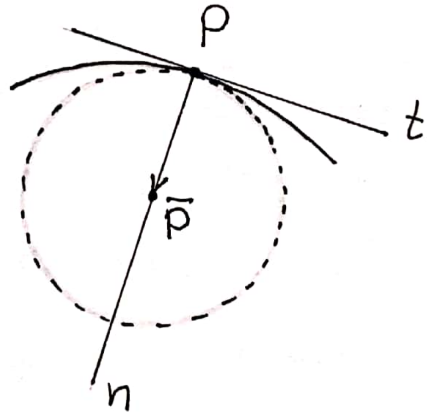
Оскулачна окръжност

$c : \vec{x} = \vec{x}(s)$, $\vec{x} \in C^3(J)$ е правилна крива
$\varkappa(s) \neq 0$ за $\forall s \in J$

* т. $\bar{P} \in n$: $\overrightarrow{P\bar{P}} = \frac{1}{\varkappa} \cdot \vec{n}$
* окръжност $\boxed{k\left(\bar{P}; \bar{R} = \frac{1}{\varkappa}\right)}$

се нарича оскулачна окръжност в т. P от c;
* т. $\bar{P}$ – център на кривина;
* $\boxed{\bar{R} = \frac{1}{\varkappa}}$ – радиус на кривина;



* линията c и оск. окр. k имат обща допирателна t в общата си точка P;
* В околност на т. P дъга от линията c може да се счита за дъга от окръж. k;
* Оскулачната окръжност лежи изцяло в оскулачната равнина в т. P на линията c;
* Геометричното място на центровете на кривина

$\overrightarrow{O\bar{P}} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{\varkappa} \cdot \vec{n}$ => т. $\bar{P}$ описва линия $\bar{c}$:

$\bar{c} : \bar{x}(s) = x(s) + \frac{1}{\varkappa} \cdot \vec{n}$

Естествени уравнения

$C: \vec{x} = \vec{x}(s)$, $C^3(J)$, правилна

$$\boxed{\begin{cases} \varkappa = \varkappa(s) \\ \tau = \tau(s) \end{cases}}, \; s \in J$$ – естествени уравнения на C

Основна теорема в ДГ на линии:

Нека са дадени две функции $\varphi(s) \in C^1(J)$ и $\psi(s) \in C^0(J)$. Нека в т. $P_0 \in E^3$ е зададена положително ориентирана ортонормирана тройка в-ри $\{\vec{t}_0, \vec{n}_0, \vec{b}_0\}$. Тогава съществува единствена линия $C: \vec{x} = \vec{x}(s)$, $\vec{x} \in C^3(J)$, която минава през т. P_0 и има в тази точка триедър на Френе $P_0\vec{t}_0\vec{n}_0\vec{b}_0$. При това функциите $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ са съответно кривина и торзия в т. $P \in C$.

Пример:

$$C: \begin{cases} x^1 = \cos^3 q \\ x^2 = \sin^3 q \\ x^3 = \cos 2q \end{cases} \quad q \in (0; \tfrac{\pi}{2})$$

1) Естествени уравн.;

2) ГМ на центровете на кривина;

1) $s(q) = 5.\sin q . \cos q$

$$\varkappa(q) = \frac{3}{25.\sin q . \cos q}, \quad \tau = \frac{4}{25.\sin q . \cos q}$$

$$\boxed{\varkappa(s) = \frac{3}{5.s} \quad ; \quad \tau(s) = \frac{4}{5.s}}$$

2) $\bar{c} : \bar{x} = \vec{x}(q) + \frac{1}{\varkappa} . \vec{n}$

$\vec{n}(\sin q, \cos q, 0)$; $\varkappa = \dfrac{3}{25.\sin q . \cos q}$

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = \cos^3 q + \frac{25}{3} . \sin^2 q . \cos q \\ \bar{x}^2 = \sin^3 q + \frac{25}{3} . \sin q . \cos^2 q \\ \bar{x}^3 = \cos 2q \end{cases}$$

* * *

Обща винтова линия

Опр.: Една двукратно гладка правилна крива се нарича винтова линия, ако съществува постоянно направление, което сключва постоянен ъгъл с допирателните във всяка точка на линията.

