Текстовете са от: Т. Генчев, Обикновени диференциални уравнения, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 1991 г.

Фазови портрети на линейни автономни системи

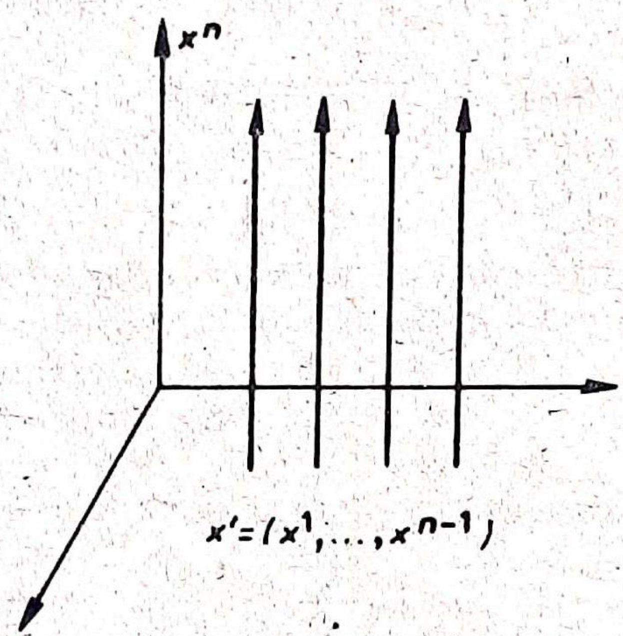
Както ще се убедим фазовите портрети на всички автономни системи

$$(1) \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{f} \in C^1(D), \qquad D \text{ — област в } \mathbf{R}^n,$$

около коя да е обикновена точка* на $\mathbf{f}$ имат съвсем проста структура и не се различават съществено от фазовия портрет на моделната система

$$(2) \qquad \dot{\mathbf{x}} = \ell_n, \qquad \ell_n = (0, 0, \ldots, 0, 1),$$

изобразен на фиг. 40. Напротив, поведението на фазовите криви около особените точки е твърде разнообразно и дава съществена информация за цялостната картина.



Фиг. 40

Нашата главна задача в този параграф са изследването и класификацията на особените точки на най-простите автономни системи

$$(3) \qquad \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x^1, x^2) \in \mathbf{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbf{R}),$$

*Точката $\mathbf{x}_0 \in D$ се нарича обикновена за $\mathbf{f}$, ако $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq 0$.

при предположение, че $\det A \neq 0$. Последното изискване ни гарантира, че $\dot{x} = 0$ е единствената особена точка на (1)*. Следващата дефиниция има очевиден физически смисъл и играе основна роля в цялата глава.

Дефиниция 1. Нека $\mathbf{a} \in D$ е точка на равновесие на (1). Ще казваме, че $\mathbf{a}$ е *устойчива (в смисъл на Ляпунов)*, ако на всяка околност U на $\mathbf{a}$ може да се съпостави друга околност $V \subset U$ на същата точка такава, че каквато и да бъде $\mathbf{x}_0 \in V$, решението $t \longrightarrow \varphi(t, \mathbf{x}_0)$ на (1), удовлетворяващо условието $\varphi(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$, притежава следните свойства:

1. φ е дефинирано в *целия* интервал $[0, +\infty)$.
2. Когато t описва интервала $[0, +\infty)$, точката $\mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{x}_0)$ не напуска U.

Точката $\mathbf{a}$ се нарича *асимптотично устойчива*, ако е устойчива и освен това равенството

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t, \mathbf{x}_0) = a$$

е в сила за всяко $\mathbf{x}_0$ от някаква достатъчно малка околност на $\mathbf{a}$.

