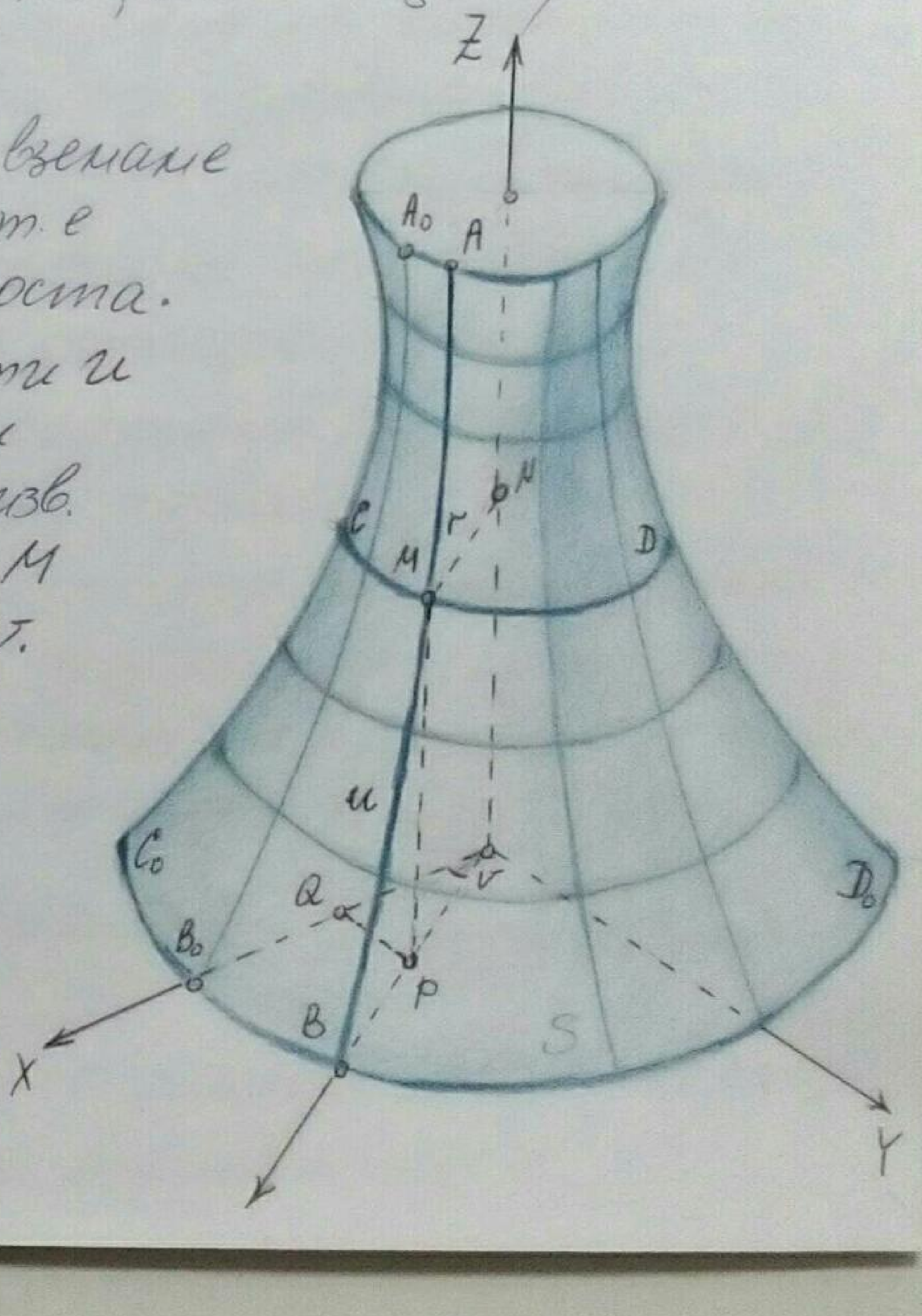
Аналитично задаване на ротационни повърхнини

Всяка ротационна повърхнина се характеризира геометрично с това, че равнините, перпендикулярни на оста на ротация, пресичат равнината в окръжности – „паралели", чиито центрове лежат на оста.

За първо семейство параметр. линии вземаме паралелите, а за второ – мередианите, т.е сеченията на S с полуравнините през оста. Ако установим с какви числови стойности u се характеризира произволен паралел CD и с какви стойности v се характеризира произв. мередиан AB, то пресечната им точка M ще има криволинейни координати u и v.

Най-удобно е за v, характеризиращ положението на мередиана AB да вземем „дължината" му, т.е. ъгъла, който сключва равнината му с равнината на някой начален мередиан A_0B_0.



В качеството на параметър u,

определящ положението на паралела CD, можем да вземем величина, аналогична на географската ширина, а именно - разстоянието на CD до някой начален паралел C_0D_0, измерен с дъгата на меридиана $\overset{\frown}{C_0C} = \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{D_0D}$.

Тази коорд. с-ма е естествено обобщение на географската система и за доста цели се оказва най-удобната.

Често е по-удобно да се използва друга параметризация. Именно, S може да се зададе с у-нието на меридиана си

$$z = f(x)$$ в ОКС xOz, където Oz е ротационната ос.

Тогава за координати, определящи положението на паралел е удобно да се вземе радиусът MN на този паралел.

