Векторно и смесено произведение на вектори
Упражнение

Нека е дадена координатна система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ в геометричното пространство.

Тя задава ориентация в пространството по следния начин:

Разгл. наредена тройка вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Нека $A_{3\times 3}$ е матрицата от координатите на $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ спрямо $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, т. е.

A е матрицата на прехода от $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ към $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Ако $\det A > 0$, то $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ има същата ориентация като $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Ще записваме $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \in S^+$.

Ако $\det A < 0$, то $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ има ориентация, противоположна на $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, т. е. $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \in S^-$

Релацията „ориентация" е релация на еквивалентност. Има само два класа на еквивалентност:

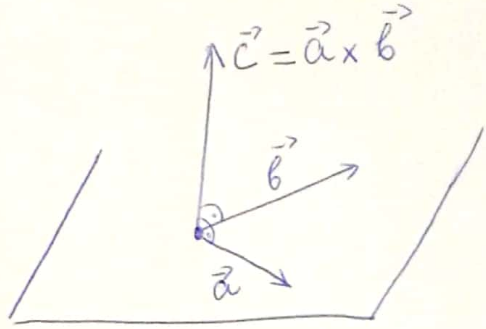
S^+ – всички, които са еднакво ориентирани с $\{e_1, e_2, e_3\}$

S^- – всички, които са противоположно ориентирани

I Векторно произведение

Нека $\vec{a} \neq \vec{o}$, $\vec{b} \neq \vec{o}$, $\vec{a}, \vec{b}$ - ЛНЗ

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ - вектор, за който:



1) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) Посоката на $\vec{c}$ е такава, че $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in S^+$;

3) $|\vec{c}| = |\vec{a}| . |\vec{b}| . \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})_e$

! Важно е да се запомни, че $\vec{a} \times \vec{b}$ е вектор!

* * *

Основна идея: Смисълът на дефинирането на вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ с тези характеристики 1), 2) и 3) е:

* Векторната база $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ да може да се разшири до тримерна $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$;
* Да се запази ориентацията на дадената коорд. система, т.е. $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\} \in S^+$
* Да се пресмятат лица с $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

* * *

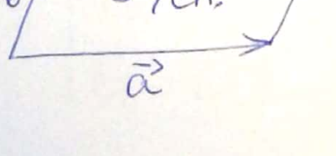
Свойства:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ - антикомутативност

2) $(\alpha . \vec{a} + \beta . \vec{b}) \times \vec{c} = \alpha . (\vec{a} \times \vec{c}) + \beta . (\vec{b} \times \vec{c})$ - линейност, имa я и по двата аргумента

! 3) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$

4) $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{усп.}$



$S_\Delta = \frac{1}{2} . |\vec{a} \times \vec{b}|$

Scanned with CamScanner

5) $\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})_e = \dfrac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$

6) Формула на Лагранж

$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 . \vec{b}^2 - (\vec{a} . \vec{b})^2$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})_e = \varphi$

Доказателство:

$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\varphi)^2 =$

$= \vec{a}^2 . \vec{b}^2 . \sin^2\varphi = \vec{a}^2 . \vec{b}^2 . (1 - \cos^2\varphi) =$

$= \vec{a}^2 . \vec{b}^2 - \vec{a}^2 . \vec{b}^2 . \cos^2\varphi = \vec{a}^2 . \vec{b}^2 - (|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi)^2 =$

$= \vec{a}^2 . \vec{b}^2 - (\vec{a} . \vec{b})^2$

7) Координатно представяне на $\vec{a} \times \vec{b}$ спр. ОКС

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е ОКС, тогава

$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{o}$ (свойство 3)

$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$

$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$

$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

Нека спр. K са дадени векторите

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 . \vec{e}_1 + a_2 . \vec{e}_2 + a_3 . \vec{e}_3) \times (b_1 . \vec{e}_1 + b_2 . \vec{e}_2 + b_3 . \vec{e}_3) =$

$= \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 . (a_2 . b_3 - a_3 . b_2) + \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 . (a_3 . b_1 - a_1 . b_3) +$

$+ \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 . (a_1 . b_2 - a_2 . b_1)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} . \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} . \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} . \vec{e}_3$$

