# Примери за афинни трансформации

1. Афинни трансформации $\varphi : \varphi|_{\omega} = id_{\omega}$, т.е. запазват поточково безкрайната права.

Нека $\varphi : \varphi(\omega) = \omega \Rightarrow \varphi(a) = a'$, където или $a' \equiv a$ или $a' \parallel a$. Нека $\varphi$ е зададен със $(*)$, т.е.

$$(*)\ \varphi : \begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13} \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23} \end{cases} \text{ и}$$

$M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ са две различни точки, $M_i'(x_i', y_i') = \varphi(M_i)$. Тогава $M_1M_2 \parallel M_1'M_2'$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_1'M_2'} = s\,\overrightarrow{M_1M_2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_2' - x_1' &= s(x_2 - x_1) \\ y_2' - y_1' &= s(y_2 - y_1) \end{aligned} \Rightarrow$$

$$c_{11}x_2 + c_{12}y_2 + c_{13} - (c_{11}x_1 + c_{12}y_1 + c_{13}) = s(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow c_{11}(x_2 - x_1) + c_{12}(y_2 - y_1) = s(x_2 - x_1)$$

е изпълнено за всяко $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$

Аналогично имаме

$c_{21}(x_2-x_1)+c_{22}(y_2-y_1)=s(y_2-y_1) \Rightarrow$
$\forall(x_2-x_1)$ и $\forall(y_2-y_1)$ е изпълнено

$$\begin{cases}(c_{11}-s)(x_2-x_1)+c_{12}(y_2-y_1)=0; \\ c_{21}(x_2-x_1)+(c_{22}-s)(y_2-y_1)=0.\end{cases}$$

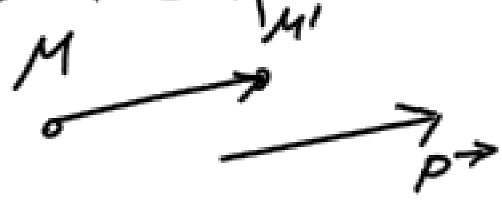
$\Rightarrow c_{11}=c_{22}=s$ и $c_{12}=c_{21}=0$.

Тогава аналитичното представяне на $\varphi$ е

$$\varphi: \begin{cases} x' = sx + c_{13} \\ y' = sy + c_{23} \end{cases}, \quad X' = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} X + \vec{p},$$

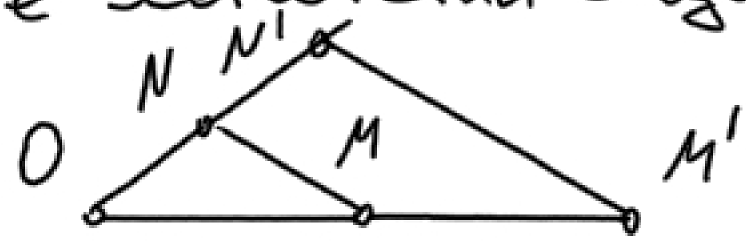
$\vec{p}(c_{13}, c_{23})$.

<u>Пример 1.</u> Ако $s=1$, то $\varphi$ е транслация с вектор $\vec{p}(c_{13}, c_{23})$, $\overrightarrow{MM'} \parallel \vec{p}$.

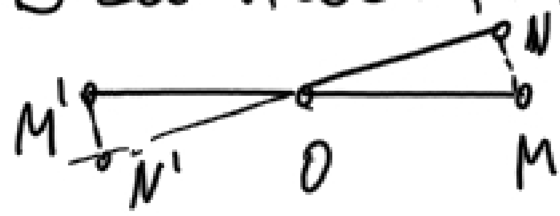



Ясно е, че ако $\vec{p}=\vec{o}$, то $\varphi = id_{E_2}$.

<u>Пример 2.</u> Ако $s \neq 0$ и $c_{13}=c_{23}=0$, т.е. $\vec{p}=\vec{o}$, то $\varphi$ е хомотетия с център $O$.

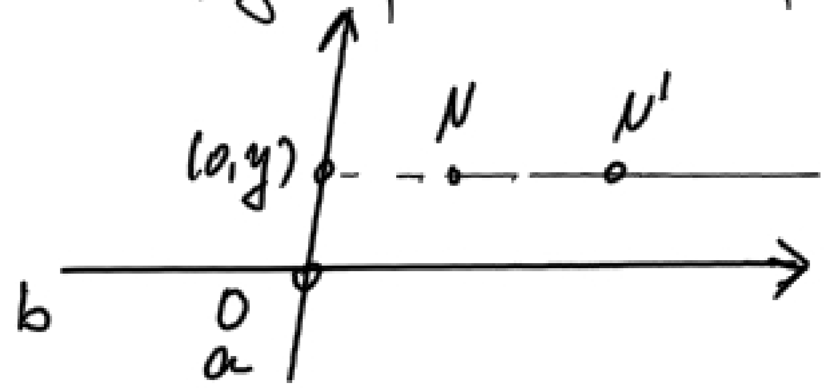



В частност, при $s=-1$ $\varphi$ е централна симетрия, с център $O$.



