6.1. Смяна на координатна система в пространството

Смяната на координатни системи в пространството се извършва аналогично на тази в равнина.

Нека $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ и $K' = O'\vec{e_1}'\vec{e_2}'\vec{e_3}'$ са две афинни координатни системи и векторите $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ са следните линейни комбинации на $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$:

$$\vec{e_1}' = \alpha_{11}\vec{e_1} + \alpha_{21}\vec{e_2} + \alpha_{31}\vec{e_3}$$
$$\vec{e_2}' = \alpha_{12}\vec{e_1} + \alpha_{22}\vec{e_2} + \alpha_{32}\vec{e_3}$$
$$\vec{e_3}' = \alpha_{13}\vec{e_1} + \alpha_{23}\vec{e_2} + \alpha_{33}\vec{e_3}$$

Матрицата $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$ се нарича матрица на прехода от K към K'.

От това, че $\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'$ са линейно независими $\Rightarrow$ $\det A \neq 0$. За произволен вектор $\vec{c}$ имаме $c_K(c_1, c_2, c_3)$ $c_{K'}(c_1', c_2', c_3')$

От $\vec{c} = c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2} + c_3\vec{e_3} = c_1'\vec{e_1}' + c_2\vec{e_2}' + c_3\vec{e_3}'$ получаваме

$$c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2} + c_3\vec{e_3} = c_1'(\alpha_{11}\vec{e_1} + \alpha_{21}\vec{e_2} + \dots) + c_2'(\alpha_{12}\vec{e_1} + \dots +) + c_3'(\alpha_{13}\vec{e_1} + \dots \quad)$$
$$= (c_1'\alpha_{11} + c_1\alpha_{12} + \dots)\vec{e_1} + (c_1'\alpha_{21} + \dots \quad)\vec{e_2} + c_3'(c_1'\alpha_{31} + \dots \quad)$$

От $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – база $\Rightarrow$

$$(1) \begin{cases} c_1 = \alpha_{11} c_1' + \alpha_{12} c_2' + \alpha_{13} c_3' \\ c_2 = \alpha_{21} c_1' + \alpha_{22} c_2' + \alpha_{23} c_3' \\ c_3 = \alpha_{31} c_1' + \alpha_{32} c_2' + \alpha_{33} c_3' \end{cases}$$

Тези формули дават връзката между координатите на произволен вектор спрямо K и K'

От $\det A \neq 0 \Rightarrow$ системата (1) може да се реши спрямо c_1', c_2', c_3'. От $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ (A^{-1} – обратната матрица на A, т.е. $AA^{-1} = E$, където $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ е единичната матрица от ред 3, $\det(AA^{-1}) = \det A . \det A^{-1} = \det E = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \neq 0$)

(1) може да се запише по следния начин

$$(1') \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix}$$ или $$(1'') \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix}$$, както и $$\vec{c} = A\vec{c}\,' \quad (1''')$$

Казваме, че координатите на вектора $\vec{c}$ се получават при действието на матрицата A върху координатите на $\vec{c}\,'$

Сега, като умножим (1") отляво с A^{-1} получаваме

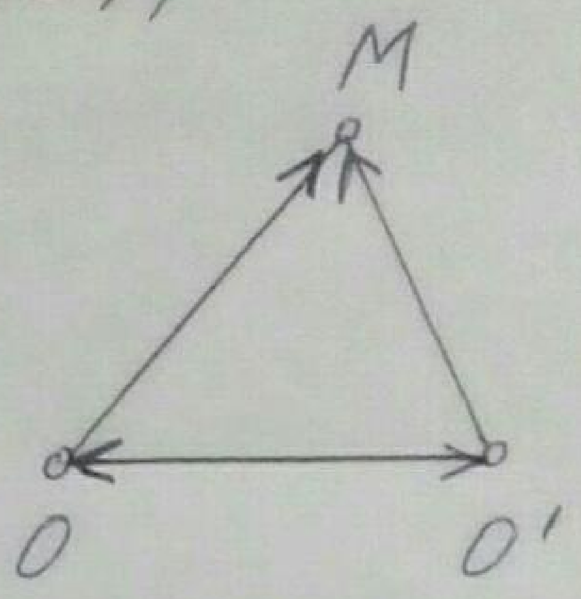
$$A^{-1}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\left(A\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix}\right) = \left(A^{-1}A\right)\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

(накратко от (1''') $A^{-1}\vec{c} = A^{-1}(A\vec{c}\,') = (A^{-1}A)\vec{c}\,' = E\vec{c}\,' = \vec{c}\,'$ $\Rightarrow \vec{c}\,' = A^{-1}\vec{c}$)

Така че, ако с матрица A преминаваме от една координатна система във втора, то с обратната ѝ матрица A^{-1} се връщаме в първата.

