ЛЕКЦИЯ 7

Геометрия на движението

Съдържание

1. Поле на ускоренията в твърдо тяло, въртящо се около неподвижна точка.

- *ускорението – производна по времето от скоростта:*
  от $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{1}$$

- означения
  - ъглово ускорение: $\boldsymbol{\varepsilon} = \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$

    интерпретация като скорост на края на вектора $\boldsymbol{\omega}$, разглеждан като точка от неговия ходограф
  - въртеливо ускорение: $\mathbf{w}^{(B)} = \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$

    разлика с въртенето около неподвижна ос: векторът на ъгловото ускорение не лежи на правата, определена от вектора на ъгловата скорост, а е върху права, минаваща през неподвижната точка, наречена ос на ъгловото ускорение. Векторът на ъгловото ускорение на дадена точка е перпендикулярен не на радиуса на въртене, а на минималното разстояние от разглежданата точка до оста на ъгловото ускорение.

- центростремително ускорение: $\mathbf{w}^{(C)} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$

  вектор, перпендикулярен на равнината, определена от скоростта на разглежданата точка и ъгловата скорост

- *поле на ускоренията в твърдо тяло, въртящо се около неподвижна точка*

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + (\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega})\mathbf{r} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + (\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{r} \quad (2)$$

- проекции на ускорението в неподвижната координатна система
  координати на $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$

$$\begin{aligned} w_x &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)\,\omega_x - \omega^2 x \\ w_y &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)\,\omega_y - \omega^2 y \\ w_z &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)\,\omega_z - \omega^2 z \end{aligned} \quad (3)$$

но $\varepsilon_x = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\mathbf{i} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}) - \boldsymbol{\omega}\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\omega_x}{dt} - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}) = \frac{d\omega_x}{dt}$,

т.е. $\varepsilon_x = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_x = \frac{d\omega_x}{dt}$, $\varepsilon_y = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_y = \frac{d\omega_y}{dt}$, $\varepsilon_z = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_z = \frac{d\omega_z}{dt}$

- чрез диференциране на компонентите на ъгловата скорост, изразени чрез Ойлеровите ъгли и техните производни:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_y &= -\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_z &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned}$$

  след заместване в (3) се получават и проекциите на ускорението

- аналогично се получават и проекциите на ускорението на подвижните оси:

$$\begin{aligned} w_{x'} &= \varepsilon_{y'} z' - \varepsilon_{z'} y' + (\omega_{x'} x' + \omega_{y'} y' + \omega_{z'} z')\,\omega_{x'} - \omega^2 x' \\ w_{y'} &= \varepsilon_{z'} x' - \varepsilon_{x'} z' + (\omega_{x'} x' + \omega_{y'} y' + \omega_{z'} z')\,\omega_{y'} - \omega^2 y' \\ w_{z'} &= \varepsilon_{x'} y' - \varepsilon_{y'} x' + (\omega_{x'} x' + \omega_{y'} y' + \omega_{z'} z')\,\omega_{z'} - \omega^2 z' \end{aligned} \quad (4)$$

$$\varepsilon_{x'} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\mathbf{i}' = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{i}') - \boldsymbol{\omega}\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \frac{d\omega_{x'}}{dt} - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}') = \frac{d\omega_{x'}}{dt},$$

т.е. $\varepsilon_{x'} = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{x'} = \frac{d\omega_{x'}}{dt}$, $\varepsilon_{y'} = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{y'} = \frac{d\omega_{y'}}{dt}$, $\varepsilon_{z'} = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{z'} = \frac{d\omega_{z'}}{dt}$

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \omega_{y'} &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \omega_{z'} &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \tag{5}$$

- определяне на ускорението на произволна точка: или чрез векторните съставящи $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{r}$; или чрез проекциите в някоя от координатните системи

2. Пространствено движение на твърдо тяло. Основна теорема.

