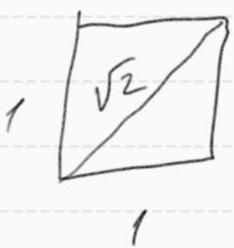
Комплексни числа

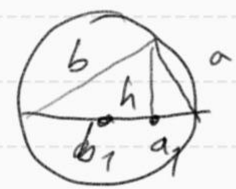
$\mathbb{N}$ - естествени числа. Смятаме, че $0 \notin \mathbb{N}$

$a + x = b \longrightarrow \mathbb{Z}$ - цели числа

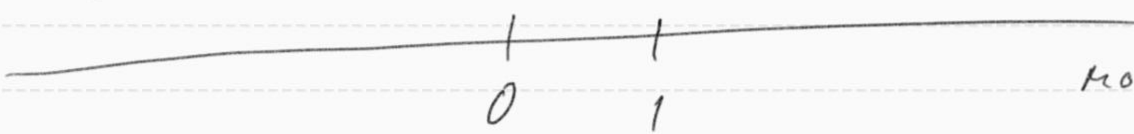
$ax = b \longrightarrow \mathbb{Q} \to$ рационални числа



$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



$h^2 = a_1 b_1$



можем да нанесем

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$
- $\sqrt{\frac{m}{n}}$; $m, n \in \mathbb{Z}$

e, π – не можем с линийка и пергел

Въвеждане на функциите $\longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ — рационални и ирационални

$\mathbb{R}$ — алгебрични и трансцендентни

корени на полином с рационални коеф.

e, π — трансц.

в $\mathbb{R}$ $x^2+1=0$ н.р.

$\to \frac{f(z)}{g(z)}$; f, g - пол. с реални коеф. $\to a+ib$

Търсим $\mathbb{C}$ — компл. числа

— съдържа $\mathbb{R}$

— уравн. $x^2+1=0$ има реш. $\to i=\sqrt{-1}$

— може сметки с „числата" — $+, -, \circ, /$

$\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \dashrightarrow \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

X, Y – множества

$X \times Y = \{\underbrace{(x, y)}_{\text{наредена двойка}} \mid x \in X, y \in Y\}$ – декартово произведение на X и Y

Заб. $\{1, 2, 2, 3\} = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$

наредена n-орка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

$X \times Y \times Z = \{(x, y, z) \mid x \in X, y \in Y, z \in Z\}$

и т.н.

$$(X \times Y) \times Z = \{((x,y),z) \mid x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z\}$$

$$X \times (Y \times Z) = \{(x,(y,z)) \mid x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z\}$$

„отъждествяване" (x,y,z), $((x,y),z)$, $(x,(y,z))$

$f: X \to Y$ изображение (функция)

$\forall x \in X \ \exists! y \in Y \quad y = f(x)$

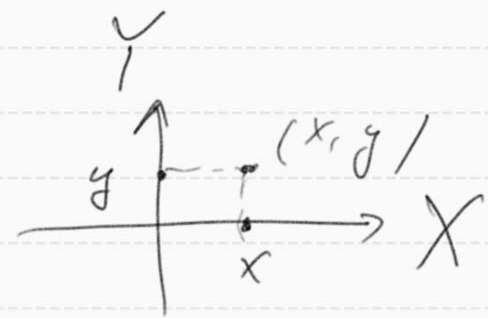
Забел. В у-ще $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; търсим ДО

