f\colon\ \mathbb{N}^k \multimap \mathbb{N}$ и една точна функция $f\colon\ \mathbb{N}_\perp^k\ \longrightarrow\ \mathbb{N}_\perp$ няма разлика, ако приемем, че условието $\neg!f(\bar{x})$ отговаря на $f(\bar{x}) = \perp$. Да не забравяме, обаче, че сред аргументите на $f\colon\ \mathbb{N}_\perp^k\ \longrightarrow\ \mathbb{N}_\perp$ може да има $\perp$, за разлика от аргументите на частичната функция $f\colon\ \mathbb{N}^k \multimap \mathbb{N}$, които са само естествени числа.

Множеството на всички k-местни точни функции ще означаваме с $\mathcal{S}_k$:

$$\mathcal{S}_k\ =\ \{f \mid f\colon\ \mathbb{N}_\perp^k\ \longrightarrow\ \mathbb{N}_\perp\ \&\ f \text{ е точна}\}.$$

Частичните функции от $\mathcal{F}_k$ "потапяме" в множеството $\mathcal{S}_k \subseteq \mathcal{F}_k^\perp$, като на всяка функция $f \in \mathcal{F}_k$ съпоставяме следната точна функция:

$$f^*(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{ако } \bar{x} \in \mathbb{N}^k\ \&\ !f(\bar{x}) \\ \perp, & \text{иначе} \end{cases}$$

за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}_\perp^k$. Случаят "иначе" ще рече, че или сред елементите на k-орката $\bar{x}$ има $\perp$, или $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$, но $\neg!f(\bar{x})$.

Функцията f^* ще наричаме *естествено продължение* на f. Тя очевидно е точна функция.

Примери. Ето няколко примера за естествени продължения на функции и предикати:

а) Нека $f(x,y) = x+y$. Нейното естествено продължение f^* е функцията

$$f^*(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \;\&\; y \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \;\vee\; y = \perp. \end{cases}$$

б) Нека $x \texttt{ div } y$ е функцията целочислено деление

$$x \texttt{ div } y \simeq \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & \text{ако } y > 0 \\ \neg!, & \text{ако } y = 0. \end{cases}$$

Нейното естествено продължение $x \texttt{ div}^* y$ вече е тоталната функция

$$x \texttt{ div}^* y = \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \;\&\; y \in \mathbb{N}^+ \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \;\vee\; y = \perp \;\vee\; y = 0. \end{cases}$$

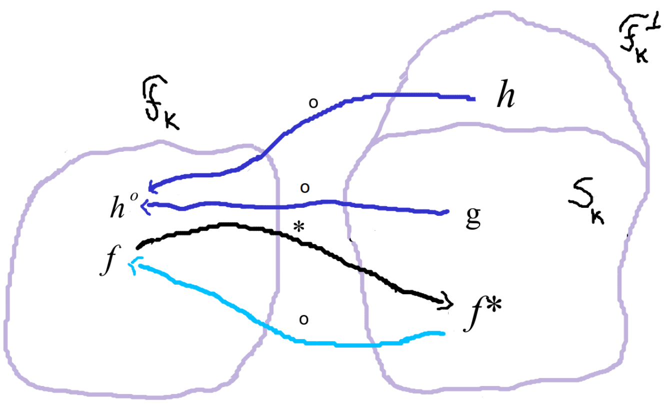
в) Да означим с E предиката "равенство". Неговото естествено продължение E^* има следната дефиниция:

$$E^*(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \;\&\; y \in \mathbb{N} \;\&\; x = y \\ 0, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \;\&\; y \in \mathbb{N} \;\&\; x \neq y \\ \perp, & x = \perp \;\vee\; y = \perp. \end{cases}$$

Да дефинираме и обратното изображение $^\circ$, което се прилага върху всички функции от $\mathcal{F}_k^\perp$ (не само върху точните). За всяка функция $f \in \mathcal{F}_k^\perp$ полагаме

$$f^\circ(\bar{x}) \simeq \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{ако } \; f(\bar{x}) \neq \perp \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3.11}$$

за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$.



Задача 3.13. Докажете, че една функция от $\mathcal{F}_k^{\perp}$ е точна тогава и само тогава, когато се явява естествено продължение на някоя частична функция от $\mathcal{F}_k$.

Решение. Всяка функция, която е естествено продължение, е точна по дефиниция. Обратно, ако една функция $f \in \mathcal{F}_k^{\perp}$ е точна, то тя очевидно е естествено продължение на функцията $f^{\circ} \in \mathcal{F}_k$. $\square$

Задача 3.14. Докажете, че:

а) За всяка функция $f \in \mathcal{F}_k$ е вярно, че $(f^*)^{\circ} \; = \; f$.

б) За всяка *точна* функция от $\mathcal{F}_k^{\perp}$ е вярно, че $(f^{\circ})^* = f$.

в) Дайте пример за функция $f \in \mathcal{F}_k^{\perp}$, за която равенството $(f^{\circ})^* = f$ вече не е в сила.

Решение. Подточки **а)** и **б)** са очевидни от дефинициите. $\ddot\smile$

в) Разгледайте например функцията $\lambda x.0$ от $\mathcal{F}_1^{\perp}$. $\square$

3.3.3 Монотонни функции в $\mathcal{F}_k^{\perp}$

Функцията $f: \; \mathbb{N}_{\perp}^k \; \longrightarrow \; \mathbb{N}_{\perp}$ наричаме *монотонна*, ако е изпълнено условието: за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}_{\perp}^k$ и $\bar{y} \in \mathbb{N}_{\perp}^k$:

$$\bar{x} \sqsubseteq \bar{y} \implies f(\bar{x}) \sqsubseteq f(\bar{y}).$$

Един първи пример за монотонни функции са точните функции:

Задача 3.15. Докажете, че всяка точна функция е монотонна.

Решение. Нека $f : \mathbb{N}_{\perp}^k \; \longrightarrow \; \mathbb{N}_{\perp}$ е точна функция. Да вземем произволни $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ и $\bar{y} = (y_1, \dots, y_k)$, такива че $\bar{x} \sqsubseteq \bar{y}$. Интересен е случаят, когато

$$(x_1, \dots, x_k) \sqsubset (y_1, \dots, y_k).$$

Тогава за поне едно $i \in \{1, \dots, k\}$ ще е изпълнено $x_i \sqsubset y_i$, което съгласно дефиницията на плоска наредба (3.8) означава, че $x_i = \perp$. Но f е точна и значи $f(\bar{x}) = \perp$, откъдето $f(\bar{x}) \sqsubseteq f(\bar{y})$. Следователно f е монотонна. $\square$

Множеството на всички k-местни монотонни функции ще означаваме с $\mathcal{M}_k$:

$$\mathcal{M}_k \; = \; \{f \mid f\colon \; \mathbb{N}_{\perp}^k \; \longrightarrow \; \mathbb{N}_{\perp} \; \& \; f \text{ е монотонна}\}.$$

От последната задача имаме, че $\mathcal{S}_k \subseteq \mathcal{M}_k$. Дали е строго включването? Да!

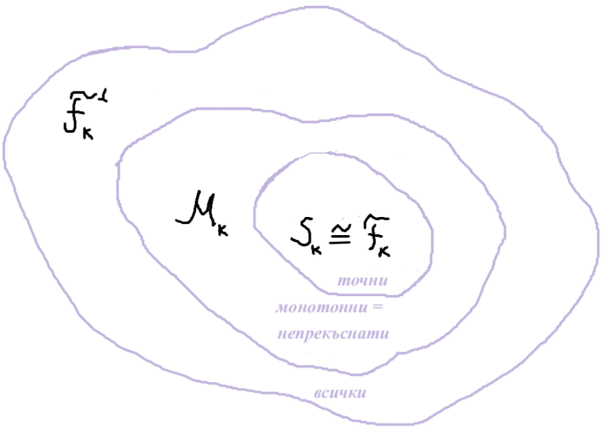
Задача 3.16. Докажете, че съществуват монотонни функции, които не са точни.

Решение. Нека $f\colon\ \mathbb{N}_\perp \longrightarrow \mathbb{N}_\perp$ е константната функция $\lambda x.c$, където $c \in \mathbb{N}$. Имаме $f(\perp) = c$ и следователно f не е точна. Тя, обаче, е монотонна, защото при $x \sqsubseteq y$ ще имаме:

$$f(x) \stackrel{\text{деф}}{=} c \stackrel{\text{деф}}{=} f(y), \quad \text{следователно} \quad f(x) \sqsubseteq f(y).$$

$\square$

Ето как изглеждат класовете от функции в $N_\perp$, които въведохме дотук:



Следващата задача обобщава резултата от горния пример и описва всички монотонни функции на един аргумент.

Задача 3.17. Докажете, че функцията $f\colon \mathbb{N}_\perp \longrightarrow \mathbb{N}_\perp$ е монотонна тогава и само тогава, когато е точна или е константна.

Решение. $\Longleftarrow$ Следва от предишните две задачи.

$\Longrightarrow$ Нека f е едноместна монотонна функция. Имаме две възможности:

1 сл. $f(\perp) = \perp$ и в този случай f е точна.

