Криволинейни интеграли от втори род

Нека $\Gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ a \le t \le b \end{cases}$ е гладка крива.

Нека $P, Q: \Gamma \to \mathbb{R}$ са функции, непрекъснати.

Криволинеен интеграл от втори род на (P, Q) върху Γ наричаме

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \left(P(x(t), y(t)).x'(t) + Q(x(t), y(t)).y'(t)\right)dt.$$

Свойства:

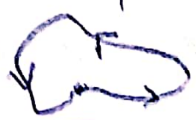
1) $\int_\Gamma (\alpha P_1 + \beta P_2)\,dx + (\alpha Q_1 + \beta Q_2)\,dy = \alpha \int_\Gamma (P_1\,dx + Q_1\,dy) + \beta \cdot \int (P_2\,dx + Q_2\,dy)$.

2) $\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy$ не зависи от параметризацията на Γ.

3) $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, то $\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy$.

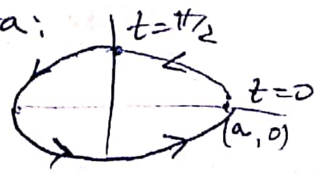
4) $\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy$ сменя знака си при обхождане на Γ в противоположната посока.

Ако Γ е затворена крива без самопресичане и Γ се обхожда в посока обратна на часовниковата стрелка, означаваме $\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy$.

Γ: 

Зад. 1. $\oint_\Gamma (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Реш. $\Gamma: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b.\sin t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$. Така обикаляме елипсата:



Тази параметризация е в подходящата посока.

$$\oint_\Gamma (x+y)\,dx + (x-y)\,dy = \int_0^{2\pi} \left[(a\cos t + b\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t - b\sin t).b\cos t\right]dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-a^2\sin t\cos t - ab\sin^2 t + ab\cos^2 t - b^2\sin t\cos t\right)dt$$

$$= -\frac{a^2+b^2}{2}\int_0^{2\pi} 2\sin t\cos t\,dt + ab\int_0^{2\pi}(\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt =$$

$$= -\frac{a^2+b^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2t\,dt + ab\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt =$$

$$-\frac{a^2+b^2}{2}(-\cos 2t)\Big|_0^{2\pi} + ab.\sin 2t\Big|_0^{2\pi} = 0+0=0.$$

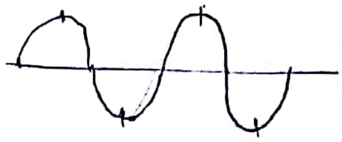
Зад 2. $\oint_\Gamma \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+xy+y^2}$, $\Gamma: \left| x^2+y^2=R^2 \right.$.

Реш. $\Gamma: \left| \begin{array}{l} x=R\cos t \\ y=R\sin t \\ 0\le t\le 2\pi \end{array}\right.$ $\quad x\,dy-y\,dx = R\cos t.R\cos t - R\sin t.R(-\sin t)$
$= R^2(\cos^2 t+\sin^2 t) = R^2.$

$$\oint_\Gamma \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+xy+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cancel{R^2}\,dt}{\cancel{R^2}(\cos^2 t+\cos t\sin t+\sin^2 t)} = \int_0^{2\pi}\frac{dt}{1+\sin t\cos t} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{2\,dt}{2(1+\sin t\cos t)} = 2\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\sin 2t} = \int_0^{2\pi}\frac{d(2t)}{2+\sin 2t} = \text{смяна } \begin{array}{l} 2t=x \\ 0\le t\le 2\pi \\ 0\le x=2t\le 4\pi \end{array}$$

$$= \int_0^{4\pi}\frac{dx}{2+\sin x}.$$ За $0\le x\le 4\pi$, $\sin x$ изменя:



4 пъти се движи стойността между -1 и 1.

Тогава $\int_0^{4\pi}\frac{dx}{2+\sin x} = 4.\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{dx}{2+\sin x}$ (формално липсват сметки...)