$c : \vec{x} = \vec{x}(q)$, $\vec{x} \in C^2(J)$ – правилна

$\exists\ \vec{a}$ – постоянен : $\sphericalangle(\vec{t}(q) ; \vec{a}) = \alpha_1 = const.$

$(\vec{t} . \vec{a}) = |\vec{t}| . |\vec{a}| . \cos\alpha_1 = const. \Rightarrow$

$\Rightarrow c$ е винтова линия.

Основна задача: Нека $c: \vec{x} = \vec{x}(q)$, $\vec{x} \in C^5(J)$, правилна крива. Следните условия са еквивалентни:

1) Допирателните в произволна точка от c сключват постоянен ъгъл с постоянно направление:
$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{t}(q)) = \alpha_1 \Leftrightarrow (\vec{a}.\vec{t}(q)) = const.$;

2) Бинормалите в произволна точка от c сключват постоянен ъгъл с постоянно направл.
$\sphericalangle(\vec{a}; \vec{b}(q)) = \alpha_2 \Leftrightarrow (\vec{a}.\vec{b}(q)) = const.$; ||

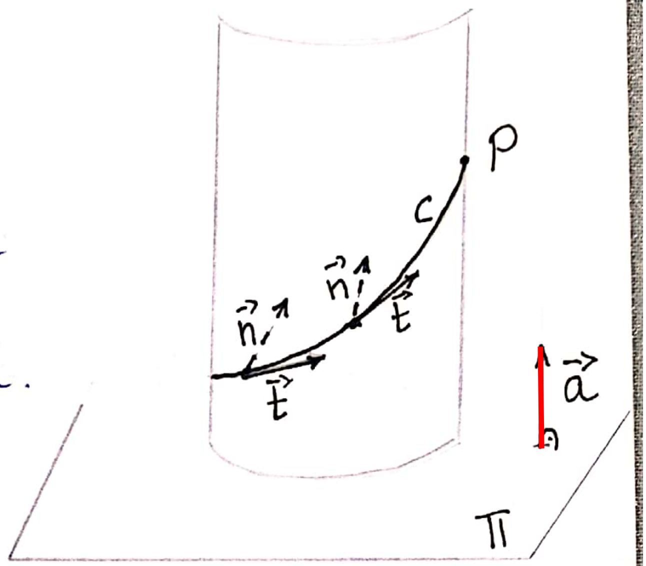
3) Главните нормали в произв. точка от c са компланарни с постоянна равнина:
$\exists$ постоянна равнина $\pi \perp \vec{a}$: $\vec{n}(q) \parallel \pi \Leftrightarrow$
$(\vec{a}.\vec{n}(q)) = 0$;

4) $\dfrac{\tau}{\varkappa} = const.$;

5) $(\vec{x}'' \; \vec{x}''' \; \vec{x}^{IV}) = 0$.

Геометрична интерпретация:

c е обща винтова линия, ако съществува цилиндрична повърхнина S, която изцяло я съдържа.



Постоянният вектор $\vec{a}$ задава направлението на образувателните на цилиндр. повърхнина S.

Ако S е прав кръгов цилиндър, то винтовата линия c е обикновена винтова линия. В този случай $\begin{cases} \varkappa = const. \neq 0 \\ \tau = const. \neq 0 \end{cases}$

Примери:

1) $\boxed{c_1 : \begin{cases} x^1 = a.\cos q \\ x^2 = a.\sin q \\ x^3 = d.q \end{cases}}, \quad q \in \mathbb{R}, \; a > 0 \implies \boxed{\begin{array}{l} \vec{t}\left(\dfrac{-a.\sin q}{\sqrt{a^2+d^2}}, \dfrac{a.\cos q}{\sqrt{a^2+d^2}}, \dfrac{d}{\sqrt{a^2+d^2}} \right) \\ \vec{a}\,(\; 0 \;,\; 0 \;,\; 1 \;) \end{array}}$

$$\Downarrow$$

$$(\vec{t}.\vec{a}) = \frac{d}{\sqrt{d^2+a^2}} = const.$$

$$(\vec{t},\vec{a}) = \cos\alpha_1$$

$$\vec{b}\left(\frac{d.\sin q}{\sqrt{a^2+d^2}}, \frac{-d.\cos q}{\sqrt{a^2+d^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}\right)$$

$$\vec{a}\left(0, 0, 1\right) \Rightarrow (\vec{b}.\vec{a}) = \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}$$

$$(\vec{b}.\vec{a}) = \cos\alpha_2$$

$$\vec{n}\left(-\cos q, -\sin q, 0\right)$$

$$\Rightarrow (\vec{n}.\vec{a}) = 0$$

$$\varkappa(q) = \frac{a}{a^2+d^2}, \quad \tau(q) = \frac{d}{a^2+d^2}$$

* * *

2)

$$C_2: \begin{cases} x^1 = ch\, q \\ x^2 = sh\, q, \quad q \in \mathbb{R} \\ x^3 = q \end{cases}$$

$$\varkappa(q) = \frac{1}{2.ch^2 q}$$

$$\tau(q) = \frac{1}{2.ch^2 q}$$

$$\vec{t}\left(\frac{sh q}{\sqrt{2}.ch q}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}.ch q}\right)$$

$$\frac{\tau}{\varkappa} = 1 = const.$$

$$\vec{b}\left(\frac{-sh q}{\sqrt{2}\, ch q}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}.ch q}\right)$$

$$\vec{n}\left(\frac{1}{ch q}, 0, \frac{-sh q}{ch q}\right)$$

$$\vec{a}\left(0, 1, 0\right)$$

$$(\vec{t}.\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(\vec{b}.\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(\vec{n}.\vec{a}) = 0$$

Уравнения на цилиндричната повърхнина S, която съдържа линията C_2

$$\ell \begin{cases} \ni \text{ т. } \underline{P(x^1, x^2, x^3)} \\ \parallel \vec{a}(0, 1, 0) \end{cases}$$

Нека т. $M(y^1, y^2, y^3)$ е произволна от S

$$S: \begin{cases} y^1 = ch\,q + 0.\lambda \\ y^2 = sh\,q + 1.\lambda \\ y^3 = q + 0.\lambda \end{cases}, \quad \boxed{\begin{matrix} q \in \mathbb{R} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{matrix}}$$

* * *

$$C_3: \begin{cases} x^1 = \cos^3 q \\ x^2 = \sin^3 q \\ x^3 = \cos 2q \end{cases}, \quad q \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vec{t}\left(-\frac{3}{5}\cos q, \frac{3}{5}.\sin q, -\frac{4}{5}\right)$$

$$\vec{b}\left(\frac{4}{5}.\cos q, -\frac{4}{5}.\sin q, -\frac{3}{5}\right)$$

$$\vec{n}(\sin q, \cos q, 0)$$

$$\vec{a}(0, 0, 1) \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{4}{25.\sin q.\cos q}$$

$$\varkappa = \frac{3}{25.\sin q.\cos q}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\tau}{\varkappa} = \frac{4}{3} = const.$$

$$(\vec{t}.\vec{a}) = -\frac{4}{5} = \cos\alpha_1$$

$$(\vec{b}.\vec{a}) = -\frac{3}{5} = \cos\alpha_2$$

$$(\vec{n}.\vec{a}) = 0$$

Уравнения на цилиндричната повърхнина S, която съдържа линията C_3:

$$S: \begin{cases} Y^1 = \cos^3 q + 0 \cdot \lambda \\ Y^2 = \sin^3 q + 0 \cdot \lambda \\ Y^3 = \cos 2q + 1 \cdot \lambda \end{cases}, \quad q \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \ \lambda \in \mathbb{R}$$

