16. Задаване на точки, прави и равнини в аксонометрия. Основни задачи

А) Изобразяване на точките от координатните равнини на $\overline{K} = \{O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$:

Ако $\overline{M} \in (\overline{O}\overline{e}_1\overline{e}_2)$, то $\overline{M} \equiv \overline{M}$ и следователно $M \equiv M_1$.

Ако $\overline{N} \in (\overline{O}\overline{e}_1\overline{e}_3)$, то $\overline{N}_1 \in \overline{O}\overline{e}_1(\overline{O}\overline{x})$ и следователно $N_1 \in O\vec{e}_1$, $NN_1 \parallel O\vec{e}_3$.

Ако $\overline{P} \in (\overline{O}\overline{e}_2\overline{e}_3)$, то $\overline{P}_1 \in \overline{O}\overline{e}_2(\overline{O}\overline{y})$ и следователно $P_1 \in O\vec{e}_2$, $PP_1 \parallel O\vec{e}_3$.

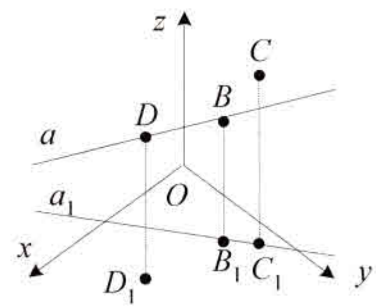
Б) Изобразяване на прави

Нека $\overline{a}$ е права, $\overline{a}_1$ е ортогоналната и проекция в $(O, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$, $a = \psi_\pi^{U_s}(\overline{a})$ и $a_1 = \psi_\pi^{U_s}(\overline{a}_1)$.

Проекциите на $\overline{a}$ в π наричаме както следва:

$a = (\overline{a}, U_s) \cap \pi$ – *аксонометрична проекция* на $\overline{a}$;

$a_1 = (\overline{a}_1, U_s) \cap \pi$ – *първа вторична проекция* на $\overline{a}$.



Така в аксонометрия правата $\overline{a}$ се задава от наредената двойка (a, a_1). Както при изобразяване на точка, следва че наредената двойка (a, a_1) определя еднозначно $\overline{a}$, $\overline{a}(a, a_1)$.

Нека в аксонометрия са зададени точка $\overline{B}(B, B_1)$ и права $\overline{a}(a, a_1)$. От свойствата на централното проектиране следва, че $\overline{B} \in \overline{a}$ тогава и само тогава, когато $B \in a$ и $B_1 \in a_1$, т.е.

$$\overline{B} \in \overline{a} \Leftrightarrow B \in a, B_1 \in a_1 \ (BB_1 \parallel O\vec{e}_3).$$

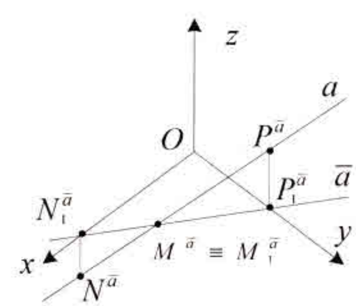
$B \in a$, $C \notin a$ $D \notin a$

Стъпки на една права $\overline{a}$ наричаме пресечните точки на $\overline{a}$ с координатните равнини на $\overline{K}$. Това са съответно точките:

1) $\overline{M}^{\overline{a}} = \overline{a} \cap (\overline{O}\overline{e}_1\overline{e}_2)$ – *първа стъпка* на $\overline{a}$.

Тъй като $\overline{M}^{\overline{a}} \in (\overline{O}\overline{e}_1\overline{e}_2)$, то $\overline{M}^{\overline{a}} \equiv \overline{M}_1^{\overline{a}}$. От друга страна $\overline{M}^{\overline{a}} \in \overline{a}$, т.е. $M^{\overline{a}} \in a$ и $M_1^{\overline{a}} \in a_1$. Следователно $a \cap a_1 = M^{\overline{a}} \equiv M_1^{\overline{a}}$.

