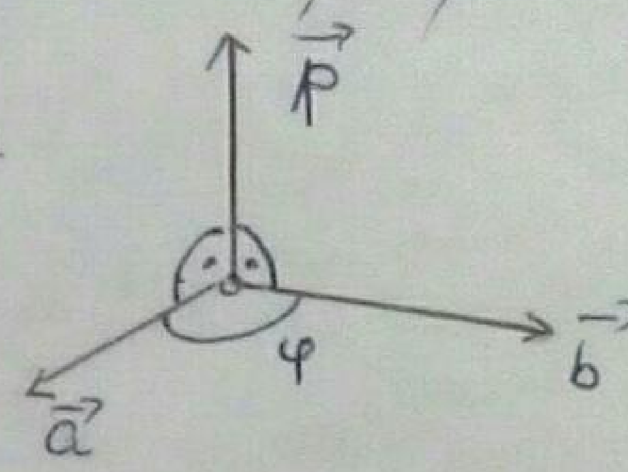
7.1 Векторно и смесено произведение в ориентирано евкл. пр-во

Нека в E_3 е фиксирана витлова посока, избрана за положителна – S^+

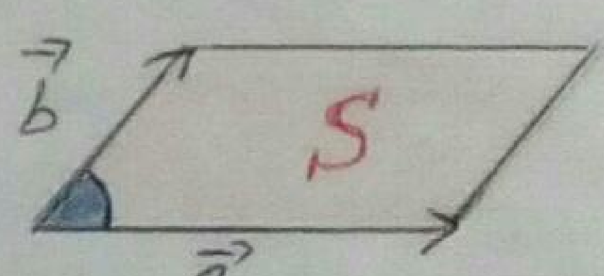
Деф1. Векторно произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, наричаме вектора $\vec{p}=\vec{a}\times\vec{b}$, определен по следния начин



1. $\vec{p}\perp\vec{a}$, $\vec{p}\perp\vec{b}$ като взети в този ред $\{\vec{a},\vec{b},\vec{p}\}\in S^+$
2. С дължина $|\vec{p}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$

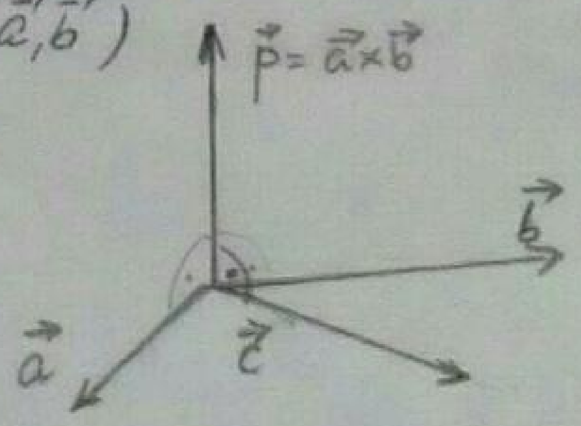
! $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o} \iff \vec{a}\parallel\vec{b}$ или $\vec{a},\vec{b}=\vec{o}$ $(\ \vec{a}\wedge\vec{b}\ )$

