Глава 10

Централна гранична теорема

10.1 Пораждаща моментите функция

Определение 10.1 *Нека сл.в. X е такава, че за някое $h > 0$, $\mathbf{E}e^{tX}$ съществува за $-h < t < h$. Тогава пораждаща моментите функция (п.м.ф.) на сл.в. X наричаме функцията $M_X(t) = \mathbf{E}e^{tX}$, за $-h < t < h$.*

Ако m е цяло положително число и с $\mathrm{M}_X^{(m)}(t)$ означим $m-$тата производна на $M_X(t)$, то чрез последователно диференциране по t в $t = 0$ имаме

$$\mathrm{M}_X^{(m)}(0) = \mathbf{E}(X^m).$$

Ще получим п.м.ф. за някои важни разпределения, необходими за доказателството на граничните резултати, изложени в тази глава.

10.1.1 Нормално разпределение - $X \in N(\mu, \sigma^2)$

Ще покажем, че п.м.ф. за $N(\mu, \sigma^2)$ има вида:

$$m_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

По дефиниция п.м.ф. на $X \in N(\mu, \sigma^2)$ има представянето

$$m_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx - \frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2} dx. \tag{10.1.1}$$

Първо ще преработим показателя на експоненциалната функция по подходящ начин. Означаваме

$$I = tx - \frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2$$

Именно

$$I = tx - \frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2\mu x + \mu^2) =$$
$$= -\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2\mu x - 2\sigma^2 tx + \mu^2) =$$
$$= -\frac{1}{2\sigma^2}[x^2 - 2(\mu + \sigma^2 t)x + (\mu + \sigma^2 t)^2 - (\mu + \sigma^2 t)^2 + \mu^2] =$$
$$= -\frac{1}{2\sigma^2}[x - (\mu + \sigma^2 t)]^2 + \frac{1}{2\sigma^2}(\mu^2 + 2\mu\sigma^2 t + \sigma^4 t^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\mu^2 =$$
$$= -\frac{1}{2\sigma^2}[x - (\mu + \sigma^2 t)]^2 + \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

От последното разлагане на п.м.ф. на нормалното разпределение (10.1.1) получаваме

$$m_X(t) = e^{(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x - (\mu + \sigma^2 t)\right]^2} dx = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}},$$

поради това, че

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x - (\mu + \sigma^2 t)\right]^2} dx = 1$$

като плътност на $N(\mu + \sigma^2 t, \sigma^2)$.

10.1.2 Гама разпределение - $X \in \Gamma(\alpha, \beta)$

Да напомним дефиницията на Гама функция:

$$\Gamma(\alpha) \stackrel{def}{=} \int_0^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-z} dz, \quad \alpha > 0.$$

и дефиницията на $\Gamma(\alpha, \beta)-$ плътност:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0 \quad \alpha > 0 \quad \beta > 0.$$

Ще покажем, че п.м.ф. на $X \in \Gamma(\alpha, \beta)$ има вида:

$$1) \quad m_X(t) = [e^{tX}] = (1 - \beta t)^{-\alpha}, \quad t < \frac{1}{\beta},$$

откъдето не е трудно чрез диференциране в т. $t = 0$ да получим, че

2) $\mathbf{E}X = \alpha\beta$,

3) $\mathbf{D}X = \alpha\beta^2$.

И така по дефиниция имаме

$$m_X(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\overbrace{(1/\beta - t)x}^{z}} dx.$$

Правим смяна на променливите $z = \frac{(1-\beta t)x}{\beta}$, при което обратната трансформация е $x = \frac{\beta z}{1-\beta t}$, откъдето $dx = \frac{\beta dz}{1-\beta t}$.

Тогава

$$m_X(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty \left(\frac{\beta z}{1-\beta t}\right)^{\alpha-1} e^{-z}\frac{\beta dz}{1-\beta t} = \frac{\beta^\alpha}{(1-\beta t)^\alpha}\times\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\underbrace{\int_0^\infty z^{\alpha-1}e^{-z}dz}_{\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}$$

при $t < \frac{1}{\beta}$.