- определяне на положението на твърдо тяло: достатъчно е да се зададе положението на една точка от него (полюс О’) с координати на нейния радиус-вектор $\mathbf{r}_0\,(x_0, y_0, z_0)$ относно координатна система и въртеливото движение около полюса, описвано с трите Ойлерови ъгли ψ, θ, φ

- свободното твърдо тяло има 6 степени на свобода: x_0, y_0, z_0, ψ, θ, φ

- уравнения на движението на твърдото тяло

$$x_0 = f_1(t),\quad y_0 = f_2(t),\quad z_0 = f_3(t),\quad \psi = f_4(t),\quad \theta = f_5(t),\quad \varphi = f_6(t) \tag{6}$$

- уравнения на движението на произволна точка М от твърдото тяло (при зададени функции (6))
  - от $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{r}'$, където:

$\mathbf{r}(x, y, z)$ - в неподвижната координатна система Oxyz

$\mathbf{r}_0\,(x_0, y_0, z_0)$ - координати на полюса О’

$\mathbf{r}'(x', y', z')$ - координати в подвижната система O’x’y’z’, фиксирана в тялото

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' \\
y &= y_0 + \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' \\
z &= z_0 + \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z'
\end{aligned}
\tag{7}
$$

(α_{ij})- косинусите между единичните вектори на неподвижната и подвижната система, т.е. $(x, x') \to \cos(x, x') = \alpha_{11}$; $(x, y') \to \cos(x, y') = \alpha_{21}, \ldots$

- основна теорема:
  Всяко преместване на твърдо тяло в пространството може да се осъществи чрез постъпателно преместване заедно с избран полюс и едно завъртане около ос, минаваща през този полюс
  при това:
  - векторът на завъртането не зависи от избора на полюса, т.е. при промяна на полюса се променя само постъпателното преместване, докато направлението на оста и ъгълът на завъртане не се променят
  - проекциите на постъпателните премествания (при различни полюси) върху оста на завъртане са равни помежду си
  - преходът от едно положение на тялото до друго положение може да се осъществи чрез различни постъпателни премествания, зависещи от избора на полюса (т.е. преместването на полюса определя самото постъпателно преместване на тялото). Всички такива постъпателни премествания ще се различават по големина и по направление, но проекциите им върху оста на завъртане ще са едни и същи

- въпрос: възможен ли е избор на полюс, за който неговото преместване е най-малко – такава точка би имала преместване, чиято проекция върху оста на въртене трябва да е равна на самото преместване, т.е. това преместване би трябвало да е успоредно на оста на въртене

- *винтово преместване*: съвкупност от постъпателно преместване и въртене около ос, която е успоредна на постъпателното преместване

3. Поле на скоростите и ускоренията в общия случай на движение на твърдо тяло.

- означения:
  - $\mathbf{p}$: вектор на преместване на произволна точка от тялото
  - $\mathbf{p}_0$: вектор на преместване на полюса

- $\mathbf{r}'$: радиус-вектор на точката относно полюса

- разглеждат се безкрайно малки премествания на твърдо тяло - от дадено положение до безкрайно близко до него ново положение
- представяне (с точност до безкрайно малки величини от висок порядък) на преместването чрез вектора на малкото завъртане

$$\mathbf{p} = \mathbf{p_0} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}' \qquad (8)$$

ако Δt е интервал, за който се извършва преместването, след деление и граничен преход:

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{\theta}}{\Delta t}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) \qquad (9)$$

- *изразът (9) дава разпределението на скоростите в твърдо тяло в общия случай на движението му*

- постъпателна съставяща на скоростта: $\mathbf{v_0}$ (равна на скоростта на полюса)
- въртелива съставяща на скоростта: $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ (около полюса)

- друг извод на (9):

от $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{r}' = \mathbf{r_0} + x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$,

където:

- $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(x', y', z')$
- $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$: единични вектори на подвижната координатна система Ox'y'

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt}$$

но $\dfrac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}'$, $\dfrac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}'$, $\dfrac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}'$

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}') = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

или $\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$

- проектиране (9) на неподвижните оси:

$$v_x = v_{0x} + \omega_y z - \omega_z y, \qquad v_{0x} = \dot{x}_0$$
$$v_y = v_{0y} + \omega_z x - \omega_x z, \qquad v_{0y} = \dot{y}_0 \tag{10}$$
$$v_z = v_{0z} + \omega_x y - \omega_y x, \qquad v_{0z} = \dot{z}_0$$

