5. Представяне на афинните трансформации в равнината като произведение на две дилатации и еднаквост.

Лема. Нека φ е афинна трансформация в E_2. Тогава съществуват прави p и q, такива, че $p \perp q$ и $\varphi(p) \perp \varphi(q)$.

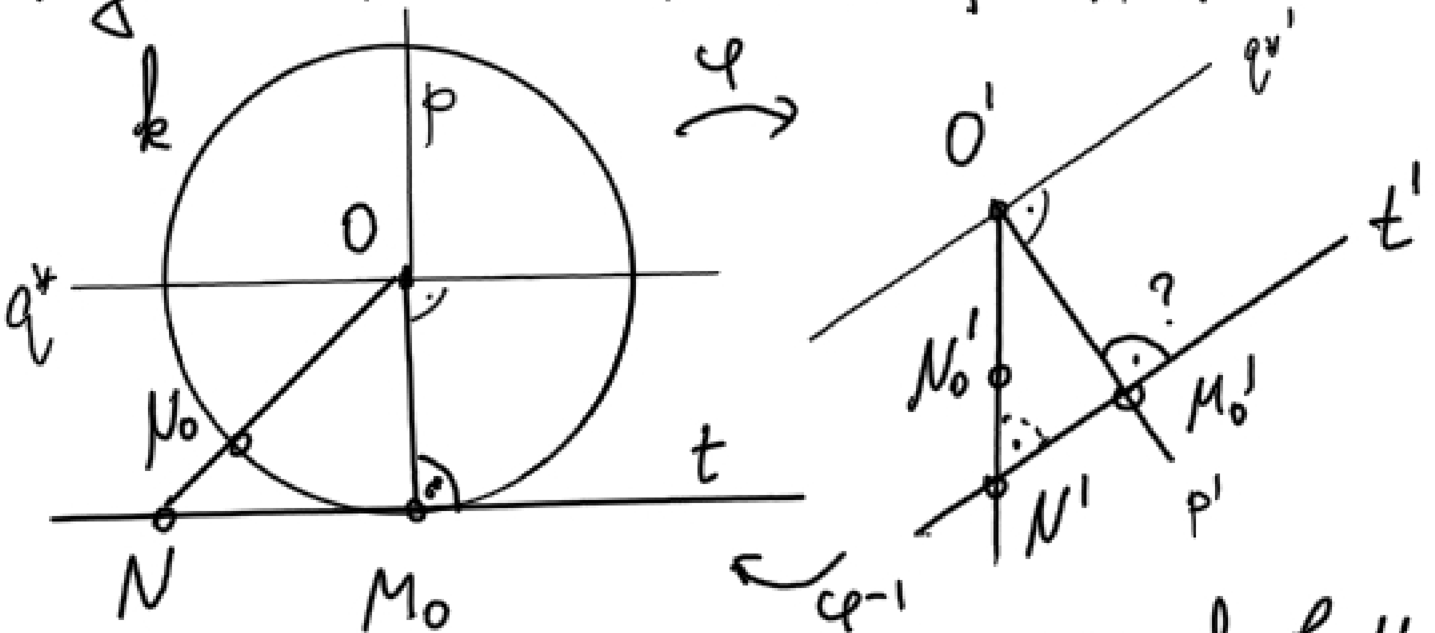
Доказателство. Нека φ е афинна трансформация, O – произволна фиксирана точка и $\varphi(O) = O'$. Тогава е определена числовата функция на разстоянието

$$f : E_2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$X \neq O \longrightarrow f(X) = |O'X'|,$$

$X' = \varphi(X)$.

Нека k е окръжност с център O и радиус 1, $k = k(O, 1)$. Разглеждаме действието на f върху k. Тъй като f_k е непрекъснатата, дефинирана върху компактно множество – окръжността k, то f достига екстремумите си.

