3. Релации  Заб. Възможно е примерите да не са дописани.

Съдържание: деф. релация, свойства на релациите, представяне на релации, затваряния на релации, релация на еквивалентност, теорема за класовете на еквивалентност, релация на наредба деф, влагане на частична в линейна наредба, вериги и контури в релациите, ~~минимален~~ теорема за контурите, минимален и максимален елемент в частична наредба.

---

Деф: Релация: нека $A_1 \dots A_n$ са n-ва наредени съответно първи домейн, втори домейн, ..., n-ти домейн. Релация R над декартовото произведение $A_1 \times \dots \times A_n$ е всяко n-во $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$. (т.е. дефинираме релацията като множество).

- Казваме, че R е n-местна или n-арна релация.
- Ако $n=2$, то релацията е двуместна. Ако R е двуместна и $A_1 = A_2 = A$ (т.е. $R \subseteq A^2$), казваме, че R е релация над декартовия квадрат $A^2$ (основно с такива релации ще се занимаваме).
- Когато кажем само "R е релация" разбираме релация R над някакъв декартов квадрат.
- Инфиксен запис на релация: само за двуместни релации ще пишем $xRy$, вместо $(x,y) \in R$. Четем "x е в релация с y".

Заб./Допълнение: Релация се превежда "отношение". Наистина може да да си мислим за отношение м-у обекти. Например, нека A е м-во от хора и релацията над $A^2$ е R: "... е приятел с ...". Тогава ще имаме приятелските отношения: "Иван е приятел на Петър" (т.е. Иван R Петър), "Мария не е приятел на Петър" (т.е. Мария $\not R$ Петър).

Примери: виж стр. все още недописано

## Свойства на релациите

Нека $R \subseteq A^2$. Дефинираме тези свойства само за релации над декартов квадрат!

1. $R$ е рефлексивна т.с.т.к. $\forall a \in A: aRa$
(всеки елемент е в релация със себе си)

2. $R$ е антирефлексивна т.с.т.к. $\forall a \in A: \neg aRa$
(всеки елемент НЕ Е в релация със себе си)

3. $R$ е симетрична т.с.т.к. $\forall a, b \in A, a \neq b: aRb \rightarrow bRa$
(или: $aRb$ и $bRa$; или: $a \not R b$ и $b \not R a$)

4. $R$ е антисиметрична т.с.т.к. $\forall a, b \in A, a \neq b: aRb \rightarrow b \not R a$

Заб. Симетричността и антисиметричността не са взаимно изключващи се. Пр. $R = \emptyset$. (празната релация е и антисиметрична и симетрична.)

5. $R$ е силно антисиметрична т.с.т.к. $\forall a, b \in A, b \neq a: aRb \oplus bRa$
(точно едно от двете е вярно)

Заб. Симетричността и силната антисиметричност не са взаимно изключващи се.

6. $R$ е транзитивна т.с.т.к. $\forall a, b, c \in A: aRb \land bRc \rightarrow aRc$.

Заб. Никъде не налага $a$, $b$ и $c$ да са различни.

Заб. Когато $x \not R y$ и $y \not R x$, казваме, че $x$ и $y$ са несравними относно $R$.

При симетричността и антисиметричността може да има несравними елементи, но при силната антисиметричност не може.

## Представяне на релации от вида $R \subseteq A^2$

Нека $R \subseteq A^2$ и $A = \{a_1 \dots a_n\}$ е крайно.

1. Представяне с матрица:

Можем да представим $R$ чрез $n \times n$ булева матрица, в която клетка на ред $i$ и колона $j$ е:

- 1, ако $a_i R a_j$
- 0, ако $a_i \not R a_j$

Пр: $A = \{a, b, c\}$, $R = \{(a,a), (a,b), (c,b)\}$

$R$ се представя:

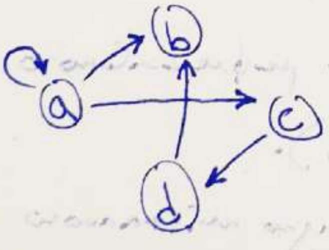
| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | 1 | 1 | 0 |
| b | 0 | 0 | 0 |
| c | 0 | 1 | 0 |

2. С диаграма (граф)

- всеки елемент $a_i$ е точка (връх) от диаграмата: $a_i$
- ако $a_i R a_j$ (може $a_i = a_j$), то има стрелка от $a_i$ до $a_j$:

$$a_i \longrightarrow a_j$$

Пр: $A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (c,d), (d,b)\}$



Заб. Представянето с диаграма е удобно само за малки релации.

Следващото не е необходимо да се знае наизуст, но е добра интуиция.