Сега ДО$_f = X$

графика на $f: X \to Y$

$$\begin{aligned} f: X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

$$\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$



$R \subseteq X \times Y$ релация

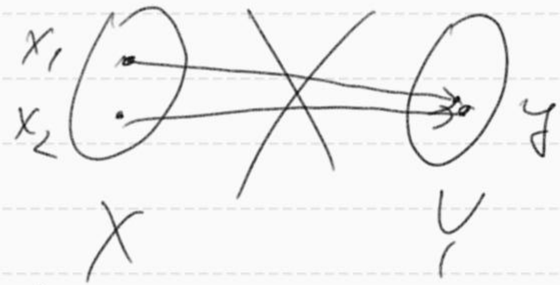
$(x, y) \in R \rightarrow xRy$

Зад.: R е графика на $f: X \to Y \iff$

1) $\forall x \in X \ \exists y \in Y : xRy$

2) xRy_1 и $xRy_2 \implies y_1 = y_2$

инективни $f: X \to Y$

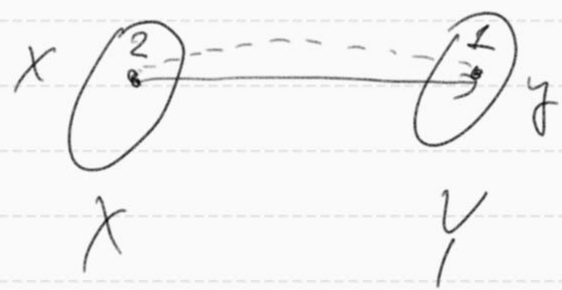


- $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Updownarrow$

- $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- $x_1 R y$ и $x_2 R y \Rightarrow x_1 = x_2$

сюрективни $f: X \to Y$



- $\forall y \in Y \ \exists x \in X : \underline{f(x) = y}$
  $\Leftrightarrow xRy$

- биективни = инективни + сюрективни

Пр. $f(x) = x^2$; $\mathbb{R}_1 = \{ r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0 \}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не е инект. ; не е сюрект.

$f : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}$ инект. ; не е сюрект.

$$\left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_2 = \pm x_1 \xRightarrow{x_{1,2} \in \mathbb{R}_1} x_2 = x_1 \right)$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_1$ не е инект. ; сюрект.

$$\left(\forall y \in \mathbb{R}_1 \quad f(\underbrace{\sqrt{y}}_{\in \mathbb{R}}) = y \right)$$

$f : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_1$ биективно

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

биекция

индекс	1	2	3	4	5	6	
$\mathbb{N}$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	...
$\mathbb{Z}$	0,	1,	−1,	2,	−2,	3,	−3

$2\mathbb{Z} = \{2z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ (чётные)

$f: \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ биекция

$z \mapsto 2z$

$f: X \to Y$ — биекция $\Rightarrow$ X и Y равномощны

$|X| = |Y|$ — мощность

$f(x) = x^2$ $\quad f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 4, 9\}$ биекция

$\{1, 2, 3\} \to \{e, \pi, \sqrt{2}\}$

$\mathrm{id}_X : X \to X$ идентитет

$x \longmapsto x$

$f : X \to Y \quad , \quad g : Y \to Z$

$g \circ f : X \to Z \quad ; \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$

„след" композиция на f и g

(произведение)

$f_1 : X_1 \to Y_1 \quad , \quad f_2 : X_2 \to Y_2$

$$f_1 = f_2 \iff \left| \begin{array}{l} X_1 = X_2 , \ Y_1 = Y_2 \\ \forall x \in X_1 = X_2 \quad f_1(x) = f_2(x) \end{array} \right.$$

Опр. Нека $f: X \to Y$. Функцията f е обратима, ако $\exists\, g: Y \to X$: $f \circ g = id_Y$ и $g \circ f = id_X$

Пр. $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$; $f(x) = x^2$

$g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ $\quad g(x) = \sqrt{x}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x \to f \circ g = id_{\mathbb{R}_+}$

$(g \circ f)(x) = g(x^2) = \sqrt{x^2} \overset{x \in \mathbb{R}_+}{=} x \to g \circ f = id_{\mathbb{R}_+}$

Бинарна операция в X — „$*$“

$\forall\, x, y \in X \quad \exists!\, x * y \in X \iff * : X \times X \to X$

$(x, y) \longmapsto x * y$

Зад. „\“ не е бинарна в $\mathbb{R}$ $1/0 \nexists$

и е бинарна в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Св-ва (с имена)

- комутативност – $\forall x, y \in X: \; x * y = y * x$
- асоциативност – $\forall x, y, z \in X \; (x * y) * z = x * (y * z)$

Зад. Може да се докаже, че за асоциативни операции скобите нямат значение, т.е. $a * b * c * \ldots * d$ с никакви скоби резултатът е един и същ ... толкова обикновено не пишем скоби

