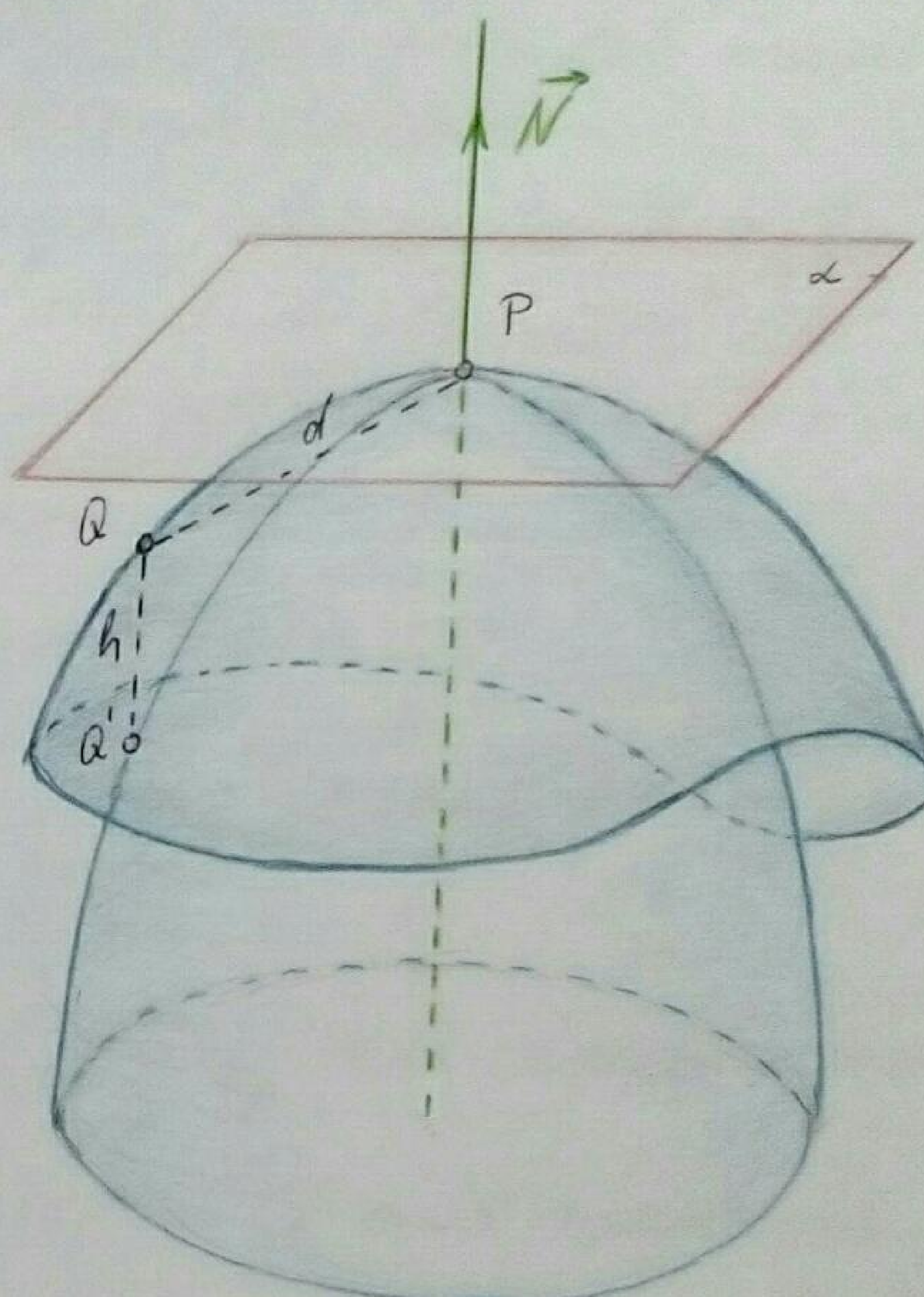
Оскулачен параболоид

Нека $\mathcal{F}: \vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$
е гладка повърхнина. $P, Q \in \mathcal{F}$:
$\overrightarrow{OP} = \vec{r}(u,v)$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{r}(u+\Delta u, v+\Delta v)$

Казваме, че Q клони към P по $\mathcal{F}$,
ако $\vec{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) \longrightarrow \vec{r}(u,v)$
при $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$.



Нека $\mathcal{F}$ е 3-кратно гладка и
Π е произволен параболоид с връх P,
ос - нормалата на $\mathcal{F}$ в P.
Правата през Q, успоредна на
нормалата, пресича Π в точка Q'.
Означаваме с $h = |QQ'|$ и с $d = |PQ|$.

Параболоидът Π се нарича оскулачен параболоид на $\mathcal{F}$ в т. P,
ако $\dfrac{h}{d^2} \longrightarrow 0$ при $Q \longrightarrow P$ по $\mathcal{F}$.