2 сл. $f(\perp) = y \in \mathbb{N}$. Понеже за всяко $x \in \mathbb{N}_\perp$: $\perp \sqsubseteq x$, то от монотонността на f ще имаме

$$f(\perp) \sqsubseteq f(x), \quad \text{т.е.} \quad y \sqsubseteq f(x).$$

Но $y \in \mathbb{N}$ и тогава $y \sqsubseteq f(x)$ означава $y = f(x)$, като това е за всяко $x \in \mathbb{N}_\perp$. Следователно функцията f е константна. $\square$

В горната задача беше важно, че f е едноместна функция. Ако функцията е на повече аргументи, това вече не е така.

Задача 3.18. Дайте пример за монотонна функция, която нито е точна, нито е константна.

Решение. Да разгледаме тази двуместна функция $f\colon\ \mathbb{N}^2_\perp \longrightarrow \mathbb{N}_\perp$:

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} \perp, & \text{ако } x = \perp \\ 5, & \text{ако } x \neq \perp. \end{cases}$$

f не е точна, защото например $f(0,\perp) = 5$. Очевидно тя не е и константна. Обаче f е монотонна: наистина, нека

$$(x,y) \;\sqsubset\; (x',y').$$

Разглеждаме поотделно двете възможности за x:

1 сл. $x = \perp$. Тук

$$f(\perp,y) \overset{\text{деф}}{=} \perp \;\sqsubseteq\; f(x',y').$$

2 сл. $x \neq \perp$. От строгото включване $(x,y) \;\sqsubset\; (x',y')$ следва, че непременно $y = \perp$. Пак от същото включване и това, че $x \in N$ ще имаме, че $x = x'$. Следователно

$$f(x,\perp) \overset{\text{деф}}{=} 5 \overset{\text{деф}}{=} f(x',y'), \quad \text{и значи} \quad f(x,y) \sqsubseteq f(x',y').$$

Така получихме, че f е монотонна. $\square$

За една функция $f : \mathbb{N}^k_\perp \longrightarrow \mathbb{N}_\perp$ ще казваме, че е *монотонна по i-тия си аргумент*, ако за всички $x_1,\dots,x_i,\dots,x_k, x_i^{'} \in \mathbb{N}_\perp$ е изпълнено условието:

$$x_i \sqsubseteq x_i^{'} \quad\Longrightarrow\quad f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_k) \sqsubseteq f(x_1,\dots,x_i^{'},\dots,x_k).$$

Задача 3.19. Докажете, че функцията $f\colon\ \mathbb{N}^k_\perp \longrightarrow \mathbb{N}_\perp$ е монотонна тогава и само тогава, когато е монотонна по всеки от аргументите си.

Решение. Правата посока е ясна.

Нека сега, че f е монотонна по всеки от аргументите си. Да вземем произволни $\bar{x} = (x_1,\dots,x_k)$ и $\bar{y} = (y_1,\dots,y_k)$, такива че $(x_1,\dots,x_k) \sqsubseteq (y_1,\dots,y_k)$. Тогава и $(x_1,\dots,x_k) \sqsubseteq (y_1,x_2,\dots,x_k)$, откъдето поради монотонността на f по първия ѝ аргумент ще имаме, че

$$f(x_1,\dots,x_k) \sqsubseteq f(y_1,\dots,y_k).$$

Аналогично, от това че $(y_1,x_2,\dots,x_k) \sqsubseteq (y_1,y_2,x_3,\dots,x_k)$ и монотонността на f по втория аргумент ще имаме, че

$$f(y_1,x_2,\dots,x_k) \sqsubseteq f(y_1,y_2,x_3,\dots,x_k).$$

Повтаряме неколкократно това разсъждение, докато стигнем до последното включване $f(y_1,\dots,y_{k-1},x_k) \sqsubseteq f(y_1,\dots,y_k)$. Така получаваме

$$f(x_1,\dots,x_k) \sqsubseteq f(y_1,x_2,x_3,\dots,x_k) \sqsubseteq\; \dots\; \sqsubseteq f(y_1,\dots,y_k)$$

и значи общо $f(\bar{x}) \sqsubseteq f(\bar{y})$. $\square$

Оказва се, че монотонните функции от $\mathcal{F}_k$ съвпадат с *непрекъснатите функции*. Този факт изглежда странен, защото знаем, че за изображенията (или операторите), действащи върху частични функции, свойството непрекъснатост е по-силно от свойството монотонност.

За изображенията f, действащи в плоската ОС $(\mathbb{N}^k_\perp,\ \sqsubseteq,\ \underbrace{(\perp,\dots,\perp)}_{k})$, обаче, това не е така, и причината е в *Задача* 3.12.

Да видим как ще изглежда определението за непрекъснатост на изображение, което имаме от общата теория, за случая на изображение f, действащо от плоската ОС $(\mathbb{N}^k_\perp,\ \sqsubseteq,\ \underbrace{(\perp,\dots,\perp)}_{k})$ към плоската ОС $(\mathbb{N}_\perp,\ \sqsubseteq,\ \perp)$:

Функцията $f:\ \mathbb{N}^k_\perp \longrightarrow \mathbb{N}_\perp$ е *непрекъсната*, ако за всяка монотонно растяща редица $\bar{x}^0 \sqsubseteq \bar{x}^1 \sqsubseteq \ \dots$ в $\mathbb{N}^k_\perp$ е в сила равенството:

$$f\ (\underbrace{\bigsqcup_n \bar{x}^n}_{\text{т.г.гр. е в } \mathbb{N}^k_\perp}) = \underbrace{\bigsqcup_n f(\bar{x}^n)}_{\text{т.г.гр. е в } \mathbb{N}_\perp}. \tag{3.12}$$

От общата теория на ОС знаем, че всяко непрекъснато изображение е монотонно. Да видим, че за функциите от $\mathcal{F}^\perp_k$ е вярно и обратното.

Задача 3.20. Нека $k \geq 1$. Докажете, че функцията $f:\ \mathbb{N}^k_\perp \longrightarrow \mathbb{N}_\perp$ е непрекъсната в ОС $(\mathbb{N}^k_\perp,\ \sqsubseteq,\ \underbrace{(\perp,\dots,\perp)}_{k})$ точно тогава, когато е монотонна.

Решение. Необходимо е да покажем само, че от монотонност следва непрекъснатост.

За целта да вземем една монотонна функция $f:\mathbb{N}^k_\perp \longrightarrow \mathbb{N}_\perp$. Нека $\bar{x}^0 \sqsubseteq\ \bar{x}^1 \sqsubseteq\ \dots$ е растяща редица в $\mathbb{N}^k_\perp$. От горната *Задача* 3.12 следва, че съществува индекс m, от който нататък редицата се стабилизира. Ясно е, че нейната граница ще е $\bar{x}^m$, т.е. редицата изглежда така:

$$\bar{x}^0 \sqsubseteq \bar{x}^1 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq \bar{x}^m = \bar{x}^m = \ \dots \qquad \text{с граница } \bar{x}^m.$$

Понеже f е монотонна, оттук веднага получаваме, че редицата

$$f(\bar{x}^0) \sqsubseteq f(\bar{x}^1) \sqsubseteq \dots \sqsubseteq f(\bar{x}^m) = f(\bar{x}^m)\ \dots$$

има граница $f(\bar{x}^m)$. Но тогава

$$f(\underbrace{\bigsqcup_n \bar{x}^n}_{\bar{x}^m}) = f(\bar{x}^m) = \bigsqcup_n f(\bar{x}^n)$$

и следователно f е непрекъсната. $\square$

Задача 3.21. а) Докажете, че наредената тройка $\boldsymbol{\mathcal{S}_k} = (\mathcal{S}_k,\ \sqsubseteq,\ \Omega^{(k)})$ е област на Скот.

б) Да означим $\bar{\mathcal{S}}_k \stackrel{\text{деф}}{=} \{f \mid f\colon\ \mathbb{N}_\perp^k \longrightarrow \mathbb{N}_\perp \ \&\ f \text{ не е точна}\}$. Вярно ли е, че наредената тройка

$$\bar{\boldsymbol{\mathcal{S}}}_{\boldsymbol{k}} = (\bar{\mathcal{S}}_k \cup \{\Omega^{(k)}\},\ \sqsubseteq,\ \Omega^{(k)})$$

е област на Скот? Обосновете отговорите си.

Решение. **а)** Релацията $\sqsubseteq$, която е частична наредба на $\mathcal{F}_k^\perp$, разбира се, ще е такава и върху множеството $\mathcal{S}_k$. Ясно е също, че функцията $\Omega^{(k)}$ е точна (и съответно се явява най-малък елемент на $\mathcal{S}_k$). Остана да видим, че границата на монотонно растяща редица от точни функции също е точна.

Наистина, нека

$$f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq \dots$$

е редица от точни функции и нека

$$g = \bigsqcup_n f_n$$

е нейната граница в $\mathcal{F}_k^\perp$. Да вземем една k-орка $\bar{x} = (x_1, \dots x_k)$, в която участва $\perp$. Тогава за всяко n ще имаме $f_n(\bar{x}) = \perp$, откъдето по *Задача* 3.11 а) получаваме, че и $g(\bar{x}) = \perp$.