10.1.3 Експоненциално разпределение - $X \in Exp(\beta)$

То представлява частен случай на Гама разпределението, когато $\alpha = 1$, т.е. $\Gamma(1,\beta) = Exp(\beta)$ и има вероятностна плътност съответно $f(x) = \frac{1}{\beta}e^{-x/\beta}, \quad x > 0 \quad \beta > 0$.

Тогава п.м.ф. има вида

$$\mathbf{E}(e^{tX}) = \frac{1}{1-\beta t},$$

съответно $\mathbf{E}X = \beta, \quad \mathbf{D}X = \beta^2$.

10.2 Централна гранична теорема (ЦГТ)

Теорема 10.1 *Нека $X_1, X_2, \dots, X_n$ са наблюдения върху сл. в. X с $\mathbf{E}X = \mu$ и $\mathbf{D}X = \sigma^2 > 0$. Тогава:*

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y \in N(0,1),$$

където $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_n$.

Доказателство: БОО можем да считаме, че $\mu = 0$. Допускаме също, че п.ф.м. $M_X(t) = \mathbf{E}(e^{tX})$ съществува за $-h < t < h$.

Нека означим

$$m(t) = \mathbf{E}(e^{t(X-\mu)}) = e^{-\mu t}M(t), \quad -h < t < h,$$

т.е. $m(t)$ е п.ф.м. за $X - \mu$.

Тогава имаме, че

$$m(0) = 1, \quad m'(0) = \mathbf{E}(X-\mu) = 0, \quad m''(0) = \mathbf{E}(X-\mu)^2 = \sigma^2.$$

Използваме развитието по Тейлор на $m(t)$ около $t = 0$

$$m(t) = m(0) + \underbrace{m'(0)t}_{0} + \frac{m''(\xi)t^2}{2} = 1 + \frac{m''(\xi)t^2}{2}\left(\pm\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right),$$

което има вида

$$m(t) = 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{(m''(\xi)-\sigma^2)t^2}{2}, \quad 0 < \xi < t. \qquad (10.2.2)$$

Разглеждаме интересуващата ни п.ф.м.:

$$
\begin{aligned}
M(t;n) &= \mathbf{E}\left[exp\left(t\frac{\sum_i X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= \mathbf{E}\left[exp\left(t\frac{X_1-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) exp\left(t\frac{X_2-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \dots exp\left(t\frac{X_n-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] \\
&\overset{\text{н.е.р.}}{=} \mathbf{E}\left[exp\left(t\frac{X_1-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] \mathbf{E}\left[exp\left(t\frac{X_2-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] \dots \mathbf{E}\left[exp\left(t\frac{X_n-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= \left\{\mathbf{E}\left[exp\left(t\frac{X-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\right\}^n = \left[m\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n,
\end{aligned}
$$

за $\quad -h < \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} < h$.

Заместваме в (10.2.2) $t = \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$. Получаваме

$$m\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 n} + \frac{(m''(\xi) - \sigma^2)t^2}{2\sigma^2 n},$$

където $0 < \xi < \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$ и $-\sigma h\sqrt{n} < t < \sigma h\sqrt{n}$.

Тогава е изпълнено

$$M(t;n) = \left\{1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{(m''(\xi) - \sigma^2)t^2}{2n\sigma^2}\right\}^n.$$

Тъй като $m''(t)$ е непрекъсната в $t = 0$ и $\xi \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}(m''(\xi) - \sigma^2) = 0,$$

откъдето следва, че

$$\lim_{n\to\infty} M(t;n) = e^{t^2/2} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ще отбележим, че на това място съществено ще използваме следния резултат:

Теорема 10.2 *(Модификация на Къртис на теоремата на Леви-Крамер) Нека сл. в. Y_n имат ф.р. $F_n(y)$ и п.м.ф. $M(t;n)$, която съществува за $-h < t < h$, за всяко n. Ако съществува ф.р. $F(y)$ със съответна п.м.ф. $M(t)$, дефинирана за $|t| \le h_1 < h$ такава, че $\lim_{n\to\infty} M(t;n) = M(t)$, то Y_n има гранично разпределение с ф.р. $F(y)$.*

Остава да напомним, че функцията $e^{\frac{t^2}{2}}$ е п.м.ф. на стандартното нормално разпределение, т.е.

$$Y_n = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y \in N(0,1),$$

с което доказателството е завършено.

□