Пример 3. Афинни трансформации, които запазват поточково една права $a$ и правите, успоредни на права $b$, $b \neq a$ и $b \nparallel a$;

т.е. $\varphi(A) = A \ \forall A \in a$ и $\varphi(c) = c \ \forall c \parallel b$.




$\varphi$ е афинна трансформация, защото $\varphi(M_a) = M_a$ и $\varphi(M_b) = M_b$ (от $b \nparallel a \Rightarrow M_b \neq M_a$) $\Rightarrow \varphi(\omega) = \omega$.

Такива трансформации наричаме дилатация с ос $a$, по $b$ или дилатация по $b$ с ос $a$.

Можем да изберем координатната система така, че $O = a \cap b$, $a = Oy$ и $b = Ox$

За аналитичното представяне на дилатацията по $Ox$ с ос $Oy$ имаме

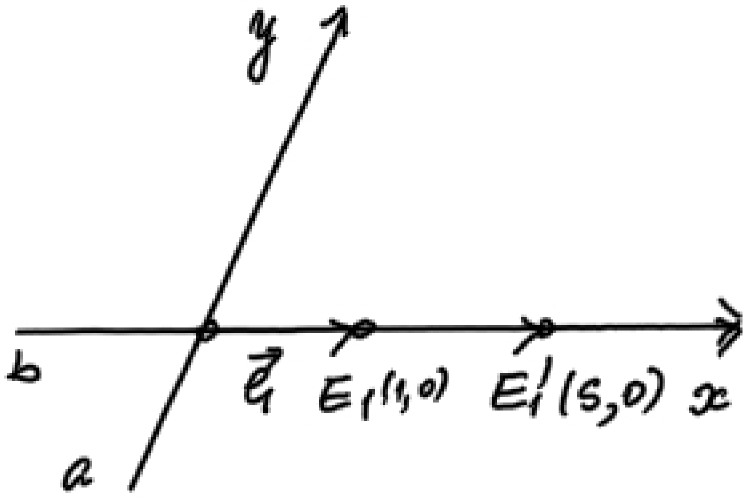
$$\delta_1 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix},$$

От $(0,y) \xrightarrow{\delta_1} (0,y) \Rightarrow$ $\forall y$

$$0 = c_{11}.0 + c_{12}.y + c_{13}$$
$$y = c_{21}.0 + c_{22}y + c_{23}$$

$\Rightarrow c_{13} = c_{23} = 0$, както и $c_{12} = 0$ и $c_{22} = 1$

5.8




$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & 1 \end{pmatrix}$

От $c \parallel Ox$, $\varphi(c)=c$

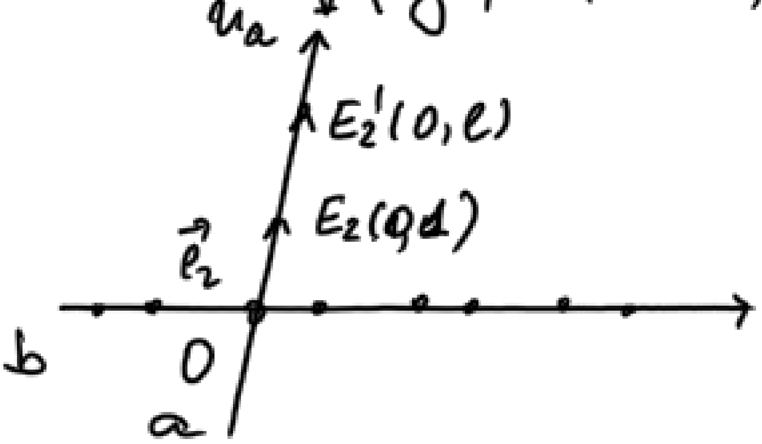
$\Rightarrow (\delta_1 = \varphi)$

$\delta_1(\vec{e_1}) = s\vec{e_1} \Rightarrow s = c_{11}\cdot 1$ и $0 = c_{21}\cdot 1$

$$\Rightarrow \delta_1 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Аналогично, дилатациите с ос $Ox$ по $Oy$, т.е. запазват правите успоредни на $Oy$ имат аналитично представяне

$$\delta_2 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$




Така $\delta_1$ е хомологията с ос $a$ с център $U_b$, а $\delta_2$ е хомологията с ос $b$ с център $U_a$.

