Текстовете са от: Т. Генчев, Обикновени диференциални уравнения, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 1991 г.

Автономни системи

ФАЗОВО ПРОСТРАНСТВО. КИНЕМАТИЧНА ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НА РЕШЕНИЯТА. ПРИМЕРИ

Както вече имахме случай да отбележим, системите от вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x), \tag{1}$$

където $\mathbf{x} = (x^1,\ x^2, \ldots,\ x^n)$ описва някаква област D от $\mathbf{R}^n$, а функцията $\mathbf{f}:\ D \longrightarrow \mathbf{R}^n$ е гладка, се наричат *автономни*. В този контекст D се нарича фазово пространство на системата (1). Обикновено задачите на динамиката водят до автономни системи. Например според основния закон на Нютон движението на материална точка $\mathbf{x} = (x^1,\ x^2,\ x^3)$ с маса m в силово поле $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F^1(\mathbf{x}),\ F^2(\mathbf{x}),\ F^3(\mathbf{x}))$, дефинирано в някаква област $G \subset \mathbf{R}^3$, се описва от системата

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{2}$$

която лесно се свежда до автономна. Достатъчно е да положим

$$\dot{x}^1 = x^4, \qquad \dot{x}^2 = x^5, \qquad \dot{x}^3 = x^6, \tag{3}$$

за да получим уравненията

$$\dot{x}^4 = \frac{1}{m}F^1(\mathbf{x}), \qquad \dot{x}^5 = \frac{1}{m}F^2(\mathbf{x}), \qquad \dot{x}^6 = \frac{1}{m}F^3(\mathbf{x}), \tag{4}$$

които заедно с (3) образуват автономна система с неизвестни $x^1,\ x^2, \ldots,\ x^6$ и фазово пространство $G\times\mathbf{R}^3 \subset \mathbf{R}^6$. Точно по същия начин за координатите и скоростите на произволна система $\sum$, състояща се от n материални точки в $\mathbf{R}^3$, получаваме автономна система с $6n$-мерно фазово пространство, което за определеност ще означим с Φ_Σ. Нещо повече, ако знаем, че в момента t_0 състоянието на $\sum$ се описва от $\mathbf{x}_0 \in \Phi_\Sigma$, с помощта на теоремата за съществуване и единственост поне по принцип можем да научим миналото и да предскажем бъдещето на $\sum$. Фактът, че дясната страна на (1) не зависи от t, означава, че законът, който управлява $\sum$, е даден веднъж завинаги и остава неизменен. Както току-що констатирахме, това предположение естествено води до заключението, че цялата еволюция на $\sum$ се определя от нейното състояние в един-единствен момент. Това обстоятелство обяснява и появата на термина „автономна система".

З а б е л е ж к а 1. Всяка нормална система

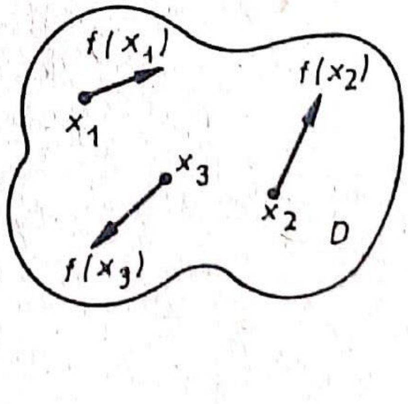
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, x), \quad \mathbf{f} = (f^1, f^2, \ldots, f^n), \quad \mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \tag{5}$$

може да се сведе до автономна, ако въведем още една пространствена променлива с помощта на равенството $x^{n+1} = t$. В такъв случай от (5) и от връзката между x^{n-1} и t получаваме

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= f^1(x^{n+1}, x^1, x^2, \ldots, x^n), \\ \dot{x}^2 &= f^2(x^{n+1}, x^1, x^2, \ldots, x^n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}^n &= f^n(x^{n+1}, x^1, x^2, \ldots, x^n), \\ \dot{x}^{n+1} &= 1, \end{aligned} \tag{6}$$

т.е. автономна система с $(n+1)$-мерно фазово пространство, което съвпада с дефиниционната област на $\mathbf{f}$.

Въпреки че според тази забележка класът на автономните системи не е по-тесен от класа на нормалните, липсата на t в дясната страна на (1) дава известни предимства, защото ни позволява да използваме някои полезни геометрични и кинематични нагледи. Както обикновено ще започнем с няколко дефиниции.



