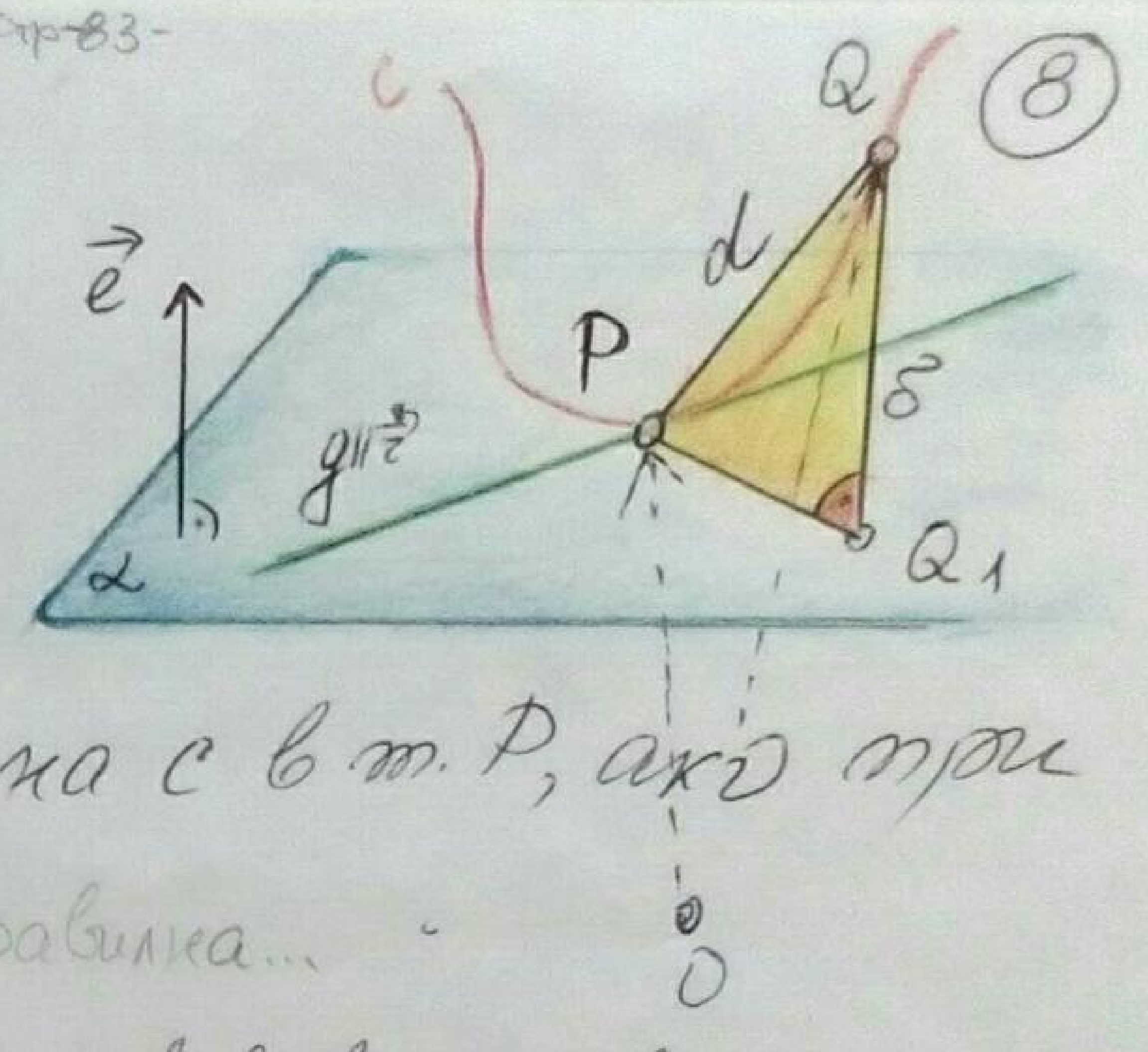
Оскулачна равнина. Тоиедър на Френе — (21 — 6ч. стр. 83 —

Нека c е 2-кратно гладка крива $c: \vec{r} = \vec{r}(q),\ q \in J$

$P, Q \in c$, $\vec{OP} = \vec{r}(q)$, $\vec{OQ} = \vec{r}(q+h)$ и $g = g_P$ е допирателната към c в P.

Нека α е равнина през g. Означаваме с d р-ето м/у P и Q и с δ разстоянието от Q до α.



