Ортогонални оператори

<u>Деф.</u> $A \in M_n(\mathbb{R})$. A е ортогонална $\overset{def.}{\Longleftrightarrow} A \cdot A^T = E$ $\quad (A^T = A^{-1})$

Свойства

1) Ако A е ортог, то $\det A = \pm 1$

<u>Д-во:</u> $\det A \cdot \det A^{-1} = \det(A \cdot A^{-1}) = \det E_n = 1 = \underline{\det A} \cdot \underline{\det A^T}$

$(\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$

2) A е ортог. $\Rightarrow A^{-1}$ ортог.

3) A, B - ортог $\Rightarrow A \cdot B$ - ортог.

<u>Деф.</u> $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$. Тогава φ е ортог $\overset{def.}{\Longleftrightarrow} \forall u, v \in V$

$\underline{(\varphi(u), \varphi(v)) = (u, v)}$

<u>Тв.</u> Матрицата на ортог. оп. в ортонормиран базис е ортогонална

<u>Тв.</u> Собствените стойности на ортог. оп. са ± 1

<u>Д-во:</u> $v \in V$, $\lambda \in F$: $\varphi(v) = \lambda v$

$(v, v) = (\underbrace{\varphi(v)}_{\lambda v}, \underbrace{\varphi(v)}_{\lambda v}) = (\lambda v, \lambda v) = \underline{\lambda^2 (v, v)}$

$(v, v) - \lambda^2 (v, v) = 0 \quad \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$\underbrace{(v, v)}_{\neq 0} (1 - \lambda^2) = 0$

$\square$

<u>Тв.</u> Собствените в-ри, които съответстват на различни собствени стойности са ортогонални помежду си

<u>Д-во:</u> $v, u \in V$, $\lambda_1, \lambda_2 \in F$ $\quad \left| \begin{array}{l} \varphi(v) = \lambda_1 v \\ \varphi(u) = \lambda_2 \cdot u \end{array} \right.$

$(\underbrace{\varphi(v)}_{\lambda_1 v}, \underbrace{\varphi(u)}_{\lambda_2 u}) = (v, u) \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 (v, u) = (v, u)$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 (v, u) - (v, u) = 0 \Rightarrow (v, u) \underbrace{(\lambda_1 \lambda_2 - 1)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow (v, u) = 0$

$\square$

Th: V - ЕП, φ - ортог. $\Rightarrow \exists$ базис на V, в който матр. на φ е клетъчно диагонална

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & D_k \end{bmatrix} \qquad D_i = 1 \text{ или } D_i = -1 \text{ или } D_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \neq k\pi$$

Симетрични оператори

Деф. $A \in M_n(\mathbb{R})$. A е симетрична $\overset{def}{\Longleftrightarrow} A^T = A$

Свойства

1) Образуват ЛП (м-вото от всички сим. матр.)
2) A^{-1} също е симетрична
3) A, B - сим., то $AB = BA$ и AB - сим.

$(AB)^T = B^T . A^T = B . A = \underline{BA}$

$(AB)^T = A^T . B^T = A . B = \underline{AB}$

Деф. $\varphi \in Hom\, V$. φ е симетричен оператор $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall u, v \in V \left((u, \varphi(v)) = (\varphi(u), v) \right)$

Тв. Матрицата на сим. φ е симетрична в ортонорм. базис

Тв. Характеристичните корени на φ са реални числа

Тв. Собствените вектори, които съответстват на различни собствени стойности на симетричен оператор са ортогонални

Д-во: $u, v \in V$, $\lambda_1, \lambda_2 \in F$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$(u, \underbrace{\varphi(v)}_{\lambda_2 v}) = (\underbrace{\varphi(u)}_{\lambda_1 u}, v) = \lambda_2 (u, v) = \lambda_1 (u, v) \Leftrightarrow \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} (u, v) = 0$$

$$\Rightarrow (u, v) = 0 \quad \square$$

① Нека $a = (-1, 0, 1, -1) \in \mathbb{R}^4$ $\quad \varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$\underline{\varphi(x) = -3x + (x, a) a}$ $\quad \forall x \in V$

а) Да се док. че φ е симетричен линеен оператор

$\underline{(\forall u, v \in V) \left((u, \varphi(v)) = (\varphi(u), v) \right)}$

1.1) $u, v \in V$ $\quad ?\ \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$

$\varphi(u+v) = -3(u+v) + (u+v, a) . a = -3u - 3v + (u, a) . a + (v, a) . a = \varphi(u) + \varphi(v)$ ✓

$= -3u + (u,a).a - 3v + (v,a).a = \varphi(u) + \varphi(v)$

1.2) $u \in V,\ \lambda \in \mathbb{F}$ $\quad \varphi(\lambda u) = -3(\lambda u) + (\lambda u, a).a =$