# Ортогонални трансформации в равнината.

Нека в $E_2$ е фиксирана ортонормирана координатна система и $\varphi$ е афинна трансформация в $E_2$ с представяне

$$\varphi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix}.$$

Трансформацията $\varphi$ се нарича ортогонална, ако $C$ е ортогонална матрица, т.е. $CC^T = E \Rightarrow C^{-1} = C^T$, в частност $\det C = \pm 1$.

От $CC^T = E$ имаме

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} c_{11}^2 + c_{12}^2 = 1; \\ c_{21} \cdot c_{11} + c_{22} c_{12} = 0; \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 = 1, \end{array}$$

както и $c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1$, $c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1$; $\Rightarrow \exists! \theta$

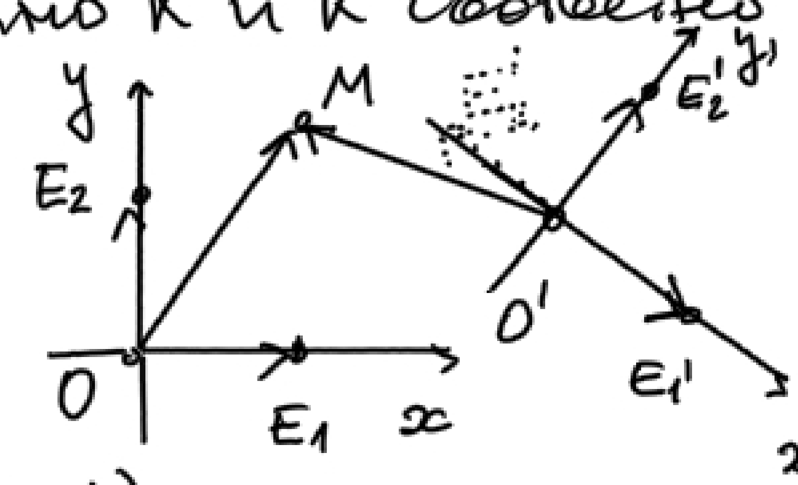
$$\theta \in [0, 2\pi) : \begin{array}{l} c_{11} = \cos\theta, \; c_{12} = -\varepsilon \sin\theta \\ c_{21} = \sin\theta, \; c_{22} = \varepsilon \cos\theta \end{array}, \; \varepsilon = \pm 1,$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon \sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \varphi: \begin{cases} x' = \cos\theta . x - \varepsilon \sin\theta . y + a \\ y' = \sin\theta . x + \varepsilon \cos\theta . y + b \end{cases} \quad (**), \; a, b \in \mathbb{R}$$

Формулите (**) са идентични с формулите за смяна на ортонормирани координатни системи в равнината.

Нека $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ и $K' = O'\vec{e_1}'\vec{e_2}'$ са две ортонормирани координатни системи и точка M има спрямо K и K' съответно координати.




$M_K(x, y)$, $M_{K'}(x', y')$

Тогава връзката между $(x, y)$ и $(x', y')$ е от вида (**)

Следователно за всеки две ортонормирани координатни системи $\exists!$ ортогонална трансформация $\varphi$:
$K \xrightarrow{\varphi} K'$; т.е. $O \xrightarrow{\varphi} O'$ и ако $E_i$, $i = 1, 2$ са „единичните" точки – $\overrightarrow{OE_i} = \vec{e_i}$, то $E_i \xrightarrow{\varphi} E_i'$. Ясно е, че K и K' са еднакво ориентирани точно тогава, когато $\varepsilon = 1$.

Следната теорема изразява, че основният инвариант на ортогоналната група е, че запазват разстоянието между две точки. В сила е следната

Теорема. Ортогоналните трансформации запазват разстоянието между две точки.

Доказателство. Нека $\varphi$ е ортогонална трансформация $\varphi: x' = Cx + \vec{k}$

$M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ – произволни точки

$\Rightarrow |M_1, M_2| = \sqrt{(\overrightarrow{M_1M_2})^2}$

Имаме $(\overrightarrow{M_1'M_2'})^2 = C(\overrightarrow{M_1M_2}) . C(\overrightarrow{M_1M_2})$

$$= \overrightarrow{M_1M_2} . \underbrace{C^T C}_{=E} \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1M_2}^2 . \quad \square$$

$(Cy = yC^T)$

Следователно една афинна трансформация запазва разстоянието между две точки точно тогава, когато е ортогонална.

Следствие: Ортогоналните трансформации описват еднаквостите.