Деф. Равнината α се нар. оскулачна равнина на c в т. P, ако при $Q \underset{\text{по } c}{\to} P$ отношението $\dfrac{\delta}{d^2} \to 0$. $\dot{r} \times \ddot{r}$ — правилка...

Теорема: Всяка двукратно гладка крива c има във всяка своя точка оскулачна равнина, компланарна с $\dot{\vec{r}}$ и $\ddot{\vec{r}}$, която е единствена при $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} \neq \vec{0}$.

Док. Нека $c: \vec{r} = \vec{r}(q),\ q \in J$, $P \in c$, $Q \in c$ ... $\Rightarrow$ $\vec{PQ} = \vec{r}(q+h) - \vec{r}(q)$ и

$|\vec{PQ}| = |\vec{r}(q+h) - \vec{r}(q)| = d\ (= d(q))$.

Нека $\vec{e} = \vec{e}(q)$ е единичен нормален в-р на α, т.е. $|\vec{e}| = 1$ и $\vec{e} \perp \alpha$ $\Rightarrow$

при текущ радиус-в-р $\vec{y} = \vec{y}(q)$ (т.е. $\vec{y}$ описва α) $\alpha: \vec{e}(\vec{y} - \vec{r}(q)) = 0$ $\Rightarrow$
т.е. нормално у-ние на α.

$\Rightarrow$ За разстоянието от Q до α имаме

$$\delta = |Q, \alpha| = |\vec{e}[\vec{r}(q+h) - \vec{r}(q)]| \Rightarrow \frac{\delta}{d^2} = \frac{|\vec{e}(\vec{r}(q+h) - \vec{r}(q))|}{|\vec{r}(q+h) - \vec{r}(q)|^2} =$$

до II-рия ред...

$$\frac{\delta}{d^2} = \frac{|\vec{e}(\cancel{\vec{r}(q)} + h\dot{\vec{r}} + \frac{h^2}{2}(\ddot{\vec{r}}(q) + \vec{\varepsilon}_1(q,h)) - \cancel{\vec{r}(q)})|}{|\cancel{\vec{r}(q)} + h(\dot{\vec{r}}(q) + \vec{\varepsilon}_2(q,h)) - \cancel{\vec{r}(q)}|^2} = \frac{\frac{h^2}{2}|\vec{e}\ddot{\vec{r}}(q) + \vec{e}\underbrace{\vec{\varepsilon}_1(q,h)}_{\xrightarrow{h\to 0} 0}|}{h^2|\dot{\vec{r}}(q) + \underbrace{\vec{\varepsilon}_2(q,h)}_{\to 0}|^2} \quad (9)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\delta}{d^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\vec{e}(q)\ddot{\vec{r}}(q)}{\dot{\vec{r}}^2(q)}$$

$\Rightarrow$ (1) α - оскулачна $\Rightarrow \frac{\delta}{d^2} \to 0 \Rightarrow \vec{e}(q)\ddot{\vec{r}} = 0$

$\Rightarrow \vec{e}(q) \perp \ddot{\vec{r}}(q) \Rightarrow \ddot{\vec{r}}$ компланарна с α.

(2) $\ddot{\vec{r}}$ компланар. с $\alpha \Rightarrow \alpha$ - оскулачна. Ако c е правилна, т.е. $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} \neq \vec{0} \Rightarrow$