2) $\overline{N}^{\overline{a}} = \overline{a} \cap (\overline{O}\overline{e}_1\overline{e}_3)$ – *втора стъпка* на $\overline{a}$.



За нея имаме $N_1^{\overline{a}} \in O\vec{e}_1$ и $N_1^{\overline{a}} \in a_1$, т.е. $N_1^{\overline{a}} = a_1 \cap O\vec{e}_1$. Също така $N^{\overline{a}} \in a$ и $N_1^{\overline{a}} N^{\overline{a}} \parallel O\vec{e}_3$.

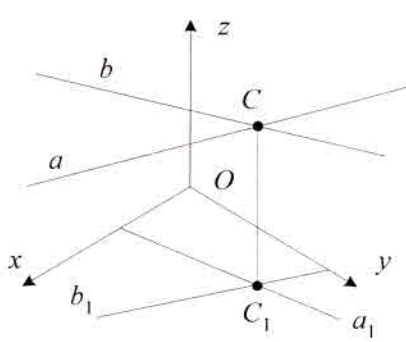
3) $\overline{P}^{\overline{a}} = \overline{a} \cap (\overline{O}\overline{e}_2\overline{e}_3)$ – *трета стъпка* на $\overline{a}$.

За нея имаме $P_1^{\overline{a}} \in O\vec{e}_2$ и $P_1^{\overline{a}} \in a_1$, т.е. $P_1^{\overline{a}} = a_1 \cap O\vec{e}_2$. Също така $P^{\overline{a}} \in a$ и $P_1^{\overline{a}} P^{\overline{a}} \parallel O\vec{e}_3$.

В) Взаимно положение на две прави $\overline{a}(a, a_1)$ и $\overline{b}(b, b_1)$.

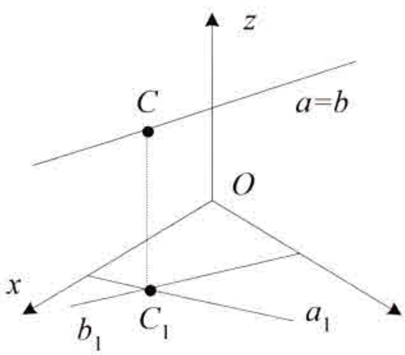
I. Ако $\overline{a} \cap \overline{b} = \overline{C}$ и $\overline{C}(C, C_1)$, то от $\overline{C} \in \overline{a}$ следва, че $C \in a, C_1 \in a_1$ и от $\overline{C} \in \overline{b}$ следва, че $C \in b, C_1 \in b_1$. Така получаваме условие за пресичане на две прави:

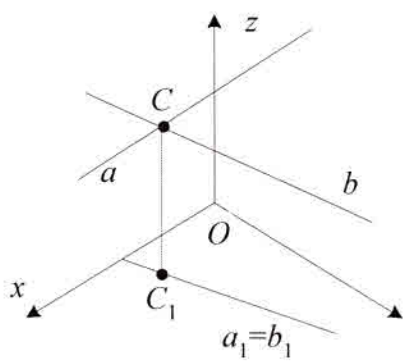
$$\overline{a} \cap \overline{b} = \overline{C} \Leftrightarrow a \cap b = C,\ a_1 \cap b_1 = C_1,\ CC_1 \parallel O\vec{e}_3.$$

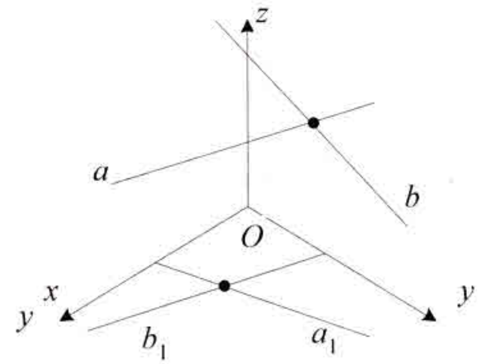


Ако равнините $(U_S, \overline{a})$ и $(U_S, \overline{b})$ съвпадат , то $a \equiv b$. Тогава правите $\overline{a}$ и $\overline{b}$ се пресичат, ако a_1 и b_1 се пресичат.

