Глава 3

Дискретни случайни величини

В тези записки няма да привеждаме формалната, аксиоматична дефиниция на понятието случайна величина (сл.в.). По-скоро ще използваме интуитивна представа за случайна величина. За нас това е обект, който може да взима за стойности случайни реални числа с някаква вероятност. За означаване на сл.в. ще използваме главните букви - X, Y и т.н.

Ще разглеждаме два типа случайни величини. Тези, който могат да взимат само краен, или най-много изброим брой стойности, наричаме дискретни сл.в. Такива например са: точките паднали се върху зар, броя опити необходим за да изтеглим асо от тесте карти и т.н.

Тези случайни величини, които взимат стойности в някое неизброимо множество, наричаме непрекъснати сл.в. Такава например е външната температура в момента.

$\square$

3.1 Определение, свойства

Определение 3.1 *Разпределение на случайната величина X, наричаме следната таблица:*

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

(3.1.1)

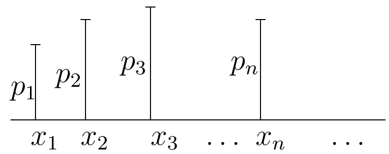
където
1. x_i са стойностите на сл.в., които могат да бъдат краен или изброим брой;
2. $0 \leq p_i = \mathrm{P}(X = x_i) \leq 1$ са вероятностите с които сл.в. взема съответните стойности.

За да бъде добре дефинирана случайната величина X трябва да е изпълнено следното условие:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

където сумата може да бъде крайна или безкрайна.

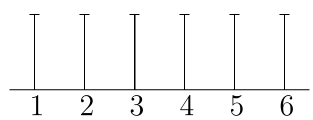
Графично ще представяме разпределението на случайните величини със стълбчета в точките, които са стойности на сл. в., като височината на i-тото стълбче съответства на вероятността p_i.



Пример 3.1 *Нека сл.в. X означава точките паднали се при хвърлянето на зар. Тогава, разпределението на X има вида:*

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Графично разпределението изглежда по следния начин:



Нека X е дискретна случайна величина, а $g(x)$ е произволна реална функция, тогава $Y = g(X)$ също е случайна величина. Разпределението на Y има вида:

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	...	$g(x_n)$	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Формулата $Y = g(X)$ всъщност задава начин да се преизчислят стойностите на случайната величина. Това действие обикновено се нарича „смяна на променливите“. Разбира се, ако за някои от стойностите $g(x_i) = g(x_j)$, т.е. ако функцията $g(X)$ не е еднозначно обратима, то тези стойности се обединяват, а съответните вероятности се събират.

Пример 3.2 *Нека X е случайната величина от Пример 1., а $Y = |X - 3|$. За разпределението на Y получаваме:*

X	0	1	2	3
P	1/6	2/6	2/6	1/6

Нека X и Y са произволни случайни величини. Тогава $Z = X + Y$ също е случайна величина. Стойностите на Z са всички възможни суми $x_i + y_j$. Тогава най-общо разпределението на Z има вида:

Z	$x_1 + y_1$	$x_2 + y_1$	...	$x_n + y_n$	...
P	$\mathrm{P}(X = x_1, Y = y_1)$	$\mathrm{P}(X = x_2, Y = y_1)$	...	$\mathrm{P}(X = x_n, Y = y_n)$	...

Както по-горе, ако съществуват повтарящи се стойности в първия ред на таблицата те се обединяват, а съответните вероятности се събират. Тогава, съгласно формулата за пълна вероятност $\mathrm{P}(Z = z_k) = \sum_{i,j} \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j)$, където сумата е по всички i и j, такива че $z_k = x_i + y_j$.

По аналогичен начин се дефинират и случайните величини $X - Y$, $X.Y$, $X/Y, Y \neq 0$ и т.н.

Определение 3.2 *Казваме, че дискретните случайните величини X и Y са независими ($X \perp\!\!\!\perp Y$), ако са независими всички възможни двойки събития породени от тях, т.е.*

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Leftrightarrow \quad \forall i, j: \ \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathrm{P}(X = x_i)\,\mathrm{P}(Y = y_j).$$

Понятието „независимост“ може да се разбира в обичайния смисъл на тази дума. Независимостта на две случайни величини означава, че едната сл.в. не се влияе и не носи информация за другата сл.в. Например, ако се хвърлят два зара точките паднали се върху единия и върху другия зар са независими сл.в.