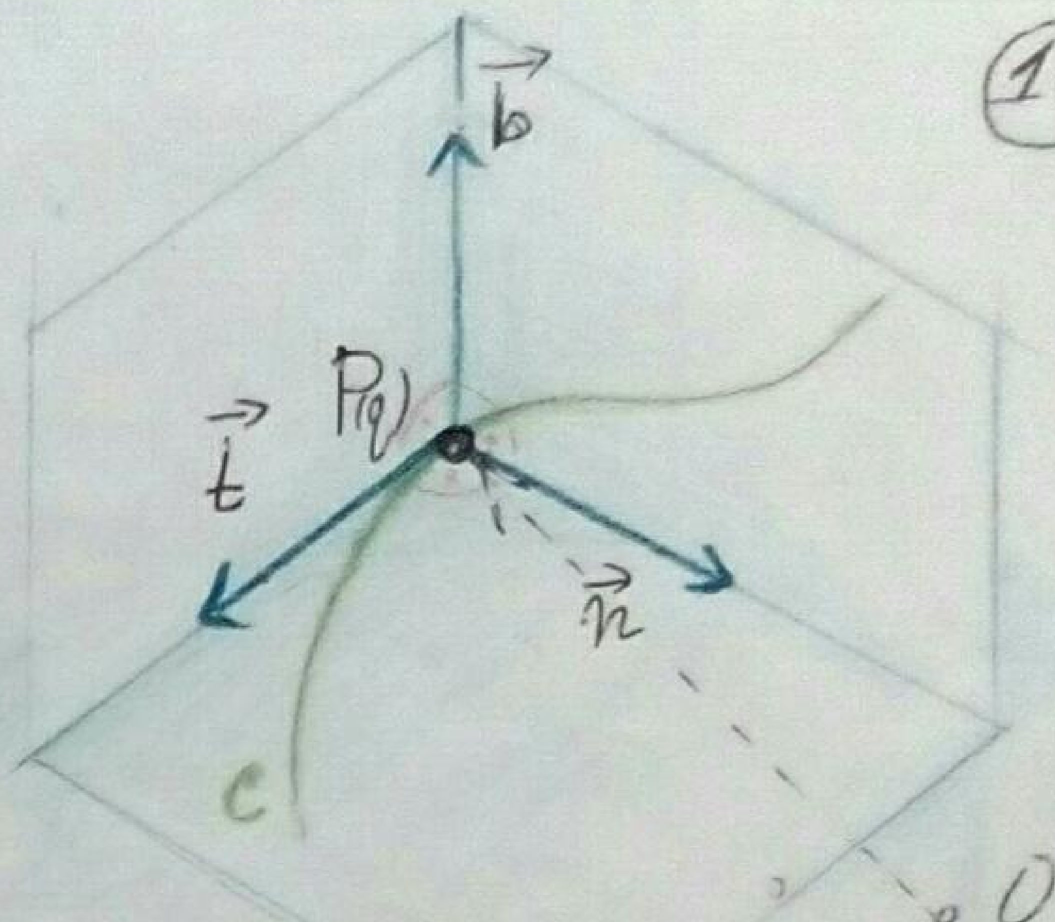
$\left(\lim_{h\to 0} \frac{\delta}{d} = 0\right) \Rightarrow \alpha$ единствена $\alpha(q): (\dot{\vec{r}}(q) \times \ddot{\vec{r}}(q))(\vec{y}_0 - \vec{r}(q)) = 0$

Сл. Всяка двукратно гладка правилна крива има единствена оскулачна равнина.

Триедър на Френе

$c: \vec{r} = \vec{r}(q)$ е двукратно гладка правилна крива.

1. Нормалата n на c, лежаща в оскулачната равнина – главна нормала – $n = \nu \cap \alpha$
2. Нормалата b, перпендикулярна на оскулачната равнина – бинормала



Стандартно с $\vec{t}, \vec{n}$ и $\vec{b}$ се означават единичните вектори / векторни функции, колинеарни съответно с тангентата, главната нормала и бинормалата на c, като $\vec{t}, \vec{n}$ и $\vec{b}$ образуват „дясна“ тройка, т.е. $\in S^+$ =>

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}, \quad \vec{b} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$$

Равнината в т. $\vec{r}(q)$, компланарна с $\vec{t}$ и $\vec{b}$ се нар. ректифицираща равнина (т.е. с нормален в-р $\vec{n}$).

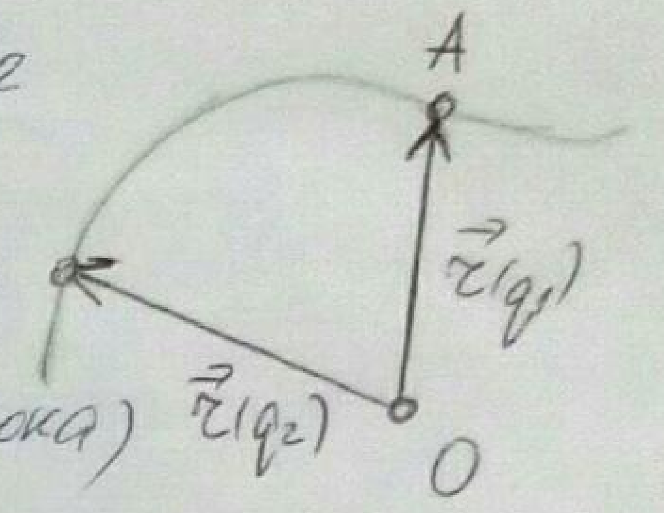
=> с $\forall$ т-ка от c е свързана подвижна ОКС, еднакво ориентирана с К-$\vec{\text{оespecíf}}$

$P(q)\,\vec{t}(q)\,\vec{n}(q)\,\vec{b}(q)$, наречена триедър на Френе.

