Математическа Индукция. Комплексни Числа

Марин Ц. Геновски
ФМИ

2 октомври 2017 г.

Математическа Индукция

Математическата индукция е метод, с който често си служим при доказването на логически твърдения, обвързани по някакъв начин с естествения ред на числата. Този метод често ни дава възможност да изследваме закономерността при прехода от частни към общи твърдения. Еквивалентно, принципът на математическата индукция може да се разглежда като метод за доказването на твърдения, които се явяват функции, определени върху множеството $\mathbb{N}$ на естествените числа. Принципът на математическата индукция е формулиран в рамките на следващата теорема.

Теорема 1. *Нека P е логическо твърдение, във формулировката на което участва естественото число $n \in \mathbb{N}$. Ако $P(n_0)$ е вярно твърдение, където n_0 е някое естествено число, и ако от $P(k)$ следва $P(k+1)$ за произволно естествено число $k \geqq n_0$, то тогава твърдението P е изпълнено за всяко естествено число $n \geqq n_0$.*

Комплексни Числа

Известен е недостигът на числовото множество $\mathbb{R}$ на реалните числа, изразяващ се в това, че не всяко алгебрично уравнение с реални коефициенти притежава реални корени. Например, нито едно от уравненията от вида $x^2 + a^2 = 0$ за ненулево реално число a не приема реални корени. В частност, това се отнася до уравнението $x^2 + 1 = 0$.

В тази връзка възниква нужда от построяването на числово множество, което да съдържа като подмножество $\mathbb{R}$, да съхранява обичаните свойства на аритметичните операции с реални числа, и да съдържа по един корен на всяко неконстантно алгебрично уравнение с реални коефициенти.

Такова множество е множеството $\mathbb{C}$ на комплексните числа, което определяме като множеството от всевъзможните наредени двойки реални числа от вида $(x, y)\,,\ x, y \in \mathbb{R}$.

За всяка наредена двойка числа еднозначно уточняваме кое число е първото и кое е второто. Две наредени двойки считаме за равни тогава и само тогава, когато са съответно равни първите и вторите ѝм компоненти. Събирането и изваждането на наредени двойки реални числа се осъществява съгласно равенството

$$(a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d)\,.$$

Умножаваме наредени двойки съгласно правилото

$$(a, b)\,(c, d) = (ac - bd, bc + ad)\,.$$

Оттук посредством решаването на една система нелинейни алгебрични уравнения лесно изразяваме и частното на произволни две комплексни числа, значи наредени двойки реални числа.

Не е трудно да се убедим, че съществува взаимно еднозначно съответствие между реалните числа и всички комплексни числа от вида $(x,0)\,,\; x\in\mathbb{R}$.

Първата компонента на всяко комплексно число $(x,y)=z\in\mathbb{C}$ наричаме реална част и бележим $x=\Re z$. Втората компонента на z наричаме негова имагинерна част и пишем $y=\Im z$. Въвеждаме още означението $i=(0,1)$, което число наричаме *имагинерна единица*. За произволни $x,y\in\mathbb{R}$ имаме

$$x+iy=(x,0)+(0,1)\,(y,0)=(x,0)+(0,y)=(x,y)\,.$$

Така всяко комплексно число $(x,y)=z\in\mathbb{C}$ можем да представим във вида $z=x+iy$, който запис наричаме алгебрично представяне на комплексното число z.

Нека в равнината е зададена правоъгълна координатна система. Тогава е налично взаимно еднозначно съответствие между $\mathbb{C}$ и точките от равнината, която в този контекст е известна като *Гаусова*, или *комплексна* равнина. По-точно, на произволно комплексно число $z\in\mathbb{C}$ съответства точката M с декартови координати (x,y), където $x=\Re z, y=\Im z$. Дължината $\rho=\left|\overrightarrow{OM}\right|$ на съответния радиус-вектор наричаме модул на комплексното число z и го обозначаваме $|z|$. Ъгълът θ, който сключва този вектор в положителна посока с оста Ox, наричаме аргумент на z и пишем $\theta=\operatorname{Arg} z$. Двойката (ρ,θ) наричаме полярни координати на M. Съгласно Питагоровата теорема и елементарни сведения от тригонометрията извеждаме

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\qquad \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{y}{x}.$$

Очевидно, поради периодичността на тригонометричните функции, θ не е определен еднозначно, ами с точност до $2k\pi,\; k\in\mathbb{Z}$. Стойността θ_0, която попада в интервала $[0,2\pi]$, наричаме главна стойност на аргумента и пишем $\theta_0=\arg z$.[1]

Оттук получаваме $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ и достигаме до записа $z=\rho\,(\cos\theta+i\sin\theta)$, познат като тригонометрично представяне на комплексно число z.

По-нататък, от формулите на Ойлер

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,\qquad e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta, \tag{1}$$

извеждаме $z=e^{i\theta}, \bar{z}=e^{-i\theta}$, където $\bar{z}$ е комплексно спрегнатото число на z.

Сега или с помощта на принципа на математическата индукция, или посредством (1) можем да изведем формулата на Моавър,

$$\left[\rho\,(\cos\theta+i\sin\theta)\right]^n=\rho^n\,(\cos n\theta+i\sin n\theta)\,. \tag{2}$$

Сега сме готови да атакуваме въпроса за степенуване и коренуване на комплексни числа. Първото действие е ясно. От друга страна, ако $\omega=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ е такова комплексно число, че $\omega^n=z,\; n\in\mathbb{N}, z=\rho\,(\cos\theta+i\sin\theta)$, то тогава

$$r^n\,(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=\rho\,(\cos\theta+i\sin\theta)$$

и значи $r^n=\rho, n\varphi=\theta+2k\pi$ за $k\in\mathbb{Z}$, откъдето $r=\sqrt[n]{\rho}, \varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n},\; k\in\mathbb{Z}$. Така получаваме формулите

$$\sqrt[n]{\rho\,(\cos\theta+i\sin\theta)}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\; k=0,1,\ldots,n-1.$$

[1] Тригонометричното уравнение $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ притежава точно две решения в $[0,2\pi]$. Избираме това измежду тях, за което второто рамо на ъгъла лежи в квадранта, в който се намира точката $M\,(x,y)$.