$= -3\lambda u + \lambda(u,a).a = \lambda(-3u + (u,a).a) = \lambda.\varphi(u)$ ✓

$\xRightarrow{1.1 \text{ и } 1.2} \varphi \in \mathrm{Hom} V$

1.3) $u, v \in V:$ $(u, \varphi(v)) = (u, -3v + (v,a).a) = \underline{-3(u,v) + \boxed{(v,a)}(u,a)}$ //

$(\varphi(u), v) = (-3u + (u,a)a, v) = \underline{-3(u,v) + (u,a)\boxed{(a,v)}}$

$\Longrightarrow \varphi$ е симетричен

б) Да се намерят собствените стойности на φ

$e_1 = (1,0,0,0)$

$e_2 = (0,1,0,0)$

$e_3 = (0,0,1,0)$

$e_4 = (0,0,0,1)$

$\varphi(x) = -3x + (x,a)a$

$a = (-1, 0, 1, -1)$

$\varphi(e_1) = -3e_1 + (e_1, a).a =$

$= -3(1,0,0,0) + ((1,0,0,0),(-1,0,1,-1))a =$

$= (-3,0,0,0) + (-1)a = (-3,0,0,0) + (1,0,-1,1) =$

$= \underline{(-2,0,-1,1)}$

$\varphi(e_2) = -3e_2 + (e_2,a).a = (0,-3,0,0) + 0a =$

$= \underline{(0,-3,0,0)}$

$\varphi(e_3) = -3e_3 + (e_3,a)a = (0,0,-3,0) + (-1,0,1,-1) =$

$= \underline{(-1,0,-2,-1)}$

$\varphi(e_4) = -3e_4 + (e_4,a)a = (0,0,0,-3) + (1,0,-1,1) =$

$= \underline{(1,0,-1,-2)}$

$$M_e(\varphi) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ - симетрична}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}}_{X} ; \quad \det(X - \lambda E) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+1}.\underline{0}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}.(-3-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}.\underline{0}\begin{vmatrix} \dots \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2+4}.0\begin{vmatrix} \dots \end{vmatrix} = (-3-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(-3-\lambda)\begin{vmatrix} \underline{-3-\lambda} & 0 & 3+\lambda \\ \dots & -2-\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(-3-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \dots \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 3+\lambda \\ 0 & -3-\lambda & -3-\lambda \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(\lambda+3)^2 \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1-\lambda \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{rrr} 1 & -1 & -2-\lambda \\ - \; 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & -1 & -1-\lambda \end{array}$$

$$= (3-\lambda)(\lambda+3)^2 \cdot (-1)^{3+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} -1 & -1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda+3)^2 \cdot (\cancel{-1}\cancel{+1}+\lambda) =$$

$$= \lambda(\lambda+3)^3 = 0 \; ; \; \lambda_1 = 0; \; \lambda_{2,3,4} = -3,$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$2R_4 + R_1$ | $R_4 - 2R_1$

$$\begin{array}{rrrr} 2 & 0 & -2 & -4 \\ + \; -2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} 1 & 0 & -1 & -2 \\ - \; 0 & 0 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}$$

$x_2 = 0$
$x_4 = -x_3$
$x_1 = 3x_3$
$x_3 = p$

Решения: $(3p, 0, p, -p)$

$p = 1 \Rightarrow \boxed{v_1 = (3, 0, 1, -1)}$

$\lambda_{2,3,4} = -3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_2 = p, \; x_3 = x_1 + x_4 \; ; \; x_1 = q \; ; \; x_4 = t$

Решения: $(q, p, q+t, t)$

1) $p = 0, q = 1, t = 0$; $v_2 = (1, 0, 1, 0)$;

2) $p = 1, q = 0, t = 0$; $v_3 = (0, 1, 0, 0)$

3) $p = 0, q = 0, t = 1$; $v_4 = (0, 0, 1, 1)$

в) Да се намерят ортонормирани базиси на $\underline{Ker\varphi}$ и $Im\varphi$

$\Rightarrow \boxed{v_1 = (3, 0, 1, -1)}$ – обр. базис на $Ker\varphi$, защото съответства на $\lambda = 0$ – собств. стойност и е едина

$v_2 = (1, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 1, 1)$ – обр. базис на $Im\varphi$

$v_2 = (1,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,1,1)$ - [illegible]

За v_1, $\|v_1\| = \sqrt{(v_1, v_1)} = \sqrt{3^2+0^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{11}$

$v_1' = \left(\frac{3}{\sqrt{11}}, 0, \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$ - базис на $Ker\,\varphi$, ортонорм.

v_4^* - по грам Шмит и го нормираме (и от също)