Множества. Релации и Изображения. Числови Полета

Марин Ц. Геновски
ФМИ

26 октомври 2017 г.

Множества

Предстои ни да се занимаваме с множества и техните елементи, или още точки. Понятията съответно за множество, съвкупност, фамилия, клас и прочее ще считаме за синоними, макар че това не е съвсем коректно от гледна точка на математическата логика и теорията на множествата. Множествата ще бележим с главни латински или гръцки букви, а техните елементи съответно с малки букви. Ако един елемент a принадлежи на множеството A ще пишем $a \in A$, а пък в противен случай ще пишем $a \notin A$.

Ако A, B са двойка множества, то казваме, че A е подмножество на B тогава и само тогава, когато всеки елемент x на A е същевременно и елемент на множеството B. В този случай също казваме, че B е надмножество на A и съответно пишем $A \subseteqq B$.

Две множества A, B са по определение тъждествено равни тогава и само тогава, когато притежават едни и същи елементи, значи точно когато всеки елемент на A е същевременно елемент на B и всеки елемент на B е елемент на множеството A, значи когато едновременно $A \subseteqq B$ и $B \subseteqq A$. Това обстоятелство записваме с означението $A = B$.

Множество, което не притежава нито един елемент, наричаме празно множество. То е единствено, значи еднозначно определено, съгласно казаното по-горе. Наистина, ако допуснем, че Ω_1, Ω_2 са две празни множества, то всеки елемент (каквито не съществуват) на Ω_1 е елемент на Ω_2 и обратно, значи $\Omega_1 = \Omega_2$.

Ако $\mathcal{A}$ а някое множество и на всеки елемент $a \in \mathcal{A}$ еднозначно сме съпоставили по едно множество M_a, то казваме, че ни е зададена една фамилия от множества, която бележим с $\{M_a : a \in \mathcal{A}\}$. Множеството $\mathcal{A}$ наричаме множество от индекси или индексно множество, а неговите елементи наричаме индекси. Под обединение на една фамилия $\{M_a : a \in \mathcal{A}\}$ от множества разбираме множеството, което се изчерпва от всевъзможните елементи x такива, че $x \in M_a$ за някое $a \in \mathcal{A}$. Това множество бележим $\bigcup\limits_{a \in \mathcal{A}} M_a$ или $\bigcup\{M_a : a \in \mathcal{A}\}$. Съвършено аналогично определяме и сечението на произволна фамилия $\{M_a : a \in \mathcal{A}\}$ множества, което се състои от всевъзможните точки x такива, че $x \in M_a$ за всяко $a \in \mathcal{A}$, и което бележим $\bigcap\limits_{a \in \mathcal{A}} M_a$ или $\bigcap\{M_a : a \in \mathcal{A}\}$.

Разлика на две множества A, B, или още относително допълнение на множеството B спрямо A наричаме съвкупността на всевъзможните елементи на A, които не се съдържат в B. За това множество използваме означението $A \setminus B$.

Декартово произведение на две множества A, B наричаме множеството, чиито елементи са всичките наредени двойки от вида (x, y), където $x \in A, y \in B$. Декартовото произведение на A, B означаваме с $A \times B$. По-общо, декартовото произведение на елементите на произволна крайна или безкрайна фамилия множества $\{M_a : a \in \mathcal{A}\}$ бележим $\prod\{M_a : a \in \mathcal{A}\}$ или $\prod\limits_{a\in\mathcal{A}} M_a$, под което имаме предвид съвкупността на всевъзможните функции x на индексното множество $\mathcal{A}$ такива, че $x(a) \in M_a$ за всяко $a \in \mathcal{A}$. Предимно ни вълнува случаят на декартово произведение на краен брой множества, който можем да определим по-интуитивно, а именно $\prod\limits_{\nu=1}^{n} M_\nu$ се явява множеството от всевъзможните наредено n-орки от вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, където $x_\nu \in M_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$. В частност, декартовото произведение на n екземпляра от едно и също множество M бележим M^n.

Релации и Изображения

Нека M е дадено множество. Релация в M наричаме всяко подмножество на M^2. Ако R е релация в множеството M и $(x, y) \in R$, още записваме xRy. Релацията в множеството M, съставена от всевъзможните наредени двойки (x, x), $x \in M$ наричаме равенство, или още идентитет, диагонал в M. Друг пример за релация в M е цялото множество M^2.

Ако $R \subseteqq M^2$, то дефиниционна област на тази релация наричаме множеството

$$\{x \in M : \exists y \in M,\ xRy\}.$$

Аналогично, област от стойностите на R наричаме множеството

$$\{y \in M : \exists x \in M,\ xRy\}.$$

Една релация R наричаме *рефлексивна*, ако за всяко x от нейната дефиниционна област е изпълнено xRx. R наричаме *симетрична*, ако за всяка наредена двойка $(x, y) \in R$ имаме $(y, x) \in R$, значи ако xRy тогава и само тогава, когато yRx. Релацията R наричаме *транзитивна*, ако от xRy, yRz следва xRz. Една релация, която е същевременно рефлексивна, симетрична и транзитивна, наричаме *релация на еквивалентност*.

