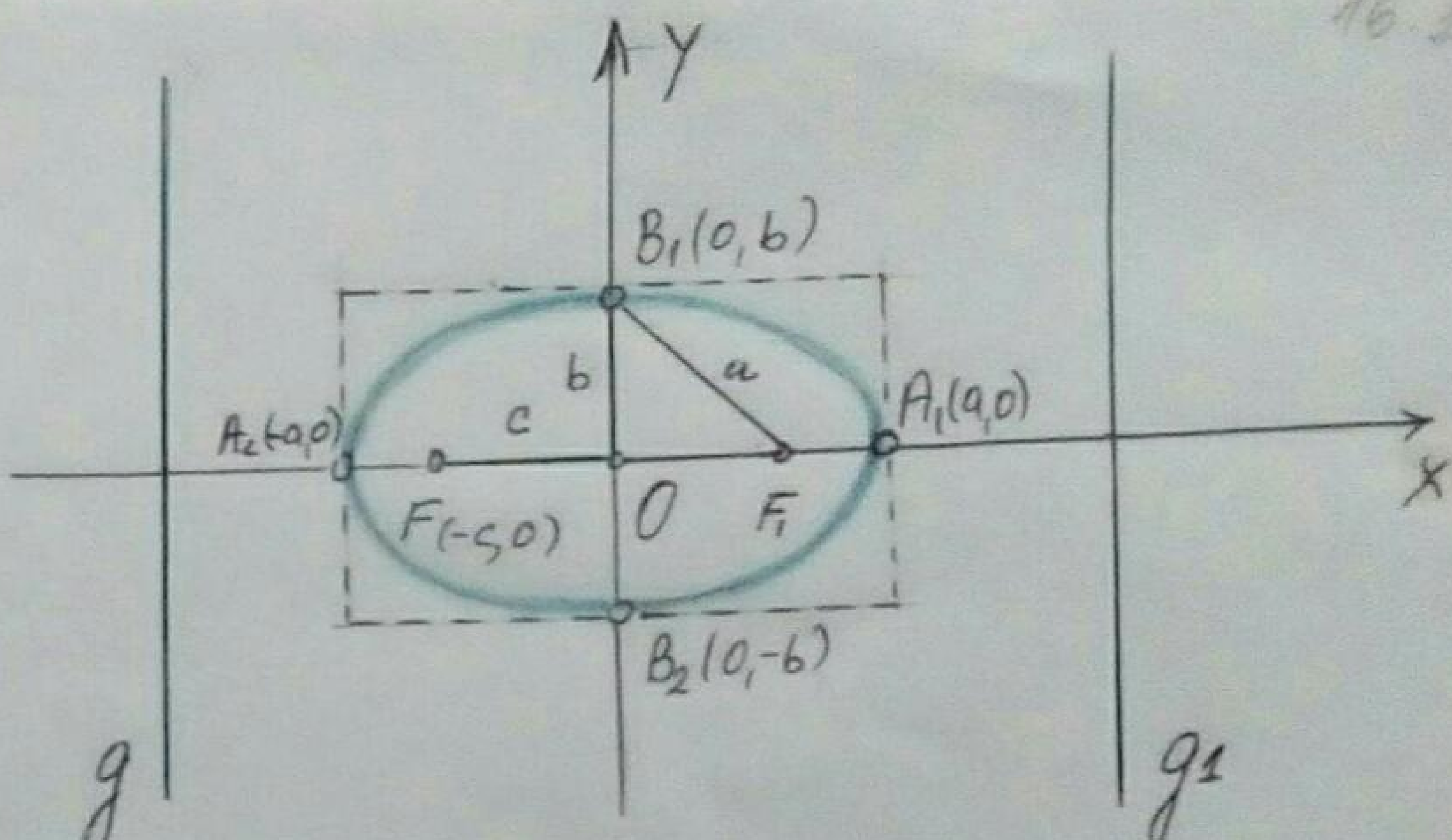
16. Елипса. Хипербола.



