ДСТР, лекция 1

Въведение в логиката. Съждителна и предикатна логика

Съждение (просто, ~~сложно~~ съставно), логически съюзи (операции), таблица на истинност, логически константи, приоритет на логическите съюзи, еквивалентност на съждения, тавтология, противоречие, условност, валюация, свойства на логическите съюзи. Предикати, квантор, отрицание.

1. Същност на логиката

Логиката е наука за правенето на валидни изводи и правилни разсъждения. Дали даден извод е валиден или не, зависи от формата му.

Пр. Всяка риба е безсмъртна.
Заекът е риба
Следователно заекът е безсмъртен.

→ и трите изр. са неверни, но според дадената предпоставка изводът е верен.

! Изводът е валиден заради формата си, а не заради истинността на изреченията. Можем да заменим изреченията съответно с други и изводът пак ще е верен заради формата.

1ви

(2) Съждителна логика

Ако вали дъжд, Иван носи чадър
Вали дъжд.
Следователно, Иван носи чадър

→ формата на този извод е:
Ако p, то q.
p
Следователно, q.

деф: p и q са променливи, които ~~приемат~~ са или истина, или лъжа. Наричаме ги логически променливи или прости съждения. Просто съждение е всяко съобщително изречение, което е или истина, или лъжа.

Бележим T-истина, F-лъжа.

деф: Логическите константи са T и F.

деф: Съставни съждения се образуват от прости съждения, други съставни съждения и логически константи с помощта на логически съюзи.

(2.1) Логически съюзи

1. Дизюнкция (disjunction, OR, „или") (включващо или)
   бележим: „V", $p \vee q$
   четем: „p или q"
   Таблица на истинност - всички възможни комбинации от T и F на участващите прости съждения и съответния резултат на съставното.
   Валюация - всяка една определена комбинация от T и F на простите съждения (променливите).

Дстр

Табл. на истин. на дизюнкцията

p	q	p ∨ q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

- F тогава и p и q са F

↳ за удобство във възходящ ред за таблица

2. Изключващо или (exclusive OR, „или—или—", XOR)

пишем: „$\oplus$"

четем: или p, или q

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Истина тогава точно едно от p и q е истина.

3. Конюнкция (conjunction, AND, „и")

пишем: „$\wedge$"

четем: p и q

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

4. Импликация (implication)

пишем: „→", $p \to q$

четем: ако p, то q

p - антецедент

q - консеквент

p	q	$p \to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Има специфика защо се дефинира по този начин (лекция 1 за обяснение).

Импликацията НЕ Е причинно-следствена връзка в логиката

Пр. Ако 2+2=4, то България е държава. - вярна имплик.

Tip: можем да мислим импликацията за обещание, в което ако p е грешно приемаме, че обещанието все пак е изпълнено.

$\underbrace{p}_{\text{достатъчно условие}} \to \underbrace{q}_{\text{необходимо условие}}$, ако p, то със сигурност q. Може q, но не е задължително p.

5. Би-импликация

пишем: $\leftrightarrow$, $p \leftrightarrow q$

четем: p тогава и само тогава когато q (ТСТТ ~~ТСТК~~)

p if and only if q

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

6. Отрицание (негация) – унарна операция

Други имена: $\neg$, $\neg p$

p	$\neg p$
F	T
T	F

2.2 Таблица на истинност на съставни съждения

Пример: $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – имаме 3 прости съждения тук p, q, r
значи редовете са ни $2^3 = 8$

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	T	T	T	T	T

И така поред си ги построяваме и „изчисляваме".
Проблемът с таблиците е, че стават много големи, много бързо
2^n, n – променливи, 2^n – реда

2.3 Приоритет на логическите операции. (от „най-силно" към „най-слабо")

1. Отрицание $\neg$
2. Конюнкция $\wedge$
3. Дизюнкция $\vee$
4. Импликация $\rightarrow$
5. Биимпликация $\leftrightarrow$

Пр. $\neg p \wedge \neg q \vee r \rightarrow p \vee r \leftrightarrow \neg r \rightarrow p$

$$((((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee r) \rightarrow (p \vee r)) \leftrightarrow ((\neg r) \rightarrow p)$$

(2.4) Еквивалентност на съставни съждения.

<u>Деф:</u> <u>Тавтология</u> – съставно съждение, чиято стойност е T за всяка валюация на простите му съждения

<u>Деф.</u> <u>Противоречие</u> – съставно съжд., чиято стойност е F за всяка валюация на пр. му съжд.

<u>Деф:</u> <u>Условност</u> – съставно съжд., чиято стойност е T за поне една валюация и F за поне една валюация.

<u>Пр.</u> <u>Тавтология</u>: $p \vee \neg p$

Противоречие: $p \wedge \neg p$

!!!

