Най-малка и най-голяма стойност на функция

За функция $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ разгледахме въпроса за намиране на най-голяма и най-малка стойност на f. Теоремата на Вайерщрас ни дава достатъчно условие за достигане на най-голяма и най-малка стойност.

Th. (Вайерщрас). Ако f е ~~непрекъсната~~ дефинирана в краен затворен интервал $[a;b]$ и непрекъсната в него, то f достига най-голяма (НГС) и най-малка стойност (НМС).

Теоремата на Вайерщрас гарантира при дадените условия, че съществува $x_0 \in [a;b]$, т.е. $f(x_0) = \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$.

Ако $x_0 \in (a;b)$, то f е дефинирана в околност на x_0 и x_0 е локален максимум. Така x_0 е или локален максимум или съвпада с краищата на интервала $[a;b]$. По-нататък точките на локален максимум или анулират производната, или производна в тях не съществува.

Така за x_0 има три вида кандидати:
- краищата на интервала a и b
- корените на $f'(x) = 0$ в $(a;b)$
- точките в $(a;b)$, в които f' не съществува.

Така ако получим краен брой кандидати, пресмятаме стойностите на f във всеки от тях и $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ е най-голямата от намерените стойности, а $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ – най-малката от същите.

Теоремата на Вайерщрас важи и в повече измерения. Първо обаче трябва да изясним какъв е аналогa на затворен ограничен интервал в много измерения. За целта са ни необходими някои дефиниции:

Деф. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ наричаме отворено, ако заедно с всяка своя точка, съдържа и нейна околност, т.е. ако $x \in X$, то за някое $\varepsilon > 0$, всички точки на разстояние по-малко от ε от x също са в множеството X.

Деф. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ наричаме затворено, ако за всяка сходяща редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ от елементи от X, границата $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ също е в X, т.е.

ако $x_n \in X$ и $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, то $x_0 \in X$.

Деф. Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Контур на X наричаме точките от $\mathbb{R}^n$, за които има редици $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.че $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = x$, като за всяко n, $y_n \in X$, $z_n \notin X$, т.е.

една точка е контурна, ако можем да се приближаваме към нея както с точки от X, така и с точки извън X.

Деф. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ наричаме ограничено, ако можем да го заградим в кълбо с краен радиус, т.е.

X е ограничено, ако $\exists R$, т.че $\forall x \in X$, $\|x\| < R$.

Деф. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е компакт, ако е затворено и ограничено.

Th. (Вайерщрас) f е дефинирана в компакт и непрекъсната в него.
$\Rightarrow f$ достига най-голяма и най-малка стойност.

Заб. Убедете се, че отворените и затворените интервали в $\mathbb{R}^1$ са отворени и затворени множества съответно.

Ще покажем как ще прилагаме теоремата на Вайерщрас, а после ще разгледаме конкретни примери.

Да си представим, че търсим НГС и НМС на $f(x,y)$ в множеството
$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) \geq 0\}$ определено от функцията g.
f наричаме целева функция, а g – ограничение.
(може да имаме повече ограничения, но целевата функция е единствена).

За да приложим теоремата на Вайерщрас, трябва f да е непрекъсната, а X да е компакт. Това зависи от конкретните функции f и g.

Ще отбележим, че ако g е непрекъсната, то X е затворено:
Нека (x_n, y_n) е редица от точки от X с граница (x_0, y_0).
Искаме да покажем, че $(x_0, y_0) \in X$. По дефиницията на X, $g(x_n, y_n) \geq 0$ за всяко n. Тогава непрекъснатостта ни дава, че:

$$g(x_0, y_0) = g\left(\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)\right) = \lim_{n\to\infty} g(x_n, y_n) \geq 0$$

Последното равенство е дефиницията за непрекъснатост, а неравенството се дължи на лемата на полицаите.

Прилагането на Вайерщрас е важно, защото така гарантираме, че това което търсим съществува.

Така, ако докажем, че f и g са непрекъснати и още, че X е ограничено, то по Вайерщрас, f достига НГС и НМС в X, т.е.

