$V$ − $+, \cdot$ ; $\cap K$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$

$X \subseteq V$

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in F;\ x_1, \dots, x_n \in X \right\}$$

$X = [x_i \mid i \in I]$

$$B = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \;\middle|\; \text{Само краен брой } \lambda_i \text{ са } \neq 0 \right\}$$

$C = \cap U$

$X \subseteq U \leq V$

$A = B = C = l(X) < V$

$X$ − пораждащо за $l(X)$

$U \leq V$ $\qquad \ell(U) = U$

$U = \ell(X)$

Интересуваме се минималните пораждащи множ. $X$

($e_1 \dots e_n$ - базис $\qquad e_1 = 1.e_1 + 0.e_2 + \dots + 0.e_n$)

$\sum_{i \in I} \boxed{\lambda_i} x_i = \theta$ — възм. е само когато $\forall \lambda_i = 0$ — ЛН

— $\exists \{\lambda_i \mid i \in I\}$ с поне 1 $\lambda \neq 0$ — ЛЗ

предполагаме, че само краен брой $\lambda_i \neq 0$

Интересуваме се максималните ЛН подмнож.

- Ако $U = \ell(X)$, то $U = \ell(X \cup Y)$
- Ако $X$ - ЛН, то $\forall Y \subseteq X$ е ЛН

$\{e_i \mid i \in I\}$ – базис на $V$

- – пораждащо (⟺ ∀ в-р е ЛК на базисните)
- – ЛН (⟺ ако в-р е ЛК, то представ. е единствено)

Базисът е минимално пораждащо мн-во и максимално ЛН

## Линейни изображения

$U, V$ – ЛП над $F$ (еднакво и за [illegible])

Опр. $\varphi: U \to V$ е ЛИ, ако

1) $\forall u_1, u_2 \in U \quad \varphi(u_1 \underset{U}{+} u_2) = \varphi(u_1) \underset{V}{+} \varphi(u_2)$

2) $\forall u \in U, \forall \lambda \in F \quad \varphi(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot \varphi(u)$

Ако $\varphi$ е и биекция, $\varphi$ е изоморфизъм (ИЗМ)

С $Hom(U,V)$ означаваме множ. от $\forall$ ЛИ $\varphi: U \to V$; $Hom(V)$ $\underbrace{\varphi: V \to V \text{ - ЛИ}}_{\text{линейни оператори (ЛО)}}$

<u>Тв.</u> $\varphi \in Hom(U,V) \iff$

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in F$ и $\forall u_1, u_2 \in U$

$$\varphi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 \varphi(u_1) + \lambda_2 \varphi(u_2)$$

$\iff \forall k, \forall \lambda_1 \ldots \lambda_k \in F, \forall u_1 \ldots u_k \in U$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi(u_i)$$

$\iff \forall \lambda \in F, \forall u_1, u_2 \in U: \varphi(\lambda u_1 + u_2) = \lambda \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$

Тв (Св-ва / Сл. от деф.) $\varphi \in Hom(U, V)$

1) $\varphi(\theta_U) = \theta_V$

2) $\forall u \in U \quad \varphi(-u) = -\varphi(u)$

3) $u_1, \ldots, u_n \in U$ – ЛЗ $\Rightarrow \varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n) \in V$ ЛЗ

Заб. $\theta = 0 \cdot u$ ; $-u = (-1)u$

Пр. 1) $\mathbb{O} \in Hom(U, V) \quad \forall u \in U \quad \mathbb{O}(u) = \theta_V$

$$\mathbb{O} : U \longrightarrow V$$
$$u \longmapsto \theta_V$$

2) $\varepsilon \in \mathrm{Hom}(V)$ $\quad \forall v \in V \quad \varepsilon(v) = id_V(v) = v$

$$\varepsilon : V \to V$$
$$v \mapsto v$$

<u>Пр.</u> $M_2(F) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in F \right\}$

$$F^4 = \{ (a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in F \}$$

$$\varphi : M_2(F) \longrightarrow F^4$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (a, b, c, d)$$

