Линейни пространства

$\mathbb{F}$ – поле $\quad \langle F, +_F, \cdot_F \rangle$

$\mathbb{V}$ – линейно пр-во над $\mathbb{F}$

$\langle \mathbb{V}, \oplus, \odot \rangle$

1) $\langle \mathbb{V}, \oplus \rangle$ абелева група

2) $1_F \odot a = a \quad \forall a \in \mathbb{V}$

3) $(\lambda + \mu) \odot a = \lambda \odot a \oplus \mu \odot a$

4) $\lambda \odot (a \oplus b) = \lambda \odot a + \lambda \odot b$

5) $\lambda \odot (\mu \odot a) = (\lambda \cdot \mu) \odot a$

① Да се докаже, че $\mathbb{R}^{\leq n}[x]$ образува ЛП над $\mathbb{R}$ относно стандартните операции, т.е. събиране на полиноми и умножение на полином с число.

$\mathbb{R}^{\leq n}[x] = \{ \underset{\text{полиноми}}{f \in \mathbb{R}[x]} \mid \deg f \leq n \}$ за $n \in \mathbb{N}$

1) Ще док. че $< \mathbb{R}^{\leq n}[x], \oplus >$ е абелева група

1.1) Затвореност, т.е. дали ако вземем два п-ма с реални коеф. ще получим полином с реални коеф. като ги съберем.

Нека $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{R}^{\leq n}[x]$ и

$g = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n \in \mathbb{R}^{\leq n}[x]$. $a_i, b_i \in \mathbb{R}$

за $i = 0, \ldots, n$

$$f \oplus g = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n =$$

$$= \underbrace{a_0 + b_0}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(a_1 + b_1)}_{\in \mathbb{R}}x + \underbrace{(a_2 + b_2)}_{\in \mathbb{R}}x^2 + \dots + \underbrace{(a_n + b_n)}_{\in \mathbb{R}}x^n$$

$$\Rightarrow f \oplus g \in \mathbb{R}^{\leq n}[x]$$

1.2) асоциативност:

$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ $\in \mathbb{R}^{\leq n}[x]$

$g = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ $\in$

$h = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ $\in$

Трябва да док-ме: $(f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)$

Лява страна $= (f \oplus g) \oplus h =$

$= (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) \oplus h =$

$= (a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n) \oplus h$

$(a_0+b_0+(a_1+b_1)x+\dots+(a_n+b_n)x^n)\oplus(c_0+c_1x+\dots+c_nx^n)=$

$=\underline{(a_0+b_0+c_0+(a_1+b_1+c_1)x+\dots+(a_n+b_n+c_n)x^n}$

Дясна страна $= f\oplus(g\oplus h)=$

$=f\oplus(b_0+c_0+(b_1+c_1)x+\dots+(b_n+c_n)x^n)=$

$=(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n)\oplus(b_0+c_0+(b_1+c_1)x+\dots+(b_n+c_n)x^n)=$

$=\underline{(a_0+b_0+c_0+(a_1+b_1+c_1)x+\dots+(a_n+b_n+c_n)x^n)}$

Лява страна = дясна страна $\Rightarrow \oplus$ е асоциативна

1.3 Нека $0_{\mathbb{R}^{\le n}[x]}$ означим елемент от $\mathbb{R}^{\le n}[x]$,

за който $\forall f \in \mathbb{R}^{\le n}[x]$ $\boxed{f \oplus 0_{\mathbb{R}^{\le n}[x]} = 0_{\mathbb{R}^{\le n}[x]} \oplus f = f}$

$$0_{\mathbb{R}^{\le n}[x]} = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$$

$$f = \underline{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}$$

$$f \oplus 0^{\le n}_{\mathbb{R}[x]} = \underline{a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n}$$

$$0_{\mathbb{R}^{\le n}[x]} \oplus f = \underline{b_0 + a_0 + (b_1 + a_1)x + \dots + (b_n + a_n)x^n}$$

$$\left| \begin{array}{l} \underline{a_0 + b_0 = a_0} = b_0 + a_0 \\ \underline{a_i + b_i = a_i} \\ i = 1, \dots, n \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} b_0 = a_0 - a_0 = 0 \\ b_1 = a_1 - a_1 = 0 \\ \dots \\ b_n = a_n - a_n = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^{\le n}[x]} = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n$$

1.4) Противоположен

Нека $f \in \mathbb{R}^{\leq n}[x] \Rightarrow f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$.