В частност имаме, че f достига минимума си, т.е. $\exists M_0 \in k : f(M_0) \leq f(M)$ $M \in k$



Нека t е допирателната към k в M_0 $\Rightarrow OM_0 \perp t$; $\varphi(t) = t'$, $t' \ni M_0' = \varphi(M_0)$. Тогава $f_{min} = f(M_0) = |O'M_0'|$.

Ще докажем, че $O'M_0' \perp t'$. Да допуснем противното, т.е. $O'M_0' \not\perp t' \Rightarrow \exists N' \ni t'$: $O'N' \perp t'$. Нека $\varphi^{-1}(N') = N \Rightarrow N \ni t$ и $N \neq M_0$. Тъй като отсечката $(ON) > (OM_0)$, то (ON) пресича k в точка N_0. Следователно точката $N_0' = \varphi(N_0)$ е от отсечката $(O'N') \Rightarrow |O'N_0'| < |O'N'| < |O'M_0'| \Rightarrow$

$f(N_0) < f(M_0)$ $\not\downarrow$ с $f(M_0) \leq f(M)$ $\forall M \in k$.

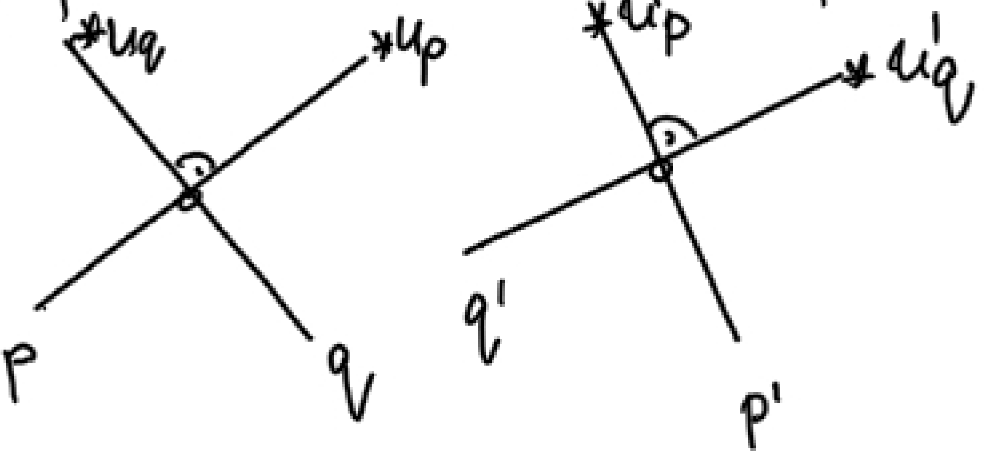
$\Rightarrow O'M_0' \perp t'$.

Означаваме с $p = OM_0$, $q = t \Rightarrow p \perp q$: $\varphi(p) \perp \varphi(q)$.

Ясно е, че ако $q^* : q^* \ni O,\ q^* \perp p$, т.е. $q^* \parallel q$, то $\varphi(q^*) = q^{*\prime}$ като $q^{*\prime} \perp p'$.

Казваме, че правите p и q задават главните направления на φ.

