Упражнение 9

Неподвижни точки на оператори

1. Неподвижни точки

Ще разглеждаме оператори от вида

$$\Gamma : \mathcal{F}_k \longrightarrow \mathcal{F}_k,$$

т.е. оператори от тип $(k \to k)$. За такива оператори има смисъл да говорим за функции f, такива че

$$f = \Gamma(f). \tag{1}$$

Всяка функция f, за която това е в сила, ще наричаме *неподвижна точка (н.т.)* на оператора Γ.

Всъщност условието (3) е едно уравнение с неизвестно — функцията f. Това уравнение може да има различен брой решения, в частност, може да няма решения.

Следващата задача илюстрира голямото разнообразие в това отношение.

Задача 1. Да се опишат неподвижните точки на всеки от изброените оператори:

а) константния оператор $\Gamma_c(f) = g$ от тип $(1 \to 1)$, където g е някаква фиксирана едноместна функция
Решение. Нека f е неподвижна точка на Γ_c. Тогава $f = \underbrace{\Gamma(f)}_{g}$, т.е. $f = g$ и значи този оператор има *единствена* неподвижна точка — функцията g.

б) оператора идентитет $\Gamma_{id}(f) \stackrel{\text{деф}}{=} f$ от тип $(1 \to 1)$
Решение. Ако f е неподвижна точка на Γ_{id}, то условието $f = \Gamma(f)$ се свежда до $f = f$. Следователно всяка функция е неподвижна точка на Γ_{id} и значи този оператор има *континуум* много неподвижни точки.

в)

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} f(x), & \text{ако } x = 0 \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Нека f е неподвижна точка на Γ. Тогава f удовлетворява условието

$$f(x) \simeq \begin{cases} f(x), & \text{ако } x \ = \ 0 \\ x, & \text{иначе,} \end{cases}$$

което означава, че за $x > 0$ *трябва* $f(x)$ да е равно на x. При $x = 0$ би трябвало да имаме $f(0) \simeq f(0)$, което е изпълнено винаги. Следователно всяка неподвижна точка на Γ зависи от един параметър — стойността ѝ в 0, и значи тя изглежда по следния начин:

$$f_c(x) \simeq \begin{cases} c, & \text{ако } x = 0 \\ x, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Тук c е естествено число или е означение за недефинираност, т.е. във втория случай под f_c разбираме функцията

$$f_{\neg !}(x) \simeq \begin{cases} \neg !, & \text{ако } x = 0 \\ x, & \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

г)

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x \ = \ 0 \\ f(x+1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Ако f е неподвижна точка на Γ, то за нея е вярно, че

$$f(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x \ = \ 0 \\ f(x+1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Значи $f(0) \simeq 0$, а при всяко $x > 0$ би трябвало $f(x) \simeq f(x+1)$, което означава, че

$$f(1) \simeq f(2) \simeq f(3) \simeq \dots \ .$$

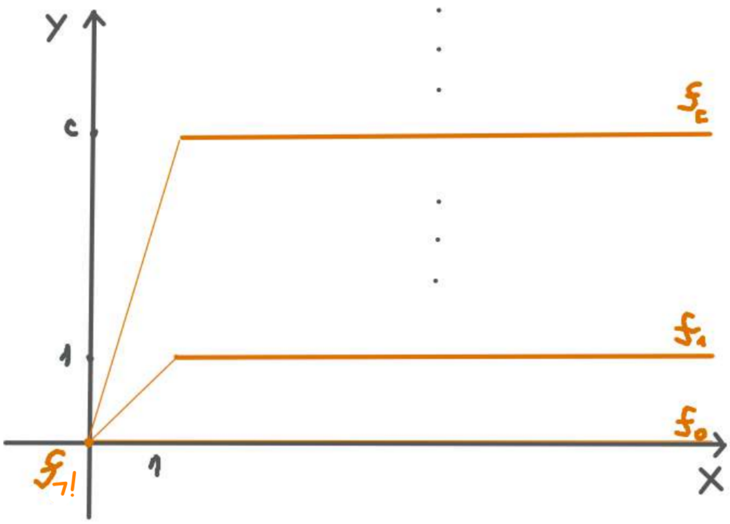
Следователно f трябва да има една и съща стойност при $x > 0$ или въобще да няма стойност. С други думи, f или е някоя от функциите f_c, $c \in \mathbb{N}$, където f_c има вида

$$f_c(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ c, & \text{ако } x > 0, \end{cases}$$

или f е $f_{\neg !}$, където

$$f_{\neg !}(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \neg !, & \text{ако } x > 0, \end{cases}$$

Ето как изглеждат графично тези функции.



