Най-малка и най-голяма стойност на функция – 2

Продължаваме със задачи за намиране на НГС и НМС на функция.
Напомняме, че по теоремата на Вайерщрас, непрекъснатата функция в компакт достига НМС и НГС.
Ако екстремална (най-малка или най-голяма) стойност се достига във вътрешна точка, тя е локален екстремум, т.е. всички частни производни се анулират, или някоя частна производна не съществува.
Ако екстремална стойност се достига по контура, разглеждаме функцията дефинирана само върху контура и така намаляваме броя променливи.
Примери видяхме в предното упражнение, сега продължаваме с още.

Зад. 1 Намерете най-малка и най-голяма стойност на $f(x,y,z)=xyz$

при условия $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0 \end{cases}$.

Реш. f – непрекъсната. Множеството е затворено.

$x=3-y-z\leq 3$ защото $y\geq 0, z\geq 0$. $\Rightarrow 0\leq x\leq 3$.

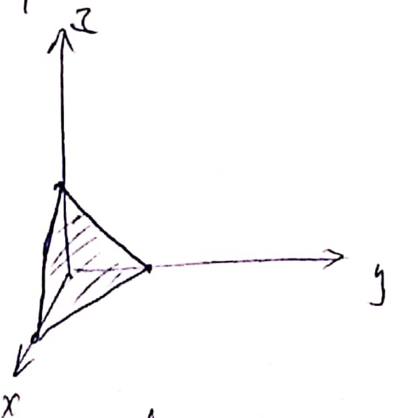
$\Rightarrow$ Всяка координата на точка от множеството е между 0 и 3.

$\Rightarrow$ Множеството се съдържа в куб със страна 3 $\Rightarrow$ ограничено.

По Вайерщрас, НМС и НГС се достигат, т.е. решение <u>има</u>.

Всяка точка от множеството е контурна:

Множеството е триъгълник с върхове $(3,0,0)$, $(0,3,0)$ и $(0,0,3)$.



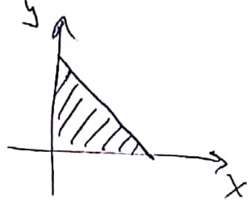
Към всяка точка от множеството можем да се доближаваме както с точки от множеството (от равнината на триъгълника), така и с точки извън множеството (извън тази равнина).

Равенството $x+y+z=3$ ни пречи. Ще го решим спрямо една от променливите (z), и ще го премахнем. $z=3-x-y$

Условието $z\geq 0$ е еквивалентно на $x+y\leq 3$.

$g(x,y)=f(x,y,3-x-y)=xy(3-x-y)=3xy-x^2y-xy^2 \to max/min$

при условия $\begin{cases} x+y\le 3 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$



Вътрешни точки:

$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2xy-y^2=0 \\ 3x-x^2-2xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(3-2x-y)=0 \\ x(3-x-2y)=0. \end{cases}$

Ако $x=0$ или $y=0$, точката (x,y) не е вътрешна $\Rightarrow$ не е лок. екстр.

$\Rightarrow xy\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=3 \\ x+2y=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=y=1.}$

По контура: Три отсечки.

По отсечката между $(0,0)$ и $(0,3)$, $g(x,y)=0$ от $x=0$.

Аналогично по отсечката между $(0,0)$ и $(3,0)$ $\Rightarrow g(x,y)=0$ от $y=0$

Остава отсечката между $(0,3)$ и $(3,0)$ $\Rightarrow$ Там $y=3-x$

и $x\ge 0$, $y\ge 0$ ни дават интервал за $x\in[0;3]$.

Разглеждаме $h(x)=g(x,3-x)=x(3-x)(3-x-(3-x))=0$.

$\Rightarrow$ По целия контур g е константата 0.

Кандидат за лок. екстр. е $g(1,1)=3-1-1=1>0$.