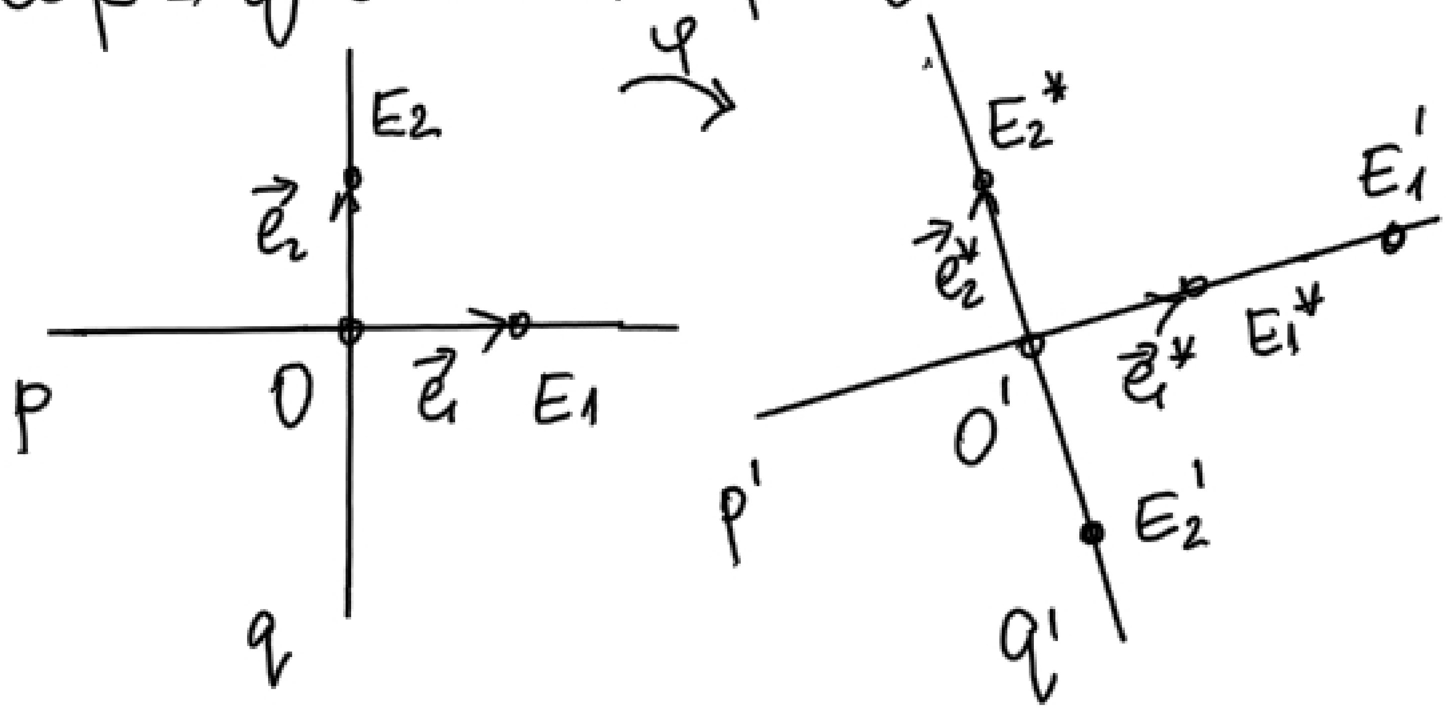
Горната лема можем да изкажем по следния начин: „За всеки афинитет φ има перпендикулярни направления, които се изобразяват също в перпендикулярни."



Удобно е, (в E_2^*) да запишем $u_p \perp u_q \xrightarrow{\varphi} u'_{p'} \perp u'_{q'}$, u_p и u_q задават главните направления на φ.

<u>Теорема</u>. Всяка афинна трансформация в равнината може да се представи като произведение от две дилатации по две взаимно перпендикулярни оси и една ортогонална трансформация.

