Функции на две променливи

Основни дефиниции и теореми

1. Разстояние

Разстояние между точките $P_1=(x_1,y_1)$ и $P_2=(x_2,y_2)$.

$\rho(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

2. Граница на редица от точки в метрично пространство

Казваме , че редицата от точки $P_n=(x_{n;}y_n)$ клони към $P_0(x_0;y_0)$, ако

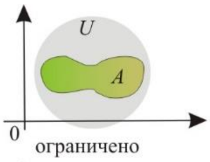
$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\to 0$.

Теорема: $P_n(x_n;y_n)\underset{n\to\infty}{\to}P(x_0;y_0)$ тогава и само тогава, когато $\boldsymbol{x_n\to x_0}$ **и** $\boldsymbol{y_n\to y_0}$.

3. Множества

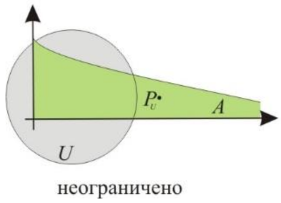
Нека $P_0=(x_0;y_0)$ е дадена точка от равнината и R е дадено число.

Множеството от всички точки $P(x;y)\in\mathbb{R}^2$, за които разстоянието $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<R$ се нарича **отворен кръг** с център P_0.



Дефиниция. Казваме, че множеството $A\subset\mathbb{R}^2$ **е ограничено**, ако **съществува** отворен кръг *U*, съдържащ всички точки на *A*.

Отрицание: Едно множество $A\subset\mathbb{R}^2$ **не е ограничено**, ако **за всеки** кръг U, съществува точка $P_U\in A$ и $P_U\notin U$.



* Казваме, че точката $P(x_0;y_0)\in\mathbb{R}^2$ е **вътрешна** за множеството $A\subset\mathbb{R}^2$, ако **съществува** кръг U с център P, който се съдържа в A

* Казваме, че точката $P(x_0;y_0)\in\mathbb{R}^2$ е **външна** за множеството $A\subset\mathbb{R}^2$, ако **съществува** кръг U с център P, който няма общи точки с A

* Казваме, че точката $P(x_0;y_0)\in\mathbb{R}^2$ е **контурна** за множеството $A\subset\mathbb{R}^2$, ако **във всеки** кръг *U* с център *P*, който има общи точки с *A* и точки, които не принадлежат на *A*

Множеството *V* се нарича **отворено,** ако всичките му точки са вътрешни.

Множеството F се нарича **затворено,** ако съдържа всичките си контурни точки.

Множеството K се нарича **компактно,** ако е затворено и ограничено.

Цялото множеството $\mathbb{R}^2$ е и отворено и затворено.

Теорема. Множеството *F* е **затворено,** тогава и само тогава, когато за всяка сходяща редица от точки $P_n\in F$, границата също принадлежи на *F*.

Теорема. Множеството *K* е **компактно,** тогава и само тогава, когато от всяка редица от точки $P_n\in K$ може да се избере сходяща подредица и за всяка сходяща редица от точки $P_n\in K$, границата ѝ също принадлежи на *K*.

4. Граница на функция

Нека функцията $f(x;y)$ е дефинирана в множеството *D*.

Казваме, че функцията $f(x;y)$ има граница A в точката $(x_0;y_0)$, ако за **всяка** сходяща редица от точки $(x_n;y_n)\in D$, клоняща към $(x_0;y_0)$, съответната редица от функционални стойности $f(x_n;y_n)$ клони към A.

Това записваме по следните начини:

$$(x;y)\to(x_0;y_0) \quad \Rightarrow f(x;y)\to A \quad ; \quad \lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)=A$$

$$P_n\to P_0 \quad \Rightarrow \quad f(P_n)\to A \quad ; \quad \lim_{P\to P_0} f(x;y)=A.$$

Забележка. Да обърнем внимание, че точката P_0 **може да** не принадлежи на D.

За да докажем, че функцията $f(x;y)$ **няма** граница в точката $(x_0;y_0)$, ако трябва

– или да намерим **една** редица $(x_n;y_n)\in D$, клоняща към $(x_0;y_0)$, такава че редицата $f(x_n;y_n)$ **няма** граница

– или да намерим **две** редици $(x_n';y_n')\in D$ и $(x_n'';y_n'')$, за които съответните функционални редици $f(x_n';y_n')$ и $f(x_n'';y_n'')$ имат различни граници.

