Степенни редове. Радиус и област на сходимост.

Припомняме някои факти:

• Раабе-Дюамел: Ред с положителни членове $\sum a_n$.
Образуваме $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ и търсим граница $l=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$.
- Ако $l>1$, $\sum a_n$ - сходящ
- Ако $l<1$, $\sum a_n$ - разходящ.

• Лайбниц: Ред $\sum(-1)^n a_n$ с $a_n>0$ е сходящ, ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е намаляваща и монотонно клони към 0.

• Ред $\sum(-1)^n a_n$, $a_n>0$ е сходящ, ако за $l=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ е изпълнено, че $l>0$. (Това е същата граница от Раабе-Дюамел).

• Ред $\sum a_n$ е абсолютно сходящ, ако $\sum|a_n|$ е сходящ. Всеки абсолютно сходящ ред е сходящ.

Зад. 1. За кои $x\in\mathbb{R}$ са сходящи редовете:

а) $\sum \frac{(x-1)^n}{n\sqrt[3]{2n+1}}$ б) $\sum \frac{2^n x^{3n}}{\sqrt{n}}$, в) $\sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

Реш. а) При $x=1$, всеки член на реда е 0 и редът е сходящ.
При $x>1$, редът е с положителни членове.
При $x<1$, редът е алтерниращ - всеки два поредни члена са различни по знак.

Нека $a_n=\left|\frac{(x-1)^n}{n\sqrt[3]{2n+1}}\right|$ е редицата от абсолютните стойности.

$a_{n+1}=\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)\sqrt[3]{2n+3}}\right|$. За $\sum a_n$ прилагаме Даламбер, ~~Раабе~~.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left|\frac{(x-1)}{(n+1)\sqrt[3]{2n+3}}\cdot n\sqrt[3]{2n+1}\right|=|x-1|\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\sqrt[3]{\frac{2n+1}{2n+3}}\xrightarrow[n\to\infty]{}|x-1|.$$

Така при $|x-1|<1$, по Даламбер $\sum a_n$ сходящ

$\Rightarrow \sum\frac{(x-1)^n}{n\sqrt[3]{2n+1}}$ е абсолютно сходящ, следователно и сходящ.

При $|x-1|>1$, общият член a_n не клони към 0, защото расте от някъде нататък. $\Rightarrow$ Общия член и на началния ред не клони към 0 $\Rightarrow$ разходящ.

Така само от Даламбер, получихме, че редът е сходящ за $x\in(0;2)$ и разходящ за $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.
Единствено точките $x=0$ и $x=2$ не са ясни.
Заместваме и направо продължаваме с Раабе. Тук обаче може да се възползваме от сравнителния критерий:

$x=2$: Редът е $\sum \frac{1}{n\sqrt[3]{2n+1}} \sim \sum \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} = \sum \frac{1}{n^{4/3}}$ – сходящ.

$x=0$: Редът е $\sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt[3]{2n+1}}$. За този ред е удобно да приложим директно Лайбниц: n и $\sqrt[3]{2n+1}$ са монотонно растящи.
$\Rightarrow$ Произведението им $n\sqrt[3]{2n+1}$ също монотонно расте.
$\Rightarrow \frac{1}{n\sqrt[3]{2n+1}}$ монотонно намалява и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{2n+1}} = 0$

$\Rightarrow$ По Лайбниц редът е сходящ.

[Друг начин:
$x=0$. Редът от абсолютните стойности е точно редът при $x=2$.
$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt[3]{2n+1}}$ е абс. сходящ $\Rightarrow$ Сходящ]

Окончателно редът е сходящ за $x\in[0;2]$ и разходящ иначе.

б) Нека отново $a_n = \left|\frac{2^n x^{3n}}{\sqrt{n}}\right|$

При $x>0$ – положителни членове
При $x<0$ – алтернираща
При $x=0$ – сходящ.

Даламбер: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left|\frac{2^{n+1}x^{3n+3}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^n x^{3n}}\right| = \left|\frac{2x^3\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right| = 2|x|^3\sqrt{\frac{n}{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2|x|^3$

Така за $2|x|^3<1$ т.е. за $|x|^3<\frac{1}{2}$ началният ред е абс. сходящ.
За $2|x|^3>1$ началният ред е разходящ.
Остават случаите $|x|^3=\frac{1}{2}$, т.е. $x=\pm\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

$x=\sqrt[3]{1/2}$, $x^3=\frac{1}{2}$, $x^{3n}=1/2^n$.