Пример 3.3 *Хвърлят се два зара. Нека Z е сумата от падналите се точки. Ще намерим разпределението на случайната величина Z. Ако означим с X и Y съответно точките паднали се върху първия и втория зар, то $Z = X + Y$. Освен това е ясно, че X и Y имат разпределението от Пример 1. Естествено двата зара не се влияят един от друг, тогава случайните величини са независими и следователно е изпълнено $\mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathrm{P}(X = x_i)\mathrm{P}(Y = y_j)$. Тогава, за разпределението на Z получаваме:*

Z	2	3	4	...	11	12
P	1/36	2/36	3/36	...	2/36	1/36

3.2 Математическо очакване

Определение 3.3 *Математическо очакване на случайната величина X наричаме числото $\mathrm{E}X$ дефинирано по следния начин:*

$$\mathrm{E}X = \sum_i x_i\,\mathrm{P}(X = x_i) = \sum_i x_i\,p_i. \tag{3.2.2}$$

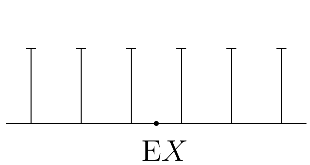
Ако сл.в. X има само краен брой стойности, то горната сума е крайна. Тогава математическото очакване $\mathrm{E}X$ задължително съществува и попада в интервала, в който се менят стойностите на случайната величина X.

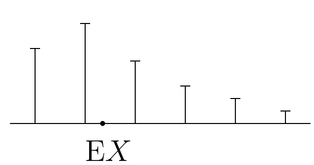
Ако стойностите на сл.в. X са изброим брой, то е възможно сумата да е разходяща. Тогава казваме, че не съществува математическо очакване.

По-общо, ако търсим очакването на функция от случайна величина $\mathrm{E}(g(X))$, съгласно формулата за смяна на променливите

$$\mathrm{E}(g(X)) = \sum_i g(x_i)\,\mathrm{P}(X = x_i) = \sum_i g(x_i)\,p_i. \tag{3.2.3}$$

Като синоним на „математическо очакване“ се използва и изразът „средна стойност“. Наистина, намирането на математическото очакване всъщност е пресмятане на средната стойност на случайната величина, като вероятностите p_i играят ролята на тегла. Физическия смисъл на математическото очакването е център на тежестта.





В частния случай, когато всички стойности се падат с една и съща вероятност, т.е. всички p_i са равни, математическото очакване е просто средното аритметично. В противен случай то се измества към по вероятните стойности.

Вероятностния смисъл на математическото очакване се дава от закона за големите числа, който ще бъде доказан по-късно. Съгласно този, ако измервате многократно стойностите на една случайна величина, средното аритметично на тези стойности клони към математическото очакване, т.е. средния резултат от много опити се дава от математическото очакване.

Пример 3.4 *Ще разгледаме игра на рулетка, в която играчът залага 10 лв. само на едно число. Известно е, че числата в рулетката са от 1 до 36, като се добавя и 0 (в американската рулетка освен това има и 00). Ако играчът заложи на едно число и улучи, получава печалба 35 пъти по-голяма от залога. Нека сл.в X е чистата печалба на играча от една игра, т.е. включваме и залогът, който той е направил. Разпределението на X е следното:*

X	-10	350
P	$36/37$	$1/37$

Съгласно (3.2.2) за математическото очакване на X получаваме:

$$\mathrm{E}X = -10\,\frac{36}{37} + 350\,\frac{1}{37} = -\frac{10}{37} \approx -0,27\text{лв.}$$

Математическото очакване е отрицателно, което означава, че играчът губи средно по 0,27 лв. на игра. Съответно казиното печели средно 0,27 лв. на игра. Разбира се X е случайна величина и при малък брой игри е възможно играчът да спечели, както и да загуби, въпрос на късмет. При голям брой игри обаче, печалбата ще клони към математическото очакване. Това важи за казиното, в което на ден има хиляди игри. Така собственикът може да пресметне печалбата си, независимо че тя зависи от случайни фактори. Например, при 10000 игри от горния тип печалбата за казиното ще е приблизително 2700 лв.

Игри, в които очакваната печалба е нула ($\mathrm{E}X = 0$) се наричат справедливи игри (такава би била играта на рулетка, ако в нея няма нула). В справедлива игра, ако играчът играе достатъчно дълго, капиталът му ще се запази на началното ниво, той нито ще спечели, нито ще загуби.

Ще докажем някои по-важни свойства на математическото очакване.