б) $\bar{\boldsymbol{\mathcal{S}}}_{\boldsymbol{k}} = (\bar{\mathcal{S}}_k \cup \{\Omega^{(k)}\},\ \sqsubseteq,\ \Omega^{(k)})$ също е област на Скот. Това, което трябва да проверим, е само пълнотата на наредбата $\sqsubseteq$. За целта избираме монотонно растяща редица

$$f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq \dots$$

от елементи на $\bar{\mathcal{S}}_k \cup \{\Omega^{(k)}\}$ с точна горна граница

$$h = \bigsqcup_n f_n$$

в $\mathcal{F}_k^\perp$. Ако всички членове на тази редица са $\Omega^{(k)}$, то границата ѝ също ще е $\Omega^{(k)}$, която е от домейна на $\bar{\boldsymbol{\mathcal{S}}}_{\boldsymbol{k}}$.

Ако това не е така, то ще съществува n, за което f_n не е точна. Това означава, че за някоя k-орка $(x_1, \dots\ x_k)$ ще е изпълнено:

$$(\exists i\colon x_i = \perp)\ \&\ f_n(x_1, \dots\ x_k) = y \in \mathbb{N}.$$

Тогава от *Задача* 3.11 ще имаме, че и $h(x_1, \dots\ x_k) = y \in \mathbb{N}$. Следователно и h не е точна. □

3.4 Денотационна семантика по име

В следващите няколко задачи ще обясним как се дефинира $D_N(R)$ — *денотационната семантика по име* на програмата R. В част от задачите са пресметнати и съответните функции $D_V(R)$, за да видим разликата между двата типа семантики.

Задача 3.22. (Писмен изпит, 20.06.2017, спец. Информатика) Определете функциите $D_V(R)$ и $D_N(R)$ за следната програма R:

$F(X,\ X)$ `where`
$F(X,\ Y)\ =\ \texttt{if}\ \ X \bmod 2\ =\ 0\ \ \textit{then}\ \ X/2\ \ \texttt{else}\ \ F(X+1,\ F(X,\ Y)\ )$

Решение. В задачата се търсят и двете функции $D_V(R)$ и $D_N(R)$. Ще ги пресметнем поотделно, за да наблюдаваме как оператор, идващ от една и съща програма, но интерпретиран в две различни области на Скот, може да има съвсем различни най-малки неподвижни точки.

$D_V(R)$ се дефинира в добре познатата ни ОС $\boldsymbol{\mathcal{F}_2} = (\mathcal{F}_2,\ \subseteq,\ \emptyset^{(2)})$ с носител всички частични двуместни функции над $\mathbb{N}$. Дефиницията на $F(X,Y)$ определя следния оператор $\Gamma : \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \ mod\ 2\ =\ 0 \\ f(x+1, f(x,y)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Γ е термален оператор, следователно е непрекъснат, и значи към него можем да приложим теоремата на Кнастер-Тарски, според която за най-малката неподвижна точка f_Γ имаме следното представяне:

$$f_\Gamma\ =\ \bigcup_n \Gamma^n(\emptyset^{(2)}).$$

Да означим с f_n функцията $\Gamma^n(\emptyset^{(2)})$. Ще намерим явния вид на всяка от функциите f_n, което в тази област на Скот е съвсем лесна задача.

Да напомним, че функциите f_n се дефинират рекурентно по следния начин:

$$\left| \begin{array}{l} f_0 = \emptyset^{(2)} \\ f_{n+1} = \Gamma(f_n). \end{array} \right.$$

Тъгвайки от $f_0 = \emptyset^{(2)}$, за f_1 ще имаме:

$$f_1(x,y) \simeq \Gamma(\emptyset^{(2)})(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} x/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 0 \\ \emptyset^{(2)}(x+1, \emptyset^{(2)}(x,y)), & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 0 \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

За f_2 получаваме:

$$f_2(x,y) \simeq \Gamma(f_1)(x,y) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \ mod\ 2 \ = \ 0 \\ f_1(x+1, \underbrace{f_1(x,y)}_{\neg !}\,), & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \ mod\ 2 \ = \ 0 \\ \neg !, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Излезе, че $f_1 = f_2$, откъдето следва, че $f_1 = f_2 = f_3 \dots$, както вече имахме повод да се убедим. Значи редицата от последователните приближения на f_Γ ще изглежда така:

$$f_0 \stackrel{\text{деф}}{=} \ \emptyset^{(2)} \subset \ f_1 \ = \ f_2 \ = f_3 \dots$$

Ясно е, че границата на тази редица е f_1, и следователно $f_\Gamma = f_1$. Сега за $D_V(R)$ ще имаме:

$$D_V(R)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f_\Gamma(x,x) \simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \ mod\ 2 \ = \ 0 \\ \neg !, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

За да дефинираме *денотационната семантика по име* $D_N(R)$, разглеждаме областта на Скот

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_2^\perp} = (\mathcal{F}_2^\perp, \ \sqsubseteq, \ \Omega^{(2)}),$$

с носител множеството от всички *тотални* функции на два аргумента в $\mathbb{N}_\perp \stackrel{\text{деф}}{=} \mathbb{N} \cup \{\perp\}$:

$$\mathcal{F}_2^\perp = \{f \mid f : \mathbb{N}_\perp^2 \ \to \mathbb{N}_\perp\}.$$

Наредбата $\sqsubseteq$ в $\mathcal{F}_2^\perp$ е поточковата наредба:

$$f \sqsubseteq g \iff \ \forall x \forall y \ f(x,y) \sqsubseteq g(x,y),$$

а $\Omega^{(2)}(x,y) = \perp$ за всяко x, y от $\mathbb{N}_\perp$.

В тази ОС $F(X,Y)$ определя следния оператор $\Delta \colon \mathcal{F}_2^\perp \longrightarrow \mathcal{F}_2^\perp$:

$$\Delta(f)(x,y) = \begin{cases} x /^* 2, & \text{ако } x \ mod^* \ 2 \ =^* \ 0 \\ f(x +^* 1, f(x,y)), & \text{ако } x \ mod^* \ 2 \ =^* \ 1 \\ \perp, & \text{ако } \ x = \perp. \end{cases}$$

Звездичките в базисните функции $+$, $/$, mod и $=$ означават техните *естествени продължения*. Тъй като е досадно да пишем всеки път звездички, по-надолу обикновено ще ги изпускаме, но винаги ще ги имаме предвид.

На лекции коментирахме, че някои термални оператори могат да не са непрекъснати в цялата област на Скот $\boldsymbol{\mathcal{F}_2^\perp} = (\mathcal{F}_2^\perp, \sqsubseteq, \Omega^{(2)})$. Когато, обаче, ги ограничим до множеството на всички *монотонни* функции

$$\mathcal{M}_2 = \{f \mid f\colon \mathbb{N}_\perp^2 \longrightarrow \mathbb{N}_\perp \ \&\ f \text{ е монотонна}\},$$

те със сигурност са непрекъснати. Операторът Δ, който дефинирахме по-горе, е термален, и значи той е непрекъснат в областта на Скот $\boldsymbol{\mathcal{M}_2} = (\mathcal{M}_2, \sqsubseteq, \Omega^{(2)})$. Тогава по теоремата на Кнастер-Тарски Δ притежава най-малка неподвижна точка f_Δ, за която е в сила представянето:

$$f_\Delta = \bigsqcup_n \Delta^n(\Omega^{(2)}).$$

Да отбележим, че $\Omega^{(2)}$ е монотонна функция, а операторът Δ, приложен върху монотонна функция, връща също тъй монотонна функция. Следователно за всяко n функцията $\Delta^n(\Omega^{(2)})$ е монотонна. Разбира се, и f_Δ ще е монотонна, като точна горна граница на монотонни.

Функцията f_Δ е дефинирана в $\mathbb{N}_\perp^2$, което означава, че допълнителният елемент $\perp$ участва в нейните аргументи и стойности. От друга страна, $D_N(R)$ е частична функция в $\mathbb{N}^2$. Затова се налага да върнем обратно f_Δ в света на частичните функции. Това става посредством преобразование, което на всяка $f \in \mathcal{F}_k^\perp$ съпоставя частична функция $f^\circ \in \mathcal{F}_k$, дефинирана посредством равенството

$$f^\circ(\bar{x}) \simeq \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{ако } f(\bar{x}) \neq \perp \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Главата на програмата R е термът $F(X, X)$, тогава по дефиниция

$$D_N(R)(x) \simeq f_\Delta^\circ(x, x).$$

За да намерим $D_N(R)$, ще трябва да пресметнем f_Δ. Нека отново с f_n означим n-тата апроксимация $\Delta^n(\Omega^{(2)})$. Имаме по определение:

$$\left|\begin{array}{l} f_0 = \Omega^{(2)} \\ f_{n+1} = \Delta(f_n). \end{array}\right.$$

От общата теория знаем, че $\Omega^{(2)} = f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq \dots$, т.е. редицата от последователните приближения на f_Δ отново е монотонно растяща, този път, разбира се, по отношение на наредбата $\sqsubseteq$.