Ако A, B са две множества и е зададено правило, по което на всеки елемент $x \in A$ еднозначно съпоставяме по един елемент $y \in B$, значи на всеки елемент на множеството A отговаря точно един единствен елемент от B, то казваме, че е дадено изображение, или още функция, оператор, съответствие и прочее $f \colon A \to B$ на множеството A в множеството B. Ако на даден елемент $x \in A$ съгласно функцията f е съпоставен елементът $y \in B$, то тогава пишем $y = f(x)$. Множеството

$$\{x \in A : \exists y \in B,\ y = f(x)\}$$

наричаме дефиниционна област на функцията, а пък

$$\{y \in B : \exists x \in A,\ y = f(x)\}$$

наричаме област от нейните стойности. Понякога, например в курса по анализ, дефиниционна област (дефиниционно множество) и област от стойностите на дадена функция $f \colon A \to B$ наричаме по-общо съответно множествата A, B.

$f \colon A \to B$ наричаме *инективна* функция, ако за всеки две точки $x_1, x_2 \in A$ имаме $x_1 = x_2$ тогава и само тогава, когато $f(x_1) = f(x_2)$. f е *сюрективна* функция точно когато за всяко $y \in B$ съществува $x \in A$ такова, че $f(x) = y$. Една функция е *биекция* (*биективна*) тогава и само тогава, когато е едновременно инективна и сюрективна.

Числови Полета

Едно числово множество $F \subseteqq \mathbb{C}$ на поне два елемента наричаме числово поле тогава и само тогава, когато за всеки два числа $x, y \in F$ имаме $x \pm y, xy \in F$ и (при $y \neq 0$) $\dfrac{x}{y} \in F$. В такъв случай още казваме, че F е затворено относно операциите събиране, изваждане, умножение и деление.

Задачи

Задача 1. Нека A, B са множества. Да се докаже, че $A = B$ тогава и само тогава, когато същевременно $A \subseteqq B$ и $B \subseteqq A$.

Задача 2. Нека Ω е празно множество, значи Ω не притежава нито един елемент, и нека A е някое произволно множество. Да се докаже, че $\Omega \subseteqq A$.

Задача 3. Да се докаже, че ако Ω_1, Ω_2 са две празни множества, то тогава $\Omega_1 = \Omega_2$.

Забележка. Единственото съгласно тази задача празно множество обозначаваме с $\varnothing$.

Задача 4. Да се намери обединението на множествата

$$\{2k : k \in \mathbb{Z}\}, \qquad \{2k+1 : k \in \mathbb{Z}\}$$

съответно на всички четни и на всички нечетни цели числа.

Задача 5. За произволно цяло число $s \in \mathbb{Z}$ нека $M(s)$ да обозначава множеството от всевъзможните цели числа, които не са кратни на s. Да се докаже, че ако $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathbb{Z}$ и $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$ е най-малкото общо кратно на тези числа, то тогава е изпълнено равенството

$$\bigcup_{\nu=1}^{n} M(s_\nu) = M(\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle).$$

Задача 6. Да се докажат следните равенства.

а) $\left(\bigcup\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}\right) \cap \left(\bigcup\{Y_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}\right) = \bigcup\{X_\alpha \cap Y_\beta : \alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}\}$;

б) $\left(\bigcap\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}\right) \cup \left(\bigcap\{Y_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}\right) = \bigcap\{X_\alpha \cup Y_\beta : \alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}\}$.

Задача 7. Нека $f : A \to B$ е изображение на множеството A в множеството B и нека $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ е фамилия от подмножества на A. Да се докажат следните съотношения.

а) $f\left(\bigcup\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}\right) = \bigcup\{f(X_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$; б) $f\left(\bigcap\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}\right) \subseteqq \bigcap\{f(X_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$.

Забележка. При второто подусловие равенство е налично тогава и само тогава, когато функцията f е инективна.

Задача 8. Кои от следните релации са рефлексивни (симетрични, транзитивни). Кои от тях са релации на еквивалентност?

а) Релацията равенство в $\mathbb{R}$;

б) Релацията *строго* неравенство в $\mathbb{R}$;

в) Релацията *нестрого* неравенство в $\mathbb{R}$;

г) Релацията делимост в $\mathbb{Z}$, значи релацията, определена по следния начин: за двойка числа $x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0$ казваме, че y дели x тогава и само тогава, когато съществува число $z \in \mathbb{Z}$ такова, че $x = yz$.

д) Релацията включване в множеството $\mathscr{P}(X)$ на всевъзможните подмножества на дадено множество X.