доказать

$\dfrac{\text{ЛИ}}{\text{ИМ}}$

$$M_2(F) \cong F^4$$

Зад. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ относно базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ на $M_2(F)$ има коорд. $(a, b, c, d)$

Пр. (проекция) $\varphi: F^n \longrightarrow F^m$, $n > m$

$(a_1, \dots, a_n) \longmapsto (a_1, \dots, a_m)$ сюрективно ЛИ

Пр. (влагане) $\varphi: F^n \longrightarrow F^m$, $n < m$

$(a_1, \dots, a_n) \longmapsto (a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0)$ инективно ЛИ

$\underline{\text{Пр}}$ $\varphi \in Hom(F)$ $\quad$ ($\dim_F F = 1$; базис на $F$ е $1$ (конст.))

$\varphi: F \to F$ - ЛИ; $\forall f \in F$ $\quad \varphi(f) = \varphi(f \cdot 1) = f \cdot \underline{\varphi(1)}$

ЛП ← $F$ → поле $\quad$ пр.

$a := \varphi(1) \to \varphi(x) = ax$

!!! в у-ще $\varphi(x) = ax + b$ - линейна функция

$\underline{\text{Пр}}$ $\varphi \in Hom(F^n, F)$

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$

стандартен базис на $F^n$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in F^n \to x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i)$$

за $i = 1, \dots, n$ $\quad a_i := \varphi(e_i)$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad \rightsquigarrow \quad \varphi : F^n \longrightarrow F$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

<u>Зад.</u> Може да се провери, че

$\forall (a_1, \dots, a_n) \in F^n$ $\quad \varphi : F^n \longrightarrow F$ е ЛИ
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

<u>Пр.</u> $pr_i : F^n \longrightarrow F$ $\quad$ за $i = 1, \dots, n$ е ЛИ
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i$$

II пр. $V = F[x]$

$D : F[x] \longrightarrow F[x]$ (оператор на диференциране)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} (i a_i) x^{i-1}$$

Зад. Дефинираме $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)' = \sum_{i=1}^{n} (i a_i) x^{i-1}$ и

доказваме, че $\underbrace{(f+g)' = f' + g', \ (\lambda f)' = \lambda f'}_{\text{ЛИ}}$ )

$(fg)' = f'g + fg'$

П4 $I : F[x] \to F[x]$ оператор на интегриране

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \longmapsto \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{i+1} a_i\right) x^{i+1}$$

<u>Заб.</u> $D \circ I = \mathcal{E}$ , $I \circ D \neq \mathcal{E}$ $\big((I \circ D)(1) = I(D(1)) =$
$= I(0) = 0\big)$

<u>Основна теорема за ЛИ</u>

$U, V$ - ЛП над $F$ ; $U$ - КМЛП ; $\dim U = n$

$e_1, \dots, e_n$ - базис на $U$ ; $v_1, \dots, v_n \in V$ (произволни)

Тогава $\exists!$ ЛИ $\varphi \in \mathrm{Hom}(U, V) : \forall i = 1, \dots, n$ $\varphi(e_i) = v_i$

Д-во

(единственост) Нека $\varphi \in Hom(U,V) : \forall i \ \varphi(e_i) = v_i$

$u \in U \quad \exists! \lambda_i \in F : u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \Rightarrow \varphi$ е еднозначно определено, т.е. е единствено

(съществуване) Ще д-м, че горното изобр. удовлет. усл. на теор.