E1 Ако $c = const$, то $\mathrm{E}c = c$.

Доказателство: Константите могат да се разглеждат като случайни величини, които взимат една единствена стойност с вероятност единица $\mathrm{P}(X = c) = 1$, т.е. тяхното разпределение е от типа:

X	C
P	1

Твърдението следва непосредствено от (3.2.2). □

E2 $\mathrm{E}(cX) = c\,\mathrm{E}X$, където X е произволна сл.в., а $c = const$.

Доказателство:

$$\mathrm{E}(cX) = \sum_i cx_i \,\mathrm{P}(X = x_i) = c \sum_i x_i \,\mathrm{P}(X = x_i) = c\,\mathrm{E}X$$

□

E3. $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y$, където X и Y са произволни сл.в.
Доказателство:

$$\mathrm{E}(X + Y) = \sum_i \sum_j (x_j + y_i) \,\mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) =$$

$$= \sum_i \sum_j x_j \,\mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) + \sum_i \sum_j y_i \,\mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) = \tag{3.2.4}$$

$$= \sum_j x_j \sum_i \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) + \sum_i y_i \sum_j \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i)$$

Събитията $Y = y_i, i = 1\ldots$ образуват пълна група от събития. Тогава съгласно формула за пълна вероятност

$$\sum_i \mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) = \mathrm{P}(X = x_j).$$

Аналогично се преработва и последната сума в (3.2.4). Така получаваме:

$$\mathrm{E}(X + Y) = \sum_j x_j \,\mathrm{P}(X = x_j) + \sum_i y_i \,\mathrm{P}(Y = y_i) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y.$$

□

Съгласно свойства **E2** и **E3** математическото очакване е линейно.

E4. Нека $X \perp\!\!\!\perp Y$ са независими сл.в., тогава $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$.

Доказателство: От независимостта на случайните величини следва, че за всеки i, j е изпълнено $\mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) = \mathrm{P}(X = x_j)\,\mathrm{P}(Y = y_i)$. Тогава

$$\mathrm{E}(X\,Y) = \sum_i \sum_j x_j\, y_i \,\mathrm{P}(X = x_j, Y = y_i) =$$

$$= \sum_i \sum_j x_j\, y_i \,\mathrm{P}(X = x_j)\,\mathrm{P}(Y = y_i) = \sum_i y_i \,\mathrm{P}(Y = y_i) \left(\sum_j x_j \,\mathrm{P}(X = x_j) \right) =$$

$$= \sum_i y_i \,\mathrm{P}(Y = y_i)\mathrm{E}X = \mathrm{E}X\mathrm{E}Y.$$

□

3.3 Дисперсия

Определение 3.4 *Дисперсия на случайната величина X наричаме числото:*

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\left(X - \mathrm{E}X\right)^2$$

Дисперсията е мярка за разсейването на стойностите на една случайна величина около нейното математическо очакване.

Числото $\sqrt{\mathrm{D}X}$ наричаме стандартно отклонение.

В началото ще изведем по-лесен начин за пресмятане на дисперсията.

Твърдение 3.1

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2.$$

Доказателство: Ще използваме формулата за съкратено умножение и ще приложим свойства **E2** и **E3** на математическото очакване. Тогава

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}\left(X - \mathrm{E}X\right)^2 = \mathrm{E}\left(X^2 - 2X\,\mathrm{E}X + (\mathrm{E}X)^2\right) =$$
$$= \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}(2X\,\mathrm{E}X) + \mathrm{E}((\mathrm{E}X)^2),$$

където сме използвали, че $\mathrm{E}X$ е число, т.е. константа, тогава $(\mathrm{E}X)^2$ също е константа и от свойство **E1** следва $\mathrm{E}((\mathrm{E}X)^2) = (\mathrm{E}X)^2$. Аналогично от свойство **E2** следва $\mathrm{E}(2X\,\mathrm{E}X) = 2(\mathrm{E}X)(\mathrm{E}X)$. По този начин получаваме:

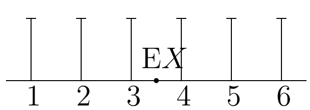
$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - 2(\mathrm{E}X)(\mathrm{E}X) + (\mathrm{E}X)^2 = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2.$$