$\Rightarrow$ НГС $=1=g(1,1)=f(1,1,1)$

НМС$=0$ и се достига когато $x=0$ или $y=0$ или $\underbrace{x+y=3}_{z=0}$

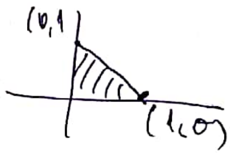
НМС$=0$ се достига когато поне една променлива е 0.

Следващите две задачи са от скорошни изпити.

Зад. 2. $f(x,y)=x^2-xy+y^2 \to min/max$

при ограничение: $|x|+|y|\le 1$

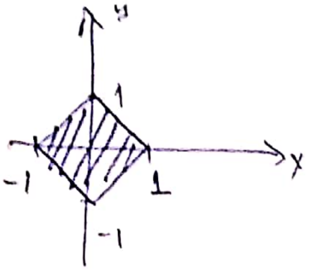
Реш. При $x\ge 0$, $y\ge 0$ имаме



Поради участието на модули,

множеството е симетрично спрямо всяка от осите.

$\Rightarrow$ Цялото допустимо множество получаваме като отразим огледално спрямо Ox и Oy.



По Вайерщрас, решение има.
Може да изследваме всеки от 4те случая за знаци на x и y поотделно.
В случая ще се възползваме от вида на целевата функция $f(x,y)=x^2-xy+y^2$.

$f(x,y)=f(-x,-y)$ и (x,y) е допустима точно когато $(-x,-y)$ е допустима.

$\Rightarrow$ Стойностите на f при $x\geq 0$ се повтарят при $x\leq 0$.
Можем да разглеждаме само $x\geq 0$.
Така вместо 4 квадранта, ще изследваме само 2.
Първо вътрешни точки (кандидати за лок. екстремуми)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-y=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=y \\ x=2y \end{cases} \Rightarrow x=2y=4x \Rightarrow x=0=y.$$

кандидат $\boxed{(0,0)}$.

Контурни точки: Имаме два случая $y\geq 0$ и $y<0$.
В първи квадрант: $|x|+|y|=x+y=1$. $\Rightarrow y=1-x$, $x\in[0;1]$.

$g(x)=f(x,1-x)=x^2-x(1-x)+(1-x)^2=x^2-x+x^2+1-2x+x^2=3x^2-3x+1$.

$g'(x)=6x-3=3(2x-1)$. $\Rightarrow x=1/2$.

$\Rightarrow$ Кандидати за НМС/НГС са краищата на отсечката и точката при $x=1/2$, т.е. $(1,0)$, $(0,1)$ и $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Във втори квадрант $x\geq 0$, $y<0$. $\Rightarrow |x|+|y|=x-y=1$ $\Rightarrow y=x-1$, $x\in[0;1]$.

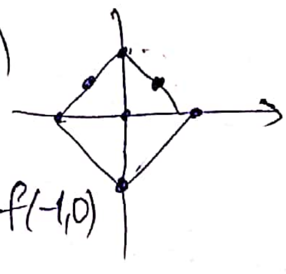
$h(x)=f(x,x-1)=x^2-x(x-1)+(x-1)^2=$
$=\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+x+x^2-2x+1=x^2-x+1$.

$h'(x)=2x-1 \Rightarrow x=1/2$. Кандидати са $(1,0)$, $(0,-1)$, $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

$(1,0)$ се получи като кандидат два пъти. $\Rightarrow$ Общо кандидати са 6.