Ако равнината определена от правите $\overline{a}$ и $\overline{b}$ е успоредна на $\overline{O}\overline{e}_3$, то $a_1 \equiv b_1$. Тогава правите $\overline{a}$ и $\overline{b}$ се пресичат, ако a и b се пресичат.







II) Ако $a||b$, от свойствата на успоредното проектиране следва, че: $a \parallel b$ и $a_1 \parallel b_1$, или евентуално $a \parallel b$ и $a_1 \equiv b_1$, или $a \equiv b$ и $a_1 \parallel b_1$. (Но не едновременно $a_1 \equiv b_1$ и $a \equiv b$.)

Във всички останали случаи правите $\overline{a}$ и $\overline{b}$ са кръстосани.

Г. Изобразяване на равнина:

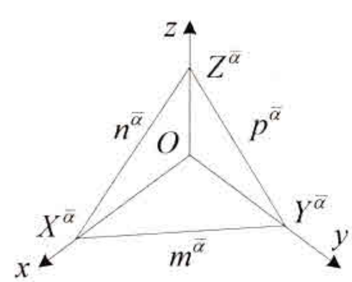
Една равнина може да бъде зададена чрез три свои неколинеарни точки, или чрез неколинеарни точка и права от нея, чрез две пресичащи се прави или чрез две успоредни прави.

Обикновено равнина $\overline{\alpha}$ се задава с две от пресечниците с координатните равнини на $\overline{K} = \{O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$. Тези пресечници се наричат **дири (следи) на** $\overline{\alpha}$:

$\overline{m}^{\overline{\alpha}} = \overline{\alpha} \cap (\overline{O}\overline{e}_1\overline{e}_2)$ – *първа диря* на $\overline{\alpha}$;

$\overline{n}^{\overline{\alpha}} = \overline{\alpha} \cap (\overline{O}\overline{e}_1\overline{e}_3)$ – *втора диря* на $\overline{\alpha}$;

$\overline{p}^{\overline{\alpha}} = \overline{\alpha} \cap (\overline{O}\overline{e}_2\overline{e}_3)$ – *трета диря* на $\overline{\alpha}$.



За тях имаме: $\overline{m}_1^{\overline{\alpha}} \equiv \overline{m}^{\overline{\alpha}}$, откъдето $m_1^{\overline{\alpha}} \equiv m^{\overline{\alpha}}$, $\overline{n}_1^{\overline{\alpha}} \equiv O\overline{e}_1$, т.е. $n_1^{\overline{\alpha}} \equiv O\vec{e}_1 \equiv Ox$ и $\overline{p}_1^{\dot{\overline{\alpha}}} \equiv O\overline{e}_2$, т.е. $p_1^{\overline{\alpha}} \equiv O\vec{e}_2 \equiv Oy$.

Пресечните точки на $\overline{\alpha}$ с координатните оси на $\overline{K}$ се означават с: $\overline{X}^{\overline{\alpha}} = \overline{\alpha} \cap \overline{Ox}$; $\overline{Y}^{\overline{\alpha}} = \overline{\alpha} \cap \overline{Oy}$; $\overline{Z}^{\overline{\alpha}} = \overline{\alpha} \cap \overline{Oz}$.

За да бъде зададена една равнина $\overline{\alpha}$ е достатъчно в π да са изобразени кои да е две от дирите Ł: $\overline{\alpha}[m^{\alpha}, n^{\alpha}]$, или $\overline{\alpha}[m^{\alpha}, p^{\alpha}]$, или $\overline{\alpha}[n^{\alpha}, p^{\alpha}]$.