$\exists\ (x_1, y_1) \in X, (x_2, y_2) \in X$, т.че

$$f(x_1, y_1) = \max_{(x,y)\in X} f(x,y)$$

$$f(x_2, y_2) = \min_{(x,y)\in X} f(x,y).$$

Ако $g(x_1, y_1) > 0$, то от непрекъснатост на g, (x_1, y_1) е вътрешна (*) и следователно е локален максимум. За локален максимум имаме необходимо условие $f'_x(x_1, y_1) = f'_y(x_1, y_1) = 0$. или някоя производна не съществува.

Ако $g(x_1, y_1) = 0$, то оттук изразяваме y_1 чрез x_1 или обратно и заместваме в f. Така от функция на 2 променливи, свеждаме до функция на един аргумент.

Така получаваме кандидати:

- вътрешни, в които всички частни производни се анулират
- вътрешни, в които някоя частна производна не съществува.
- контурни, които изследваме допълнително.

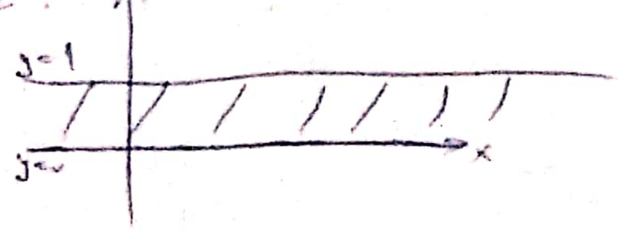
Ако получим краен брой кандидати, пресмятаме f във всяка точка и най-голямата от получените стойности е НГС на f в X, а най-малката от получените стойности е НМС на f в X.

(*) Вътрешна точка за дадено множество е точка, която е от множеството и не е контурна.

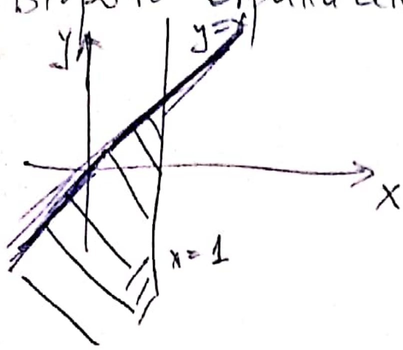
Зад1 Намерете най-голяма и най-малка стойност на $f(x,y) = x^3 + 3y^3 - x^2 - 4y$ в множеството $L \left| \begin{array}{l} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{array} \right.$

Реш. За функции на 2 променливи, множеството, определено от ограниченията можем да нарисуваме в $\mathbb{R}^2$:

Първото ограничение дава ивицата между $y=0$ и $y=1$



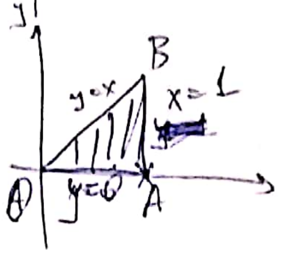
Второто ограничение:



$x<1$ ⇒ наляво сме от правата $x=1$

$y<x$ → под ъглополовящата на I квадрант.

Пресичайки двете ограничения, получаваме



– триъгълник.

ограничен и затворен, защото се задава с нестроги неравенства.

Функцията $f(x,y)$ е непрекъсната. По Вайерщрас НМС и НГС се достигат.

I. Вътрешни точки → локални екстремуми. f има частни производни по x и по y. → лок. екстремуми са в решенията на

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 3x^2 - 2x = 0 \\ f'_y(x,y) = 6y^2 - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(3x-2)=0 \\ (3y-2)(3y+2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \vee x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{2}{3} \vee y=-\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Получаваме $2.2=4$ точки. Ако $y=-\frac{2}{3}$, точката не е от множеството на допустимите точки. Ако $x=0$, то точката е контурна.

~~Така една вътрешна точка~~ $\boxed{f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)}$ също не е вътрешна, защото лежи на $x=y$.

(Дали действително е локален екстремум няма да проверяваме)

II Контурни точки. $L: \{0 \le y \le x \le 1$.

Контурни точки са тези, за които поне едно от неравенствата се достига като равенство. Графично, това са страните на триъгълника. Върховете на триъгълника са точките, в които две от неравенствата се достигат като равенства. Графично, лесно се съобразява, че това са $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$.