Универсална субституция: $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $x=2\operatorname{arctg} t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

$$4.\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{dx}{2+\sin x} = 4.\int_{-1}^{1}\frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} =$$

$\left| \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4}\le\frac{x}{2}\le\frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow -1\le \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\le 1 \end{array}\right.$

$$= 4.\int_{-1}^{1}\frac{\cancel{1+t^2}}{2+2t+2t^2}\cdot\frac{2dt}{\cancel{1+t^2}} = 4.\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t+t^2} = 4.\int_{-1}^{1}\frac{d(t+1/2)}{(t+1/2)^2+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2}$$

$$= 4.\frac{1}{\sqrt3/2}.\operatorname{arctg}\left(\frac{t+1/2}{\sqrt3/2}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{\sqrt3}.\operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt3}\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

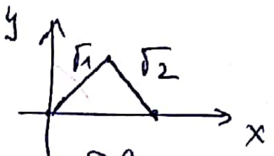
$$= \frac{8}{\sqrt3}\left(\operatorname{arctg}\sqrt3-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right)\right) = \frac{8}{\sqrt3}\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{8\sqrt3}{3}.\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{4\pi\sqrt3}{3}}$$

Като свихме интервала от 0 до 4π към $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, избегнахме несобствени интеграли при универсалната субституция.

Scanned with CamScanner

Зад.3. $\int\limits_\Gamma (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy,\quad \Gamma: \left|\begin{array}{l} y=1-|1-x| \\ 0\le x\le 2\end{array}\right.$

Реш. Г е графика на функция:



представяме Г като обединение на две отсечки.

$\Gamma_1: \left|\begin{array}{l} y=x=t \\ 0\le t\le 1\end{array}\right. \qquad \Gamma_2: \left|\begin{array}{l} y=2-t \\ x=t \\ 1\le t\le 2\end{array}\right., \quad \int\limits_\Gamma = \int\limits_{\Gamma_1} + \int\limits_{\Gamma_2}.$

$$\int\limits_{\Gamma_1} (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy = \int_0^1 (t^2+t^2)\,dt+\int_0^1 (t^2-t^2)\,dt = \int_0^1 2t^2\,dt = \frac{2}{3}.$$

$$\int\limits_{\Gamma_2} (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy = \int_1^2 \left[(t^2+(2-t)^2)\cdot 1+(t^2-(2-t)^2)\cdot(-1)\right]dt =$$

$$= \int_1^2 \left[(t^2+t^2-4t+4)-(\cancel{t^2}-4+4t-\cancel{t^2})\right]dt = \int_1^2 (2t^2-4t+4-4t+4)\,dt =$$

$$= \int_1^2 (2t^2-8t+8)\,dt = \frac{2}{3}t^3-4t^2+8t\Big|_1^2 = \frac{16}{3}-\cancel{16}+\cancel{16}-\left(\frac{2}{3}-4+8\right) =$$

$$= \frac{16}{3}-\frac{2}{3}-4 = \frac{14}{3}-4 = \frac{2}{3}.$$

$$\Rightarrow \int\limits_\Gamma = \int\limits_{\Gamma_1}+\int\limits_{\Gamma_2} = \frac{2}{3}+\frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

Зад.4. $\int\limits_\Gamma xy\,dx+(y-x)\,dy,\quad \Gamma: \left|\begin{array}{l} y=x^k \\ 0\le x\le 1\end{array}\right., \quad k\in\mathbb{N}.$

Реш. Г е графика на функция: $\left|\begin{array}{l} x=t \\ y=t^k \\ 0\le t\le 1\end{array}\right.$

$$\int\limits_\Gamma xy\,dx+(y-x)\,dy = \int_0^1 \left(t\cdot t^k\cdot 1+(t^k-t)\cdot kt^{k-1}\right)dt =$$

$$= \int_0^1 \left(t^{k+1}+k\cdot t^{2k-1}-k\cdot t^k\right)dt = \frac{t^{k+2}}{k+2}+k\cdot\frac{t^{2k}}{2k}-k\cdot\frac{t^{k+1}}{k+1}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{k+2}+k\cdot\frac{1}{2k}-\frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+2}+\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{2}.$$

Ясно е, че този израз зависи от k, т.е. интегралът зависи от конкретния път между точките (0,0) и (1,1).

<u>Зад. 5.</u> $\int\limits_\Gamma 2xy\,dx + x^2dy$ за сещите $\Gamma: \left| \begin{array}{l} y=x^k \\ 0\le x\le 1 \end{array}\right.$.

<u>Реш.</u> $\int\limits_\Gamma 2xy\,dx + x^2dy = \int\limits_0^1 \left(2.t.t^k.1 + t^2.k.t^{k-1}\right)dt =$

$= \int\limits_0^1 \left(2t^{k+1} + kt^{k+1}\right)dt = \cancel{(2+k)}.\dfrac{t^{k+2}}{\cancel{k+2}}\Big|_0^1 = 1$ – не зависи от k.

