Упражнение №13:

Областта на Скот $\boldsymbol{\mathcal{F}_k^\perp} = (\mathcal{F}_k^\perp,\ \sqsubseteq,\ \Omega^{(k)})$

Основни сведения

Да изберем елемент $\perp \notin \mathbb{N}$ и да положим

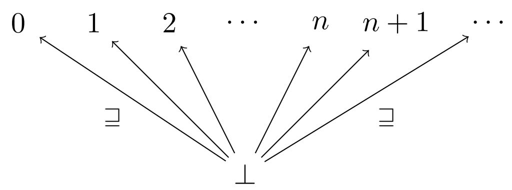
$$\mathbb{N}_\perp = \mathbb{N} \cup \{\perp\}.$$

Плоската наредба на $\mathbb{N}_\perp$ дефинираме посредством еквивалентността:

$$x \sqsubseteq y \iff x = \perp \ \vee \ x = y. \tag{1}$$

Ясно е, че $\perp \sqsubseteq x$ за всяко $x \in N_\perp$, т.е. $\perp$ е най-малкият елемент на $\mathbb{N}_\perp$. Образно казано, той е на дъното на $\mathbb{N}_\perp$, затова се нарича *bottom* елемент. Това ще е елементът, с който ще обозначаваме, че една функция няма стойност в дадена точка; например $f(5) = \perp$ ще означава, че f няма стойност в 5.

Ето как изглеждаше графиката на релацията $\sqsubseteq$ върху множеството $\mathbb{N}_\perp$ (без примките $n \sqsubseteq n$):



Да наблегнем отново на това, че релацията $\sqsubseteq$ няма нищо общо с числовото $\leq$. Две *числа* x и y са свързани с тази релация, т.е. $x \sqsubseteq y$, само когато $x = y$.

От лекциите знаем, че структурата $\boldsymbol{N_\perp} = (N_\perp, \sqsubseteq, \perp)$ е ОС; ще я наричаме *плоска област на Скот*. Точната горна граница на монотонно растящата редица $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq \dots$ в $N_\perp$ ще означаваме с

$$\bigsqcup_n x_n.$$

В декартовото произведение $\mathbb{N}_\perp^k = \underbrace{\mathbb{N}_\perp \times \dots \times \mathbb{N}_\perp}_{k}$ дефинираме *покомпонентната наредба*, индуцирана от плоската наредба в $\mathbb{N}_\perp$, по следния начин:

$$(x_1, \dots, x_k) \sqsubseteq (y_1, \dots, y_k) \ \stackrel{\text{деф}}{\iff}\ x_1 \sqsubseteq y_1 \ \& \ \dots \ \& \ x_k \sqsubseteq y_k.$$

Тази наредба в $\mathbb{N}^k_\perp$ ще отбелязваме със същия символ $\sqsubseteq$ и отново ще наричаме *плоска наредба.*

Ще пишем $\bar{x} \sqsubset \bar{y}$, за да означим, че $\bar{x} \sqsubseteq \bar{y}$ и $\bar{x} \neq \bar{y}$.

На лекции видяхме, че структурата

$$\boldsymbol{\mathbb{N}^k_\perp} = (\underbrace{\mathbb{N}_\perp \times \dots \times \mathbb{N}_\perp}_{k},\ \sqsubseteq,\ \underbrace{(\perp, \dots, \perp)}_{k}\ )$$

също е област на Скот. И нея ще наричаме *плоска област на Скот.*

Да напомним и дефиницията на *функционалната* област на Скот, породена от плоската ОС $\boldsymbol{\mathbb{N}^k_\perp}$:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}^\perp_k} = (\mathcal{F}^\perp_k,\ \sqsubseteq,\ \Omega^{(k)}).$$

Тази област е с домейн множеството $\mathcal{F}^\perp_k$ от всички *тотални* k-местни функции в $\mathbb{N}_\perp$:

$$\mathcal{F}^\perp_k = \{f |\ f\colon\ \mathbb{N}^k_\perp\ \to \mathbb{N}_\perp\}.$$

Означаваме я така по аналогия с областта на Скот на *частичните* функции $\boldsymbol{\mathcal{F}_k} = (\mathcal{F}_k,\ \subseteq,\ \emptyset^{(k)})$, в която работехме дотук.