В сила е

Теорема Всяка 3-кратно гладка повърхнина има във всяка своя точка единствен оскулачен параболоид. ②

Доказателство Нека $\mathcal{F}$ е 3-кратно гладка повърхнина, $\mathcal{F}: \vec{r}=\vec{r}(u,v)$, и P е произволна фиксирана точка от $\mathcal{F}$. Избираме ОКС $K=P\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$, така че $\vec{e_3}$ да е колинеарен с нормалата на $\mathcal{F}$ в т. P.
Следователно допирателната равнина α в т. P съвпада с $P\vec{e_1}\vec{e_2}$
Спрямо K $\vec{r}=\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{e_1}+y(u,v)\vec{e_2}+z(u,v)\vec{e_3}$ т.е.

$$\mathcal{F}: \begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases} (u,v)\in D \Rightarrow \vec{N}=\vec{r}_u\times\vec{r}_v\left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}\right)$$

В $P(0,0,0)$ $\vec{N}(P)\parallel \vec{e}_3(0,0,1) \Rightarrow$ в P $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_P \neq 0$. Следователно съществува нормална околност на P, в която $\mathcal{F}$ има представяне

$$\mathcal{F}: \begin{cases} x=x \\ y=y \\ \underline{z=f(x,y)} \end{cases} \Rightarrow \alpha_P: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & f_x(0,0) \\ 0 & 1 & f_y(0,0) \end{vmatrix} = x f_x(0,0)+y f_y(0,0)-z=0 \text{, т.е}$$

$\mathcal{F}: z=f(x,y)$, $f(0,0)=0$, като допирателната равнина в P - α_P:
$\alpha_P: z = x f_x(0,0)+y f_y(0,0)$

От $\alpha \equiv P\vec{e}_1\vec{e}_2 : z=0 \Rightarrow f_x(0,0)=0$ и $f_y(0,0)=0$. ③

В тази околност на P развитието на $f(x,y)$ в ред на Маклорън има следния вид

$$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right] + \varepsilon(x,y)(x^2+y^2),$$

където $\varepsilon(x,y)$ е хомогенна фукция на x, y като $\varepsilon(x,y) \to 0$ при $x \to 0, y \to 0$

От $f(0,0) = f_x(0,0) + f_y(0,0) = 0 \Rightarrow$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left[f_{xx}(0,0)\cdot x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)^2\right] + \varepsilon(x,y)(x^2+y^2)$$

ако означим $f_{xx}(0,0) = l$, $f_{xy}(0,0) = m$ и $f_{yy}(0,0) = n$, то

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left[lx^2 + 2mxy + ny^2\right] + \varepsilon(x,y)(x^2+y^2).$$

Следователно F клони към параболоид с допирателна равнина α в точката P.

Всеки параболоид Π с връх началото на координатната система P и ос $P\vec{e}_3$, както и параболичен цилиндър и равнина през P, перпендикулярна на $\vec{e}_3$ се задава с уравнение от вида

/ забележка: на параболичния цилиндър може да гледаме като на изроден параболоид /

$$\Pi: z = \frac{1}{2}\left[ax^2 + 2bxy + cy^2\right]$$ ④

Нека $Q \in \mathcal{F}$, $Q(x, y, f(x,y))$. Тогава $Q' : QQ' \parallel O\vec{e}_3$, $Q' \in \Pi$ е с координати $Q'\left(x, y, \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)\right)$. Тогава $h = |QQ'| =$

$= \sqrt{\left(f(x,y) - \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2\right)^2} = \left|\frac{1}{2}\left((l-a)x^2 + 2(m-b)xy + (n-c)y^2\right) + \varepsilon(x,y)(x^2+y^2)\right|$.

$\Rightarrow d^2 = |PQ|^2 = x^2 + y^2 + f^2(x,y)$

Нека $y = 0$, $x \to 0$ $\Rightarrow$ $\frac{h}{d^2} = \frac{\left|\frac{1}{2}(l-a)x^2 + x^2\varepsilon(x,0)\right|}{x^2 + f^2(x,0)} = \frac{\left|\frac{1}{2}(l-a) + \varepsilon(x,0)\right|}{1 + \frac{x^4}{x^2}\left[\frac{1}{2}l + \varepsilon(x,0)\right]^2}$

$\Rightarrow$ при $x \to 0$ $\frac{h}{d^2} \to \left|\frac{1}{2}(l-a)\right| \Rightarrow a = l$.

Аналогично при $x = 0$, $y \to 0$ получаваме $n = c$ и при $x = y \to 0$ получаваме $m = b$. Следователно, ако Π е охулачен параболоид в т. P, то Π е с уравнение

$$\Pi: z = \frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right]$$

За Π имаме $\dfrac{h}{d^2} = \dfrac{|\varepsilon(x,y)(x^2+y^2)|}{x^2+y^2+f^2(x,y)} = \dfrac{|\varepsilon(x,y)|}{1+\dfrac{f^2(x,y)}{x^2+y^2}} < |\varepsilon(x,y)|$ ⑤

От $\varepsilon(x,y) \to 0$ при $x \to 0, y \to 0$ следва, че $\dfrac{h}{d^2} \to 0 \Rightarrow$ Π е оскулачен параболоид на F в точката P.

Видове точки върху повърхнина

В достатъчно малка околност на точка P от трикратно гладка повърхнина F тази повърхнина се апроксимира от оскулачния си параболоид Π, т.е. Π дава с голяма точност представа за геометрията на F. Следователно класификацията на видовете точки зависи от вида на $\Pi: 2z = lx^2 + 2mxy + ny^2$

Най-общо 1.) при $ln - 2m > 0$ Π е елиптичен параболоид и P наричаме елиптична 2.) при $ln - 2m < 0$ Π е хиперболичен параболоид и P наричаме хиперболична и 3.) при $ln - 2m = 0$ Π е параболичен цилиндър.

Можем да изберем $K = P\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$, така че π да е в канончен вид

$$\pi : 2z = ax^2 + cy^2$$

1. При $ac > 0$ π е елиптичен параболоид – P – елиптична
   2. При $a = c$ π е ротационен елиптичен параболоид. В този случай P се нарича омбилична точка.
2. При $ac < 0$ π е хиперболичен параболоид – P – хиперболична
3. При $a = 0, c \neq 0$ π е параболичен цилиндър – P – параболична
   $(a \neq 0, c = 0)$
4. При $a = c = 0$ π е равнина – $\alpha \equiv P\vec{e_1}\vec{e_2}$ – P – равнинна.

Примери...