Умножение на детерминанти

Започваме със следната

Лема. *Нека* $m, n \in \mathbb{N}$. *Да разгледаме* $(n+m)\times(n+m)$ *детерминантата*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ * & * & \dots & * & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix},$$

където числата $a_{ij},\ i,j = 1,2,\dots,n$ *и* $b_{kl},\ k,l = 1,2\dots,m$ *лежат в някакво числово поле* F, *а със символа* $*$ *са означени произволно числа от същото това поле, които обаче не ни интересуват конкретно. Нека разгледаме още* $n \times n$ *детерминантата* $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ *и* $m \times m$ *детерминатата* $\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}$. *Тогава е изпълнено равенството* $\Delta = \Delta_1\Delta_2$.

Доказателство. Нека означим детерминантата $\Delta = |c_{ij}|,\ i,j = 1,2,\dots,n+$

m. Имаме, че

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, \text{при } i \leq n, j \leq n \\ 0, \text{при } i \leq n, j > n \\ *, \text{при } i > n, j \leq n \\ b_{i-n,j-n}, \text{при } i > n, j > n. \end{cases}$$

По дефиниция имаме, че

$$\Delta = \sum (-1)^{[\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n \ \alpha_{n+1} \ \dots \ \alpha_{n+m}]} c_{1\alpha_1} \dots c_{n\alpha_n} c_{n+1,\alpha_{n+1}} \dots c_{n+m,\alpha_{n+m}},$$

където с $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n+m$ е зададена някаква пермутация на числата $1 \ 2 \ \dots \ n+m$. Разглеждаме първите n множителя във всеки член, т.е. $c_{k\alpha_k}$ за $k = 1, 2, \dots, n$. Ако $\alpha_k > n$, то $c_{k\alpha_k} = 0$ и цялото събираемо се анулира. Нека сега $\alpha_k \leq n$ за $\forall k = 1, 2, \dots, n$. Така получаваме, че $\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n$ всъщност е пермутация на числата $1 \ 2 \ \dots \ n$. Следователно $\alpha_{n+1} \ \alpha_{n+2} \ \dots \ \alpha_m$ е пермутация на числата $n+1 \ n+2 \ \dots \ m$. В такъв случай между числата от $\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n$ и числата от $\alpha_{n+1} \ \alpha_{n+2} \ \dots \ \alpha_m$ не се образуват никакви инверсии. Означаваме $\beta_1 = \alpha_{n+1} - n, \dots, \beta_m = \alpha_{n+m} - n$ и получаваме, че $\beta_1 \ \dots \ \beta_m$ е пермутация на числата $1 \ 2 \ \dots \ m$. Сега вече имаме, че

$$\begin{aligned} &(-1)^{[\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n \ \alpha_{n+1} \ \dots \ \alpha_{n+m}]} = (-1)^{[\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n] + [\alpha_{n+1} \ \dots \ \alpha_{n+m}]} \\ &= (-1)^{[\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n] + [\beta_1 \ \dots \ \beta_m]} = (-1)^{[\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]} (-1)^{[\beta_1 \ \dots \ \beta_m]}. \end{aligned}$$

Освен това $c_{1\alpha_1} = a_{1\alpha_1}, \dots, c_{n\alpha_n} = a_{n\alpha_n}$; $c_{n+1,\alpha_{n+1}} = b_{1,a_{n+1}-n} = b_{1\beta_1}, \dots, c_{n+m,\alpha_{n+m}} = b_{m,\alpha n+m-n} = b_{m\beta_m}$ и вече можем да запишем

$$\Delta = \sum (-1)^{[\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]} a_{1\alpha_1} \dots a_{n\alpha_n} (-1)^{[\beta_1 \ \dots \ \beta_m]} b_{1\beta_1} \dots b_{m\beta_m},$$

където $\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n$ е произволна пермутация на числата $1 \ 2 \ \dots \ n$, а $\beta_1 \ \dots \ \beta_m$ е произволна пермутация на числата $1 \ \dots \ m$. Така

$$\Delta = \sum (-1)^{[\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]} a_{1\alpha_1} \dots a_{n\alpha_n} \sum (-1)^{[\beta_1 \ \dots \ \beta_m]} b_{1\beta_1} \dots b_{m\beta_m} = \Delta_1 \Delta_2.$$

$\square$

Теорема. *Нека $\Delta_1 = |a_{ij}|$ и $\Delta_2 = |b_{ij}|$ са две детерминанти от ред n и нека $\Delta = |c_{ij}|$ е детерминанта от ред n, такава че $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ за $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$. Тогава е изпълнено равенството*

$\Delta = \Delta_1 \Delta_2$.
(Иначе казано, елементът в i-тия ред и j-тия стълб на Δ се получава като i-тия ред на Δ_1 се умножи почленно с j-тия стълб на Δ_2 и произведенията се сумират. Ще наричаме това правило „ред по стълб“.)

Доказателство. Разглеждаме помощната детерминанта от ред $2n$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Според Лемата имаме, че $D = \Delta_1 \Delta_2$. Нека сега за всяко $i = 1, 2, \dots, n$ към i-тия ред на D прибавяме $(n+1)$-вия ред, умножен по a_{i1}, $(n+2)$-рия ред, умножен по $a_{i2}, \dots$, $2n$-тия ред, умножен по a_{in}. Така получаваме

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & d_{11} & \dots & d_{1j} & \dots & d_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{21} & \dots & d_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{n1} & \dots & d_{nj} & \dots & d_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

където $d_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = c_{ij}$. От свойствата на детерминантите имаме

$$D = (-1)^n \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Лемата}}{=} (-1)^n \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n \Delta (-1)^n = \Delta.$$

Така $D = \Delta$ и $D = \Delta_1 \Delta_2$. Следователно $\Delta = \Delta_1 \Delta_2$. □

От тази Теорема, приложена за Δ_1 и Δ_2^t, с която сме означили транспонираната детерминанта на Δ_2, получаваме, че $\Delta = \Delta_1 \Delta_2^t$, където $\Delta = |c_{ij}|$ и $c_{ij} = a_{i1}b_{j1} + a_{i2}b_{j2} + \cdots + a_{in}b_{jn}$. С други думи произведението на две детерминанти може да бъде пресметнато и по правилото „ред по ред". В сила са още правилата за умножение „стълб по стълб" и „стълб по ред". По-общо всичко това може да се разглежда като следствие от свойството, че за произволна квадратна матрица A имаме $\det A = \det A^t$.

Пример: Нека $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$. Имаме $\Delta = \Delta_1 \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2.2 + 0.(-4) & (-2).1 + 0.5 \\ 1.2 + 3.(-4) & 1.1 + 3.5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -10 & 16 \end{vmatrix}$.

Проверка: $\Delta_1 = -2.3 - 0.1 = -6,\ \Delta_2 = 2.5 - 1.(-4) = 14,\ \Delta = -4.16 - (-2).(-10) = -84$. И наистина, $\Delta_1 \Delta_2 = (-6).14 = -84 = \Delta$.