Тема 2: Редове
Основни дефиниции и теореми. Критерии за сходимост

1. Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ е сходящ, то и редът е $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е сходящ. В този случай казваме, че редът $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е **абсолютно сходящ .**

условно сходящ.

Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е разходящ, то и редът $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ е разходящ.

2. Критерий на Даламбер (гранична форма) за реда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Нека съществува границата $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$.

– ако $l<1$, **редът е абсолютно сходящ;**
– ако $l>1$, **редът е разходящ**
– ако $l=1$, но $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\geq 1$ за всяко **(не границата)**, то **редът е разходящ.**

В случая $l=1$ и $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leq 1$ с **критерия на Даламбер не може да се установи дали един ред е сходящ или не.**

3. Критерий на Раабе и Дюамел (гранична форма) за реда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Нека съществува границата $\lim_{n\to\infty}n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|-1\right)=\alpha$.

– ако $\alpha>1$, **редът е абсолютно сходящ;**
– ако $\alpha<1$, **редът е разходящ**
– ако $n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|-1\right)\leq 1$ за всяко n **(не границата), редът** $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ **е разходящ;**
– **ако** $\alpha>0$, то $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. (разгледайте задача 6)

4. Критерий на Лайбниц. Ако за ред от вида $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ е изпълнено $a_n\geq a_{n+1}>0$ и $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, то редът е сходящ.

5. Критерия на Коши. Нека съществува границата $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l$.

– ако $l<1$, **редът е абсолютно сходящ;**
– ако $l>1$, **редът е разходящ**
– ако $l=1$, но $\sqrt[n]{|a_n|}\geq 1$ за всяко n **(не границата)**, то **редът е разходящ.**

Критерият на Коши не дава резултат, ако $\sqrt[n]{|a_n|} \le 1$.

Задача 1. Изследвайте за сходимост редовете

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{3^n.n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n!)^2}{(2n)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)}, a>0$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix}$.

Решение. а) Ще приложим критерия на Даламбер

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1.3.5...(2n-1)(2n+1)}{3^{n+1}.(n+1)!} . \frac{3^n.n!}{1.3.5...(2n-1)} = \frac{(2n+1)}{3(n+1)} \to \frac{2}{3} < 1.$$

Редът е сходящ.

б) Ще приложим критерия на Даламбер

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}\ \ (n+1)!\ ^{2}}{(2(n+1))!} . \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2} = \frac{5^n.5.(n+1)^2 (n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} . \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2} =$$

$$= \frac{5(n+1)}{2(2n+1)} \to \frac{5}{4} > 1.$$

Редът е сходящ.

в) Ще приложим критерия на Даламбер

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}\ \ (n+1)!\ ^{2}}{(2(n+1))!} . \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to 1.$$

Но $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n+4}{4n+2} > 1$.

Редът е разходящ.

г) Ще приложим критерия на Даламбер

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)...(a+n)(a+n+1)} . \frac{(a+1)(a+2)...(a+n)}{n!} = \frac{n+1}{a+n+1} \to 1,$$

но $\frac{n+1}{a+n+1} < 1$ ($a > 0$) и критерия на Даламбер не дава резултат.

Ще приложим критерия на Раабе – Дюамел:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\ \ \frac{a+n+1}{n+1} - 1\ \ = \frac{na}{n+1} \to a.$$

Ако $a > 1$, редът е сходящ.

Ако $a < 1$, редът е разходящ.

При $a = 1$ редът е $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(1+1)(1+2)...(1+n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ (хармоничен ред) и следователно е разходящ.