$f(0,0)=0$
$f(1,0)=1=f(0,1)=f(0,-1)$
$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$
$f(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow$ НМС $=0=f(0,0)$
НГС $=1=f(1,0)=$
$=f(0,1)=f(0,-1)=f(-1,0)$

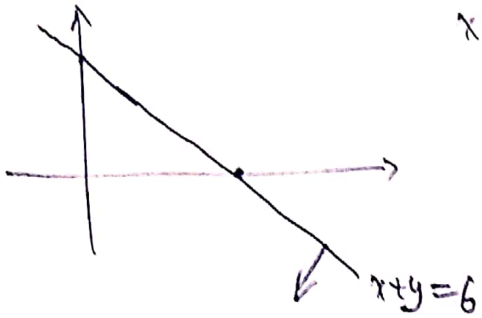


Зад 3. $x+3y \to max/min$

$$\begin{cases} x+y \le 6 \\ x+4y \ge 4 \\ y \le 2 \end{cases}$$

Реш. Най-трудното тук е да се убедим, че множеството е ограничено. За целта се възползваме от това, че ~~множеството~~ множеството е в равнината и можем да го начертаем.

Чертаем всяка от трите прави, които го определят и отбелязваме от коя страна на правата е множеството.

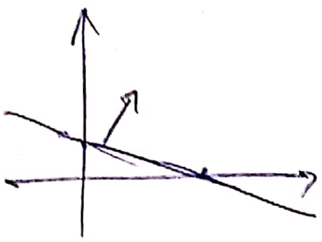


$x+y=6$ минава през $(6,0)$ и $(0,6)$.

$(0,0)$ е от правилната страна на $x+y \le 6$, защото $0+0 \le 6$.

=> Множеството е отдолу на тази права

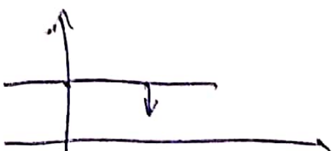
Аналогично за другите прави



$x+4y=4$ минава през $(4,0)$ и $(0,1)$

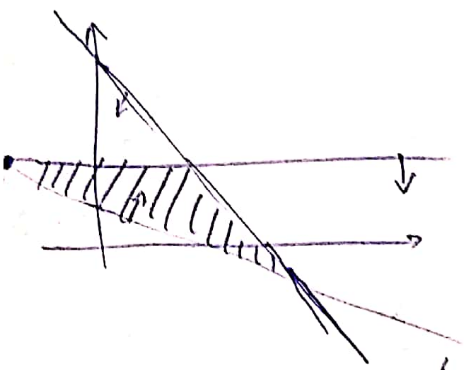
$(0,0)$ не удовлетворява $0+4.0 \ge 4$.

-> Множеството е над правата.



$y \le 2$ – надолу от $y=2$.

Правим общ чертеж:



Сечението е триъгълник => Ограничено.

Целевата функция $f(x,y)=x+3y$ е линейна.

$f'_x = 1$, $f'_y = 3$ няма лок. екстр.

По всяка права $y = Ax+B$,

$g(x) = f(x, Ax+B) = x+3(Ax+B) = (3A+1)x+B$,

g е също линейна.

Линейна функция няма локални екстремуми (освен ако не е конст.)

В краен затворен интервал, линейна функция достига екстремалните си стойности в краищата на интервала.

Виждаме, че f няма лок. екстремуми.
По всяка от трите отсечки на контура f е линейна и достига екстремални стойности в границата, т.е. във върховете на триъгълника.
Така кандидатите са само трите върха на триъгълника.
За да ги намерим координатите решаваме системите с 2 от трите уравнения:
Пресечна точка на $x+y=6$ и $x+4y=4$ е решението на $\begin{cases} x+y=6 \\ x+4y=4 \end{cases}$

$\Rightarrow 3y=-2,\ y=-2/3,\ x=6\frac{2}{3}=\frac{20}{3} \Rightarrow (x,y)=\left(\frac{20}{3}, -\frac{2}{3}\right).$

Аналогично другите точки:

$\begin{cases} x+y=6 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(4,2)$

$\begin{cases} x+4y=4 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(-4,2)$

$f\left(\frac{20}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{3} - 3.\frac{2}{3} = \frac{14}{3}.$

$f(4,2) = 4+3.2 = 10$

$f(-4,2) = -4+3.2 = 2.$

$\Rightarrow$ НГС $=10$, НМС $=2$.

