7. Афинни и ортогонални трансформации в пространството.

Афинните трансформации в пространството се дефинират, както в равнината.

Дефиниция Една трансформация на разширеното евклидово пространство наричаме афинна, ако оставя на място безкрайната равнина (т.е. има инвариантно подпространство с ко-размерност 1).

В горната дефиниция се има предвид, че трансформацията е неизродена.

Ако спрямо фиксирана афинна координатна система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ в $E_3 = E_3^* \setminus \Omega$ φ_A е зададена чрез (1) $\varphi_A : \rho \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})$ $i,j = 1, \dots, 4$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\rho \neq 0$, $\rho \in \mathbb{R}$,

то φ_A е афинна, ако 1. $\det A \neq 0$ и 2. $\varphi_A(\Omega) = \Omega$

Ясно е, че φ_A е еднозначно обратимо точково съответствие, изобразява права в права и равнина в равнина, като запазва инцидентността.

Също така, φ_A запазва успоредността на прави и на равнини.

Наистина: Ако в E_3 $a \parallel b$, то в E_3^* $a \cap b = U \Rightarrow \varphi_A(a \cap b) = \varphi_A(a) \cap \varphi_A(b) = \varphi_A(U)$, $\varphi_A(U) \in \Omega \Rightarrow \varphi_A(a) \parallel \varphi_A(b)$ в E_3

Аналитично представяне на афинна трансформация

Нека φ_A е афинна трансформация, зададена с (1)

От $U(x_1, x_2, x_3, 0) \xrightarrow{\varphi_A} U'(x_1', x_2', x_3', 0)$ следва, че равенството

$0 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44} \cdot 0$ е изпълнено за всяка ... $(x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$

$\iff a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0 \Rightarrow$ матрицата на φ_A е $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 \; 0 & a_{44} \end{pmatrix}$,

където $a_{44} \neq 0$ $(\det A \neq 0)$

$$\Rightarrow \varphi_A \begin{cases} \rho x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 \\ \rho x_2' = a_{21} x_1 + \cdots + a_{24} x_4 \\ \rho x_3' = a_{31} x_1 + \cdots + a_{34} x_4 \\ \rho x_4' = a_{41} x_1 + \cdots + a_{44} x_4 \end{cases}, \quad a_{44} \neq 0 \qquad (\varphi := \varphi_A)$$

За действието на φ върху крайните точки, $\varphi/_{E_3}$, $x_4 \neq 0, x_4' \neq 0$ като минем към нехомогенни координати:

$x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$; $x' = \frac{x_1'}{x_4'}$, $y' = \frac{x_2'}{x_4'}$, $z' = \frac{x_3'}{x_4'}$ и $c_{ij} = \frac{a_{ij}}{c_{44}}$ за образа на крайната точка $N(x, y, z)$ при φ получаваме $N'(x', y', z')$:

$$(2) \quad \varphi: \begin{cases} x' = c_{11} x + c_{12} y + c_{13} z + c_{14} \\ y' = c_{21} x + c_{22} y + c_{22} z + c_{24} \\ z' = c_{31} x + c_{32} y + c_{33} z + c_{34} \end{cases};$$

За матрицата $C = (c_{ij})$ имаме

$$\underline{\det C} = \frac{1}{a_{44}^3} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{44}^3} \frac{1}{c_{44}} \det A \underline{\neq 0}$$

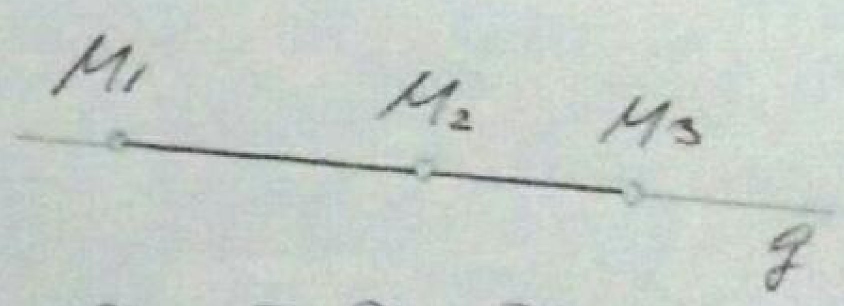
От (2) следва, че афинна трансформация се $\underbrace{\text{определя}}_{\text{еднозначно}}$ от действието си върху четири точки в общо положение (т.е. четири точки никои три от които не са колинеарни и не са в една равнина)

