## Задачи за трето контролно по линейна алгебра

**Задача 1.** *Нека $U$ е линейно пространство с базис $e_1, e_2, e_3$, $V$ - линейно пространство с базис $f_1, f_2$.*

*Нека $\varphi : U \to V$ изпълнява $\varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (x_1 + x_2 + 3x_3)f_1 + (x_1 - 2x_2 + x_3)f_2$.*

*Нека $e'_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $e'_2 = -e_1 + e_2$, $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$.*

*Нека $f'_1 = 5f_1 + 4f_2$ и $f'_2 = 4f_1 + 3f_2$.*

*Покажете, че $e'_1, e'_2e'_3$ - базис на $U$, $f'_1, f'_2$ - базис на $V$ и намерете матрицата на $\varphi$ спрямо тези базиси на $U$ и $V$.*

**Задача 2.** *Нека $e_1, e_2, e_3$ образуват базис на линейно пространство $V$.*

*Нека $a_1 = 5e_1 + e_2 - 5e_3$, $a_2 = 3e_1 - 3e_2 + 2e_3$, $a_3 = e_1 - 2e_2 + e_3$.*

*Нека $b_1 = -8e_1 - 5e_2 - 2e_3$, $b_2 = 3e_1 + 9e_2 + 15e_3$, $b_3 = \boldsymbol{0}$.*

*Покажете, че $a_1, a_2, a_3$ образуват базис на $V$ и намерете матрицата на линейния оператор $\varphi$ определен с $\varphi(a_i) = b_i$, $i = 1, 2, 3$ спрямо базиса $e_1, e_2, e_3$.*

**Задача 3.** *Нека $a_1 = (1, 0, -1)$, $a_2 = (1, 1, 1)$ и $a_3 = (2, 2, 0)$. Докажете, че $a_1, a_2, a_3$ образуват базис на $\mathbb{R}^3$. Намерете дуален базис на $a_1, a_2, a_3$.*

**Задача 4.** *Пресметнете* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

**Задача 5.** *Намерете детерминантата от ред 6:* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

**Задача 6.** *Нека $a \neq 0$. Намерете детерминатата от ред $(n+1)$:*

$$D_{n+1}(a, x) = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+a & x & \dots & x \\ x & x & x+a^2 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x+a^n \end{vmatrix}$$

**Задача 7.** *Намерете детерминатите от ред $n$:*

*а)* $\Delta_n = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 5 & 7 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 5 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix}$ *б)* $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & 1+a_1b_3 & \dots & 1+a_1b_n \\ 1+a_2b_1 & 1+a_2b_2 & 1+a_2b_3 & \dots & 1+a_2b_n \\ . & . & . & \dots & . \\ 1+a_nb_1 & 1+a_nb_2 & 1+a_nb_3 & \dots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}$

**Задача 8.** *Намерете ранга на матрицата $A(p)$ в зависимост от стойностите на $p$:*

$$A(p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & -13 & -6 \\ -1 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & p \end{pmatrix}$$

**Задача 9.** *Намерете матрицата:*

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ ? & ? \end{pmatrix}$, *ако собствените числа на* $A$ *са* $4$ *и* $7$.

- $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$, *ако характеристичният полином на* $B$ *е* $9x - x^3$.

**Задача 10.** *Нека линейният оператор* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *е дефиниран от равенството*

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 - 6x_2 - 6x_3,\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3,\ 3x_1 - 6x_2 - 4x_3)$$

*Намерете базис на* $\mathbb{R}^3$, *спрямо който матрицата* $D$ *на* $\varphi$ *е диагонална, както и матрицата* $D$.

**Задача 11.** *Пресметнете* $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{2022}$.