- проектиране (9) на подвижните оси:

$$v_{x'} = v_{0x'} + \omega_{y'} z' - \omega_{z'} y',$$
$$v_{y'} = v_{0y'} + \omega_{z'} x' - \omega_{x'} z', \tag{11}$$
$$v_{z'} = v_{0z'} + \omega_{x'} y' - \omega_{y'} x'$$

- проекции на скоростта на полюса на неподвижните оси:

$$v_{0x'} = \alpha_{11} v_{0x} + \alpha_{21} v_{0y} + \alpha_{31} v_{0z},$$
$$v_{0y'} = \alpha_{12} v_{0x} + \alpha_{22} v_{0y} + \alpha_{32} v_{0z}, \tag{12}$$
$$v_{0z'} = \alpha_{13} v_{0x} + \alpha_{23} v_{0y} + \alpha_{33} v_{0z}$$

- в (11) (x', y', z') са постоянни координати на избраната в тялото точка;
- координатите на същата точка в неподвижната система се дават със (7);
- косинусите (α_{ij}) между единичните вектори на неподвижната и подвижната система се изразяват чрез Ойлеровите ъгли, зададени като функции на времето

- разпределение на ускоренията в твърдо тяло в общия случай на движението му

  от (9) след диференциране:

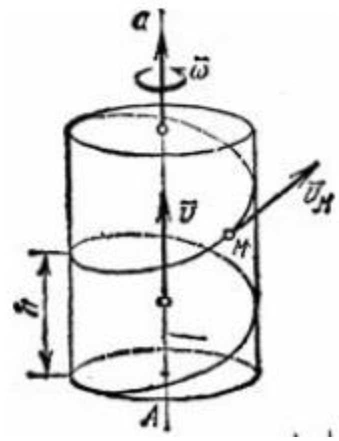
$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v_0}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = = \mathbf{w_0} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \tag{13}$$

- *изразът (13) дава ускорението на произволна точка от твърдо тяло в общия случай на движението му, което има три съставящи*
- постъпателно ускорение: $\mathbf{w_0}$ (ускорение на полюса; еднакво за всички точки)
- въртеливо ускорение: $\mathbf{w}^{(B)} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}'$ (около полюса);

- центростремително ускорение: $\mathbf{w}^{(C)} = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')$ (към полюса)

4. Винтова ос и винтови аксоиди.

- в общия случай преместване на твърдо тяло в пространството може да се представи като съвкупност от постъпателно преместване и въртене около ос, която е успоредна на постъпателното преместване: *винтово преместване*



фиг.1

- ъгловата скорост на тялото не зависи от избора на полюса
  - нека в едно тяло са избрани два полюса О' и О''
  - радиус-векторите спрямо тези полюси на произволна точка М са съответно $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$, като с $\mathbf{r}_0$ е означен радиус-векторът на О'' спрямо О' , т.е. $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0' + \mathbf{r}''$
  - изразяване на скоростта на точката М спрямо тези полюси:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{0'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}' = \mathbf{v}_{0''} + \boldsymbol{\omega}'\times\mathbf{r}'' \qquad (14)$$

от друга страна: $\mathbf{v}_{0''} = \mathbf{v}_{0'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_0'$ (15)

след заместване:

$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{0'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}' = \mathbf{v}_{0'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_0' + \boldsymbol{\omega}'\times\mathbf{r}''$,

$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}' - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_0' = \boldsymbol{\omega}'\times\mathbf{r}''$, $\quad \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0') = \boldsymbol{\omega}'\times\mathbf{r}'' \Rightarrow \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'' = \boldsymbol{\omega}'\times\mathbf{r}''$

$(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}')\times\mathbf{r}'' = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'$$

- проекциите на постъпателните скорости върху оста на въртене не зависят от избора на полюса от (15) $\mathbf{v}_{0''} = \mathbf{v}_{\mathbf{0}'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'_0$, след скаларно умножение на двете страни с $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{v}_{0''}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_{\mathbf{0}'}\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'_0)\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_{\mathbf{0}'}\boldsymbol{\omega} \tag{16}$$

- във всеки момент в тялото съществува ос, така че всички точки от нея имат скорости, успоредни на ъгловата скорост
  - ако за точка C с радиус-вектор $\mathbf{r}'_C$ нейната скорост $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_\mathbf{0} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'_C$ е успоредна на ъгловата скорост $\boldsymbol{\omega}$, то би се изпълнявало $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$, т.е.