Питаме се дали $\exists f' \in \mathbb{R}^{\leq n}[x] / f \oplus f' = f' \oplus f = 0_{\mathbb{R}^{\leq n}[x]}$

$$f' = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

$$f \oplus f' = \underline{(a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \dots + (a_n+b_n)x^n}$$

$$f' \oplus f = \underline{(b_0+a_0) + (b_1+a_1)x + \dots + (b_n+a_n)x^n}$$

$$0_{\mathbb{R}^{\leq n}[x]} = \underline{0 + 0x + \dots + 0x^n}$$

$$\left| \begin{array}{l} a_0+b_0 = 0 = b_0+a_0 \\ a_1+b_1 = 0 = b_1+a_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n = 0 = b_n+a_n \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} b_0 = -a_0 \\ b_1 = -a_1 \\ \vdots \\ b_n = -a_n \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f' = -a_0 + (-a_1)x + \dots + (-a_n)x^n$$

1.5) Комутативност

Нека $f, g \in \mathbb{R}^{\leq n}[x]$. Искаме да док че

$f \oplus g = g \oplus f$

$f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$; $g = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$

$f \oplus g = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n) x^n$

$g \oplus f = b_0 + a_0 + (b_1 + a_1)x + \dots + (b_n + a_n) x^n$

$\mathbb{R}$ е поле

$a_0 + b_0 = b_0 + a_0$
$a_1 + b_1 = b_1 + a_1$
$\dots$
$a_n + b_n = b_n + a_n$

$\Longrightarrow$ $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ е аб. гр.
и значи $+$ е комутативно
и значи $a_i + b_i = b_i + a_i$
$\forall a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$(a_0, a_1, \dots, a_n) \oplus (b_0, b_1, \dots, b_n)$

Дотук доказахме, че $\langle \mathbb{R}^{\leq n}[x], \oplus \rangle$ аб. гр.

2) Нека $f \in \mathbb{R}^{\leq n}[x]$

$f = a_0 + \dots + a_n x^n$

Питаме се дали $1 \odot f = f$

$$1 \odot (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = (\underbrace{1.a_0}_{a_0} + \underbrace{(1.a_1)}_{a_1} x + \dots + \underbrace{(1.a_n)}_{a_n} x^n) =$$

$$= a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \checkmark$$

3) Нека $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $f \in \mathbb{R}^{\leq n}[x]$

Питаме се дали

$(\lambda + \mu) \odot f = \lambda \odot f \oplus \mu \odot f$

$$(\lambda + \mu) \odot (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = ((\lambda + \mu) a_0 + ((\lambda + \mu) a_1) x + \dots + ((\lambda + \mu) a_n) x^n =$$

$$= (\lambda a_0 + \mu a_0 + (\lambda a_1 + \mu a_1) x + \dots + (\lambda a_n + \mu a_n) x^n = \text{лява страна}$$

Дясна страна $= \lambda \odot f \oplus \mu \odot f$

$\lambda \odot f = \lambda a_0 + (\lambda a_1)x + \dots + (\lambda a_n)x^n$

$\mu \odot f = \mu a_0 + (\mu a_1)x + \dots + (\mu a_n)x^n$

Дясна страна $= (\lambda a_0 + \mu a_0 + (\lambda a_1 + \mu a_1)x + \dots + (\lambda a_n + \mu a_n)x^n =$

$=$ Лява страна $\Rightarrow$ ✓

4) $f, g \in \mathbb{R}^{\leq n}[x], \lambda \in \mathbb{R}$

Питаме се дали $\lambda \odot (f \oplus g) = \lambda \odot f \oplus \lambda \odot g$

Лява страна $= \lambda \odot (a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n) =$

$= \lambda(a_0 + b_0) + (\lambda(a_1 + b_1))x + \dots + (\lambda(a_n + b_n))x^n =$

$= \underline{\lambda a_0 + \lambda b_0 + (\lambda a_1 + \lambda b_1)x + \dots + (\lambda a_n + \lambda b_n)x^n}$

$\left.\begin{array}{l} \lambda \odot f = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \dots + \lambda a_n x^n \\ \lambda \odot g = \lambda b_0 + \lambda b_1 x + \dots + \lambda b_n x^n \end{array}\right\} \oplus$ става същото като лявата страна

5) Нека $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $f \in \mathbb{R}^{\leq n}_{[x]}$