Scanned with CamScanner

Окончателно: $\vec{a}\,(a_1\quad a_2\quad a_3)$

$$\vec{b}\,(\underset{\text{I}}{b_1}\quad \underset{\text{II}}{b_2}\quad \underset{\text{III}}{b_3})$$

$$\vec{a}\times\vec{b}\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \underset{\text{II}}{b_2} & \underset{\text{III}}{b_3}\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ \underset{\text{III}}{b_3} & \underset{\text{I}}{b_1}\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \underset{\text{I}}{b_1} & \underset{\text{II}}{b_2}\end{vmatrix}\right)$$

* * *

II Смесено произведение на вектори

Нека $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ са произволни вектори

$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ наричаме смесено произведение на векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$

Резултатът от тази операция е <u>число</u>.

Свойства:

1) $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = (\vec{c}\vec{a}\vec{b})$

$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c}) = -(\vec{a}\vec{c}\vec{b}) = -(\vec{c}\vec{b}\vec{a})$

Разгл. $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{b}\vec{c}\vec{a})$

$$\underset{}{\overset{\parallel}{(\vec{a}\times\vec{b})}}\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\text{, т.е.}$$

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

Тук важно е винаги векторното произведение да се изпълнява първо.

Scanned with CamScanner

2) Линейност по трите аргумента

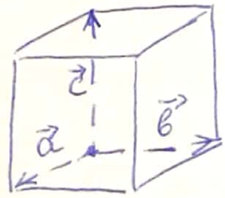
$$\left((\lambda.\vec{a}_1+\mu.\vec{a}_2)\vec{b}\vec{c}\right) = \lambda.(\vec{a}_1\vec{b}\vec{c}) + \mu.(\vec{a}_2\vec{b}\vec{c})$$

3) $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) > 0 \iff \vec{a},\vec{b},\vec{c} \in S^+$, т.е.
наредената тройка вектори има положителна ориентация в пространството

$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) < 0 \iff \vec{a},\vec{b},\vec{c} \in S^-$

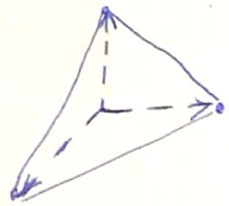
! $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0 \iff \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ са линейно зависими (компланарни)

4) Ако $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ са ЛНЗ, то



$V_{\text{паралелепипед}} = |(\vec{a}\vec{b}\vec{c})|$

$V_{\text{тетраедър}} = \frac{1}{6}\cdot|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})|$



5) Координатно представяне на $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ спрямо ОКС $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

Смесеното произведение на координатните в-ри е $(\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3) = 1$.

Нека $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$
$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$
$\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$

$$\Rightarrow (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \underbrace{(\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)}_{=1}$$

Доказателство:

Scanned with CamScanner

$$\vec{a}\times\vec{b}\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$\vec{c}\,(\, c_1 \,,\, c_2 \,,\, c_3 \,)$$ умножаваме скаларно

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = c_1.\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + c_2.\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + c_3.\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

* * *

1 зад. Да се докаже, че векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са ЛНЗ $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\times\vec{c}, \vec{c}\times\vec{a}$ са ЛНЗ.

Д-во:

I Нека $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са ЛНЗ, т.е. $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \neq 0$

Разглеждаме линейната комбинация:

$$\alpha.\vec{a}\times\vec{b} + \beta.\vec{b}\times\vec{c} + \gamma.\vec{c}\times\vec{a} = \vec{o} \;\; \underset{(1)}{/.\vec{a}} \;\; \underset{(2)}{/.\vec{b}} \;\; \underset{(3)}{/.\vec{c}}$$

(1) $\alpha.(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{a} + \beta.(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a} + \gamma.(\vec{c}\times\vec{a}).\vec{a} = 0$

$$\alpha.\underbrace{(\vec{a}\vec{b}\vec{a})}_{=0} + \beta.\underbrace{(\vec{b}\vec{c}\vec{a})}_{\neq 0} + \gamma.\underbrace{(\vec{c}\vec{a}\vec{a})}_{=0} = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