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_\mathbf{0} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'_C) = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_\mathbf{0} + (\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'_C)\boldsymbol{\omega} - \omega^2\mathbf{r}'_C = \mathbf{0} \tag{17}$$

  - ако за точка C се избере петата на перпендикуляра, спуснат от полюса O към търсената ос $\boldsymbol{\omega}$, то $\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'_C = \mathbf{0}$ и от (17) следва:

$$\mathbf{r}'_C = \frac{\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_\mathbf{0}}{\omega^2} \tag{18}$$

  - радиус-векторът $\mathbf{r}_C$ на точката C спрямо неподвижното начало O е:

$$\mathbf{r}_\mathbf{C} = \mathbf{r}_\mathbf{0} + \mathbf{r}'_C = \mathbf{r}_\mathbf{0} + \frac{\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_\mathbf{0}}{\omega^2} \tag{19}$$

  - всички точки с радиус-вектори $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_C + \lambda\boldsymbol{\omega}$ (λ - произволно число) също удовлетворяват (17); *геометричното множество от точки, чиито скорости са успоредни на ъгловата скорост, е <u>права линия</u>* с уравнение:

$$(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_C)\times\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \tag{20}$$

  - от (19) следва $\mathbf{r}'_C = \mathbf{r}_\mathbf{C} - \mathbf{r}_\mathbf{0}$, а за всяка точка $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\mathbf{0} + \mathbf{r}'$, т.е. $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\mathbf{0}$; след заместване в (20) се стига до уравнението на правата в неподвижната система:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_C)\times\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \tag{21}$$

- всяко движение на твърдо тяло в пространството може да се разглежда като *винтово движение*, т.е. като съвкупност от постъпателно движение и въртене около ос, която е успоредна на постъпателното движение; оста, около която в даден момент тялото се завърта и едновременно се премества успоредно на нея, се нарича *моментна винтова ос*
- уравненията на моментната винтова ос във векторна форма по отношение на подвижната и неподвижната координатна система са (20) и (21) при отчитане на (18) и (19)
- проекции на *моментната винтова ос*
  - в неподвижната координатна система

$$\frac{x - x_C}{\omega_x} = \frac{y - y_C}{\omega_y} = \frac{z - z_C}{\omega_z} \tag{22}$$

- в подвижната координатна система

$$\frac{x' - x'_C}{\omega_{x'}} = \frac{y' - y'_C}{\omega_{y'}} = \frac{z' - z'_C}{\omega_{z'}} \tag{23}$$

- координатите на точката С в (22) и (23) се определят от (19) и (18):

$$\begin{aligned} x_C &= x_0 + \frac{1}{\omega^2}(\omega_y v_{0z} - \omega_z v_{0y}) \\ y_C &= y_0 + \frac{1}{\omega^2}(\omega_z v_{0x} - \omega_x v_{0z}) \\ z_C &= z_0 + \frac{1}{\omega^2}(\omega_x v_{0y} - \omega_y v_{0x}) \end{aligned} \tag{24}$$

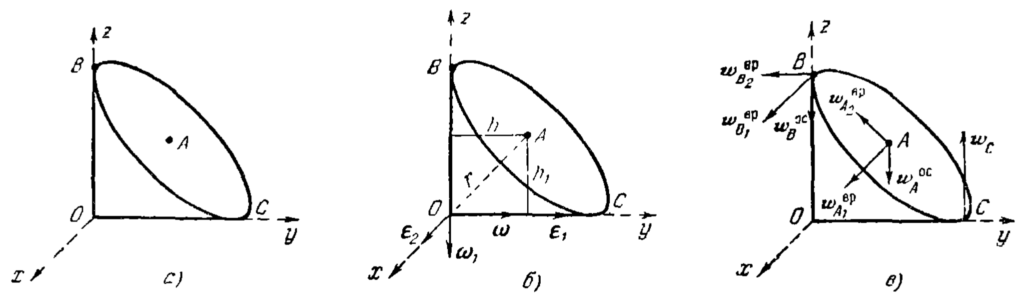
$$\begin{aligned} x'_C &= \frac{1}{\omega^2}(\omega_{y'} v_{0z'} - \omega_{z'} v_{0y'}) \\ y'_C &= \frac{1}{\omega^2}(\omega_{z'} v_{0x'} - \omega_{x'} v_{0z'}) \\ z'_C &= \frac{1}{\omega^2}(\omega_{x'} v_{0y'} - \omega_{y'} v_{0x'}) \end{aligned} \tag{25}$$