Сега се насочваме към определяне на явния вид на f_n. Тръгвайки от $f_0 = \Omega^{(2)}$, за f_1 ще имаме:

$$f_1(x, y) = \Delta(\Omega^{(2)})(x, y) \overset{\text{деф } \Delta}{=} \begin{cases} x /^* 2, & \text{ако } x \ mod^*\ 2 =^* 0 \\ \Omega^{(2)}(x +^* 1, \Omega^{(2)}(x, y)), & \text{ако } x \ mod^*\ 2 =^* 1 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \ mod \ 2 \ = \ 0 \quad \textbf{(за всяко } y, \textbf{ включително за } \mathbf{y = \perp}) \\ \perp, & \text{ако } x \ mod \ 2 \ = \ 1 \ \vee \ x = \perp. \end{cases}$$

Оттук за f_2 получаваме:

$$f_2(x,y) = \Delta(f_1)(x,y) \stackrel{\text{деф } \Delta}{=} \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \ mod \ 2 \ = \ 0 \\ f_1(\underbrace{x+1}_{\text{четно}}, \underbrace{f_1(x,y)}_{\perp}), & \text{ако } x \ mod \ 2 \ = \ 1 \\ \perp, & \text{ако } \ x = \perp \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \ mod \ 2 \ = \ 0 \\ (x+1)/2, & \text{ако } x \ mod \ 2 \ = \ 1 \\ \perp, & \text{ако } x \ = \ \perp. \end{cases}$$

Забелязваме, че f_2 вече има числова стойност почти навсякъде (с изключение на точките от вида $(\perp, y)$). Това означава, че най-вероятно за всяко $n \geq 2$, f_n ще е същата като f_2. Наистина, при $n \geq 2$ имаме $f_2 \sqsubseteq f_n$, което означава, че за всяка т. $(x,y) \in \mathbb{N}^2_\perp$:

$$f_2(x,y) \sqsubseteq f_n(x,y).$$

Ако $x \in \mathbb{N}$, то $f_2(x,y) \in \mathbb{N}$ и от горното включване ще имаме, че $f_2(x,y) = f_n(x,y)$. При $x = \perp$ по определение

$$f_n(\perp, y) = \Delta(f_{n-1})(\perp, y) \stackrel{\text{деф } \Delta}{=} \perp.$$

Следователно от втората нататък апроксимациите на f_Δ ще са едни и същи. Както вече съобразихме, всички апроксимации са монотонни. Първата функция $\Omega^{(2)}$ е точна, докато f_1 и f_2 вече очевидно не са.

От $f_2 = f_3 = f_4 \ldots$ получаваме, че

$$f_\Delta \overset{\text{деф}}{=} \bigsqcup_n \Delta^n(\Omega^{(2)}) \;=\; f_2,$$

т.е. f_Δ има вида

$$f_\Delta(x,y) = \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \ mod\ 2 \;=\; 0 \\ (x+1)/2, & \text{ако } x \ mod\ 2 \;=\; 1 \\ \perp, & \text{ако } x \;=\; \perp. \end{cases}$$

Тогава

$$f_\Delta^\circ(x,y) = \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \ mod\ 2 \;=\; 0 \\ (x+1)/2, & \text{ако } x \ mod\ 2 \;=\; 1, \end{cases}$$

а оттук

$$D_N(R)(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} f_\Delta^\circ(x,x) = \lceil \frac{x}{2} \rceil.$$

□

Задача 3.23. Намерете $D_N(R)$ за следната програма R:

$F(\ X,\ Y)$ `where`
$F(X,\ Y)\ =$ `if` $\ X\ =\ 0\ $ `then` $\ 0\ $ `else` $\ F(X-1,\ F(X,\ Y))$

Решение. Тук операторът $\Delta : \mathcal{F}_2^\perp \longrightarrow \mathcal{F}_2^\perp$, определен от F, се задава по следния начин:

$$\Delta(f)(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ако } \ x =^* 0 \\ f(x -^* 1, f(x,y)), & \text{ако } \ x >^* 0 \\ \perp, & \text{ако } \ x = \perp. \end{cases}$$

Отново искаме да намерим явния вид на функциите $f_n \;=\; \Delta^n(\Omega^{(2)})$

За първата функция f_1 ще имаме:

$$f_1(x,y) \overset{\text{деф}}{=} \Delta(\Omega^{(2)})(x,y) \overset{\text{деф}\ \Delta}{=} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \Omega^{(2)}(x-1, \Omega^{(2)}(x,y)), & \text{ако } \ x > 0 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \perp, & \text{ако } \ x > 0 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \quad (\textbf{включително и за } \boldsymbol{y = \perp}) \\ \perp, & \text{ако } \ x > 0 \ \vee \ x = \perp. \end{cases}$$

За следващата апроксимация f_2 получаваме:

$$f_2(x,y) \stackrel{\text{деф}}{=} \Delta(f_1)(x,y) \stackrel{\text{деф } \Delta}{=} \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ f_1(x-1, f_1(x,y)), & \text{ако } \ x>0 \\ \perp, & \text{ако } \ x=\perp \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ f_1(0, \underbrace{f_1(1,y)}_{\perp}), & \text{ако } x=1 \\ \perp, & \text{ако } \ x>1 \\ \perp, & \text{ако } \ x=\perp \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ 0, & \text{ако } x=1 \\ \perp, & \text{ако } \ x>1 \ \vee \ x=\perp. \end{cases}$$

Това ни навежда на мисълта, че f_n ще има следния общ вид:

$$f_n(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x<n \\ \perp, & \text{ако } \ x \geq n \ \vee \ x=\perp. \end{cases} \tag{3.13}$$

Да го покажем с индукция относно n. За началните стойности на n това наистина е така. Сега ако допуснем, че за произволно n f_n има горния вид, то за следващата f_{n+1} ще имаме:

$$f_{n+1}(x,y) \stackrel{\text{деф}}{=} \Delta(f_n)(x,y) \stackrel{\text{деф } \Delta}{=} \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ f_n(x-1, f_n(x,y)), & \text{ако } \ x>0 \\ \perp, & \text{ако } \ x=\perp \end{cases}$$

$$\stackrel{\text{и.х.}}{=} \begin{cases} 0, & \text{ако } \ x=0 \\ 0, & \text{ако } \ x>0 \ \& \ x-1<n \\ \perp, & \text{ако } \ x-1 \geq n \\ \perp, & \text{ако } \ x=\perp \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{ако } \ x<n+1 \\ \perp, & \text{ако } \ x \geq n+1 \ \vee \ x=\perp. \end{cases}$$

с което индуктивната ни хипотеза се потвърди и за $n+1$.

За да намерим точната горна граница $\bigsqcup\limits_n f_n$ на редицата $\{f_n\}_n$, ще се възползваме от следното наблюдение, което вече направихме:

Ако $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq \dots$ е монотонно растяща редица в $\mathcal{F}_k^\perp$, а $g = \bigsqcup\limits_n f_n$ е нейната точна горна граница, то за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}_\perp^k$ и всяко *естествено* z е вярно, че:

а) $g(\bar{x}) = \perp \iff \forall n \ f_n(\bar{x}) = \perp$;

б) $g(\bar{x}) = z \iff \exists n \ f_n(\bar{x}) = z$.

Оттук, гледайки общия вид (3.13) на f_n, не е трудно да се убедим, че точна горна граница на редицата $\{f_n\}_n$ ще е функцията

$$g(x,y) \stackrel{\text{деф}}{=} f_\Delta(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако } x=\perp. \end{cases} \tag{3.14}$$

Наистина, ако $x = \perp$, а $y \in \mathbb{N}_\perp$ е произволно, то за всяко n ще имаме, съгласно (3.13), че $f_n(x, y) = \perp$, откъдето по условието **а)** от по-горе, и $g(x, y) = \perp$.

Ако x е *естествено число*, а $y \in \mathbb{N}_\perp$, гледайки общия вид (3.13) на f_n, виждаме, че т. (x, y) попада в $Dom(f_n)$ за $n = x+1$, примерно. По-точно, имаме, че $f_n(x, y) = 0$, откъдето и $g(x, y) = 0$, съгласно условие **б)**.

Разбира се, бихме могли да използваме директно дефиницията за точна горна граница в ОС $\boldsymbol{\mathcal{F}_2^\perp} = (\mathcal{F}_2^\perp,\ \sqsubseteq,\ \Omega^{(2)})$, особено ако искаме да си представим нещата нагледно. Ето как ще изглежда редицата от стойностите на $\{f_n\}_n$ в т. (x, y), където $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}_\perp$:

$$\underbrace{f_0(x,y)}_{\perp},\ \dots\ ,\underbrace{f_x(x,y)}_{\perp},\ \underbrace{f_{x+1}(x,y)}_{0},\ \underbrace{f_{x+2}(x,y)}_{0},\ \dots$$

С други думи, редицата от тези стойности е

$$\underbrace{\perp,\ \dots\ ,\perp}_{x+1 \text{ пъти}},\ 0,\ 0,\ \dots$$

и нейната граница очевидно е 0, откъдето по дефиницията за точна горна граница получаваме, че $g(x, y) = 0$.

При $x = \perp$ ще имаме

$$\underbrace{f_0(\perp,y)}_{\perp},\ \underbrace{f_1(\perp,y)}_{\perp},\ \underbrace{f_2(\perp,y)}_{\perp},\ \dots$$

и следователно $g(\perp, y) = \perp$.

От общия вид (3.14) на f_Δ виждаме, че

$$f_\Delta^\circ(x,y) = 0 \quad \text{за всяко } x \in \mathbb{N} \text{ и } y \in \mathbb{N}.$$

откъдето $D_N(R) \stackrel{\text{деф}}{=} f_\Delta^\circ = \lambda x, y.0.$ □

Целта на тази задача беше да илюстрираме как се прилага теоремата на Кнастер–Тарски за функционалната плоска ОС $\mathcal{F}_2^\perp$. Ако условието беше просто да се намери $D_N(R)$, задачата има далеч по-кратко решение.