Тогава $\sum \frac{2^n x^{3n}}{\sqrt{n}} = \sum \frac{2^n \cdot 1/2^n}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ е разходящ ($\frac{1}{2}<1$).

$x=-\sqrt[3]{1/2}$, $x^{3n}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n=(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}$.

$\sum \frac{2^n x^{3n}}{\sqrt{n}} = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ е сходящ по Лайбниц: $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\frac{1}{\sqrt{n}}$ монотонно намалява.

Така, редът е сходящ за $x\in[-1/\sqrt[3]{2}\,;\,1/\sqrt[3]{2})$ и разходящ иначе.

в) За $x=0$ редът е сходящ. За $x\neq 0$, $x^{2n}>0$ и редът е алтерниращ. Редът от абсолютните стойности е с общ член

$$a_n=\left|\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right| = \left|\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right| = \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{x^{2n}} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0<1.$$

$\Rightarrow \sum a_n$ е сходящ по Даламбер $\Rightarrow$ Началният ред е сходящ (при това абсолютно) за всяко $x\in\mathbb{R}$.

Предните примери много си приличаха. За да ги обобщим ще въведем някои понятия:

__Деф.__ Степенен ред около точката a наричаме $\sum a_n (x-a)^n$.

Така а) е степенен ред около 1

б, в ~~е~~ са степенни редове с коефициенти 0 за липсващите степени.

Може да си мислим за $\sum \frac{2^n x^{3n}}{\sqrt{n}}$ като степенен ред на $x^3=y$

$\sum \frac{2^n x^{3n}}{\sqrt{n}} = \sum \frac{2^n y^n}{\sqrt{n}}$ с ненулеви коефициенти $a_n=\frac{2^n}{\sqrt{n}}$.

Също и за в: степенен ред на $z=x^2$.

В решението на предната задача видяхме, че критерия на Даламбер ни дава число R, т.ч. степенният ред е сходящ за $|x-a|<R$ и разходящ за $|x-a|>R$. (При б) се случи $R=\infty$).

Точките x, за които $|x-a|=R$, т.е. $x=a\pm R$ трябва да изследваме отделно. Това ни води към следващите дефиниции:

Деф. За ред $\sum a_n(x-a)^n$ числото R, т.че редът е сходящ за $|x-a|<R$ и разходящ за $|x-a|>R$ наричаме радиус на сходимост на степенен ред.

Разгледаните случаи не доказват, че наистина всеки ред има радиус на сходимост. Това се доказва на лекции.

Деф. Множеството $\{x\in\mathbb{R} \mid \sum a_n(x-a)^n$ е сходящ$\}$ наричаме област на сходимост на степенния ред.

Възможно "числото" R да е 0, положително реално число или ∞ (примери).
Областта на сходимост е интервал $\langle a-R, a+R\rangle$, където всеки от двата края може да бъде както отворен, така и затворен.

Начинът по който търсихме радиус на сходимост в зад. 1. (а именно с критерия на Даламбер) може да се обобщи до следващото твърдение:

Тв. $\sum a_n(x-a)^n$ е степенен ред. ~~Нека~~ Нека съществува $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.
Тогава радиусът на сходимост е точно "числото" ℓ. ($\ell\in[0;+\infty]$).
Обърнете внимание, че това е реципрочното на Даламбер.
~~Все~~ размисъл: Докажете твърдението.
Ние ще го ползваме наготово.

Зад. 2. Намерете областта на сходимост на редовете: (все от изпити)

а) $\sum 3^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$ б) $\sum\left(\frac{n!}{2.5\ldots(3n+2)}\right)^3x^{5n}$. в) $\sum\left(\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\right)^3x^n$

г) $\sum\frac{2^{2n}(n!)^2x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)!}$ д) $\sum\frac{\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n-1}}{3^n}(x+2)^{n+1}$.

Реш. а) $a_n=\frac{3^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$ е общия вид на коефициентите на реда.
$a_n>0$ за всяко n, т.че $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{3^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{(2n+2)!!}{3^{n+1}(2n+1)!!}=\frac{\cancel{3^n}}{\cancel{3^{n+1}}}\cdot\frac{\cancel{(2n-1)!!}}{\cancel{(2n+1)!!}}\cdot\frac{\cancel{(2n+2)!!}}{\cancel{(2n)!!}}=\frac{2n+2}{6n+3}\to\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ Граница съществува и радиусът на сходимост е $1/3$.
Редът е около нулата, ($x^n = (x-0)^n$). Тогава областта е $\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \rangle$.
Границата разглеждаме отделно.
$x = 1/3$. Редът е с положителни членове: $\sum \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \sum b_n$.
Прилагаме Раабе:

$$n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) = n \cdot \left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = n\left(\frac{2n+2-2n-1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1} \longrightarrow 1/2 < 1.$$