4. Непрекъсната функция

Нека функцията $f(x;y)$ е дефинирана в множеството D.

Казваме, че функцията $f(x;y)$ е непрекъсната в точката $(x_0;y_0)\in D$, ако за **всяка** сходяща редица от точки $(x_n;y_n)\in D$, клоняща към $(x_0;y_0)$, съответната редица от функционални стойности $f(x_n;y_n)$ клони към $f(x_0;y_0)$.

Забележка. Да обърнем внимание, че точката P_0 **трябва** да принадлежи на D.

За да докажем, че функцията $f(x;y)$ не е непрекъсната в точката $(x_0;y_0)$, трябва

– или да покажем, че $f(x;y)$ н**яма** граница в точката $(x_0;y_0)$

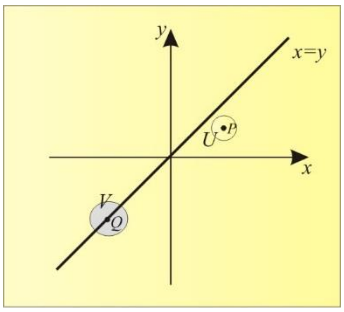
– или да покажем, че има граница в точката $(x_0;y_0)$, **различна от** $f(x_0;y_0)$.

Задача 1. Дадена е функцията $f(x;y)=\dfrac{x+y}{x-y}$.

а) Определете дефиниционното множество D на функцията. Определете контура на D. Определете дали множеството е отворено, затворено и компактно.

б) Докажете, че навсякъде в D функцията е непрекъсната.

в) Покажете, че в т. $(0;0)$ функцията няма граница.



Решение. а) Функцията е дефинирана в множеството D, от точки с различни координати x и y, т.е. D се състои от всички точки в равнината $\mathbb{R}^2$, не лежащи на правата p с уравнение $y=x$.

Множеството D е отворено – около **всяка** точка $P\in D$ може да се построи кръг, който няма общи точки с p.

Контурът на D е правата p – във всеки кръг около точка $Q\in p$ има както точки не принадлежащи на D (точките от правата), така и точки от D.

Тъй като контурът не принадлежи на D, множеството не е затворено и следователно не е компактно.

Очевидно D е неограничено.

б) Нека $P_0(x_{0;}y_0)\in D$, т.е. $x_0\neq y_0$ е . Да разгледаме произволна редица $P_n(x_n;y_n)\in D$, (т.е. $x_n\neq y_n$ за всяко n), $P_n(x_n;y_n)\to P(x_0;y_0)$. Съгласно теоремата $x_n\to x_0$ и $y_n\to y_0$ и от теоремите за граници на числови редици имаме

$$f(x_n;y_n)=\frac{x_n+y_n}{x_n-y_n}\quad\Rightarrow\quad\frac{x_0+y_0}{x_0-y_0}=f(x_{0;}y_0).$$

Това означава, че $f(x;y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ е непрекъсната навсякъде в D.

Забележка. По същия начин се доказва, че всяка рационална функция е непрекъсната навсякъде в дефиниционната си област.

в) Нека $x_n\to 0$ и $y_n\neq 0$. Тогава $P_n(x_n;0)\in D$ и $P_n(x_n;0)\to(0;0)$

и $f(x_n;0)=\dfrac{x_n+0}{x_n-0}=1\to 1$

Нека $y_n\to 0$ и $x_n\neq 0$. Тогава $Q_n(0;y_n)\in D$ и $Q_n(0;y_n)\to(0;0)$ и

$$f(0;y_n)=\frac{0+y_n}{0-y_n}=-1\to -1.$$

Построихме **две** редици $P_n(x_n;0)$ и $Q_n(0;y_n)$, клонящи към $(0;0)$, за които съответните функционални редици $f(x_n;0)$ и $f(0;y_n)$ имат различни граници, което означава, че функцията няма граница в точката $(0;0)$.

Задача 2. Дадена е функцията $f(x;y)=\dfrac{(x^2-y^2)\sqrt{4-x^2-y^2}}{x^2+2x-xy-2y}$.

а) Определете дефиниционното множество D на функцията. Определете контура на D. Определете дали множеството е отворено, затворено и компактно.

б) Определете точките, в които функцията е непрекъсната.

