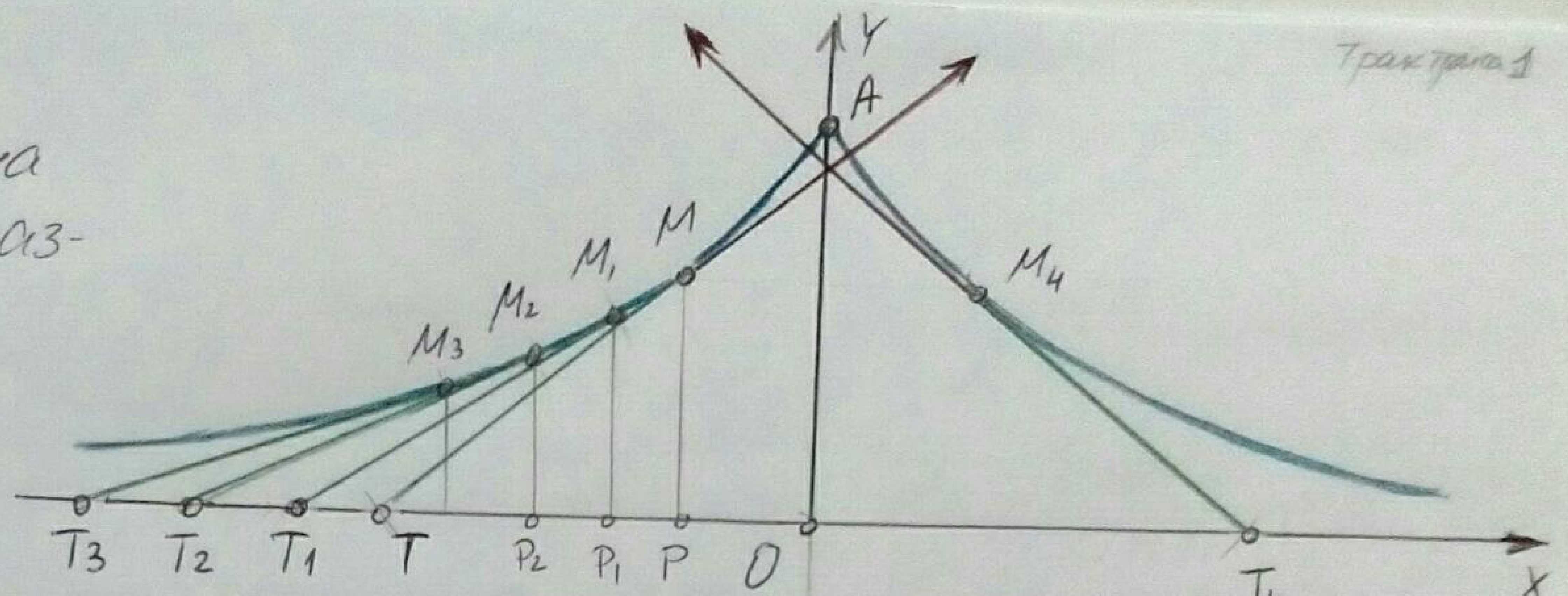
Трактриса



В равнина към материална точка M е прикрепена неразтеглива нишка MT. Краят T на тази нишка се движи по права OT в същата равнина.

Тогава т. M описва крива, която се нарича трактриса.

Геометрично, трактриса може да дефинираме като крива, за която отсечката от допирателната и скрайща допирната точка до някоя права (ос) има постоянна дължина a

Ако $|MT| = |M_1T_1| = |M_2T_2| = \dots = \lambda a$ $(\lambda < 1)$, то ординатите на точките $|MP_1|$, $|MP_2|$... образуват геометрична прогресия $|M_iP_i| = (1-\lambda)|MP|$, така че оста на трактрисата се явява нейна асимптота.

Точката A – най-високата точка на трактрисата е на разстояние **a** от ~ се нар. връх на трактрисата. Аналогично – симетричен клон – AM_4 – обща допирателна AO, така че преминавайки през A посоката на движение по трактрисата си сменя знака, т.е точката A е точка на обръщане от I-ви род.