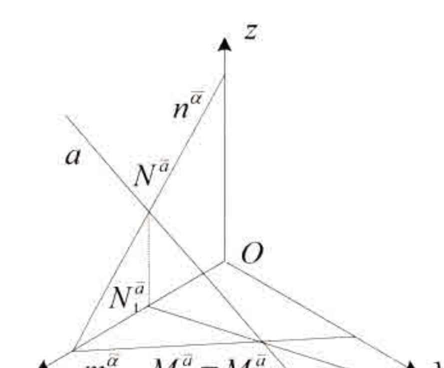
Д. Инцидентност на права и равнина

Ако правата $\overline{a}$ лежи в равнината $\overline{\alpha}$, то стъпките на правата ще бъдат инцидентни с едноименните дири на равнината. Следователно необходимото и достатъчно *условие за инцидентност на права и равнина* е:

$\overline{a}(a, a_1) \in \overline{\alpha}[m^{\overline{\alpha}}, n^{\overline{\alpha}}] \Leftrightarrow M^{\overline{a}} \in m^{\overline{\alpha}}$ и $N^{\overline{a}} \in n^{\overline{\alpha}}$, т.е.

$a \cap a_1 = M^{\overline{a}} \in m^{\overline{\alpha}}$ и $a \cap n^{\overline{\alpha}} = N^{\overline{a}}$, $a_1 \cap Ox = N_1^{\overline{a}}$,

$N_1^{\overline{a}} N^{\overline{a}} \parallel Oz$.



E. Инцидентност на точка и равнина

Ако точката $\overline{A}$ лежи в равнината $\overline{\alpha}$, то тя ще лежи на права от равнината. Следователно необходимото и достатъчно *условие за инцидентност на точка и равнина* е:

$$\overline{A} \in \overline{\alpha} \Leftrightarrow \overline{A} \in \overline{b}, \overline{b} \in \overline{\alpha}.$$

Обикновено за установяване на инцидентност на точка иравнина се използват така наречените *главни прави от равнината* $\overline{\alpha}$. Правата $\overline{h}^{\overline{\alpha}}$ е *главна права от* I *система*, ако $\overline{h}^{\overline{\alpha}} \parallel O\overline{e}_1\overline{e}_2$ или $\overline{h}^{\overline{\alpha}} \parallel \overline{m}^{\overline{\alpha}}$.

Следователно за $\overline{h}^{\overline{\alpha}}\left(h^{\overline{\alpha}}, h_1^{\overline{\alpha}}\right)$ имаме $h^{\overline{\alpha}} \parallel m^{\overline{\alpha}}$ и $h_1^{\overline{\alpha}} \parallel m^{\overline{\alpha}}$.

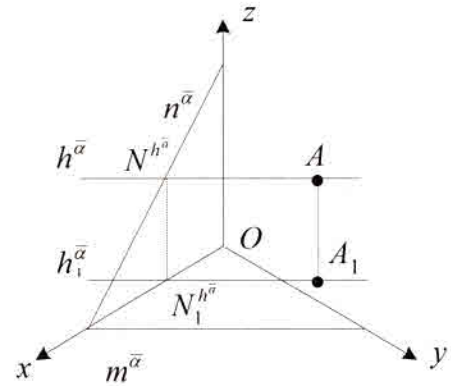
Тогава

$\overline{A}(A, A_1) \in \overline{\alpha}[m^{\overline{\alpha}}, n^{\overline{\alpha}}] \Leftrightarrow \overline{A} \in \overline{h}^{\overline{\alpha}}$ или $A \in h^{\overline{\alpha}}$, $A_1 \in h_1^{\overline{\alpha}}$.

Аналогично може да се използват и

главни прави от II *система* – $\overline{v}^{\overline{\alpha}} \parallel O\overline{e}_1\overline{e}_3$,

или *главни прави от* III *система* – $\overline{f}^{\overline{\alpha}} \parallel O\overline{e}_2\overline{e}_3$.



Взаимно положение на две равнини

1. Успоредни равнини

Ако две равнини $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ са успоредни, то и едноименните им дири ще бъдат успоредни.