Тази задача е частен случай на т.нар. линейно оптимиране.
Целевата функция, както и всички ограничения са линейни.
Такива задачи ще решавате в курса по Изследване на операциите, където се разглежда специален алгоритъм за задачи от този вид.
Тук минахме „на пръсти", защото броя независими променливи е 2 и можем да начертаем допустимото множество.
При повече променливи, пак можем да търсим "върхове" на множеството, като решения на системи, но не може лесно да се убедим в ограничеността на допустимото множество.

<u>Зад. 4</u> $e^{y}(1-36x^2-y^2)=f(x,y) \rightarrow max/min$

$36x^2+y^2 \le 1$

<u>Реш.</u>
Допустимото множество е вътрешността на елипса.
По Вайерщрас, решение има.

Вътрешни точки:

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y(-72x) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = e^y(1-36x^2-y^2) + e^y(-2y) = e^y(1-36x^2-2y-y^2) = 0.$

$\Rightarrow x=0$ от първото и тогава $1-2y-y^2=0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}-1$.

Но $y^2 \le \frac{1}{2}$ за допустимост $\Rightarrow$ $(0, \sqrt{2}-1)$ е кандидат

$(0, -\sqrt{2}-1)$ е извън множеството.

По контура: $36x^2+2y^2=1$. Изразяваме $36x^2 = 1-2y^2 \ge 0$

$\Rightarrow y^2 \le 1/2,\ y \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

$h(y) = e^y(1-(1-2y^2)-y^2) = y^2e^y$.

$h'(y) = 2y \cdot e^y + y^2 \cdot e^y = e^y \cdot y(y+2)$. В $[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$ е само $y=0$.

Окончателно 4 кандидати:

$f(0, \sqrt{2}-1) = e^{\sqrt{2}-1}(1-(\sqrt{2}-1)^2) = e^{\sqrt{2}-1}(2\sqrt{2}-2)$ - от вътрешни точки.

По контура, $y=0 \Rightarrow x^2 = 1/36,\ x = \pm 1/6$.

$f(\pm 1/6, 0) = 0$.

По краищата на интервала за h:

$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x=0,\quad f(0, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}/2}$

$y = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x=0,\quad f(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}/2}$.

Ясно е, че НМС $=0=f(\pm 1/6, 0)$, защото другите стойности са положителни.

$\frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}/2} < \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}/2} \Rightarrow \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}/2}$ не е НГС. $\Rightarrow$ НГС е $\frac{1}{2}e^{\sqrt{2}/2}$ или $e^{\sqrt{2}-1}(2\sqrt{2}-2)$.

$\frac{1}{2}e^{\sqrt{2}/2}\ \boxed{?}\ e^{\sqrt{2}-1}(2\sqrt{2}-2)$

$e^{\sqrt{2}/2-\sqrt{2}+1}\ \boxed{?}\ 4\sqrt{2}-4$

$e^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\ \boxed{?}\ 4\sqrt{2}-4$.

Ограничаваме изразите с $\sqrt{2}$ с рационални числа:

$4\sqrt{2}-4 > 3/2 \iff 8\sqrt{2}-8>3 \iff 8\sqrt{2}>11 \iff 128>121$ ✓

$\frac{2-\sqrt{2}}{2} < 1/3 \iff 6-3\sqrt{2}<2 \iff 4<3\sqrt{2} \iff 16<18$ ✓.

$\Rightarrow e^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} < e^{1/3}\ \boxed{<}\ 3/2 < 4\sqrt{2}-4$.

Но $e < 3 < \frac{27}{8} = (\frac{3}{2})^3 \Rightarrow e^{1/3} < \frac{3}{2}$. $\Rightarrow$ НГС е $\underline{e^{\sqrt{2}-1}(2\sqrt{2}-2)}$.