За параметричните у-ния на трактрисата имаме:

Избираме оста на трактрисата за абсциса, а ордината – OA
За параметър – ъгъл $u = \angle XTM$ между Ox^+ и полож-та посока на допирателната – $\overrightarrow{TM}$

=> $PM = y = a\sin u$ (1), за TP имаме $y\frac{dx}{dy}$ => $y\frac{dx}{dy} = a\cos u$ (3)
$TP = a\cos u$ (2)

=> от (1) и от $y = a\sin u$, $dy = a\cos u\, du$ => $dx = \frac{a\cos^2 u}{\sin u}\, du$ (4)

При така направения избор на коорд. с-ма на $x = 0$ съответства $u = \frac{\pi}{2}$ =>

$$x = a\int_{\frac{\pi}{2}}^{u} \frac{\cos^2 u}{\sin u}\, du = a\int_{\frac{\pi}{2}}^{u} \frac{(1-\sin^2 u)\, du}{\sin u} = a\left(\ln tg\frac{u}{2} + \cos u\right).$$

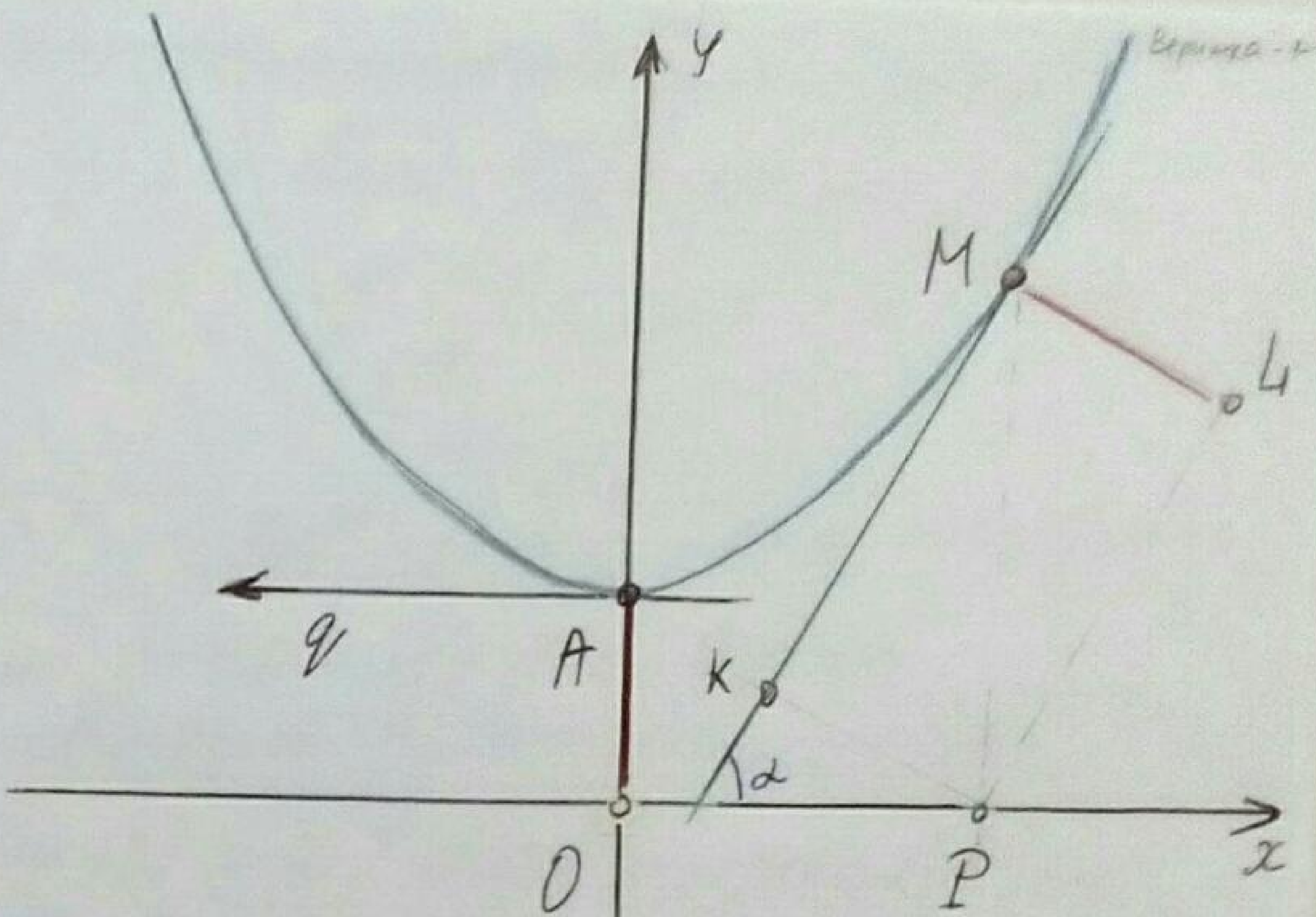
Следователно параметричните у-ния на трактрисата имат вида

$$\begin{cases} x = a\left(\ln tg\frac{u}{2} + \cos u\right) \\ y = a\sin u \end{cases}$$

. В т. А производните $\frac{dx}{du} = \frac{a\cos^2 u}{\sin u}$, $\frac{dy}{du} = a\cos u$ стават 0 в т. А, т.е. при $u = \frac{\pi}{2}$.
Следователно през върха на трактрисата т-та M минава със скорост нула, което се обяснява от това, че върхът A е точка на обръщане.
Ако от (5) се изключи u, може, но ... -> у-ние, което ... непригодно за практ. цели

Ако завъртим трактрисата около оста ѝ ⟶ Псевдосфера ... по-късно.