Задача 3.24. Без да използвате теоремата на Кнастер-Тарски, намерете $D_N(R)$ за програмата R:

$F(X,\ Y)$ `where`
`F(X, Y) = if X = 0 then 0 else F(X − 1, F(X, Y) )`

Решение. Отново тръгваме от оператора $\Delta\colon\ \mathcal{F}_2^\perp \longrightarrow \mathcal{F}_2^\perp$, който се определихме по-горе. Да вземем *произволна* негова неподвижна точка

$f \in \mathcal{F}_2^{\perp}$. Тогава за нея е изпълнено:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ако} \;\; x =^* 0 \\ f(x -^* 1, f(x,y)), & \text{ако} \;\; x >^* 0 \\ \perp, & \text{ако} \;\; x = \perp. \end{cases} \tag{3.15}$$

С индукция по $x \in \mathbb{N}$ ще покажем, че $\forall x Q(x)$, където

$$Q(x) \;\stackrel{\text{деф}}{\Longleftrightarrow}\; \forall y \in \mathbb{N}_{\perp} \; f(x,y) = 0.$$

При $x = 0$ очевидно $f(0,y) \stackrel{(3.15)}{=} 0$, а допускайки, че за някое x $Q(x)$ е в сила, ще имаме за $x+1$ (и кое да е $y \in \mathbb{N}_{\perp}$):

$$f(x+1,y) \stackrel{(3.15)}{=} f(x, \underbrace{f(x+1,y)}_{\text{от } \mathbb{N}_{\perp}}) \stackrel{\text{и.х.}}{=} 0.$$

Следователно и за f_{Δ} ще е вярно, че $\forall x \in N \; \forall y \in \mathbb{N}_{\perp} \; f_{\Delta}(x,y) = 0$, откъдето за $D_N(R)$ отново ще имаме, разбира се

$$D_N(R)(x,y) \simeq f_{\Delta}^{\circ}(x,y) \;\; = \;\; 0.$$

□

Всъщност горният оператор Δ има *единствена* неподвижна точка и това е функцията

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ако} \;\; x \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако} \;\; x = \perp. \end{cases}$$

Съвсем не е такова положението с оператора Γ, чрез който се дефинира семантиката по стойност на горната програма R.

Задача 3.25. Опишете всички неподвижни точки на оператора

$$\Gamma\colon \; \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2,$$

определен от програмата R от *Задача* 3.24 в ОС $(\mathcal{F}_2, \; \subseteq, \; \emptyset^{(2)})$.

Упътване. Операторът Γ е следният:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ f(x-1, f(x,y)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Съобразете, че всички негови неподвижни точки имат този общ вид:

$$f_n(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x \leq n \\ \neg !, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \text{или} \qquad f_{\infty}(x,y) = 0 \quad \text{за всяко } x, y \in \mathbb{N}.$$

□

3.4.1 Задачи за определяне на $D_N(R)$ от домашни и изпити

Задача 3.26. (Писмен изпит, 14.02.2018, спец. КН) Дадена е следната програма R:

$F(X,Y)$ `where`
$F(X,Y) =$ `if` $X \bmod 2 = 0$ `then` $X/2$ `else` $F(\ X.Y,\ F(\ X,\ 2Y)\ )$
Докажете, че $D_V(R) \neq D_N(R)$.

Решение. За $D_V(R)$ дефинираме оператора Γ в ОС $\boldsymbol{\mathcal{F}_2} = (\mathcal{F}_2,\ \subseteq,\ \emptyset^{(2)})$ по обичайния начин:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \ mod\ 2\ =\ 0 \\ f(xy, f(x,2y)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Γ е компактен и следователно — непрекъснат, и значи общата теория е приложима. Отново означаваме с f_n функцията $\Gamma^n(\emptyset^{(2)})$ и се заемаме да намерим явния ѝ вид.

За f_1 имаме:

$$f_1(x,y) \simeq \Gamma(\emptyset^{(2)})(x,y) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \ mod\ 2\ =\ 0 \\ \emptyset^{(2)}(xy, \emptyset^{(2)}(x,2y)), & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \ mod\ 2\ =\ 0 \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогава за f_2 получаваме:

$$f_2(x,y) \simeq \Gamma(f_1)(x,y) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \ mod\ 2\ =\ 0 \\ f_1(xy, \underbrace{f_1(x,2y)}_{\neg!}), & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \ mod\ 2\ = 0 \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Излезе, че $f_1 = f_2$, което означава, че рекурсията се "затвори" на стъпка 1. Тогава

$$f_\Gamma = f_1,$$

и следователно за $D_V(R)$ ще имаме:

$$D_V(R)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f_\Gamma(x,y) \simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \ mod\ 2\ =\ 0 \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

За да дефинираме $D_N(R)$, разглеждаме оператора $\Delta\colon\ \mathcal{F}_2^{\perp} \longrightarrow\ \mathcal{F}_2^{\perp}$:

$$\Delta(f)(x,y) = \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \in \mathbb{N}\ \&\ x\ mod\ 2\ =\ 0 \\ f(x.^*y, f(x, 2.^*y)), & \text{ако } x \in \mathbb{N}\ \&\ x\ mod\ 2\ =\ 1 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp. \end{cases}$$

Този оператор е непрекъснат в ОС $\boldsymbol{\mathcal{M}^2}$ и следователно има най-малка неподвижна точка

$$f_\Delta\ =\ \bigsqcup_n \underbrace{\Delta^n(\Omega^{(2)})}_{f_n}.$$

Тръгваме от $f_0\ =\ \Omega^{(2)}$. Разписваме дефиницията на f_1:

$$f_1(x,y) \overset{\text{деф } \Delta}{=} \Delta(\Omega^{(2)})(x,y) \overset{\text{деф } \Delta}{=} \begin{cases} x/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 0 \\ \Omega^{(2)}(xy, \Omega^{(2)}(x, 2y)), & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 1 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 0 \\ \perp, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 1\ \vee\ x = \perp. \end{cases}$$

За f_2 получаваме:

$$f_2(x,y) = \Delta(f_1)(x,y) \overset{\text{деф } \Delta}{=} \begin{cases} x/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 0 \\ f_1(xy, f_1(x, 2y)), & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 1 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 0 \\ f_1(\underbrace{xy}_{\text{четно}}, f_1(x, 2y)), & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 1\ \&\ y\ mod\ 2\ =\ 0 \\ f_1(\underbrace{xy}_{\text{нечетно}}, f_1(x, 2y)), & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 1\ \&\ y\ mod\ 2\ =\ 1 \\ \perp, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ = 0 \\ xy/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 1\ \&\ y\ mod\ 2\ = 0 \\ \perp, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

Получихме, че втората апроксимация на Δ е "по-определена" от втората апроксимация на предишния оператор Γ (която на практика беше f_Γ). Понеже задачата ни е да покажем, че $D_V(R) \neq D_N(R)$, тук можем да спрем с пресмятането на следващите апроксимации и да разсъждаваме така: от теорията знаем, че за всяка рекурсивна програма R

$$D_V(R) \subseteq D_N(R).$$

Нека $g = (f_2)^\circ$, т.е. g е "върнатата" в пространството $\mathcal{F}_2$ функция f_2, в случая

$$g(x,y) \simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 0 \\ xy/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 1\ \&\ y\ mod\ 2\ =0 \\ \neg!, & \text{в ост. случаи.} \end{cases}$$

Очевидно $f_\Gamma \subset g$. От теорията знаем, че $f_2 \sqsubseteq f_\Delta$, откъдето

$$(f_2)^\circ \subseteq f_\Delta^\circ \stackrel{\text{деф}}{=} D_N(R).$$

Така получаваме

$$D_V(R) \stackrel{\text{деф}}{=} f_\Gamma \subset g \subseteq D_N(R),$$

и следователно $D_V(R) \subset D_N(R)$.

