1. Безкрайни елементи в разширената евклидова равнина и разширеното евклидово пространство.

Аксиома на Евклид за успоредности:

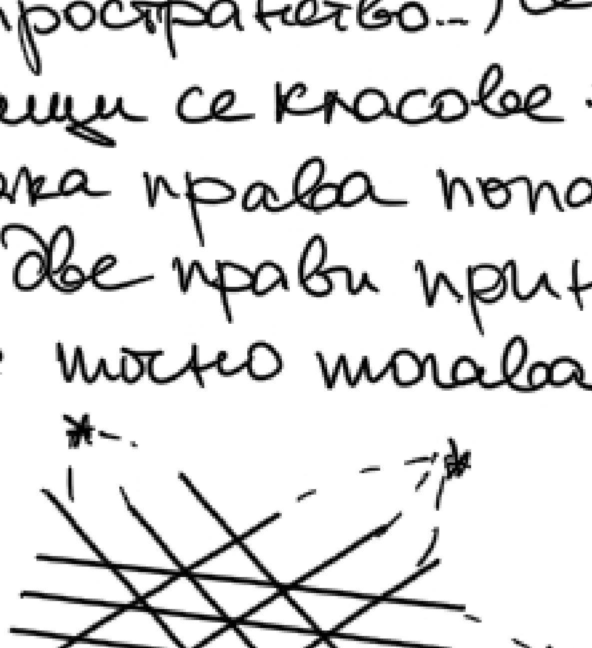
Ако M и g са неинцидентни точка и права, то в равнината, определена от тях – $\alpha = \alpha(M, g)$ съществува точно една права през M, успоредна на g.

Релацията „успоредност" е релация на еквивалентност – имаме

1. $a \parallel a$; 2.) ако $a \parallel b$, то $b \parallel a$ и

3. ако $a \parallel b$, $b \parallel c$, то $c \parallel a$.

Следователно множеството от правите (в равнина, пространство...) се разбива на непресичащи се класове на еквивалентност. Всяка права попада в точно един клас и две прави принадлежат на един клас точно тогава, когато са успоредни.



Всеки такъв клас наричаме безкрайна точка, инцидентна с всяка точка от този клас.

Следователно всяка права е инцидентна с точно една безкрайна точка и две прави са инцидентни с една и съща безкрайна точка, точно тогава, когато са успоредни.

Във равнината:

Съвкупността от всички безкрайни точки наричаме „безкрайната права" на равнината. Означаване с ω

Точките и правите в евклидовата равнина E_2 наричаме крайни.

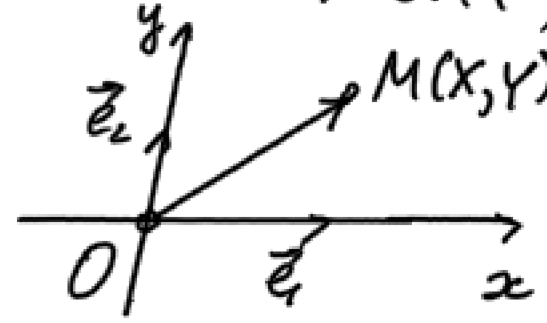
Множеството от всички крайни и безкрайни точки, всички крайни прави и безкрайната права наричаме разширена евклидова равнина E_2^*,

$E_2^* = E_2 \cup \{\omega\}$.

Хомогенни координати в $\mathbb{E}_2^*$

Нека в $\mathbb{E}_2$ е фиксирана афинна координатна система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Тогава крайната точка M има координати $M(X, Y)$, където X, Y:

$$\vec{OM} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2.$$



тези координати наричаме нехомогенни координати на M

Крайна права g се описва еднозначно от уравнението си

$$g: aX + bY + c = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

Точка $M_0(X_0, Y_0) \in g \iff aX_0 + bY_0 + c = 0$

Да припомним, че векторът $\vec{p}(-b, a)$ е колинеарен с g, както и че уравнението

$$(\rho a)X + (\rho b)Y + (\rho c) = 0, \quad \rho \neq 0$$

също е общо уравнение на g.

Ясно е, че наредените двойки реални числа не „стигат" за да представят координати на всички точки от $\mathbb{E}_2^*$. Но, наредените тройки, въведени по подходящ начин са достатъчно...

Нека спрямо $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$, $M(X, Y)$ е крайна точка. Тогава всяка наредена тройка реални числа (x, y, t), $t \neq 0$ такива, че

$$\frac{x}{t} = X, \quad \frac{y}{t} = Y$$ се нарича тройка

хомогенни координати на M спрямо K.