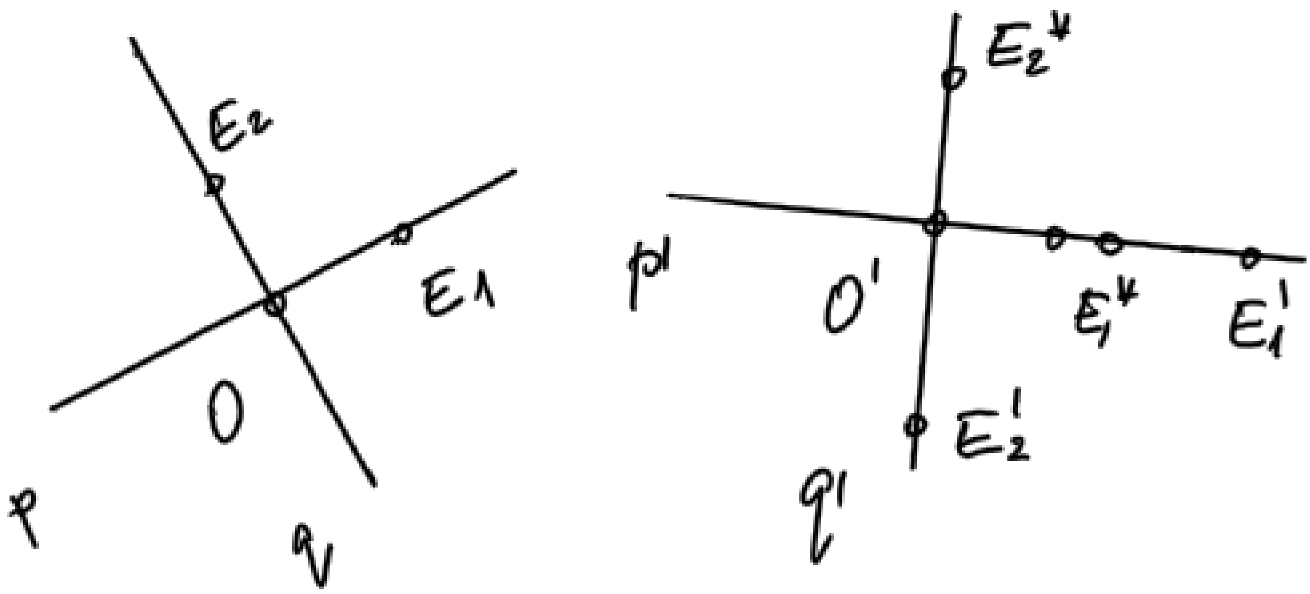
Доказателство. Нека φ е афинна трансформация, O - фиксирана точка и нека $\varphi(O) = O'$. От лемата имаме, че $\exists p, q$, $p \cap q = O$, $p \perp q$ такива, че $\varphi(p) = p'$, $\varphi(q) = q'$ и $p' \perp q'$. (ясно е, че $p' \cap q' = O'$)



Нека $E_1 \in p$, $E_2 \in q$: $|OE_1| = |OE_2| = 1$, $E_1^* \in p'$, $E_2^* \in q'$: $|OE_1^*| = |OE_2^*| = 1$. Тогава координатните системи $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ и $K^* = O'\vec{e_1}^*\vec{e_2}^*$, където $\vec{e_i} = \overrightarrow{OE_i}$, $\vec{e_i}^* = \overrightarrow{O'E_i^*}$, $i = 1, 2$ са ортонормирани.

Нека $\varphi(E_1) = E_1'$ и $\varphi(E_2) = E_2'$. Тогава φ се определя еднозначно от действието си върху O, E_1, E_2. Имаме

$$O, E_1, E_2 \xrightarrow{\exists ! \varphi} O', E_1', E_2'$$



Нека τ е ортогоналната трансформация:

$$O, E_1, E_2 \xrightarrow{\tau} O', E_1^*, E_2^*,$$

δ_1 да е дилатацията с ос q' по p':

$$E_1^* \xrightarrow{\delta_1} E_1' \Rightarrow O' \xrightarrow{\delta_1} O' \text{ и } E_2^* \xrightarrow{\delta_1} E_2^*,$$

а δ_2 да е дилатацията с ос p' по q', при която $E_2^* \xrightarrow{\delta_2} E_2' \Rightarrow O' \xrightarrow{\delta_2} O'$ и $E_1' \xrightarrow{\delta_2} E_1'$.

Нека $\varphi^* = \delta_2 \delta_1 \tau \Rightarrow$ при φ^* имаме $\varphi^*(O, E_1, E_2) = O', E_1', E_2' \Rightarrow \varphi^* \equiv \varphi$

$\Rightarrow \varphi = \delta_2 \delta_1 \tau$. $\square$.

Забележка 1. Ясно е, че разлагането на φ на две дилатации и еднаквост не е еднозначно – имаме известен избор както за τ, така и за δ_1 и δ_2.

φ или сменя ориентацията в равнината, или не.