Нека сега $\mathbf{a} \in D$ е произволна точка на равновесие на (1). Интересувайки се от поведението на траекториите на (1) около $\mathbf{a}$, естествено е да локализираме нашите разглеждания и с помощта на формулата на Тейлор да представим (1) във вида

$$\text{(4)} \qquad \dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad A = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(\mathbf{a})\right), \quad 1 \leqq i, j \leqq n,$$

където A е матрицата на Якоби в точката $\mathbf{a}$, а $\mathbf{h}$ е остатъчният член — в случая гладка векторна функция, удовлетворяваща условието $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = o(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ при $\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{a}$. (Припомняме, че $\mathbf{h} = o(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ е по-кратък запис на равенството $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \dfrac{|\mathbf{h}(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = 0.$)

Самият вид на (4) ни подсеща да започнем с линейния случай, когато $\mathbf{h}$ се анулира тъждествено. Едва след като се справим с този сравнително елементарен въпрос, ще пристъпим към нашата същинска задача, стараейки се да си изясним доколко си приличат фазовите портрети на (4) и на нейната линеаризация

$$\text{(5)} \qquad \dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

---

*Случаят $\det A = 0$ също се изследва просто. Читателят би могъл да се върне към него, след като прочете този параграф.

Понеже субституцията $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ е на наше разположение, очевидно без ограничение на общността можем да предположим, че $\mathbf{a} = \mathbf{o}$.

След като очертахме общия фон, време е да се заемем с въпроса по същество. И така да разгледаме системата

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 \\ \dot{x}^2 &= a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 \end{aligned}, \qquad \det A \neq 0, \quad A \in \mathfrak{M}_2(\mathbf{R}). \tag{3}$$

Ще се спрем подробно на т.нар. неизродени или „груби“ случаи, при които малки изменения на коефициентите a^i_j не водят до качествени изменения на фазовия портрет. Нека λ и μ са собствените стойности на матрицата $A = (a^i_j)$. Понеже случаят $\lambda = \mu$ е изроден (зад. 1 от следващите упражнения), ще предположим, че $\lambda \neq \mu$. Възникват два основни случая:

А) λ и μ са реални и различни;

Б) λ и μ са комплексни.

Да предположим, че А) е налице, и да направим смяната $\mathbf{y} = S\mathbf{x}$, където матрицата $S = (s^i_j) \in \mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$ е реална и неизродена. От (3) получаваме

$$\dot{\mathbf{y}} = (SAS^{-1})\mathbf{y}. \tag{6}$$

Нека сега S е така избрана, че матрицата SAS^{-1} да бъде диагонална. Това е възможно, защото собствените стойности на A са реални и различни и следователно съществуват два реални, линейно независими собствени вектора на A. При този избор на S (6) взема вида

$$\dot{y}^1 = \lambda y^1, \qquad \dot{y}^2 = \mu y^2 \tag{7}$$

и се интегрира непосредствено. Получаваме

$$y^1 = C_1 e^{\lambda t}, \qquad y^2 = C_2 e^{\mu t}. \tag{8}$$

Понеже без ограничение на общността можем да предположим, че $\lambda < \mu$, случаят А) се разпада на три подслучая:

А_1) $\lambda < 0 < \mu$; А_2) $\lambda < \mu < 0$; А_3) $0 < \lambda < \mu$.

Ще започнем с А_1). Сега особената точка се нарича *седло*. Очевидно имаме

$$\lim_{t \to +\infty} y^1(t) = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} y^2(t) = \infty \ \text{ при } \ C_2 \neq 0,$$

т.е. седлото не е устойчиво. Равенствата

$$\lim_{t\to-\infty} y^1(t) = \infty \quad \text{при} \quad C_1 \neq 0, \qquad \lim_{t\to-\infty} y^2(t) = 0$$

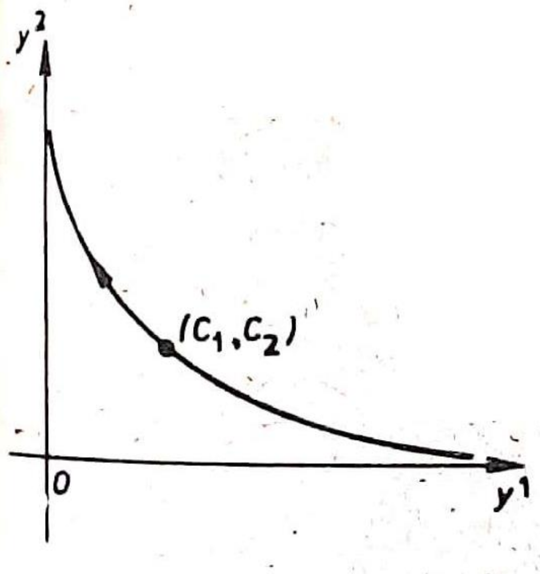
са също очевидни. За да намерим фазовия портрет, ще изключим t. Нека най-напред $C_1 > 0$, $C_2 > 0$. Сега от (8) получаваме

$$(y^1)^\mu = C_1^\mu e^{\mu\lambda t}, \qquad (y^2)^\lambda = C_2^\lambda e^{\mu\lambda t},$$