Верижка – Това е кривата линия, която се получава при провесването на хомогенна нишка (синджирче) от двата му края.



? Уравнение – през най-ниската т-ка A вертикалът – за Oy. O – избираме – целесъобразно $O \neq A$, по-ниско от A. (може да се избере по-късно)

Нека M е произв. т-ка от верижката.

Тогава дъгата $\breve{AM} = s$ е в равновесие под д-вието на следните сили 1.) тежестта на верижката ms, където m е теглото на единица д-на на верижката; 2) опъването q, което изпитва нишката в началото на дъгата A, тази сила q е хоризонтална, а стойността ѝ зависи от както от дължината на нишката, така и от разполагането на т-те от които се провесва; 3) опъването p в т. M; силата е по допирателната към верижката.

Що се отнася до силите на опъване, действащи в други т-ки от $\breve{AM}$, то можем да не ги разглеждаме по простата причина, че във всяка т-ка действащите сили взаимно се уравновесяват. Силата p разлагаме по вертикална и хоризонтална посоки. Хоризонталната – $p\cos\alpha$ или $p\dfrac{dx}{dy}$, вертикалната е $p\sin\alpha = p\dfrac{dy}{ds}$.

Верижка -2-

Тъй като $\overline{AM}$ е в равновесие, то хоризонталната компонента трябва да се унищожи от силата q, а вертикалната – от силата ms, така че $p\frac{dx}{ds} = q$, (1); $p\frac{dy}{ds} = ms$ (2).

От (1) изключваме $p \Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a}$, (3) – тук $a = \frac{q}{m}$, т.е. дължината на верижката, чиято тежест е равна на опъването във върха.

В у-нието (3) величините s, x, y са свързани с отношението

$ds^2 = dx^2 + dy^2$, (4) като изключим от (3) и (4) dx, получаваме

$$ds^2 = \frac{(a^2+s^2)\,dy^2}{s^2} \quad (4'), \qquad \frac{s\,ds}{\sqrt{a^2+s^2}} = dy, \quad y = \sqrt{a^2+s^2} + C.$$

Сега, като положим $C = 0$ ще фиксираме избора на начало на координатната с-ма. По точно, от у-нието $y = \sqrt{a^2+s^2}$ (5) получаваме, че върхът A (тук $s=0$) има ордината a, т.е. за абсциса вземаме правата на разстояние a от върха надолу и тази права се нар. директриса на верижката.

От (5) получаваме изразяване на дъгата на верижката чрез ординатата ѝ $s = \sqrt{y^2-a^2}$. (6)

От (3) получаваме $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2-a^2}}{a}$.

Scanned by TapScanner

Като интегрираме (при началните у-вия по-горе - в т. А $x=0$, $y=a$), [illegible] получаваме

$$\frac{x}{a} = \int_0^{u} \frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}} = \operatorname{Arch}\frac{y}{a},$$

т.е. у-нието на верижката е:

$$\frac{y}{a} = \operatorname{ch}\frac{x}{a} = \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}. \quad (7)$$

Верижката има следните забележителни свойства.

1.) Проекцията ML на ординатата върху нормалата е константа равна на AO.

Имаме $ML = y\cos\alpha = y\dfrac{dx}{ds}$, от $ds = a\operatorname{sh}\dfrac{x}{a} = a\dfrac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}$ в (7) =>

$$ds = \operatorname{ch}\frac{x}{a}dx = \frac{y}{a}dx \Rightarrow ML = \frac{y\,dx}{\frac{y}{a}dx} = a$$

2.) Проекцията MK на ординатата върху допирателната е точно д-ната на дъгата - вж. ΔMPK и $y=\sqrt{a^2+s^2}$ (5) =>

$|MK|^2 = |MP|^2 - |ML|^2 = y^2 - a^2 = s^2$. Следователно лесно намираме д-на от дъгата на верижката.

При завъртането си около директрисата си от верижката получаваме така наречената повърхнина Катеноид.

Верижката и трактрисата са съответно еволюта и еволвента.