Операторите, които разгледахме дотук, имаха неподвижни точки — една или повече. Дали има оператори, които нямат неподвижни точки? Да, макар че те са доста неестествени. Ето един такъв принер.

Задача 2. Да фиксираме две различни функции f_0 и f_1 и да определим оператора Γ както следва:

$$\Gamma(f) = \begin{cases} f_1, & \text{ако } f = f_0 \\ f_0, & \text{ако } f \neq f_0. \end{cases}$$

Да се докаже, че този оператор няма неподвижни точки.

Решение. Разглеждаме двете възможности за f — да е равна или да е различна от f_0, и стигаме до извода, че и в двата случая равенството $\Gamma(f) = f$ е невъзможно.

□

Задача 3. Да се докаже, че всеки от изброените оператори има единствена неподвижна точка и да се намери тази неподвижна точка.

а)

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.f(x-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Нека f е неподвижна точка на Γ, т.е. f удовлетворява рекурсивното условие:

$$f(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x \ = \ 0 \\ x.f(x-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Твърдо сме убедени, че f може да е само функцията *факториел* $\ddot{\smile}$, но да го докажем все пак. Ще разсъждаваме с индукция, по точно, с индукция по x ще докажем, че

$$\forall x \in \mathbb{N}\ f(x) = x!.$$

За $x = 0$ имаме $f(0) = 1 \stackrel{\text{деф}}{=} 0!$. Да допуснем, че $f(x) = x!$ за някое $x \geq 0$. Тогава за $x+1$ ще имаме, съгласно индуктивната хипотеза:

$$f(x+1) \ \simeq \ (x+1).f(x) = (x+1).x! = (x+1)!.$$

б)

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x \ = \ 0 \\ 2.f(x-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Следвайки пунктуално схемата от по-горе, показваме, че ако $f = \Gamma(f)$, то $f(x) = 2^x$ за всяко x.

в)

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ (f(\frac{x}{2}))^2, & \text{ако } x > 0 \text{ е четно} \\ 2(f(\frac{x-1}{2}))^2, & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

Решение. Нека f е неподвижна точка на Γ, т.е. за f е в сила равенството:

$$f(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ (f(\frac{x}{2}))^2, & \text{ако } x > 0 \text{ е четно} \\ 2(f(\frac{x-1}{2}))^2, & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

Сигурно съобразявате, че всеки ред от дефиницията на f съответства на алгоритъма за бързо степенуване и значи би трябвало f да е функцията 2^x. Ако не забележите веднага това, направете си няколко експеримента — пресметнете $f(1), f(2)\ldots$ и ще се ориентирате.

Ние все пак искаме да имаме *доказателство*, че $f = \lambda x.2^x$, което означава, че трябва да отново използваме индукция. В случая се налага тя да е *пълна*, защото $f(x)$ „вика себе си" не в "предишната" точка $x-1$, както беше в предните два примера. Това, което е важно, за да върви индукцията, е че

$$\frac{x}{2} < x \quad \text{за } x > 0 \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{2} < x.$$

За базата $x = 0$ имаме $f(0) \stackrel{\text{деф}}{=} 1 = 2^0$.

Сега да фиксираме някакво $x > 0$ и да предположим, че за всички $x' < x$ е вярно, че $f(x') = 2^{x'}$. Ако x е четно, за него ще имаме:

$$f(x) \simeq (f(\frac{x}{2}))^2 \stackrel{\text{и.х.}}{=} (2^{\frac{x}{2}})^2 = 2^x,$$

а ако x е нечетно, то отново от избора на f и индукционното предположение получаваме:

$$f(x) \simeq 2(f(\frac{x-1}{2}))^2 \stackrel{\text{и.х.}}{=} 2.(2^{\frac{x-1}{2}})^2 = 2^x$$

г)

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 2x+1, & \text{ако } x \leq 1 \\ f(x-1) + 6f(x-2), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Нека за f е изпълнено:

$$f(x) \simeq \begin{cases} 2x+1, & \text{ако } x \leq 1 \\ f(x-1) + 6f(x-2), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2}$$