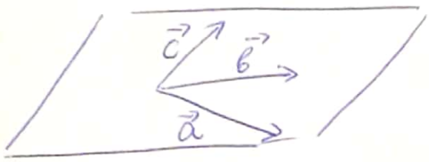
(2) $\alpha.\underbrace{(\vec{a}\vec{b}\vec{b})}_{=0} + \beta.\underbrace{(\vec{b}\vec{c}\vec{b})}_{=0} + \gamma.\underbrace{(\vec{c}\vec{a}\vec{b})}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

(3) $\alpha.\underbrace{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}_{\neq 0} + \beta.\underbrace{(\vec{b}\vec{c}\vec{c})}_{= 0} + \gamma.\underbrace{(\vec{c}\vec{a}\vec{c})}_{= 0} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Извод $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{c}$ и $\vec{c}\times\vec{a}$ са ЛНЗ.

II Нека $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{c}\times\vec{a}$ са ЛНЗ

Допускаме, че $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са ЛЗ, т.е. компланарни



Тогава $\vec{a}\times\vec{b} \parallel \vec{b}\times\vec{c} \parallel \vec{c}\times\vec{a}$, което противоречи на условието.

* * *

2 зад.

Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, за които $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})_e = \frac{\pi}{2}$.

Да се определи неизвестния вектор $\vec{p}$ от уравненията:

$$\begin{cases} (\vec{a}.\vec{p}) = 4 \\ (\vec{b}.\vec{p}) = 2 \\ (\vec{a}\vec{b}\vec{p}) = -8 \end{cases}$$

Решение:

Ще изразим $\vec{p}$ чрез векторната база $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}\}$

$$\vec{p} = \alpha.\vec{a} + \beta.\vec{b} + \gamma.\vec{a}\times\vec{b} \;\; /.\vec{a} \;\; /.\vec{b} \;\; /.\vec{a}\times\vec{b}$$

$$\begin{cases} (\vec{a}.\vec{p}) = \alpha.\vec{a}^2 + \beta.(\vec{a}.\vec{b}) + \gamma.(\vec{a}\vec{b}\vec{a}) \\ (\vec{b}.\vec{p}) = \alpha.(\vec{a}\vec{b}) + \beta.\vec{b}^2 + \gamma.(\vec{a}\vec{b}\vec{b}) \\ (\vec{a}\vec{b}\vec{p}) = \alpha.(\vec{a}\vec{b}\vec{a}) + \beta.(\vec{a}\vec{b}\vec{b}) + \gamma.(\vec{a}\times\vec{b})^2 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 4$, $\vec{b}^2 = 1$, $(\vec{a}\cdot\vec{b}) = 0 \Rightarrow$ заместваме в системата

$$\left|\begin{array}{l} 4 = \alpha\cdot 4 + \beta\cdot 0 + \gamma\cdot 0 \Rightarrow \alpha = 1 \\ 2 = \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 1 + \gamma\cdot 0 \Rightarrow \beta = 2 \\ -8 = \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0 + \gamma\cdot(\vec{a}\times\vec{b})^2 \end{array}\right.$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \vec{a}^2\cdot\vec{b}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = 4 \Rightarrow \gamma = -2$$

Окончателно: $\vec{p} = \vec{a} + 2\cdot\vec{b} - 2\cdot\vec{a}\times\vec{b}$

Упражнение: Намерете $|\vec{p}| = ?$

* * *

3 зад. Формула за двойно векторно произведение (Осн.)

$$(\underset{1}{\vec{a}}\times\underset{2}{\vec{b}})\times\underset{3}{\vec{c}} = (\underset{1}{\vec{a}}\cdot\underset{3}{\vec{c}})\cdot\vec{b} - (\underset{2}{\vec{b}}\cdot\underset{3}{\vec{c}})\cdot\vec{a}$$

Като използвате тази формула, докажете:

а) $\underset{1}{\vec{a}}\times(\underset{2}{\vec{b}}\times\underset{3}{\vec{c}}) \overset{?}{=} (\underset{1}{\vec{a}}\cdot\underset{3}{\vec{c}})\cdot\vec{b} - (\underset{1}{\vec{a}}\cdot\underset{2}{\vec{b}})\cdot\vec{c}$;

б) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) \overset{?}{=} \vec{o}$;

в) ?, че $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \Leftrightarrow \vec{b}\times(\vec{a}\times\vec{c}) = \vec{o}$

Тъждествата са изпълнени за произволни вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Задачата остава за упражнение!