* * *

$$C_4: \begin{cases} x^1 = e^q \\ x^2 = e^{-q} \\ x^3 = \sqrt{2} \cdot q \end{cases}, q \in \mathbb{R}$$

$$\dot{\vec{x}}\left(e^q, -e^{-q}, \sqrt{2}\right) \Rightarrow \dot{s} = |\dot{\vec{x}}| = \sqrt{e^{2q} + e^{-2q} + 2} = e^q + e^{-q}$$

$$\ddot{\vec{x}}\left(e^q, e^{-q}, 0\right)$$

$$\dot{x} \times \ddot{x}\left(-\sqrt{2} \cdot e^{-q}, \sqrt{2} \cdot e^q, 2\right) \Rightarrow |\dot{x} \times \ddot{x}| = \sqrt{2} \cdot (e^q + e^{-q})$$

$$\dddot{x}\left(e^q, -e^{-q}, 0\right) \Rightarrow (\dot{x}\ \ddot{x}\ \dddot{x}) = -2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\vec{t}\left(\frac{e^q}{e^q + e^{-q}}, \frac{-e^{-q}}{e^q + e^{-q}}, \frac{\sqrt{2}}{e^q + e^{-q}}\right)$$

$$\vec{b}\left(\frac{-e^{-q}}{e^q + e^{-q}}, \frac{e^q}{e^q + e^{-q}}, \frac{\sqrt{2}}{e^q + e^{-q}}\right)$$

$$\vec{n}\left(\frac{-\sqrt{2}}{e^q + e^{-q}}, \frac{-\sqrt{2}}{e^q + e^{-q}}, \frac{e^q - e^{-q}}{e^q + e^{-q}}\right)$$

$$\vec{a}\left(\qquad \right)$$

$$\varkappa(q)=\frac{|\dot{x}\times\ddot{x}|}{\dot{s}^3}=\frac{\sqrt{2}.(e^q+e^{-q})}{(e^q+e^{-q})^3}=\frac{\sqrt{2}}{(e^q+e^{-q})^2}$$

$$\tau(q)=\frac{(\dot{x}\,\ddot{x}\,\dddot{x})}{|\dot{x}\times\ddot{x}|^2}=\frac{-2\sqrt{2}}{2(e^q+e^{-q})^2}=\frac{-\sqrt{2}}{(e^q+e^{-q})^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\tau}{\varkappa}=-1$$

$$S:\begin{cases} y^1=e^q+1.\lambda \\ y^2=e^{-q}-1.\lambda \\ y^3=\sqrt{2}.q+0.\lambda \end{cases},\ \begin{matrix}\lambda\in\mathbb{R}\\ q\in\mathbb{R}\end{matrix}$$

* * *

<u>Задача</u>: Дадено е семейство линии

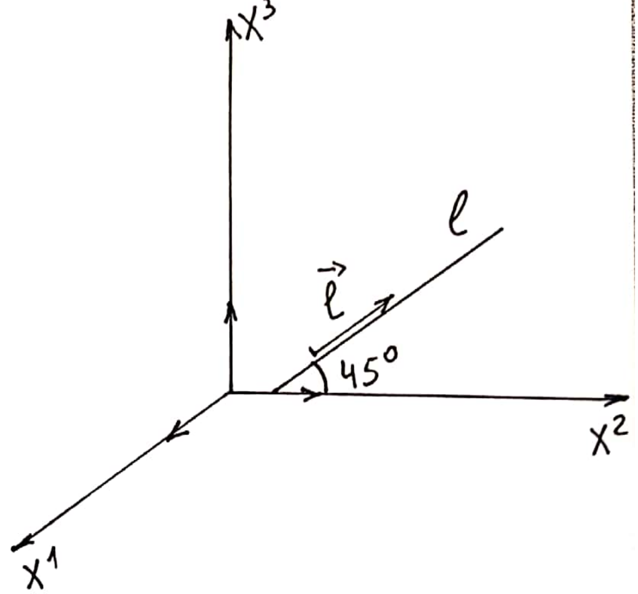
$$C_f:\begin{cases} x^1=\frac{1}{2}\cdot q^2 \\ x^2=f(q) \\ x^3=q \end{cases},\ \begin{matrix} q\in\mathbb{R} \\ f(q)\in C^3(\mathbb{R})\end{matrix}$$