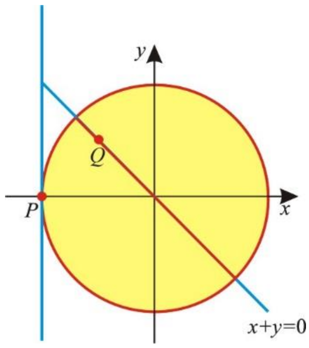
в) Покажете, че в т. $Q(-1;1)$ функцията има граница.

г) Покажете, че в т. $P(-2;0)$ функцията няма граница.

Решение. а) Функцията е дефинирана навсякъде, където

$$x^2+2x-xy-2y\neq 0 \text{ и } 4\geq x^2+y^2.$$

$$x^2+2x+xy+2y=(x+2)x+(x+2)y=0\Leftrightarrow x+2=0 \quad \text{или } x+y=0.$$



Следователно дефиниционното множество D се състои от всички точки на затворения кръг с радиус 2 и център началото ($x^2+y^2\leq 4$), чиито координати удовлетворяват неравенствата $y+x\neq 0$ и $x\neq -2$ (вж. чертежа).

Контурът на множеството се състои от точките на окръжността $x^2+y^2=4$ и отсечката от правата $y+x=0$, лежащи в кръга. Тъй като част от контура се съдържа в D (например дъгата от окръжността в първи квадрант), част не принадлежи (отсечката от правата $y+x=0$), то множеството не е отворено, не е затворено, не е компактно.

Множеството е ограничено.

б) Функцията е непрекъсната **навсякъде в дефиниционното множество D (**вж. предишната задача).

в) Нека редицата точки $Q_n(x_n;y_n)\in D$ клони към $Q(-1;1)$. Това означава, че $x_n^2+y_n^2\leq 4$, $x_n+y_n\neq 0$, $x_n\neq -2$ и $x_n\to -1$, $y_n\to 1$. Тогава

$$f(x_n;y_n)=\frac{(x_n^2-y_n^2)\sqrt{4-x_n^2-y_n^2}}{x_n^2+2x_n-x_ny_n-2y_n}=\frac{(x_n-y_n)\sqrt{4-x_n^2-y_n^2}}{x_n+2}\to\frac{-1-1}{-1+2}\sqrt{4-(-1)^2-1^2}=-2\sqrt{2}\,.$$

Функцията има граница $-2\sqrt{2}$ в точката $Q(-1;1)$.

г) Нека $x_n\to-2$, $-2<x_n<-1$.

Да разгледаме първо редицата $P_n'(x_n;0)\in D$ (точки върху оста Ox). Тогава $P_n'(x_n;0)\to(-2;0)$ и

$$f(P_n')=f(x_n;0)=\frac{(x_n^2-y_n^2)\sqrt{4-x_n^2-y_n^2}}{x_n^2+2x_n-x_ny_n-2y_n}=\frac{x_n\sqrt{4-x_n^2}}{x_n+2}=x_n\sqrt{\frac{2-x_n}{x_n+2}}\to\infty\,.$$

Сега да разгледаме редицата $P_n''(x_n;y_n)\in D$, където $y_n=\sqrt{4-x_n^2}$. Това е редица от точки по окръжността, клонящи към $P(-2;0)$.

$$f(x_n;y_n)=f(P_n'')=\frac{(x_n^2-y_n^2)\sqrt{4-x_n^2-y_n^2}}{x_n^2+2x_n-x_ny_n-2y_n}=0\to0\,.$$

Построихме **две** редици $P_n'(x_n;0)$ и $P_n''(x_n;y_n)$, клонящи към $(-2;0)$, за които съответните функционални редици $f(x_n;0)$ и $f(x_n;y_n)$ имат различни граници, което означава, че функцията няма граница в точката $(0;0)$.

Задача 3. Може ли да се избере числото *A*, така че функцията $f(x;y)$, да бъде непрекъсната в точката $(0;0)$, ако:

а) $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2\neq0\\ A & \text{при } x^2+y^2=0\end{cases}$;

б) $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{при } x^2+y^4\neq0\\ A & \text{при } x^2+y^4=0\end{cases}$;

в) $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2\neq0\\ A & \text{при } x^2+y^2=0\end{cases}$.

