Примерни задачи за контролна работа № 2 - пръстени

Задача 1. Да се определи кои от следните числови множества образуват пръстен относно обичайните операции събиране и умножение на комплексни числа:

(i) $R_1 = \left\{ \frac{a}{p^k} \,\middle|\, k \in \mathbb{N},\, a \in \mathbb{Z}, p \text{ не дели } a \right\}$, където p е фиксирано просто число;

(ii) $R_2 = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\, b \neq 0,\, (a,b) = 1,\, p \text{ не дели } b \right\}$, където p е фиксирано просто число;

(iii) $R_3 = \{x + y\sqrt{2} \,|\, x, y \in \mathbb{Q}\}$;

(iv) $R_4 = \{x + y\sqrt[3]{2} \,|\, x, y \in \mathbb{Q}\}$;

(v) $R_5 = \{x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} \,|\, x, y, z \in \mathbb{Q}\}$.

Задача 2. Нека $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ е множеството на целите Гаусови числа. Да се докаже, че $\mathbb{Z}[i]$ е област на цялост, която не е поле и мултипликативната група

$$\mathbb{Z}[i]^* = \{\pm 1, \pm i\} = \langle i \rangle = \mathbb{C}_4$$

е циклична от ред 4.

Упътване: За всяко $z = a + bi \in \mathbb{Z}[i]^*$ изведете, че $|z| = 1$, така че $z = \pm 1$ или $z = \pm i$.

Задача 3. Нека $\varphi : R \to S$ е хомоморфизъм на пръстени с образ $Im\varphi = S$. Да се докаже, че

(i) ако пръстенът R е комутативен, то и пръстенът S е комутативен:

(ii) ако съществува цяло число n, така че $nr = 0_R$ за $\forall r \in R$, то $ns = 0_S$ за $\forall s \in S$.

Задача 4. Нека m и n са естествени числа и n не дели m. Да се докаже, че единственият хомоморфизъм на пръстени $f : m\mathbb{Z} \to n\mathbb{Z}$ е тъждествено нулевият.

Упътване: Първо докажете, че $f(mz) = f(m)z$, разглеждайки поотделно случаите на естествено z, цяло отрицателно z и $z = 0$. Ако допуснем, че $f(m) \neq 0$, то от равенството $f(m)^2 = f(m^2) = f(m)m$ следва $f(m) = m \in n\mathbb{Z}$, което противоречи на условието.

Задача 5. Нека F е крайно поле с n елемента и $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ са всички ненулеви елементи на F. Да се докаже, че $x_1 x_2 \dots x_{n-1} + 1 = 0$.

Задача 6. Да се докаже, че всяко крайно поле F с характеристика p има p^n елемента за някое естествено n.

Упътване: Проверете, че F е линейно пространство над простото си подполе $P \simeq \mathbb{Z}_p$ и ако $\dim_P F = n$, то съществува P-линеен изоморфизъм на F с пространството P^n на наредените n-торки елементи от P.

Задача 7. Избройте елементите на мултипликативните групи $\mathbb{Z}_7^*$ и $\mathbb{Z}_9^*$ на пръстените $\mathbb{Z}_7$ и $\mathbb{Z}_9$ от остатъци при деление със 7 и 9. Определете обратния на всеки елемент на $\mathbb{Z}_7^*$ и $\mathbb{Z}_9^*$. Докажете, че $\mathbb{Z}_7^*$ и $\mathbb{Z}_9^*$ са циклични групи и определете всички техни пораждащи.

Задача 8. Дайте пример за комутативен пръстен с единица R, идеал $I \neq R$ и елемент $\alpha \in R$, който не е в мултипликативната група R^* на R, но чийто клас $\alpha + I \in (R/I)^*$ по модул I е в мултипликативната група $(R/I)^*$ на фактор-пръстена R/I.

Упътване: Използвайте взаимно прости естествени α и β, по-големи от 1.

Задача 9. Нека A е пръстен, K е идеал в A,

$$R = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & a \end{array} \right) \middle| a, b \in A \right\},$$

$$I = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & a \end{array} \right) \middle| a \in K,\, b \in A \right\}.$$

Да се докаже, че R е пръстен, I е идеал в R и фактор-пръстенът R/I е изоморфен на фактор-пръстена A/K.

Задача 10. Нека R е комутативен пръстен с единица, X е подмножество на R, а

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i r_i \middle| x_i \in X,\, r_i \in R,\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Да се докаже, че:

(i) $\langle X \rangle$ е идеал в R;

(ii) ако $I_1, \ldots, I_k$ са идеали в R, то $\langle I_1 \cup \ldots \cup I_k \rangle = I_1 + \ldots + I_k$.

Задача 11. За идеалите $m\mathbb{Z} = \langle m \rangle$, $n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$, породени от ненулеви цели числа m, n, да се докаже, че:

(i) $\langle m \rangle + \langle n \rangle = \langle (m, n) \rangle$;

(ii) $\langle m \rangle \cap \langle n \rangle = \langle [m, n] \rangle$;

(iii) $\langle m \rangle \langle n \rangle = \langle mn \rangle$, където (m, n) е най-големият общ делител на m и n, а $[m, n]$ е тяхното най-малко общо кратно.

Задача 12. В комутативен пръстен с единица R, идеалите I и J се наричат взаимно прости, ако $I + J = R$. Да се докаже, че ако $I \triangleleft R$ и $J \triangleleft R$ са взаимно прости, то $IJ = I \cap J$. Обърнете внимание, че идеалите $\langle m \rangle = m\mathbb{Z}$ и $\langle n \rangle = n\mathbb{Z}$ в пръстена на целите числа $\mathbb{Z}$ са взаимно прости тогава и само тогава, когато целите числа m и n са взаимно прости.

Задача 13. Нека R е комутативен пръстен с единица.

(i) Собственият идеал $M \subsetneqq R$ е максимален, ако единственият идеал в R, съдържащ строго M е целият пръстен R. Да се докаже, че M е максимален идеал в R тогава и само тогава, когато фактор-пръстенът R/M е поле.

(ii) Идеалът $P \triangleleft R$ се нарича прост, ако от $ab \in P$ за някои $a, b \in R$ следва $a \in P$ или $b \in P$. Да се докаже, че P е прост идеал в R тогава и само тогава, когато фактор-пръстенът R/P е област.

В частност, всеки максимален идеал е прост.

Задача 14. Да се докаже, че:

(i) простите идеали в пръстена $\mathbb{Z}$ на целите числа са нулевият идеал $\{0\}$ и идеалите, $p\mathbb{Z} = \langle p \rangle$, породени от прости числа p.

(ii) максималните идеали в $\mathbb{Z}$ са ненулевите прости идеали.