ЛЕКЦИЯ 9

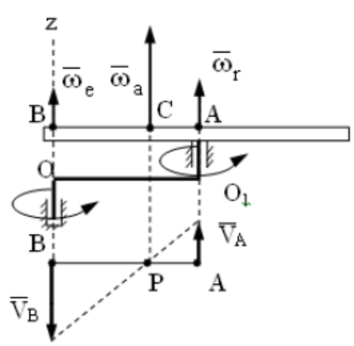
Геометрия на движението

Съдържание

1. **Събиране на завъртания около успоредни оси.**

- постановка на задачата:

  Тяло се върти около ос, която от своя страна се върти около друга неподвижна ос, успоредна на нея. При известни ъглови скорости на въртене около осите да се определи абсолютното движение на тялото (фиг.1).



фиг.1

- *относително движение*: въртене с ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}_r$ около оста O_1

- *преносно движение:* въртене с ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}_e$ около оста Oz

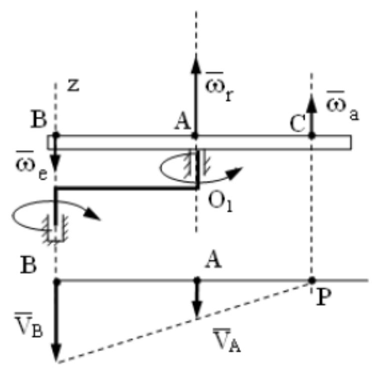
- случай, когато посоките на относителното и преносното движение съвпадат (за определеност $\omega_r > \omega_e$) - (фиг.1).

- абсолютна скорост на точка A: $\mathbf{v}_a{}^{(A)} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_e$; $v_a{}^{(A)} = \omega_e\, AB$
- абсолютна скорост на точка B: $\mathbf{v}_a{}^{(B)} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_r$; $v_a{}^{(B)} = \omega_r\, AB$
- векторите на скоростите на точките са успоредни (перпендикулярни на отсечката AB)
- моментна ос на въртене с абсолютна ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}_a$, минаваща през моментния център на скоростите P

$$\omega_a = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A + v_B}{AP + BP} = \frac{\omega_e AB + \omega_r AB}{AB} = \omega_e + \omega_r$$

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{\omega_r AB}{\omega_e AB} = \frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{BP}{AP}$$

- случай, когато преносното движение има противоположна посока на относителното (за определеност $\omega_r > \omega_e$) - (фиг.2).



фиг.2

- абсолютна скорост на точка A: $\mathbf{v}_a{}^{(A)} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_e$; $v_a{}^{(A)} = \omega_e\, AB$
- абсолютна скорост на точка B: $\mathbf{v}_a{}^{(B)} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_r$; $v_a{}^{(B)} = \omega_r\, AB$
- векторите на скоростите на точките са успоредни (перпендикулярни на отсечката AB)
- моментна ос на въртене с абсолютна ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}_a$, минаваща през моментния център на скоростите P

$$\omega_a = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_B - v_A}{BP - AP} = \frac{\omega_r AB - \omega_e AB}{AB} = \omega_r - \omega_e$$

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{\omega_r AB}{\omega_e AB} = \frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{BP}{AP}$$

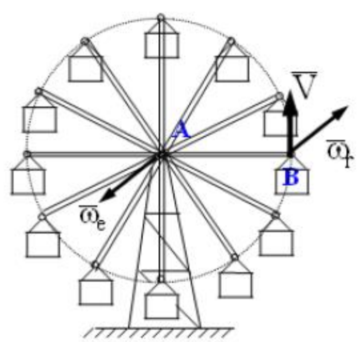
- резултат: $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}_\mathbf{e} + \boldsymbol{\omega}_\mathbf{r}$; $\quad \dfrac{BP}{AP} = \dfrac{\omega_r}{\omega_e}$ (1)

  - при въртене около успоредни оси абсолютното движение на тялото е въртене около моментната ос (при $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{e} \neq -\boldsymbol{\omega}_\mathbf{r}$), която е в равнината, определена от осите на относителното и преносното въртене и е на разстояние от тези оси, обратно пропорционално на ъгловите скорости за всяка от осите

  - моментната ъглова скорост е равна на векторната сума на успоредните вектори на ъгловите скорости на всяко от въртеливите движения

  - абсолютното движение е равнинно движение

  - при $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{e} = -\boldsymbol{\omega}_\mathbf{r}$ (въртелива двоица) : частен случай на постъпателно движение