За да си съставим хипотеза за f, да опипаме почвата:

$$f(2) \stackrel{(4)}{\simeq} f(1) + 6f(0) \stackrel{(4)}{\simeq} 3 + 6.1 = 9 = 3^2;$$

$$f(3) \stackrel{(2)}{\simeq} f(2) + 6f(1) \stackrel{(2)}{\simeq} 9 + 6.3 = 27 = 3^3 \ldots$$

Това, което се набива на очи, че вероятно $f(x) = 3^x$. Да проверим. Ясно е, че отново трябва да разсъждаваме с пълна индукция относно x. Базовите случаи $x = 0$ и $x = 1$ се проверяват непосредствено. Сега да фиксираме $x > 1$ и да приемем, че за всяко $x' < x$, $f(x') = 3^{x'}$. Тогава

$$f(x) \stackrel{(4)}{\simeq} f(x-1) + 6f(x-2) \stackrel{\text{и.х.}}{=} 3^{x-1} + 6.3^{x-2} = 3^{x-1} + 2.3^{x-1} = 3^x.$$

д)

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} y+1, & \text{ако } x = 0 \\ f(x-1,0), & \text{ако } x > 0 \ \& \ y = 0 \\ f(x-1, f(x,y-1)), & \text{ако } x > 0 \ \& \ y > 0. \end{cases}$$

Решение. Това по същество доказахме в зад. 3 от първото упражнение "Индукция във фундирани множества". □

2. Най-малки неподвижни точки

Казваме, че f е *най-малка неподвижна точка (н.м.н.т.)* на оператора Γ, ако f е най-малката сред неподвижните точки на Γ, което означава две неща:

1) f е неподвижна точка на Γ;

2) за всяка друга неподвижна точка g е вярно, че $f \subseteq g$.

Ако съществува, най-малката неподвижна точка на Γ е единствена: наистина, ако f и g са две н.м.н.т., то от второто условие на дефиницията ще имаме, че $f \subseteq g$ и $g \subseteq f$ и значи $f = g$. Тази единствена най-малка неподвижна точка на Γ ще отбелязваме с f_Γ. (В темите за спец. КН ще я срещате и като $lfp(\Gamma)$).

Задача 4. Определете най-малките неподвижни точки на всеки от операторите от *Задача* 0.5.

Решение. **а)** Видяхме, че константният оператор $\Gamma_c(f) \stackrel{\text{деф}}{=} g$ има единствена неподвижна точка g; следователно тя е и най-малката.

б) За оператора Γ_{id}, на който всяка функция е неподвижна точка, очевидно най-малката ще е $\emptyset^{(1)}$.

в) Ясно е, че сред всички неподвижни точки на този оператор най-малката ще е

$$f_{\neg!}(x) \simeq \begin{cases} \neg!, & \text{ако } x = 0 \\ x, & \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

г) Най-малката н.т. на Γ ще е функцията $f_{\neg!}$. □

Задача 5. (Устен изпит, 06/07/2018, гр. А, спец. И)
На кои от изброените оператори функцията $x!$ се явява неподвижна точка. А на кои е най-малка неподвижна точка? Обосновете отговорите си.

а) $\Gamma_1(f)(x) = x!$

б) $\Gamma_2(f)(x) \simeq x.f(x \dot{-} 1),$ където $x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ x-1, & \text{ако } x > 0 \end{cases}$

в) $\Gamma_3(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x \leq 1 \\ x.f(x-1), & \text{ако } x > 1 \end{cases}$

г) $\Gamma_4(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ \lfloor \frac{f(x+1)}{x+1} \rfloor, & \text{ако } x > 0 \end{cases}$

Решение. **а)** Операторът Γ_1 е константен, и както видяхме от *Задача* 0.5, той има единствена неподвижна точка, в случая $x!$.

б) Изглежда доста вероятно $x!$ да е неподвижна точка на Γ_2, но да го проверим внимателно. За целта да дадем някакво име на функцията *факториел*, например φ. Трябва да проверим дали $\Gamma_2(\varphi) = \varphi$, което ще рече — дали $\Gamma_2(\varphi)(x) \simeq \varphi(x) \stackrel{\text{деф}}{=} x!$ за всяко $x \in \mathbb{N}$.