Питаме се дали

$$(\lambda . \mu) \odot f = \lambda \odot (\mu \odot f)$$

Лява страна $= \lambda\mu a_0 + (\lambda\mu a_1)x + \dots + (\lambda\mu a_n)x^n$

$\mu \odot f = \mu a_0 + \mu a_1 x + \dots + \mu a_n x^n$

$\lambda \odot (\mu \odot f) = \lambda\mu a_0 + (\lambda\mu a_1)x + \dots + (\lambda\mu a_n)x^n =$

$=$ Дясната страна

От всичко доказано

$\langle \mathbb{R}^{\leq n}_{[x]}, \oplus, \odot \rangle$ образува ЛП

над полето $\mathbb{R}$

Линейно подпространство

Нека $\langle \mathbb{V}, \oplus, \odot \rangle$ е ЛП над поле $\langle \mathbb{F}, +, \cdot \rangle$. Нека $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$.
Казваме, че $\mathbb{W}$ е подпространство на $\mathbb{V}$, ако:

0) $0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{W}$ (или че $\mathbb{W} \neq \emptyset$)

1) $(\forall w_1, w_2 \in \mathbb{W})[w_1 \oplus w_2 \in \mathbb{W}]$

2) $(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall w \in \mathbb{W})[\lambda \odot w \in \mathbb{W}]$

над поле $\mathbb{F}$.

Пр: $\qquad \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$

$\mathbb{W} = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_2 = 0\}$ е ЛП на $\mathbb{R}^3$

Д-во: 0) Вярно ли е че $\overline{O}_V \in W$?

$(a_1, 0, a_3) \in W$ за $a_1, a_3 \in \mathbb{R}$

$O_W = (0,0,0)$. За $a_1 = a_3 = 0$

имаме, че $\overline{O}_V \in W$. ✓

$W \subseteq \mathbb{R}^3$.

(просто фиксираме втората коорд. да е 0)

1) Нека $w_1, w_2 \in W$

$\Rightarrow w_1 = (a_{11}, 0, a_{13})$

$w_2 = (a_{21}, 0, a_{23})$

$w_1 \oplus w_2 = (a_{11} + a_{21}, \underbrace{0}^{+0}, a_{13} + a_{23}) \in W$ ✓

2) Нека $\lambda \in \mathbb{R}$ и $w \in W$

$w = (a_1, 0, a_3)$

$\lambda \odot w = (\lambda a_1, 0, \lambda a_3) \in W$

$0, 1, 2 \Longrightarrow W$ е подпространство на $\mathbb{R}^3$.

Домашно за упр.

Нека $\mathbb{V} = \mathbb{R}^+$

$a \oplus b = a \cdot b$

$\lambda \odot a = a^{\lambda}$

Да се док. че $\mathbb{V}$ е ЛП над $\mathbb{R}$

Линейна зависимост и независимост

Нека $\mathbb{V}$ е ЛП над полето $\mathbb{F}$ и нека $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{V}$.

Векторът $v = (\lambda_1 \odot a_1) \oplus (\lambda_2 \odot a_2) \oplus \dots \oplus (\lambda_n \odot a_n) \in \mathbb{V}$ се нарича линейна комбинация на векторите $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Казваме, че

Деф. Нека v е ЛК на $a_1, a_2, \dots, a_n$. Казваме, че $a_1, a_2, \dots, a_n$ са линейно независими, ако

$(\lambda_1 \odot a_1 \oplus \lambda_2 \odot a_2 \oplus \dots \oplus \lambda_n \odot a_n = \overline{0}_{\mathbb{V}}) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0)$

Ако $(\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F})(\exists i \in \{1, \dots, n\})$:

$$\left[\lambda_i \neq 0 \ \& \ \lambda_1 \odot a_1 \oplus \lambda_2 \odot a_2 \oplus \dots \oplus \lambda_n \odot a_n = \overline{0}_V\right]$$

<u>Пр:</u> $\mathbb{R}^2$ $a_1 = (1,0)$ и $a_2 = (0,1)$ са ЛНЗ. Защо?

Да доп. че a_1, a_2 са ЛЗ. Тогава $(\exists \lambda_1, \lambda_2)(\lambda_1, \lambda_2 \neq (0,0))$

$$\left[\lambda_1 \odot a_1 \oplus \lambda_2 \odot a_2 = \overline{0}_V\right]$$

$$\lambda_1(1,0) \oplus \lambda_2(0,1) = (0,0) \iff (\lambda_1, 0) \oplus (0, \lambda_2) = (0,0)$$

$\Longrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$ и значи a_1, a_2 са ЛНЗ.

