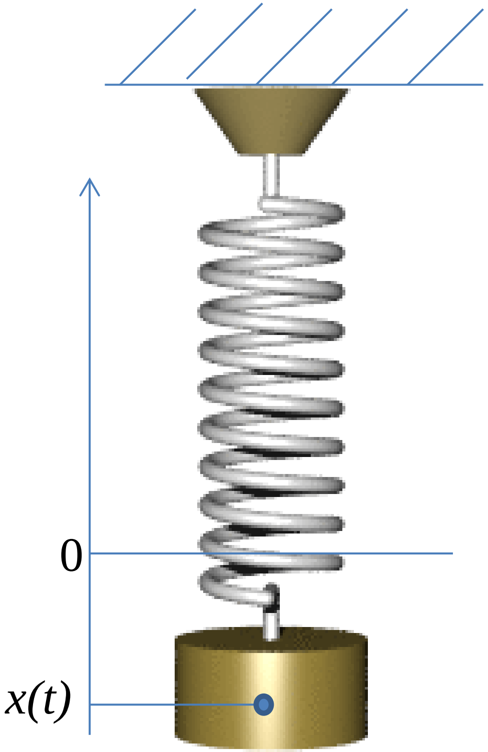
Хармоничен осцилатор



Хармоничен осцилатор без триене

$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = m\ddot{x} = -kx.$$

Хармоничен осцилатор с триене

$$F = -kx - c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

Хармоничен осцилатор

Текстовете са от: Т. Генчев, Обикновени диференциални уравнения, Университетско издателство „Св. Кл.имент Охридски“, София, 1991 г.

Ще започнем с най-простото уравнение

$$x'' + \omega^2 x = 0, \tag{2}$$

което описва трептенията на системите без триене при отсъствието на външни сили. Вече знаем, че общото реално решение на (2) има вида

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \qquad A = \text{const}, \;\; B = \text{const}. \tag{3}$$

Ако въведем величините ρ и α чрез равенствата $A = \rho\cos\alpha$, $-B = \rho\sin\alpha$, получаваме $\rho = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{B}{A}$ и решението (3) добива вида

$$x(t) = \rho\cos(\omega t + \alpha), \tag{4}$$

който понякога е по-удобен за работа. Величините ρ, ω и α се наричат съответно амплитуда, честота и начална фаза. Както от (3), така и от (4) веднага следва, че решението е периодична функция с период $\frac{2\pi}{\omega}$. Ясно е, че константите A и B, а оттам и ρ и α зависят от началните условия, т.е. от конкретното движение, докато ω зависи само от физическата система и често се нарича собствена честота на системата.

Вече видяхме, че физическите системи с триене при отсъствие на външни сили се управляват от уравнението

(6) $$x'' + kx' + \omega^2 x = 0, \qquad k > 0,\ \omega > 0,$$

с общо решение

(7) $$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$$

при $\alpha_1 = \dfrac{-k + \sqrt{k^2 - 4\omega^2}}{2} \pm \alpha_2 = \dfrac{-k - \sqrt{k^2 - 4\omega^2}}{2}$ и

(8) $$x(t) = (At + B)e^{-\frac{k}{2}t}$$

при $\alpha_1 = \alpha_2$, т.е. при $k^2 - 4\omega^2 = 0$.

Предоставяйки втория случай на читателя, ще предположим, че $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Имаме две възможности:

а) $k^2 - 4\omega^2 > 0$; б) $k^2 - 4\omega^2 < 0$.