г) Ще приложим критерия на Даламбер (Да припомним в числителя на биномния коефициент $\begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix}$ има n множителя):

$$a_n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)...(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n.\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)...(\frac{1}{2}+n-1)}{n!} =$$

$$=\frac{(-1)^n.1.3.5.(2n-1)}{2^n.n!}.$$

и $a_{n+1}=\dfrac{(-1)^{n+1}1.3.5...(2n-1)(2n+1)}{2^{n+1}.(n+1)!}=\dfrac{(-1)^{n+1}1.3.5...(2n-1)(2n+1)}{2^{n+1}.(n+1).n!}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(-1)^{n+1}1.3.5...(2n-1)(2n+1)}{2^{n+1}.(n+1).n!}.\frac{2^n.n!}{(-1)^n1.3.5...(2n-1)}\right|=\frac{2n+1}{2(n+1)}\to 1.$$

Тъй като $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{2n+1}{2n+2}<1$, критерият на Даламбер не дава резултат. Прилагаме критерия на Раабе и Дюамел:

$$n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|-1\right)=n\ \frac{2n+2}{2n+1}-1\ =\frac{n}{2n+1}\to\frac{1}{2}.$$

Съгласно Раабе и Дюамел редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\binom{-\frac{1}{2}}{n}\right|$ е разходящ. За да изследваме редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n1.3.5...(2n-1)}{2^n.n!}$ ще приложим критерият на Лайбниц.

От неравенството $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{2n+1}{2n+2}<1$ следва, че редицата с общ член $|a_n|=\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2^n.n!}$ е монотонно намаляваща, а от $n\left(\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|-1\right)=n\ \dfrac{2n+2}{2n+1}-1\ =\dfrac{n}{2n+1}\to\dfrac{1}{2}$ (вж. критерия на Раабе и Дюамел) следва, че $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2^n.n!}=0$.

Следователно по критерия на Лайбниц редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n1.3.5...(2n-1)}{2^n.n!}$ е сходящ и понеже редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\binom{-\frac{1}{2}}{n}\right|$ е разходящ, то редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}$ е условно сходящ.

Задача 2. (За домашна работа) Изследвайте за сходимост реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{3}}{n}$.

Задача 3. Да се изследва при кои стойности на $a>0$ редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ е сходящ и за кои разходящ.

Решение. В този случай е удобно да използваме критерия на Коши

$$\sqrt[n]{\left(\frac{an}{n+1}\right)^n}=\frac{an}{n+1}\to a$$

При $a>1$ редът е разходящ, а при $a<1$ – редът е сходящ.

При $a=1$ редът е $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+1})^n$. Тъй като $(\frac{n}{n+1})^n=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{1}{e}\neq 0$, съгласно необходимото условие редът е разходящ.

Задача 4. Да се изследва дали редът $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+2}{n+3})^{n^2+n}$ е сходящ или разходящ.

Решение. В тази задача ще използваме критерия на Коши

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{(\frac{n+2}{n+3})^{n^2+n}}=(\frac{n+2}{n+3})^{n+1}=(1+\frac{-1}{n+3})^{n+1}=\left(1+\frac{\frac{-1(n+1)}{n+3}}{n+1}\right)^{n+1}\to e^{-1}=\frac{1}{e}<1.$$

Редът е сходящ.

Решете самостоятелно

Задача 5. Да се изследва дали редът $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+3}{n+1})^{n^2}$ е сходящ или разходящ.

Задача 6. Нека за реда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ с положителни членове е изпълнено $\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\alpha>0$. Тогава $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Доказателство.

Първо да обърнем внимание, че от $\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\alpha>0$ следва $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$:

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\alpha \\ \quad\quad n\to\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\end{cases}\Rightarrow\left\{\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1).\frac{1}{n}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1\right.$$

Нека *k* е естествено число по-голямо от $\frac{1}{\alpha}$, т. е. такова че $k\alpha>1$ (такова число съществува, тъй като множеството на естествените числа не е ограничено отгоре.

Ще приложим критерия на Раабе и Дюамел за реда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^k$:

$$n(\frac{a_n^k}{a_{n+1}^k}-1)=\alpha>0\Rightarrow n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\underbrace{[(\frac{a_n}{a_{n+1}})^{k-1}+(\frac{a_n}{a_{n+1}})^{k-2}+(\frac{a_n}{a_{n+1}})^{k-3}+...1]}_{k\text{ събираеми, всяко от които клони към 1}}\to\alpha k>1.$$

Следователно редът $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^k$ е сходящ и съгласно необходимото условие за сходимост на редове $\lim_{n\to\infty}a_n^k=0$, а оттук и $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.