1. Комплексни числа

Алгебричен вид на комплексно число
Комплексно число в алгебричен вид е $z = a + bi$, където a и b са реални числа.
Аритметични операции с комплексни числа извършваме по формулите

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
- $(a + bi) * (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- $(a + bi)/(c + di) = \dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$, когато c и d не са едновременно 0

Тригонометричен вид на комплексно число Комплексно число може да се зададе също и в тригонометричен вид $a + bi = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Връзката между алгебричния и тригонометричния вид е следната:

- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- φ е ъгъл, за който $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.

Операциите умножение, деление и степенуване в тригонометричен вид:

- $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) * r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)$
- $\dfrac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big)$
- $\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

Формула на Моавър за извличане на n-ти корен от $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}),\ k = 0, 1, \ldots, n - 1$$

Задача 1. *Намерете корените на уравнението* $z^3 = \dfrac{(\sqrt{3} + i)^{30}}{(i + 1)^{24}}$ *в алгебричен и тригонометричен вид.*

Решение. *Нека* $z_1 = \sqrt{3} + i$. *Пресмятаме абсолютната стойност* r_1 *и аргумента* φ_1 *на* z_1: $r_1 = \sqrt{3 + 1} = 2$, $\cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *и* $\sin\varphi_1 = \frac{1}{2}$, *откъдето* $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$.
Аналогично намираме, че $z_2 = 1 + i$ *има модул* $r_2 = \sqrt{2}$ *и аргумент* $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$.
Степенуваме $z_1^{30} = r_1^{30}\big(\cos(30\varphi_1) + i\sin(30\varphi_1)\big) = 2^{30}(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = -2^{30}$;
$z_2^{24} = r_2^{24}\big(\cos(24\varphi_2) + i\sin(24\varphi_2)\big) = (\sqrt{2})^{24}(\cos 6\pi + i\sin 6\pi) = 2^{12}$.
Така, $\dfrac{z_1^{30}}{z_2^{24}} = \dfrac{-2^{30}}{2^{12}} = -2^{18}$.
Тригонометричният вид на -2^{18} *е* $2^{18}(\cos\pi + i\sin\pi)$.
Третите корени намираме по формулата на Моавър:

$$z = \sqrt[3]{2^{18}}(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}),\ k = 0, 1, 2.$$

При $k = 0$, $z = 2^6(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 64(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 32 + 32\sqrt{3}i$.
При $k = 1$, $z = 2^6(\cos\pi + i\sin\pi) = 64(-1) = -64$.
При $k = 2$, $z = 2^6(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 64(\frac{1}{2} + i(-\frac{\sqrt{3}}{2})) = 32 - 32\sqrt{3}i$.

Задачи за упражнение

Задача 2. *Намерете тригонометричния вид на комплексното число* $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^{15}}{(1+i)^8}$.

Задача 3. *Решете уравнението* $z^4 = \dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$.

Задача 4. * *Нека* $x \in (0; 2\pi)$. *Докажете, че:*

$$a)\, \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\ ;$$

$$b)\, \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\ .$$

Упътване: За $z = \cos x + i \sin x$ пресметнете реалната и имагинерната част на геометричната прогресия $z + z^2 + \ldots + z^n$.