Тема 18: Формулирайте и док. теоремата за приближено решаване на нелинейни уравнения по метода на свиващите се изображения

Теорема: Нека φ е непр. изобр. на $[a,b]$ в себе си, което удовлетв. условието на Липшиц с конс < 1, тогава:

а) Ур-то $x = \varphi(x)$ има ! решение ξ в $[a,b]$

б) $\forall$ начално приближение $x_0 \in [a,b]$, редицата: $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ е добре дефинирана и клони към корена ξ

При това е изпълнена оценката:

$$① \quad |x_n - \xi| \leq q^n (b-a)$$

док.

а) ($\exists$) Да разгл. $g(x) = x - \varphi(x)$ От непр. на $\varphi \to g(x)$ е непр в $[a,b]$

имаме: $g(a) = a - \varphi(a) \leq 0$, тъй като $\varphi: [a;b] \to [a;b] \to \varphi(a) \geq a$

$g(b) = b - \varphi(b) \geq 0$

Ако $g(a) = 0$ и $g(b) = 0$, то $\xi = a$; $\xi = b$

иначе $g(a)g(b) < 0 \Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$ $g(\xi) = 0 \Rightarrow \xi = \varphi(\xi)$ □

(!) Доп, че $\exists$ $\xi_1 \neq \xi_2$ $\in [a,b]$

$\varphi(\xi_1) = \xi_1$ $\quad \varphi(\xi_2) = \xi_2$, то:

$$0 < (\xi_1 - \xi_2) \overset{доп.}{=} \varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2) \overset{Липшиц}{\leq} q(\xi_1 - \xi_2) \overset{(q<1)}{\leq} \xi_1 - \xi_2 \ ↯ □$$

б) От $x_0 \in [a,b]$ и $\varphi \in [a,b] \to x_1 = \varphi(x_0) \in [a;b]$, по индукция док $\forall x_n \in [a,b]$
$x_n = \varphi(x_{n-1})$

Остава да док $x_n \to \xi$

Пр. на грешката:

$$|x_n - \xi| \leq |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(\xi)| \leq q|x_{n-1} - \xi| \leq q^2|x_{n-1} - \xi| \leq \ldots$$
$$q^n|x_0 - \xi| \leq q^n(b-a)$$