Scanned with CamScanner

4 зад. Да се докаже, че за всеки 4
(Осн.) вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ е изпълнено:

$$(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = \underbrace{\begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{a}.\vec{d} \\ \vec{b}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{d} \end{vmatrix}}_{\Delta}$$

Доказателство:

Полагаме $\vec{c}\times\vec{d} = \vec{p}$ и пресмятаме

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{p} = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{p}) = \vec{a}.(\underset{1}{\vec{b}}\times(\underset{2}{\vec{c}}\times\underset{3}{\vec{d}})) =$$

$$= \vec{a}.[(\underset{1}{\vec{b}}.\underset{3}{\vec{d}}).\vec{c} - (\underset{1}{\vec{b}}.\underset{2}{\vec{c}}).\vec{d}] = (\vec{a}.\vec{c}).(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{b}.\vec{c}).(\vec{a}.\vec{d})$$

* * *

Приложение: $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a}\vec{b} \\ \vec{a}\vec{b} & \vec{b}^2 \end{vmatrix}$ или

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \Gamma(\vec{a}, \vec{b})$$ → детерминанта на Грам за $\vec{a}$ и $\vec{b}$

! Може да се използва за пресмятане на лица.

* * *

5 зад.
(Осн.) Да се докаже, че за всеки три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ е изпълнено:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a}.\vec{b} & \vec{a}.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{b} & \vec{b}^2 & \vec{b}.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{c} & \vec{c}^2 \end{vmatrix} = \Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Scanned with CamScanner

Доказателство:

Ще използваме формулата на Лагранж:

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \vec{a}^2.\vec{b}^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2 \Rightarrow (\vec{a}.\vec{b})^2 = \vec{a}^2.\vec{b}^2 - (\vec{a}\times\vec{b})^2$$

Прилагаме за $((\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c})^2 =$

$$= (\vec{a}\times\vec{b})^2.\vec{c}^2 - ((\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c})^2 = [\vec{a}^2.\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2].\vec{c}^2 -$$

$$- [(\vec{a}\vec{c}).\vec{b} - (\vec{b}\vec{c}).\vec{a}]^2 = \vec{a}^2.\vec{b}^2.\vec{c}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2.\vec{c}^2 - (\vec{a}\vec{c})^2.\vec{b}^2 +$$

$$+ 2(\vec{a}\vec{b}).(\vec{a}\vec{c}).(\vec{b}\vec{c}) - (\vec{b}\vec{c})^2.\vec{a}^2 = \Gamma(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

* * *

6 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \sphericalangle(\vec{b},\vec{c}) = \sphericalangle(\vec{c},\vec{a}) = \frac{\pi}{3}$$

а) Да се докаже, че $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са ЛНЗ;

б) Ако $\vec{OA} = \vec{a}+\vec{b}$, $\vec{OB} = \vec{b}+\vec{c}$, $\vec{OC} = \vec{c}+\vec{a}$, да се намери V_{OABC} - обема на тетраедъра $OABC$.

Решение:

а) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са ЛНЗ $\Leftrightarrow (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \neq 0$

Пресмятаме $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ чрез $\Gamma(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ от 5 зад.

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a}\vec{b} & \vec{a}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{b} & \vec{b}^2 & \vec{b}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{c} & \vec{b}\vec{c} & \vec{c}^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} &\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 1 \\ &(\vec{a}.\vec{b}) = 1.1.\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ &(\vec{a}\vec{c}) = (\vec{b}\vec{c}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ са ЛНЗ.}$$

Scanned with CamScanner

б)

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{OA}\,\vec{OB}\,\vec{OC})|$$

$$(\vec{OA}\,\vec{OB}\,\vec{OC}) = (\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC} = [(\vec{a}+\vec{b}) \times (\vec{b}+\vec{c})] \cdot (\vec{c}+\vec{a}) =$$

$$= [\vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c} + \underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{0}} + \vec{b}\times\vec{c}] \cdot (\vec{c}+\vec{a}) =$$

$$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} + \underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}_{0} + \underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{0} + \underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{0} + \underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{0} + (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} =$$

$$= (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) + (\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = 2 \cdot (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \pm 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{2}$$