Фиг. 34

Дефиниция 1. Нека D е област в $\mathbf{R}^n$ и нека $\mathbf{f} : D \longrightarrow \mathbf{R}^n$ е непрекъсната функция. В такъв случай на всяко $\mathbf{x} \in D$ можем да съпоставим вектора $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ с начало в $\mathbf{x}$. Като оставим $\mathbf{x}$ да опише D, получаваме множество от вектори, което наричаме *векторно поле* (фиг. 34). Стараейки се да направим възможно използването на геометричната интуиция, вместо за векторната функция $\mathbf{f}$ по-често говорим за векторното поле $\mathbf{f}$. Казваме, че едно векторно поле принадлежи на класа $C^k(D)$, ако функцията, която му съответства, има това свойство. Векторните полета са основни обекти за изследване в геометрията и в диференциалната топология. Понеже чрез равенството $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ между автономните системи и векторните полета се установява еднозначно обратимо съответствие, общата теория на автономните системи и диференциалната топология се оказват тясно свързани. Макар че в тези лекции почти няма да използваме тази връзка, ще си служим с геометричен език навсякъде, където това е целесъобразно.

Да разгледаме отново автономната система

$$(1) \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{f} \in C^1(D),$$

където D е област в $\mathbf{R}^n$. Векторът $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ се нарича фазова скорост на (1) в точката $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in D$. Точките, в които $\mathbf{f}$ се анулира, се наричат *точки на равновесие* на (1) или *особени точки* на векторното поле $\mathbf{f}$*. Тези точки са от особен интерес както в теорията на автономните системи, така и в диференциалната топология. Очевидно е, че ако $\mathbf{a}$ е точка на равновесие на (1), константата $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ е решение на (1), защото $\dot{\mathbf{a}} = 0$, $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = 0$. Нещо повече, според теоремата за единственост $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ е единственото решение на (1), което минава през $\mathbf{a}$. Този резултат заедно с интуитивната представа за равновесие, която имаме от физиката, обяснява появата на първия термин. Що се касае до названието „особена точка“, то произхожда от факта, че близо до точките, в които $\mathbf{f}$ се анулира, в общия случай направлението на вектора $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ не се мени непрекъснато, въпреки че функцията $\mathbf{f}$ е гладка. Читателят би могъл да се убеди в това, като изобрази достатъчно подробно полето $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, около точката $\mathbf{x} = 0$.

Макар и очевидна, следващата лема дава полезна интерпретация на решенията на (1).

Лема 1. Нека (m_1, m_2) е интервал от $\mathbf{R}$ и векторната функция $\varphi : (m_1, m_2) \longrightarrow D$ принадлежи на $C^1(m_1, m_2)$. В такъв случай тя удовлетворява системата (1) тогава и само тогава, когато за

---

*Предпочитаме втория термин като по-кратък и често вместо за точка на равновесие ще говорим за особена точка на (1).

всяко $t \in (m_1,\ m_2)$ векторът $\dot\varphi(t)$ съвпада с фазовата скорост на (1) в точката $\varphi(t)$.

Наистина равенството $\dot\varphi(t) = \mathbf{f}(\varphi(t))$ е аналитичен запис на формулираното твърдение.

Дефиниция 2. Нека G е фазовото пространство на системата (1) и $\varphi:\ (m_1,\ m_2) \longrightarrow G$ е решение на тази система. Траекторията, която се описва от точката $\varphi(t)$, когато t пробягва $(m_1,\ m_2)$, се нарича *фазова крива* на (1).

Ясно е, че интегралните и фазовите криви на една автономна система са тясно свързани, но между тях има и съществена разлика: докато фазовите криви лежат в G, интегралните криви се намират в разширеното фазово пространство $\mathbb{R} \times G$. Разбира се, ако $t \longrightarrow (t,\ \varphi(t))$ е интегрална крива, нейната проекция в G е фазова крива.

Въведените понятия имат естествени аналози и в неавтономния случай: ако D е област от $\mathbb{R}^n$ и

(7) $$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t,\ \mathbf{x}), \qquad \mathbf{f} \in C^1\{(a,\ b) \times D\},$$

е нормална система, D също се нарича *фазово пространство*, а проекциите на интегралните криви в D — *фазови криви*. В неавтономния случай обаче фазовите криви не са особено полезни, защото съществено различни решения на (7) могат да имат пресичащи се фазови криви, докато в автономния случай това е невъзможно. Този факт е следствие от

Лема 2. Ако $t \longrightarrow \varphi(t)$ е непродължимо решение на (1) с дефиниционен интервал $(m_1,\ m_2)$, то $t \longrightarrow \varphi(t+c)$ удовлетворява (1) в интервала $(m_1 - c,\ m_2 - c)$ и, разбира се, също е непродължимо.