$\Rightarrow$ Разходящ.
За $x = -1/3$ редът $\sum (-1)^n b_n = \sum (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.
Тогава $n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) \longrightarrow 1/2 > 0$ и по следствието от Лайбниц, редът е сходящ.
$\Rightarrow$ Областта на сходимост е $[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

б) Коефициентите пред x^1, x^2, x^3, x^4 са 0. Тогава $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ няма смисъл за твърде много n. $\Rightarrow$ Няма граница.
Нека положим $x^5 = y$.
Тогава $\sum \left(\frac{n!}{2.5\dots(3n+2)}\right)^3 x^{5n} = \sum \left(\frac{n!}{2.5\dots(3n+2)}\right)^3 y^n$ с

$$a_n = \left(\frac{n!}{2.5\dots(3n+2)}\right)^3.$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n!}{2.5\dots(3n+2)}\right)^3 \cdot \left(\frac{2.5\dots(3n+2)(3n+5)}{(n+1)!}\right)^3 =$$

$$= \left(\frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{\cancel{2.5\dots(3n+2)}(3n+5)}{\cancel{2.5\dots(3n+2)}}\right)^3 = \frac{(3n+5)^3}{(n+1)^3} = \frac{27n^3+135n^2+225n+125}{n^3+3n^2+3n+1}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 27 \Rightarrow$ Радиусът (за реда на y) е 27.

$y = 27$: $b_n = 27^n \cdot \frac{(n!)^3}{(2.5\dots(3n+2))^3}$, $b_{n+1} = 27^{n+1} \cdot \frac{((n+1)!)^3}{[2.5\dots(3n+5)]^3}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{27^{n+1}}{27^n} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{27 \cdot (n+1)^3}{(3n+5)^3} = \frac{27n^3+81n^2+81n+27}{27n^3+135n^2+225n+125}.$$

$$n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{\cancel{27n^3}+135n^2+225n+125-\cancel{27n^3}-81n^2-81n-27}{27n^3+\dots}\right) =$$

$= \frac{54n^3 + \dots}{27n^3 + \dots} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 > 1 \Rightarrow$ Сходящ.

$x = -27$: Редът е алтернираща на този при $x = 27$ – сходящ.
Тогава при $x = -27$ е абсолютно сходящ, т.е. сходящ.
Окончателно областта на сходимост е $[-27; 27]$. Но това беше за $y = x^5$. Връщаме $-27 \le x^5 \le 27$ относно x.
Област на сходимост за x е $[-\sqrt[5]{27}; \sqrt[5]{27}]$.

в) $a_n = \left(\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\right)^3$; $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left[\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n+3)!!}{(n+2)!}\right]^3 = \left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^3 \xrightarrow[n\to\infty]{} 8.$

$\Rightarrow R_{cx} = 8$.

При $x = 8$: $\sum 8^n \left(\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\right)^3 = \sum b_n$ – положителни членове

Даламбер: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{8^{n+1} \cdot a_{n+1}}{8^n \cdot a_n} = 8 \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = 8\left(\frac{n+2}{2n+3}\right)^3 =$

$= 8 \cdot \frac{n^3 + 6n^2 + 12n + 8}{8n^3 + 36n^2 + 54n + 27} = \frac{8n^3 + 48n^2 + 96n + 64}{8n^3 + 36n^2 + 54n + 27} > 1.$

$\Rightarrow$ Общият член не клони към 0 $\Rightarrow$ разходящ.

$x = -8$: $\sum (-8)^n \left(\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\right)^3 = \sum (-1)^n \cdot b_n$.

b_n не клони към 0. Тогава и $(-1)^n b_n$ не клони към 0. $\Rightarrow$ разходящ.

Област на сходимост $x \in (-8; 8)$.

г) Множител x^2 не влияе на сходимост.
Дадения ред е сходящ едновременно с $\sum \frac{2^{2n} (n!)^2}{(n+1)(2n+1)!} x^{2n}$.
За $x = 0$ е сходящ, за $x \ne 0$, редът е с положителни членове.
Да приложим директно Даламбер за $u_n = \frac{2^{2n} (n!)^2 x^{2n}}{(n+1)(2n+1)!}$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{2n+2} ((n+1)!)^2 x^{2n+2}}{(n+2)(2n+3)!} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)!}{2^{2n} (n!)^2 x^{2n}} = \frac{2^{2n+2}}{2^{2n}} \cdot \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{x^{2n+2}}{x^{2n}} \cdot \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}$

$= 4(n+1)^2 \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{4(n+1)^3}{(n+2)(2n+2)(2n+3)} x^2 = \frac{2(n+1)^2 x^2}{(n+2)(2n+3)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x^2$

Така при $x^2<1$, т.е. $|x|<1$, редът е сходящ; при $x^2>1$, т.е. $|x|>1$ – разходящ $\Big\}\ R_{cx}=1$.