Да се намерят скаларните и векторните инварианти на онази линия $c\in C_f$, за която са изпълнени условията:

- т. $O(0,0,0)\in c$
- c е винтова линия върху цилиндър S, чиито образуватели $\parallel \ell\ \begin{cases}\in Ox^2x^3\\ \measuredangle(\ell;Ox^2)=45^\circ\end{cases}$;
- $\measuredangle(\vec{t};\ell)=45^\circ$

Решение:

1) Определяме координатите на вектор $\vec{e}\begin{cases} \parallel \ell \\ |\vec{e}|=1 \end{cases}$



$\vec{e}(\cos\varphi_1, \cos\varphi_2, \cos\varphi_3)$:

$\varphi_1 = \angle(\vec{e}_1, \vec{e}) = 90°$

$\varphi_2 = \angle(\vec{e}_2, \vec{e}) = 45°$

$\varphi_3 = \angle(\vec{e}_3, \vec{e}) = 45°$ $\Rightarrow \vec{e}\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2) Определяме функцията $f(q)$

$f(0) = 0$ от т. $O(0,0,0) \in C$

$\vec{t} = ?$

$\dot{x}(q, \dot{f}, 1) = |\dot{x}| = \sqrt{q^2+\dot{f}^2+1} = A$

$\vec{t}\left(\frac{q}{A}, \frac{\dot{f}}{A}, \frac{1}{A}\right)$

$\angle(\vec{t}; \vec{e}) = 45° \Rightarrow (\vec{t}.\vec{e}) = |\vec{t}|.|\vec{e}|.\cos 45° = 1.1.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$(\vec{t}.\vec{e}) = 0.\frac{q}{A} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\dot{f}}{A} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{A}$

$\Rightarrow \frac{\dot{f}+1}{A} = 1$

$\dot{f}+1 = A$

$\dot{f}^2+2\dot{f}+1 = A^2 = q^2+\dot{f}^2+1 \Rightarrow \dot{f}(q) = \frac{q^2}{2}$

$$f(q) = \int_0^q \frac{\lambda^2}{2}\, d\lambda = \frac{\lambda^3}{6}\Big|_0^q = \frac{q^3}{6}$$

Окончателно уравненията на линията c са:

$$c: \begin{cases} x^1 = \frac{1}{2}\cdot q^2 \\ x^2 = \frac{1}{6}\cdot q^3, \quad q \in \mathbb{R} \\ x^3 = q \end{cases}$$

3) Самостоятелно $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}, \varkappa$ и τ

* * *

Задача: $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ ОКС е дадена линия γ:

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = e^q \cdot \cos q \\ x^2 = e^q \cdot \sin q, \quad q > 0 \\ x^3 = 0 \end{cases}$$

От всяка точка P на кривата γ по бинормалата в положителна посока е нанесена отс. $P\bar{P}$ с дължина $d = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\varkappa}$. Когато P описва γ, $\bar{P}$ описва линия $\bar{\gamma}$.

а) Да се намерят уравнения на линията $\bar{\gamma}$;

б) Да се намерят естествени уравнения на $\bar{\gamma}$ и да се докаже, че тя е обща винтова линия.

1 зад. Спрямо ОКС $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ в E_3 е дадена крива линия γ с уравнения:

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = e^q \cos q \\ x^2 = e^q \sin q\,, & q > 0. \\ x^3 = 0 \end{cases}$$

От всяка точка P на кривата γ по бинормалата в положителна посока е нанесена отсечка $P\bar{P}$ с дължина $d = \frac{1}{2\sqrt{2}\varkappa}$ ($\varkappa(q)$ е кривината в точка от γ). Когато P описва кривата γ, $\bar{P}$ описва крива $\bar{\gamma}$.

a) Да се намерят координатни параметрични уравнения на кривата $\bar{\gamma}$;
b) Да се намерят естествени уравнения на $\bar{\gamma}$ и да се докаже, че тя е обща витлова линия.