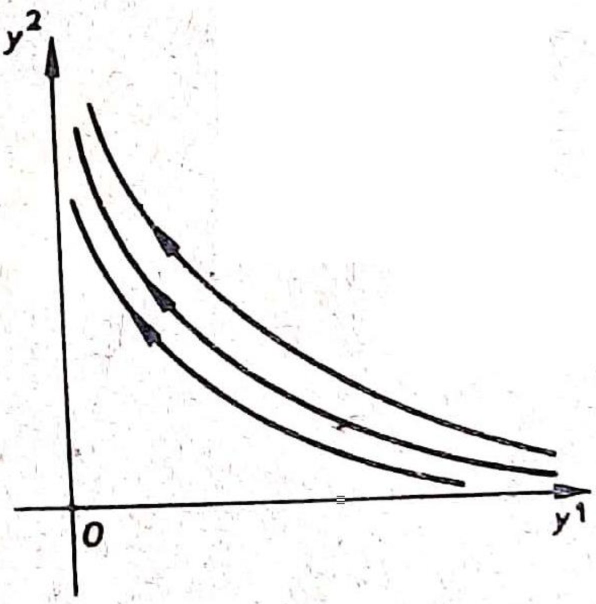
т.е.

$$y^2 = C(y^1)^{\frac{\mu}{\lambda}}, \qquad C = \text{const} > 0, \qquad \frac{\mu}{\lambda} < 0.$$

Като вземем предвид, че когато t описва интервала $(-\infty,+\infty)$, $y^1 = y^1(t)$ се мени монотонно от $+\infty$ до 0, получаваме фазовата крива, изобразена на фиг. 41.