Представянето на свойствата на релациите

1. Ако $R$ е рефлексивна, то главният диагонал на матрицата на представянето ѝ ще е само от единици ($\forall a_i \in A,\ a_i R a_i$).

Диаграмата ще има примки на всеки връх.

2. Антирефлексивност: главният диагонал е само от нули. Няма нито една примка.

3. Симетричност: матрицата е симетрична относно главния диагонал (стойностите по гл. диагонал са без значение). М-у всеки два различни върха или има две стрелки или няма стрелки, т.е:
или $(a_i)$ $(a_j)$, или $(a_i) \rightleftarrows (a_j)$

4. Антисиметричност: няма две симетрични клетки относно гл. диаг., в които да има две единици. (гл. диаг. е без знач.). Има най-много една стрелка м-у два различни върха (т.е не може $(a_i) \rightleftarrows (a_j)$).

5. Силна антис.: всяка двойка клетки, симетрични относно главния диагонал съдържат противоположни стойности (гл. диаг. е без знач). М-у всеки два различни върха има точно една стрелка.

---

Деф: Затваряне на релация: Нека $R \subseteq A^2$. Рефлексивното затваряне на R е минималното м-во $R' \subseteq A^2$, т.че $R \subseteq R'$ и $R'$ е рефлексивна.

Напълно аналогично се дефинират симетричното и транзитивното затваряне.

Тв. Релация е рефлексивна т.с.т.к. съвпада с рефлексивното си затваряне (аналогично и за симетр. и транз).

Д-во: $|\Rightarrow|$ Щом R е рефлексивна, то очевидно най-малкото $R' \subseteq A^2$ изпълняващо горната деф. ще е $R' = R$. ✓

$|\Leftarrow|$ $R' = R$, но $R'$ е рефлекс $\Rightarrow$ R е рефлекс. □

Заб./Допълнение: Как затваряне релация представена с матрица:
- рефлекс. затваряне се получава като обърнем всички нули от главния диагонал в единици.
- Симетричното затваряне се получава като заменим нулите с единици на симетричните спрямо главния диагонал клетки от вида (1,0) и (0,1). (ако имаме (1,1) или (0,0), не ги пипаме, защото не пречат на симетричността).

**Деф:** $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност (РЕ) т.с.т.к. $R$ е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Пример: стр.

**Деф:** Класи еквивалентност: Нека $R \subseteq A^2$ е РЕ.

$\forall a \in A$, $[a] := \{ b \in A \mid aRb \}$ ще наричаме клас на еквивалентност на $R$ с представител $a$. (очевидно $\forall a \in A, [a] \subseteq A$).

**Т.1** Нека $R \subseteq A^2$ е РЕ. Тогава фамилията $\{[a] \mid a \in A\}$ е разбиване на $A$.

Д-во: 1. Понеже $R$ е рефлексивна, то всеки елемент $a \in A$ попада в поне един елемент от фамилията, а именно $a \in [a]$.

2. $\forall a \in A$, $[a] \neq \emptyset$ (защото $a \in [a]$).

(1., 2. показват, че $\{[a] \mid a \in A\}$ е покриване).

3. Всеки два различни елемента от фамилията имат празно сечение. (т.е класовете на екв. не се пресичат).

Д-во: Нека $[a] \neq [b]$. Допускам, че $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.
Тогава $\exists c: c \in [a] \wedge c \in [b] \Rightarrow aRc \wedge bRc \overset{R\text{-симетр.}}{\Rightarrow}$
$cRa \wedge cRb$.

$R$ е транзитивна, значи имаме:

$aRc \wedge cRb \rightarrow aRb$
$bRc \wedge cRa \rightarrow bRa$

Следв.: $\left(\forall a_1 \in [a],\ bRa \wedge aRa_1 \overset{\text{транз.}}{\Rightarrow} bRa_1\right) \Rightarrow [a] \subseteq [b]$ (1)

$\left(\forall b_1 \in [b],\ aRb \wedge bRb_1 \Rightarrow aRb_1\right) \Rightarrow [b] \subseteq [a]$ (2)

$\overset{(1),(2)}{\Rightarrow} [a] = [b]$ ↯ $\Rightarrow$ всеки два различни елемента не се пресичат

$\overset{1.2.3.}{\Rightarrow}$ Т.1 □.

$\boxed{\text{остр}}$

Св. (от Т1): Всяко разбиване дефинира РЕ и всяка РЕ дефинира разбиване.

Деф: $R \subseteq A^2$ е релация на частична наредба т.с.т.к. $R$ е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

Пример: стр.

Деф: $R \subseteq A^2$ е рел. на линейна наредба т.с.т.к. $R$ е рефлексивна, силно антисиметрична и транзитивна.

Пример: стр.