Наредбата в $\mathcal{F}^\perp_k$ е *поточковата наредба*, индуцирана от плоската наредба в $\mathbb{N}_\perp$, по-точно:

$$f \sqsubseteq g \ \stackrel{\text{деф}}{\Longleftrightarrow}\ \forall x_1 \in \mathbb{N}_\perp \dots \forall x_k \in \mathbb{N}_\perp\ f(x_1, \dots, x_k) \sqsubseteq g(x_1, \dots, x_k). \qquad (2)$$

Наредбата $\sqsubseteq$ е пълна, т.е. всяка монотонно растяща редица $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq \dots$ в $\mathcal{F}^\perp_k$ има *точна горна граница* (*least upper bound* или *lub*). Тази граница ще означаваме с $\bigsqcup\limits_n f_n$. Очаквано, и тя се дефинира поточково:

$$\underbrace{(\bigsqcup_n f_n)(\bar{x})}_{lub \text{ в } \mathcal{F}^\perp_k} \ \stackrel{\text{деф}}{=}\ \underbrace{\bigsqcup_n f_n(\bar{x})}_{lub \text{ в } \mathbb{N}_\perp}. \qquad (3)$$

Най-малкият елемент на $\mathcal{F}^\perp_k$ — функцията $\Omega^{(k)}$ — дефинираме така:

$$\Omega^{(k)}(x_1, \dots, x_k) \stackrel{\text{деф}}{=} \perp$$

за всяка k-орка $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k_\perp$.

Функцията $\Omega^{(k)}$ съответства на никъде недефинираната функция $\emptyset^{(k)}$ при частичните функции, която беше такава, че

$$\neg!\emptyset^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$$

за всяка k-орка $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$.

Задача 1. Докажете, че за произволни функции $f, g \in \mathcal{F}_k^\perp$:

$$f \sqsubseteq g \iff \forall \bar{x} \in \mathbb{N}_\perp^k \ (f(\bar{x}) \neq \perp \implies f(\bar{x}) = g(\bar{x})).$$

Решение. Следва директно от дефиницията (1) на плоска наредба и това, че дизюнкцията $p \lor q$ е еквивалентна на $\neg p \implies q$:

$$f \sqsubseteq g \overset{(2)}{\iff} \forall \bar{x} \in \mathbb{N}_\perp^k \ (f(\bar{x}) \sqsubseteq g(\bar{x})) \overset{(1)}{\iff} \forall \bar{x} \in \mathbb{N}_\perp^k \ (f(\bar{x}) = \perp \lor f(\bar{x}) = g(\bar{x}))$$
$$\iff \forall \bar{x} \in \mathbb{N}_\perp^k \ (f(\bar{x}) \neq \perp \implies f(\bar{x}) = g(\bar{x})).$$

□

Обърнете внимание колко си приличат горната характеризация на $f \sqsubseteq g$ и дефиницията на релацията $\subseteq$ между частични функции:

$$f \subseteq g \iff \forall \bar{x} \in \mathbb{N}^k \ (!f(\bar{x}) \implies f(\bar{x}) \simeq g(\bar{x})).$$

Подобна аналогия забелязваме и между определението на точна горна граница $g = \bigcup_n f_n$ на монотонно растяща редица $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \dots$ в $\mathcal{F}_k$:

$$g(\bar{x}) \simeq y \iff \exists n \ f_n(\bar{x}) \simeq y$$

и следващото свойство на точната горна граница в $\mathcal{F}_k^\perp$:

Задача 2. Нека $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq \dots$ е монотонно растяща редица в $\mathcal{F}_k^\perp$ и $g = \bigsqcup\limits_n f_n$ е нейната точна горна граница. Докажете, че за всяка k-орка $\bar{x} \in \mathbb{N}_\perp^k$ и $y \in \mathbb{N}$ е изпълнено:

а) $g(\bar{x}) = \perp \iff \forall n \ f_n(\bar{x}) = \perp$;

б) $g(\bar{x}) = y \iff \exists n \ f_n(\bar{x}) = y$.