Задачи

Задача 1. Да се докаже неравенството на Бернули,

$$(1+x)^n \geqq 1 + nx, \tag{3}$$

където $x \in \mathbb{R}, x \geqq -1$, $n \in \mathbb{N}$.

Задача 2. Да се докаже, че естественото число $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ се дели без остатък на 133 за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Задача 3. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са строго положителни реални числа, чието произведение е точно тъждествено равно на единица, значи $\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu = 1$. Да се докаже, че сумата на тези числа е не по-малка от n, значи $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \geqq n$

Забележка. Горното неравенство се изражда в точно равенство тогава и само тогава, когато $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$.

Задача 4. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са неотрицателни реални числа. Да се докажат следната двойка неравенства.

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \tag{4}$$

Забележка. Горните три стойности са известни съответно като *средно хармонично*, *средно геометрично* и *средно аритметично*. Второто неравенство често се нарича неравенство на Коши.

Задача 5. Да се докажат следните тъждества (неравенства).

а) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} (2\nu - 1) = n^2$;

б) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

в) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} (2\nu - 1)^2 = \frac{n\left(4n^2 - 1\right)}{3}$;

г) $\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(\nu+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$;

д) $\displaystyle\sqrt{n} \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\nu}} < 2\sqrt{n}$;

е) $\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n} \cos 2^\nu \theta = \frac{\sin 2^{\nu+1}\theta}{2^{\nu+1}\sin\theta}$.

Задача 6. Да се докаже биномната формула, още позната като *Нютонов бином*,

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^\nu = a^n + n a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^\nu + \cdots + b^n, \tag{5}$$

където $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu!\,(n-\nu)!}$, $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.

Задача 7. Да се намери комплексното число, като се извършат означените аритметични действия.

а) $(1-2i)(2+i)^2 + 5i$

б) $(5+4i)(1+11i) + i^{2017}$

в) $(i+3)^3$

г) $\dfrac{(-1+i)^{40}}{(-1-i)^{20}}$

д) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7} - \dfrac{4}{1-i}$

е) $\dfrac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96} - i(1+i)^{98}}$

ж) $\dfrac{(1+i)^3 - (1-i)^4}{(4-2i)(3-2i)}$

з) $\dfrac{(1+2i)^2 - (2+i)^3}{3+i} + 2017i$

и) $\dfrac{2-(2+i)^2}{1-3i} - \dfrac{6}{1+i}$

Задача 8. Да се определят стойностите на двойката числа $x, y \in \mathbb{R}$, при които дадените равенства са тъждества.

а) $(1+2i)\,x + (3-5i)\,y = 1-9i$

б) $\dfrac{x+1+i\,(y-3)}{5+3i} = 1+i$

в) $3x - (2+5i)\,y = 2-5i$

г) $(1+i)\,x - (3-2i)\,y = 1+6i$

Задача 9. Определете реалните числа x, y, при които комплексните числа $z_1 = y^2 - 7y + 9xi$ и $z_2 = -12 + 20i + x^2 i$ са равни.

Задача 10. Определете реалните числа x, y, при които комплексните числа $z_1 = 8x^2 - 20i^9$ и $z_2 = 9x^2 - 4 + 10yi^3$ са спрегнати.

Задача 11. Приведете комплексните числа в тригонометричен (експоненциален) вид.

а) $2 + i\sqrt{12}$

б) $z = \dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta}$

в) $z = 1 + \sin\theta - i\cos\theta$

г) $z = 1 + i\tan\theta$

д) $z = \dfrac{2+8i}{5+3i}$

е) $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$

ж) $z = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$

з) $z = -\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$

и) $z = \cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}$

к) $z = \dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)^{15}}{(1+i)^8}$

л) $z = \left(1+e^{i\theta}\right)^n$

Задача 12. Опростете изразите.

а) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{60}$;

б) $\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(-1-i)^{20}}$;

в) $\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{6}}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{4}} + (1+i)\,(3-i)$;

г) $\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)(\cos\theta + i\sin\theta)}{(2-i2)\,(\cos\theta - i\sin\theta)}$.

Задача 13. Коренувайте комплексните числа.

а) $z = \sqrt{7+i24}$;

б) $z = \sqrt[4]{1-i\sqrt{3}}$;

в) $\sqrt[6]{\dfrac{2+2i}{\sqrt{3}-i}}$.

Задача 14. Решете алгебричните уравненията в полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа.

а) $x^2 - (2+i)\,x + 7i - 1 = 0$

б) $|z| - z = 1 + i2$

в) $x^2 - (3-2i)\,x + 5 - i5 = 0$

Задача 15. Да се докажат дадените тъждества относно тригонометрични суми при $x \neq 2k\pi$.

а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n}{2}x \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$;

б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$.

Забележка. Прозорливият студент ще забележи, че съществуват поне три подхода, по които могат да се докажат горните тъждества.

Задача 16. Да се изразят $\cos\nu\theta$ и $\sin\nu\theta$ посредством $\cos\theta$ и $\sin\theta$ съответно при $\nu = 2, \ldots, 5$.