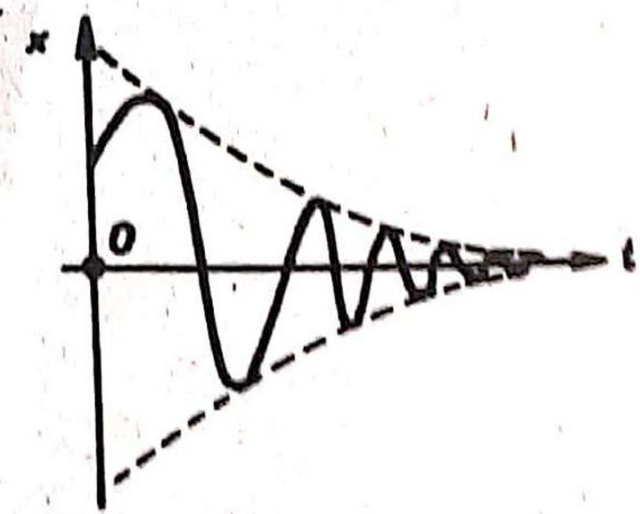
Нека а) е налице. В такъв случай α_1 и α_2 са отрицателни и (7) показва, че движението затихва твърде бързо — решението се анулира най-много веднъж, т.е. махалото (ако става дума за него) минава не повече от един път през равновесното си положение. (Триенето е много голямо!)

В случая б) общото реално решение има вида

$$x(t) = e^{-\frac{k}{2}t}(A\cos\Delta t + B\sin\Delta t) = \rho e^{-\frac{k}{2}t}\cos(\Delta t + \alpha),$$

$\Delta^2 = \frac{1}{4}(4\omega^2 - k^2)$, откъдето се вижда, че отново имаме експоненциално затихване, но точката преминава безбройно много пъти през равновесното си положение.

Графиката на решението е изобразена на фиг. 24. (С пунктир са изобразени графиките на функциите $t \longrightarrow \pm e^{-\frac{k}{2}t}$, $t \geq 0$.)



Фиг. 24

Тук ще разгледаме явленията резонанс и биене, които могат да възникнат при наличието на периодични външни сили.

Да разгледаме уравнението

$$x'' + kx' + \omega^2 x = f(t), \qquad k > 0,\ \omega > 0, \qquad k^2 < 4\omega^2, \tag{9}$$

където $f(t) = C\cos\omega_0 t$ или $f(t) = C\sin\omega_0 t$. И двата случая се третират едновременно с метода на комплексната амплитуда, защото коефициентите на (9) са реални. За целта решаваме уравнението

$$x'' + kx' + \omega^2 x = Ce^{i\omega_0 t} \tag{10}$$

и ръководейки се от казаното в § 6, получаваме непосредствено

$$x(t) = \frac{Ce^{i\omega_0 t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + ik\omega_0} = \frac{Ce^{i(\omega_0 t - \beta)}}{((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + k^2\omega_0^2)^{1/2}}, \tag{11}$$

където $\beta = \arg(\omega^2 - \omega_0^2 + ik\omega_0)$.

$$(9) \qquad x'' + kx' + \omega^2 x = f(t), \qquad k > 0,\ \omega > 0, \qquad k^2 < 4\omega^2,$$

Оттук, отделяйки реалната и имагинерната част, намираме

$$u(t) = \frac{C\cos(\omega_0 t - \beta)}{((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + k^2\omega_0^2)^{1/2}},$$

(12)

$$v(t) = \frac{C\sin(\omega_0 t - \beta)}{((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + k^2\omega_0^2)^{1/2}}.$$

Функциите u и v удовлетворяват (9) съответно при

$$f(t) = C\cos\omega_0 t \quad \text{и} \quad f(t) = C\sin\omega_0 t.$$

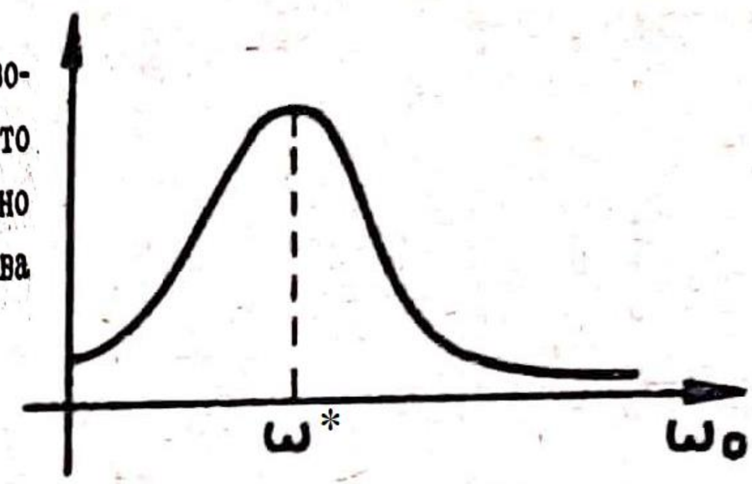
Поради очевидната аналогия ще коментираме само първия случай. Тогава общото решение има вида