Решение. Нека $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq \dots$ е монотонно растяща. За произволно $\bar{x} \in \mathbb{N}_\perp^k$ и да означим $y_n \overset{\text{деф}}{=} f_n(\bar{x})$. От това, че редицата от функции е монотонно растяща в $\mathcal{F}_k^\perp$ следва, че и редицата от стойностите им ще е монотонно растяща в $\mathbb{N}_\perp$, т.е. ще имаме

$$y_0 \sqsubseteq y_1 \sqsubseteq y_2 \sqsubseteq \dots.$$

От основните свойства на плоската наредба от лекциите знаем, че всяка монотонно растяща редица в $\mathbb{N}_\perp$ изглежда по един от следните два начина:

– $\perp, \ \perp, \ \perp, \ \dots$ с граница $\perp$;

– $\underbrace{\perp, \dots \perp}_{n \geq 0}, y, \ y, \ \dots$ с граница $y \in \mathbb{N}$.

Сега вече условията от твърдението изглеждат съвсем очевидни. □

Да обобщим наблюдението от края на това доказателството:

Задача 3. Докажете, че всяка монотонно растяща редица в областта на Скот $(\mathbb{N}^k_\perp,\ \sqsubseteq,\ \underbrace{(\perp,\dots,\perp)}_{k})$ има краен брой различни елементи.

Решение. Ако $(x_1,\dots,x_k) \sqsubset (y_1,\dots,y_k)$, то за поне едно $i \in \{1,\dots,k\}$ ще е вярно, че $x_i \sqsubset y_i$. Това според дефиницията на плоска наредба (1) означава, че $x_i = \perp$, а $y_i \in \mathbb{N}$. Когато имаме монотонно растяща редица от k-орки, е ясно, че това може да се случи най-много k пъти и следователно различните елементи в редицата ще са най-много $k+1$.

Ето един пример за $k = 3$, който казва всичко:

$$(\perp,\perp,\perp)\ \sqsubset\ (\perp,\ 5,\perp)\ \sqsubset\ (\perp,5,3)\ \sqsubset\ (0,5,3).$$

□

Точни функции

Казваме, че функцията $f\colon\ \mathbb{N}^k_\perp \ \longrightarrow\ \mathbb{N}_\perp$ е *точна* (или *стриктна, strict*), ако за всяка k-орка $(x_1,\dots\ x_k) \in \mathbb{N}^k_\perp$ е изпълнено:

$$(\exists i\colon x_i = \perp) \implies f(x_1,\dots\ x_k) = \perp.$$

С други думи, една функция е точна, ако всеки път, когато някой от аргументите ѝ е $\perp$, стойността ѝ също е $\perp$.

На пръв поглед между една частична функция $f\colon\ \mathbb{N}^k \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\circ\ \ \mathbb{N}$ и една точна функция $f\colon\ \mathbb{N}^k_\perp \ \longrightarrow\ \mathbb{N}_\perp$ няма разлика, ако приемем, че условието $\neg!f(\bar{x})$ отговаря на $f(\bar{x}) = \perp$. Да не забравяме, обаче, че сред аргументите на $f\colon\ \mathbb{N}^k_\perp \ \longrightarrow\ \mathbb{N}_\perp$ може да има $\perp$, за разлика от аргументите на частичната функция $f\colon\ \mathbb{N}^k \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\circ\ \ \mathbb{N}$, които са само естествени числа.

Множеството на всички k-местни точни функции ще означаваме с $\mathcal{S}_k$:

$$\mathcal{S}_k\ =\ \{f \mid f\colon\ \mathbb{N}^k_\perp \ \longrightarrow\ \mathbb{N}_\perp\ \&\ f \text{ е точна}\}.$$

Частичните функции от $\mathcal{F}_k$ "потапяме" в множеството $\mathcal{S}_k \subseteq \mathcal{F}^\perp_k$, като на всяка функция $f \in \mathcal{F}_k$ съпоставяме следната точна функция:

$$f^*(\bar{x})\ =\ \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{ако } \bar{x} \in \mathbb{N}^k\ \&\ !f(\bar{x}) \\ \perp, & \text{иначе} \end{cases}$$

за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}^k_\perp$. Случаят "иначе" ще рече, че или сред елементите на k-орката $\bar{x}$ има $\perp$, или $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$, но $\neg!f(\bar{x})$.

