ЗАДАЧИ ПО АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

I ЧАСТ: Афинни операции с вектори

1 зад. Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник, в който точка *M* е средата на *AB*, точка *K* е средата на *CD*, точка *O* е средата на *MK*. Докажете, че $4.\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

2 зад. Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник, в който точка *M* е средата на *AC*, а точка *N* е средата на *BD*. Да се докаже, че $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$.

3 зад. Нека точките K, L, M и N са средите съответно на страните BC, CD, DE и EA на петоъгълника $ABCDE$, а точките *P* и Q са средите съответно на отсечките KM и LN. Докажете, че $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

4 зад. Дадени са точките O_1, O_2, O_3 и *A*. Симетричната точка на *A* относно O_1 означаваме с A_1, на A_1 относно O_2 - с A_2, на A_2 относно O_3 – с A_3, на A_3 относно O_1 - с A_4 , на A_4 относно O_2 - с A_5, на A_5 относно O_3 - с A_6 . Докажете, че A_6 съвпада с A .

5 зад. В успоредника $ABCD$ точките M и N са средите съответно на страните BC и CD. Точката *P* е такава, че $AMPN$ е успоредник. Докажете, че точката *P* принадлежи на правата *AC*.

6 зад. Нека CM е медиана в триъгълника ABC. Нека точките *P* и Q са такива, че $\overrightarrow{CP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. Докажете, че точките *A*, *P* и *Q* са колинеарни.

7 зад. В четириъгълника $ABCD$ точката *P* е средата на страната *AB*, а точката *Q* е средата на страната *CD*. Нека точките M и N са такива, че $AMQD$ и $NBCQ$ са успоредници. Докажете, че точката P е средата на отсечката MN .

II ЧАСТ: Линейна зависимост и независимост на вектори.

1 зад. Даден е триъгълник *ABC*, за който $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Върху страните *AC* и *BC* са нанесени съответно точките *M* и *N* така, че *CM*:*MA* = 2:3 и *CN*:*NB* = 2:3.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AB}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се покаже, че правите *MN* и *AB* са успоредни;
b) Да се докаже, че правите *AN* и *BM* имат точно една обща точка.

2 зад. Даден е успоредник *ABCD*, за който $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, точката $O = AC \cap BD$, а точката *P* е от страната *BC* такава, че *BP*:*PC* = 3:1.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
b) Ако точката *Q* е от страната *AD* такава, че *AQ*:*QD* = 1:3, да се докаже, че точките *P*, *Q* и *O* са колинеарни.

3 зад. Точките *M* и *N* лежат съответно върху страните *AB* и *BC* на триъгълник *ABC*, като *AM : MB = BN : NC = 2 : 1*. Точките *E* и *F* са среди съответно на *AB* и *BC*. Докажете, че точките *E, F* и средата на *MN* са колинеарни.

4 зад. Даден е успоредник *ABCD*, за който $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, точката $O = AC \cap BD$. Точките M и N са медицентровете съответно на триъгълник ABD и триъгълник ABC.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AB}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
b) Да се покаже, че правите *MN* и *AB* са успоредни.

5 зад. Нека *MNPQ* е тетраедър, а точките *A*, *B*, *C*, *D* и *E* са определени с равенствата:
$\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MN} - 2\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ}$.
Нека правата *AB* пресича равнината *CDE* в точка *H*. Да се изрази векторът $\overrightarrow{MH}$ като линейна комбинация на векторите $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$.

6 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Точките A_1, C_1 и O_1 са медицентровете съответно на триъгълниците: *BOC*, *AOB* и *ABC*.

a) Да се изразят медианите на тетраедъра $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{OO_1}$ чрез $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$;
b) Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ са линейно независими;
c) Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{AC}$ са линейно зависими, т.е. четирите точки *A*, *C*, A_1 и C_1 лежат в една равнина. От двете подусловия b) и c) следва, че двете прави AA_1 и CC_1 се пресичат в единствена точка *M*;
d) Да се докаже, че намерената по-горе точка *M* лежи и на третата медиана OO_1 и да се намерят отношенията, в които т. *M* дели всяка от медианите.

7 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Точките *M*, *N*, *P* и *Q* са медицентровете съответно на триъгълниците: *AOB, BOC*, *ABC* и *AOC*. Да се докаже, че следните прави са две по две успоредни: *MN* и *AC*, *MQ* и *BC*, *QN* и *AB*, *MP* и *OC*, *NP* и *OA*, *PQ* и *OB*.

III ЧАСТ: Скаларно произведение на два вектора

1 зад. Даден е триъгълник *ABC*, за който $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Дадени са точките *F* и *D*, съответно от страните *AB* и *CB* на триъгълника, такива че: *AF*:*FB* = 1:3 и *CD*:*DB* = 1:3.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{AD}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
b) Да се намерят дължините на векторите $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{AD}$;
c) Да се намери косинусът на ъгъла между векторите $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{AD}$.

2 зад. Даден е триъгълник *ABC*, за който $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \gamma$. Медианите AA_1 и BB_1 на триъгълника са взаимно перпендикулярни. Да се определи *cos* γ.

