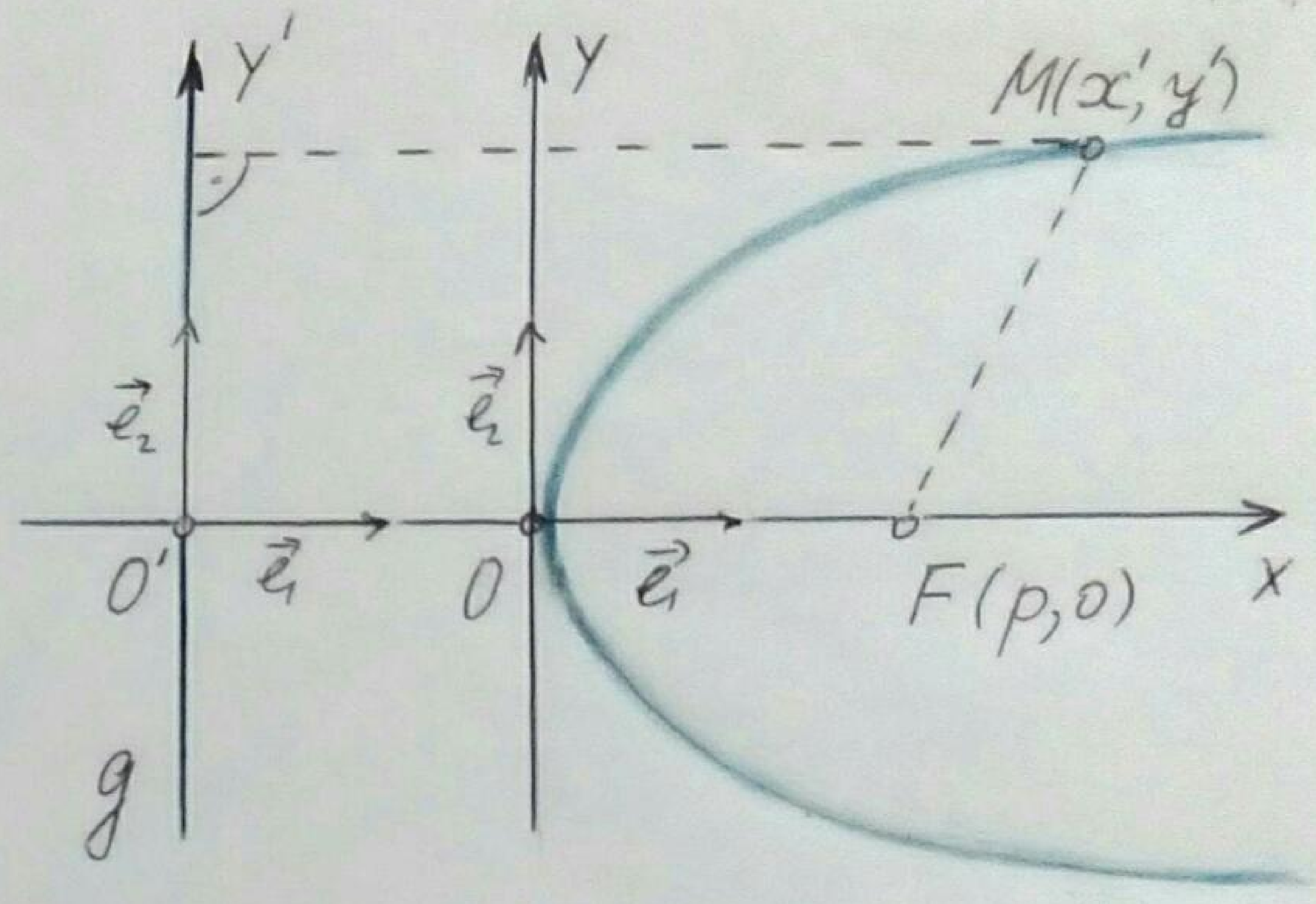
15. Конични сечения. Парабола

Нека F и g са съответно неинцидентни точка и права. Тогава геометричното място на точки M в равнината, определена от F и g, за които отношението на разстоянията до F и g е положително число e



$$(1) \quad \frac{|MF|}{|M,g|} = e, \quad e > 0, \quad e\text{ - постоянно число - } e = const.$$

се нарича конично сечение с фокус F и с директриса g.