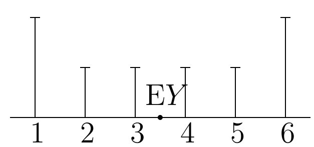
$\square$

Пример 3.5 *Хвърляме два зара. Първият е правилен, а за вторият вероятностите да се паднат едно и шест са по 1/4, а вероятностите да се падне някоя от останалите цифри са 1/8. Нека X и Y са точките паднали се съответно върху първия и втория зар. Ще пресметнем очакването и дисперсията на X и Y. Съгласно условието разпределениеята на X и Y са съответно:*

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Y	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$





$$\mathrm{E}X = \tfrac{7}{2} \qquad \mathrm{E}Y = \tfrac{7}{2}$$

$$\mathrm{E}X^2 = \tfrac{1^2}{6} + \tfrac{2^2}{6} + \ldots + \tfrac{6^2}{6} = \tfrac{91}{6} \qquad \mathrm{E}Y^2 = \tfrac{1^2}{4} + \tfrac{2^2}{8} + \ldots + \tfrac{6^2}{4} = 16$$

$$\mathrm{D}X = \tfrac{91}{6} - \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 = \tfrac{35}{12} \qquad \mathrm{D}Y = 16 - \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 = \tfrac{15}{4}$$

Математическото очакване в двата случая съвпада. Дисперсията във втория случай е по-голяма, тъй като има по-голяма вероятност случайната величина да е далеч от математическото си очакване, т.е. разсейването е по-голямо.

Ще докажем по-важните свойства на дисперсията.

D1. $\mathrm{D}X \geq 0$.

Доказателство: Тъй като случайната величина $(X - \mathrm{E}X)^2 \geq 0$ то и математическото и очакване е неотрицателно, т.е. $\mathrm{D}X = \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 \geq 0$. □

D2. $\mathrm{D}c = 0$, т.е. разсейването на константите е 0.

Доказателство:

$$\mathrm{D}c = \mathrm{E}\,(c - \mathrm{E}c)^2 = \mathrm{E}\,(c - c)^2 = \mathrm{E}0 = 0.$$

□

D3. $\mathrm{D}(cX) = c^2\mathrm{D}X$.

Доказателство:

$$\mathrm{D}(cX) = \mathrm{E}\,(cX - \mathrm{E}(cX))^2 = \mathrm{E}\,(cX - c\mathrm{E}X)^2 =$$

$$= \mathrm{E}\left[c^2\,(X - \mathrm{E}X)^2\right] = c^2\mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 = c^2\mathrm{D}X$$

□

D4. Нека $X \perp\!\!\!\perp Y$, тогава $\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y$.

Доказателство: Ще използваме своиство **E3** на математическото очакване.

$$\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{E}\,[X + Y - \mathrm{E}(X+Y)]^2 = \mathrm{E}\,[(X - \mathrm{E}X) + (Y - \mathrm{E}Y)]^2 =$$

$$= \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^2 + \mathrm{E}\,(Y - \mathrm{E}Y)^2 + 2\mathrm{E}\,[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)] =$$

$$= \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y + 2\mathrm{E}\,[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)]$$

За да завършим доказателството е достатъчно да покажем, че последното събираемо е нула. Случайните величиниX и Y са независими и съгласно **E4** $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$. Тогава:

$$\mathrm{E}\,[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)] = \mathrm{E}\,(XY - Y\mathrm{E}X - X\mathrm{E}Y + \mathrm{E}X\mathrm{E}Y) =$$

$$= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}Y\mathrm{E}X - \mathrm{E}X\mathrm{E}Y + \mathrm{E}(\mathrm{E}X\mathrm{E}Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}Y\mathrm{E}X = 0.$$

□

3.4 Пораждащи функции

Определение 3.5 *Нека X е случайна величина, чиито стойности са цели положителни числа. Пораждаща функция (п. ф.) на X наричаме:*

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k)\, s^k = \mathrm{E}(s^X), \quad |s| \leq 1. \tag{3.4.5}$$

Пораждаща функция на X е просто полином, в който пред k-тата степен на s стои вероятността $\mathrm{P}(X = k)$. Ако случайната величина взима само краен брой стойности, то сумата е крайна и пораждащата функция е дефинирана за всяко s. Ако стойностите на сл.в. X са изброим брой, то е сигурно, че $g_X(1) = 1$, тъй като сумата от вероятностите е равна на единица. От тук следва, че поне за $|s| \leq 1$ пораждащата функция със сигурност е сходяща, т.е. съществува. Това е достатъчно за нашите цели, така че понататък няма да разглеждаме въпроса за сходимостта на реда, чрез който се дефинират пораждащите функции.