Елипса Нека $\mathcal{E}$ е елипса с канонично уравнение

$$(8)\quad \mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Спрямо K фокусът F е с координати $F\left(-\frac{pe^2}{1-e^2}, 0\right)$, а директрисата g – с уравнение $g: x = -\frac{p}{1-e^2}$. Ако положим $c = \frac{pe^2}{1-e^2}$, то $e = \frac{c}{a}$, $c^2 = a^2 - b^2$, $F(-c, 0)$ и $g: x = -\frac{a^2}{c}$.

От (8) се вижда, че $\mathcal{E}$ е разположена симетрично спрямо координатните оси Ox, Oy и началото O. Имаме, че ако точката $M(x,y)$ е от $\mathcal{E}$, то $M_1(x,-y)$, $M_2(-x,y)$ и $M_3(-x,-y)$ също са от $\mathcal{E}$.

Елипсата пресича координатните оси в точките $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$ и $B_2(0,-b)$, които се наричат върхове на елипсата. Отсечката (A_1A_2) с дължина $2a$ се нарича голяма ос на елипсата, а отсечката (B_1B_2) с дължина $2b$ – малка ос,

O се нарича център на елипсата. Отсечките (OA_1) и (OA_2) наричаме големи полуоси, а (OB_1) и (OB_2) – малки полуоси на елипсата.

Нека сега точката $F_1(c,0)$ и $g_1: x = \frac{a^2}{c}$ са съответно симетричните на F и g спрямо оста Oy.

Ако $M \in \mathcal{E}$, то $M\left(x, \eta \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)$, $\eta = \pm 1$. За разстоянието между M и F_1 имаме

$$|MF_1| = \sqrt{(c-x)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)} = \frac{1}{a}|cx-a^2|.$$

(използваме, че $b^2 = a^2 - c^2$).

За разстоянието на M до g_1 имаме $|M, g_1| = \frac{1}{c}|cx - a^2|$.

(уравнението на g_1: $x - \frac{a^2}{c} = 0$ е нормално уравнение).

Следователно $\frac{|MF_1|}{|M,g_1|} = \frac{c}{a} = e$, т.е. F_1 и g_1 са също съответно фокус и директриса на елипсата.

При симетриите относно Ox и O не се получават нови фокуси и директриси.

Нека M е произволна точка от $\mathcal{E}$, $M(x,y)$. Тогава

$$x = \xi \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}\,,\ \xi = \pm 1\,,\ y = \eta \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,.$$

Следователно точките от елипсата се получават за

$$-a \le x \le a \quad \text{и} \quad -b \le y \le b\,.$$

и за разстоянието между M и F_1 имаме

$$|MF_1| = \left|\frac{c}{a}x - a\right| = |ex - a| = a - ex \text{ (имаме } e<1\text{)} \text{ и } |MF| = a + ex.$$

и (11) $|MF| + |MF_1| = 2a$.

Обратно, от (11), т.е. от $\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$ след двукратно повдигане на квадрат и заместване на c^2 с $a^2 - b^2$ се получава каноничното уравнение на елипсата-(8). Така че свойството (11) известно като фокално свойство е характеризиращо елипсата; т.е доказахме следната