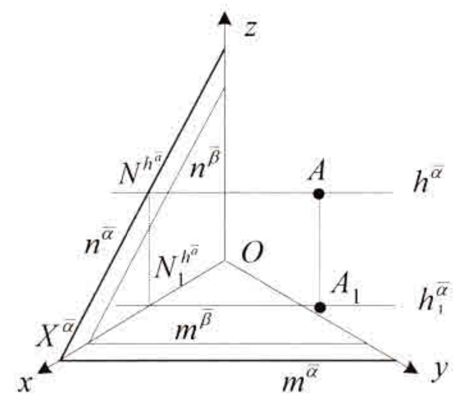
Следователно $\overline{\alpha}[m^{\overline{\alpha}}, n^{\overline{\alpha}}] \parallel \overline{\beta}[m^{\overline{\beta}}, n^{\overline{\beta}}] \Leftrightarrow m^{\overline{\alpha}} \parallel m^{\overline{\beta}}$ и $n^{\overline{\alpha}} \parallel n^{\overline{\beta}}$ (при $m^{\overline{\alpha}} \cap n^{\overline{\alpha}} \neq \varnothing$, $m^{\overline{\beta}} \cap n^{\overline{\beta}} \neq \varnothing$).

Задача. Дадени са равнина $\overline{\beta}[m^{\overline{\beta}}, n^{\overline{\beta}}]$ и точка $\overline{A}(A, A_1)$. Да се построи равнина $\overline{\alpha}[m^{\overline{\alpha}}, n^{\overline{\alpha}}]$, такава че $\overline{\alpha} \parallel \overline{\beta}$ и $\overline{A} \in \overline{\alpha}$.

Решение: От $\overline{A} \in \overline{\alpha}$ следва, че $\overline{A} \in \overline{h}^{\overline{\alpha}}$ – главна права от I система на равнината $\overline{\alpha}$. За правата $\overline{h}^{\overline{\alpha}}\left(h^{\overline{\alpha}}, h_1^{\overline{\alpha}}\right)$ имаме $h^{\overline{\alpha}} \parallel m^{\overline{\alpha}}$ и $h_1^{\overline{\alpha}} \parallel m^{\overline{\alpha}}$. Тъй като $\overline{\alpha} \parallel \overline{\beta}$, то $m^{\overline{\alpha}} \parallel m^{\overline{\beta}}$ и $n^{\overline{\alpha}} \parallel n^{\overline{\beta}}$. Тогава $h^{\overline{\alpha}} \parallel m^{\overline{\beta}}$ и $h_1^{\overline{\alpha}} \parallel m^{\overline{\beta}}$. Последователно построяваме $\overline{h}^{\overline{\alpha}}\left(h^{\overline{\alpha}}, h_1^{\overline{\alpha}}\right)$: $A \in h^{\overline{\alpha}}$, $h^{\overline{\alpha}} \parallel m^{\overline{\beta}}$; $A_1 \in h_1^{\overline{\alpha}}$, $h_1^{\overline{\alpha}} \parallel m^{\overline{\beta}}$; $h_1^{\overline{\alpha}} \cap Ox = N_1^{h^{\overline{\alpha}}}$,

$n^{\overline{\alpha}}: N^{h^{\overline{\alpha}}} \in h^{\overline{\alpha}}$, $N_1^{h^{\overline{\alpha}}} N^{h^{\overline{\alpha}}} \parallel Oz$; $N^{h^{\overline{\alpha}}} \in n^{\overline{\alpha}}$, $n^{\overline{\alpha}} \parallel n^{\overline{\beta}}$; $n^{\overline{\alpha}} \cap Ox = X^{\overline{\alpha}}$;

$m^{\overline{\alpha}}$: $X^{\overline{\alpha}} \in m^{\overline{\alpha}}$, $m^{\overline{\alpha}} \parallel m^{\overline{\beta}}$; $\Rightarrow \overline{\alpha}[m^{\overline{\alpha}}, n^{\overline{\alpha}}]$.