Фиг. 41

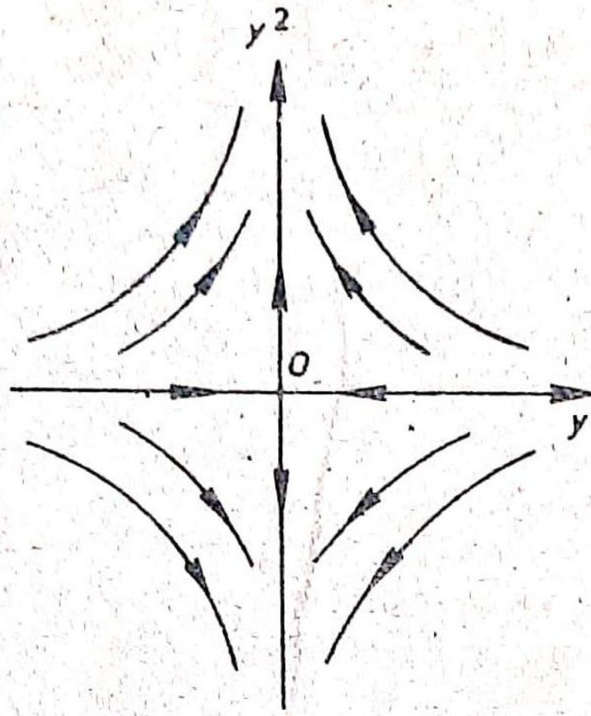


Фиг. 42

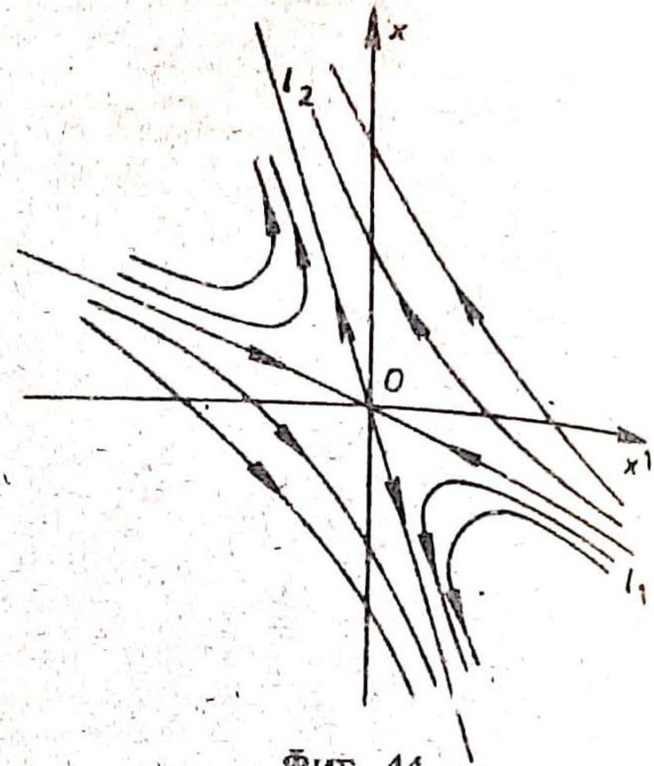
Оставяйки точката (C_1, C_2) да опише първи квадрант, получаваме снопа фазови криви от фиг. 42.

Полуосите $y^1 > 0$, $y^2 = 0$ и $y^1 = 0$, $y^2 > 0$ се описват съответно при $C_1 > 0$, $C_2 = 0$ и $C_1 = 0$, $C_2 > 0$, а точката на равновесие — при $C_1 = C_2 = 0$.

Останалите възможности за знаците на C_1 и C_2 не водят до усложнения. Предоставяйки подробностите за читателя, ще отбележим само, че като сумираме резултатите, стигаме до фазовия портрет, изобразен на фиг. 43.



Фиг. 43



Фиг. 44

Като се върнем към старите променливи от фиг. 43, получаваме фиг. 44*. Фазовите криви $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, за които имаме $\lim_{t\to+\infty} \mathbf{x}(t) = 0$ или $\lim_{t\to-\infty} \mathbf{x}(t) = 0$, се наричат сепаратриси на седлото. В случая сепаратриси са лъчите ℓ_1, ℓ_2, $-\ell_1$ и $-\ell_2$, които са образи на координатните полуоси при афинитета $\mathbf{x} = S^{-1}\mathbf{y}$ (вж. също зад. 4).

Нека сега е в сила A_2): $\lambda < \mu < 0$. Разбира се, (8) отново е налице, но този път при всеки избор на константите C_1 и C_2 имаме $\lim_{t\to+\infty} y^1(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} y^2(t) = 0$ и точката $(0, 0)$ е асимптотично устойчива. И сега фазовият портрет се получава, като елиминираме t. За краткост тук ще разгледаме само случая $C_1 < 0$, $C_2 > 0$.

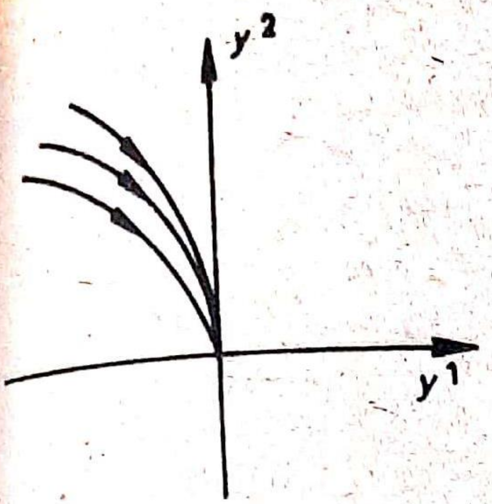
Изхождайки от равенствата $-y^1 = -C_1e^{\lambda t}$, $y^2 = C_2e^{\mu t}$, получаваме

$$(y^2)^\lambda = C_3(-y^1)^\mu, \quad \text{т.е.} \quad y^2 = C(-y^1)^{\frac{\mu}{\lambda}}, \quad C > 0,\ 0 < \frac{\mu}{\lambda} < 1.$$

