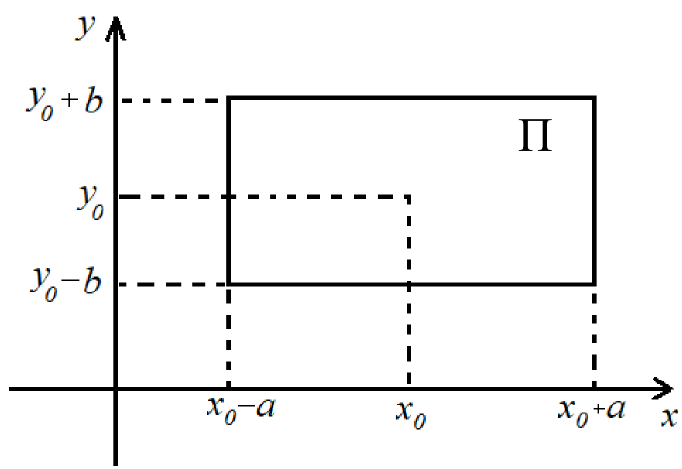
Теорема за съществуване и единственост

Разглеждаме задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

в правоъгълника

$$\Pi = \{(x, y) : \ |x - x_0| \le a, \ |y - y_0| \le b\}.$$



$$\Pi = \{(x,y):\ |x-x_0| \le a,\ |y-y_0| \le b\}.$$

Дефиниция.

Казваме, че $f(x,y)$ е *липшицова функция* по y (равномерно относно x) в правоъгълника Π, ако *съществува константа L, такава че*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

за всеки две точки (x,y_1) и (x,y_2) от Π.

Пример.

f да има ограничена частна производна по y. $K = \sup\limits_{\Pi} |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)|$, то имаме

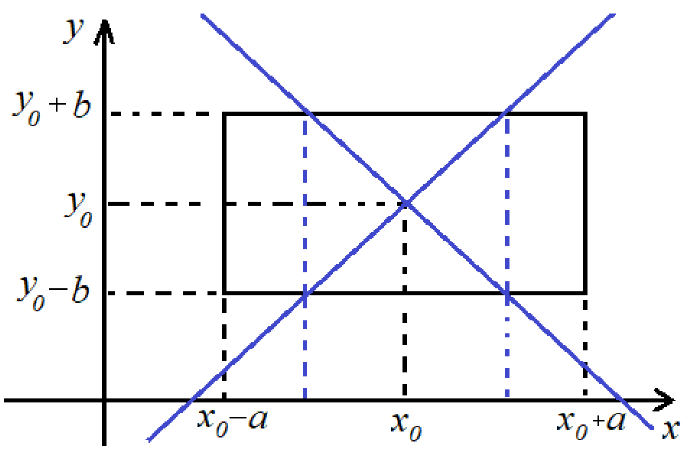
$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)(y_1 - y_2)\right| \le K|y_1 - y_2|.$$

Теорема на Пикар.

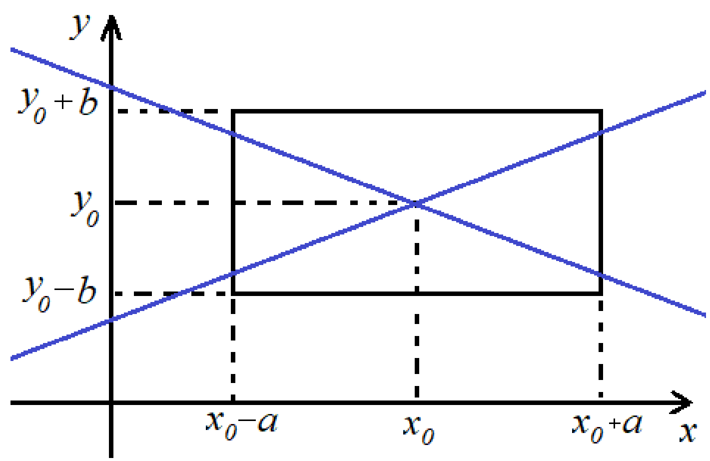
Теорема (Теорема за съществуване и единственост) *Нека $f(x,y) \in C(\Pi)$ е липшицова функция в Π спрямо y. Задачата*

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y), \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

притежава единствено решение, дефинирано поне при $|x - x_0| \le h$, където $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$, а $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |f(x,y)|$.