фиг.3

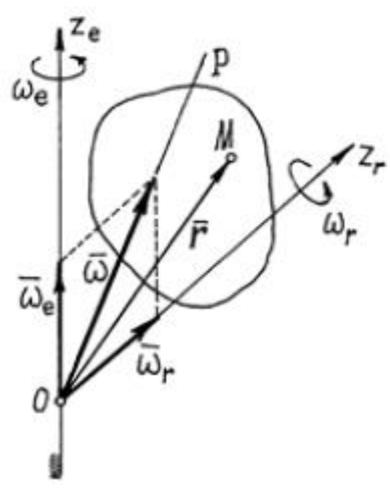
  - векторът на скоростта на постъпателното движение се определя чрез векторното произведение на преносната ъглова скорост и радиус-вектора, съединяващ осите на преносното и относителното въртене на тялото: $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{AB}$

- обратно: векторът на скоростта на постъпателно движение може да се разглежда като резултат от движение, реализирано чрез въртелива двоица

2. Събиране на завъртания около пресичащи се оси.

- постановка на задачата:

  Тяло се върти около ос, която от своя страна се върти около друга неподвижна ос, като осите се пресичат в точка O. При известни ъглови скорости на въртене около осите да се определи абсолютното движение на тялото (фиг.4). Точка M – произволна точка от тялото с радиус-вектор $\mathbf{r}$.



фиг.4

- *относително движение*: въртене с ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}_r$ около оста z_r
- *преносно движение:* въртене с ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}_e$ около оста z_e
- *абсолютно движение*: въртене с ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}$ около моментната ос OP

- по теоремата за събиране на скоростите

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

$$\mathbf{v}_a = \boldsymbol{\omega}_\mathbf{a} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}_\mathbf{e} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_\mathbf{r} \times \mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega}_\mathbf{e} + \boldsymbol{\omega}_\mathbf{r}) \times \mathbf{r}\,;$$

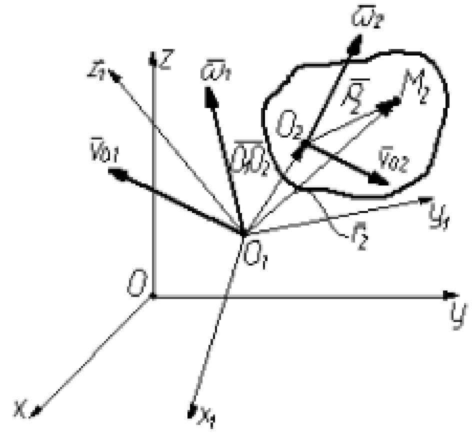
$$\boldsymbol{\omega}_\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}_\mathbf{e} + \boldsymbol{\omega}_\mathbf{r} \qquad (2)$$

- *абсолютната ъглова скорост е векторна сума от относителната и преносната ъглова скорост*

3. Обща задача за относително движение на твърдо тяло.

- постановка на задачата:

  Тяло извършва произволно движение относно координатна система $O_1x_1y_1z_1$, която по произволен начин се движи относно неподвижна координатна система $Oxyz$ (фиг.5). Да се определи абсолютното движение на тялото .
- движението на тялото относно $O_1x_1y_1z_1$ (относително движение) се определя чрез скоростта (относителна скорост) на негов полюс O_2 и относителната ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{r}$, минаваща през полюса O_2 (която се явява и моментна ъглова скорост при движението относно $O_1x_1y_1z_1$)
- преносното движение (на $O_1x_1y_1z_1$ спрямо $Oxyz$) се определя чрез абсолютната скорост $\mathbf{v}_{\mathbf{01}}$ на полюса O_1 и вектора на ъгловата скорост $\boldsymbol{\omega}_e$ на въртене около моментната ос, минаваща през полюса O_1 .
- Да се определи абсолютната скорост $(\mathbf{v}_{\mathbf{02}})_a$ на полюса O_2 и абсолютната ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}_a$ на тялото



фиг.5

- М – произволна точка от тялото с радиус-вектор $\mathbf{r} = OM$ спрямо $Oxyz$;
  $\mathbf{r}_1 = O_1M$ спрямо $O_1x_1y_1z_1$; $\mathbf{r_2} = O_2M$ спрямо полюса O_2; $\mathbf{r}_0 = OO_1$- радиус-вектор на началото на $O_1x_1y_1z_1$ спрямо $Oxyz$; $\mathbf{r}' = O_1O_2$- радиус-вектор на полюса O_2 спрямо $O_1x_1y_1z_1$