Нека $O'_K(x_0, y_0, z_0)$. Ако т. $M_K(x, y, z)$ и $M_{K'}(x', y', z')$,



то от $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}$ (спрямо K)

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{O'_K M_K}\,(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$\overrightarrow{O'_{K'} M_{K'}}\,(x', y', z')$

От (1) $\Rightarrow$

$$(2)\quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha_{11} x' + \alpha_{12} y' + \alpha_{13} z' \\ y = y_0 + \alpha_{21} x' + \alpha_{22} y' + \alpha_{23} z' \\ z = z_0 + \alpha_{31} x' + \alpha_{32} y' + \alpha_{33} z' \end{cases}$$

Формулите (2) дават връзка между координатите на произволна точка спрямо K и K'.

Накратко (2) могат да се запишат по следния начин

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$, т.е. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ или $\mathbf{X} = A\mathbf{X}' + \mathbf{X}_0$

Нека K и K' са ортонормирани (окс). Тогава $|\vec{e}_i'| = 1$ $\Leftrightarrow \vec{e}_i^{\,2} = 1$. От $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$ $i \neq j$ $\Rightarrow$ скаларното им произведение е $\vec{e}_i \vec{e}_j = 0$. Също така $\vec{e}_i'^{\,2} = 1$ и $\vec{e}_i' \perp \vec{e}_j' \Rightarrow \vec{e}_i' \vec{e}_j' = 0$

За елементите α_{ij} на A получаваме следното

$$(1) \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}^2 = 1 \quad, i = 1,2,3 \quad ; (2) \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij}\alpha_{ik} = 0 \text{ за } j \neq k \quad \text{и}$$

$$(3) \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\alpha_{kj} = 0 \text{ за } i \neq k.$$

Горните формули изразяват, първо (1), че скаларният квадрат на всеки стълб на A е 1. (това са координатите съответно на $\vec{e}_i'$). Например, от $\vec{e}_1'^{\,2} = 1$ получаваме

$$1 = (\alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2 + \alpha_{31}\vec{e}_3)(\alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2 + \alpha_{31}\vec{e}_3) = \alpha_{11}^2 \underbrace{\vec{e}_1^{\,2}}_{=1} + \alpha_{21}^2 \underbrace{\vec{e}_2^{\,2}}_{=1} + \alpha_{31}^2 \underbrace{\vec{e}_3^{\,2}}_{=1}$$

$$+ 2\alpha_{11}\alpha_{21}\underbrace{(\vec{e}_1\vec{e}_2)}_{=0} + 2\alpha_{11}\alpha_{31}\underbrace{(\vec{e}_1\vec{e}_3)}_{=0} + 2\alpha_{21}.\alpha_{31}.\underbrace{(\vec{e}_2\vec{e}_3)}_{=0} =$$

$$= \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2.$$

Второ – (2) и (3) изразяват, че векторите на K са взаимно перпендикулярни. Същото имаме и за тези на K'. Например, от $\vec{e_1}'\vec{e_2}'=0$ получаваме:

$$0 = (\alpha_{11}\vec{e_1} + \alpha_{21}\vec{e_2} + \alpha_{31}\vec{e_3})(\alpha_{12}\vec{e_1} + \alpha_{22}\vec{e_2} + \alpha_{32}\vec{e_3})$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{12}\cdot\underbrace{\vec{e_1}^{\,2}}_{=1} + \alpha_{21}\cdot\alpha_{22}\underbrace{\vec{e_1}^{\,2}}_{=1} + \alpha_{31}\alpha_{32}\underbrace{\vec{e_3}^{\,2}}_{=1}$$

$$+ (\alpha_{11}\cdot\alpha_{22} + \alpha_{21}\cdot\alpha_{11})\underbrace{\vec{e_1}\vec{e_2}}_{=0} + (\alpha_{11}\alpha_{32} + \alpha_{31}\alpha_{12})\underbrace{\vec{e_1}\vec{e_3}}_{=0}$$

$$+ (\alpha_{21}\alpha_{32} + \alpha_{31}\cdot\alpha_{22})\underbrace{\vec{e_2}\vec{e_3}}_{=0} = \alpha_{11}\cdot\alpha_{12} + \alpha_{21}\cdot\alpha_{22} + \alpha_{31}\cdot\alpha_{32} = 0$$

Горното равенство беше получено при разглеждане на темата за скаларно произведение в случая на ортогонални вектори – $\vec{e_1}'(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31})$, $\vec{e_2}'(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32})$.