За да намерим аналитично представяне на (1) спрямо подходяща ортонормирана координатна система постъпваме както следва. Избираме $K' = O'\vec{e}_1\vec{e}_2$ - окс, така че $O'y'$ да съвпада с g, т.е. $\vec{e}_2 \parallel g$, $O'F \perp g$, като $\overrightarrow{O'F}$ и $\vec{e}_1$ са еднопосочни $\Rightarrow \overrightarrow{O'F} = p\vec{e}_1$, $p > 0$

Следователно координатите на F спрямо K' са $F(p, 0)$. Нека 15.2.
произволна точка M от геометричното място е с координати
$M(x', y')$ спрямо K'. От (1) получаваме $|MF| = e|M, g|$.

$|MF| = \sqrt{(x'-p)^2 + y'^2}$, $|M, g| = |x'|$ ($g: x = 0$ е нормално уравнение на g)

$\Rightarrow M \in (1)$ точно тогава, когато $\sqrt{(x'-p)^2 + y'^2} = e|x'|$ или

$(x'-p)^2 + y'^2 = e^2 x'^2$, което като преработим получаване

$$(2) \quad (1-e)^2 x'^2 + y'^2 - 2p x' + p^2 = 0.$$

За да упростим уравнението (2) преминаваме към нова
координатна система $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ чрез смяната
$$(3) \quad \begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y \end{cases}$$

Като заместим (3) в (2) след елементарни преобразувания получаваме, че спрямо K коничното сечение има уравнение:

$$(4) \quad (1-e^2)x^2 + y^2 + [2\alpha(1-e^2) - 2p]x + (1-e^2)\alpha^2 - 2p\alpha + p^2 = 0.$$

I. Нека $e=1$. Тогава (4) има вида $y^2-2px-2p\alpha+p^2=0$.
В горното уравнение избираме α, така че да получим уравнение, в което свободният член да е нула, а именно $\alpha=\frac{p}{2}$. Окончателно получаваме

$$(5)\quad \pi:\ y^2=2px.$$

В този случай разглежданото множество се нарича парабола, а уравнението (5) - канонично уравнение на параболата.

II. Нека $e\neq 1$. Тогава $1-e^2\neq 0$ и можем да изберем α, така че коефициентът пред x да стане нула. Следователно $\alpha=\frac{p}{1-e^2}$.
За свободния член получаваме:

$$(1-e)^2\alpha^2-2p\alpha+p^2=\frac{p^2}{1-e^2}-\frac{2p^2}{1-e^2}+\frac{(1-e^2)p^2}{1-e^2}=-\frac{p^2e^2}{1-e^2}.$$

Следователно (4) добива вида:

$$(6)\quad (1-e^2)x^2+y^2=\frac{p^2e^2}{1-e^2}.$$

II.1. Нека $e < 1$. Тогава $1 - e^2 > 0$. След като разделим (6) на 15.4

$\frac{p^2e^2}{1-e^2}$ и положим $a = \frac{pe}{1-e^2}$ и $b = \frac{pe}{\sqrt{1-e^2}}$ (7) получаваме

