Решения на Някои Задачи от Упражненията по Линейна Алгебра

Марин Ц. Геновски
ФМИ

26 октомври 2017 г.

Задача 1. Да се докаже неравенството на Бернули,

$$(1+x)^n \geqq 1+nx, \tag{1}$$

където $x \in \mathbb{R}, x \geqq -1$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Ще използваме, разбира се, принципа на математическата индукция.

При $n = 1$ неравенството очевидно е изпълнено.

Нека сега да допуснем, че неравенството е изпълнено при някое $k \geqq 1$, значи $(1+x)^k \geqq 1+kx$. Тогава

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k (1+x) \geqq (1+kx)(1+x) \\ &= 1 + (k+1)x + kx^2 \geqq 1 + (k+1)x,\end{aligned}$$

понеже $kx^2 \geqq 0$ за всяко естествено число k и за всяко $x \geqq -1$. Оттук $(1+x)^{k+1} \geqq 1 + (k+1)x$ и, съгласно принципа на математическата индукция, (1) е удовлетворено за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Задача 2. Да се докаже, че естественото число $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ се дели без остатък на 133 за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Отново прилагаме принципа на математическата индукция.

Непосредствено се проверява, че твърдението е изпълнено при $n = 1$.

Да допуснем сега, че числото $11^{k+1} + 12^{2k-1}$ се дели без остатък на 133 за някое естествено число $k \geqq 1$. Това е същото все едно да допуснем, че е валидно представянето

$$11^{k+1} + 12^{2k-1} = 133a$$

за някое $a \in \mathbb{Z}$. Тогава

$$\begin{aligned}11^{(k+1)+1} + 12^{2(k+1)-1} &= 11^{k+2} + 12^{2k+1} = 11 \cdot 11^{k+1} + 144 \cdot 12^{2k-1} \\ &= 11\left(11^{k+1} + 12^{2k-1}\right) + 133 \cdot 12^{2k-1} = 11 \cdot 133a + 133 \cdot 12^{2k-1} \\ &= 133\left(11a + 12^{2k-1}\right),\end{aligned}$$

което число очевидно се дели на 133 без остатък.

Задача 3. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са строго положителни реални числа, чието произведение е точно тъждествено равно на единица, значи $\prod\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu = 1$. Да се докаже, че сумата на тези числа е не по-малка от n, значи $\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \geqq n$

Решение. Първо, ако $n = 1$, то тогава от $\prod\limits_{\nu=1}^{1} a_\nu = 1$ очевидно имаме $a_1 = 1$ и неравенството $\sum\limits_{\nu=1}^{1} a_\nu \geqq n = 1$ е изпълнено.

Да предположим, че твърдението е истинно по отношение всеки набор от k на брой числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ такива, че тяхното произведение е тъждествено равно на единица, и нека сега $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ са такива $k+1$ на брой положителни реални числа, чието произведение също е равно на едно. Ще разгледаме два случая.

Нека първо $a_1 = \ldots = a_{k+1} = 1$. Тогава сумата на тези числа е равна на $k+1$ и значи в този случай твърдението е изпълнено и при $n = k+1$.

Ако пък поне едно от числата е по-малко (по-голямо) от 1, то тогава, за да се запази произведението им тъждествено равно на едно, е необходимо друго от числата да бъде по-голямо (по-малко) от единица. Без ограничение в общността на разсъжденията можем да смятаме, че $a_k < 1, a_{k+1} > 1$.

Да спрем вниманието си върху следните k на брой положителни реални числа,

$$a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k \cdot a_{k+1}.$$

От индукционното предположение следва, че, понеже тяхното произведение е 1, сумата на тези числа изпълнява съотношението

$$\left(\sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu\right) + a_k \cdot a_{k+1} \geqq k,$$

или все едно

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu \geqq k - a_k \cdot a_{k+1}.$$

Прибавяйки към двете страни на горното вярно числово равенство събираемите $a_k + a_{k+1}$, получаваме

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu + a_k + a_{k+1} = \sum_{\nu=1}^{k+1} a_\nu &\geqq k - a_k \cdot a_{k+1} + a_k + a_{k+1} \\ &= (k+1) - a_k \cdot a_{k+1} + a_k + a_{k+1} - 1 = (k+1) + (a_{k+1} - 1)(1 - a_k).\end{aligned}$$

Тъй като избрахме $a_k < 1, a_{k+1} > 1$, то последното събираемо в дясната страна на горното неравенство удовлетворява оценката $(a_{k+1} - 1)(1 - a_k) > 0$, откъдето $\sum\limits_{\nu=1}^{k+1} a_\nu \geqq k+1$.

И така, съгласно принципа на математическата индукция, неравенството от условието на задачата е вярно за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Задача 4. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са неотрицателни реални числа. Да се докажат следната двойка неравенства.

$$\frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \tag{2}$$

Забележка. Горните три стойности са известни съответно като *средно хармонично*, *средно геометрично* и *средно аритметично*. Второто неравенство често се нарича неравенство на Коши.

Решение. Ще докажем второто неравенство, а пък първото неравенство, което се извежда по съвършено аналогичен начин се предоставя като упражнение на читателя.

Ще се възползваме от предната задача. Да разгледаме положителните реални числа

$$a_1 = \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}, a_2 = \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}, \ldots, a_n = \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}.$$

Тъй като тяхното произведение очевидно е тъждествено равно на единица, то, съгласно предната задача имаме

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq n,$$

или все едно

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \geqq n,$$

което, както не е трудно да се види, е еквивалентно на неравенството между средно аритметично и средно геометрично от условието на задачата.