- за произволната точка М от израза за събиране на скоростите

  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$

  $$\mathbf{v}_a = (\mathbf{v}_{O1} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}_1) + (\mathbf{v}_{O2} + \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{r}_2) \qquad (3)$$

  от $\mathbf{r_1} = \mathbf{r}' + \mathbf{r_2}$ и след заместване в (3)

  $$\mathbf{v}_a = (\mathbf{v}_{O1} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}_2) + (\mathbf{v}_{O2} + \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{r}_2) =$$

  $$= \mathbf{v}_{O1} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}_{O2} + (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \mathbf{r}_2 \qquad (4)$$

- преносна скорост на полюса O_2: $\mathbf{v}_{O1} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}' = (\mathbf{v}_{O2})_e$

- абсолютна скорост на полюса O_2:
  $(\mathbf{v}_{O2})_a = \mathbf{v}_{O1} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}_{O2} = (\mathbf{v}_{O2})_e + \mathbf{v}_{O2}$

- абсолютна скорост на точката М: $\mathbf{v}_a = (\mathbf{v}_{O2})_a + (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r) \times \mathbf{r}_2$

- от друга страна за абсолютната скорост на точката М:

$$\mathbf{v}_a = (\mathbf{v}_{O2})_a + \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{r}_2 \qquad \textbf{(5)}$$

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r \qquad (6)$$

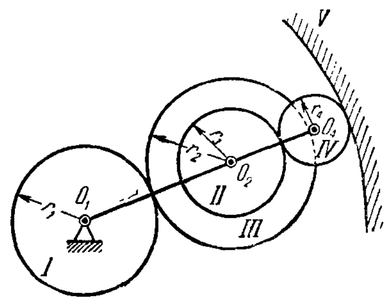
- теорема за събиране на движенията на твърдо тяло

абсолютната скорост на произволна точка от твърдо тяло при най-общото му движение е равна на векторната сума на абсолютната скорост на произволна точка от тялото, избрана за полюс, и завъртането около моментната ос, минаваща през полюса, изразено чрез векторното произведение на моментната ъглова скорост и радиус-вектора на точката относно полюса

- *разпределението на скоростите при абсолютното движение на твърдо тяло се определя чрез задаване на абсолютната скорост на полюса в тялото, равна на геометричната сума на преносната и относителната скорост на полюса, и абсолютната ъглова скорост на тялото, равна на геометричната сума на преносната и относителната ъглови скорости на тялото*

4.Примери.

1. В планетна предавка лостът O_1O_4 привежда в движение колело I, въртящо се около неподвижна ос, минаваща през O_1. Колелото I трябва да се върти с ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{1}$, равна на 10000 [rpm]. Ако са известни радиусите на колелата r_1=10, r_2=16, r_3=8 и r_4=6, да се намери ъглова скорост $\boldsymbol{\Omega}$, на която да се завърти лостът, така че да обезпечи исканата ъглова скорост на първото колело.



фиг.6

Нека ъгловите скорости на колелата са съответно $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3, \boldsymbol{\omega}_4$. Прилагайки към цялата система скорост $-\boldsymbol{\Omega}$, скоростите на всички колела се намаляват с тази стойност и тогава (знакът минус отразява посоката на различно въртене)

$$\frac{\omega_1-\Omega}{\omega_2-\Omega}=-\frac{r_2}{r_1}, \qquad \frac{\omega_3-\Omega}{\omega_4-\Omega}=-\frac{r_4}{r_3}, \qquad \frac{\omega_4-\Omega}{\omega_5-\Omega}=\frac{r_5}{r_4}$$

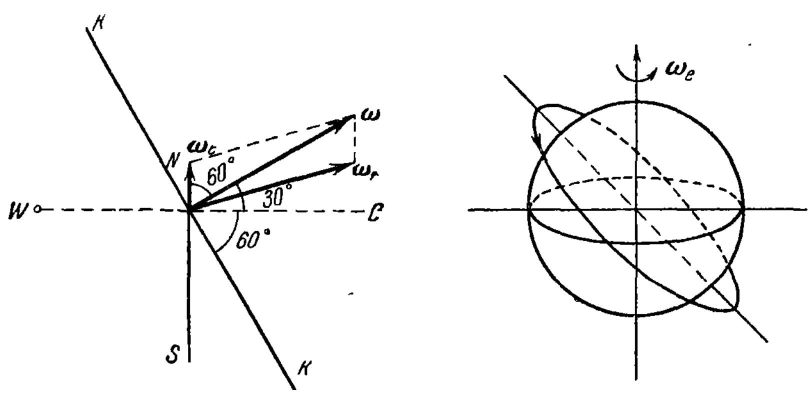
Но ъгловите скорости на колелата II и III са еднакви, а за колело V тя е нула.