Пресмятанията извършихме за да забележим, че ако A е матрица на прехода между две ортонормирани координатни системи, то

$AA^T = E$, където A^T е транспонираната матрица на A (матрица се транспонира като редовете на A стават стълбове на A^T.)

Ако $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$.

Матрици, за които $AA^T = E$ се наричат ортогонални. Следователно, от $AA^{-1} = E$ за ортогонална матрица A имаме, че обратната ѝ A^{-1} съвпада с транспонираната на A. Имаме $A^{-1} = A^T$. От $(A^T)^T = A$ и $(A^T)^{-1} = A \Rightarrow A^T$ също е ортогонална. За детерминантата на ортогонална матрица имаме:

1. $\det A^T = \det A$
2. От $A^T = A^{-1}$ и $\det A . \det A^{-1} = 1$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow$

$\det A = \varepsilon$, където $\varepsilon = \pm 1$.

Дефиницията на ортогонална матрица е за всяка матрица от ред n с елементи $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$.

За ортогоналните матрици имаме, че както редовете им, така и стълбовете им са координати на единични вектори, които са взаимно перпендикулярни (по редове и стълбове).

Примери. 1. Единичната матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - от ред 2;

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - от ред 3; $E = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}}_{n} \Big\} n$ - от ред n

2. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \pm 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$

3. $C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6.2. Ориентация в пространството - Аналогично на разглежданията в равнина.

Нека $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ и $K' = O'\vec{e_1}'\vec{e_2}'\vec{e_3}'$ са афинни координатни системи и A е матрицата на прехода от K към K' - $K \xrightarrow{A} K'$
$\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$.

Ако $\det A > 0$ казваме, че K и K' са еднакво ориентирани.

В противен случай, ако $\det A < 0$ - K и K' наричаме противоположно ориентирани.

Ясно е, че 1. $K \xrightarrow{E} K$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Следователно K е еднакво ориентирана със себе си.

2. Ако $K \xrightarrow{A} K'$, то $K' \xrightarrow{A^{-1}} K$. От $\det A . \det A^{-1} = 1$ следва, че K и K' са еднакво ориентирани $\Leftrightarrow$ $\det A$ и $\det A^{-1}$ са с един и същи знак, т.е. $\Leftrightarrow$ K' и K са еднакво ориентирани.

3. Ако $K \xrightarrow{A_1} K'$ с $\det A_1 > 0$, $K' \xrightarrow{A_2} K''$ с $\det A_2 > 0$, то $K \xrightarrow{A} K''$, където $A = A_2 A_1 \Rightarrow \det A > 0$ $(\det A = \det(A_2 A_1) = \det A_2 . \det A_1)$

Матрицата на прехода от $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ към $\overline{K_1} = O\vec{e_2}\vec{e_1}\vec{e_3}$ е

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Получава се от дефиницията – в стълбовете ѝ стоят съответно координатите на $\vec{e_2}, \vec{e_1}, \vec{e_3}$ спрямо K. Примерно $\vec{e_2} = 0.\vec{e_1} + 1.\vec{e_2} + 0.\vec{e_3} \Rightarrow \vec{e_2}(0, 1, 0)$. Аналогично $\vec{e_1}(1,0,0)$ и $\vec{e_3}(0,0,1)$.

От $\det A = -1$ следва, че K и $\overline{K_1}$ са противоположно ориентирани.

От 1., 2. и 3. следва, че всяка база (или координатна система) е еднакво ориентирана с K или с $\overline{K_1}$. Следователно множеството от наредените бази се разпада на два класа, наречени витлови посоки в пространството. Едната наричаме положителна и означаваме с S^+, а другата – отрицателна и означаваме с S^-. Две бази са от един и същи клас $\Leftrightarrow$ са еднакво ориентирани.