или $\vec{r}(q)\,\vec{t}\,\vec{n}\,\vec{b}$ – векторни инварианти / скорост, ускорение, кривината, торзията.

Дължина на дъга от крива. Естествен параметър ... Кривина на прав. (11)

Нека $c: \vec{r} = \vec{r}(q),\ q \in J$, е гладка крива, $q_1 \neq q_2 \in J$ $q_1 < q_2$



Знаем д-ната на дъгата от c $\quad s(q_1,q_2) = \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{\dot{\vec{r}}^2(q)}\, dq$

при $q_2 > q_1$ и $s(q_1,q_2) = -\int_{q_2}^{q_1} \sqrt{\dot{\vec{r}}^2(q)}\, dq$ при $q_1 > q_2$ (обхожда в обр. посока)

Деф. Нека $q_0 \in J \Rightarrow$ определена е ф-цията $\quad s(q) = \int_{q_0}^{q} \sqrt{\dot{\vec{r}}^2(u)}\, du$ ... прието е

$s(q) = \int_{q_0}^{q} \sqrt{\dot{\vec{r}}^2(q)}\, dq \quad \Rightarrow \quad \dot{s}(q) = \sqrt{\dot{\vec{r}}^2(q)} > 0$ – монотонно растяща ф-я $\Rightarrow$

съществува обратната ѝ $q = q(s) \Rightarrow \vec{r}(q) = \vec{r}(q(s)) = \vec{r}(s)$.

(смяна на параметъра).

Параметърът s се нар. естествен параметър, а c – отнесена спрямо s.

за $\frac{d\vec{r}}{ds}$ имаме $\quad \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dq} \cdot \frac{dq}{ds} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dq}}{\frac{ds}{dq}} = \frac{\dot{\vec{r}}(q)}{\dot{s}(q)} \Rightarrow \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|^2 = \frac{\dot{\vec{r}}^2}{\dot{s}^2} = 1$

Т1 Параметърът q е естествен за $c: \vec{r} = \vec{r}(q) \Leftrightarrow \dot{\vec{r}}^2(q) = 1$

Док. 1.) Нека q е естествен за $c \Rightarrow q = s \Rightarrow \dot{s} = 1 \Rightarrow \dot{q} = 1$ от $s = q = \int^{q} \sqrt{\dot{\vec{r}}^2_q}\, dq$

$\Rightarrow \sqrt{\dot{\vec{r}}^2(q)} = 1 \Rightarrow \dot{\vec{r}}^2(q) = 1$ $\quad$ (е, ако $q = s + s_0 \to$ „пренесване"... $\quad (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}} = $ [illegible]

2) Нека $\dot{\vec{r}}(q)^2 = 1 \Rightarrow s(q) = \int_{q_0}^{q} du = q - q_0$ (или $q+q_0$)

(скорост, време, ...) Ако $c \geq 0$ − $q_0 = 0$ .. Означаваме $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}'(s)$.

s − интегрална инварианта.

Нека c е отнесена спрямо естествения си параметър, т.е. $c = c(s)$),

$c: \vec{r} = \vec{r}(s)$: $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$. Тогава за в-рите от триедъра на Френе

имаме $\vec{t} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \frac{\vec{r}'(s)}{\sqrt{\vec{r}'^2(s)}} = \vec{r}'(s)$. От $\vec{r}'^2 = 1 \Rightarrow 2\vec{r}'\vec{r}'' = 0 \Rightarrow \vec{r}'' \perp \vec{r}'$

(с постоянна д-на...)