Неудобство при този начин е, че е непригоден за ротационен цилиндър - паралелите имат един и същ радиус. Освен това ф-цията $z = f(x)$, определяща височината на паралела по радиуса може да е многозначна (ако r не се мени монотонно).

Да намерим параметричните уравнения на S и по двата начина на параметризиране.

За да няма недоразумения запазваме означението u само за ширината на т. M, радиусът MN винаги ще означаваме с r

1.) Да вземем за параметър r и v, за апликата Oz оста на ротация, за Ox – пресечната права на равнината на началния меридиан A_0B_0C р-та на нач-я паралел C_0D_0.

Тогава координатите на точката M са

$$S \begin{cases} x = OQ = OP\cos v = MN\cos v = r\cos v \\ y = PQ = OP\sin v = r\sin v \\ z = PM = f(r). \end{cases} \qquad (1)$$

За $r = r_0 = const$ получаваме паралел, а за $v = v_0 = const$ – мередиан.

Уравнението $r = r(v)$ (2). задава линия върху S. Ясное, че (2) също така е уравнение на тази линия в равнината на кой да е паралел в полярни координати (r-радиус вектор, а v- полярния ъгъл). Параметричните уравнения на линията са

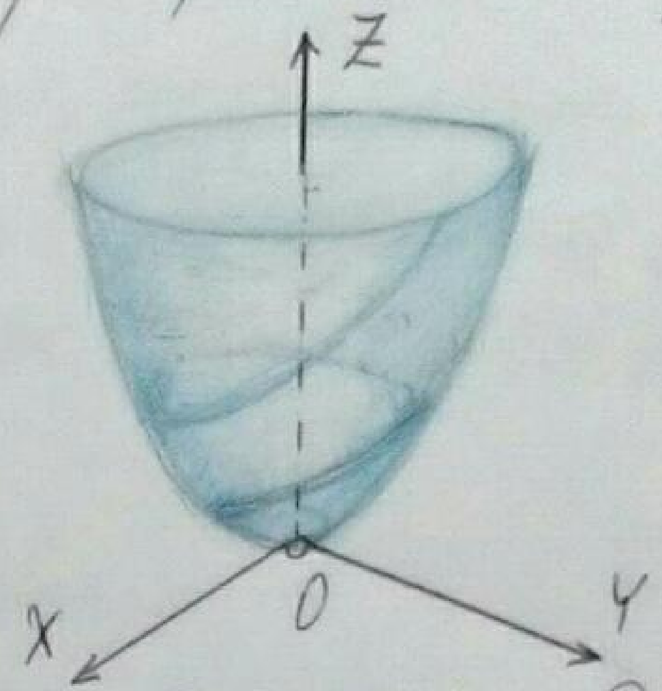
$$\begin{cases} x = r(v)\cos v \\ y = r(v)\sin v \\ z = f(r(v)). \end{cases} \qquad (3)$$

Нека, например S е ротационен параболоид. За начало на к. с-ма – върхът му (началният паралел се изражда в точка)

В xOz у-нието на меридиана е $x^2=2pz$, така че $f(z) = \frac{x^2}{2p}$

(1)

$$\Rightarrow \begin{cases} x = V\cos v \\ y = V\sin v \\ z = \dfrac{V^2}{2p} \end{cases}$$



Ако наложим условието радиусът на т. да е пропорционален на дължината ѝ т. е

$$V = av$$

ще получим спирала върху параболоида с параметрични уравнения

$$x = av\cos v,\ y = av\sin v,\ z = \frac{a^2v^2}{2p}.$$

Проекцията на тази спирала в равнината xOy е архимедова спирала.

2.) За параметри да вземем u и v. Тогава радиусът v на паралела е някаква функция (еднозначна) на „ширината“ му u – $v = \varphi(u)$. Задаването на $\varphi(u)$ определя формата на ротационната повърхнина и на нейния меридиан.

Височината на паралела – z също е еднозначна функция на u $z = \psi(u)$; при това тези функции са свързани със съотношението

$$du^2 = dv^2 + dz^2, \qquad (4)$$

изразяващо диференциала на дъгата на меридиана чрез диференциала на координатите v и z.

От (4)

$$dz = \sqrt{du^2 - dv^2} = \sqrt{1 - (\varphi'(u))^2}\, du$$

т.е.

$$z = \psi(u) = \int_0^u \sqrt{du - dv^2} = \int_0^u \sqrt{1 - (\varphi'(u))^2}\, du. \qquad (5)$$

Аналогично

$$v = \varphi(u) = \int_0^u \sqrt{1 - (\psi'(u))^2}\, du. \qquad (6)$$

Параметричните уравнения на ротационната повърхнина приемат вида

$$\begin{cases} x = \varphi(u)\cos v \\ y = \varphi(u)\sin v \\ z = \psi(u) \end{cases},$$

където следва да заменим $\psi(u)$ с израза (5), а $\varphi(u)$ – с (6).

<u>Забележка.</u> Знаейки уравнението на меридиана $z = f(r)$ (в xOy) може да считаме за известни функциите $r = \varphi(u)$ $z = \psi(u)$.

От (4) намираме

$$u = \int_0^r \sqrt{1 + (f'(r))^2}\, dr.$$

Горното уравнение определя u като функция на r. Функцията $r = \varphi(u)$ е обратната ѝ функция. Тогава за $\psi(u)$ получаваме $\psi = f[\varphi(u)]$.