Функцията f^* ще наричаме *естествено продължение* на f. Тя очевидно е точна функция.

Примери. Ето няколко примера за естествени продължения на функции и предикати:

а) Нека $f(x, y) = x+y$. Нейното естествено продължение f^* е функцията

$$f^*(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \ \& \ y \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \ \vee \ y = \perp. \end{cases}$$

б) Нека $x \ \mathtt{div} \ y$ е функцията целочислено деление

$$x \ \mathtt{div} \ y \simeq \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & \text{ако } y > 0 \\ \neg !, & \text{ако } y = 0. \end{cases}$$

Нейното естествено продължение $x \ \mathtt{div}^* y$ вече е тоталната функция

$$x \ \mathtt{div}^* y = \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \ \& \ y \in \mathbb{N}^+ \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \ \vee \ y = \perp \ \vee \ y = 0. \end{cases}$$

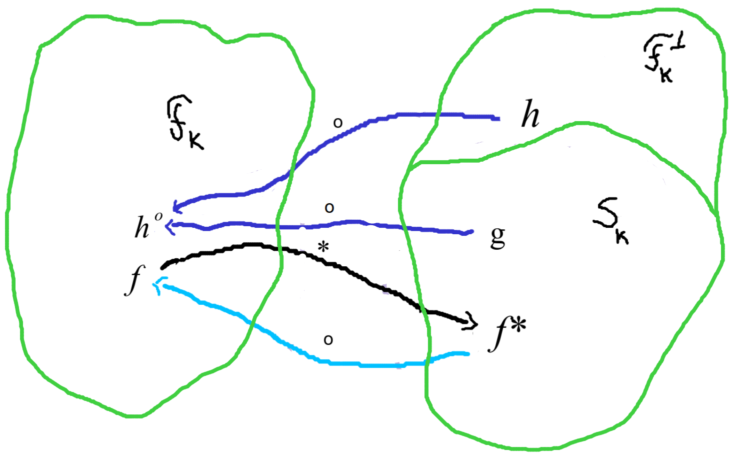
в) Да означим с E предиката "равенство". Неговото естествено продължение E^* има следната дефиниция:

$$E^*(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \ \& \ y \in \mathbb{N} \ \& \ x = y \\ 0, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \ \& \ y \in \mathbb{N} \ \& \ x \neq y \\ \perp, & x = \perp \ \vee \ y = \perp. \end{cases}$$

Да дефинираме и обратното изображение $^\circ$, което се прилага върху всички функции от $\mathcal{F}_k^\perp$ (не само върху точните). За всяка функция $f \in \mathcal{F}_k^\perp$ полагаме

$$f^\circ(\bar{x}) \simeq \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{ако } \ f(\bar{x}) \neq \perp \\ \neg !, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4}$$

за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$.



Задача 4. Докажете, че една функция от $\mathcal{F}_k^\perp$ е точна тогава и само тогава, когато се явява естествено продължение на някоя частична функция от $\mathcal{F}_k$.

Решение. Всяка функция, която е естествено продължение, е точна по дефиниция. Обратно, ако една функция $f \in \mathcal{F}_k^\perp$ е точна, то тя очевидно е естествено продължение на функцията $f^\circ \in \mathcal{F}_k$. $\square$

Задача 5. Докажете, че:

а) За всяка функция $f \in \mathcal{F}_k$ е вярно, че $(f^*)^\circ = f$.

б) За всяка *точна* функция от $\mathcal{F}_k^\perp$ е вярно, че $(f^\circ)^* = f$.

в) Да се даде пример за функция $f \in \mathcal{F}_k^\perp$, за която равенството $(f^\circ)^* = f$ вече не е в сила.