Контурът на L се състои от трите отсечки OA, AB и OB. Върху всяка от тях изразяваме $f(x,y)$ като функция на една променлива.

II.1) Отсечката OA: това са точките $(t,0)$, където $0 \le t \le 1$. Разглеждаме $g(t)=f(t,0)=t^3-t^2$ – непрекъсната функция в краен затворен интервал. Кандидати са краищата $t=0$, $t=1$ и корените на $g'(t)=3t^2-2t$ → $t=\frac{2}{3}$.

Така за f има точките $\boxed{(0,0),\ \left(\frac{2}{3},0\right) \text{ и } (1,0)}$

II.2) Отсечката AB се състои от точките $(1, t)$ за $t \in [0;1]$.

$h(t) = f(1,t) = 3t^3 - 4t$ – непрекъсната в $[0;1]$

$h'(t) = 9t^2 - 4 = (3t-2)(3t+2) \Rightarrow t=0,\ t=\frac{2}{3}$ или $t=1$ като кандидати.

За f това означава $\boxed{(1,0),\ (1, \tfrac{2}{3})\ \text{и}\ (1,1)}$

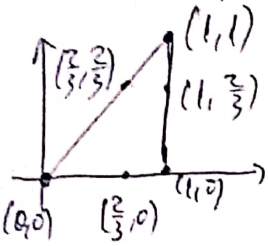
II.3) Отсечката $OB = \{(t,t) \mid t \in [0;1]\}$.

$s(t) = f(t,t) = 4t^3 - t^2 - 4t$. за $t \in [0;1]$

$s'(t) = 12t^2 - 2t - 4 = 2(6t^2 - t - 2)$, $t_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{12}$ → $\frac{2}{3} \in [0;1]$. → $-\frac{1}{2} \notin [0;1]$.

Кандидати са $t=0,\ t=\frac{2}{3}$ и $t=1$.

$\Rightarrow$ $(0,0)$, $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ и $(1,1)$ са кандидатите за f.



Върховете получихме от две места.
По всяка ~~отсечка~~ намерихме по още един кандидат.
Локални екстремуми в L няма.

По Вайерщрас, както НГС, така и НМС ще се достигнат в някоя от тези 6 точки. Остава да сметнем f във всяка от тях:

$f(0,0) = 0$

$f(\frac{2}{3}, 0) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$

$f(1,0) = 0$

$f(1, \frac{2}{3}) = 3 \cdot \frac{8}{27} - 4 \cdot \frac{4}{9} = \frac{24-48}{27} = -\frac{24}{27}$

$f(1,1) = -1 = -\frac{27}{27}$

$f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 4 \cdot \frac{8}{27} - \frac{4}{9} - 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{32-12-72}{27} = -\frac{52}{27}$.

$\Rightarrow$ НГС $= 0 = f(0,0) = f(1,0)$

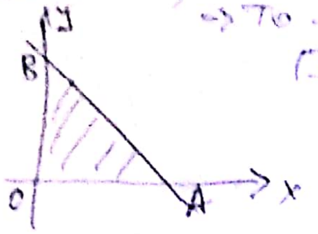
НМС $= -\frac{52}{27} = f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Зад 2. $g(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y \longrightarrow \max/\min$ – целева функция

$\begin{cases} x+y \le 3 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ → ограничения.

Да се чете: Намерете НМС и НГС на $g(x,y)$ при ограничения...

Реш. Допустимото множество е триъгълник с върхове $O(0,0)$, $B(0,3)$, $A(3,0)$
$\Rightarrow$ то е затворено и ограничено.
(Затвореност следва от нестрогите неравенства)
g - непрекъсната $\Rightarrow$ НМС и НГС се достигат



Кандидати за лок. екстремуми са решенията на:

$$\begin{cases} g'_x(x,y) = 2x-y-1=0 \\ g'_y(x,y) = 2y-x-1=0 \end{cases}$$

От първото изразяваме $x=\frac{y+1}{2}$ и заместваме във второто:

$$0 = 2y - \frac{y+1}{2} - 1 = \frac{4y-y-1-2}{2} = \frac{3y-3}{2} \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=\frac{y+1}{2}=1.$$

$(1,1)$ е наистина вътрешна точка. $\Rightarrow$ Кандидат за НМС/НГС.