Пр. $(a*b)*(c*d)$; $((a*b)*c)*d$

$a*(b*(c*d))$

Пр. $(x^y)^z = x^{yz} \neq x^{y^z}$

Продължение на св-вата

— има неутрален (единичен / нулев) елемент e, ако

$$\forall x \in X \quad x*e = x = e*x$$

Пр. 1) 0 за $+$ в $\mathbb{R}$

2) 1 за $\cdot$ в $\mathbb{R}$

Тв. Неутралният ел. (ако $\exists$) е единствен

<u>Д-во</u>

Нека e', e'' са неутрални ел. за $*$

$$e' * e'' = \begin{cases} e'' & (e' \text{ е неутрален}; x = e'') \\ e' & (e'' \text{ е неутрален}; x = e') \end{cases} \Rightarrow e' = e''$$

<u>Опр. Обр-ст</u>

— Нека $*$ е бинарна опер. с неутрален ел. e. Казваме, че $x \in X$ е обратим, ако $\exists y \in X$:

$$xy = yx = e$$

<u>Пр.</u> 1) $\mathbb{R}$ с $+$ $\rightarrow$ $\forall$ са обратими $y = -x$

~~2) $\mathbb{R}$ с $\cdot$ $\rightarrow$ $\forall$ без~~

2) $\mathbb{R}$ с $\cdot$ $\to$ $\forall$ без 0 са обратни $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$

<u>Тв.</u> $\forall$ е асоц. и с неутр. ел. e. Тогава, ако $x \in X$ е обратим, то $\exists$ единствено $y \in X$:

$$x * y = y * x = e$$

<u>Д-во</u> Нека x, y', y'': $x * y' = y' * x = x * y'' = y'' * x = e$

$$\left.\begin{array}{l} y' * (x * y'') = y' * e = y' \\ \qquad \shortparallel \\ (y' * x) * y'' = e * y'' = y'' \end{array}\right\} \Rightarrow y' = y''$$

Тогава това единствено y наричаме обратен на x и бележим с x^{-1}

Зад. f, g, h - изобр. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

f - обратимо $(f : X \to Y)$, ако $\exists g : Y \to X : \left| \begin{array}{l} f \circ g = id_Y \\ g \circ f = id_X \end{array} \right.$

Тв. $\forall f : X \to Y \Rightarrow f \circ id_X = f$ и $id_Y \circ f = f$

$$\left(\left. \begin{array}{l} f : X \to Y, \ id_X : X \to X \Rightarrow f \circ id_X : X \to Y \\ \forall x \in X \quad (f \circ id_X)(x) = f(\underbrace{id_X(x)}_{x}) = f(x) \Rightarrow \end{array} \right\} \Rightarrow f \circ id_X = f \right)$$

Зад. $X = Y \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \forall x \in X \Rightarrow x \in Y \Leftrightarrow X \subseteq Y \\ \forall y \in Y \Rightarrow y \in X \Leftrightarrow Y \subseteq X \end{array} \right.$

Тв Ако $f: X \to Y$ обратимо и $g': Y \to X : \left|\begin{array}{l} f\circ g' = id_Y \\ g'\circ f = id_X \end{array}\right.$,

$g'': Y \to X : \left|\begin{array}{l} f\circ g'' = id_Y \\ g''\circ f = id_X \end{array}\right.$, то $g' = g''$

Д-во $(g', g'': Y \to X)$

$$\left.\begin{array}{l} g'\circ(f\circ g'') = g'\circ id_Y = g' \\ \qquad \shortparallel \\ (g'\circ f)\circ g'' = id_X \circ g'' = g'' \end{array}\right\} \Rightarrow g' = g''$$

Зад Ако $f: X \to Y$ е обратимо, то $\exists!\, g: Y \to X : \left|\begin{array}{l} f\circ g = id_Y \\ g\circ f = id_X \end{array}\right.$

g — обратно на f; бележим с f^{-1}

Теорема $f: X \to Y$

f - биекция $\iff$ f - обратимо

Д-во $(\Rightarrow)$ $? \; g: Y \to X$

$$\left.\begin{aligned} & y \in Y \overset{f\text{-сюр.}}{\Longrightarrow} \exists x: y = f(x) \\ & f \text{ - инек.} \Rightarrow \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \right) \end{aligned}\right\} \exists!\, x \in X : y = f(x)$$

$g(y) := x$. Ясно е, че $f \circ g = id_Y$ и $g \circ f = id_X$

$(\Leftarrow)$ $\Rightarrow \exists f^{-1}: Y \to X$

$- \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$

$\Rightarrow (f^{-1} \circ f)(x_1) = (f^{-1} \circ f)(x_2)$

$\Rightarrow id_X(x_1) = id_X(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow$ инек.

