$$\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_X(h(y))\, |h'(y)| dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_X(h(y)) dh(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x) dx.$$

□

4.5 Дисперсия на непрекъсната сл.в.

Определение 4.4 *Дисперсия на непрекъснатата сл.в. X наричаме числото $\mathrm{D}X$ дефинирано с равенството:*

$$\mathrm{D}X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}X)^2\, f_X(x) dx. \tag{4.5.11}$$

Ако интегралът е разходящ, казваме че дисперсията е безкрайна.

Ще отбележим, че всички свойства на математическото очакване и диспресията от дискретния случай се запазват и няма да ги доказваме отделно.

4.6 Съвместно (двумерно) разпределение в непрекъснатия случай

Определение 4.5 *Нека (X_1, X_2) е случаен вектор, чиито компоненти са непрекъснати сл.в. Тогава съвместна функция на разпределение или съвместно разпределение на сл.вектор (X_1, X_2) наричаме функция $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ такава, че:*

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \mathrm{P}(X_1 < x_1; X_2 < x_1)$$

за всички $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Определение 4.6 *Нека (X_1, X_2) е случаен вектор, чиито компоненти са непрекъснати сл.в. Тогава вероятностна плътност на съвместното разпределение на сл.вектор (X_1, X_2) (накратко съвместна плътност) наричаме функция $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ такава, че:*

$$1. f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \geq 0, \quad \text{за всички} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R};$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1;$$

$$3. \mathrm{P}(a \leq X_1 \leq b; c \leq X_2 \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Подобно на дискретния случай и тук можем да дефинираме разпределението на сл. в. X_1, X_2 поотделно, наричани също маргинални разпределения.

Определение 4.7 *Маргинална плътност на сл.в. X_1 и X_2 наричаме функциите:*

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) dx_2,$$

и

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) dx_1,$$

респективно.

Важно е да се отбележи, че в термините на съвместната ф.р. можем да дадем аналогична дефиниция на независимост на две сл.в. в непрекъснатия случай по следния начин:

Определение 4.8 *Казваме, че сл.в.* X_1 *и* X_2 *са независими, ако*

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2),$$

за всички $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;

Подобно на независимост при случайни събития, понятието независимост може да бъде въведено и за повече от две сл.в. Отново имаме два вида независимост: "две по две" и в съвкупност. Ще дадем съответните дефиниции като предварително ще отбележим, че това е в сила и в дискретния случай в съответните означения.

Определение 4.9 *Казваме, че сл.в.* $X_1, \ldots, X_n$ *са независими "две по две", ако*

$$F_{X_i,X_j}(x_i,x_j) = F_{X_i}(x_i)F_{X_j}(x_j),$$

за всички $x_i, x_j \in \mathbb{R}, i, j = 1, \ldots, n.$

Определение 4.10 *Казваме, че сл.в.* $X_1, \ldots, X_n$ *са независими в съвкупност или накратко само независими, ако*

$$F_{X_i,\ldots,X_n}(x_i,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i),$$

за всички $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n.$

Съгласно дефиниция (4.6) съвместната функция на разпределение може да се изрази чрез съвместната плътност по следния начин

$$F_{X_1,X_2}(x_i,x_j) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1,X_2}(u,v)dudv.$$

Следователно обратната връзка е от вида

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial^2 F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Аналогична връзка между съвместната ф.р. и плътност имаме и за повече от две сл.в. Да отбележим, че в термините на съвместната плътност можем да дадем аналогична дефиниция на независимост на две сл.в. в непрекъснатия случай.

Забележка 4.1 *Както при събития и тук от независимост в съвкупност следва независимост "две по две", но обратното не е варно.*