Като бонус $\ddot{\smile}$ все пак да пресметнем $D_N(R)$. Продължаваме със следващата апроксимация f_3:

$$f_3(x,y) = \Delta(f_2)(x,y) \stackrel{\text{деф } \Delta}{=} \begin{cases} x/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 0 \\ f_2(xy, f_2(x,2y)), & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 1 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 0 \\ f_2(\underbrace{xy}_{\text{четно}}, f_2(x,2y)), & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 1\ \&\ y\ mod\ 2\ =\ 0 \\ f_2(\underbrace{xy}_{\text{нечетно}}, \underbrace{f_2(x,2y)}_{(x.2y)/2}), & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 1\ \&\ y\ mod\ 2\ =\ 1 \\ \perp, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =0 \\ xy/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 1\ \&\ y\ mod\ 2\ =0 \\ \underbrace{f_2(x.y, x.y)}_{\perp}, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 1\ \&\ y\ mod\ 2\ =\ 1 \\ \perp, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =0 \\ xy/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 1\ \&\ y\ mod\ 2\ =0 \\ \perp, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

Получихме $f_2 = f_3$, откъдето веднага $f_\Delta = f_2$, и следователно

$$D_N(R)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f^\circ_\Delta(x,y) \simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \; mod \; 2 \; = \; 0 \\ xy/2, & \text{ако } x \; mod \; 2 \; = \; 1 \; \& \; y \; mod \; 2 \; = 0 \\ \neg!, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

□

Задача 3.27. (Писмен изпит, 05.02.2017, спец. КН) Намерете $D_V(R)$ и $D_N(R)$ за следващата програма R:

$G(X, F(X))$ `where`
$F(X)$ = `if` $X = 0$ `then` $F(G(X, F(X)))$ `else` 0
$G(X, Y)$ = `if` $X = 0$ `then` 0 `else` $G(F(X), Y)$

Решение. Функцията $D_V(R)$ пресметнахме, когато бяхме на тема Денотационна семантика по стойност. Сега се насочваме директно към $D_N(R)$.
В тази програма имаме две функционални променливи, и съответно дефинираме два оператора

$$\Gamma: \; \mathcal{F}_1^\perp \times \mathcal{F}_2^\perp \; \longrightarrow \; \mathcal{F}_1^\perp \quad \text{и} \quad \Delta: \; \mathcal{F}_1^\perp \times \mathcal{F}_2^\perp \; \longrightarrow \; \mathcal{F}_2^\perp,$$

където

$$\Gamma(f,g)(x) = \begin{cases} f(g(x, f(x))), & \text{ако } \; x =^* 0 \\ 0, & \text{ако } \; x \neq^* 0 \\ \perp, & \text{ако } \; x = \perp; \end{cases}$$

$$\Delta(f,g)(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ако } \; x = 0 \\ g(f(x), y), & \text{ако } \; x \neq^* 0 \\ \perp, & \text{ако } \; x = \perp. \end{cases}$$

От общата теория знаем, че операторът

$$\mathbf{\Gamma}: \; \mathcal{F}_1^\perp \times \mathcal{F}_2^\perp \; \longrightarrow \; \mathcal{F}_1^\perp \times \mathcal{F}_2^\perp$$

е непрекъснат в областта на Скот $(\mathcal{F}_1^\perp \times \mathcal{F}_2^\perp, \; \sqsubseteq, \; (\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}))$ и съгласно теоремата на Кнастер-Тарски-Клини, $\mathbf{\Gamma}$ има най-малка неподвижна точка $f_{\mathbf{\Gamma}} \; = \; (f^*, g^*)$.

От горната теорема знаем още, че $f_{\mathbf{\Gamma}}$ се представя последния начин:

$$f_{\mathbf{\Gamma}} \; = \; \bigsqcup_n \underbrace{\mathbf{\Gamma}^n(\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)})}_{(f_n, g_n)}.$$

Да означим с (f_n, g_n) n-тото приближение на $f_{\mathbf{\Gamma}}$. Тогава по дефиниция:

$$\begin{aligned}
(f_0, g_0) &= (\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)})\\
(f_{n+1}, g_{n+1}) &= \mathbf{\Gamma}(f_n, g_n) \stackrel{\text{деф } \mathbf{\Gamma}}{=} (\ \Gamma(f_n, g_n),\ \Delta(f_n, g_n)\ ).
\end{aligned}$$

От горното представяне за $f_{\mathbf{\Gamma}}$ можем да запишем:

$$f_{\mathbf{\Gamma}} = (f^*, g^*) = \bigsqcup_n (f_n, g_n) \stackrel{\text{по теорема}}{=} (\bigsqcup_n f_n, \bigsqcup_n g_n\ ).$$

Оттук по всяка от компонентите ще имаме

$$f^* = \bigsqcup_n f_n, \qquad g^* = \bigsqcup_n g_n,$$

където функциите от редиците $\{f_n\}_n$ и $\{g_n\}_n$ се дефинират със съвместна рекурсия както следва:

$$\begin{aligned}
f_0 &= \Omega^{(1)}\\
f_{n+1} &= \Gamma(f_n, g_n) \quad \text{и}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
g_0 &= \Omega^{(1)}\\
g_{n+1} &= \Delta(f_n, g_n).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Тръгваме от $f_0 = \Omega^{(1)}$ и $g_0 = \Omega^{(2)}$ и пресмятаме f_1 и g_1:

$$f_1(x) \stackrel{(3.16)}{=} \Gamma(\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)})(x) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{=} \begin{cases} \Omega^{(1)}(\Omega^{(2)}(x, \Omega^{(1)}(x))), & \text{ако } x = 0\\ 0, & \text{ако } x > 0\\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases} = \begin{cases} \perp, & \text{ако } x = 0 \ \vee\ x = \perp\\ 0, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

$$g_1(x, y) \stackrel{(3.17)}{=} \Delta(\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)})(x, y) \stackrel{\text{деф } \Delta}{=} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0\\ \Omega^{(2)}(\Omega^{(1)}(x), y), & \text{ако } x > 0\\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0\\ \perp, & \text{ако } x > 0 \ \vee\ x = \perp. \end{cases}$$

Оттук за следващата апроксимация $f_2 = \Gamma(f_1, g_1)$ ще имаме:

$$f_2(x) \stackrel{(3.16)}{=} \Gamma(f_1, g_1)(x) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{=} \begin{cases} f_1(\ \underbrace{g_1(x, \underbrace{f_1(x)}_{\perp})}_{0}\ ), & \text{ако } x = 0\\ 0, & \text{ако } x > 0\\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases} = \begin{cases} \perp, & \text{ако } x = 0 \ \vee\ x = \perp\\ 0, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Продължаваме с пресмятането на $g_2 = \Delta(f_1, g_1)$:

$$g_2(x,y) \stackrel{(3.17)}{=} \Delta(f_1,g_1)(x,y) \stackrel{\text{деф } \Delta}{=} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \underbrace{g_1(\underbrace{f_1(x)}_{0}, y)}_{0}, & \text{ако } x > 0 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp. \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \ \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако } x = \perp. \end{cases}$$

Да се убедим, че оттук нататък всички следващи функции g_n, $n \geq 2$, ще са равни на горната g_2. Наистина, от това, че $g_2 \ \sqsubseteq \ g_n$ ще имаме, че когато $x \in \mathbb{N}$,

$$0 = g_2(x,y) \ \sqsubseteq \ g_n(x,y),$$

което означава, че $g_n(x,y) = 0$ също. Когато $x = \perp$, можем да запишем

$$g_n(\perp, y) \ = \ \Delta(f_{n-1}, g_{n-1})(\perp, y) \stackrel{\text{деф } \Delta}{=} \ \perp.$$

Ясно е тогава, че граничната функция g^* на редицата $\{g_n\}_n$ ще е функцията g_2, т.е. ще имаме

$$g^*(x,y) \ = \ \begin{cases} 0, & \text{ако } x \ \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако } x = \perp. \end{cases}$$

По-горе получихме, че $f_1 = f_2$, което обаче формално не ни дава основание да твърдим, че f_2 ще е равна на f_3, защото $f_3 = \Gamma(f_2, g_2)$, а $g_1 \neq g_2$.

$$f_3(x) \stackrel{(3.16)}{=} \Gamma(f_2,g_2)(x) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{=} \begin{cases} f_2(\underbrace{\ g_2(x, \underbrace{f_2(x)}_{\perp})\ }_{0}), & \text{ако } x = 0 \\ 0, & \text{ако } x > 0 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases} = \begin{cases} \perp, & \text{ако } x = 0 \ \vee \ x = \perp \\ 0, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Сега вече със сигурност $f_2 = f_3$, откъдето по-общо $f_2 = f_n$ за всяко $n \geq 2$, което означава, че граничната функция $f^* = f_2$, или все едно

$$f^*(x,y) \ = \ \begin{cases} \perp, & \text{ако } x = 0 \ \vee \ x = \perp \\ 0, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Сега поглеждаме към главата на програмата $\tau_0(X, F, G) = G(X, F(X))$. Нека

$$h(x) \ = \ g^*(x, f^*(x)).$$

Тогава очевидно

$$h(x,y) \ = \ \begin{cases} 0, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако } x = \perp. \end{cases}$$

Следователно $h^\circ(x, y) \; = \; 0$ за всяко $x, y \in \mathbb{N}$. Тогава

$$D_N(R)(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} h^\circ(x) \; = \; 0 \quad \text{за всяко } x \in N.$$

$\square$

Задача 3.28. (зад. 7 от Домашно №3.) Докажете, че $D_V(R) \neq D_N(R)$, където R е следната рекурсивна програма:

$F(X,\ Y)$ `where`

$F(X,\ Y) \; = \;$ `if` $X \bmod 2 \; = \; 0$ `then` $X/2$ `else` $F(X{+}Y,\ F(X, Y{+}1))$

Решение. За $D_V(R)$ дефинираме оператора Γ в ОС $\boldsymbol{\mathcal{F}_2} = (\mathcal{F}_2,\ \subseteq,\ \emptyset^{(2)})$ по обичайния начин:

$$\Gamma(f)(x, y) \simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \text{ } mod \text{ } 2 \; = \; 0 \\ f(x+y, f(x, y+1)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Γ е непрекъснат, и значи теоремата на Кнастер-Тарски може да се приложи. Нека f_n е функцията $\Gamma^n(\emptyset^{(2)})$. Да видим как ще изглеждат функциите f_n за малки n (очакваме рекурсията да се затвори за малък брой итерации).

