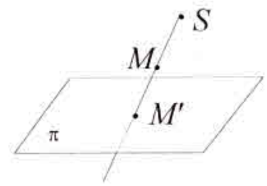
# <u>ПРОЕКЦИОННИ МЕТОДИ</u>

## <u>12. Афинитет между две равнини. Афинно-еквивалентни фигури</u>

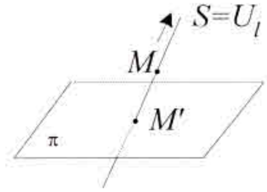
Проекционни методи се наричат методите за изобразяване на пространството върху равнина.

В основата на всички проекционни методи стои построение наречено **проектиране**, което се състои в следното: В пространството са фиксирани точка $S$ и крайна равнина $\pi$, $S \notin \pi$ .

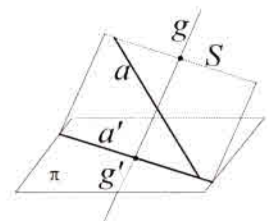



1. За произволна точка $M$ $(M \neq S)$ е определена точката $M' = SM \cap \pi$ ; $\psi_{\pi}^{S}(M) = M'$ .

Точката $M'$ се нарича **проекция на $M$ от центъра $S$ в $\pi$**, равнината $\pi$ – **проекционна равнина**, а $S$ – **проекционен център**.

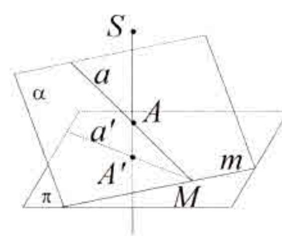



Ако точката $S$ е крайна, проектирането се нарича *централно*.
Ако $S = U_l$ е безкрайна, проектирането се нарича *успоредно*.
Ако $U_l \perp \pi$ , т.е. $l \perp \pi$, проектирането се нарича *ортогонално*.
Точката $M'$ не определя еднозначно $M$. Очевидно точката $M'$ е проекция в $\pi$ на всяка точка $X$ от правата $SM$.




2. Нека $a$ е произволна права, $S \notin a$. Равнината $(S,a)$ пресича $\pi$ в права $a'$, която се нарича **проекция на правата $a$ от $S$ в $\pi$**.
Ако $M \in a$, то $M' \in a'$. Правата $a'$ не определя еднозначно $a$, тъй като очевидно всяка права $x$ от равнината $(S,a)$ се проектира в $a'$.
Ако една права $g$ минава през проекционния център $S$ и $G = g \cap \pi$, то всяка точка от $g$, се проектира в $G$. Следователно проекцията $g'$ на $g$ е точката $G$ – $g' = G = g \cap \pi$.

3. Ако $\alpha$ е равнина, $S \notin \alpha$, всяка точка от $\alpha$ има единствена проекциия в $\pi$, като съответствието между точките от $\alpha$ и техните проекции в $\pi$ е еднозначно обратимо.
Наистина ако $A \in \alpha$, то проекцията и $A' = SA \cap \pi$ се определя еднозначно от А и обратното $A = SA' \cap \pi$ се определя еднозначно от A′.




Нека $m = \alpha \cap \pi$ . Ако $a$ е права от $\alpha$ , $a'$ е проекцията ѝ в $\pi$ и $a \cap a' = M$, то $M \in m$. Ако една равнина $\beta$ минава през проекционния център $S$ и $b = \beta \cap \pi$, то всяка точка от $\beta$, се проектира в $b$. Следователно проекцията $\beta'$ на $\beta$ е правата $b$ – $\beta' = b = \beta \cap \pi$.
Ако $Y \in \pi$ то $Y = Y'$, т.е. точките от $\pi$ съвпадат с проекциите си.
Нека $u_\alpha$ е безкрайната права на крайната равнина $\alpha$. Проекцията на $u_\alpha$ от $S$ ( $S \notin \alpha$ ), в $\pi$ е пресечницата $u'_\alpha$ на равнините $(Su_\alpha)$ и $\pi$.