$- \; y \in Y \; ; \; x := f^{-1}(y) \implies f(x) = y$

$\implies$ сюрект.

<u>Заб.</u> $f : X \to Y \to R_f \subseteq X \times Y$

$$R_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in X \}$$

(Ако $R \subseteq X \times Y$, то $R^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in R \} \subseteq Y \times X$)

Ако R_f^{-1} е изобр., то $R_f^{-1} = R_{f^{-1}} \longleftrightarrow f^{-1}$

$R \subseteq X \times X$ (релация)

$(x, y) \in R \iff x R y$

Св-ва / дефиниции

- $\forall x \in X \;\; xRx$ — рефлексивна
- $\forall x, y \in X$ от $xRy \Rightarrow yRx$ — симетрична
- $\forall x, y, z \in X$ от xRy и $yRz \Rightarrow xRz$ — транзитивна
- $\forall x, y \in X \;\; xRy$ или yRx
- $\forall x, y \in X : xRy$ и $yRx \Rightarrow x = y$

Опр. Релация на еквивалентност е рефлексивна, симетрична и транзитивна релация

обикновено пишем $x \sim y$

Пр. „=", „$\leq$"

X - равнината (множ. от т. в равн.)

$X^2 = X \times X \leftarrow$ насочени отсечки

$(A, B) \longleftrightarrow$  $\vec{AB}$

$\vec{AB} \sim \vec{CD} \overset{def}{\iff}$ успоредни, с равни дължини и посоки
(еквивалентни, равни)

$\sim$ е релация на еквивалентност

$X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

$(a,b) \sim (c,d) \overset{def}{\iff} ad = bc$ което е рел. на еквивалентност

$\boxed{\text{Защо?}}$

Опр. $[x] = \bar{x} = \{ y \in X \mid x \sim y \}$ – клас на еквивалентност с представител x

$(\sim \underbrace{\text{рел. на еквив.}}_{PE} \text{ в } X)$

Т-ма 1) $x \in \bar{x}$

2) $y \in \bar{x} \iff \bar{y} = \bar{x}$

3) $\bar{x} \neq \bar{y} \iff \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$

4) $\bar{x} = \bar{y} \iff x \sim y$

Заб. 3) $\rightarrow$ Два класа по екв. или съвпадат, или не се пресичат. Тоест множеството се разпада на непресичащи се класове на еквивалентност

$$X = \bigcup_{x \in X} \bar{x}$$

Dem. 2) (⇒) $y \in \bar{x} \Rightarrow x \sim y$

- $z \in \bar{y} \Rightarrow y \sim z \Rightarrow x \sim z \Rightarrow z \in \bar{x} \Rightarrow \bar{y} \subseteq \bar{x}$
- $z \in \bar{x} \Rightarrow x \sim z \xRightarrow{y \sim x} y \sim z \Rightarrow z \in \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \subseteq \bar{y}$

$\Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$

(⇐) evid.

3) (⇒) Dacă $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$, $\Rightarrow \exists z \in \bar{x} \cap \bar{y}$

$\Rightarrow z \in \bar{x}$ și $z \in \bar{y} \xRightarrow{2)} \bar{z} = \bar{x}$ și $\bar{z} = \bar{y} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$

(⇐) evid.