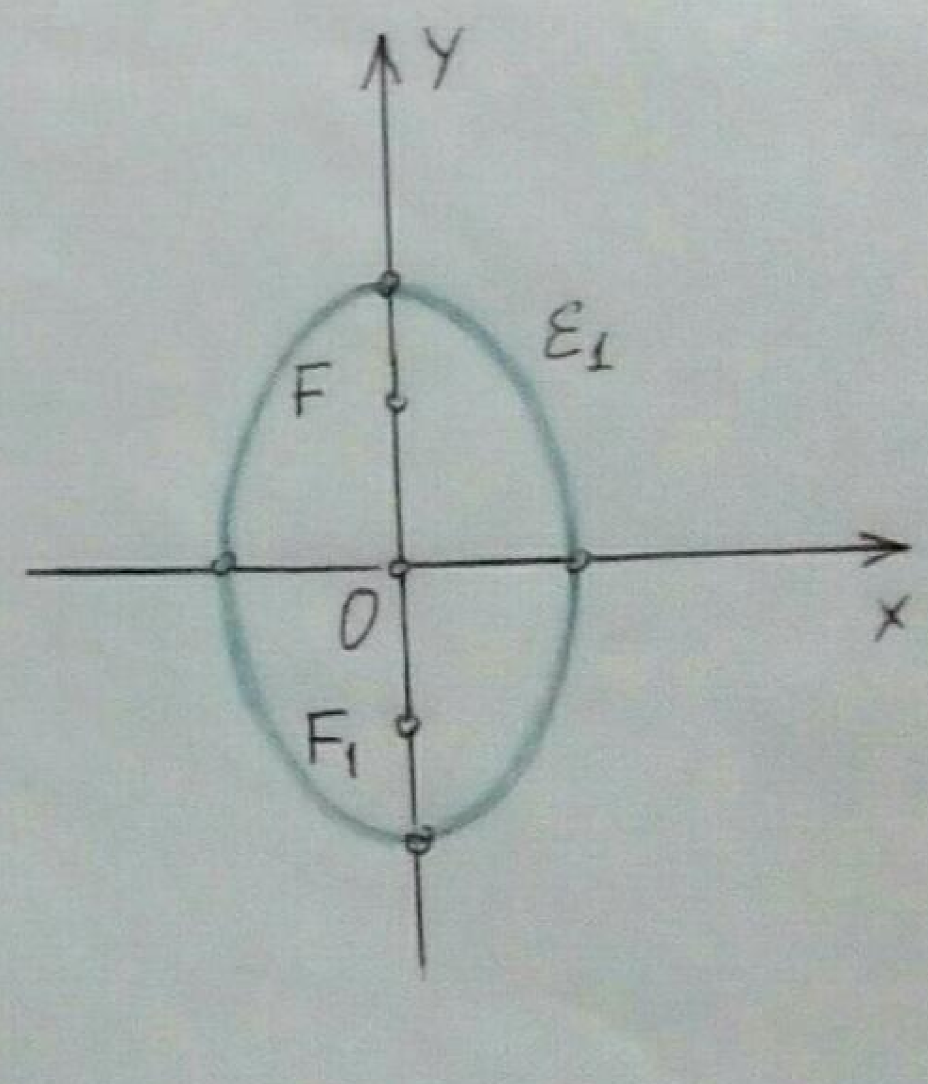
16.4.

<u>Теорема1.</u> Елипсата е геометричното място на точките M равнината сборът от разстоянията на които до две дадени точки F_1 и F_2 е константа $2a$.

Заради това си описание елипсата е наричана „окръжност с два центъра".

Да отбележим, че ако описваме елипса с (9) трябва да поставим условието $|MF|+|MF_1|>2c$, т.е. $a>c$.

Числото e се нарича числен ексцентрицитет, $|c|=\sqrt{a^2-b^2}$ - линеен ексцентрицитет, а $2|c|$-фокусно разстояние.



