23. Център на крива от втора степен. Централно уравнение... 23.1

Нека k е неизродена крива от втора степен. Тогава полюсът на безкрайната права спрямо k се нарича **център** на k.

Ако Z_0 е центърът на k, то безкрайната права ω е полярата на Z_0 спрямо k.

Нека спрямо афинна координатна система $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ в $A \setminus \omega$ кривата k е с уравнение

(1) $k: f(x,y,t) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0.$

и точката $Z_0(x_0, y_0, t_0)$ е център на k. От $\omega[0,0,\rho]$, $\rho \neq 0$ имаме

$$(2)\quad \left| \begin{array}{l} f_1(Z_0) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}t_0 = 0 \\ f_2(Z_0) = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}t_0 = 0 \\ f_3(Z_0) = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}t_0 = \rho . \end{array} \right.$$

Системата (2) е линейна нехомогенна система – $\rho \neq 0$.

От това, че кривата k е неизродена имаме, че детерминантата $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$. Следователно системата (2)

има единствено ненулево решение с точност до коефициент на пропорционалност.

В сила е следната

<u>Теорема</u> Всяка неизродена крива от втора степен има единствен център.

Нека k е неизродена крива от втора степен и $Z_0(x_0, y_0, t_0)$ е нейният център. Тогава Z_0 е безкрайна точка точно тогава, когато $t_0 = 0$, следователно $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

В този случай от (2) получаваме, че системата

$$(3) \quad \begin{vmatrix} a_{11} x_0 + a_{12} y_0 = 0 \\ a_{12} x_0 + a_{22} y_0 = 0 \end{vmatrix}$$

има ненулево решение, което е изпълнено точно тогава, когато детерминантата ѝ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, т.е. $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$

и k е от параболичен тип.

Следователно кривата k има безкраен център точно тогава, когато $D = 0$ и k има краен център точно тогава, когато $D \neq 0$.

Нека сега центърът $Z_0(x_0, y_0, t_0)$ е крайна точка $\Rightarrow t_0 \neq 0$

Тогава от първите две уравнения на (2) получаваме, че нехомогенните координати $X_0 = \frac{x_0}{t_0}$, $Y_0 = \frac{y_0}{t_0}$ удовлетворяват

системата

$$(4) \left| \begin{array}{l} a_{11} X_0 + a_{12} Y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12} X_0 + a_{22} Y_0 + a_{23} = 0 \end{array} \right.$$

Това наблюдение дава възможност понятието (условието) за краен център да се обобщи за произволна крива от втора степен, която не съдържа безкрайната права ω

Нека k е произволна крива от втора степен, която не съдържа безкрайната права и k е с уравнение (1). Тогава поне един от коефициентите a_{11}, a_{12}, a_{22} е различен от нула - $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Крайна точка, чиито нехомогенни координати удовлетворяват системата (4) наричаме център на кривата k. Според това дали крива има краен или безкраен център различаваме следните два вида

Крива, която има поне един краен център се нарича централна. Тези криви, които нямат краен център се наричат нецентрални.

Централно уравнение на крива от втора степен.

Нека k е централна крива от втора степен с нехомогенно уравнение спрямо афинна координатна система $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ в $A^* \setminus \omega$.

$$k: f(X,Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}X + 2a_{23}Y + a_{33} = 0.$$

и $Z_0(X_0, Y_0)$ е център на k.

Тогава спрямо координатната система $K' = Z_0\vec{e_1}\vec{e_2}$ с център Z_0 – формулите за смяна от K към K' са $\begin{matrix} X = x' + x_0 \\ Y = y' + y_0 \end{matrix}$,

т.е. $\begin{matrix} x' = X - x_0 \\ y' = Y - y_0 \end{matrix}$ кривата k има уравнение

$$k: a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2f_1(Z_0)x' + 2f_2(Z_0)y' + f(Z_0) = 0$$

От $f_1(Z_0) = f_2(Z_0) = 0$ следва, че коефициентите пред x' и y' в горното уравнение са нули. Следователно уравнението на k спрямо K' е

$$(5)\quad k:\ a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+f(Z_0)=0.$$

Горното уравнение се нарича централно уравнение на k.