Заб. Единствената разлика м-у частичната и линейната наредба е, че при частичната се допуска наличието на несравними елементи (т.е може $x \not R y$ и $y \not R x$), докато при линейната не се допуска.

Заб. Понеже, ако релация е силно антисиметрична, то тя е и антисиметрична, знаем, че всяка линейна наредба е и частична наредба.

Заб. Ако $R \subseteq A^2$ е линейна нар. и $A = \{a_1 \ldots a_n\}$, то $R$ има точно $\frac{n(n+1)}{2}$ елемента (в таблицата на релацията има точно $\frac{n(n+1)}{2}$ единици).

Деф: Влагане на частична наредба в линейна

Ако $R \subseteq A^2$ е частична наредба, $R' \subseteq A^2$ е линейна наредба и $R \subseteq R'$, казваме, че $R$ се влага в $R'$ (също казваме, че $R'$ е линейно разширение на $R$).

Заб. При $A = \{a_1 \ldots a_n\}$, броят на линейните разширения на $R$ може да варира от 1 (ако $R$ е линейна наредба) до $n!$ (ако няма сравними елементи в $R$).

## Вериги и контури в релации

**Деф:** Верига: Нека $R \subseteq A^2$ и $A = \{a_1 \dots a_n\}$. Верига в $R$ е всяка редица $a_{i_0}, \dots, a_{i_k}$, $k \geq 0$, където $i_0, \dots, i_k \in \{1 \dots n\}$, $a_{i_j} \neq a_{i_{j+1}}$ и $a_{i_j} R a_{i_{j+1}}$, $j = 0 \dots k-1$.

Заб. Очевидно един едночленен елемент е верига.

**Деф:** Контур: Нека $R \subseteq A^2$ и $A = \{a_1 \dots a_n\}$. Ако $a_{i_0} \dots a_{i_k}$ е верига, $a_{i_0} = a_{i_k}$ и $k > 0$, то веригата е контур.

Заб. $k > 0 \Rightarrow$ един елемент не може да е контур.
Щом $a_{i_0} \dots a_{i_k}$ е верига $\Rightarrow a_{i_j} \neq a_{i_{j+1}} \Rightarrow a_{i_0} a_{i_0}$ не е контур. Значи контурите са редици с поне 3 елемента.

**Т.2 Теорема за контурите:**

Нека $R \subseteq A^2$ е рефлексивна и транзитивна. Тогава $R$ е частична наредба т.с.т.к. в $R$ няма контури.

Д-во: $|\Rightarrow|$ Нека $R$ е частична наредба. Допускаме, че в $R$ има контур: $a_{i_0} \dots a_{i_k} = a_{i_0}$

Щом $a_{i_0} R a_{i_1}$ и $a_{i_1} R a_{i_2} \xRightarrow{R\text{-транз.}} a_{i_0} R a_{i_2}$.

Щом $a_{i_0} R a_{i_2}$ и $a_{i_2} R a_{i_3} \xRightarrow{\text{транз.}} a_{i_0} R a_{i_3}$ ... и т.н.

Щом $a_{i_0} R a_{i_{k-2}}$ и $a_{i_0} R a_{i_{k-1}} \xRightarrow{\text{транз.}} a_{i_0} R a_{i_{k-1}}$.

Но $\left| \begin{array}{l} a_{i_0} R a_{i_{k-1}} \\ a_{i_{k-1}} R a_{i_k} = a_{i_0} \end{array} \right. \Rightarrow R$ не е антисиметрична ↯

Значи $R$ няма контури.

$|\Leftarrow|$ Нека $R$ няма контури. Допускаме, че $R$ не е частична наредба. По усл. $R$ е рефлекс. и транз., значи, за да не е част. нар. остава $R$ да не е антисиметрична. Щом $R$ не е антисиметр., то:
$\exists a, b \in A: a \neq b \wedge aRb \wedge bRa$, но $a, b, a$ е контур ↯ $\Rightarrow \square$

## Минимален и максимален елемент в частична наредба

Деф: Минимален: Нека $R \subseteq A^2$ е частична наредба.

$\forall a \in A$, казваме, че $a$ е минимален в $R$, ако $\neg \exists b \in A, b \neq a: bRa$ (екв: $\forall b \in A, b \neq a: \neg bRa$).

Максимален: $R \subseteq A^2$ - част. нар.

$\forall a \in A$, $a$ е максимален в $R$, ако $\neg \exists b \in A, b \neq a: aRb$

Зав. Може да има няколко минимални и максимални елемента.

Пример: стр. недописано

Зав. Ако $R \subseteq A^2$ е линейна наредба и $A$ е крайно, то $R$ има точно един минимален и точно един максимален елемент. (които съвпадат, когато $A$ е едноелементно).

Ако $A$ е безкрайно може да няма мин и макс. елементи.

БСтр