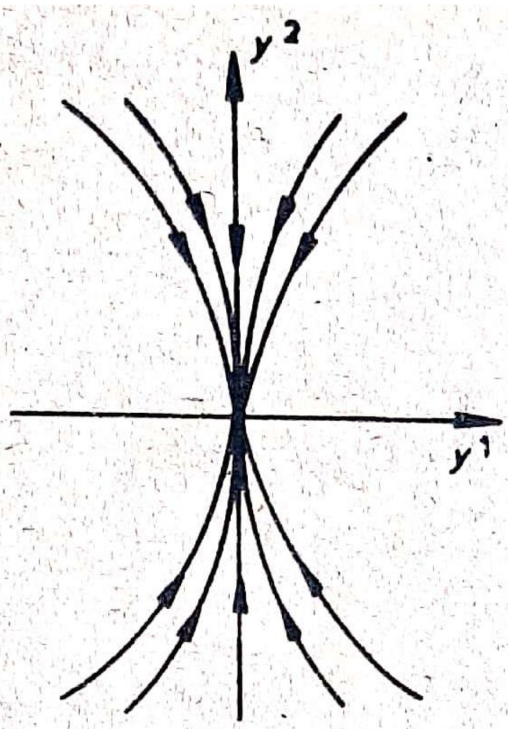
Когато C се мени, получаваме снопа от фазови криви, показани на фиг. 45. Като разгледаме всички възможности за знаците на C_1 и C_2 и обединим резултатите, получаваме фиг. 46. Връщайки се към старите променливи, получаваме фиг. 47. В случая особената точка се нарича *устойчив възел*. Ако вместо A_2) е налице A_3), получаваме т.нар. *неустойчив възел*.

---

* Читателят познава геометричните свойства на линейните изображения от аналитичната геометрия.

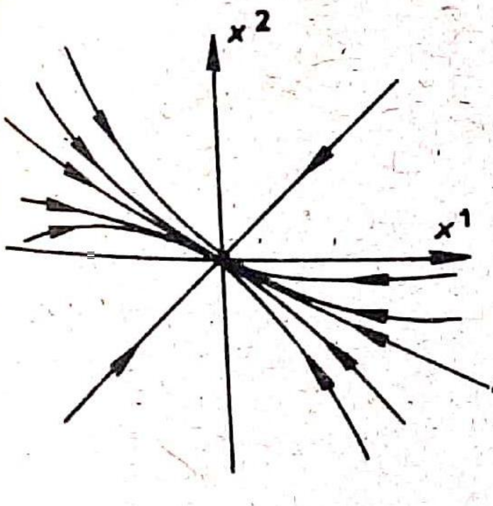


Фиг. 45

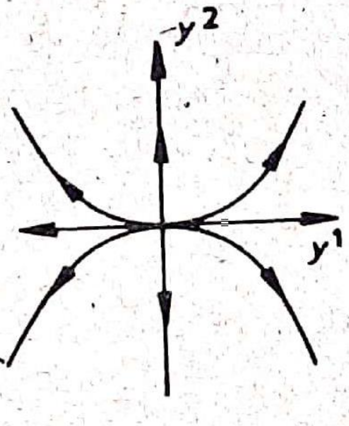


Фиг. 46

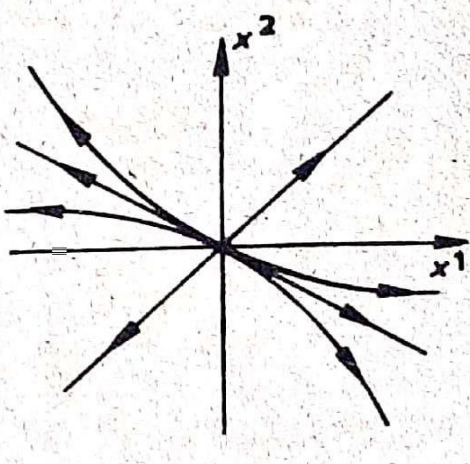
Единствената (съществена!) разлика е, че сега фазовата точка, описвайки траекторията си, клони към началото при $t \longrightarrow -\infty$ (фиг. 48 и 49).



Фиг. 47



Фиг. 48



Фиг. 49

Тези разглеждания изчерпват А). Предоставяйки изродения случай $\lambda = \mu$ на читателя, пристъпваме към Б).

