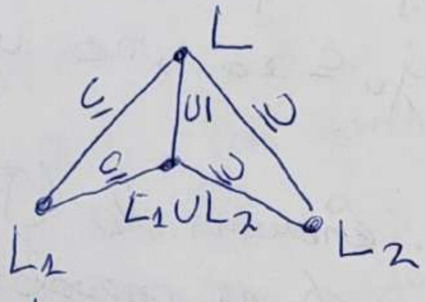
$\boxed{\text{Упражнение III}}$

2) $\{(L_1, L_2, L_3) \mid L_1 \cup L_2 = L_3\}$:

За всяко $L_1, L_2 \in \mathcal{P}(\{1..9\}^*)$ имаме, че $L_1 \cup L_2$ е най-малкото по включване мн-во, което съдържа L_1 и L_2.



Първо, дефинираме операцията "$\subseteq$" в нашия "свят". Нека

$$\varphi_{\subseteq}(x, y) \Longleftrightarrow cup(x, y) \stackrel{\circ}{=} x$$

Дефинираме следния помощен предикат

$$\varphi_{greater}(x, y, z) \Longleftrightarrow \varphi_{\subseteq}(x, z) \,\&\, \varphi_{\subseteq}(y, z)$$

За да дефинираме "$\cup$" ще използваме следната идея. Ако $L_1 \subseteq L$, $L_2 \subseteq L$ и $L_1 \cup L_2 = L_3$, то $L_3 \subseteq L$.

$$\varphi_{\cup}(x, y, z) \Longleftrightarrow \varphi_{greater}(x, y, z) \,\&\, \forall z' (\varphi_{greater}(x, y, z') \Longrightarrow \varphi_{\subseteq}(z, z'))$$

в света.

3) Първо ще определим <u>синглетоните</u>

x е синглетон $\Longleftrightarrow x = \{a\}$ за $a \in \{1\text{-}9\}^*$

Имаме, че

$(\mathcal{P}(\Sigma^*), \subseteq)$ е частична наредба

$(\mathcal{P}(\Sigma^*) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$ е частична наредба.

Тогава

x е синглетон $\Longleftrightarrow x$ е минимален елемент в $(\mathcal{P}(\Sigma^*) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$

Тоест x е синглетон $\Longleftrightarrow x \in \mathcal{P}(\Sigma^*) \setminus \{\emptyset\}$ &
$\forall y (y \in \mathcal{P}(\Sigma^*) \setminus \{\emptyset\} \,\&\, y \subseteq x \Longrightarrow x = y)$

Така получаваме

$$\varphi_{singleton}(x) \rightleftharpoons \neg\varphi_{\emptyset}(x) \,\&\, \forall y (\neg\varphi_{\emptyset}(y) \,\&\, \varphi_{\subseteq}(y, x) \Longrightarrow x \doteq y)$$

Ако $x_0 = \{a\}$ и $y_0 \neq \emptyset$ и $y_0 \subseteq x_0$, то $y_0 = \{a\}$, откъдето $y_0 = x_0$.

Нека сега x е мин. елемент в $(\mathcal{P}(\Sigma^*) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$

~~Да допуснем, че~~ Тогава $x \neq \emptyset$ и следователно има $a \in x$. Да допуснем, че има $b \neq a$ и $b \in x$. Тогава $\{a\} \subsetneq \{a, b\} \subseteq x$, което е абсурд.