$\overset{-}{\varphi} = \overset{+}{\delta_2}\overset{-}{\delta_1}\overset{+}{\tau}$ — $\overset{-}{C} = \overset{+}{D_2}\overset{-}{D_1}\overset{+}{O}$ $(D_2D_1 = D_1D_2)$

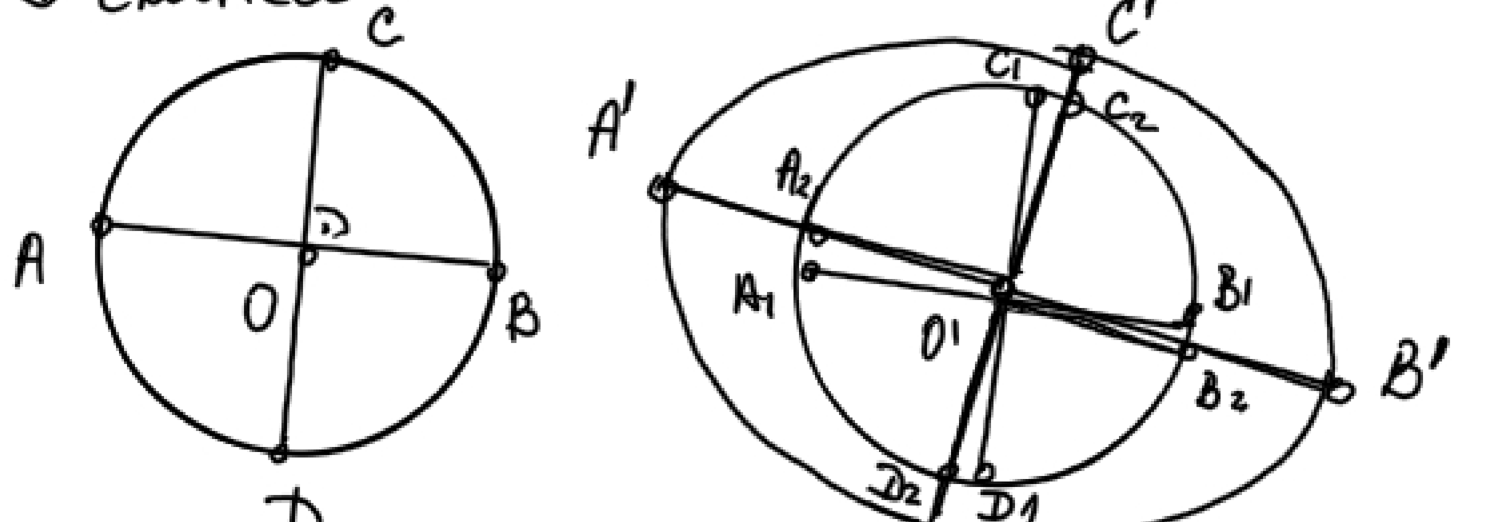
или $- \quad - \quad + \quad +$

Ако τ „поеме" смяната на ориентацията, то $\overset{-}{\varphi} = \underset{-}{\overset{+}{\delta_2}}\,\underset{-}{\overset{+}{\delta_1}}\,\overset{-}{\tau}$; $\overset{-}{C} = \overset{+}{D_2}\overset{+}{D_1}\overset{-}{O}$.

$\overset{+}{\varphi} = \underset{-}{\overset{+}{\delta_2}}\,\underset{+}{\overset{+}{\delta_1}}\,\underset{-}{\overset{+}{\tau}}$ (не се заслужава)

Забележка 2.

При афинитет окръжност се изобразява в елипса



1. транслация: $O \to O'$ (τ_1)
2. еднаквост τ_2: да „напасне" главните направления едно върху друго; $\tau = \tau_2\tau_1$
3. $\delta_1 : A_2 \xrightarrow{\delta_1} A' \Rightarrow B_2 \xrightarrow{\delta_1} B'$ или... $A_2 \to B'$...
4. $\delta_2 : C_2 \xrightarrow{\delta_1} C' \Rightarrow D_2 \xrightarrow{\delta_2} D'$ или...