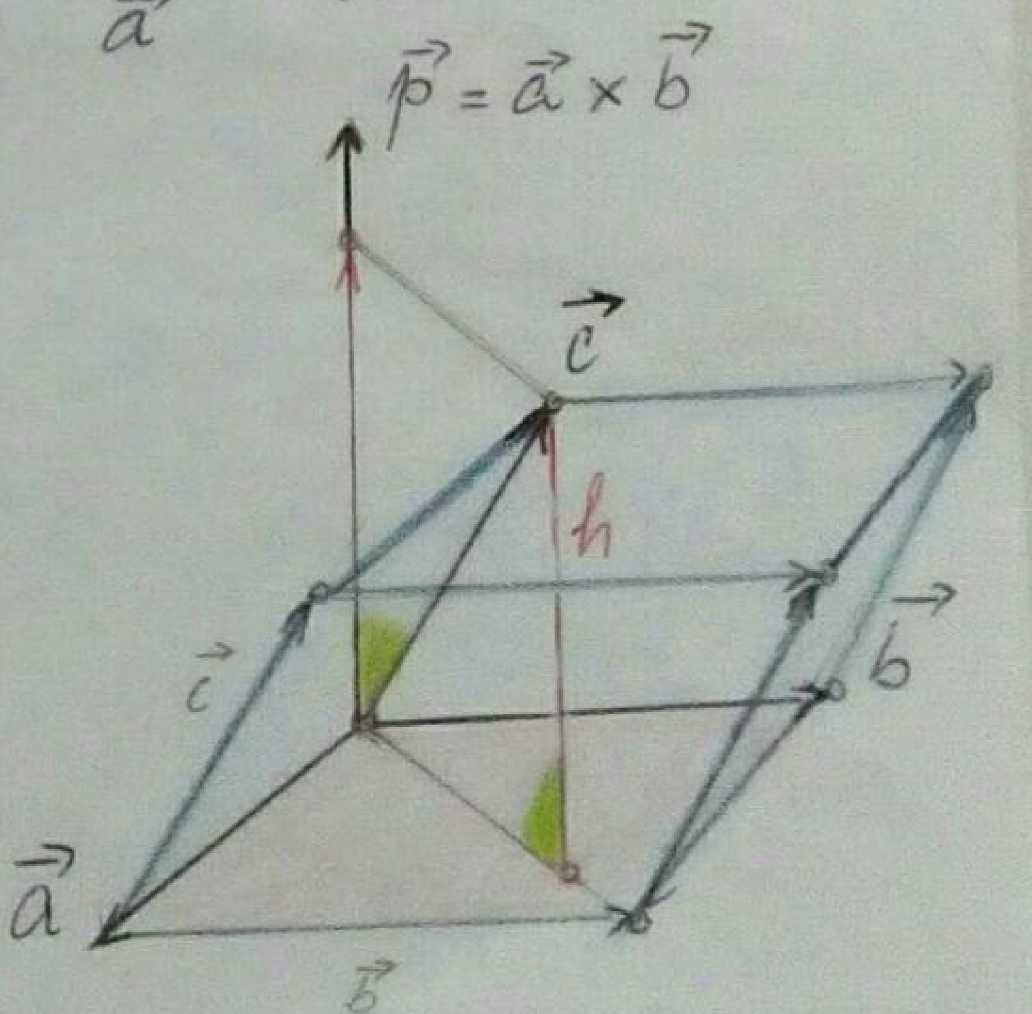
Деф2. Смесено произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ на векторите $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ взети в този ред наричаме числото $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$.



Следствия:

1. $|\vec{a}\times\vec{b}| = S$ успоредн. построен върху $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – $S_{(\vec{a},\vec{b})}$
2. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0 \iff \vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни с една равнина
3. $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = V_{\text{паралелеп.}}$, определен от $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$





$$|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = |(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}| = |(\vec{a}\times\vec{b})||\vec{c}||\cos\angle((\vec{a}\times\vec{b}),\vec{c})$$

$$= |(\vec{a}\times\vec{b})||\,\text{пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\,| = S_{(\vec{a},\vec{b})}\cdot h = V$$

Нека $\vec{a}\vec{b}\vec{c}\neq 0$, т.е. не са компланарни с една равнина

Нека $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{p}$ и $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \cdot \vec{p} \Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}\} \xrightarrow{C} \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$,

7.2

където $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = \nu$

От $\vec{p} \perp \vec{a}, \vec{p} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{p}\vec{c} = \lambda(\overset{0}{\vec{p}\vec{a}}) + \mu(\overset{0}{\vec{p}\vec{b}}) + \nu \vec{p}^2 \Rightarrow \nu = \dfrac{\overset{|\vec{p}||\vec{c}|}{\vec{p}\vec{c}}}{\vec{p}^2} = \cos\sphericalangle(\vec{p}, \vec{c})$

$\Rightarrow \operatorname{sgn} \nu = \operatorname{sgn} \cos\sphericalangle(\vec{p}, \vec{c})_e$. По дефиниция $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}\} \in S^+$.

Следователно $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \in S^+ \Leftrightarrow \cos\sphericalangle(\vec{p}, \vec{c})_e > 0$

и $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \in S^- \Leftrightarrow \cos\sphericalangle(\vec{p}, \vec{c})_e < 0$ $\Rightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm V$

– говорим за ориентиран обем. – $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \varepsilon |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \in S^{\varepsilon}$, $\varepsilon = \pm 1$

4. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$.

За обема ясно – $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = |\vec{c}\vec{a}\vec{b}|$. Имаме $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \xrightarrow{C} \{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\}$,

където $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det C = +1$

5. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. От 4. имаме $\vec{a}\vec{b}\vec{p} = -\vec{b}\vec{a}\vec{p} \Rightarrow \{\vec{b}, \vec{a}, \vec{p}\} \in S^-$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}|$ (или $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}\} \xrightarrow{C} \{\vec{b}, \vec{a}, \vec{p}\}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$), $\det C = -1$

6. $\lambda\vec{a} \times \mu\vec{b} = \lambda\mu(\vec{a} \times \vec{b})$. По дефиниция $\{\lambda\vec{a}, \mu\vec{b}, \lambda\vec{a} \times \mu\vec{b}\} \in S^+$,

както и $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$

Имаме $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}\} \xrightarrow{C} \{\lambda\vec{a}; \mu\vec{b}, (\lambda\mu)(\vec{a}\times\vec{b})\}$, $C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\mu \end{pmatrix}$,