- разлика с тяло, което има неподвижна точка: *винтовата ос не минава през една и съща неподвижна точка в различни моменти от времето*
- ако се изключи времето в (22) и (23), не се получават конични повърхнини, а линейчати повърхности, наречени съответно *неподвижни и подвижни аксоиди* на винтовите оси
- аналогия с движение на тяло с неподвижна точка, където подвижният аксоид се търкаля без хлъзгане по неподвижния аксоид
- подвижният аксоид на винтовите оси се търкаля по неподвижния аксоид, *като се хлъзга по него* по общата образуваща за двата аксоида - *винтовата ос в даден момент*

5. Примери.

1. Конус с ъгъл при върха $\pi/2$ е закрепен шарнирно в точка О и се търкаля без хлъзгане в равнината Oxy. Точката A, която е център на основата на конуса, при това движение описва окръжност, чийто център е разположен на оста z. Перпендикулярът, спуснат от A до z, се върти около оста z съгласно уравнението $\varphi_1 = kt^2$; радиусът на основата на конуса е r. Да се

определи ъгловата скорост и ъгловото ускорение на конуса, а също и скоростите и ускоренията на точките A, B, C (фиг.2)



фиг.2

Ъгловата скорост на A като точка от тялото при въртене около z е $\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = 2kt$, а дължината на радиуса на окръжността, описвана от A, е $h = OA\cos 45^o = r\sqrt{2}/2$ и следователно модулът на скоростта на A е $v_A = h\omega_1 = \sqrt{2}\,rkt$. От друга страна скоростта на A(като точка от твърдо тяло, въртящо се около неподвижна точка) е равна на произведението от моментната ъглова скорокт ω и разстоянието до оста на тази моментна ъглова скорост, т.е. $v_A = h_1\omega$, където $h_1 = h = OA\cos 45^o = r\sqrt{2}/2$. Тогава $v_A = h_1\omega = h\omega_1$ или $\omega = \omega_1$. Скоростта на A е успоредна на оста x и ако за определеност тя е по нейното положително направление, то векторите $\boldsymbol{\omega_1}$ и $\boldsymbol{\omega}$ са насочени съответно по отрицателната посока на z и положителната посока на y. От израза за ъгловото ускорение $\boldsymbol{\varepsilon} = \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega_1} \times \boldsymbol{\omega}$ следва, че то може да се представи като $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \dfrac{d\omega}{dt}\boldsymbol{\omega_0}$ (единичният вектор $\boldsymbol{\omega_0}$ е по моментната ос на въртене) и $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\omega_1} \times \boldsymbol{\omega}$.

Или $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = 2k\boldsymbol{\omega_0}$. За големината на $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ се получава $\varepsilon_2 = \omega_1\omega = 4k^2t^2$.

Скоростта на точка C е нула, защото тя лежи върху моментната ос на въртене.

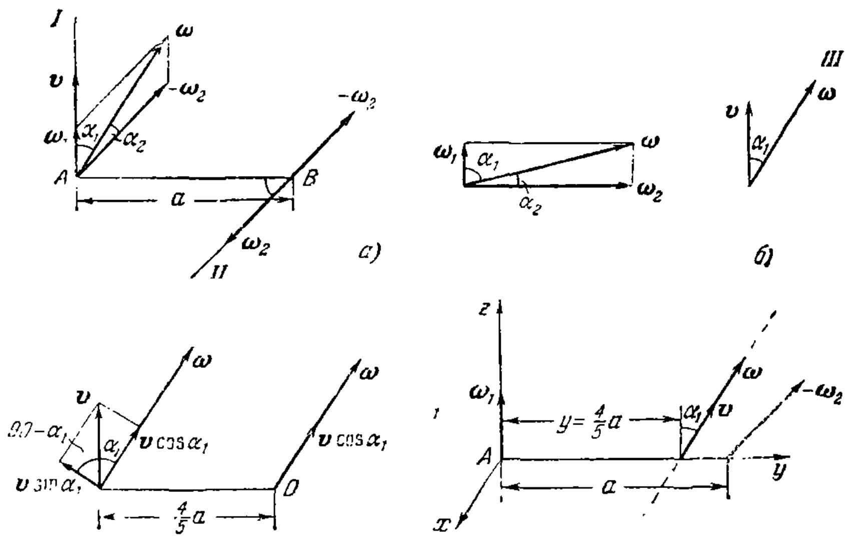
Скоростта на точка B е 2 пъти по-голяма по модул от тази на A, т.е. $v_B = 2v_A = 2\sqrt{2}\,rkt$, защото разстоянието до оста на моментната ъглова скорост е два пъти по-голямо.