$$(13) \qquad x(t) = \rho e^{-\frac{k}{2}t}\cos(\Delta t + \alpha) + \frac{C\cos(\omega_0 t - \beta)}{((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + k^2\omega_0^2)^{1/2}}.$$

$$x(t) = \rho e^{-\frac{k}{2}t}\cos(\Delta t + \alpha) + \frac{C\cos(\omega_0 t - \beta)}{((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + k^2\omega_0^2)^{1/2}}. \tag{13}$$

Понеже $k > 0$, след известно време първият член става пренебрежимо малък и физическите уреди регистрират само влиянието на второто събираемо. То ни дава периодично движение с честота ω_0, т.е. с честотата на външната сила, но при това се наблюдава известно отместване по фаза. Когато ω_0 се мени, и амплитудата на второто събираемо се мени и достига максимума си при $\omega_0 = \omega^*$. Графиката на амплитудата като функция на ω_0 е изобразена на фиг. 25. По:

Получава се характерната резонансна крива от радиотехниката. Ясно е, че колкото триенето (т.е. k) е по-малко, толкова максимумът на кривата е по-ясно изразен и амплитудата на „принудените трептения“(12) става

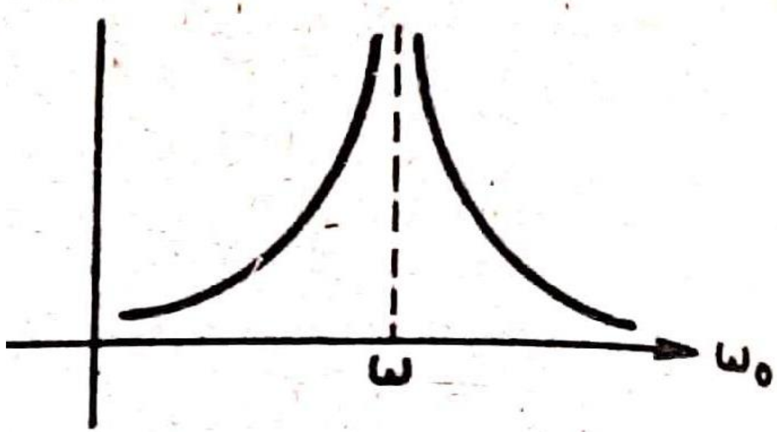


Фиг. 25

по-голяма. При $k = 0$ се получава графиката, изобразена на фиг. 26. От (13) се вижда, че при $\omega_0 = \omega$ ефектът на външната сила е най-голям. В такъв случай се казва, че имаме резонанс. Резонансът играе основна роля в радиотехниката — радиоапаратите приемат най-ясно сигналите с честота, близка до тяхната собствена, и ние ги настройваме, като чрез изменяне на съответните параметри доближаваме собствената им честота до честотата, с която работи слушаната станция. Напротив, в други ситуации резонансът старателно се избягва. Например сравнително малка периодична сила след известно време може да разруши солидно инженерно съоръжение, ако нейната честота е близко до собствената честота на съоръжението. Ще завършим обсъждането на резонанса, като отбележим, че при $k = 0$, $\omega = \omega_0$ общото решение на (9) има вида

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha) + \frac{Ct}{2\omega}\sin\omega t.$$

Сега вече амплитудата на принудените трептения расте линейно заедно с t.



Фиг. 26