След почленно умножение се получава

$$\frac{\omega_1-\Omega}{0-\Omega}=\frac{r_2 r_5}{r_1 r_3} \text{ или } \Omega=\omega_1\frac{r_1 r_3}{r_1 r_3-r_2 r_5}, \quad \Omega=10000\frac{10.8}{10.8-16.46}=-1220 \text{ [rpm]}.$$

Минусът означава, че лостът и колелото I се въртят в различни посоки.

2. Изкуствен спътник обкаля Земята по кръгова орбита с период 1.5 часа относно координатна система с начало в центъра на Земята и движеща се постъпателно спрямо нея. Да се определи относителната му ъглова скорост спрямо въртящата се Земя, ако наклонът на орбитата му с екватора е $60^{\mathbf{0}}$. Векторът на ъгловата му скорост $\boldsymbol{\omega}$ сключва остър ъгъл с оста SN на Земята.



фиг.7

Движението на спътника се разглежда като съставно: преносно – заедно със Земята, и относително – по отношение на Земята, т.е. $\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r$.

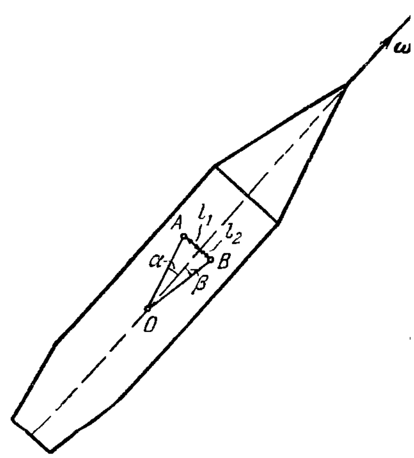
Големината на абсолютната ъглова скорост е $\omega_a = \dfrac{2\pi}{90}$ [min^{-1}].

Големината на преносната ъглова скорост е $\omega_e = \dfrac{2\pi}{24.60}$ [min^{-1}].

В триъгълнка на ъгловите скорости са известни две страни - ω_a и ω_e, както и ъгълът между тях, т.е.

$$\omega_r = \sqrt{\omega_a^2 + \omega_e^2 - 2\omega_a\omega_e \cos 60^0} = \frac{2\pi}{90}\sqrt{1 + \frac{1}{16^2} - \frac{1}{16}} \approx 0.0675 \text{ [min}^{-1}\text{]}.$$

3. Центърът на тежестта на ракета се движи със скорост $\mathbf{v_0}$, като ракетата в същото време се върти около оста си с ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}$. Две точки А и В са разположени на един диаметър, перпендикулярен на оста, съответно на разстояния l_1 и l_2 от нея. Какво условие трябва да удовлетворяват l_1 и l_2, така че скоростите на точките А и В да са взаимно перпендикулярни.



фиг.8

Движението на ракетата съответства на общия случай на движение на твърдо тяло, като тук винтовата ос съвпада с оста на ракетата.

От $\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1$ и избор на полюс – произволна точка О от оста на ракетата, за скоростите на А и В:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2 .$$

От условието следва $\mathbf{v}_A \mathbf{v}_B = 0$ или

$$(\mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1)\,(\mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2) = 0,\ \mathbf{v}_0^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1)\ \mathbf{v_0} + \mathbf{v}_0(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1)(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2) = 0$$

Но $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1)\mathbf{v}_0 = 0$ и $\mathbf{v}_0(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2) = 0$, защото векторните произведения в скобите са перпендикулярни на $\boldsymbol{\omega}$, а той по условие съвпада с направлението на $\mathbf{v_0}$.

За третото събираемо се получава

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1)(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2) = (\omega r_1 \sin\alpha)(\omega r_2 \sin\beta)\cos 180^0 = -\omega^2 l_1 l_2 ,$$

защото векторните проидведения $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1)$ и $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2)$ са успоредни вектори, насочени в противоположни посоки.

Тогава за търсеното условие окончателно се получава

$$v_0^2 - \omega^2 l_1 l_2 = 0 \quad \text{или} \quad l_1 l_2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 .$$