Задачи за подготовка за второ контролно по Числени методи

1 тип

7. Да се намери явния вид на $B(1,2,4;t)$ за $t \in [1,4]$.

8. Да се намери полинома на най-добро равномерно приближение от π_1 и най-доброто приближение $E_1(f)$ за функцията:
а) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ в интервала $[0,1]$;
б) $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$ в интервала $[-1,1]$.

9. Да се намери полинома на най-добро средноквадратично приближение от π_1 за функцията $f(x) = e^x$ в интервала $[-1,1]$ при тегло $\mu(x) = 1$.

10. Да се намери полинома от π_1, приближаващ по метода на най-малките квадрати данните: $x_1 = 0$, $f_1 = 5$, $x_2 = 1$, $f_2 = 2$, $x_3 = 3$, $f_3 = 2$, $x_4 = 4$, $f_4 = 1$.

11. Напишете съставна квадратурна формула на трапеците, осигуряваща пресмятане на $\int_0^1 \sin x\,dx$ с грешка по-малка от $0,01$. Обосновете като използвате формулата за оценка на грешката. Решете същата задача със съставна квадратурна формула на правоъгълниците.

12. Намерете с грешка по-малка от $0,001$ положителния корен на уравнението $x^3 - 2x - 5 = 0$ по метода на:
а) свиващите изображения;
б) хордите;
в) Нютон.

2 тип

7. Нека $B(x_0, \dots, x_r; t)$ е B-сплайнът от степен $r-1$ с възли $x_0 < \dots < x_r$. Да се намери

$$\int_{x_0}^{x_r} B(x_0, \dots, x_r; t)\,dt.$$

Отговорът да се представи като функция, зависеща само от r.

8. Да се докаже, че най-доброто равномерно приближение с полиноми от π_n за функцията $f(x) = \cos x$ в интервала $[-1,1]$ удовлетворява неравенството:

$$E_n(f) \le \frac{1}{2^n.(n+1)!}.$$

9. Докажете, че ако $f \in C^1[0,1]$ то за производната на полинома на Бернщайн е изпълнено

$$B'_{n+1}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f'(\xi_k)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

където $\xi_k \in [\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}]$, $k = 0, \dots, n$.

10. Да се докаже, че полиномите на Льожандър

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)},\ n = 0,1,2,\dots,$$

удовлетворяват $\int_{-1}^1 L_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}$. (Упътване: $L_n(1) = 1$, $L_n(-1) = (-1)^n$.)

11. Нека

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k\, f(x_k)$$

е квадратурната формула на Гаус. Докажете, че

$$A_k = \frac{2}{(1-x_k^2)[L_n'(x_k)]^2},\ \ k = 1, \dots, n,$$

където $L_n(x)$ е полинома на Льожандър от степен n, удовлетворяващ условията: $L_n(1) = 1$, $L_n(-1) = (-1)^n$. (Упътване: Квадратурната формула е точна за $f(x) = \frac{L_n(x)}{x-x_k} \cdot L_n'(x)$.)

12. Нека $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редицата, получена по метода на Нютон за приближено решаване на уравнението $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$. При подходящи предположения за f докажете, че:

$$|x_{n+1} - \xi| \le \frac{M_2}{2m_1}(x_n - \xi)^2,$$

където ξ е корена на уравнението, $m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Април 2023 г. доц. д-р Л. Милев