Доказателство. Да положим за краткост $\mathbf{x}(t) = \varphi(t+c)$, $t \in (m_1 - c,\ m_2 - c)$. Имаме $\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot\varphi(t + c)$. Като фиксираме t в интервала $(m_1 - c,\ m_2 - c)$ и заместим $\lambda = t + c$ в тъждеството $\dot\varphi(\lambda) = \mathbf{f}(\varphi(\lambda))$, $\lambda \in (m_1,\ m_2)$, получаваме $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ и завършваме доказателството.

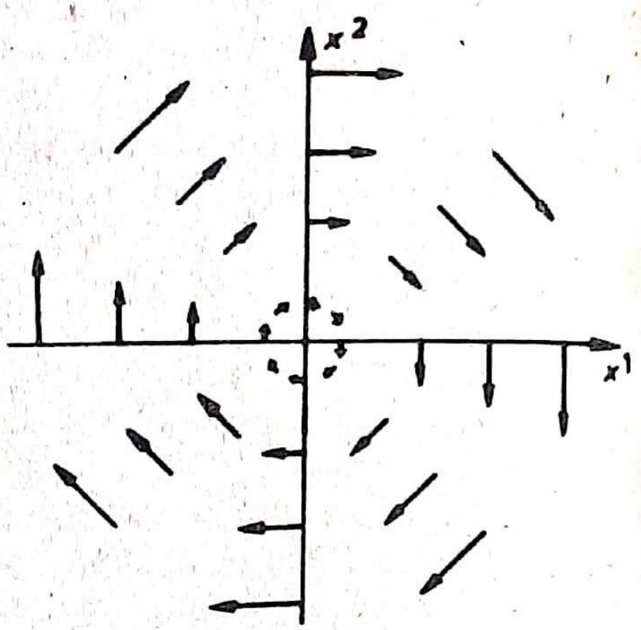
Предоставяме на читателя сам да се убеди, че решението $t \longrightarrow \varphi(t + c)$ е непродължимо извън интервала $(m_1 - c,\ m_2 - c)$. Ясно е, че траекториите на $t \longrightarrow \varphi(t)$ и $t \longrightarrow \varphi(t+c)$ съвпадат, само че едната от тях се описва от фазовата точка със закъснение c спрямо другата.

Следствие. Ако две фазови криви L_1 и L_2 на (1) се пресичат, те съвпадат.

Доказателство. Нека L_k е траектория на решението φ_k с максимален дефиниционен интервал $(m_{1k},\ m_{2k})$, $k = 1, 2$. Щом

L_1 и L_2 се пресичат, съществуват точки t_1 и t_2, $m_{11} < t_1 < m_{21}$, $m_{12} < t_2 < m_{22}$, за които $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$. Да разгледаме решението $\psi(t) = \varphi_2(t+c)$, където $c = t_2 - t_1$. Очевидно $\psi(t_1) = \varphi_2(t_2) = \varphi_1(t_1)$. Следователно според теоремата за единственост решенията ψ и φ_1 съвпадат, т.е. за всяко $t \in (m_1,\ m_2)$ имаме $\varphi_1(t) = \varphi_2(t+c)$ и, нещо повече, $m_{11} = m_{12} - c$, $m_{21} = m_{22} - c$. От установеното равенство, разбира се, следва, че $L_1 = L_2$.

Коментар. Една траектория L във фазовото пространство на (1) може да бъде параметризирана по безбройно много начини. Тя е фазова крива тогава и само тогава, когато съществува такава параметризация $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, че „скоростта" $\dot{\mathbf{x}}(t)$ на движещата се по L точка $\mathbf{x}(t)$ да съвпада с фазовата скорост $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ за всяко t от дефиниционния интервал на функцията $t \longrightarrow \mathbf{x}(t)$. Според току-що доказаното следствие при дадена фазова крива L параметризацията, която я превръща в решение, е определена с точност до транслация.