Решение. Подточки **а)** и **б)** са очевидни от дефинициите. $\smile$

в) Разгледайте например функцията $\lambda x.0$ от $\mathcal{F}_1^\perp$. $\square$

Монотонни функции в $\mathcal{F}_k^\perp$

Функцията $f: \mathbb{N}_\perp^k \longrightarrow \mathbb{N}_\perp$ наричаме *монотонна*, ако е изпълнено условието: за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}_\perp^k$ и $\bar{y} \in \mathbb{N}_\perp^k$:

$$\bar{x} \sqsubseteq \bar{y} \implies f(\bar{x}) \sqsubseteq f(\bar{y}).$$

Един първи пример за монотонни функции са точните функции:

Задача 6. Докажете, че всяка точна функция е монотонна.

Решение. Нека $f: \mathbb{N}_\perp^k \longrightarrow \mathbb{N}_\perp$ е точна функция. Да вземем произволни $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ и $\bar{y} = (y_1, \dots, y_k)$, такива че $\bar{x} \sqsubseteq \bar{y}$. Интересен е случаят, когато

$$(x_1, \dots, x_k) \sqsubset (y_1, \dots, y_k).$$

Тогава за поне едно $i \in \{1, \dots, k\}$ ще е изпълнено $x_i \sqsubset y_i$, което съгласно дефиницията на плоска наредба (1) означава, че $x_i = \perp$. Но f е точна и значи $f(\bar{x}) = \perp$, откъдето $f(\bar{x}) \sqsubseteq f(\bar{y})$. Следователно f е монотонна. $\square$

Множеството на всички k-местни монотонни функции ще означаваме с $\mathcal{M}_k$:

$$\mathcal{M}_k = \{f \mid f\colon \mathbb{N}_\perp^k \longrightarrow \mathbb{N}_\perp \ \&\ f \text{ е монотонна}\}.$$

От последната задача имаме, че $\mathcal{S}_k \subseteq \mathcal{M}_k$. Дали е строго включването? Да!

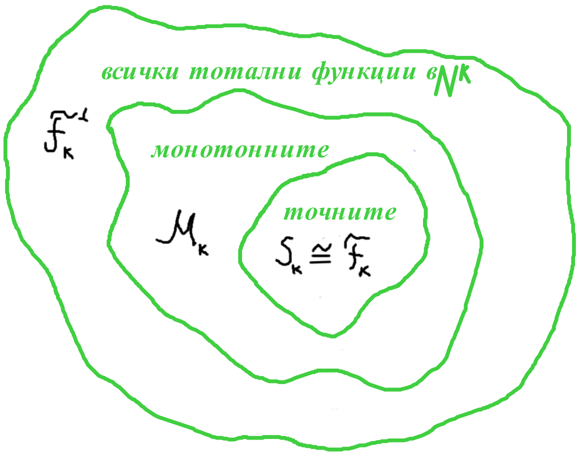
Задача 7. Докажете, че съществуват монотонни функции, които не са точни.

Решение. Нека $f\colon \mathbb{N}_\perp \longrightarrow \mathbb{N}_\perp$ е константната функция $\lambda x.c$, където $c \in \mathbb{N}$. Имаме $f(\perp) = c$ и следователно f не е точна. Тя, обаче, е монотонна, защото при $x \sqsubseteq y$ ще имаме:

$$f(x) \overset{\text{деф}}{=} c \overset{\text{деф}}{=} f(y), \quad \text{следователно} \quad f(x) \sqsubseteq f(y).$$

□

Ето как изглеждат класовете от функции в $N_\perp$, които въведохме дотук:



Следващата задача обобщава резултата от горния пример и описва всички монотонни функции на един аргумент.

Задача 8. Докажете, че функцията $f\colon \mathbb{N}_\perp \longrightarrow \mathbb{N}_\perp$ е монотонна тогава и само тогава, когато е точна или е константна.

Решение. $\Longleftarrow$ Следва от предишните две задачи.

$\Longrightarrow$ Нека f е едноместна монотонна функция. Имаме две възможности:

1 сл. $f(\perp) = \perp$ и в този случай f е точна.