$\det C = (\lambda\mu)^2 > 0 \Rightarrow \{\lambda\vec{a}, \mu\vec{b}, (\lambda\mu)(\vec{a}\times\vec{b})\} \in S^+$

За дължината - ясно: $|\lambda\vec{a}\times\mu\vec{b}| = |\lambda||\mu||\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = |\lambda\mu(\vec{a}\times\vec{b})|$

7. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$

Нека $\vec{e}$ - произволен вектор. Тогава $(\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}))\vec{e} = \vec{e}\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})$

$= (\vec{e}\times\vec{a})(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{e}\times\vec{a})\vec{b} + (\vec{e}\times\vec{a})\vec{c} = \vec{e}\vec{a}\vec{b} + \vec{e}\vec{a}\vec{c} =$

$= \vec{a}\vec{b}\vec{e} + \vec{a}\vec{c}\vec{e} = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{e} + (\vec{a}\times\vec{c})\vec{e} = [\vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}]\vec{e} \quad \forall\vec{e}$.

8. $(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$

$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\sphericalangle(a,b))$

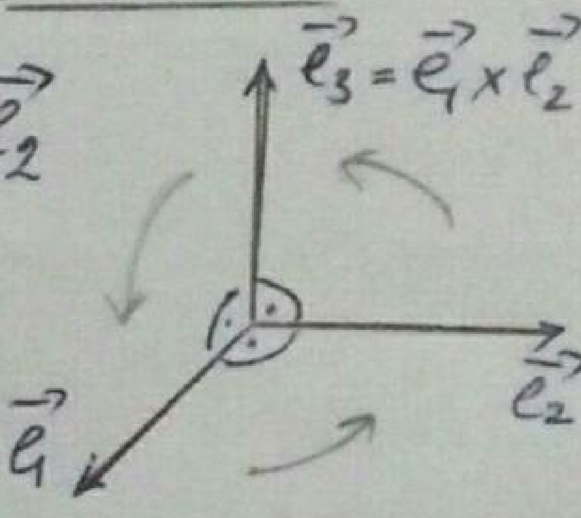
$= \vec{a}^2\vec{b}^2 - (|\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$

(към 7 може: $(\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}))\vec{e} = [\vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}]\vec{e} \Rightarrow$

$(\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) - (\vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}))\vec{e} = 0, \quad \vec{e}\neq\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) - (\vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}) = \vec{0}$)

72 Координатно представяне на векторно и смесено произведение.



Нека $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ е ОКС и $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\} \in S^+$, $\vec{e_3}\perp\vec{e_1}$, $\vec{e_3}\perp\vec{e_2}$

$\sin\sphericalangle(\vec{e_i},\vec{e_j}) = 1 \Rightarrow |\vec{e_1}\times\vec{e_2}| = |\vec{e_1}||\vec{e_2}|\sin\sphericalangle(\vec{e_1},\vec{e_2}) = 1$

и $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_1}\times\vec{e_2}\} \in S^+ \Rightarrow !\ \vec{e_3} = \vec{e_1}\times\vec{e_2}$

Аналогично получаваме $\vec{e_1} = \vec{e_2}\times\vec{e_3}$, и $\vec{e_2} = \vec{e_3}\times\vec{e_1}$, или от $\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3} = 1$ и $\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3} = \vec{e_3}\vec{e_1}\vec{e_2} = \vec{e_2}\vec{e_3}\vec{e_1}$

Нека спрямо K векторите $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ са с координати $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ и $\vec{c}(c_1,c_2,c_3)$

$$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = (a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3})\times(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}+b_3\vec{e_3})$$

$$= a_1b_1\,\vec{e_1}\times\vec{e_1} + a_2b_2\,\vec{e_2}\times\vec{e_2} + a_3b_3\,\vec{e_3}\times\vec{e_3} + a_1b_2\,\vec{e_1}\times\vec{e_2} + a_2b_1\,\vec{e_2}\times\vec{e_1}$$
$$+ a_2b_3\,\vec{e_2}\times\vec{e_3} + a_3b_2\,\vec{e_3}\times\vec{e_2} + a_3b_1\,\vec{e_3}\times\vec{e_1} + a_1b_3\,\vec{e_1}\times\vec{e_3}.$$

$(\vec{e_i}\times\vec{e_i} = \vec{o})$ $$= (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e_3} + (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e_1} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e_2}$$

$$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

Следователно за смесеното произведение на три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ получаваме - $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} . c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} . c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} . c_3$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = V_{abc}$$, което е ориентирания обем на паралелепипеда, построен с векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

Като следствие получаваме, че $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни $\Leftrightarrow V_{abc} = 0$, т.е. $\Leftrightarrow$ детерминантата от координатите им е равна на нула.