Тъй като това уравнение не съдържа първите степени на x' и y', то Z_0 е център на симетрия на k - ако $M(x',y')$ принадлежи на k, то и точката $\bar{M}(-x',-y')$ също принадле~~жи~~жи на k.

Примери: 1. $\mathcal{E}:\ b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2t^2=0$ - системата (4) има вида $\begin{cases} b^2x=0 \\ a^2y=0 \end{cases}$ $\Rightarrow x=0, y=0$ т.е. центърът на $\mathcal{E}$ е $Z_0(0,0)$.

2. $k_1:\ 2x^2-xy-y^2-7xt+4yt+5t^2=0$. Имаме $\Delta_k=\begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & 2 \\ -\frac{7}{2} & 2 & 5 \end{vmatrix}=$
$=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 8 & -1 & -7 \\ -1 & -1 & 2 \\ -7 & 2 & 5 \end{vmatrix}=\frac{1}{4}(-40+14+14+49-32-5)=0$

$\Rightarrow k_1$ е разпадаща се крива.

От $a_{11} = 2$, $a_{12} = -\frac{1}{2}$, $a_{22} = -1$ за вида на k_1 имаме

$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \frac{1}{4} - (2)(-1) = \frac{1}{4} + 2 > 0$, т.е. k_1 е от хиперболичен тип.

От (4) непосредствено получаваме, че точката Z_0 с нехомогенни координати $Z_0(2,1)$ е център k_1 - имаме

$$2X - \frac{1}{2}Y - \frac{7}{2} = 0 \qquad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 4X - Y - 7 = 0 \\ -X - 2Y + 4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow X_0 = 2,\ Y_0 = 1.$$
$$-\frac{1}{2}X - Y + 2 = 0$$

При $K = O\vec{e_1}\vec{e_2} \to K' = Z_0\vec{e_1}\vec{e_2}$ - смяната е $X = x' + 2$, $Y = y' + 1$

Тогава спрямо K' кривата k има уравнение

$$k: 2x'^2 - x'y' - y' + f(Z_0) = 0$$

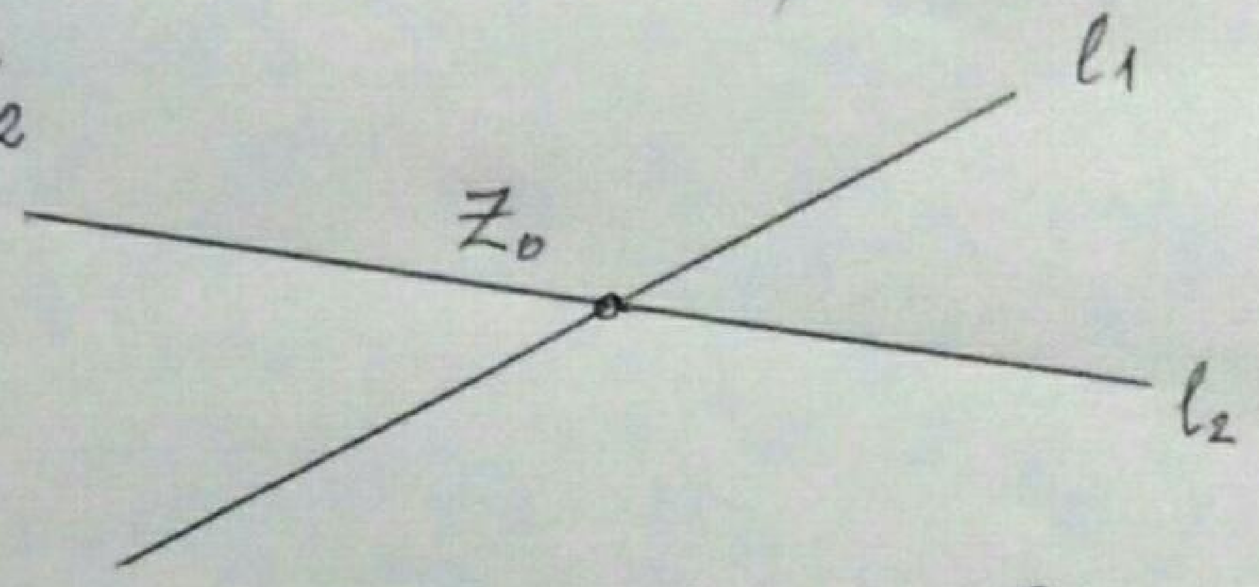
$f(Z_0) = 2.4 - 2.1 - 1 - 7.2 + 4.1 + 5 = 5 - 14 + 5 = 0 \Rightarrow$

