Изпълнимост

Нека p е двуместен предикатен символ

$\varphi_1: \forall x(\neg p(x,x))$

$\varphi_2: \forall x \forall y \forall z(p(x,y) \,\&\, p(y,z) \Longrightarrow p(x,z))$

$\varphi_3: \forall x \exists y(p(x,y))$

<u>Задача</u>: Има ли структура, в която дадените формули са едновременно верни?

Ако отговорът е да, да се посочи една конкретна такава и да се докаже, че в нея наистина ф-ите са верни.

Ако не, защо?

<u>Решение</u>:

Ако предполагаме, че отговорът е "да", да се опитаме да разберем какво ни казват ф-ите.

φ_1 ни казва "антирефлексивност"

φ_2 ни казва "транзитивност"

Какво означава една релация да е антирефлексивна и транзитивна – "строги частични наредби".

Строги наредби:

1. $\forall x(\neg p(x,x))$
2. $\forall x \forall y(p(x,y) \Longrightarrow \neg p(y,x))$
3. $\forall x \forall y \forall z(p(x,y) \,\&\, p(y,z) \Longrightarrow p(x,z))$

(От 1. и 3. следва 2.)

Тогава $(\mathbb{R}, >)$, $p^S(x,y) \xleftrightarrow{def} x > y$ удовлетворява условията.

Какво ни казва φ_3?

$\boxed{\text{Задача}}$

Нека $\mathcal{L} = (p, \doteq)$ и p - двуместен предикатен символ.

Изпълними ли са?

$\varphi_1: \forall x (\neg p(x,x))$

$\varphi_2: \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \,\&\, p(y,z) \Longrightarrow p(x,z))$

$\varphi_3: \forall x \exists y (p(x,y))$

$\varphi_4: \forall x \forall y (p(x,y) \Longrightarrow \exists z (p(x,z) \,\&\, p(z,y)))$

$\varphi_5: \exists x \forall y (x \doteq y \lor p(x,y))$

$\varphi_6: \exists x \forall y (p(y,x) \Longrightarrow x \doteq y)$

$\varphi_7: \forall x \exists y (\neg p(x,y) \,\&\, \neg p(y,x) \,\&\, \neg(x \doteq y))$

1. $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$
2. $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$
3. $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_7\}$

Решение:

Нека първо анализираме какво ни казва всяка от формулите.

φ_1, φ_2 - "строга частична наредба", например $(\mathbb{R}, >)$

φ_3 - в комбинация с φ_1 и φ_2 казва "винаги има по-голям елемент". Тогава разгледаме $(\mathbb{R}, >)$.

1. $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Нека $x_0 \not> x_0$. Нека наистина за вс. $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > y_0$ и $y_0 > z_0$, $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ такива че тогава $x_0 > z_0$. Нека $x_0 \in \mathbb{R}$, тогава нека $y_0 = x_0 - 1$ и наистина $x_0 > y_0$.

2. $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$

$\varphi_4: \forall x \forall y (p(x,y) \Longrightarrow \exists z (p(x,z) \& p(z,y)))$

"гъстота за частична наредба"

В $(\mathbb{R}, >)$ е в сила, тъй като за вс. $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ такива че $x_0 > y_0$, ако $z_0 = \frac{x_0 + y_0}{2}$, то $z_0 > y_0$ и $z_0 < x_0$.

$\varphi_5: \exists x \forall y (x \doteq y \vee p(x,y))$

"има най-малък/най-голям елемент"

"има най-малък елемент".

В $(\mathbb{R}, >)$ няма най-малък. Разглеждаме $(\mathbb{R}_0^+, <)$, $\mathbb{R}_0^+ = \{x \mid x \geq 0\}$. Ясно е, че е "гъста строга частична наредба". Ясно е, че за вс. $x_0 \in \mathbb{R}_0^+$, $x_0 = 0$ или $0 < x_0$, следователно изпълнено е, че $\exists x \forall y (x \doteq y \vee p(x \leq y))$.

3. $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_7\}$ противоречат, защото ф-лите φ_5 и φ_7 си противоречат, т.е. $\exists x \forall y (x \doteq y \vee p(x,y))$; предположим, че φ_5 е вярна за това оценяване в произволна структура $S = (U, \{p^S\}, \doteq)$, т.е. нека вземем свидетел x_0 за това, $x_0 \in U$ и за вс. $y \in U$ е в сила, че $x_0 = y$ или $p^S(x_0, y)$.

Нека доп. че φ_7 е в сила, т.е.

$\forall x \exists y (\neg p(x,y) \& \neg p(y,x) \& \neg (x \doteq y))$ и нека това е изпълнено и в частност за x_0, тогава $\neg p^S(x_0, y_0)$, y_0 е свидетел за това оц., $\neg p(y_0, x_0)$, $x_0 \neq y_0$, което противоречи с вярността на φ_5.

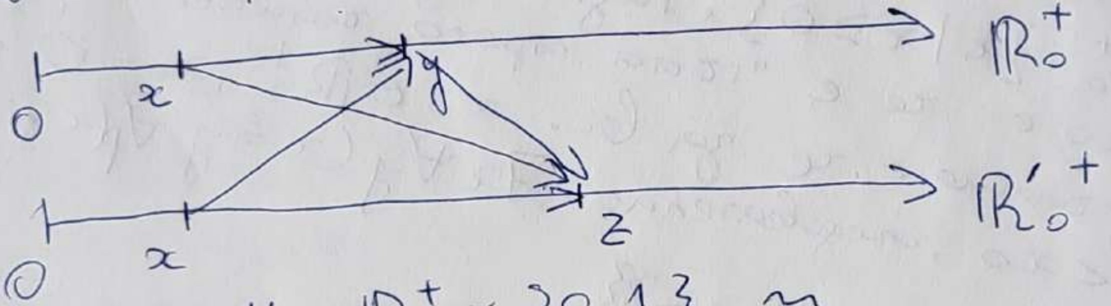
В $(\mathbb{R}_0^+, <)$ е в сила, че за вс. $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ $x<y$ или $x=y$ или $y<x$. В тази структура φ_6 е изпълнена.