$\Rightarrow$ за $\vec{b} = \vec{b}(s)$ имаме от $(\vec{r}' \times \vec{r}'')^2 = \underbrace{\vec{r}'^2}_{=1}\vec{r}''^2 - \underbrace{(\vec{r}'\vec{r}'')^2}_{=0} \Rightarrow$

$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - \vec{a}\vec{b}$

$$\vec{b}(s) = \frac{\vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s)}{\sqrt{(\vec{r}' \times \vec{r}'')^2}} = \frac{\vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s)}{\sqrt{\vec{r}''^2(s)}}, \quad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} \quad ((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a}\vec{c}.\vec{b} - \vec{b}\vec{c}.a) \Rightarrow$$

$\vec{r}' \times \vec{r}'' \times \vec{r}' =$

$$\vec{n}(s) = \frac{(\vec{r}'(s))^2 . \vec{r}'' - (\vec{r}''\vec{r}')\vec{r}'}{\sqrt{(\vec{r}''(s))^2}} = \frac{\vec{r}''(s)}{\sqrt{(\vec{r}''(s))^2}}$$

$\xRightarrow{\text{наново}}$

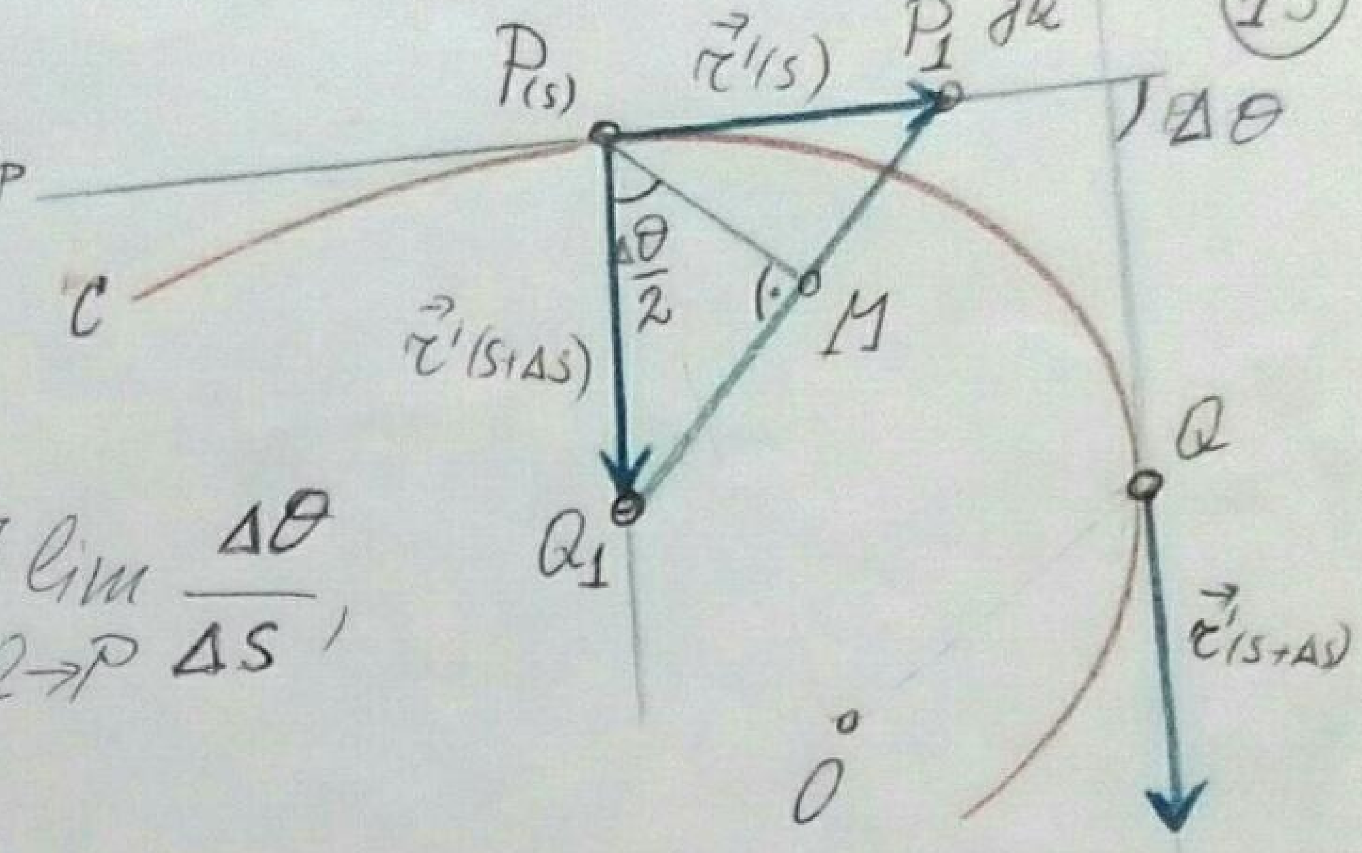
$$\vec{t}(s) = \vec{r}'(s)$$

$$\vec{n}(s) = \frac{\vec{r}''(s)}{\sqrt{\vec{r}''(s)^2}}$$

$$\vec{b}(s) = \frac{\vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s)}{\sqrt{\vec{r}''(s)^2}}$$

Кривина на правилна крива.