За f_1 имаме:

$$f_1(x, y) \simeq \Gamma(\emptyset^{(2)})(x, y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \text{ } mod \text{ } 2 \; = \; 0 \\ \emptyset^{(2)}(x+y, \emptyset^{(2)}(x, y+1)), & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \text{ } mod \text{ } 2 \; = \; 0 \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Оттук за f_2 получаваме:

$$f_2(x, y) \simeq \Gamma(f_1)(x, y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \text{ } mod \text{ } 2 \; = \; 0 \\ f_1(x+y, \underbrace{f_1(x, y+1)}_{\neg!}), & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \text{ } mod \text{ } 2 \; = 0 \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Излезе, че $f_1 \; = \; f_2$, откъдето по стандартния начин получаваме, че за всяко $n \geq 1: \; f_n = f_1$. Тогава

$$f_\Gamma = f_1,$$

и следователно за $D_V(R)$ ще имаме:

$$D_V(R)(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} f_\Gamma(x,x) \simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x\ mod\ 2 \ = \ 0 \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

За да дефинираме $D_N(R)$, разглеждаме оператора $\Delta\colon\ \mathcal{F}_2^{\perp} \longrightarrow\ \mathcal{F}_2^{\perp}$:

$$\Delta(f)(x,y) = \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \in \mathbb{N}\ \&\ x\ mod\ 2 \ = \ 0 \\ f(x +^* y, f(x, y +^* 1)), & \text{ако } x \in \mathbb{N}\ \&\ x\ mod\ 2 \ = \ 1 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp. \end{cases}$$

Този оператор е непрекъснат в ОС, състояща се от всички *монотонни функции* в $\mathcal{F}_2^{\perp}$ и следователно има най-малка неподвижна точка

$$f_\Delta \ = \ \bigsqcup_n \underbrace{\Delta^n(\Omega^{(2)})}_{f_n}.$$

Тръгваме от $f_0 \ = \ \Omega^{(2)}$. Разписваме дефиницията на f_1:

$$f_1(x,y) = \Gamma(\Omega^{(2)})(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{=} \begin{cases} x/2, & \text{ако } \ x\ mod\ 2 \ = \ 0 \\ \Omega^{(2)}(x+y, \Omega^{(2)}(x, y+1)), & \text{ако } x\ mod\ 2 \ = \ 1 \\ \perp, & \text{ако } \ x = \perp \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } \ x\ mod\ 2 \ = \ 0 \\ \perp, & \text{ако } \ x\ mod\ 2 \ = \ 1 \ \vee \ x = \perp. \end{cases}$$

За $f_2 \overset{\text{деф}}{=} \Gamma(f_1)$ получаваме:

$$f_2(x,y) = \begin{cases} x/2, & \text{ако } \ x\ mod\ 2 \ = \ 0 \\ f_1(x+y, f_1(x, y+1)), & \text{ако } \ x\ mod\ 2 \ = \ 1 \\ \perp, & \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } \ x\ mod\ 2 \ = \ 0 \\ f_1(\underbrace{x+y}_{\text{четно}}, f_1(x, y+1)), & \text{ако } \ x\ mod\ 2 \ = \ 1 \ \ \& \ \ y\ mod\ 2 \ = \ 1 \\ f_1(\underbrace{x+y}_{\text{нечетно}}, f_1(x, y+1)), & \text{ако } \ x\ mod\ 2 \ = \ 1 \ \ \& \ \ y\ mod\ 2 \ = \ 0 \\ \perp, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } \ x\ mod\ 2 \ = 0 \\ \frac{x+y}{2}, & \text{ако } \ x\ mod\ 2 \ = \ 1 \ \ \& \ \ y\ mod\ 2 \ = 1 \\ \perp, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

Получихме, че втората апроксимация на Δ е "по-определена" от втората апроксимация на предишния оператор Γ (която вече беше f_Γ). Понеже задачата е да покажем, че $D_V(R) \neq D_N(R)$, тук можем да спрем и да довършим решението така: от теорията знаем, че за всяка рекурсивна програма R

$$D_V(R) \subseteq D_N(R).$$

Нека $g = (f_2)^\circ$, т.е. g е "върнатата" в пространството $\mathcal{F}_2$ функция f_2. За нея ще имаме

$$g(x,y) \simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \; mod \; 2 \; = \; 0 \\ \frac{x+y}{2}, & \text{ако } x \; mod \; 2 \; = \; 1 \; \& \; y \; mod \; 2 \; = 1 \\ \neg!, & \text{в ост. случаи.} \end{cases}$$

Очевидно $f_\Gamma \subset g$, а $g = (f_2)^\circ \subseteq f_\Delta^\circ \stackrel{\text{деф}}{=} D_N(R)$. Следователно

$$D_V(R) \stackrel{\text{деф}}{=} f_\Gamma \subset g \subseteq D_N(R).$$

$\square$

Задача 3.29. (зад. 8 от Домашно №3.) Да означим с $\Gamma\colon \mathcal{F}_2^\perp \longrightarrow \mathcal{F}_2^\perp$ оператора, определен от тялото на следната рекурсивна програма:

$F(X,\ Y)$ `where`

$F(X,\ Y) \; = \;$ `if` X mod $2 \; = \; 0$ `then` $X/2$ `else` $F(X+Y, F(X, Y+1))$

Намерете явния вид на функцията $f_3 = \Gamma^3(\Omega^{(2)})$.

Решение. Операторът $\Gamma\colon \mathcal{F}_2^\perp \longrightarrow \mathcal{F}_2^\perp$ е следният:

$$\Gamma(f)(x,y) = \begin{cases} x/2, & \text{ако } \; x \in \mathbb{N} \; \& \; x \; mod \; 2 \; = \; 0 \\ f(x +^* y, f(x, y +^* 1)), & \text{ако } \; x \in \mathbb{N} \; \& \; x \; mod \; 2 \; = \; 1 \\ \perp, & \text{ако } \; x = \perp. \end{cases}$$

За да намерим f_3, ще трябва да определим и всяка от функциите f_i за $i = 0, 1, 2$. Ще използваме, че $f_{i+1} = \Gamma(f_i)$, а $f_0 \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma^0(\Omega^{(2)}) = \Omega^{(2)}$. Тогава за функцията f_1 ще имаме:

$$f_1(x,y) = \Gamma(\Omega^{(2)})(x,y) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{=} \begin{cases} x/2, & \text{ако } \; x \; mod \; 2 \; = \; 0 \\ \Omega^{(2)}(x+y, \Omega^{(2)}(x, y+1)), & \text{ако } \; x \; mod \; 2 \; = \; 1 \\ \perp, & \text{ако } \; x = \perp \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } \; x \; mod \; 2 \; = \; 0 \\ \perp, & \text{ако } \; x \; mod \; 2 \; = \; 1 \; \vee \; x = \perp. \end{cases}$$

За $f_2 \overset{\text{деф}}{=} \Gamma(f_1)$ ще имаме:

$$f_2(x,y) = \begin{cases} x/2, & \text{ако } \ x \ mod \ 2 \ = \ 0 \\ f_1(x+y, f_1(x,y+1)), & \text{ако } \ x \ mod \ 2 \ = \ 1 \\ \perp, & \text{ако } \ x = \perp \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } \ x \ mod \ 2 \ = \ 0 \\ f_1(\underbrace{x+y}_{\text{четно}}, f_1(x,y+1)), & \text{ако } \ x \ mod \ 2 \ = \ 1 \ \& \ y \ mod \ 2 \ = \ 1 \\ f_1(\underbrace{x+y}_{\text{нечетно}}, f_1(x,y+1)), & \text{ако } \ x \ mod \ 2 \ = \ 1 \ \& \ y \ mod \ 2 \ = \ 0 \\ \perp, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } \ x \ mod \ 2 \ = 0 \\ \frac{x+y}{2}, & \text{ако } \ x \ mod \ 2 \ = \ 1 \ \& \ y \ mod \ 2 \ = 1 \\ \perp, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

Като знаем f_2, финално за f_3 получаваме:

$$f_3(x,y) = \Gamma(f_2)(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{=} \begin{cases} x/2, & \text{ако } \ x \ mod \ 2 \ = \ 0 \\ f_2(x+y, f_2(x,y+1)), & \text{ако } \ x \ mod \ 2 \ = \ 1 \\ \perp, & \text{ако } \ x = \perp \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } \ x \ mod \ 2 \ = \ 0 \\ f_2(\underbrace{x+y}_{\text{четно}}, f_1(x,y+1)), & \text{ако } \ x \ mod \ 2 \ = \ 1 \ \& \ y \ mod \ 2 \ = \ 1 \\ f_2(\underbrace{x+y}_{\text{нечетно}}, \underbrace{f_2(x,y+1)}_{\frac{x+y+1}{2}}), & \text{ако } \ x \ mod \ 2 \ = \ 1 \ \& \ y \ mod \ 2 \ = \ 0 \\ \perp, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } \ x \ mod \ 2 \ = \ 0 \\ \frac{x+y}{2}, & \text{ако } \ x \ mod \ 2 \ = \ 1 \ \& \ y \ mod \ 2 \ = \ 1 \\ (x+y+\frac{x+y+1}{2})/2, & \text{ако } x \ mod \ 2 \ = \ 1 \ \& \ y \ mod \ 2 \ = \ 0 \\ & \qquad \& \ \frac{x+y+1}{2} \ mod \ 2 \ = \ 1 \\ \perp, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } \; x \; mod \; 2 \; = \; 0 \\ \frac{x+y}{2}, & \text{ако } \; x \; mod \; 2 \; = \; 1 \;\; \& \;\; y \; mod \; 2 \; = \; 1 \\ \frac{3x+3y+1}{4}, & \text{ако } \; x \; mod \; 2 \; = \; 1 \;\; \& \;\; y \; mod \; 2 \; = \; 0 \\ & \quad\;\; \& \;\; (x+y) \; mod \; 4 \; = \; 1 \\ \perp, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