При $x=+1$ и $x=-1$ редът е едни и същ, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2(n+1)^2}{(n+2)(2n+3)}$

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{2n^2+7n+6}{2n^2+4n+2}-1\right)=n\cdot\frac{3n+4}{2n^2+4n+2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{3}{2}>1.$$

$\Rightarrow$ сходящ при $x=\pm1$. Област на сходимост $[-1;1]$.

g) Нека отново $u_n=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{3^n}(x+2)^{n+1}$. Даламбер за $\sum|u_n|$.

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\left|\frac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}}{3^{n+1}}\cdot(x+2)^{n+2}\cdot\frac{3^n}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}\cdot\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right|=$$

$$=\frac{|x+2|}{3}\cdot\frac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}\cdot\frac{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$ рационализиране числител и знаменател

$$=\frac{|x+2|}{3}\cdot\frac{\cancel{2}(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})}{\cancel{2}(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1})}=\frac{|x+2|}{3}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}{\sqrt{2+\frac{3}{n}}+\sqrt{2+\frac{1}{n}}}\right)\longrightarrow\frac{|x+2|}{3}.$$

$\frac{|x+2|}{3}<1 \Leftrightarrow |x+2|<3$. Радиусът на сходимост е 3. 1

Остава да разгледаме $|x+2|=3$, т.е. $x=1$ и $x=-5$.

$x=1$: Ред с положителни членове.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x+2}{3}\cdot\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}\underset{(x=1)}{=}\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}\longrightarrow1-0.$$

Раабе: $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{\sqrt{2n+3}+\cancel{\sqrt{2n+1}}-\cancel{\sqrt{2n+1}}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\right)$ $\underset{\text{числител}}{\overset{\text{рационализиране}}{=}}$

$$=n\cdot\frac{(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1})}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1})}=\frac{4n}{\sqrt{2n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{2n}}+\sqrt{1-\frac{1}{2n}}\right)\sqrt{2n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{2n}}+\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\right)}$$

$$=\frac{4\cancel{n}}{2\cancel{n}\underbrace{(\sqrt{1+\ldots}+\sqrt{1+\ldots})}_{1+1}\underbrace{(\sqrt{1+\ldots}+\sqrt{1+\ldots})}_{1+1}}\longrightarrow\frac{4}{2.2.2}=\frac{1}{2}<1$$

$\Rightarrow$ разходящ.

Scanned with CamScanner

$x=-5$. Получаване алтерниращ на реда при $x=1$.
От $1/2>0 \Rightarrow$ Сходящ! $\Rightarrow$ Област на сходимост $[-5;1)$.

За намиране на радиус на сходимост може да се ползва и критерия на Коши.

Зад. 3 Намерете радиуса на сходимост на:

а) $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ и б) $\sum \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$.

Реш. а) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

$\sqrt[n]{|u_n|} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot |x| \to e \cdot |x|$

Така при $e|x|<1$, редът е сходящ

при $e|x|>1$, общия член не клони към $0 \Rightarrow$ разходящ.

$\Rightarrow R_{cx} = 1/e$.

б) $u_n = \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$, $\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{(x+2)^n}{n}$

Ако $|x+2| \le 1$, $\frac{(x+2)^n}{n} \to 0$ (нестрого неравенство) $\Rightarrow$ сходящ.

Ако $|x+2|>1$, $\frac{(x+2)^n}{n} \to \infty \to$ разходящ

Тук освен, че намерихме $R_{cx}=1$, намерихме и областта: $[-3;-1]$.

Горните разсъждения (по-точно пример а)) може да се обобщи както обобщихме задача 1:

Радиусът на сходимост на $\sum a_n (x-a)^n$ е $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ стига границата да съществува.

Дори и границата да не съществува, радиусът на сходимост се изразява като ~~$R_{cx} = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1}}$~~ $R_{cx} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

$\limsup$ е най-голяма точка на сгъстяване.

Ако редица има граница $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то тва е единствената ѝ точка на сгъстяване, т.е. $l = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.