~~Следователно~~ Тук интегралът не зависи от конкретната крива, свързваща $(0,0)$ и $(1,1)$. Оказва се, че това не е случайно. Върху всяка гладка крива свързваща $(0,0)$ и $(1,1)$ (не само от разглеждания вид), интегралът има стойност 1.

Причината е, че функциите $P(x,y)=2xy$ и $Q(x,y)=x^2$ имат връзка.

Всъщност двойката (P,Q) от функции можем да мислим като една функция, която приема аргумент $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ и дава резултат $(P(x,y),Q(x,y))\in\mathbb{R}^2$.

Иначе казано (P,Q) преобразува векторът (x,y) във вектора $(P(x,y),Q(x,y))$. (P,Q) поради това се нарича векторно поле.

<u>Деф.</u> Векторното поле (P,Q) е <u>потенциално</u>, ако съществува функция $u(x,y)$ (потенциал), такава че $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$

Нека u е потенциал за полето (P,Q) и да допуснем, че P и Q имат непрекъснати първи частни производни.

Тогава $u''_{xy} = (u'_x)'_y = P'_y$ е непрекъсната

$u''_{yx} = (u'_y)'_x = Q'_x$ също е непрекъсната.

$\Rightarrow u''_{xy}, u''_{yx}$ – непрекъснати $\Rightarrow u''_{xy} = u''_{yx}$ т.е. $P'_y = Q'_x$.

Така условието $P'_y = Q'_x$ е <u>необходимо</u> едно поле да е потенциално.

Ако u е потенциал за (P,Q), то за произволна гладка крива Γ с начало $A(x_A, y_A)$ и край $B(x_B, y_B)$,

$$\int_\Gamma P dx + Q dy = \int_a^b \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot y'(t)\right] dt = \cancel{\int_a^b \left(\frac{d}{dt} u(x(t)), y(t)\right)}$$

$$= \int_a^b \left(\frac{d}{dt} u(x(t), y(t))\right) dt = \int_a^b d\, u(x(t), y(t)) = u\Big|_A^B = u(x_B, y_B) - u(x_A, y_A),$$

защото $\frac{d}{dt} u(x(t), y(t)) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot y'(t)$ съгласно формулата за диференциране на съставна функция.

Да обобщим, ако u - потенциал за (P,Q) и Γ - крива от A до B, $\int P dx + Q dy = u(B) - u(A)$ зависи само от A и B, но не и от кривата Γ.

Зад. 6. Нека Γ е гладка крива с начало $(0,0)$ и край $(2,1)$. Докажете, че интегралите не зависят от Γ и ги пресметнете:

а) $\int_\Gamma y dx + x dy$ б) $\int_\Gamma 3x^2y^2 dx + 2x^3y dy$

в) $\int_\Gamma (y^2 + 2xy) dx + (2xy + x^2) dy$ г) $\int_\Gamma (e^{2y} - 5y^3e^x) dx + (2xe^{2y} - 15y^2e^x) dy$

д) $\int_\Gamma (y^2e^{xy} + 8x^3) dx + e^{xy}(1+xy) dy$.

Реш. а) $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Търсим u, т.ч. $u'_x = y$, $u'_y = x$.
$u(x,y) = xy$ е такава функция. $\Rightarrow$ $(P,Q) = (y,x)$ е потенциално поле и $\int_\Gamma y dx + x dy = u(2,1) - u(0,0) = 2$ не зависи от Γ.

Преди да продължим, ще отбележим че ако $u(x,y)$ е потенциал, то $u(x,y) + C$ е потенциал за всяко $C \in \mathbb{R}$, т.е. потенциалът е определен с точност до константа.

б) $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2$. Интегриране по x:

$u(x,y) = \int 3x^2y^2 dx = x^3y^2 + C$

Това прави за фиксирано y. Но при различни y можем да получаваме различни константи, т.е. C зависи от y, или C е функция на y, $C = C(y)$.

Действително за всяка функция $C(y)$,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3y^2 + C(y)\right) = 3x^2y^2 + 0.$$

Аналогично $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3y \Rightarrow u(x,y) = \int 2x^3y\, dy = x^3y^2 + D(x)$

Тук D зависи от x, т.че $D = D(x)$.