Упътване: Да се изразят векторите $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и да се пресметне скаларното им произведение.

3 зад. Даден е триъгълник *ABC*, за който $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = \sqrt{2}, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$. Отсечката *CH* е височина в триъгълника, т.*H* ∈ *AB*. Да се изрази вектора $\overrightarrow{CH}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4 зад. Даден е тетраедър *OABC*, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Нека $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 1$ и трите вектора са два по два перпендикулярни. Построена е височината *OH* на тетраедъра, т.*H* ∈ (*ABC*) и $OH \perp (ABC)$. Да се изрази вектора $\overrightarrow{CH}$ чрез $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

5 зад. Спрямо ОКС *K = Oxy* са дадени точките: $A(2, -1), B(-1, 0)$ и $C(2, 3)$. Да се докаже, че трите точки образуват триъгълник. Да се намерят:

a) Координатите на медицентъра *M* на триъгълник *ABC* и разстоянието от т.*M* до върха *C*;
b) Координатите на петите на трите височини на триъгълника, спуснати от върховете *A*, *B* и *C*.

6 зад. Спрямо ОКС *K = Oxyz* са дадени точките: $A(1, -1, 2), B(2, 1, 1), C(1,1, 2)$ и $D(-3, 2, -1)$. Да се докаже, че четирите точки не лежат в една равнина. Да се намерят:

a) Да се намерят дължините на страните на триъгълник *ABC*;
b) Косинусите на ъглите на триъгълник *ABC*;
c) Координатите на медицентъра *G* на триъгълник ***ABD*** и дължината на вектора $\overrightarrow{CG}$;
d) Координатите на точката *H*: т.*H* ∈ (*ABC*) и $DH \perp (ABC)$.

IV ЧАСТ: Векторно и смесено произведение на вектори

1 зад. Спрямо ОКС *K = Oxyz* са дадени векторите $\vec{a}(1,0,2), \vec{b}(2,-1,3)$ и $\vec{c}(1,-1,0)$. Да се намерят координатите на неизвестния вектор $\vec{x}$ от уравненията: $(\vec{a}\vec{b}\vec{x}) = 1, (\vec{b}\vec{c}\vec{x}) = 2, (\vec{c}\vec{a}\vec{x}) = 0.$

2 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Да се определи неизвестния вектор $\vec{p}$ от равенствата : $(\vec{a}\vec{p}) = -18, (\vec{b}\vec{p}) = 12, (\vec{a}\vec{b}\vec{p}) = -12.$

3 зад. За кои стойности на параметъра $\lambda \in \mathbb{R}$ векторът $\vec{c}(\lambda-1, 2\lambda+1, -\lambda)$ е ортогонален на $\vec{a} \times \vec{b}$, където $\vec{a}(1,2,0)$ и $\vec{b}(1,-1,1)$.

4 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Нека $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ и

$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}, \sphericalangle(\vec{a},\vec{c}) = \frac{\pi}{3}, \sphericalangle(\vec{c},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}.$

a) Да се пресметне смесеното произведение $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ и да се докаже, че трите вектора са линейно независими;

b) Нека *OABC* е тетраедър като: $\overrightarrow{OA} = (\vec{c} + \vec{b})$, $\overrightarrow{OB} = (\vec{c} + \vec{a})$ и $\overrightarrow{OC} = (\vec{a} + \vec{b})$. Да се намери обема на тетраедъра *OABC*.

5 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Нека $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$. В триъгълника *OAB*

$\overrightarrow{OA} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$, а $\overrightarrow{OB} = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})$.

a) Да се намерят периметъра и лицето на триъгълника;

b) Ако т.*M* е медицентърът на триъгълник *OAB*, да се изрази вектора $\overrightarrow{OM}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и да се пресметне дължината му.

6 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и *Δ ABC* с медиана *AM (M ∈ BC).* Ако $\overrightarrow{AB} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ и $|\overrightarrow{AM}| = \frac{\sqrt{13}}{4}$, намерете $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$.

7 зад. Ако *OA, OB, OC* са ръбове на паралелепипед и $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{a} \times \vec{b}, \overrightarrow{OC} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, докажете, че обемът на паралелепипеда е равен на $|(\vec{a}\vec{c})|(\vec{a} \times \vec{b})^2$.

8 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, като $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = (\vec{a} \times \vec{b})$, $\overrightarrow{OC} = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})$. Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ са линейно независими и да се намери обема на тетраедъра *OABC*.

9 зад. Спрямо ОКС *K = Oxyz* са дадени точките: $A(5,-2,1), B(1,1,-2), C(1,0,5)$ и $D(1,1,1)$.

a) Да се намери лицето на триъгълник *ABC*;

b) Да се намери обема на тетраедъра *ABCD*.

10 зад. Спрямо ОКС *К = Oxy* в равнината са дадени точките: $A(1,-1), B(-3,2), C(5,1)$. Да се намери лицето на триъгълник *ABC*.