Решение. а) Нека $x_n\to0$, $x_n\neq0$. Разглеждаме две редици, клонящи към

$$P_n'(x_n;x_n)\to(0;0)\quad\Rightarrow\quad f(P_n')=\frac{x_nx_n}{x_n^2+x_n^2}=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}\ \text{и}$$

$$P_n''(x_n;2x_n)\to(0;0)\quad\Rightarrow\quad f(P_n'')=\frac{x_n.2x_n}{x_n^2+(2x_n)^2}=\frac{2}{5}\to\frac{1}{2}\,.$$

Построихме **две** редици $P_n'(x_n;x_n)$ и $P_n''(x_n;2x_n)$, клонящи към $(0;0)$, за които съответните функционални редици $f(x_n;x_n)$ и $f(x_n;2x_n)$ имат различни граници, което означава, че функцията няма граница в точката $(0;0)$ и следователно не може да се избере число *A*, така че функцията да бъде непрекъсната.

б)) Нека $x_n\to0$, $x_n\neq0$. Разглеждаме две редици, клонящи към

$P_n'(x_n;x_n)\to(0;0) \quad \Rightarrow \quad f(P_n')=\dfrac{x_n x_n^2}{x_n^2+x_n^4}=\dfrac{x_n}{1+x_n^2}\to 0$ и

$P_n''(x_n^2;x_n)\to(0;0) \quad \Rightarrow \quad f(P_n'')=\dfrac{x_n^2.x_n^2}{x_n^4+x_n^4}=\dfrac{1}{2}\to\dfrac{1}{2}$.

Построихме **две** редици $P_n'(x_n;x_n)$ и $P_n''(x_n^2;x_n)$, клонящи към $(0;0)$, за които съответните функционални редици $f(x_n;x_n)$ и $f(x_n^2;x_n)$ имат различни граници, което означава, че функцията няма граница в точката $(0;0)$ и следователно не може да се избере число *A*, така че функцията да бъде непрекъсната.

в) Ако, както в предишните примери се избират редици, всеки път ще се получава граница нула. Но това не означава, че функцията има граница.

Нека $P_n(x_n;y_n)$ е **произволна** редица от точки, клоняща към $(0;0)$, и $x_n^2+y_n^2\neq 0$.

Ще използваме неравенството

$(|x_n|-|y_n|)^2\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x_n|^2-2|x_n||y_n|+|y_n|^2\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x_n y_n|\leq\dfrac{x_n^2+y_n^2}{2}$. Оттук

$$0\leq|f(x_n;y_n)|=\left|\frac{x_n y_n^2}{x_n^2+y_n^2}\right|=\frac{|x_n y_n|.|y_n|}{x_n^2+y_n^2}\leq\frac{\frac{x_n^2+y_n^2}{2}.|y_n|}{x_n^2+y_n^2}\leq\frac{|y_n|}{2}.$$

И от $P_n(x_n;y_n)\to(0;0) \quad \Rightarrow \quad y_n\to 0$ следва, че $f(x_n;y_n)\to 0$ (теорема за двамата полицаи).

Следователно функцията $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2\neq 0\\ A & \text{при } x^2+y^2=0\end{cases}$ има граница 0 при $(x;y)\to 0$. За да бъде непрекъсната функцията числото *A* трябва да е равно на 0.

Задача 4. (за самостоятелна работа). За кои стойности на числото *A* е непрекъсната в точката $(0;0)$ функцията

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{4x^4+4x^4}{25x^2+25y^2} & \text{при } x^2+y^2\neq 0\\ A & \text{при } x^2+y^2=0\end{cases}.$$

Задача 5. (за самостоятелна работа).

а) Нека $\begin{cases}x_n=\rho_n\cos\varphi_n\\ y_n=\rho_n\sin\varphi_n\end{cases}$, $\rho_n>0$.

Покажете, че $P_n(x_n;y_n)\to 0$ тогава и само тогава, когато $\rho_n\to 0$.

б) За кои стойности на числото *A* е непрекъсната в точката $(0;0)$ функцията

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+y^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{при } x^2+y^2\neq 0\\ A & \text{при } x^2+y^2=0\end{cases}.$$

Задача 6. (за самостоятелна работа). Съществува ли число *A* така че функцията

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & \text{при } x^2+y^2\neq 0\\ A & \text{при } x^2+y^2=0\end{cases}$$

да е непрекъсната в точката $(0;0)$ функцията.