Нека ε_1 е зададена с каноничното си уравнение

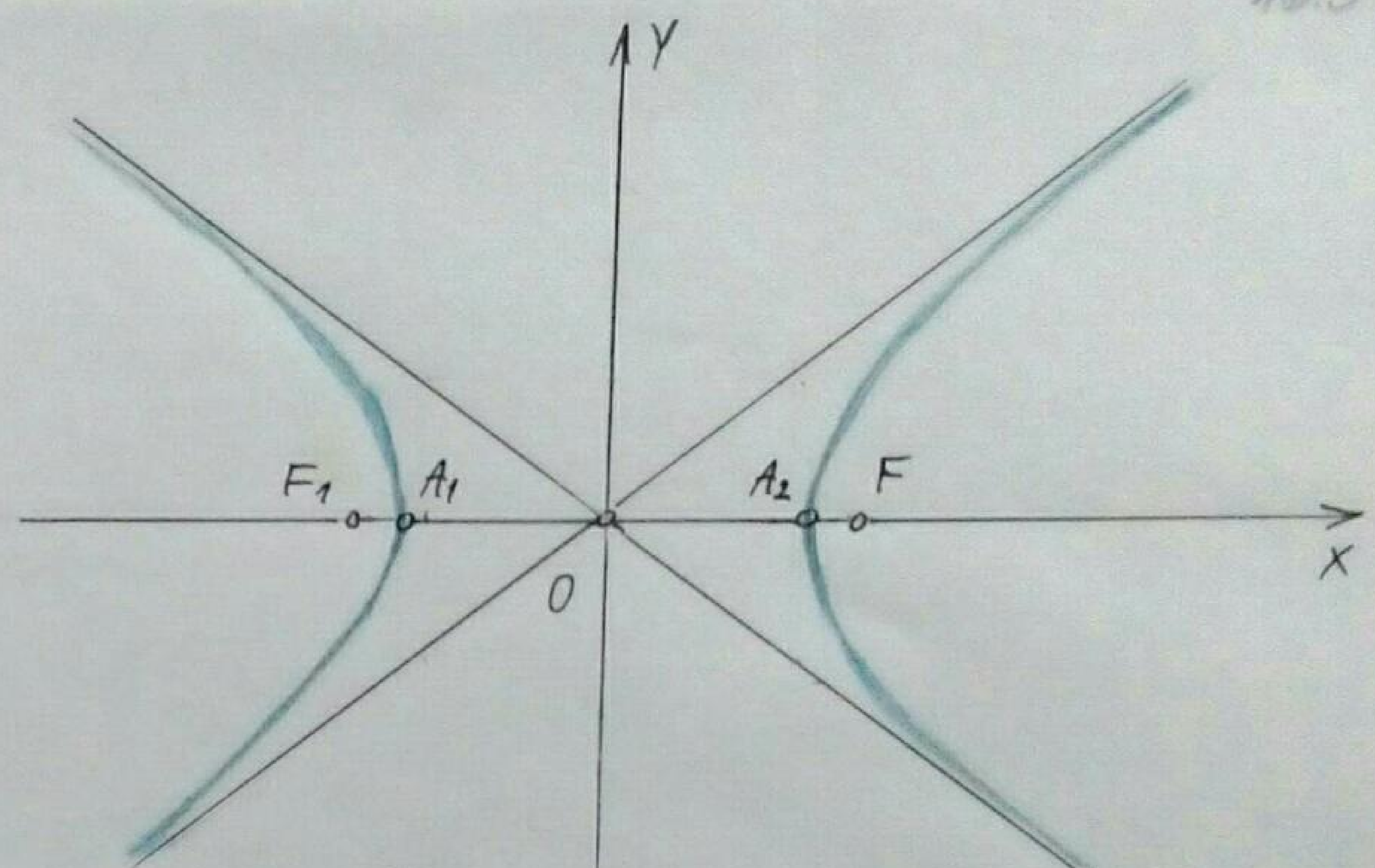
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad , \; a>b$$

Тогава фокусите ѝ лежат на Oy и са с координати $F(0,c)$ и $F_1(0,-c)$, където $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Хипербола

Нека X е хипербола с канонично уравнение

$$(10)\quad X: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Спрямо K фокусът F има координати $F\left(\frac{pe^2}{e^2-1}, 0\right)$, а d е с уравнение $d: x = \frac{a^2}{c}$. Полагаме $c = \frac{pe^2}{e^2-1} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$ и $F(c, 0)$.

Както при елипсата в уравнението на X - (10) участват само квадратите на координатите x и y на точка от X. Следователно координатните оси са оси на симетрия, а O - център на симетрия за хиперболата. Ox и Oy са единствените оси на симетрия за X и се наричат оси на X. Ox пресича X в точките $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ се нарича реална ос. Оста Oy не пресича X в реални точки и се нарича имагинерна ос на хиперболата, а

O-център на X. Точките $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$ се наричат върхове на X.

Както при елипсата се установява, че ако $F_1(-c,0)$ и $g_1: x=-\frac{a^2}{c}$, то за произволна точка $M \in X$ е изпълнено

$$\frac{|MF_1|}{|M,g_1|}=\frac{c}{a}=e.$$

Следователно F_1 и g_1 също са съответно фокус и директриса за X.

При симетриите относно Ox не се получават други фокуси и директриси за X.

Ако $M(x,y) \in X$, то $x=\xi\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$ и $y=\eta\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $\xi=\pm1, \eta=\pm1$.

Следователно за точките от хиперболата имаме $|x| \geq a$.