$$k: 2x'^2 - x'y' - y'^2 = 0$$

Това че свободният член в централното уравнение на k_1 е нула се получава и от смяната на координатите X, Y с x' и y'.

От централното уравнение на k_1 непосредствено следва, че центърът $Z_0(0,0)_{K'}$ принадлежи на k_1. Това може да се провери за $Z_0(2,1)_K$: $2.2^2-2.1-1^2-7.1.1+4.1.1+5.1^2=0$.

Спрямо K, кривата k_1 се разпада на двойката пресичащи се в центъра Z_0 прави l_1 и l_2



$$k : (2x'+y')(x'-y')=0$$

$l_1 : 2x'+y'=0$, $l_2 : x'-y'=0$.

Спрямо K разпадането на k_1 на две пресичащи се прави получаваме от $x'=X-2$, $y'=Y-1$ (връщане се в K)

$\Rightarrow$ спрямо K : $l_1 : 2(X-2)+Y-1=0 \Rightarrow l_1 : 2X+Y-5=0$

$l_2 : X-2-(Y-1)=0 \Rightarrow l_2 : X-Y-1=0$

$\Rightarrow k : f(x,y)=0$, $f(x,y)=l_1(x,y)\,l_2(x,y)$, т.е $k : (2X+Y-5)(X-Y-1)=0$

3. $k_2: x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0.$

От $a_{13} = a_{23} = 0 \Rightarrow$ уравнението на k_2 е централно уравнение на кривата.