<u>Деф:</u> За всеки две съставни съждения s и t казваме, че s и t са еквивалентни, тогава и само тогава, когато съждението $s \leftrightarrow t$ е тавтология. Бележим $s \equiv t$.

<u>Заб.</u> "$\equiv$" не е логически съюз, т.е. $s \equiv t$ НЕ Е съставно съждение на s и t

Горното определение не е същото, като просто сравняване на колоните от T и F, защото $p \equiv p \wedge (p \vee q)$.
p има 2 реда, а другото 4.

Не ползваме "$=$" вместо "$\equiv$". Може да ползваме равно, ако съжденията са <u>синтактично</u> едни и същи: (

$(p \to q) \wedge p = (p \to q) \wedge p$

"$\equiv$" – семантично (смислово) еднакви

$(p \to q) \wedge p \equiv p \wedge q$

 – трябва на изпит!

!!! Теорема 1 Нека p, q и r са произволни съждения. Следните еквивалентности са в сила:

1. Свойство на константите:

$$p \wedge T \equiv p, \quad p \vee F \equiv p, \quad p \vee T \equiv T, \quad p \wedge F \equiv F$$

2. Свойство на отрицанието:

$$p \wedge \neg p \equiv F, \quad p \vee \neg p \equiv T$$

3. Идемпотентност:

$$p \vee p \equiv p, \quad p \wedge p \equiv p$$

4. Закон за двойното отрицание:

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

5. Комутативност (импликацията не е)

$$p \vee q \equiv q \vee p, \quad p \wedge q \equiv q \wedge p, \quad p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$$

6. Асоциативност: $\vee, \wedge, \leftrightarrow$

$$\cancel{(p \wedge q) \vee r} \equiv (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

7. Дистрибутивност:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$ – дистр. на $\vee$ относно $\wedge$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$ – дистр. на $\wedge$ отн. $\vee$

8. Закони на Де Морган:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q, \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Обобщени:

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \equiv \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \dots \vee \neg p_n$$

$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \dots \wedge \neg p_n$$

9. Другите свойства са на стр. 7.1

9. Закон за поглъщането:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p \ , \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

10. Свойство на импликацията:

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

11. Свойство на би-импликацията:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

Доказване на еквивалентности чрез еквивалентни преобразувания.

Пишем първо израза, после закона (свойството), което сме ползвали и така до края!

Пр. Док, че $(p \to q) \vee (q \to r) \equiv T$

$(p \to q) \vee (q \to r) \equiv$ (с-во на импликацията)

$(\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee r) \equiv$ (асоц. на дизюнкцията)

$\neg p \vee q \vee \neg q \vee r \equiv$ (комут. на дизюнкцията)

$\neg q \vee q \vee \neg p \vee r \equiv$ (асоц. на дизюнкцията)

$(\neg q \vee q) \vee (\neg p \vee r) \equiv$ (с-во на отрицанието)

$T \vee (\neg p \vee r) \equiv$ (с-во на константите)

T

Предикатна логика

Деф: Едноместен предикат - изречение, в което има "празно място", в което празно място се слага елемент от предварително определено ~~дефиниционно~~ м-во (наречено дефиниционно м-во). Изречението става съждение, когато сложим елемент на празното място. За всеки елемент от дефиниционното м-во, предикатът е или истина или лъжа.

Бележим с главни латински букви: $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$.

Квантори

$\exists$ - екзистенциалния квантор (четем "съществува").

$\forall$ - универсалния квантор (четем "за всяко").

Нека $P(x)$ е предикат.

- $\exists_x P(x)$ е съждение и е ~~вярно~~ истина, т.с.т.к. съществува x от дефиниционного м-во, такова че $P(x)$ е истина
- $\forall_x P(x)$ е съждение и е истина, т.с.т.к. за всяко x от дефиниционното м-во, $P(x)$ е истина.

Ако дефиниционното м-во е крайно $A = \{a_1 \dots a_n\}$, то:

- $\exists_x P(x)$ е еквивалентно на съждението $P(a_1) \vee \dots \vee P(a_n)$.
- $\forall_x P(x)$ е екв. на $P(a_1) \wedge \dots \wedge P(a_n)$.

С-ва на отрицанието в предикатната логика:

1. $\neg \exists_x P(x) \equiv \forall_x \neg P(x)$
2. $\neg \forall_x P(x) \equiv \exists_x \neg P(x)$

Тв. 1. $\forall_x (P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge \dots \wedge P_n(x)) \equiv \forall_x P_1(x) \wedge \dots \wedge \forall_x P_n(x)$

2. $\exists_x (P_1(x) \vee \dots \vee P_n(x)) \equiv \exists_x P_1(x) \vee \dots \vee \exists_x P_n(x)$

Заб. Може да се каже, че $\forall$ дистрибутира относно $\wedge$, а $\exists$ дистрибутира относно $\vee$.