За разстоянията от M до фокусите $F(c,0)$ и $F_1(-c,0)$ от $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$, $c^2=a^2+b^2$ и $e=\frac{c}{a}$ получаваме

$$|MF|^2=(ex-a)^2 \quad \text{и} \quad |MF_1|^2=(ex+a)^2.$$

Като използваме, че $|x| \geq a$ получаваме

$|MF| = ex - a$ при $x > a$ и $|MF| = -ex + a$ при $x < -a$,

$|MF_1| = ex + a$ при $x > a$ и $|MF_1| = -ex - a$ при $x < -a$.

Следователно

$$(12) \quad \big||MF| - |MF_1|\big| = 2a.$$

Това фокално свойство е определящо за хиперболата, тъй като от (12) с подходящи трансформации можем да получим каноничното уравнение на хиперболата – (10). Това формулираме в следната

<u>Теорема 2</u>. Хиперболата е геометричното място на точките M в равнината, модулът на разликата от разстоянията на които до две дадени точки F_1 и F_2 е константа $2a$.

Нека l е права през центъра на X с уравнение $l: y = kx$. За общите точки на l и X имаме

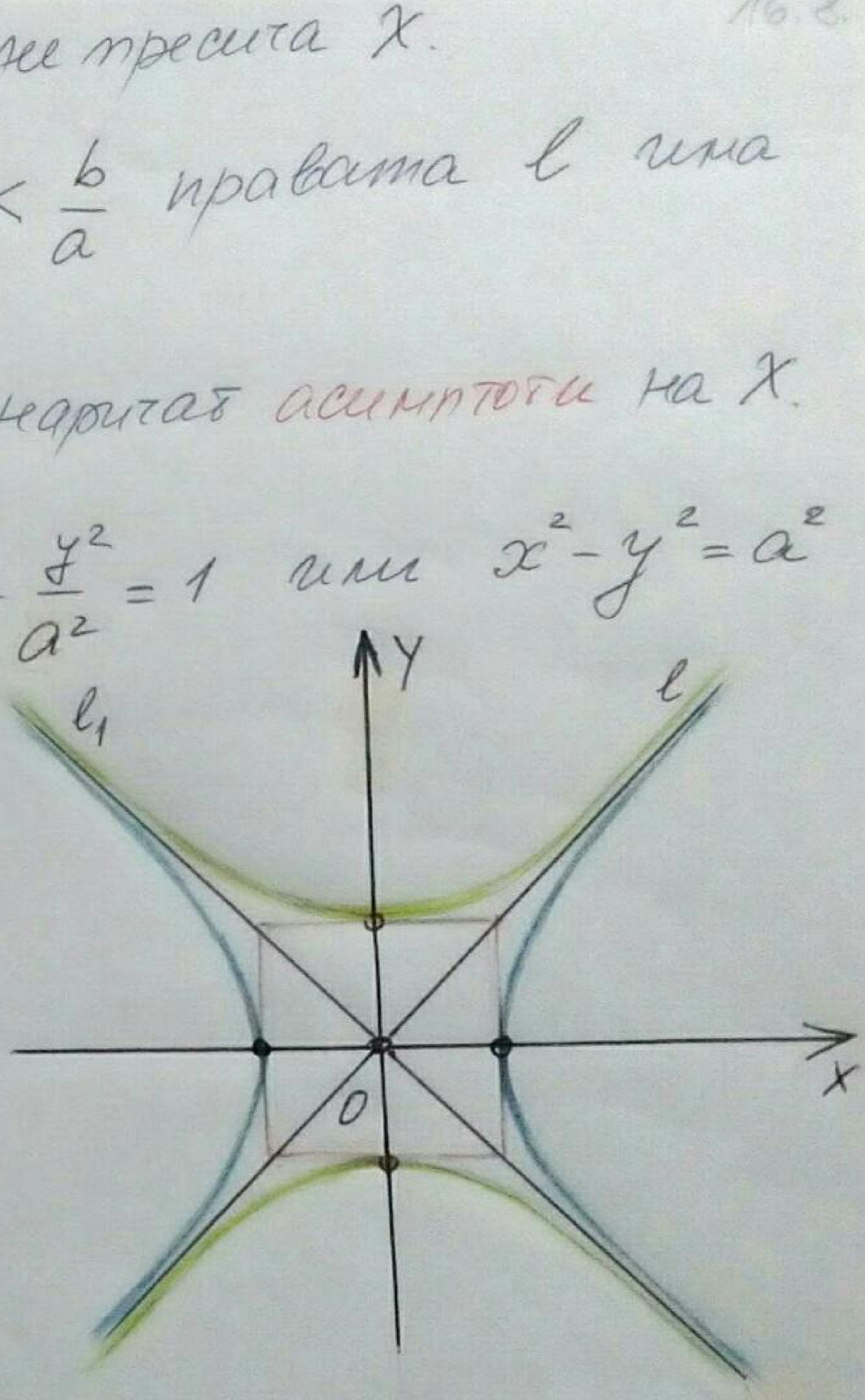
$$(b^2 - k^2a^2)x^2 = a^2b^2$$

Следователно за $|k| > \frac{b}{a}$ правата l не пресича X.

При $b^2 - k^2a^2 > 0$, т.е. при $-\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a}$ правата l има точно две общи точки с хиперболата.

Правите $l: y = \frac{b}{a}x$ и $l_1: y = -\frac{b}{a}x$ се наричат асимптоти на X.