$$(8)\ \mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

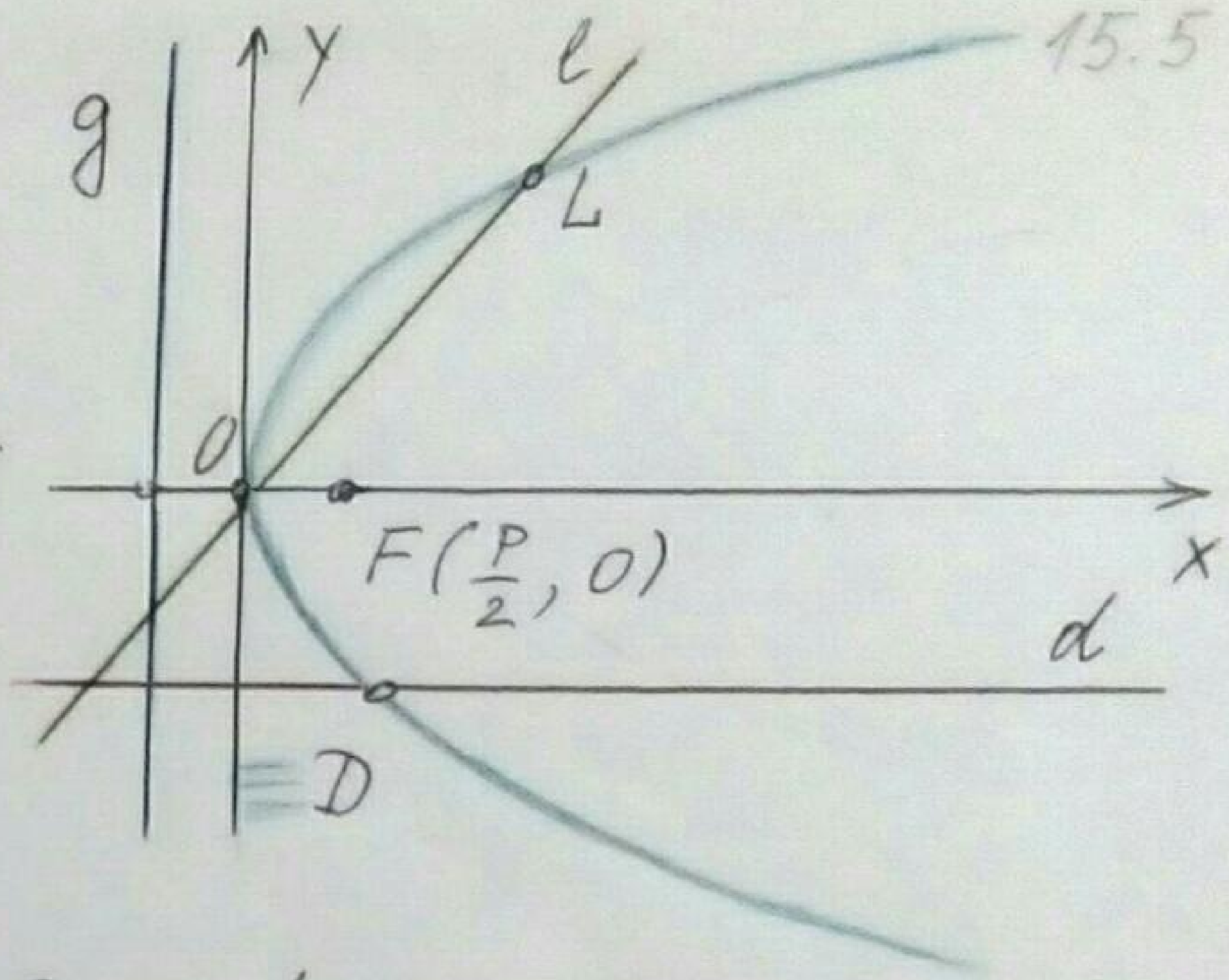
В този случай разглежданото множество от точки се нарича елипса, а уравнението (8) – канонично уравнение на елипсата.

II.2. Нека $e > 1$. Тогава $e^2 - 1 > 0$ и като разделим пак (6) на

$\frac{p^2e^2}{e^2-1}$ и положим $a = \frac{pe}{e^2-1}$ и $b = \frac{pe}{\sqrt{e^2-1}}$ (9) получаваме

$$(10)\ \chi: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В този случай разглежданото множество се нарича хипербола, а уравнението (10) – канонично уравнение на хиперболата.