Следователно M има хомогенни координати и $(\lambda X, \lambda Y, \lambda)$ $\forall \lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Също така имаме, че две точки $M_1(x_1, y_1, t_1)$ и $M_2(x_2, y_2, t_2)$ съвпадат точно тогава, когато $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{pmatrix} = 1$,

т.е. координатите на M_1 и M_2 са пропорционални с един и същи коефициент, различен от нула.

Нека спрямо K крайната права g е с уравнение $g: aX + bY + c = 0 \Rightarrow \vec{p}(-b, a) \parallel g$ и U_g е безкрайната точка на g. Тогава всяка наредена тройка $(-\lambda b, \lambda a, 0)$, $\lambda \neq 0$ наричаме тройка хомогенни координати на U_g.

Ако спрямо K правата g има уравнение $g: aX + bY + c = 0$, то всяка наредена тройка реални числа $[\rho a, \rho b, \rho c]$, $\rho \neq 0$ наричаме тройка хомогенни координати на g.

На безкрайната права ω придаване хомогенни координати $\omega: [0, 0, \sigma]$, $\sigma \neq 0$. $\forall \sigma \in \mathbb{R}$.

(така $\omega: t = 0$, $\omega[0,0,1]$ ... $\omega[0,0,-\sqrt{3}]$ ....)

<u>Обобщение:</u> Спрямо $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ в $\overline{E_2} = E_2^* \cup \{\omega\}$ имаме:

1. Всяка точка M има хомогенни координати $(x, y, t) \neq (0,0,0)$ и $M(\lambda x, \lambda y, \lambda t)$, $\lambda \neq 0$
   1.1. M е крайна $\Leftrightarrow t \neq 0$
   ($\Rightarrow$ хомогенните координати на M са $M(\frac{x}{t}, \frac{y}{t})$).
   1.2. M е безкрайна $\Leftrightarrow t = 0$.

2. Всяка права g има хомогенни координати $[a, b, c] \neq [0,0,0]$, като при
   2.1 $a^2 + b^2 \neq 0$, g е крайна права, а при
   2.2. $a = b = 0 \Rightarrow c \neq 0$, $g \equiv \omega$, т.е g е безкрайната права на $\overline{E_2}$.

3. Точката $M(x, y, t)$ е инцидентна с правата $g[a, b, c]$ точно тогава, когато $ax + by + ct = 0$. $\left((a, b, c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0 \right)$

Координатно параметрични уравнения на права в E_2^*.

Ако $M_1(x_1, y_1, t_1) \neq M_2(x_2, y_2, t_2)$, то

$$g = M_1 M_2 \iff g : \begin{cases} x = \lambda x_1 + \mu x_2 \\ y = \lambda y_1 + \mu y_2 \\ t = \lambda t_1 + \mu t_2 \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus (0, 0)$$

(вижте лекциите от I-ви курс ...).

В пространството. (3-мерното ...)

Съвкупността от всички безкрайни точки наричаме безкрайната равнина - означаваме с Ω

Съвкупността от всички крайни и безкрайни точки, крайни равнини и безкрайната равнина наричаме разширено евклидово пространство $\mathbb{E}_3^*$.

Хомогенни координати в $\mathbb{E}_3^*$

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е афинна координатна система в $\mathbb{E}_3 = \mathbb{E}_3^* \setminus \{\Omega\}$. Тогава за произволна крайна точка M имаме $\overrightarrow{OM} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2 + Z\vec{e}_3$ и (X, Y, Z) наричаме ~~не~~ хомогенни координати на M.

Всяка наредена четворка (x, y, z, t), $t \neq 0$ такава, че $X = \frac{x}{t}$, $Y = \frac{y}{t}$, $Z = \frac{z}{t}$

наричаме хомогенни координати на M спрямо K.

От тази дефиниция следва, че M има и хомогенни координати $(X, Y, Z, 1)$, както и $(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z, \lambda)$ $\forall \lambda \neq 0$.

Също така имаме

Две точки $M_i(x_i, y_i, z_i, t_i)$, $i=1,2$ съвпадат $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \end{pmatrix} = 1$.

Нека спрямо K крайната равнина α е с общо уравнение в E_3

$$\alpha: AX + BY + CZ + D = 0 \quad (A^2+B^2+C^2 \neq 0)$$

Ясно е, че уравнението

$$(\rho A)X + (\rho B)Y + (\rho C)Z + (\rho D) = 0.$$

също описва α ($\rho \neq 0$).