<u>Пр:</u> $b_1 = (1,1)$, $b_2 = (5,5)$ | $\lambda_1(1,1) + \lambda_2(5,5) = (0,0)$

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = \overline{0}_V$$

$$(\lambda_1 + 5\lambda_2, \lambda_1 + 5\lambda_2) = (0,0)$$

$(\lambda_1 + 5\lambda_2, \lambda_1 + 5\lambda_2) = (0,0)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_2 = p \quad x_1 = -5p$

Решения: $(-5p, 1)$

и примерно за $p = 1$

$\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 1$ е едно ненулево решение

$\Longrightarrow a_1, a_2$ са ЛЗ.

Тв. Нулевият вектор е ЛЗ

Д-во: $\lambda \odot \overline{0}_V = 0_V$ (примерно за $\lambda = 1$)

Основна лема на ЛА

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$

$\forall j \in \{1, 2, \dots, k\}$ $b_j = \lambda_{j1} \odot a_1 \oplus \lambda_{j2} \odot a_2 + \dots + \lambda_{jn} \odot a_n$

и $k > n$, то B е ЛЗ система от вектори.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

Базис, размерност и координати

Нека $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ - система в-ри

$$\ell(A) = \left\{ \lambda_1 \odot a_1 \oplus \lambda_2 \odot a_2 \oplus \dots \oplus \lambda_n \odot a_n \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{F} \quad i=1,\dots,n \\ a_i \in \mathbb{V} \end{array} \right\}$$

Пр: $a_1 = (1,2)$, $a_2 = (5,1)$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$

$$2 \odot a_1 \oplus (-1) \odot a_2 = (2,4) \oplus (-5,-1) = (-3,3) \in \ell(a_1, a_2)$$

Базис: М-во от линейно независими в-ри, за които $\ell(a_1, a_2, \dots, a_n) = \mathbb{V}$

Пр: $\mathbb{R}^3$ $a_1 = (1,0,0)$, $a_2 = (0,1,0)$, $a_3 = (0,0,1)$

Защо са ЛНЗ $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(0,1,0)+\lambda_3(0,0,1)=(0,0,0)$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2\cdot 0+\lambda_3\cdot 0=0\\ \lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 1+\lambda_3\cdot 0=0\\ \lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 0+\lambda_3\cdot 1=0\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$$

$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow a_1,a_2,a_3$ са ЛНЗ

$\ell(a_1,a_2,a_3)=\mathbb{R}^3$

Защо

Нека $(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$. Търсим $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$:

$\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\lambda_3a_3=(a_1,a_2,a_3)$ $\Rightarrow \mathbb{R}^3\subseteq\ell(a_1,\dots,a_n)$

$\lambda_1=a_1,\lambda_2=a_2,\lambda_3=a_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&a_1\\0&1&0&a_2\\0&0&1&a_3\end{array}\right]$$

За $\mathbb{F}^n$

$(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)$ – стандартен базис

! Винаги ако $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{V}$, то $\ell(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ е подм-во на $\mathbb{V}$ и още повече е подпространство на $\mathbb{V}$.

<u>Д-во</u>: 0) $\bar{0}_{\mathbb{V}} \in \ell(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
Избираме $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$. Тогава
$0a_1 + 0a_2 + \ldots + 0a_n = 0_{\mathbb{V}} \in \ell(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

1) Нека $v_1, v_2 \in \ell(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $\boxed{\begin{matrix}\lambda_i \in F \\ \mu_i \in F\end{matrix}}$
$v_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$
$v_2 = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_n a_n$
$v_1 + v_2 = \underline{(\lambda_1 + \mu_1)} a_1 + \underbrace{(\lambda_2 + \mu_2)}_{\nu_2} a_2 + \ldots + \underbrace{(\lambda_n + \mu_n)}_{\nu_n} a_n \in \ell(a_1, \ldots, a_n)$

2) $\mu \in F$,
$v \in \ell(a_1, \ldots, a_n)$ $\mu v = \underline{(\mu\lambda_1)} a_1 + \underline{(\mu\lambda_2)} a_2 + \ldots + \underline{(\mu\lambda_n)} a_n \in \ell(\ldots)$

Размерност броят на векторите в който да е базис

Пр/ $\mathbb{R}^3$ е 3

dim

$$\dim \mathbb{F}^n = n$$