Тема 13: (отговаря на тема 16 от конспекта)

Съдържание: Най-къс път с теглови граф. Варианти на задачата. Алгоритъм на Дейкстра.

Заб. Тук разглеждаме ориентирани ~~графи~~ теглови графи. Не разглеждаме графи с примки и с паралелни ребра, защото те не променят фундаментално задачата.

По отношение на свързаността, няма значение дали графите са свързани или не.

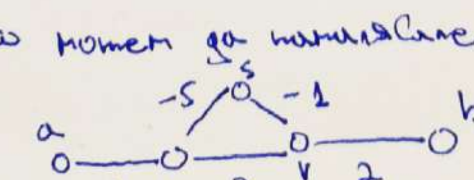
Заб. В тази тема, казвайки "път", имаме в предвид ~~[illegible]~~ път, който може и да не е прост.

Деф: Тегловност: нека $G=(V,E)$, $w: E \to \mathbb{R}$ е теглови граф.

Теглото на пътя p е $w(p) = \sum_{e \in E(p)} w(e)$.

Деф: Отрицателен цикъл: нека G е теглови граф. Ако G е ориентиран, отрицателен цикъл е всеки прост цикъл в G, който има отрицателна сума от теглата на ребрата. Ако G е неориентиран, отрицателен цикъл е всеки прост цикъл в G, който има отрицателна сума от теглата на ребрата, както и всяко ребро с отрицателно тегло.

Заб. Ако теглата на G са положителни, то "най-къс път от u до v" е добре дефинирано понятие. Ако u-v път съдържа поне един отрицателен цикъл, то можем да намаляваме теглото на пътя колкото си искаме. Пр:



, $uvsu$ е отрицателен цикъл.

Затова ще разглеждаме графи без отрицателни цикли.

Деф: Тегло на най-кос път: Теглото на най-кос път от u до v е

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \min\{w(p) \mid p \text{ е път от } u \text{ до } v\}, & \text{ако } \exists \text{ поне един } p \text{ от } u \text{ до } v. \\ \infty, & \text{ако няма път } \cancel{\text{...}} \text{ от } u \text{ до } v. \end{cases}$$

Заб. Лесно се вижда, че най-кос път винаги е прост. (при липса на отрицателни цикли).

Разновидности на задачата

1. При дадени, $u, v \in V$ да се намери най-кос път от u до v.
2. При даден връх s да се намери най-кос път от s до u, $\forall u \in V$.
3. При даден връх v да се намери най-кос път от u до v, $\forall u \in V$
4. Да се намери най-кос път от u до v, $\forall u, v \in V$.

Друга класификация

1. Може да искаме само дължината на самия път.
2. Искаме дължината и самия път
3. Искаме броя на най-късите пътища от u до v
4. Искаме м-вото от най-късите пътища от u до v.

Заб. 3. и 4. са алгоритмично бавни за намиране, просто защото броят на най-късите пътища от u до v може да е експоненциален в броя на върховете на G.

Алгоритъм на Дейкстра

Вход: ориентиран граф $G=(V,E)$ с теглова ф-я $w: E \to \mathbb{R}^+$,
даден връх s от V.

Изход: масив от дължините на най-късите пътища d,
масив π, реализиращ кореново дърво на най-късите пътища
с корен s.

(1) За всеки връх $v \in V$: $d[v] \leftarrow \infty$, $\pi[v] \leftarrow NULL$

(2) $d[s] \leftarrow 0$

(3) $S \leftarrow \emptyset$

(4) Ако в $V \setminus S$ няма връх u, т.че $d[u] < \infty$, върни d и π и
завърши алгоритъма. // при първото достигане на (4) $d[s] == 0 \neq \infty$

(5) В противен случай избери $x \in V \setminus S$, такъв че $d[x]$ е минимално

(6) $S \leftarrow S \cup \{x\}$

(7) $\forall y \in adj[x]$ прави: // adj - съседи

1. Ако $d[y] > d[x] + w(x,y)$, то
2. $\quad d[y] \leftarrow d[x] + w(x,y)$
3. $\quad \pi[y] \leftarrow x$

(8) Отиди на (4).