Разгл. $\varphi : U \to V$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Ясно е, че $\forall i = 1, \dots, n \quad \varphi(e_i) = v_i$

Остава да проверим, че $\varphi$ е линейно

1) $u_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, $u_2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i \in U$

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) v_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$$

2) $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in U$, $\lambda \in F$

$$\varphi(\lambda u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i) v_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i =$$

$$= \lambda \varphi(u)$$

**Зад.** ЛИ е известно и еднозначно определено, ако знаем образите на базисните вектори

**Сл.** $e_1, \dots, e_n \in U$ са ЛН и $v_1, \dots, v_n \in V$ произволни
КМЛП

$\Rightarrow \exists\, \varphi \in Hom(U, V) : \forall i = 1, \dots, n \quad \varphi(e_i) = v_i$

**Д-во** Доп. $e_1, \dots, e_n$ до базис $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m$ на $U$

и избираме произволни $v_{n+1}, \dots, v_m \in V$

Тогава $\exists!\, \varphi \in Hom(U, V) : \forall i = 1, \dots, \underline{m} \quad \varphi(e_i) = v_i$

което удовлетв. Сл.

**Сл.** $U$ – КМЛП; $W \leq U$; $\psi \in \mathrm{Hom}(W, V)$

$\Rightarrow \exists\, \varphi \in \mathrm{Hom}(U, V) : \varphi|_W = \psi$

**Д-во** $e_1, \ldots, e_n$ – база на $W$ | и предишното **Сл.**

$i = 1, \ldots, n \quad v_i := \psi(e_i)$

$\varphi|_W = \psi$ следва от единствеността на ЛИ $: W \to V$, $e_i \mapsto v_i$

$(v_i = \psi(e_i) = \varphi(e_i) = \varphi|_W(e_i))$

---

**Сл.** $U = U_1 \oplus U_2$ – КМЛП; $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}(U_1, V)$, $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(U_2, V)$ $\Rightarrow \exists!\, \varphi \in \mathrm{Hom}(U, V) :$ $\varphi|_{U_1} = \varphi_1$, $\varphi|_{U_2} = \varphi_2$

**Тв** $\varphi \in Hom(U,V)$ - ИМ $\Rightarrow \varphi^{-1} \in Hom(V,U)$ - ИМ

**Д-во** $\varphi$ - биекция $\rightarrow \varphi^{-1}$ е биекция от $V$ в $U$

Остава да пров., че $\varphi^{-1}$ е ЛИ

1) $v_1, v_2 \in V$ $\quad \exists(!)\, u_1, u_2 :$ $\left| \begin{array}{ll} \varphi(u_1) = v_1 & (u_1 = \varphi^{-1}(v_1)) \\ \varphi(u_2) = v_2 & (u_2 = \varphi^{-1}(v_2)) \end{array} \right.$

знаем, че

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$$

$$\varphi^{-1}(v_1 + v_2) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1 + u_2)) =$$

$$= u_1 + u_2 = \varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2)$$

2) $v \in V$, $\lambda \in F$ $\quad u = \varphi^{-1}(v)$, $v = \varphi(u)$

$\varphi^{-1}(\lambda v) = \varphi^{-1}(\lambda \varphi(u)) = \varphi^{-1}(\varphi(\lambda u)) = \lambda u = \lambda \varphi^{-1}(v)$

<u>Сл.</u> $\varphi \in Hom(U, V)$ изм; $u_1, \dots, u_n \in U$. Тогда

$u_1, \dots, u_n$ ЛЗ $\Leftrightarrow$ $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)$ ЛЗ

<u>Д-во</u> $\varphi^{-1}$ — ЛО и $\varphi^{-1}(\varphi(u_i)) = u_i$

<u>Сл.</u> $\varphi \in Hom(U, V)$ изм; $u_1, \dots, u_n \in U$. Тогда

$u_1, \dots, u_n$ ЛН $\Leftrightarrow$ $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)$ ЛН

<u>Сл.</u> $\varphi \in Hom(U, V)$ изм; $u_1, \dots, u_n \in U$. Тогда

$u_1, \dots, u_n$ — базис $U$ $\Leftrightarrow$ $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)$ — базис на $V$