(всяка двойка съответни точки задава три уравнения за 12-те c_{ij}. За да са независими трябва точките да са в общо положение).

В сила е

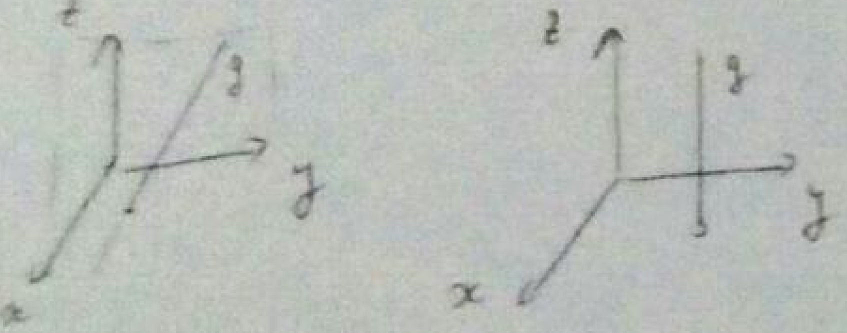
Теорема 1 За всеки две четворки M, N, P, Q и M', N', P', Q' в общо положение съществува единствена афинна трансформация в E_3, която изобразява M, N, P, Q съответно в M', N', P', Q'.

За простото отношение на три колинеарни точки в E_3 имаме $\overrightarrow{M_1M_3} = k\overrightarrow{M_2M_3}$, т.е. $k = \frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_2M_3}}$ и $k = (M_1M_2M_3)$



$$k = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \quad (*)$$

Да отбележим, че ако $x_3 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1$ ($\Leftrightarrow g \parallel Oyz$). Ако освен това $y_3 = y_2 \Rightarrow y_2 = y_1$ ($\Leftrightarrow g \parallel Oxz \Rightarrow g \parallel Oz$. Тогава $z_3 \neq z_2 \neq z_1 \neq z_1$



Теорема 2 Афинните трансформации запазват простото отношение на три точки

Док. (Аналогично на това в равнината) Нека $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$ са три различни колинеарни точки. $\varphi(M_i) = M_i'(x_i', y_i', z_i')$ и $k = (M_1M_2M_3)$.

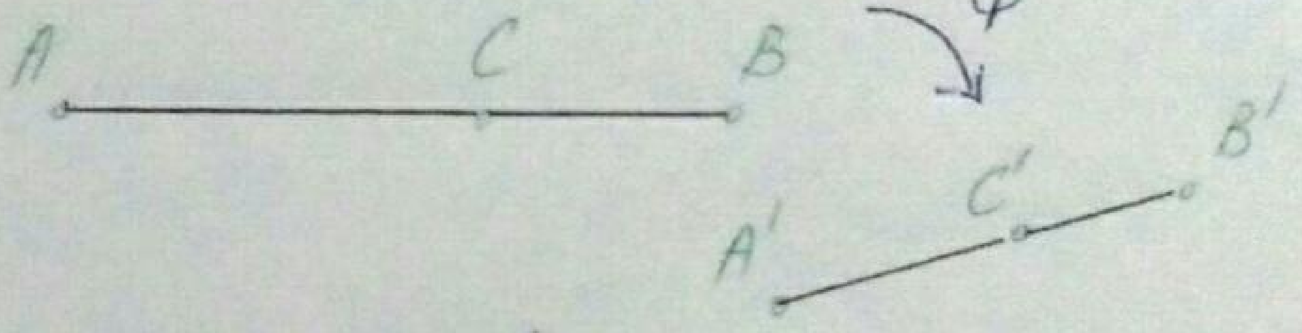
Нека $x_3 \neq x_2$, $x_3' \neq x_2'$, $y_3 \neq y_2$, $y_3' \neq y_2'$, $z_3 \neq z_2$, $z_3' \neq z_2'$. Кой да е от тези случаи е по-лек и се разглежда аналогично. Имаме