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot |\pm\sqrt{2}| = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

* * *

7 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, за които:

$$|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 1,\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\vec{OA} = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a} \qquad \vec{OB} = \vec{b}\times(\vec{a}\times\vec{b})$$

а) Да се намерят $P_{\triangle OAB}$ и $S_{\triangle OAB}$;

б) Нека т. M е медицентърът на $\triangle OAB$.
Да се изрази $\vec{OM}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
Да се намери $|\vec{OM}| = ?$.

а) $\vec{a}^2 = 4$, $\vec{b}^2 = 1$, $(\vec{a}.\vec{b}) = 2.1.\cos 120° = -1$

$$\vec{OA} = (\underset{1}{\vec{a}} \times \underset{2}{\vec{b}}) \times \underset{3}{\vec{a}} = (\underset{1}{\vec{a}}.\underset{3}{\vec{a}}) \cdot \vec{b} - (\underset{2}{\vec{b}}.\underset{3}{\vec{a}}).\vec{a} = 4.\vec{b} - (-\vec{a}) = \underline{\underline{4\vec{b} + \vec{a}}}$$

$$\vec{OB} = \underset{1}{\vec{b}} \times (\underset{2}{\vec{a}} \times \underset{3}{\vec{b}}) = (\underset{1}{\vec{b}}.\underset{3}{\vec{b}}).\vec{a} - (\underset{1}{\vec{b}}.\underset{2}{\vec{a}}).\vec{b} = \underline{\underline{\vec{a} + \vec{b}}}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{a} + \vec{b} - 4\vec{b} - \vec{a} = -3.\vec{b}$$

$$P_{\triangle OAB} = |\vec{OA}| + |\vec{OB}| + |\vec{AB}|$$

$$|\vec{OA}|^2 = \vec{OA}^2 = (4\vec{b}+\vec{a})^2 = 16.\vec{b}^2 + 8(\vec{b}.\vec{a}) + \vec{a}^2 = 16 - 8 + 1 = 9$$

Scanned with CamScanner

$|\overrightarrow{OA}|=3$, $|\overrightarrow{OB}|=?$, $|\overrightarrow{AB}|=?$ - за упражнение

$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$

$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB} = (4\vec{b}+\vec{a})\times(\vec{a}+\vec{b}) = 4(\vec{b}\times\vec{a})+4\cdot\underbrace{(\vec{b}\times\vec{b})}_{\vec{0}}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{a})}_{\vec{0}}+(\vec{a}\times\vec{b})=$

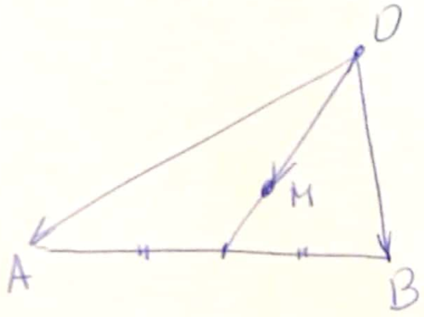
$= -4(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{a}\times\vec{b} = -3\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

$|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}| = 3\cdot|\vec{a}\times\vec{b}| = 3\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\frac{2\pi}{3} = 3\cdot2\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\cdot\sqrt{3}$

$S_{\Delta OAB} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ кв. ед.

* * *

б) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ (Защо?)



$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\cdot(4\vec{b}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{b})$

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\cdot(2\vec{a}+5\cdot\vec{b})$

$|\overrightarrow{OM}|^2 = \overrightarrow{OM}^2 = \frac{1}{9}\cdot(2\vec{a}+5\vec{b})^2 = \frac{1}{9}\cdot(4\vec{a}^2+20(\vec{a}\vec{b})+25\vec{b}^2) =$

$= \frac{1}{9}\cdot(4\cdot4+20\cdot(-1)+25\cdot1) = \frac{21}{9}$

$|\overrightarrow{OM}| = \frac{\sqrt{21}}{3}$