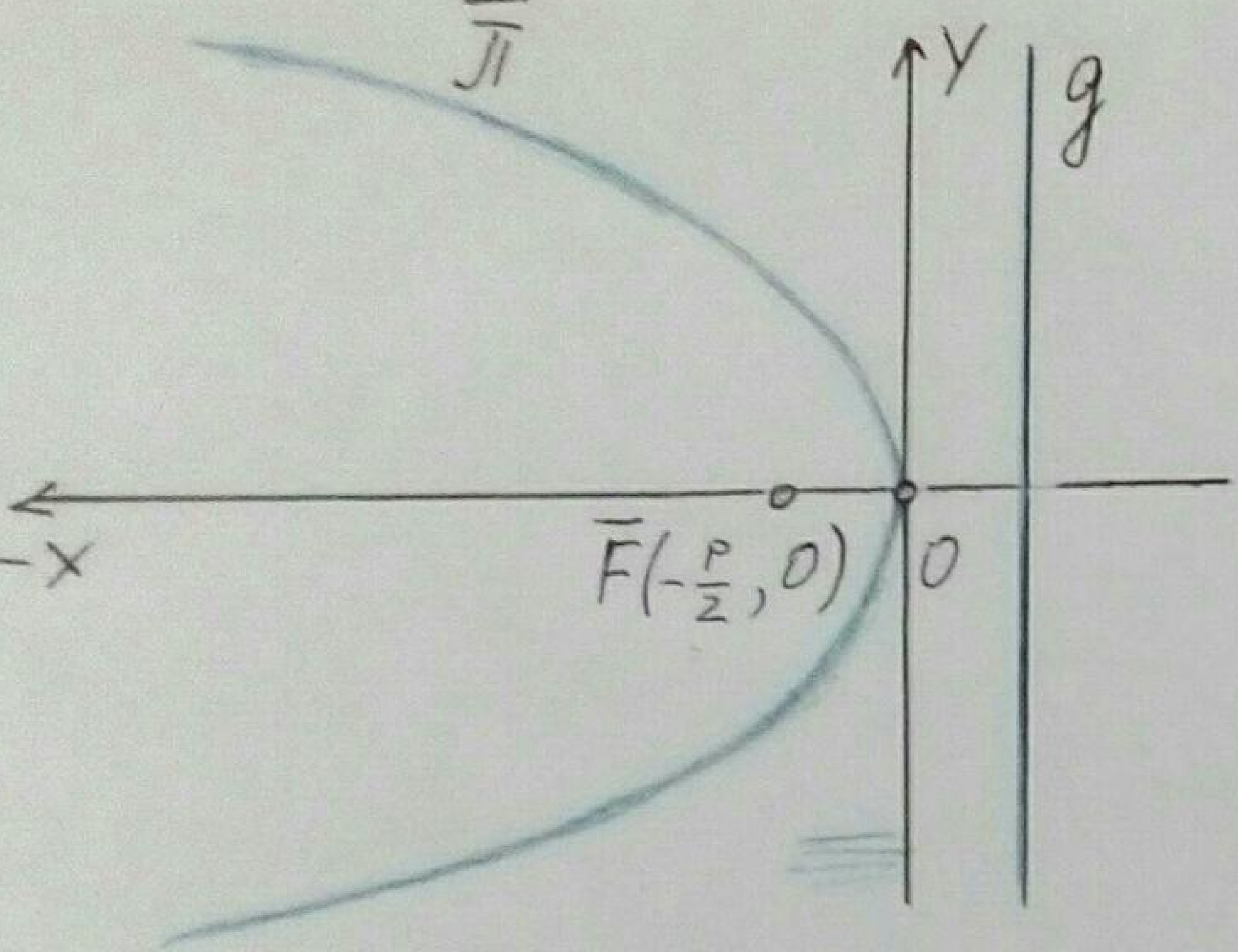


Парабола. Нека π е парабола с канонично уравнение $\pi: y^2 = 2px$, $p > 0$. От него се вижда, че π е разположена симетрично спрямо оста Ox – ако $M(x,y) \in \pi$, то $M_1(x,-y) \in \pi$. Ox се нарича ос на параболата. От $p>0$ следва, че π е разположена изцяло в една полуравнина спрямо правата $t: x=0$. От (5) се вижда, че t има единствена обща точка с π – точката O, която се нарича връх на π, а t – върхова тангента на π. Спрямо K фокусът на π има координати $F(\frac{p}{2}, 0)$, а директрисата g е с уравнение $g: x = -\frac{p}{2}$.

Права l през върха O пресича π в още точно една точка. Имаме $l: y = kx$, $k \neq 0 \Rightarrow l \cap \pi = O, L$, където $L(\frac{2p}{k^2}, \frac{2p}{k})$.

Права d, успоредна на оста на π, $d: y = c = const$ пресича π в точно една точка $D(\frac{c^2}{2p}, c)$. Такава права се нарича диаметър на параболата.

15.6



Симетричната на π спрямо Oy парабола $\bar{\pi}$ е с фокус $\bar{F}(-\frac{p}{2}, 0)$, директриса $\bar{g}: x = \frac{p}{2}$ и уравнение:

$$\bar{\pi}: y^2 = -2px$$

В този случай рогата на параболата са обърнати към $-x$.

От своя страна, уравнението $x^2 = 2py$, $p>0$ е уравнение на парабола π_1 с фокус $F_1(0, \frac{p}{2})$ и директриса $g_1: y = -\frac{p}{2}$, ос Oy като тук рогата на π_1 са обърнати към $+y$.