По контурите: Те отново са 3 отсечки.

По OA: Разглеждаме $\varphi(t)=f(t,0)=t^2-t$ за $t\in[0;3]$.

$\varphi'(t)=2t-1 \Rightarrow t=1/2$ е корен на φ'.

$\Rightarrow$ Кандидати са $(0,0)$, $(\frac12,0)$ и $(3,0)$.

Краищата на отсечките винаги са кандидати. Затова ще се интересуваме от вътрешните точки.

По OB: Поради симетрия на x и y ще получим $(0,0)$, $(0,\frac12)$ и $(0,3)$.

По AB: Тук $|x+y=3,\ x\geq 0,\ y\geq 0$

Изразяваме $y=3-x$, $x\geq 0$, $y=3-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 3$.

$\Rightarrow y=3-x$ при условие $0\leq x\leq 3$.

$$\varphi(t)=f(t,3-t)=t^2+(3-t)^2-t(3-t)-t-(3-t)=$$
$$=t^2+9-6t+t^2-3t+t^2-\cancel{t}-3+\cancel{t}=3t^2-9t+6,\ t\in[0;3].$$

$\varphi'(t)=6t^2-9=3(2t-3) \Rightarrow t=3/2 \Rightarrow x=y=3/2$.

Окончателно $(1,1)$ - лок. екстр.

$(0,0)$, $(3,0)$, $(0,3)$ - върхове на триъгълника

$(\frac12,0)$, $(0,\frac12)$ и $(3/2, 3/2)$ - по отсечките.

$f(1,1)=\boxed{-1}$, $f(0,0)=0$, $f(3,0)=f(0,3)=\boxed{6}$; $f(\frac12,0)=f(0,\frac12)=-\frac14$,

$f(\frac32,\frac32)=(\frac32)^2-2\cdot\frac32=\frac94-\frac{12}{4}=-\frac34$.

$\Rightarrow$ НМС $=-1=f(1,1)$; НГС $=6=f(3,0)=f(0,3)$.

Зад. 3. $x^2+2y^2+3z^2 \to max/min$
$x^2+y^2+z^2 \le 100$

Реш. $x^2+2y^2+3z^2$ е непрекъсната

$x^2+y^2+z^2 \le 100$ е кълбо с радиус 10, заедно с контура
$\Rightarrow$ З отворено и ограничено. $\Rightarrow$ По Вайерщрас, НГС и НМС се достигат

Локални екстремуми: $2x=4y=6z=0 \Rightarrow \boxed{x=y=z=0}$.

По контура, $x^2+y^2+z^2=100$. Изразяваме $x^2=\underline{100-y^2-z^2 \ge 0}$.
$\Downarrow$
В целевата функция заместваме: $y^2+z^2 \le 100$.

$h(y,z)=100-y^2-z^2+2y^2+3z^2=100+y^2+2z^2$
при условие $y^2+z^2 \le 100$

Свалихме броят променливи от 3 на 2. Продължаваме нататък:

Лок. екстр. на h: $\frac{\partial h}{\partial y}(y,z)=\frac{\partial h}{\partial z}(y,z)=0 \Rightarrow 2y=4z=0$
$\Rightarrow y=z=0$ и тогава $x^2=100 \Rightarrow x=\pm 10 \Rightarrow \boxed{(\pm 10,0,0)}$

По контура на h, $y^2+z^2=100$, и изразяваме $y^2=100-z^2 \ge 0$
$\to z^2 \le 100$,
$l(z)=100+(100-z^2)+2z^2=200+z^2$
$-10 \le z \le 10$
при условие $-10 \le z \le 10$.

Лок. екстр. при $z=0$. Тогава $y^2=100 \Rightarrow y=\pm 10$ и $x=0 \Rightarrow \boxed{(0,\pm 10,0)}$

По краищата, $z=\pm 10$. Тогава $y=0$ и $x=0$ $\Rightarrow \boxed{(0,0,\pm 10)}$.