Всяка наредена четворка реални числа $[\rho A, \rho B, \rho C, \rho D] \neq [0,0,0,0]$, $A^2+B^2+C^2 \neq 0$, $\rho \neq 0$ се нарича хомогенни координати на крайната равнина α спрямо K.

Хомогенно уравнение на α:

$$\alpha: Ax + By + Cz + D.t = 0.$$

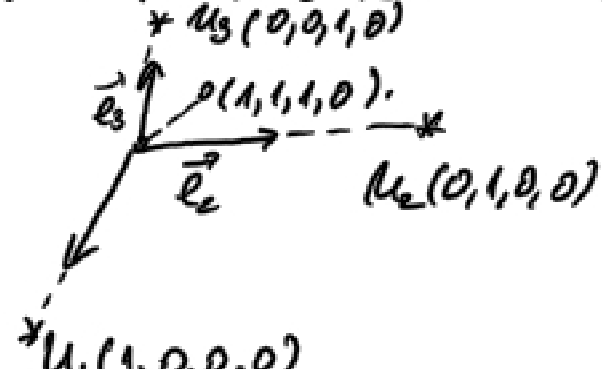
На безкрайната равнина Ω придаваме уравнение $\Omega: t=0$ и съответно хомогенни координати $\Omega: [0,0,0,\sigma]$ $\forall\, \sigma \neq 0$.

Нека g е произволна крайна права и в E_3 $\vec{p}(p_1,p_2,p_3) \parallel g$, $\vec{p} \neq \vec{o}$.

На безкрайната точка U_g на правата g придаваме хомогенни координати

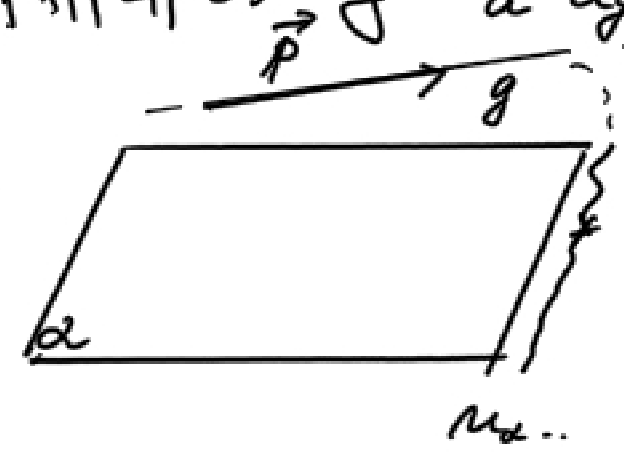
$U_g(p_1,p_2,p_3,0)$, както и $(\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda p_3, 0)$ $\forall \lambda \neq 0$.

Примерно, безкрайната точка на оста x е ...



Нека α е крайна равнина с хомогенни координати $[A,B,C,D]$ и $g \subset \alpha$ или $g \parallel \alpha$ (в E_3) $\Rightarrow$ векторът $\vec{p}(p_1,p_2,p_3) \parallel g$ е компланарен с α

на $\vec{p}$ в E_3 съответства в E_3^* безкрайната точка $U_g(p_1,p_2,p_3,0)$



Имаме

$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D \cdot 0 = 0 \Rightarrow U_g \subset \alpha.$$

Ако α е крайна равнина, то безкрайните ѝ точки описване с

$$m_\alpha : \begin{cases} \alpha : Ax + By + Cz + Dt = 0 \\ \Omega : \qquad\qquad\qquad\qquad t = 0 \end{cases}$$

(пресечница на две равнини).

Коя да е равнина β, $\beta \parallel \alpha$ - в E_3 е с уравнение $\beta : (\rho A)x + (\rho B)y + (\rho C)z + D^* t = 0$ с $\rho \neq 0$ и $D^* \neq \rho D$ (при $\beta \neq \alpha$)

Нека $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1) \neq M_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ $\iff \operatorname{rank}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \end{pmatrix} = 2$. Тогава правата, определена от M_1 и M_2 е с параметрични уравнения

$$g = M_1M_2 : \begin{cases} x = \lambda x_1 + \mu x_2 \\ y = \lambda y_1 + \mu y_2 \\ z = \lambda z_1 + \mu z_2 \\ t = \lambda t_1 + \mu t_2 \end{cases}, \ (\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

$- \; g = \lambda M_1 + \mu M_2$. параметрични уравнения на g.