Операции, Групи, Пръстени, Полета, Линейни пространства

Йонко Йонков

3 ноември 2020 г.

1 Операции

Нека M е множество. n-арна операция наричаме всяка функция
$* : M^n \to M$.

2 Бинарни операции

В частност на горната дефиниция имаме, че бинарна операция е всяка функция $* : M^2 \to M$

3 Свойства на бинарните операции

Нека $* : M^2 \to M$

Определение 1. Затвореност: Ще казваме, че множеството M е затворено относно операцията $*$, ако: $(\forall a \in M)(\forall b \in M)(\exists c \in M)[a * b = c]$.

Определение 2. Асоциативност: Ще казваме, че $*$ е асоциативна, ако:
$(\forall a \in M)(\forall b \in M)(\forall c \in M)\big[(a * b) * c = a * (b * c)\big]$.

Определение 3. Комутативност: Ще казваме, че $*$ е комутативна, ако:
$(\forall a \in M)(\forall b \in M)[a * b = b * a]$

Определение 4. Неутрален елемент: Казваме, че * има неутрален елемент, ако:
$(\exists e \in M)(\forall a \in M)[e * a = a * e = a]$

Определение 5. Обратен елемент: Нека $*$ има неутрален елемент e и $a \in M$. Ще казваме, че елеметът $a' \in M$ е обратен на a относно операцията $*$, ако: $a * a' = a' * a = e$.

Определение 6. Група:
Нека G е множество и $* : G^2 \to G$ е бинарна операция. Ще казваме, че $< G, * >$ е група (множеството G образува група относно $*$), ако:
1.G е затворено относно операцията $*$
2.* е асоциативна
3.* има неутрален елемент e
4.$(\forall a \in G)(a' \in G)[a * a' = a' * a = e]$ (всеки елемент си има обратен)

Определение 7. Абелева група
Нека $< G, * >$ е група. Ще казваме, че $< G, * >$ е абелева група, ако $*$ е комутативна.

Определение 8. Пръстен
Нека R е множество, а $+$ и $.$ са бинарни операции, които ще наричаме съответно събиране и умножение. Казваме, че $< R, +, . >$ е пръстен, ако:
1.$< R, + >$ е абелева група
2.R е затворено относно $.$
3.$.$ е асоциативна
4.$(\forall a \in R)(\forall b \in R)(\forall c \in R)\big[\big(a.(b+c) = a.b + a.c\big) \wedge \big((a+b).c = a.c + b.c\big)\big]$
(Лява и дясна дистрибутивност)

Определение 9. Поле
Нека $< \mathbb{F}, +, . >$ е пръстен. Ще казваме, че $< \mathbb{F}, +, . >$ е поле, ако:
1. $.$ има неутрален елемент $e \in \mathbb{F}$
2. $.$ е комутативна
3.$(\forall a \in \mathbb{F} \setminus \{0_{\mathbb{F}}\})(\exists a' \in \mathbb{F})[a.a' = a'.a = e]$, където e е неутралението елемент относно $.$.

Определение 10. Линейно пространство
Нека $< \mathbb{F}, +, . >$ е поле. Нека $\mathbb{V}$ е множество, чиито елементи ще наричаме вектори. Нека $\oplus : \mathbb{V}^2 \to \mathbb{V}$ и $\odot : \mathbb{F} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ са бинарни операции, които ще наричаме съответно събиране на вектори и умножение на вектор със скалар. Ще казваме, че $< V, \oplus, \odot >$ е линейно пространство над полето $< \mathbb{F}, +, . >$, ако:
1.$< \mathbb{V}, \oplus$ е абелева група
2.$(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V})(\exists \mathbf{w} \in \mathbb{V})[\lambda \odot \mathbf{v} = \mathbf{w}]$
3.$(\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V})[1_{\mathbb{F}} \odot \mathbf{v} = \mathbf{v}]$
4.$(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V})(\forall \mathbf{w} \in \mathbb{V})\big[\lambda \odot (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = \lambda \odot \mathbf{v} \oplus \lambda \odot \mathbf{w}\big]$
5.$(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall \mu \in \mathbb{F})(\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V})\big[(\lambda + \mu) \odot \mathbf{v} = \lambda \odot \mathbf{v} \oplus \mu \odot \mathbf{v}\big]$
6.$\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall \mu \in \mathbb{F})(\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V})\big[\lambda \odot (\mu \odot \mathbf{v}) = (\lambda.\mu) \odot \mathbf{v}\big]$

Определение 11. Линейно подпространство
Нека $\mathbb{F}$ е поле и $< V, \oplus, \odot >$ е линейно пространство над $\mathbb{F}$. Нека $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$. Ще казваме, че $< \mathbb{W}, \oplus, \odot >$ е подпространство на $< \mathbb{V}, \oplus, \odot >$, ако:
1.$0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{W}$
2.$(\forall \mathbf{w}_1 \in \mathbb{W})(\forall \mathbf{w}_2 \in \mathbb{W})(\exists \mathbf{w} \in \mathbb{W})[\mathbf{w}_1 \oplus \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}]$ (затвореност относно $\oplus$)
3.$(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall \mathbf{w} \in \mathbb{W})(\exists \mathbf{u} \in \mathbb{W})[\lambda \odot \mathbf{w} = \mathbf{u}]$ (затвореност относно $\odot$)

Зад 1.Да се докаже, че $< \mathbb{Z}, + >$ образува група.

Зад 2.Да се докаже, че $< \mathbb{R}, \oplus, \odot >$ е пръстен, където $\oplus$ и $\odot$ са дефинирани по следния начин:
$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})[a \oplus b = a + b - 1]$
$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})[a \odot b = a + b - ab]$

Зад 3. Да се докаже, че $< \mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, . >$ е поле, където
$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q}\}$.

Зад 4. Да се докаже, че $< \mathbb{R}^3, \oplus, \odot >$ образува ЛП над $\mathbb{R}$. Да се докаже, че $< \mathbb{W} = \{(a_1, 0, a_3) | a_1, a_3 \in \mathbb{R}\}, \oplus, \odot >$ е подпространство на $< \mathbb{R}^3, \oplus, \odot >$. Където операциите са дефинирани по следния начин:
$(\forall \mathbf{v}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \in \mathbb{R}^3)(\forall \mathbf{v}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}) \in \mathbb{R}^3)$
$[\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = ((a_{11} + a_{21}), (a_{12} + a_{22}), (a_{13} + a_{23}))]$
$(\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3)(\forall \lambda \in \mathbb{F})[\lambda \odot \mathbf{v} = (\lambda.a_1, \lambda.a_2, \lambda.a_3)]$