$$(M_1'M_2'M_3') = \frac{x_3' - x_1'}{x_3' - x_2'} = \frac{c_{11}(x_3 - x_1) + c_{12}(y_3 - y_1) + c_{13}(z_3 - z_1)}{c_{11}(x_3 - x_2) + c_{12}(y_3 - y_2) + c_{13}(z_3 - z_1)} = \frac{c_{11}\frac{x_3 - x_1}{z_3 - z_1} + c_{12}\frac{y_3 - y_1}{z_3 - z_1} + c_{13}}{c_{11}\frac{x_3 - x_2}{z_3 - z_2} + c_{12}\frac{y_3 - y_2}{z_3 - z_2} + c_{13}} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

$$= \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \quad (\text{от } (*))$$

Следствие Афинните трансформации изобразяват отсечка в отсечка. В частност средата на отсечката се изобразява в средата на образа.

Док. • Нека (AB) е произволна отсечка. Тогава т. $C \in (AB) \Leftrightarrow (ACB) > 1$ $\Leftrightarrow (A'C'B') > 1 \Leftrightarrow C' \in (A'B')$



• M е средата на $(AB) \Leftrightarrow (AMB) = 2$

От $(A'M'B') = (AMB) = 2 \Rightarrow M'$ е средата на $(A'B')$.

(тук $A', B', C', M' = \varphi(A, B, C, M)$, φ - афинна трансформация)

Ортогонални трансформации в пространството

Нека $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ е ортонормирана координатна система в E_3 и φ е афинна трансформация (3) $\varphi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{14} \\ c_{24} \\ c_{34} \end{pmatrix}$, $C = (c_{ij})$ $i,j = 1,2,3$

Казваме, че φ е ортогонална, ако задаващата я матрица C е ортогонална.

(3) представляват формулите за смяна на ортонормирана с ортонормирана координатна система. Също така, за всеки две ортонормирани координатни системи K и K' $\exists!$ ортогонална трансформация φ : $K \xrightarrow{\varphi} K'$.

В сила е следната теорема... аналогично... виж тема

Теорема Ортогоналните трансформации запазват разстоянието между две точки.

Док. Нека φ е ортогонална трансформация $\varphi: \vec{x}' = C\vec{x} + \vec{p}$ и M_i $i=1,2$ са две точки, $\varphi(M_i) = M_i'$. Тогава, ако $\vec{y} = \overrightarrow{M_1M_2}$, то $|M_1M_2| = \sqrt{\vec{y}^2}$, а $|M_1'M_2'| = \sqrt{\vec{y}'^2}$. За скаларния квадрат $\vec{y}'^2$ имаме $\vec{y}'^2 = (C\vec{y})(C\vec{y})$
$\Rightarrow \vec{y}'^2 = \vec{y}\underbrace{C^T C}_{E}\vec{y} = \vec{y}^2$. $\square$

Следователно всяка ортогонална трансформация запазва дължините на отсечките. – основен инвариант на ортогоналната група

Да отбележим, че $\det C = \pm 1$, но обратното не е вярно

Трансформацията φ с матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ е с $\det A = 1$, но не е ортогонална.

Друг важен пример на афинни трансформации са дилатациите, които са аналог на дилатациите в равнината.