$\square$

Задача 3.30. Определете $D_V(R)$ и $D_N(R)$, за следната рекурсивна програма R:

$F(X,X)$ `where`
$F(X,Y) \; = \;$ `if` $X == 0$ `then` 1 `else` $F(X-1, G(X-1)).X$
$G(X) \; = \;$ `if` $X \equiv 0$ mod 2 `then` $X/2$ `else` $G(X)$

Решение. Да означим с

$$\Gamma : \; \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_1 \; \longrightarrow \; \mathcal{F}_2 \quad \text{и} \quad \Delta : \; \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_1 \; \longrightarrow \; \mathcal{F}_1$$

операторите, определени от дефинициите на F и G:

$$\Gamma(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } \; x = 0 \\ f(x-1, g(x-1)).x, & \text{ако } \; x > 0 \end{cases}$$

$$\Delta(f,g)(x) \simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } \; x \equiv 0 \; mod \; 2 \\ g(x), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тъй като Δ не зависи от f, можем лесно да пресметнем функциите от редицата $\{g_n\}_n$, която се дефинираше така:

$$\begin{aligned} g_0 \; &= \; \emptyset^{(1)} \\ g_{n+1} \; &= \; \Delta(f_n, g_n). \end{aligned}$$

$$g_1(x) \simeq \Delta(\emptyset^{(2)}, \emptyset^{(1)})(x) \overset{\text{деф } \Delta}{\simeq} \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \equiv 0 \; mod \; 2 \\ \emptyset^{(1)}(x), & \text{ако } x \equiv 1 \; mod \; 2 \end{cases} \simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \equiv 0 \; mod \; 2 \\ \neg !, & \text{ако } x \equiv 1 \; mod \; 2. \end{cases}$$

Оттук

$$g_2(x) \simeq \Delta(f_0, g_0)(x) \overset{\text{деф } \Delta}{\simeq} \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \equiv 0 \; mod \; 2 \\ g_1(x), & \text{ако } x \equiv 1 \; mod \; 2 \end{cases} \simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \equiv 0 \; mod \; 2 \\ \neg !, & \text{ако } x \equiv 1 \; mod \; 2. \end{cases}$$

Получихме, че $g_1 = g_2$, откъдето и $g_1 = g_n$ за всяко $n \geq 1$.

Сега се насочваме към пресмятането на редицата $\{f_n\}_n$, която се задава така:

$$\begin{aligned} f_0 &= \emptyset^{(2)} \\ f_{n+1} &= \Gamma(f_n, g_n). \end{aligned}$$

За f_1 ще имаме:

$$f_1(x,y) \simeq \Gamma(\emptyset^{(2)}, \emptyset^{(1)})(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } \ x=0 \\ \emptyset^{(2)}(x-1, \emptyset^{(1)}(x-1)).x, & \text{ако } \ x>0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x=0 \\ \neg!, & \text{ако } x>0. \end{cases}$$

За следващата апроксимация f_2 получаваме

$$f_2(x,y) \simeq \Gamma(f_1, g_1)(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } \ x=0 \\ f_1(x-1, g_1(x-1)).x, & \text{ако } \ x>0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } \ x=0 \\ f_1(0, g_1(0)).1, & \text{ако } \ x=1 \\ \neg!, & \text{ако } x>1, \end{cases}$$

или все едно

$$f_2(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } \ x \leq 1 \\ \neg!, & \text{ако } x>1. \end{cases}$$

Оттук за f_3 ще имаме:

$$f_3(x,y) \simeq \Gamma(f_2, g_2)(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } \ x=0 \\ f_2(x-1, g_2(x-1)).x, & \text{ако } \ x>0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } \ x=0 \\ f_2(0, g_2(0)).1, & \text{ако } \ x=1 \\ f_2(1, \underbrace{g_2(1)}_{\neg!}).2, & \text{ако } \ x=2 \\ \neg!, & \text{ако } x>2, \end{cases}$$

с други думи,

$$f_3(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } \ x \leq 1 \\ \neg!, & \text{ако } x>1. \end{cases} \simeq f_2(x,y).$$

Ясно е, че за всяко $n \geq 2$, f_n ще има горния вид, откъдето ѝ точната горна граница $f^* = f_2$ ще е същата функция. Оттук

$$D_V(R)(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} f^*(x,x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x \leq 1 \\ \neg!, & \text{ако } x>1. \end{cases}$$

Сега преминаваме към пресмятането на $D_N(R)$. Тук операторите са изображения над функции, дефинирани в $\mathbb{N}_\perp^k$. По-точно:

$$\Gamma: \ \mathcal{F}_2^\perp \times \mathcal{F}_1^\perp \ \longrightarrow \ \mathcal{F}_2^\perp \quad \text{и} \quad \Delta: \ \mathcal{F}_2^\perp \times \mathcal{F}_1^\perp \ \longrightarrow \ \mathcal{F}_1^\perp,$$

където

$$\Gamma(f,g)(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ако } \ x = 0 \\ f(x-1, g(x-1)).^{*}x, & \text{ако } \ x > 0 \\ \perp, & \text{ако } \ x = \perp; \end{cases}$$

$$\Delta(f,g)(x) = \begin{cases} x/2, & \text{ако } \ x \in \mathbb{N} \ \& \ x \equiv 0 \ mod \ 2 \\ g(x), & \text{ако } \ x \in \mathbb{N} \ \& \ x \equiv 1 \ mod \ 2 \\ \perp, & \text{ако } \ x = \perp. \end{cases}$$

Лесно се вижда, че и тук ще имаме $g_1 = g_2 = \ldots$, където

$$g_1(x) = \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \equiv 0 \ mod \ 2 \\ \perp, & \text{ако } x \equiv 1 \ mod \ 2 \ \vee \ x = \perp. \end{cases}$$

Като знаем това, се насочваме към пресмятането на редицата $\{f_n\}_n$, която се определя както следва:

$$\begin{aligned} f_0 &= \Omega^{(2)} \\ f_{n+1} &= \Gamma(f_n, g_n). \end{aligned}$$

За f_1 ще имаме:

$$f_1(x,y) = \Gamma(\Omega^{(2)}, \Omega^{(1)})(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ \perp, & \text{ако } x > 0 \ \vee \ x = \perp. \end{cases}$$

За следващата апроксимация f_2 получаваме

$$f_2(x,y) = \Gamma(f_1, g_1)(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ако } \ x = 0 \\ f_1(x-1, g_1(x-1)).x, & \text{ако } \ x > 0 \\ \perp, & \text{ако } \ x = \perp \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{ако } \ x = 0 \\ f_1(0, g_1(0)).1, & \text{ако } \ x = 1 \\ \perp, & \text{ако } x > 1 \ \vee \ x = \perp, \end{cases}$$

или

$$f_2(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ако } \ x \leq 1 \\ \perp, & \text{ако } x > 1 \ \vee \ x = \perp. \end{cases}$$

Виждаме, че f_1 и f_2 са съвсем аналогични на предишните две апроксимации. При f_3, обаче, вече ще има разлика:

$$f_3(x,y) = \Gamma(f_2, g_2)(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ако } \ x = 0 \\ f_2(x-1, g_2(x-1)).x, & \text{ако } \ x > 0 \\ \perp, & \text{ако } \ x = \perp \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{ако } \ x = 0 \\ f_2(0, g_2(0)).1, & \text{ако } \ x = 1 \\ \underbrace{f_2(1, \underbrace{g_2(1)}_{\perp})}_{1}.2, & \text{ако } \ x = 2 \\ \underbrace{f_2(x-1, g_2(x-1))}_{\perp}.x, & \text{ако } \ x > 2 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp, \end{cases}$$

или начисто:

$$f_3(x,y) = \begin{cases} x!, & \text{ако } \; x \leq 2 \\ \bot, & \text{ако } x > 2 \;\vee\; x = \bot. \end{cases}$$

С лесна индукция по n се показва, че за всяко n

$$f_n(x,y) = \begin{cases} x!, & \text{ако } \; x < n \\ \bot, & \text{ако } x \geq n \;\vee\; x = \bot. \end{cases}$$

Сега за граничната функция $f^* = \bigsqcup\limits_n f_n$ ще имаме, че

$$f^*(x,y) \;=\; \begin{cases} x!, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \\ \bot, & \text{ако } x = \bot, \end{cases}$$

откъдето

$$D_N(R)(x) \;\stackrel{\text{деф}}{\simeq}\; [f^*]^\circ(x,x) \;=\; x! \quad \text{за всяко } x \in N.$$

$\square$

Азбучен указател