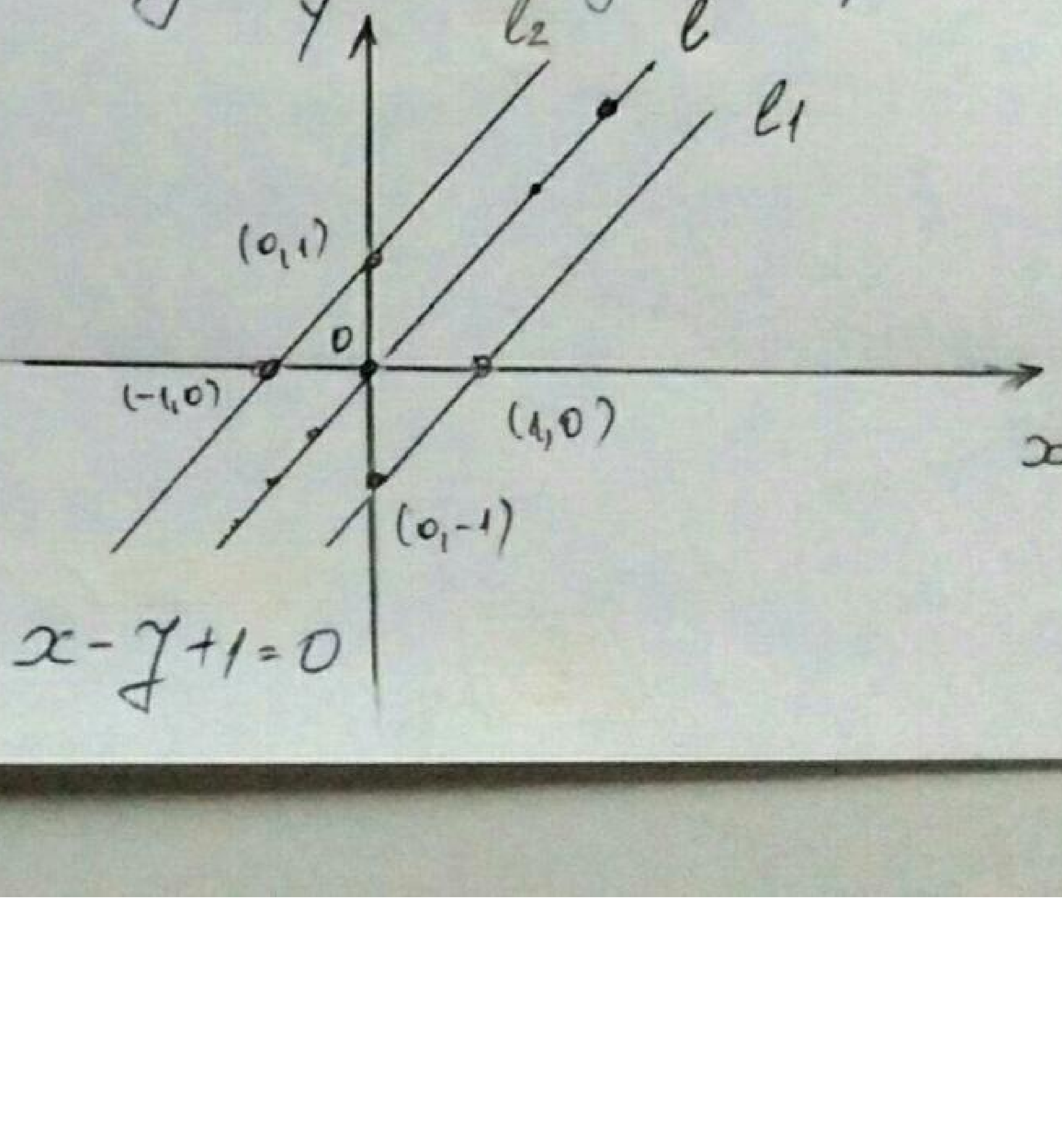
От $\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$ имаме, че k_2 е изродена крива.

От $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1 - 1.1 = 0$ следва, че k_2 е от параболичен тип.

Ако k_2 има краен център $Z_0(x_0, y_0)$, то x_0, y_0 удовлетворяват

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 1.x - 1.y = 0 \\ -1.x + 1.y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = y$$

Извод: Всяка точка от правата $l: x - y = 0$ е център за кривата k_2



$k_2: (x-y)^2 - 1 = 0$, т.е.

$k_2: (x-y-1)(x-y+1) = 0$

$k_2: f(x,y) = l_1(x,y)\, l_2(x,y) = 0 \quad l_1: x-y-1=0, \; l_2: x-y+1=0$

4. k_3: $y^2 - 2pxt$, $p > 0$ е хомогенното уравнение на парабола

$$\Delta_\pi : \begin{vmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{vmatrix} = -p^2 \neq \Rightarrow \text{ неизродена крива.}$$

$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - 1.0 = 0 \Rightarrow k_3$ е от параболичен тип.

За центъра на k_3 имаме $f_1(x,y,t) = -pt = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow$
$f_2(x,y,t) = y = 0 \Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow x \neq 0$. Следователно параболата k_3 има безкраен център $U(1,0,0)$ - точката, в която се допира до безкрайната права, е точно безкрайната точка на оста ѝ.