Ако $a = b$, то X има уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ или $x^2 - y^2 = a^2$ и хиперболата се нарича равнораменна.



За асимптотите на равнораменна хипербола имаме, че са с уравнения $l: y = x$ и $l_1: y = -x$.

От $l \perp l_1$ следва, че асимптотите на коя да е равнораменна хипербола са перпендикулярни.

Да отбележим, че другата равнораменна хипербола с асимптоти l и l_1 е с уравнение $y^2 - x^2 = a^2$ - за нея Oy е реална ос, а Ox - имагинерна.

Да се върнем към общия случай - когато каноничното уравнение на X е $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a \neq b$.

Както отбелязахме точките на X са с x-координата в интервалите $-\infty < x \leq -a$ и $a \leq x < \infty$. Така точките на хипербола се разделят на два, симетрични относно имагинерната ос клона. Правите с уравнения съответно $x = a$ и $x = -a$ се наричат допирателни към X съответно във върховете на X - $A_2(a, 0)$ и $A_1(-a, 0)$. Поради симетричността на двата клона на X, е достатъчно да ограничим разглежданията си само върху единия ѝ клон.

Непосредствено се проверява, че права, успоредна на асимптотата ℓ пресича X в точно една точка - произволна права ℓ_n, $\ell_n \parallel \ell$ е с декартово уравнение $\ell_n : y = \frac{b}{a}x + n$. За да намерим пресечните точки на ℓ_n и X заместваме y в уравнението на X