$x^3y^2 + C(y) = u(x,y) = x^3y^2 + D(x)$. Търсим подходящи $C(y)$, $D(x)$.

Можем да изберем $C(y) = D(x) \equiv 0$ и $u(x,y) = x^3y^2$ е потенциал.

$$\Rightarrow \int_\Gamma 3x^2y^2dx + 2x^3y\,dy = x^3y^2\Big|_{(0,0)}^{(2,1)} = 8 - 0 = 8.$$

в) $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 + 2xy \Rightarrow u(x,y) = \int (y^2 + 2xy)\, dx = xy^2 + x^2y + C(y)$.

$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + x^2 \Rightarrow u(x,y) = \int (2xy + x^2)\, dy = xy^2 + x^2y + D(x)$.

$C(y) = D(x) = 0$ върши работа, $u(x,y) = xy^2 + x^2y = xy(x+y)$ е потенциал.

$$\Rightarrow \int_\Gamma P dx + Q dy = xy(x+y)\Big|_{(0,0)}^{(2,1)} = 6.$$

г) (Това всъщност е задача от изпит)

$\frac{\partial u}{\partial x} = (e^{2y} - 5y^3e^x) \Rightarrow u(x,y) = \int (e^{2y} - 5y^3e^x)\, dx = xe^{2y} - 5y^3e^x + C(y)$

Може да се възползваме от вече намерения вид за $u(x,y)$.

Диференцираме по y и приравняваме на $Q(x,y) = 2xe^{2y} - 15y^2e^x$. Това ще ни даде условие за $C(y)$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{2y} - 5y^3e^x + C(y)\right) = x.e^{2y}.2 - 5.3y^2.e^x + C'(y)$$

$$= 2xe^{2y} - 15y^2e^x + C'(y)$$

$$\Rightarrow 2xe^{2y} - 15y^2e^x + C'(y) = Q(x,y) = \cancel{2xe^{2y}} - \cancel{15y^2e^x}$$

$\Rightarrow C'(y) = 0 \quad \Rightarrow C(y) = 0$ върши работа

(както и $C(y) = 42$ или всяко друго реално число)

Така $u(x,y) = xe^{2y} - 5y^3e^x$ е потенциал

и стойността на интеграла е $u(2,1) - u(0,0) =$

$$= 2.e^2 - 5.8 - 0 = 2e^2 - 40.$$

g) (Това също е задача от изпит).

$$u(x,y) = \int(y^2e^{xy} + 8x^3)dx = \int y.e^{xy}.\underbrace{y\,dx}_{(y \text{ е конст.})} + \int 8x^3dx =$$

$$= y\int e^{xy}dxy + 8.\frac{x^4}{4} = y.e^{xy} + 2x^4 + C(y).$$

$$e^{xy}(1+xy) = Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \left[y.e^{xy} + 2x^4 + C(y)\right]'_y =$$

$$= 1.e^{xy} + y.e^{xy}.x + C'(y) = e^{xy}(1+xy) + C'(y).$$

$$\Rightarrow C'(y) = 0 \text{ и } C(y) \equiv 0$$

$\Rightarrow u(x,y) = ye^{xy} + 2x^4$ е потенциал, интегралът не зависи от конкретната крива Γ, а стойността му е

$$u(2,1) - u(0,0) = 1.e^{2.1} + 2.2^4 - (0+0) = \boxed{e^2 + 32}$$

Да обобщим най-важното за криволинейни интеграли.

Първи род: $\int_\Gamma f(x,y)dl$.

Параметризираме $\Gamma: \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, a\le t\le b.$

$$\int_\Gamma f(x,y)dl = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\cdot\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$$

Стойността на интеграла не зависи от параметризацията или посоката на обхождане.

Втори род $\int_\Gamma Pdx+Qdy$.

Параметризираме $\Gamma: \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, a\le t\le b$

$$\int_\Gamma Pdx+Qdy = \int_a^b \left[P(\varphi(t),\psi(t))\cdot\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\cdot\psi'(t)\right]dt.$$

Стойността на интеграла не зависи от параметризацията, но зависи от посоката на обхождане.

Ако $u(x,y)$ е такава функция, че $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=P(x,y)$ и $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$, и се нарича потенциал,

$\int_\Gamma Pdx+Qdy = u(\varphi(b),\psi(b))-u(\varphi(a),\psi(a))$ зависи само от краищата на кривата Γ.