2 сл. $f(\perp) = y \in \mathbb{N}$. Понеже за всяко $x \in \mathbb{N}_\perp$: $\perp \sqsubseteq x$, то от монотонността на f ще имаме

$$f(\perp) \sqsubseteq f(x), \quad \text{т.е.} \quad y \sqsubseteq f(x).$$

Но $y \in \mathbb{N}$ и тогава $y \sqsubseteq f(x)$ означава $y = f(x)$, като това е за всяко $x \in \mathbb{N}_\perp$. Следователно функцията f е константна. □

В горната задача беше важно, че f е едноместна функция. Ако функцията е на повече аргументи, това вече не е така.

Задача 9. Дайте пример за монотонна функция, която нито е точна, нито е константна.

Решение. Да разгледаме тази двуместна функция $f\colon \mathbb{N}_\perp^2 \longrightarrow \mathbb{N}_\perp$:

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} \perp, & \text{ако } x=\perp \\ 5, & \text{ако } x\neq\perp. \end{cases}$$

f не е точна, защото например $f(0,\perp)=5$. Очевидно тя не е и константна. Обаче f е монотонна: наистина, нека

$$(x,y) \;\sqsubset\; (x',y').$$

Разглеждаме поотделно двете възможности за x:

1 сл. $x=\perp$. Тук

$$f(\perp,y) \overset{\text{деф}}{=} \perp \;\sqsubseteq\; f(x',y').$$

2 сл. $x\neq\perp$. От строгото включване $(x,y) \;\sqsubset\; (x',y')$ следва, че непременно $y=\perp$. Пак от същото включване и това, че $x\in N$ ще имаме, че $x=x'$. Следователно

$$f(x,\perp) \overset{\text{деф}}{=} 5 \overset{\text{деф}}{=} f(x',y'), \quad \text{и значи} \quad f(x,y)\sqsubseteq f(x',y').$$

Така получихме, че f е монотонна. ☐

За една функция $f:\mathbb{N}_\perp^k \longrightarrow \mathbb{N}_\perp$ ще казваме, че е *монотонна по i-тия си аргумент*, ако за всички $x_1,\dots,x_i,\dots,x_k,x_i^{'}\in\mathbb{N}_\perp$ е изпълнено условието:

$$x_i\sqsubseteq x_i^{'} \quad\Longrightarrow\quad f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_k)\sqsubseteq f(x_1,\dots,x_i^{'},\dots,x_k).$$

Задача 10. Докажете, че функцията $f\colon \mathbb{N}_\perp^k \longrightarrow \mathbb{N}_\perp$ е монотонна тогава и само тогава, когато е монотонна по всеки от аргументите си.

Решение. Правата посока е ясна.

Нека сега, че f е монотонна по всеки от аргументите си. Да вземем произволни $\bar{x}=(x_1,\dots,x_k)$ и $\bar{y}=(y_1,\dots,y_k)$, такива че $(x_1,\dots,x_k)\sqsubseteq(y_1,\dots,y_k)$. Тогава и $(x_1,\dots,x_k)\sqsubseteq(y_1,x_2,\dots,x_k)$, откъдето поради монотонността на f по първия ѝ аргумент ще имаме, че

$$f(x_1,\dots,x_k)\sqsubseteq f(y_1,\dots,y_k).$$

Аналогично, от това че $(y_1,x_2,\dots,x_k)\sqsubseteq(y_1,y_2,x_3,\dots,x_k)$ и монотонността на f по втория аргумент ще имаме, че

$$f(y_1,x_2,\dots,x_k)\sqsubseteq f(y_1,y_2,x_3,\dots,x_k).$$

Повтаряме неколкократно това разсъждение, докато стигнем до последното включване $f(y_1,\dots,y_{k-1},x_k)\sqsubseteq f(y_1,\dots,y_k)$. Така получаваме

$$f(x_1,\dots,x_k)\sqsubseteq f(y_1,x_2,x_3,\dots,x_k)\sqsubseteq\;\dots\;\sqsubseteq f(y_1,\dots,y_k)$$

и значи общо $f(\bar{x})\sqsubseteq f(\bar{y})$. ☐