Разглеждаме мн-вото от всички синглетони от $\mathcal{P}(\Sigma^*)$, тоест нека

$$Singleton = \{L \in \mathcal{P}(\Sigma^*) \mid L = \{\omega\}, \omega \in \Sigma^*\}$$

Тогава $(Singleton, \preceq_{pref})$ е частична наредба, тоест $x \preceq_{pref} y \longleftrightarrow \exists z (x \circ z = y)$, откъдето

$$\varphi_{\preceq}(x, y) \rightleftharpoons \exists z (cat(x, z) \doteq y)$$

Тогава $(Singleton \setminus \{\{\varepsilon\}\}, \preceq_{pref})$ също е частична наредба.

x е синглетон от еднобуквена дума $\longleftrightarrow$ x е минимален ел. в $(Singleton \setminus \{\{\varepsilon\}\}, \preceq_{pref})$

Тоест

x е –||– $\longleftrightarrow x \in Singleton \setminus \{\{\varepsilon\}\}$ &
$\forall y (y \in Singleton \setminus \{\{\varepsilon\}\} \,\&\, y \preceq_{pref} x \Longrightarrow x = y)$

Така получаваме формулата

$\varphi_{\{a\}}(x) \Leftrightarrow \varphi_{singleton}(x) \& \neg\varphi_{\varepsilon}(x) \&$
$\forall y(\varphi_{singleton}(y) \& \neg\varphi_{\varepsilon}(y) \& \varphi_{\preceq}(y, x) \Rightarrow x \doteq y)$.

Ако $x_0 = \{a\}$, $a \in \{1..9\}$ и $y_0 \preceq x_0$, $y_0 \neq \{\varepsilon\}$, то $y_0 = \{a\}$, откъдето $y_0 = x_0$.

Нека сега x_0 е минимален елемент в $(Singleton \setminus \{\{\varepsilon\}\}, \preceq)$. Тогава $x_0 \neq \{\varepsilon\}$ и има $w \in x_0$, $|w| \geq 1$. Да допуснем, че $|w| > 1$. Тогава $w = aw'$ за $a \in \{1-9\}$ и $|w'| \geq 1$. Така $\{a\} \preceq_{pref} \{aw'\} = x_0$, което противоречи с минималността на x_0.

4) $\{(L_1, L_2) \mid L_2 = L^*\}$

Имаме, че $L^0 = \{\varepsilon\}$, $L^{n+1} = L \circ L^n$, $L^* \stackrel{def}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$.

Оттук $L^* = \{\varepsilon\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n = \{\varepsilon\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} L^{n+1} =$

$= \{\varepsilon\} \cup L \circ L^*$.

Така получаваме, че ако $\tilde{L} = L^*$, то $\tilde{L} = \{\varepsilon\} \cup L \circ \tilde{L}$

$\varphi_{condition}(L, \tilde{L}) \Leftrightarrow \exists z(\varphi_{\varepsilon}(z) \&$
$\varphi_{\cup}(z, cat(L, \tilde{L}), \tilde{L}))$

Сега ще докажем, че ако $\tilde{L} = \{\varepsilon\} \cup L \circ \tilde{L}$, то $L^* \subseteq \tilde{L}$.

Индукция по $n \in \mathbb{N}$.

База: $L^0 = \{\varepsilon\} \subseteq \tilde{L}$

$n \to n+1$: нека $L^n \subseteq \tilde{L}$, тогава $L \circ L^n \subseteq L \circ \tilde{L}$, следователно $L^{n+1} \subseteq L \circ \tilde{L} \subseteq \tilde{L}$. Така получихме, че L^* е най-малкото такова мн-во. Тогава

$\varphi_{*}(L_1, L_2) \Leftrightarrow \varphi_{condition}(L_1, L_2) \&$
$\forall \tilde{L}(\varphi_{condition}(L_1, \tilde{L}) \Rightarrow \varphi_{\subseteq}(L_2, \tilde{L}))$

Метод на автоморфизмите

def

Нека $\mathcal{L}=(\mathcal{P},\mathcal{F},C,I)$ е език със структура $S=(U,P,F,K)$. Автоморфизъм за тази структура ще наричаме функция $h: U \to U$ за която:

1. h е биекция (пермутация на U);
2. $h(c^S)=c^S$ за вс. $c \in K$;
3. $p^S(a_1,\dots,a_n) \Longleftrightarrow p^S(h(a_1),\dots,h(a_n))$ за вс. $p \in \mathcal{P}$ и $a_1 \dots a_n \in U$;
4. $h(f^S(a_1,\dots,a_n)) = f^S(h(a_1),\dots,h(a_n))$ за вс. $f \in \mathcal{F}$ и $a_1 \dots a_n \in U$;