а)

$\dot{x}(e^q.(\cos q - \sin q), e^q.(\sin q + \cos q), 0)$

$|\dot{x}|^2 = e^{2q}.2, |\dot{x}| = \sqrt{2}e^q$

$$t = \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\left(\frac{\cos q - \sin q}{\sqrt{2}}, \frac{\sin q + \cos q}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\dot{t} = \left(\frac{-\sin q - \cos q}{\sqrt{2}}, \frac{\cos q - \sin q}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$t' = \frac{\dot{t}}{|\dot{x}|}\left(\frac{-\sin q - \cos q}{2e^q}, \frac{\cos q - \sin q}{2e^q}, 0\right)$$

$\varkappa = |t'| = \frac{1}{2e^q}.\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}e^q}$ $d = \frac{1}{2\sqrt{2}\varkappa} = \frac{e^q}{2}$

$b = (0,0,1)$ ЗАЩО?

$$\bar{\gamma}: \begin{cases} \bar{x}^1 = e^q \cos q \\ \bar{x}^2 = e^q \sin q & , q > 0 \\ \bar{x}^3 = \frac{e^q}{2} \end{cases}$$

б)

$\dot{\bar{x}}(e^q.(\cos q - \sin q), e^q.(\sin q + \cos q), \frac{e^q}{2})/:e^q.\left(\frac{3}{2}\right)$

$|\dot{\bar{x}}| = e^q.\left(\frac{3}{2}\right) = \dot{s}$

$\bar{t} = \left(\frac{2}{3}(\cos q - \sin q), \quad \frac{2}{3}.(\sin q + \cos q), \ \frac{1}{3}\right)$

$\dot{\bar{t}} = \left(\frac{2}{3}(-\sin q - \cos q), \frac{2}{3}.(\cos q - \sin q), \quad 0\right)/:e^q.\left(\frac{3}{2}\right)$

$\bar{t}' = \left(\frac{4}{9e^q}(-\sin q - \cos q), \frac{4}{9e^q}(\cos q - \sin q), 0\right)/:\frac{4\sqrt{2}}{9e^q}$

$\bar{\varkappa} = |\bar{t}'| = \frac{4\sqrt{2}}{9e^q}$

$\bar{t} = \left(\frac{2}{3}(\cos q - \sin q), \frac{2}{3}.(\sin q + \cos q), \frac{1}{3}\right)$

$$\bar{n} = \left(\frac{-\sin q - \cos q}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{\cos q - \sin q}{\sqrt{2}}, \qquad 0\right)$$

$$\bar{b} = \left(\frac{-\cos q + \sin q}{3\sqrt{2}}, \frac{-\sin q - \cos q}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$$

$$\dot{\bar{b}} = \left(\frac{\sin q + \cos q}{3\sqrt{2}}, \frac{-\cos q + \sin q}{3\sqrt{2}}, 0\right) /{:}e^{q}.\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\bar{n} = \left(\frac{-\sin q - \cos q}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{\cos q - \sin q}{\sqrt{2}}, \qquad 0\right)$$

$$\bar{b}' = \left(\frac{\sqrt{2}.(\sin q + \cos q)}{9.e^{q}}, \frac{\sqrt{2}.(-\cos q + \sin q)}{9.e^{q}}, 0\right)$$

$$\bar{b}'.\bar{n} = -\bar{\tau} = \frac{-2}{9.e^{q}}$$

$$e^{q}.\left(\frac{3}{2}\right) = \dot{s}\,, \quad s = e^{q}.\left(\frac{3}{2}\right), \quad e^{q} = \frac{2.s}{3}$$

Естествени уравнения на линията $\bar{\gamma}$

$$\bar{\tau} = \frac{2}{9.e^{q}} = \frac{1}{3.s}$$

$$\bar{\varkappa} = |\bar{t}'| = \frac{4\sqrt{2}}{9e^{q}} = \frac{2\sqrt{2}}{3s}$$

$$\frac{\bar{\tau}}{\bar{\varkappa}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$