$f(0,0,0)=0$; $f(\pm 10,0,0)=100$, $f(0,\pm 10,0)=200$, $f(0,0,\pm 10)=300$.
$\Rightarrow$ НМС $=0=f(0,0,0)$; НГС $=300=f(0,0,\pm 10)$.

Може да се реши по друг начин задачата.
По Вайерщрас НМС и НГС се достигат.
При $x^2+y^2+z^2 \le 100$ имаме:
$x^2+2y^2+3z^2 \ge 0$ като сума на квадрати $\Rightarrow$ НМС е поне 0.
От друга страна 0 се достига като $f(0,0,0)$ $\Rightarrow$ НМС $=0$.
$x^2+2y^2+3z^2 \le 3x^2+3y^2+3z^2=3(x^2+y^2+z^2) \le 3.100=300$.
$\Rightarrow$ НГС е най-много 300, като 300 се достига като $f(0,0,\pm 10)$.
$\Rightarrow$ НМС $=0$, НГС $=300$.

* Това по същество е налучкване на оптималните точки.
и доказателства, че наистина са такива.

Зад. 4. $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y \to$ НГС/НМС

$x^2+y^2\le 25$

Реш. По Вайерщрас НМС и НГС се достигат

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x-12=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y+16=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-8 \end{cases}, \text{ но } 6^2+(-8)^2=100>25$$

$\Rightarrow$ Няма лок. екстремуми в кръга $x^2+y^2\le 25$.

Остава да разгледаме контура $x^2+y^2=25 \Rightarrow y^2=25-x^2\ge 0$

$y=\pm\sqrt{25-x^2}$, при условие $-5\le x\le 5$.

В зависимост от знака на y получаваме две функции:

$g_1(x)=f(x,\sqrt{25-x^2}) = 25-12x+16\sqrt{25-x^2}$

$g_2(x)=f(x,-\sqrt{25-x^2}) = 25-12x-16\sqrt{25-x^2}$.

функциите g_1 и g_2 са дефинирани в $[-5;5]$ и диференцируеми в $(-5;5)$. В краищата: $g_1(5)=g_2(5)=-35$

$g_1(-5)=g_2(-5)=85$.

За $-5<x<5$, $\sqrt{25-x^2}>0$ и тогава

$g_1(x)=25-12x+16\sqrt{25-x^2} > 25-12x-16\sqrt{25-x^2}=g_2(x)$.

$\Rightarrow$ От g_1 ще получим кандидат за максимум, от g_2 – за минимум

лок. екстремум на g_1: (от локален $\Rightarrow -5<x<5 \Rightarrow$ производна съществува)

$$g_1'(x)=-12+16\cdot\frac{(-\cancel{2}x)}{\cancel{2}\sqrt{25-x^2}} = -4\left(3+\frac{4x}{\sqrt{25-x^2}}\right)=0$$

$\Rightarrow 4x=-3\sqrt{25-x^2}$, $4x\le 0 \Rightarrow \boxed{x\le 0}$. Вдигаме на квадрат

$16x^2=9(25-x^2)=225-9x^2 \Rightarrow 25x^2=225$, $x^2=9$ и от $x\le 0$

$\Rightarrow x=-3$. За g_1, $y=\sqrt{25-x^2} \Rightarrow y=4$. Така кандидат е $(-3;4)$

За g_2 разсъждаваме аналогично:

$\to$ разликата между g_1 и g_2.

$$g_2'(x)=-12-16\cdot\frac{(-2x)}{2\sqrt{25-x^2}} = -4\left(3-\frac{4x}{\sqrt{25-x^2}}\right)=0$$

$\Rightarrow 4x=3\sqrt{25-x^2}\ge 0 \Rightarrow \boxed{x\ge 0}$

$16x^2=9(25-x^2)=9.25-9x^2 \Rightarrow 25x^2=9.25$.

Тогава $x=3$, $y=-\sqrt{25-x^2}=-4$.

$$\left.\begin{aligned} f(-3,4)&=25+36+64=125 \\ f(3,-4)&=25-36-64=-75 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \text{НГС}&=125=f(-3,4) \\ \text{НМС}&=-75=f(3,-4). \end{aligned}$$