Нека c е гладка крива, $P, Q \in c$ и Δs е дължината на $\overset{\frown}{PQ}$, g_P и g_Q – допирателните към c в т-те P и Q и $\Delta\theta = \sphericalangle(g_P, g_Q)$



Def Нека Q клони клони към P по c. Ако $\exists \lim\limits_{Q\to P} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}$, то тази граница се нарича кривина на c в т. P и се бележи с $\varkappa$.

Т. Всяка двукратно гладка правилна крива c има във всяка своя точка определена кривина и ако c е отнесена спр. ест. си параметър, то $\varkappa(s) = |\vec{r}''(s)|$.

Док. Нека $c = c(s)$, т.е. $c: \vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in S'$, $\vec{r}'(s)^2 = 1$ и $P = \vec{r}(s)$ т.е. $\vec{OP} = \vec{r}(s)$

Тъй като $|\overset{\frown}{PQ}| = \Delta s$ и c е отнесена спрямо ест. си параметър, то

$\vec{OQ} = \vec{r}(s+\Delta s)$ ($|(s+\Delta s), s| = \int\limits_s^{s+\Delta s} du = s+\Delta s - s = \Delta s$,

Нека $g_1 \begin{cases} \ni P \\ \parallel g_Q \end{cases}$. Векторът $\vec{r}'(s)$ е колинеарен с g_P. Нека $\vec{PP_1} = \vec{r}'(s)$.

$\vec{r}'(s+\Delta s) \parallel g_Q \Rightarrow \parallel g_1$. Нека $Q_1 \in g_1$: $\vec{PQ_1} = \vec{r}'(s+\Delta s)$. $\Rightarrow \Delta\theta = \sphericalangle(g_P, g_Q) \Rightarrow$

$\Delta\theta = \sphericalangle(\vec{r}'(s), \vec{r}'(s+\Delta s)) = \sphericalangle P_1PQ_1$ Имаме $\triangle PP_1Q_1$ – равнобедрен –

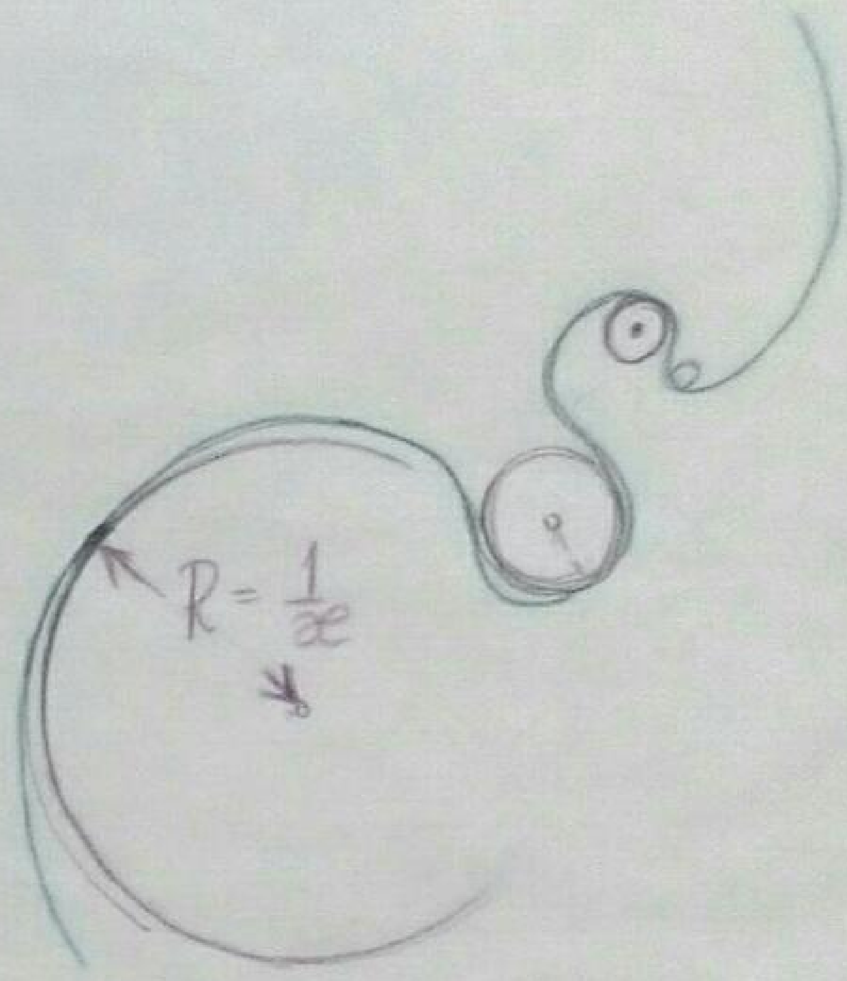
$|\vec{PP_1}| = |\vec{t}(s)| = 1$, $|\vec{PQ_1}| = |\vec{t}(s+\Delta s)| = 1$. Нека M – средата на отс. $(P_1Q_1) \Rightarrow \sphericalangle PQ_1M = \dfrac{\Delta\theta}{2}$