И така нека собствените стойности на реалната матрица A са комплексни. В такъв случай те са различни и комплексно спрегнати и ние можем да ги означим съответно с λ и $\overline{\lambda}$, като при това

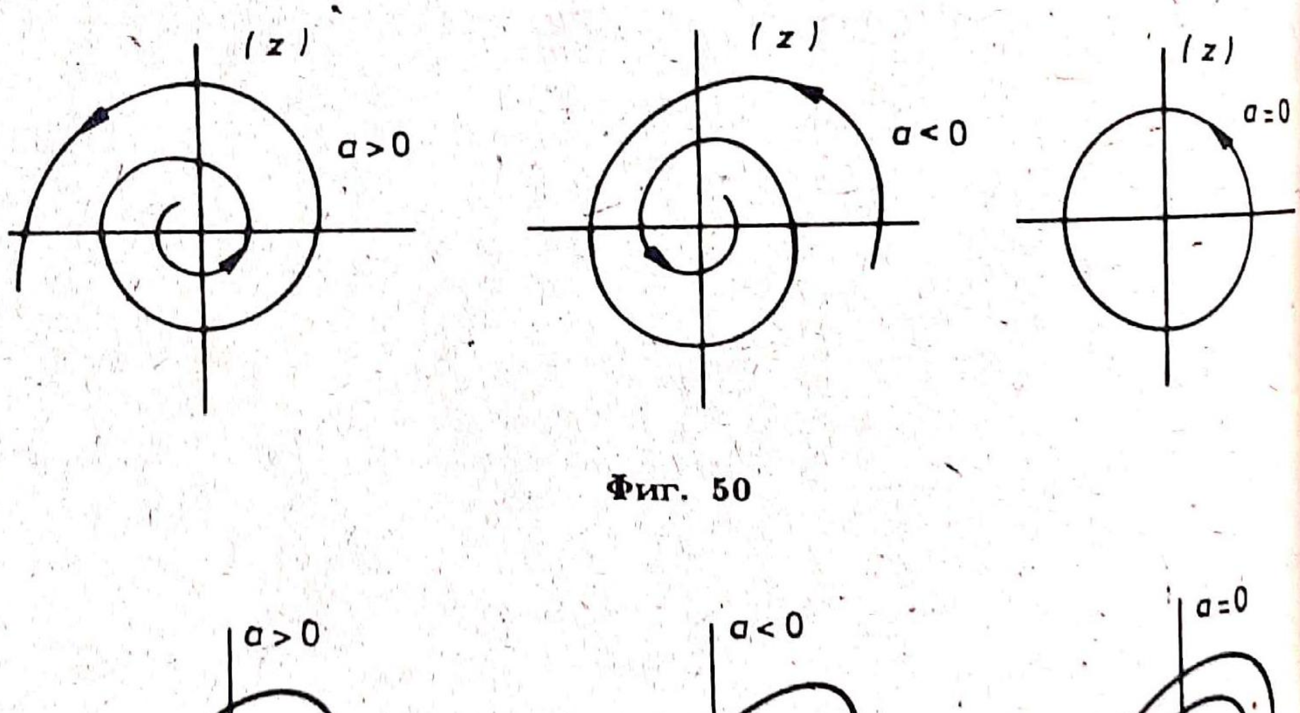
$\lambda = a - ib$ удовлетворява и условието $b < 0$. Да направим смяната $\mathbf{y} = Q\mathbf{x}$, където матрицата Q е реална и неизродена. От (3) получаваме $\dot{\mathbf{y}} = (QAQ^{-1})\mathbf{y}$ и следователно чрез подходящ избор на Q (вж. т. 5.1 , гл. 5) стигаме до системата

$$(9) \qquad \dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}, \quad \text{т.е. до} \quad \begin{aligned} \dot{y}^1 &= ay^1 - by^2, \\ \dot{y}^2 &= by^1 + ay^2. \end{aligned}$$