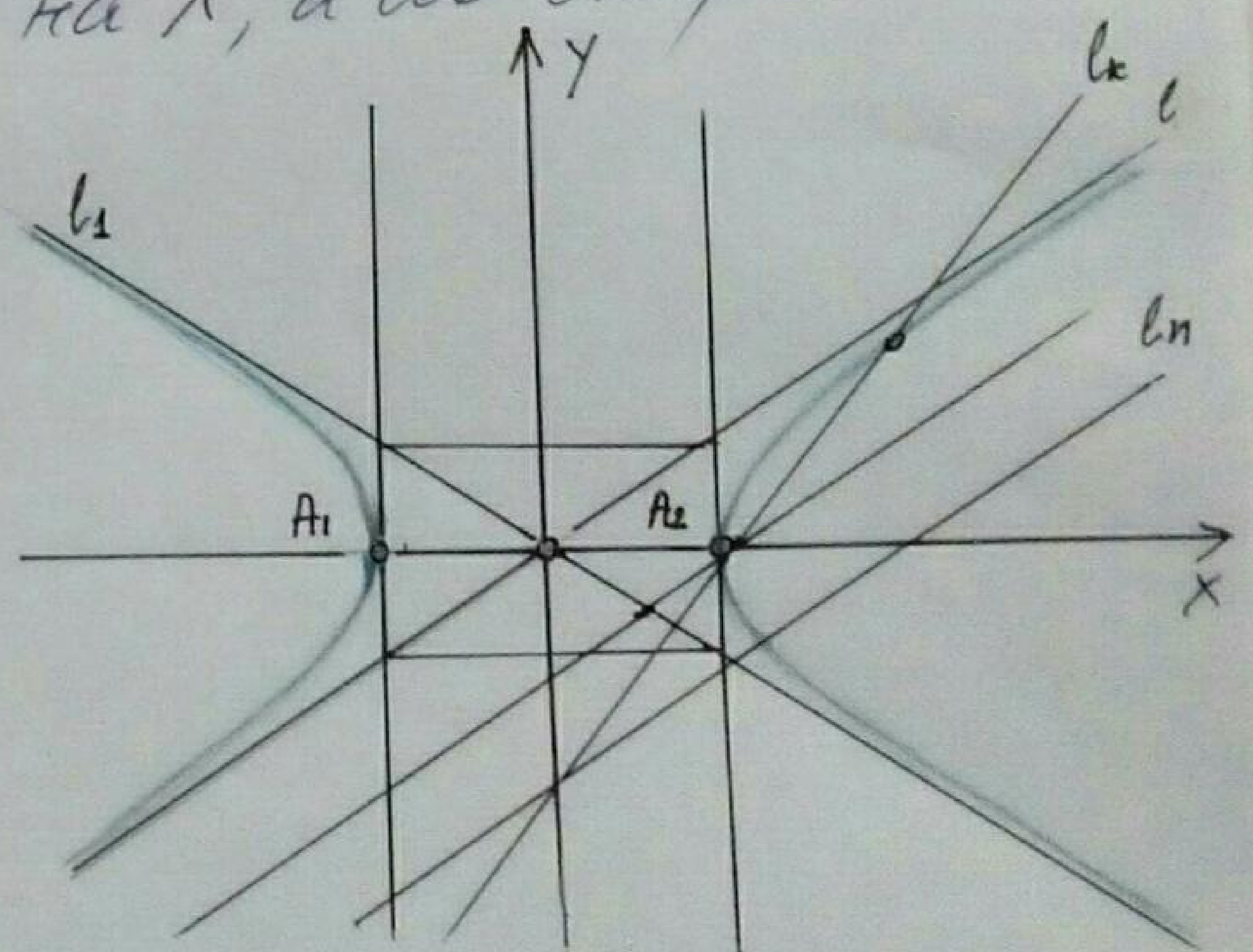
$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{2bn}{a}x + n^2\right) = 1 \Rightarrow -\frac{2n}{ab}x - \frac{n^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{2n}{ab}x = 1 - \frac{n^2}{b^2} = \frac{b^2-n^2}{b^2} \Rightarrow x_n = \frac{a}{2bn}(b^2-n^2) \Rightarrow y_n = \frac{1}{2n}(b^2-n^2)+n$

$\Rightarrow l_n \cap X = L_n(x_n, y_n)$.

Аналогично, всяка права, успоредна на другата асимптота l_1, пресича X в точно една точка.

Ако l_k е права през $A_2(a,0)$, различна от допирателната в A, т.е. е с декартово уравнение $l_k: y = kx - ka$, $k \neq 0$, то не е трудно да се провери, че l_k няма общи точки с десния клон на X (освен A_2) за $|k| > \frac{b}{a}$ и има точно една обща точка с десния клон (освен A_2). В първия случай l_k пресича левия клон на X, а във втория не го пресича.



Прави, успоредни на Ox пресичат X в две различни точки, докато права, успоредна на Oy или пресича X в две различни точки, или не пресича X, или се допира до X в неин връх.

16.11

Да обобщим: Конично сечение с ексцентрицитет $e = 1$ наричаме парабола. Ако ексцентрицитетът е $e < 1$, коничното сечение наричаме елипса и ако ексцентрицитетът му е $e > 1$ го наричаме хипербола.

Произволна права в равнината го пресича или в една, или в две точки, или въобще не го пресича. Следователно никои три точки на парабола, елипса или хипербола не са колинеарни, т.е никоя от тях не съдържа права.

От каноничното уравнение на парабола непосредствено се получават координатите на фокуса ѝ F. Същото важи и за елипса и хипербола - от параметрите, участващи в каноничните им уравнения намираме фокусите им, асимптотите на хиперболата и т.н.