Домашно №2

Задача 1. Докажете, че следващите оператори са компактни:

а)

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x < y \\ f(x-y,y)+1, & \text{иначе;} \end{cases}$$

б)

$$\Delta(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } y = 0 \\ (f(x,\frac{y}{2}))^2, & \text{ако } y > 0 \text{ е четно} \\ x.(f(x,\frac{y-1}{2}))^2 & \text{ако } y \text{ е нечетно.} \end{cases}$$

Задача 2. Нека $\Gamma\colon \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ и $\Delta\colon \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ са следните оператори:

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} f(x), & \text{ако } \ Dom(f) \text{ е безкрайно} \\ \neg!, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\Delta(f)(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } \ \forall y f(x,y) > 0 \\ 1, & \text{ако } \ \exists y f(x,y) \simeq 0 \\ \neg!, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

Проверете дали всеки от тези оператори е:

а) монотонен;

б) компактен.

Задача 3. Като използвате теоремата на Кнастер-Тарски, намерете най-малката неподвижна точка на всеки от операторите:

а)

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x \leq 1 \\ x.f(x-2), & \text{иначе;} \end{cases}$$

б)

$$\Delta(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } y = 0 \\ (f(x,\frac{y}{2}))^2, & \text{ако } y > 0 \text{ е четно} \\ x.(f(x,\frac{y-1}{2}))^2, & \text{ако } y \text{ е нечетно.} \end{cases}$$

Задача 4. Опишете всички неподвижни точки на операторите по-долу и определете най-малката сред тези неподвижни точки.

а)

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x < y \\ f(x-y,y)+1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

б)

$$\Delta(f)(x,y) \simeq \begin{cases} x, & \text{ако } x < y \\ f(x-y,y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Задача 5. Нека $\Gamma\colon \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ е следният оператор:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } \ y = 0 \\ f(1,y-1), & \text{ако } \ x = 0 \ \& \ y > 0 \\ f(f(x-1,y-1),y-1)+1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажете, че за най-малката неподвижна точка f_Γ на Γ е изпълнено:

$$\forall x \forall y (!f_\Gamma(x,y) \implies f_\Gamma(x,y) \geq min(x,y)).$$

Задача 6. Нека $\Gamma\colon \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ е операторът:

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{ако } x \text{ е точен квадрат} \\ f(f(x+1)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажете, че за най-малката неподвижна точка f_Γ на този оператор е изпълнено условието:

$$\forall x (x > 1 \ \& \ !f_\Gamma(x) \implies f_\Gamma(x) < x).$$