Ускорение на точка C: $\mathbf{w}^{(C)} = \mathbf{0}$ (тя лежи върху моментната ос); $\mathbf{w}^{(B)} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\varepsilon_2} \times \mathbf{r}_C$, като заради $\boldsymbol{\varepsilon}_1 \,||\, \mathbf{r}_C$ остава само $w^{(B)} = \varepsilon_2 r_c = 4rk^2t^2\sqrt{2}$.

Ускорение на точка B: $w^{(C)} = OB\omega^2 = 4\sqrt{2}rk^2t^2$; $w^{(B)} = \varepsilon_1 OB = 2\sqrt{2}rk$ и $w^{(B)} = \varepsilon_2 OB = 4\sqrt{2}rk^2t^2$ за двете съставящи съответно. Големина на пълното ускорение на точка B (корен от сумата на квадратите на съставящите)- $w = 2rk\sqrt{16k^2t^2 + 2}$

Ускорение на точка А: аналогично $w^{(C)} = h_1\omega^2 = 2\sqrt{2}rk^2t^2$; $w^{(B)} = |\boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \mathbf{r}_A| = \varepsilon_1 r \sin 45^0 = \sqrt{2}rk$ и $w^{(B)} = |\boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \mathbf{r}_A| = \varepsilon_2 r = 4rk^2t^2$.

2.Твърдо тяло А се върти около ос I с ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}_1$, а тяло В независимо от него се върти около ос II с ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}_2$, като $\omega_2 = 2\omega_1$. Оста I е перпендикулярна на оста II и е на разстояние от нея a (фиг.3). Да се определи движението на тяло А спрямо тяло В.



фиг.3

Движението на тяло А спрямо тяло В е съвкупност от две движения - около ос I с ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}_1$ и около ос II с ъглова скорост -$\boldsymbol{\omega}_2$; (при ъглова скорост -$\boldsymbol{\omega}_2$ тяло В става неподвижно) . Избира се координатна система с начало в точка А; (резултатът на двете движения – въртене около ос III и постъпателно движение със скорост $\mathbf{v}$: фиг.3,б)

Проекциите на ъгловата скорост $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ върху осите са:

$$\omega_x = -\omega_2 = -2\omega_1, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega_1 ,$$

а нейната големина: $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \omega_1\sqrt{5}$

Проекциите на постъпателната скорост върху координатните оси са $v_x = 0$, $v_y = 0$, $v_z = 2a\omega_1$, а нейната големина: $v = 2a\omega_1$

Скаларното произведение на ъгловата и постъпателната скорост

$\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{v} = \omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z = 2a\omega_1^2$ е различно от нула, т.е. тези вектори не са перпендикулярни – движението е винтово.

Уравнение на моментната винтова ос

$$\frac{v_x - y\omega_z + z\omega_y}{\omega_x} = \frac{v_y - z\omega_x + x\omega_z}{\omega_y} = \frac{v_z - x\omega_y + y\omega_x}{\omega_z}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{2z\omega_1 + x\omega_1}{0} = \frac{2a - 2y}{1}, \qquad z = -\frac{x}{2}, \qquad y = \frac{4}{5}a$$

Постъпателната скорост, с която тялото се движи по направление на винтовата ос, се определя от

$$v_{\min} = (\omega_x v_x + \omega_y v_y + \omega_z v_z)/\omega \quad , \quad v_{\min} = \frac{2a\omega_1}{\sqrt{5}}$$