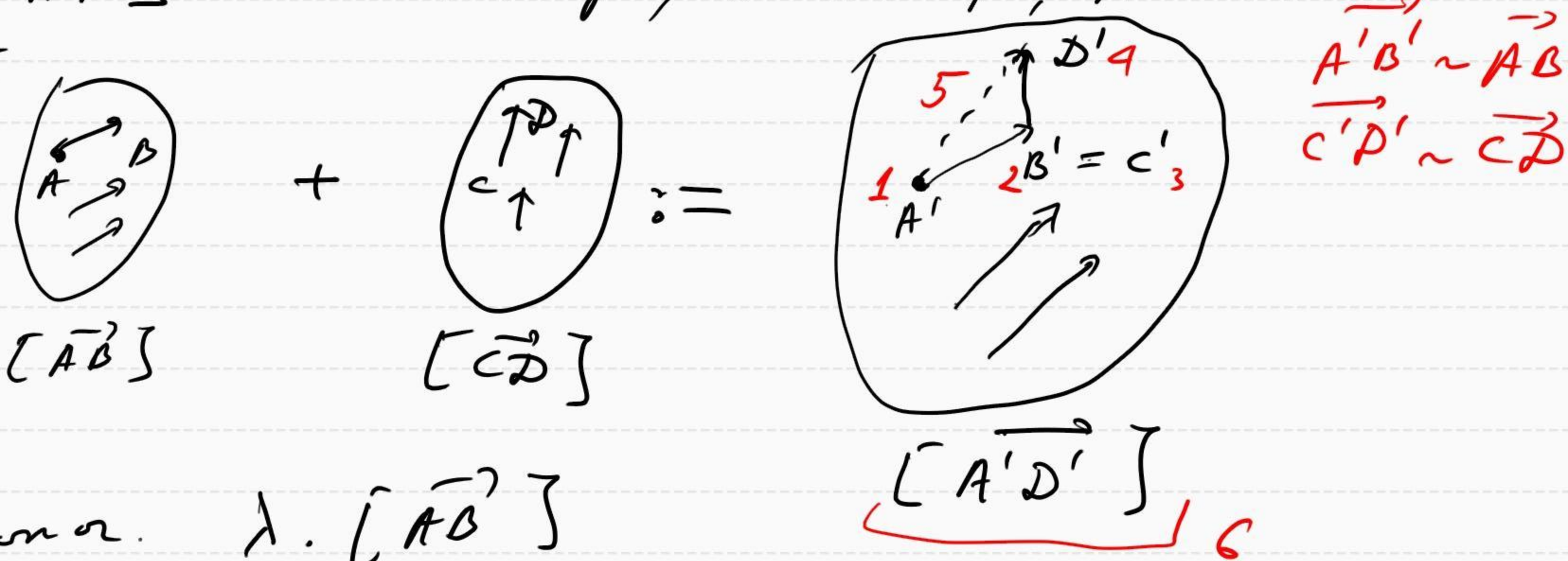
4) (⇒) $x \in \bar{x} = \bar{y} \Rightarrow y \sim x \Rightarrow x \sim y$

(⇐) $x \sim y \Rightarrow y \in \bar{x} \Rightarrow \bar{y} = \bar{x}$

Пр. X – нас. отс. в равн. ; $\sim$

$[\vec{AB}]$ – вектор ; $\vec{a}$ – вектор , $\vec{AB} \in \vec{a}$

[illegible]



Аналог. $\lambda \cdot [\vec{AB}]$

Пр. $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ $\qquad (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$

$$[(a,b)] = \frac{a}{b}$$

Опр. X; $X = \bigcup_{i\in I} X_i$, $X_i \subseteq X$ – разбиване на X, ако

$\forall i \neq j \quad X_i \cap X_j = \emptyset$

Теорема 1/ $\sim$ е РЕ в X $\Rightarrow$ $\sim$ дефинира разбиване на $X = \bigcup_{i\in I} [x_i]$

x_i – представители на различните нееквивалентни си класове на екв.

2/ $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ е разбиване, то

$\sim \; : \; x \sim y \iff \exists i \in I : x, y \in X_i$

е релация на екв.

Зад. 1/ и 2/ са взаимно обратни

Опр. 1/ G с бинарна опер. $*$ е група, ако
- $*$ е асоциативна ($\forall a,b,c \in G$ $(a*b)*c = a*(b*c)$)
- $*$ има неутр. ел. e ($\forall a \in G$ $a*e = e*a = a$)
  (Зад. e е единствен)
- Всеки ел. е обратим ($\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G : a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$)

Ако $\forall a,b \in G$ $a*b = b*a$, G се нарича абелева (комутативна група)

2/ R с бинарни опер. $+$, $\cdot$ е пръстен, ако
- $(R, +)$ - абел. група
- $\cdot$ е асоциативна
- дистрибутивност:

$$\forall a,b,c \in R \quad \begin{aligned} a(b+c) &= ab + ac \\ (a+b)c &= ac + bc \end{aligned}$$