За *положително* x това наистина е така, защото тогава

$$\Gamma_2(\varphi)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} x.\varphi(x \dot{-} 1) \simeq x.\varphi(x-1) = x(x-1)! = x!$$

При $x = 0$, обаче, това вече не е вярно, защото

$$\Gamma_2(\varphi)(0) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} 0.\varphi(0 \dot{-} 1) = 0.\varphi(0) = 0 \neq 0!,$$

което означава, че $x!$ НЕ е неподвижна точка на Γ_2. Всъщност неподвижните точки на този оператор нямат нищо общо с факториела; те са никъде недефинираната функция $\emptyset^{(1)}$ и едноместната константна функция $f = \lambda x 0$ — може да го проверите за упражнение $\ddot{\smile}$.

в) Този оператор вече обсъждахме в *Задача* 0.7, където видяхме че неподвижната му точка е единствена и тя е $x!$.

г) Тук вече функцията $x!$ Е неподвижна точка на оператора.

Наистина, при $x = 0$ имаме, че $\Gamma_4(\varphi)(0) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} 1 = 0! = \varphi(0)$.

При $x > 0$ минаваме по другия клон от дефиницията на Γ_4 и получаваме последователно:

$$\Gamma_4(\varphi)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \lfloor \frac{\varphi(x+1)}{x+1} \rfloor \stackrel{\text{деф}}{=} \lfloor \frac{(x+1)!}{x+1} \rfloor = x! = \varphi(x).$$

Получихме, че $x!$ е неподвижна точка на Γ_4. Тя, обаче, не е *най-малката* неподвижна точка на оператора. Непосредствено се проверява, че всъщност f_{Γ_4} е следната функция:

$$f_{\Gamma_4}(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ \neg !, & \text{иначе.} \end{cases}$$

□

Решете самостоятелно задачата на група Б, за да се ориентирате дали сте разбрали предишната.

Задача 6. (Устен изпит, 06/07/2018, гр. Б, спец. И)
На кои от изброените оператори функцията x^2 се явява неподвижна точка. А на кои е най-малка неподвижна точка? Обосновете отговорите си.

а) $\Gamma_1(f)(x) = x^2$,

б) $\Gamma_2(f)(x) \simeq f(x \dot{-} 1) + (2x \dot{-} 1)$, където $x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ x-1, & \text{ако } x > 0 \end{cases}$

в) $\Gamma_3(f)(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ f(x+1) - 2x - 1, & \text{ако } x > 0 \end{cases}$

г) $\Gamma_4(f)(x) \simeq \begin{cases} x, & \text{ако } x \leq 1 \\ f(x-1) + 2x - 1, & \text{ако } x > 1. \end{cases}$

Задача 7. (II контролно, 17/12/2016, спец. КН)

а) Да се даде пример за оператор $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$, който има изброимо много неподвижни точки, всяка от които е крайна функция, но няма най-малка неподвижна точка.

б) Възможно ли е да съществува оператор $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$, който има безкрайно много неподвижни точки и има най-малка неподвижна точка, която е тотална функция? Обосновете отговора си!

Решение. **а)** Ясно е, за да няма н.м.н.т., този оператор трябва да е твърде особен. Ще го конструираме, като укажем явно в дефиницията му, че неговите неподвижни точки са функциите от една фиксирана редица от крайни функции и само те. Тази редица от крайни функции $g_0, g_1, \ldots$ можем да изберем по най-различни начини. Да се спрем, например, на следната редица $\{g_a\}_a$:

$$g_a(x) \simeq \begin{cases} a, & \text{ако } x = 0 \\ \neg !, & \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

Сега да дефинираме Γ по следния начин:

$$\Gamma(f) \; = \; \begin{cases} g_a, & \text{ако } f = g_a \text{ за някое } a > 0 \\ g_0, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

Ясно е, че всяка от функциите g_a е неподвижна точка на Γ: за $a > 0$ минаваме по първия клон от определението на Γ, а за $a = 0$ — по втория. Очевидно е също, че други неподвижни точки този оператор няма как да има, защото за всяка f, $\Gamma(f)$ е винаги нещо от вида g_a.

б) Отговорът е НЕ, заради следното просто наблюдение, което коментирахме още на първата лекция:

ако f е тотална и $f \subseteq g$, то $f = g$.

Ясно е сега, че ако f_Γ е тотална, а g е някаква неподвижна точка на Γ, то от това, че $f_\Gamma \subseteq g$ получаваме $f_\Gamma = g$, с други думи, ако най-малката неподвижна точка е тотална, то тя е единствена неподвижна точка. $\square$