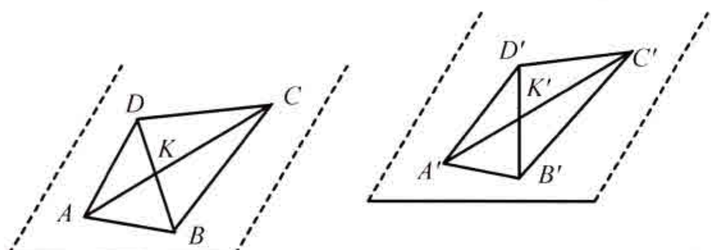
Ако центърът $S$ е крайна точка, то $(Su_\alpha)$ е крайна равнина, успоредна на $\alpha$. Тя ще пресича $\pi$ в безкрайната □ права $u_\pi$ , точно тогава, когато $\alpha$ е успоредна на $\pi$.

Ако центърът $S$ е безкрайна точка, то $(Su_\alpha)$ е безкрайната равнина Ω, и тя пресича $\pi$ в безкрайната □ права $u_\pi$ .

И така $u_\alpha$ се проектира в $u_\pi$ или когато $\alpha \parallel \pi$, или когато центърът $S$ е безкрайна точка. В случая на успоредно проектиране ($S = U_l$), проекцията на произволна безкрайна точка $U_a$ е безкрайна точка $U_a' \in u_\pi$, тъй като правата $U_lU_a$ е безкрайна и пресича $\pi$ в точка от $u_\pi$. Следователно при успоредно проектиране успоредни прави се проектират в успоредни прави.

## <u>Афинитет между две равнини. Афинно еквивалентни фигури</u>

Както видяхме, съответствието между точките на една равнина $\alpha$ $(S \notin \alpha)$ и техните проекции в $\pi$ е еднозначно обратимо.
Проектирането в $\pi$ от център S означаваме с $\psi_\pi^S$. Ако $\psi_\pi^S(u_\alpha) = u_\pi$, то съответствието между точките на $\alpha$ и $\pi$ има свойствата на афинна трансформация в равнината.
При изучаване на свойствата на успоредното проектиране важна роля играят така наречените афинно еквивалентните фигури.
**Деф.** Две фигури $F$ и $F$\` се наричат *афинно еквивалентни*, ако съществува афинна трансформация, която трансформира $F$ във $F$\`.
<u>**Теорема**</u>: Два равнинни четриъгълника $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са афинно еквивалентни, тогава и само тогава, когато $(ACK) = (A'C'K')$ и $(BDK) = (B'D'K')$, където $K = AC \cap BD$ и $K' = A'C' \cap B'D'$.
*Доказателство*: а) Нека $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са афинно еквивалентни. Тогава съществува афинна трансформация $\varphi$, такава че $A, B, C, D \xrightarrow{\varphi} A', B', C', D'$. Следователно
$K = AC \cap BD \xrightarrow{\varphi} A'C' \cap B'D' = K'$.
Тъй като афинните трансформации запазват простото отношение, то $(ACK) = (A'C'K')$ и $(BDK) = (B'D'K')$.
б) Нека $(ACK) = (A'C'K')$ и $(BDK) = (B'D'K')$. Ще докажем, че $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са афинно еквивалентни.
Нека $E$ е произволна точка и $E \notin (A,B,C)$, $E \notin (A',B',C')$. Тогава съществува точно една афинна трансформация $\varphi$ такава , че
$A, B, C, E \xrightarrow{\varphi} A', B', C', E'$.




Нека $K \xrightarrow{\varphi} K^*$. Тъй като $K \in AC$, то $K^* \in A'C'$ и $(ACK) = (A'C'K^*)$. Но $(ACK) = (A'C'K')$.
Следователно $(A'C'K^*) = (A'C'K')$ и $K^* \equiv K$\`, т.е. $K \xrightarrow{\varphi} K'$.
Нека $D \xrightarrow{\varphi} D^*$. Тъй като $D \in BK$, то $D^* \in B$\`$K$\` и $(BDK) = (B'D^*K')$. Но $(BDK) = (B'D'K')$.
Следователно $(B'D^*K') = (B'D'K')$ и $D^* \equiv D'$, т.е. $D \xrightarrow{\varphi} D'$.
Така получихме, че $A, B, C, D \xrightarrow{\varphi} A', B', C', D'$, т.е. четриъгълниците $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са афинно еквивалентни.