Фиг. 35

Всевъзможните фазови криви на автономната система (1) образуват нейния *фазов портрет*. Понякога (предимно в двумерния случай) достатъчно пълното графично изображение на фазовото векторно поле дава представа за фазовия портрет на системата. Ето два примера:

Пример 1. Да разгледаме системата с постоянни коефициенти

$$\dot{x}^1 = x^2, \qquad \dot{x}^2 = -x^1, \tag{8}$$

чието фазово пространство е $\mathbf{R}^2$. Нейното векторно поле се получава, като на точката $(x^1,\ x^2)$ съпоставим вектора $(x^2,\ -x^1)$, който чертаем с начало в $(x^1,\ x^2)$. Картината е изобразена на фиг. 35. Тя ни подсказва, че фазовите криви са окръжности с център в началото. За да се убедим в това, достатъчно е да умножим първото уравнение на (8) с x^1, второто — с x^2 и да съберем.

В предишния параграф установихме, че различните фазови криви на (1) не се пресичат. Не е изключено обаче някои от тях да се самопресичат.

Дефиниция 1. Казваме, че *траекторията на решението* $t \longrightarrow \varphi(t)$, $t \in (m_1,\ m_2)$, *се самопресича*, ако съществуват поне две различни числа t_1 и t_2 от $(m_1,\ m_2)$, за които $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$.

Припомняме на читателя, че всички фазови криви на системата $\dot{x}^1 = x^2$, $\dot{x}^2 = -x^1$ имат това свойство .

Следващата теорема дава съществена информация за самопресичащите се траектории.

Теорема 1. Нека фазовата крива L се самопресича. Тогава е налице точно една от следните две възможности:

а) L е траектория на периодично решение $\widetilde{\varphi}$, което има наймалък положителен период;

б) L е точка на равновесие на системата. В този случай L е траектория на решение от вида $\widetilde{\varphi} = \text{const}$.

И в двата случая решението $t \longrightarrow \widetilde{\varphi}$ е дефинирано за всяко $t \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $t \longrightarrow \varphi(t)$ е едно от решенията с траектория L и нека $(m_1,\ m_2)$ е дефиниционният интервал на φ. Понеже L се самопресича, съществуват числа t_1 и t_2, $t_1 < t_2$, от $(m_1,\ m_2)$ такива, че $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Нека $\widetilde{\varphi}$ е непродължимото решение, което съвпада с φ за $t \in (m_1,\ m_2)$, и $\widetilde{L}$ е траекторията на $\widetilde{\varphi}$. Ще докажем, че $\widetilde{L} = L$ и че $\widetilde{\varphi}$ е периодично с период $t_2 - t_1$. Да означим с $(\widetilde{m}_1,\ \widetilde{m}_2)$ дефиниционния интервал на $\widetilde{\varphi}$ и да разгледаме решението на (1), дефинирано с равенството $\psi(t) = \widetilde{\varphi}(t + c)$, $c = t_2 - t_1$. Очевидно $\psi(t_1) = \widetilde{\varphi}(t_2) = \widetilde{\varphi}(t_1)$, т.е. $\psi = \widetilde{\varphi}$.

Понеже $\widetilde{\varphi}$ е непродължимо, то и ψ има това свойство. (Допуснете противното!) Като сравняваме дефиниционните интервали на $\widetilde{\varphi}$ и ψ, намираме $\widetilde{m}_1 = \widetilde{m}_1 - c$, $\widetilde{m}_2 = \widetilde{m}_2 - c$ и заключаваме, че $\widetilde{m}_1 = -\infty$, $\widetilde{m}_2 = +\infty$. С други думи, установихме равенството $\widetilde{\varphi}(t) = \widetilde{\varphi}(t + c)$, $t \in \mathbb{R}$, което показва, че решението $\widetilde{\varphi}$ е периодично с период с. Тъй като за всяко k имаме $\widetilde{\varphi}(t + kc) = \widetilde{\varphi}(t)$, цялата траектория $\widetilde{L}$ се описва, когато t пробягва интервала $[t_1,\ t_1 + c] = [t_1,\ t_2] \subset (m_1,\ m_2)$. Понеже в $[t_1,\ t_2]$ имаме $\varphi = \widetilde{\varphi}$, равенството $L = \widetilde{L}$ е установено.

И така оказа се, че всяка самопресичаща се интегрална крива е траектория на периодично решение, дефинирано за всяко реално t. Остава да разграничим случаите а) и б). За тази цел ще изучим свойствата на множеството от периодите.