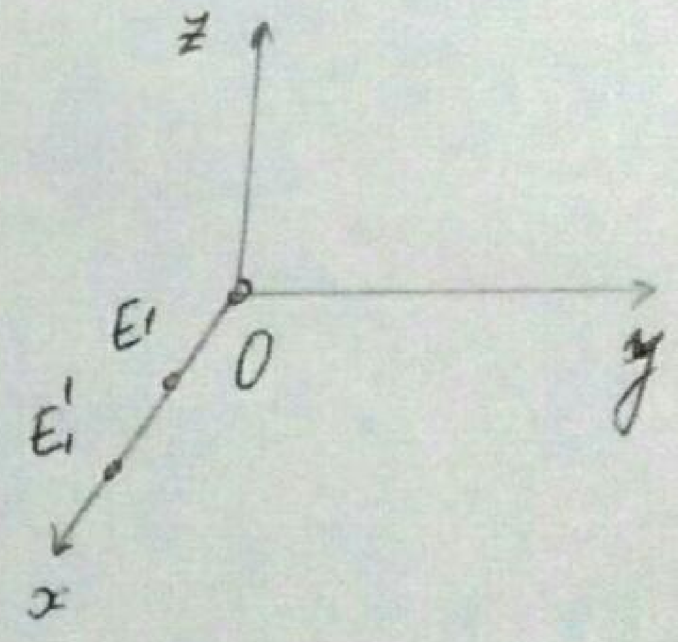
Дефиниция Трансформацията δ, която оставя неподвижни точките от една крайна равнина α и правите, успоредни на една фиксирана права a, $a \nparallel \alpha$ се нарича дилатация по a

Тъй като δ запазва безкрайната равнина (защо), то δ е афинна трансформация

Да изберем координатната система така, че α да е координатна равнина, а правата a да е координатната ос, нележаща във α.

1. Дилатация по Ox с равнина Oyz − δ_1

Нека δ_1 е зададена с $\delta_1 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = D_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{14} \\ d_{24} \\ d_{34} \end{pmatrix}$, $D_1 = (d_{ij})$, $\det D_1 \neq 0$



От $\delta_1(O) = O \Rightarrow d_{14} = d_{24} = d_{34} = 0$

За всяка точка $M(0, y, z)$ имаме $\delta(M) = M$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 = d_{11}.0 + d_{12}y + d_{13}z \\ y = d_{21}.0 + d_{22}y + d_{23}.z \\ z = d_{31}.0 + d_{32}y + d_{33}z \end{array} \right. \quad \forall (y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$\Rightarrow d_{12} = d_{13} = d_{23} = d_{32} = 0$, $d_{22} = d_{33} = 1$ $\Rightarrow$ $\delta_1 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ d_{21} & 1 & 0 \\ d_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

От условието $\delta_1(Ox) = Ox$, ($\delta_1(b) = b$ за всяка права $b \parallel Ox$)

имаме $E_1(1,0,0) \xrightarrow{\delta_1} E_1'(s,0,0)$ $s \neq 0 \Rightarrow d_{11} = s$, $d_{21} = d_{31} = 0$

Окончателно дилатацията б_1 по Ox се задава чрез

$$\text{б}_1 : \begin{cases} x' = sx \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б}_1 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Аналогично дилатациите по Oy – б_2 и Oz – б_3 се получават от вида

$$\text{б}_2 : \begin{cases} x' = x \\ y' = ly \\ z' = z \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{б}_3 : \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = mz \end{cases} , \quad l, m \neq 0$$

Всъщност дилатацията б_i се определя еднозначно от действието си върху четири точки в общо положение.

$\text{б}_1 : O, E_1, E_2, E_3 \xrightarrow{\text{б}_1} O, E_1', E_2, E_3$, където $E_1(1,0,0)$, $E_2(0,1,0)$, $E_3(0,0,1)$

$E_1'(s,0,0)$

$\text{б}_2 : O, E_1, E_2, E_3 \xrightarrow{\text{б}_2} O, E_1, E_2', E_3$, $E_2'(0,l,0)$ и т.н.

Забележка: В общия случай дилатациите не са подобности.
При $s=-1$ $(m=-1, l=-1)$ са симетрии относно съответната координатна равнина.