Вярно ли е, че $(\mathbb{R}_0^+, <) \models \varphi_7$?

Интерпретацията на φ_7 е "не е линейна наредба"

$$\forall x \exists y \neg(\underbrace{p(x,y) \vee p(y,x) \vee x=y}_{\text{линейност}})$$

Трябва да модифицираме структурата така, че да имаме несравними елементи.



Дефинираме $M = \mathbb{R}_0^+ \times \{0,1\}$ и

$$(x,a) \prec (y,b) \overset{def}{\Longleftrightarrow} x<y$$

Тогава

1) $(x,a) \nprec (x,a)$ защото $x \nless x$
2) ако $(x,a) \prec (y,b)$ и $(y,b) \prec (z,c)$, то $(x,a) \prec (y,b) \prec (z,c)$
3) ако $(x,a) \prec (y,b)$, то нека $z = \frac{x+y}{2}$, то $(x,a) \prec (z,a) \prec (y,b)$
4) $x_0 = (0,1)$ и нека $(y,a) \in \mathbb{R}_0^+ \times \{0,1\}$ е произволно, тогава ~~ако $(y,a) \prec (0,1)$, то~~ $(y,a) \nprec (0,1)$, тъй като $y \geq 0$.
5) За всяко $(x,a) \in \mathbb{R}_0^+ \times \{0,1\}$ е вярно, че $(x,a) \neq (x,1-a)$ и $(x,a) \nprec (x,1-a)$ и $(x,1-a) \nprec (x,a)$

$\boxed{\text{Задача}}$

Език $\mathcal{L}$ има двуместен предикатен символ p и двуместен функционален символ h, както и формално равенство $\mathcal{L} = (p; h; \doteq)$. Нека

$\varphi_1: \forall x \exists z (p(x,z))$

$\varphi_2: \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x))$

$\varphi_3: \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \,\&\, p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$

$\varphi_4: \forall x \forall y (h(x) \doteq h(y) \Rightarrow \neg p(x,y) \,\&\, \neg p(y,x))$

$\varphi_5: \forall x \exists y (h(x) = h(y) \,\&\, x \neq y)$

Изпълними ли са:

1. $\Gamma_1 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$
2. $\Gamma_2 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_5\}$
3. $\Gamma_3 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$

Решение:

1. Какво ни казват формулите?

$\left.\begin{array}{l}\varphi_2: \text{"асиметричност"} \\ \varphi_3: \text{"транзитивност"}\end{array}\right\} \varphi_2, \varphi_3$ - строга наредба

φ_1: "в каквъв смисъл нашия свят е безкраен нагоре (винаги има по-голям елемент)"

φ_4: "ако два елемента имат еднакъв образ при h, то те не са p-сравними".

Предполагаме, че $(\mathbb{R}, \not<, id) \models \Gamma_1$. Вече видяхме, че $(\mathbb{R}, >, id) \models \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Нека $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ са такива, че $h^S(x_0) \doteq h^S(y_0)$, тогава $id(x_0) = id(y_0)$, откъдето $x_0 = y_0$ и след. $x_0 \not> y_0$ и $y_0 \not> x_0$. Т.е. $(\mathbb{R}, >, id) \models \Gamma_1$

2. Разглеждаме Γ_2.

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$: "безкрайна строга наредба"

φ_5: "за вс. $\underline{x}$ има $\underline{y}$, което нарушава инективното свойство на $\underline{h}$"

Нека разгледаме $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, <, |\cdot|)$, това $h^s(x) = |x|$.

$(\mathbb{R}\setminus\{0\}, <, |\cdot|) \models \Gamma_2$, защото:

$(\mathbb{R}\setminus\{0\}, <, |\cdot|) \models \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ аналогично док.

Нека $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ е произволно. Тогава нека $y_0 = -x_0$. Изпълнено е, че $|x_0| = |y_0|$ и $x_0 \neq y_0$, откъдето

$(\mathbb{R}\setminus\{0\}, <, |\cdot|) \models \Gamma_2$.

3. Разглеждаме Γ_3:

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$: "безкрайна строга наредба"

φ_4: "ако два елемента имат еднакви образи при $\underline{h}$, то те не са $\underline{p}$ сравними"

φ_5: "за вс. $\underline{x}$ има $\underline{y}$, което нарушава инективното св-во на $\underline{h}$".

Нека $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, p^S, h^S)$, където

$p^S(x, y) \xleftrightarrow{def} |x| < |y|$

$h^S(x) = |x|$

$(\mathbb{R}\setminus\{0\}, p^S, h^S) \models \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

Нека $x_0, y_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ са произволни такива, че $h^S(x_0) = h^S(y_0)$, т.е.

това $|x_0| = |y_0|$, тогава $|x_0| \nless |y_0|$ и $|y_0| \nless |x_0|$, т.е.

$\neg p^S(x_0, y_0)$ и $\neg p^S(y_0, x_0)$, откъдето

$(\mathbb{R}\setminus\{0\}, p^S, h^S) \models \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$

Нека $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ е произволно. Тогава нека $y_0 = -x_0$. Изпълнено е, че $|x_0| = |y_0|$ и $x_0 \neq y_0$. Оттук $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, p^S, h^S) \models \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$