Уравнения с разделящи се променливи

Текстовете са от: Т. Генчев, Обикновени диференциални уравнения, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 1991 г.

Диференциалните уравнения от вида

$$y' = f(x)g(y), \tag{1}$$

където f и g са дадени непрекъснати функции, се наричат уравнения с разделящи се променливи. Те са най-прости и най-важни измежду уравненията, които се интегрират с квадратури.

Следващата проста теорема е основна.

Теорема 1. *Да означим с D правоъгълника*

$$D: \; a < x < b, \; c < y < d$$

и да разгледаме уравнението (1), където $f \in C(a, b)$, $g \in C(c, d)$ и освен това $g(y) \neq 0$ за всяко $y \in (c, d)$.

В такъв случай, каквато и да бъде точката $(x_0, y_0) \in D$, през нея минава единствено решение на (1).

Нека $y = \varphi(x)$ е решение на задачата на Коши

$$y' = f(x)g(y), \tag{1}$$

$$y(x_0) = x_0 \tag{2}$$

в някаква околност Δ: $|x - x_0| < \delta$ на точката x_0. Да вземем произволна точка $x \in \Delta$, $x \neq x_0$, и да интегрираме тъждеството

$$\frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} = f(t),\ t \in \Delta, \tag{3}$$

в интервала с краища x_0 и x.* (Равенство (3) е равносилно с (2), защото по условие $g(y) \neq 0$ в $(c,\ d)$.) По този начин получаваме

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)dt}{g(\varphi(t))} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt. \tag{4}$$

Като направим смяната $\lambda = \varphi(t)$ в първия интеграл, намираме

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{d\lambda}{g(\lambda)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \tag{5}$$

защото $\varphi(x_0) = y_0$. По-нататък, въвеждайки функциите

$$G(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{y_0}^{y} \frac{d\lambda}{g(\lambda)} \quad \text{и} \quad F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \tag{6}$$

представяме (5) във вида

$$G(\varphi(x)) = F(x), \tag{7}$$

откъдето определяме неизвестната функция φ.

G е дефинирана и диференцируема в интервала (c, d). Нещо повече, намираме

$$G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0 \tag{8}$$

и заключаваме, че G е монотонна и следователно обратима. Нека G^{-1} е нейната обратна функция. В такъв случай от (7) получаваме

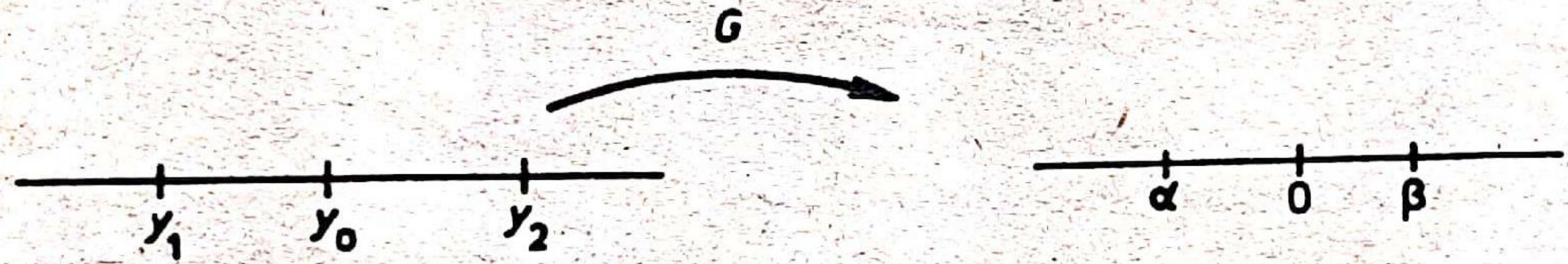
$$\varphi(x) = G^{-1}(F(x)), \tag{9}$$

=> ??

Сега вече можем да се заемем с по-сложния въпрос за съществуване. Имайки предвид (9), естествено е да проверим дали търсеното решение наистина не може да се дефинира чрез това равенство. Нашата цел ще бъде постигната , ако установим, че поне в достатъчно малка околност на x_0 функцията φ, въведена чрез равенството $\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} G^{-1}(F(x))$, има смисъл и удовлетворява диференциалното уравнение (1) и началното условие $\varphi(x_0) = y_0$. Ето защо трябва да изследваме G^{-1}.

Най-напред ще установим, че G^{-1} е дефинирана и диференцируема в някаква околност на точката нула. За тази цел да вземем две числа y_1 и y_2 такива, че $c < y_1 < y_0 < y_2 < d$. Понеже $G(y_0) = 0$ и G е монотонна и непрекъсната (вж. (8)), функционалните стойности на функцията $y \longrightarrow G(y)$ изпълват някакъв интервал (α, β), който съдържа началото. Например, ако $g(y) > 0$ за $y \in (c, d)$, то G е монотонно растяща и можем да вземем $\alpha = G(y_1)$, $\beta = G(y_2)$; ако пък $g(y) < 0$, то G е монотонно намаляваща и трябва да положим

$$\alpha = G(y_2), \quad \beta = G(y_1).$$



И така и в двата случая G^{-1} се оказва дефинирана в някакъв интервал (α, β), $\alpha < 0 < \beta$. Нещо повече, според теоремата за диференциране на обратните функции G^{-1} има и производна, защото G' съществува и е различна от нула.

След като установихме тези факти, сме близо до целта. Да вземем $\delta > 0$ толкова малко, че интервалът Δ: $|x - x_0| < \delta$ да се съдържа в (a, b) и за $x \in \Delta$ да имаме $F(x) \in (\alpha, \beta)$. Това е възможно, защото $F(x_0) = 0$ и F е непрекъсната. Оказа се, че за $x \in \Delta$ функцията (9) е дефинирана и диференцируема, защото F и G^{-1} са диференцируеми. За да се убедим, че φ удовлетворява диференциалното уравнение, да представим (9) във вида

$$G(\varphi(x)) = F(x) \tag{10}$$

и да диференцираме. Получаваме

$$G(\varphi(x)) = F(x) \tag{10}$$

и да диференцираме. Получаваме

$$G'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(x),$$

т.е.

$$\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x), \quad \text{или} \quad \varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x)),$$

което искахме да докажем. За да се убедим, че $\varphi(x_0) = y_0$, най-просто е да поставим в (10) $x = x_0$. Получаваме

$$G(\varphi(x_0)) = F(x_0) = 0,$$

т.е. $\varphi(x_0) = y_0$, понеже $G(y_0) = 0$ и G е обратима.

С това теоремата е доказана.

че теоремата има

З а б е л е ж к а 1. Обърнете внимание, че теоремата има локален характер. Твърди се, че решението, което минава през дадена точка $(x_0, y_0) \in D$, е дефинирано само в достатъчно малка околност на x_0, а не в целия интервал (a, b).