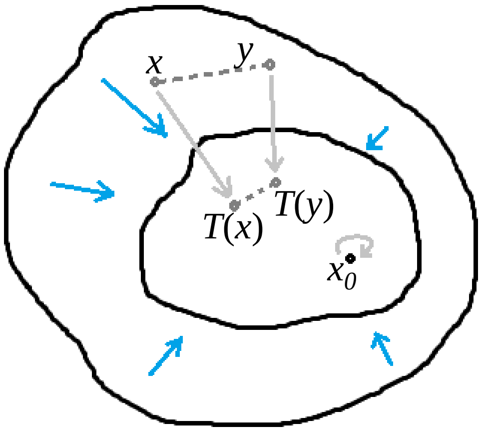


a > b/M



a < b/M

Неподвижна точка на свиващо изображение



Определение. Нека (X, d) е пълно метрично пространство. Изображението $T : X \to X$ се нарича свиващо в X, ако съществува константа $q \in [0, 1)$, такава че

$$d(T(x), T(y)) \leq q\, d(x, y)$$

за всеки два елемента x, y на X.

Теорема. Ако T е свиващо, то съществува единствен елемент x_0 на X, такъв че $T(x_0) = x_0$.

Твърдение. Задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

е еквивалентна на интегралното уравнение

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$$

Доказателство. Интегрираме от x_0 до x равенството

$$y'(s) = f(s, y(s))$$

Нека $f(x), g(x) \in C([c, d])$

$$d(f, g) = \max_{x \in [c, d]} |f(x) - g(x)| \qquad \text{(равномерна норма)}$$

Множеството $C([c, d])$ е затворено спрямо равномерната норма.

Изображението

$$y(x) \longrightarrow y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$$

е свиващо в $C([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon])$, където $\varepsilon > 0$ е достатъчно малко.

Доказателство на теоремата на Пикар.

Построяваме редицата от функции в $C([x_0 - h\ ,\ x_0 + h])$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\, ds\ ,$$

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_k(s))\, ds$$

Ще докажем, че редицата $y_k(x)$ е равномерно сходяща в $C([x_0 - h\ ,\ x_0 + h])$.

$$y_k(x) = y_0 + (y_1(x) - y_0) + (y_2(x) - y_1(x)) + (y_3(x) - y_2(x)) + \ldots + (y_k(x) - y_{k-1}(x))$$

Редът $y_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[y_n(x) - y_{n-1}(x) \right]$ е равномерно сходящ, защото

$$\left| y_n(x) - y_{n-1}(x) \right| \le M K^{n-1} \frac{|x - x_0|^n}{n!}$$

Нека G е област в равнината. Казваме, че G е *област на единственост* за уравнението $y' = f(x, y)$, ако за всяка точка (x_0, y_0) от G задачата на Коши

$$\begin{aligned} &y' = f(x, y), \\ &y(x_0) = y_0 \end{aligned}$$

Казваме, че решението $\varphi(x)$ с дефиниционен интервал Δ_φ на уравнението $y' = f(x, y)$ е *продължение* на решението $\psi(x)$ с дефиниционен интервал Δ_ψ на същото уравнение, ако $\Delta_\psi \subset \Delta_\varphi$ и $\varphi(x) = \psi(x)$ в Δ_ψ.

Като "залепим" всевъзможните продължения на решението на задача на Коши, то ще получим решение с *максимален* дефиниционен интервал, което наричаме непродължимо.

Едно решение на уравнението наричаме *непродължимо решение*, ако съвпада с всяко свое продължение.

Теорема (Глобална теорема за съществуване и единственост) *Нека $f \in C(G)$ и е локално-липшицова функция в G. За всяка точка $(x_0, y_0) \in G$ задачата на Коши*

$$\begin{aligned} &y' = f(x, y), \\ &y(x_0) = y_0 \end{aligned}$$

притежава единствено непродължимо решение.

Теорема (Теорема за напускане на компактите) *Нека* $f \in C(G)$ *е локално-липшицова функция в* G *и* $\varphi(x)$ *с дефиниционен интервал* (α, β) *е непродължимо решение на уравнението* $y' = f(x, y)$*. Тогава за всяко компактно подмножество* K *на* G *съществува такова число* $\varepsilon > 0$*, че* $(x, \varphi(x)) \notin K$ *за* $x \in (\alpha, \alpha + \varepsilon) \cup (\beta - \varepsilon, \beta)$.

Теорема (Принцип за сравняване) *Нека* (x_0, y_0) *е точка от областта* D*, а функциите* $f(x, y)$ *и* $g(x, y)$ *са от* $C(D)$ *и са локално липшицови спрямо* y *в* D*, като*

$$f(x, y) > g(x, y) \text{ за } (x, y) \in D.$$

Ако $\varphi(x)$ *с дефиниционен интервал* Δ_φ *е решението на задачата на Коши*

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned}$$

а $\psi(x)$ *с дефиниционен интервал* Δ_ψ *е решението на задачата на Коши*

$$\begin{aligned} y' &= g(x, y) \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned}$$

то са изпълнени неравенствата

$$\varphi(x) > \psi(x) \text{ , за } x \in \Delta_\varphi \cap \Delta_\psi \cap \{x > x_0\}$$

и

$$\varphi(x) < \psi(x) \text{ , за } x \in \Delta_\varphi \cap \Delta_\psi \cap \{x < x_0\}.$$