Теорема

Нека h е автоморфизъм за $\mathcal{L}=(\mathcal{P},\mathcal{F},C,I)$ и $S=(U,P,F,K)$. Тогава:

1) Нека τ е терм и $a_1,\dots,a_n \in U$. Тогава $h(\tau^S(a_1,\dots,a_n)) = \tau^S(h(a_1),\dots,h(a_n))$
2) Нека φ е пред. ф-ла и $a_1,\dots,a_n \in U$. Тогава $\varphi^S(a_1,\dots,a_n) \Longleftrightarrow \varphi^S(h(a_1),\dots,h(a_n))$
3) Нека M е определимо в S. Тогава $h[M]$ също е определимо в S.

Метод на автоморфизмите

1) Измисляте автоморфизъм $h: U \to U$
2) Допускаме, че дадено мн-во M е определимо, т.е. има ф-ла φ_M която го определя.
3) Показваме, че $\varphi_M(x) \longleftrightarrow \varphi_M(h(x))$ не е в сила.

Нека $h': \Sigma \to \Sigma$ е произволна пермутация на буквите в Σ. Тогава нека

$h'': \Sigma^* \to \Sigma^*$, $h''(a_1 \dots a_n) = h'(a_1)\dots h'(a_n)$

където $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$, т.е. $a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$. Нека сега

$h: \mathcal{P}(\Sigma^*) \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$, където

$h(L) = \{h''(w) \mid w \in L\}$ за вс. $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$

Автоморфизъм за $S = (\mathcal{P}(\Sigma^*), cat^S, cup^S; \overset{\circ}{=})$ ли е h?

0) h'' е биекция (докажете го сами).

1) Биекция ли е h?

Нека $L_1, L_2 \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$ и $L_1 \neq L_2$, тогава

$h(L_1) = \{h''(w) \mid w \in L_1\} \neq \{h''(w) \mid w \in L_2\} = h(L_2)$

Нека $L_0 \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$, тогава $\{h''^{-1}(w) \mid w \in L_0\} \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$ и имаме, че

$h^{-1}(L_0) = \{h''^{-1}(w) \mid w \in L_0\} =$

$h(h^{-1}(L_0)) = \{h''(h''^{-1}(w)) \mid h''^{-1}(w) \in h^{-1}(L_0)\} =$

$= \{w \mid w \in L_0\} = L_0$

2) Запазва ли $\overset{\circ}{=}$?

Нека $L_1, L_2 \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$ и $L_1 = L_2$, тогава имаме, че

$h(L_1) = \{h''(w) \mid w \in L_1\} = \{h''(w) \mid w \in L_2\} = h(L_2)$

3) Запазва ли функциите?

Нека $L_1, L_2 \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$ са произволни. Тогава

$h(cat^S(L_1, L_2)) = h(L_1 \circ L_2) = h(\{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \text{ и } w_2 \in L_2\})$

$= \{h''(w_1 w_2) \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\} = \{h''(w_1) h(w_2) \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$

$= \{h''(w_1) \mid w_1 \in L_1\} \circ \{h''(w_2) \mid w_2 \in L_2\} = h(L_1) \circ h(L_2) =$

$= cat^S(h(L_1), h(L_2))$

$h(\mathrm{cup}^s(L_1, L_2)) = h(L_1 \cap L_2) = h(\{w \mid w \in L_1 \text{ и } w \in L_2\})$
$= \{h''(w) \mid w \in L_1 \text{ и } w \in L_2\} = h(L_1) \cap h(L_2) =$
$= \mathrm{cup}^s(h(L_1), h(L_2))$.

От 0) ÷ 4) следва, че $\underset{z}{h}$ е автоморфизъм за $\mathcal{S}$.