$|\overrightarrow{P_1Q_1}| = ?$ $\quad \overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{PQ_1} - \overrightarrow{PP_1} = \vec{\tau}'(s+\Delta s) - \vec{\tau}'(s) \Rightarrow |P_1Q_1| = |\vec{\tau}'(s+\Delta s) - \vec{\tau}'(s)|$ (14)

От ΔP_1PM имаме $\sin\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{|MP_1|}{|PP_1|}$, $|MP_1| = \frac{1}{2}|P_1Q_1|$, $|\overrightarrow{PP_1}| = 1$
(без M)

$$\Rightarrow \sin\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{1}{2}|\vec{\tau}'(s+\Delta s) - \vec{\tau}'(s)| = \quad \text{предв } \times \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

$$= \frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta s} = \frac{1}{2}\frac{|\tau'(s+\Delta s) - \tau'(s)|}{\Delta s} = \frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta}\cdot\frac{\Delta\theta}{\Delta s} \Rightarrow$$



$$\frac{|\vec{\tau}'(s+\Delta s) - \vec{\tau}'(s)|}{\Delta s} = \underbrace{\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}}_{=1}\cdot\frac{\Delta\theta}{\Delta s} \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\vec{\tau}'(s+\Delta s) - \vec{\tau}'(s)|}{\Delta s} = \lim_{\frac{\Delta\theta}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\cdot\lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta\theta\to 0}}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} \Rightarrow$$

ускорението.

$$|\vec{\tau}''(s)| = \lim_{\substack{\Delta\theta\to 0\\ \Delta s\to 0}}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \varkappa,\ \varkappa = \varkappa(s) \Rightarrow \varkappa(s) = |\vec{\tau}''(s)| \geq 0$$

$R(s) = \frac{1}{\varkappa(s)}$ — радиус на кривина.

$\underline{\underline{T3}}$ Ако кривината във всяка точка на една двукратно гладка крива c е нула, то c е права (или част от права)

т-ка на изправяне...

$\underline{\text{Док.}}$ Нека $c = c(s)$, т.е. $c: \vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in S \subseteq \mathbb{R}$, $\vec{r}'^2 = 1$ и $\varkappa(s) = 0 \ \forall s$

$\Rightarrow |\vec{r}''| = 0 \Rightarrow \vec{r}'' = \vec{0} \Rightarrow \vec{r}'(s) = \vec{a}$ – константен вектор $\Rightarrow$

$$\int r'(s)\,ds = \int \vec{a}\,ds = \vec{a}\int ds = \vec{a}.s \overset{+\vec{a}s_0}{\Rightarrow} \vec{r}(s) + \underbrace{\vec{r}(s_0)}_{\text{конст. в-р}} = \vec{a}s + \vec{a}.s_0 \Rightarrow$$

$\vec{r}(s) = \vec{a}^* + \vec{a}.s \Rightarrow$ всяка т-ка от $\vec{c}$ принадлежи на правата ($\vec{OP} = \vec{r}(s)$)

$l: y = \vec{a}^* + \vec{a}.s$ (или част от права...)

c – правилна, ако $\vec{r}' \times \vec{r}'' \neq \vec{0}$

т-те, за които $\varkappa(s) = 0$ – т-ки на изправяне.

Зад...

$\varkappa$ мери доколко c е отличава от права