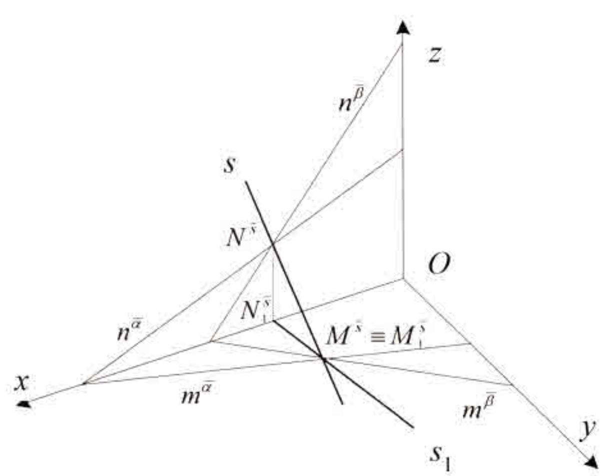


2. Пресичащи се равнини

Задача. Дадени са неуспоредните равнини $\overline{\alpha}[m^{\overline{\alpha}}, n^{\overline{\alpha}}]$ и $\overline{\beta}[m^{\overline{\beta}}, n^{\overline{\beta}}]$. Да се построи пресечната им права $\overline{s} = \overline{\alpha} \cap \overline{\beta}$.

Решение: Тъй като $\overline{\alpha}$ не е успоредна на $\overline{\beta}$, то $\overline{m}^{\overline{\alpha}} \cap \overline{m}^{\overline{\beta}} = \overline{M}^{\overline{s}}$, т.е. $m^{\overline{\alpha}} \cap m^{\overline{\beta}} = M^{\overline{s}}$ и $M^{\overline{s}} \equiv M_1^{\overline{s}}$. Също така $\overline{n}^{\overline{\alpha}} \cap \overline{n}^{\overline{\beta}} = \overline{N}^{\overline{s}}$, т.е. $n^{\overline{\alpha}} \cap n^{\overline{\beta}} = N^{\overline{s}}$ и $N^{\overline{s}} N_1^{\overline{s}} \parallel Oz$, $N_1^{\overline{s}} \in Ox$.

Тогава $s = M^{\overline{s}} N^{\overline{s}}$, $s_1 = M_1^{\overline{s}} N_1^{\overline{s}} \Rightarrow \overline{s} = (s, s_1)$



Ж. Пробод на права и равнина

Задача. Дадени са неуспоредните права $\overline{a}(a,a_1)$ и равнина $\overline{\alpha}[m^{\overline{\alpha}}, n^{\overline{\alpha}}]$. Да се построи пресечната им точка $\overline{S} = \overline{\alpha} \cap \overline{a}$.

Решение: През точката $\overline{S} = \overline{\alpha} \cap \overline{a}$ в равнината $\overline{\alpha}$ минават безброй много прави. Избираме измежду тях правата $\overline{k}$, на която първата вторична проекция съвпада с първата вторична проекция на правата $\overline{a}$, т.е. $\overline{k}(k,a_1)$. Тогава аксонометричната проекция k на $\overline{k}$ е определена от условията:

$N_1^{\overline{k}} = a_1 \cap Ox$, $N^{\overline{k}} \in n^{\overline{\alpha}}$, $N_1^{\overline{k}} N^{\overline{k}} \parallel Oz$, $M^{\overline{k}} = m^{\overline{\alpha}} \cap a_1 \quad \Rightarrow k = M^{\overline{k}} N^{\overline{k}}$.

Следователно точката $\overline{S}(S,S_1)$ можем да намерим като пресечна точка на правите $\overline{a}(a,a_1)$ и $\overline{k}(k,a_1)$, т.е. $S = a \cap k$, $S_1 \in k_1 \equiv a_1 \Rightarrow \overline{S}(S,S_1)$.