Линейни пространства

Люба Конова

Октомври 2021

1 Теория:

1.1 Числово поле

Нека F е подмножество на $\mathbb{C}$ с поне два елемента. Ще казваме, че F е числово поле, ако за всеки две числа a и b от F е изпълнено, че: $a + b$, $a - b$, $a.b$, $\frac{a}{b} \in F$

1.2 Линейно пространство

Нека V е непразно множество, чиито елементи ще наричаме вектори. Определяме следните две операции във V:

1. Събиране на вектори - на всеки два вектора $a, b \in V$ съпоставяме вектор от V, който означаваме $a + b$.

2. Умножение на вектор с число - на всеки скалар $\lambda \in F$ и всеки вектор $a \in V$ съпоставяме вектор от V, който означаваме λa.

Определение: Множеството V с така въведените две операции се нарича линейно пространство над полето F, ако са в сила следните 8 аксиоми:

1. Комутативност на събирането: $a + b = b + a; a, b \in V$;

2. Асоциативност на събирането: $(a + b) + c = a + (b + c); a, b, c \in V$;

3. Съществува вектор $0 \in V$, за който $a + 0 = 0 + a = a$ за всеки вектор $a \in V$;

4. За всеки вектор $a \in V$ съществува **противоположен** вектор $a \in V$, за който $a + (-a) = -a + a = 0$;

5. $1.a = a, a \in V$;

6. Дистрибутивни закони: $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, a \in V, \lambda, \mu \in F$ и $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b, a, b \in V, \lambda \in F$;

7. $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a) = \mu(\lambda a), a \in V, \lambda, \mu \in F$.

Определение: Едно подмножество W на линейното пространство V се нарича **подпространство** на V, ако W е **затворено** относно операциите събиране на вектори и умножение на вектор с число, въведени във V.

2 Задачи

2.1 Основни задачи:

Задача 1: Докажете, че :
a) полиномите са линейно пространство;
b) полиномите от степен по-малка или равна на n са линейно пространство над дадено поле $\mathbb{F}$;
c) полиномите от степен точно n не са линейно пространство;
d) полиномите със сума от коефициентите 0 са ЛП;
e) полиномите със сума от коефициентите 2021 не са ЛП;

Задача 2: Нека $\mathbb{V}$ е множеството от всички безкрайни редици с елементи от полето $\mathbb{F}$. Да се докаже, че:
a) $\mathbb{V}$ е линейно пространство над $\mathbb{F}$ относно операциите събиране на редици и умножение на редица с число.
b) множеството от всички финитни редици е подпространство на $\mathbb{V}$
c) множеството от всички аритметични прогресии е подпространство на $\mathbb{V}$
d) множеството от всички геометрични прогресии с фиксирано частно не е ЛП;

Задача 3: Докажете, че:
a) множеството от матрици $M_n(F)$ е линейно пространство.
b) множеството от всички симетрични матрици над поле $\mathbb{F}$ е ЛП
c) множеството от всички антисиметрични матрици над поле $\mathbb{F}$ е ЛП
d) множеството от всички диагонални матрици над поле $\mathbb{F}$ е ЛП;
e) множеството от матриците със следа 0 над поле $\mathbb{F}$ е ЛП

2.2 Малки доказателства:

1. Докажете, че нулевият вектор е единствен;
2. Докажете, че противоположният вектор е единствен;