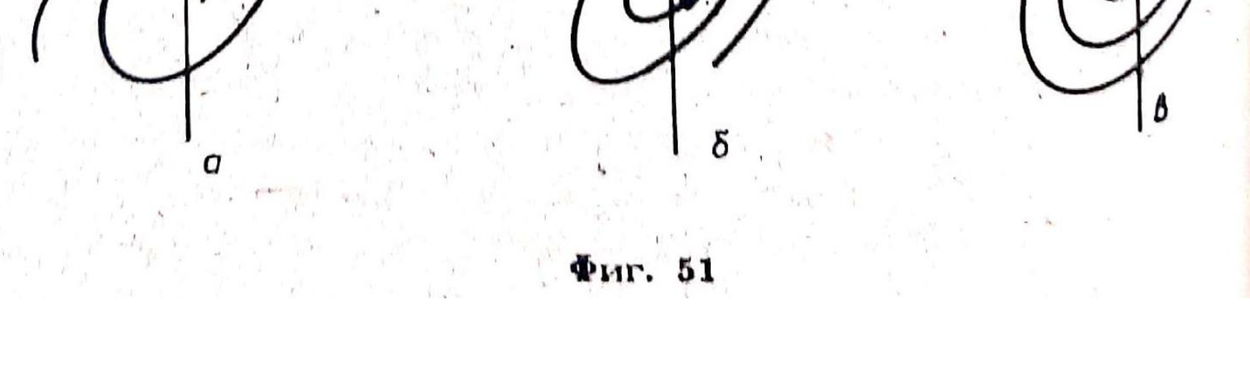
Като въведем комплексната променлива $z = y^1 + iy^2$, от (9) получаваме непосредствено $\dot{z} = \lambda z$ — уравнение, което се интегрира моментално. Намираме

$$z(t) = Ce^{\lambda t} = \rho e^{at} e^{i(\alpha - bt)}, \quad \text{където} \quad \rho = |C|, \ \alpha = \arg C.$$

Графиката на кривата $t \longrightarrow z(t)$ лежи в комплексната равнина и се построява незабавно. При $a \neq 0$ се получава логаритмична спирала, а при $a = 0$ — окръжност (фиг. 50).



Фиг. 50



Фиг. 51

Връщайки се към старите променливи, получаваме фиг. 51, защото афинитетът не променя топологичната структура на фигурите.

Разбира се, в общия случай окръжностите се трансформират в елипси, докато спиралите само се деформират. (На фиг. 51а и 51б е изобразена по една фазова крива, а на 51в — три криви.)

В зависимост от това, дали $\mathrm{Re}\lambda < 0$, $\mathrm{Re}\lambda > 0$ или $\mathrm{Re}\lambda = 0$, особената точка се нарича устойчив фокус, неустойчив фокус или център. Ясно е, че центърът е устойчива, но не асимптотично устойчива точка на равновесие.

Случаят $\mathrm{Re}\lambda = 0$, който води до център, е очевидно изроден, но въпреки това е от голямо значение в общата теория.

К о м е н т а р. Красивите резултати от този параграф принадлежат на знаменития френски математик Анри Поанкаре (1854 – 1912) — основоположник на качествената теория на диференциалните уравнения. Макар и елементарни, те прекрасно илюстрират различията между обикновените и особените точки и вероятно са направили впечатление на читателя.

Ако се абстрахираме от ориентацията на фазовите криви, т.е. ако не държим сметка за посоката, в която се изменя t, получаваме по-груба класификация, в която фигурират само четири различни вида изолирани особени точки: възел, седло, фокус и център. Тази класификация също е полезна и читателят трябва да я има предвид.

Класификацията на особените точки, с която току-що се запознахме, играе основна роля в цялата качествена теория. Нейното значение произтича от факта, че в неизродените случаи (възел, седло, фокус) фазовите портрети на (4) и на нейната линейна част (5) не се различават съществено в достатъчно малка околност на особената точка (теорема на Хартман и Гробман). Без да уточняваме тук това твърдение, ще отбележим, че то остава в сила и за $n > 2$, стига матрицата $\left(\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}(\mathrm{a})\right)$, $1 \leqq i,\ j \leqq n$, на линейната система (5) да не притежава собствени числа с нулеви реални части. В частност при това предположение a е устойчива или неустойчива за (4) точно когато е устойчива или неустойчива за (5).