1. За задачата на ЛО

$$(L)\quad \begin{cases} \max\ z_L(x) = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 = -3 \\ x_1 - x_3 \leq 1 \\ x_1 + 4x_3 \leq 4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

а) напишете съответната канонична задача (K);

б) намерете множеството от оптимални решения и оптималната стойност на целевата функция на задачите (K) и (L) като използвате таблична форма на симплекс метода.

Решение: а) $x_2 = x_2^+ - x_2^-$

$$(K)\quad \begin{cases} \min\ z_K(x) = -3x_1 + x_2^+ - x_2^- - 2x_3 \\ -2x_1 + x_2^+ - x_2^- = 3 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_3 + x_5 = 4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2^+ \geqslant 0,\ x_2^- \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

б) (K) е в базисен вид спрямо

начален базис: $\{x_2^+, x_4, x_5\}$

X_B	C_B	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
		-3	1	-1	-2	0	0	
x_2^+	1	-2	1	-1	0	0	0	3
x_4	0	1	0	0	-1	1	0	1
x_5	0	1	0	0	4	0	1	4
$\bar{c}$		-1	0	0	-2	0	0	-3
x_2^+	1	0	1	-1	-2	2	0	5
x_1	-3	1	0	0	-1	1	0	1
x_5	0	0	0	0	5	-1	1	3
$\bar{c}$		0	0	0	-3	1	0	-2
x_2^+	1	0	1	-1	0	$8/5$	$2/5$	$31/5$
x_1	-3	1	0	0	0	$4/5$	$1/5$	$8/5$
x_3	-2	0	0	0	1	$-1/5$	$1/5$	$3/5$
$\bar{c}$		0	0	0	0	$2/5$	$3/5$	$-1/5$

1ва СТ

$\min\left\{\frac{1}{1}, \frac{4}{1}\right\} = 1$

x_1 влиза
x_4 излиза

2ра СТ

x_3 влиза $\min\left\{\frac{3}{5}\right\}$
x_5 излиза

3та СТ, Всички относителни оценки са неотрицателни => оптимално бдр на (K)

x_K^*

Оптимална ст-т на цел. ф-ия на (K) е $z_K^* = z_K(x_K^*) = 1/5$

Оптимално бдр на (K) е $x_K^*\left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0, 0\right)$.
$\quad x_1 \quad x_2^+ \quad x_2^- \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$

Други решения на (K): от $\bar{c}_{x_2^-} = 0$ имаме неогр. ръб с напр. $x_K^* \xrightarrow{d_K^*}$

$d_K^* = (0,1,1,0,0,0)$.

Решенията на (K) са всички точки x_t^* от вида $x_t^* = x_K^* + t d_K^*, t \geq 0$

или решенията са лъч:

$x_t^* = \left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0, 0\right) + t\left(0,1,1,0,0,0\right) = \left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}+t, t, \frac{3}{5}, 0, 0\right)$ за $t \geq 0$

Оптимално бдр на (L) е $x_L^*\left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}, \frac{3}{5}\right)$, опт. ст-т на цел. ф-ия на (L) е $z_L^* = z_L(x_L^*) = -1/5$.

Всички решения на (L): $x_L^* = \left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}+t-t, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}, \frac{3}{5}\right)$

т.е. решението на (L) е единствено. ∎

$\bullet\, x_L^*$

2. За задачата (L):

в) напишете двойнствената задача (DL);

г) като използвате симплексните таблици от подточка б), посочете едно оптимално решение на (DL) и намерете оптималната стойност на целевата ѝ функция.

Решение:

в)

$$(DL)\quad \begin{cases} \min\ -3\pi_1 + \pi_2 + 4\pi_3 \\ 2\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \geq 3 \\ -\pi_1 = -1 \\ -\pi_2 + 4\pi_3 \geq 2 \\ \pi_2 \geq 0,\ \pi_3 \geq 0 \end{cases}$$

г) Двойнствената на (K) е:

$$(DK)\quad \begin{cases} \max\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \\ -2y_1 + y_2 + y_3 \leq -3 \\ y_1 \leq 1 \\ -y_1 \leq -1 \\ -y_2 + 4y_3 \leq -2 \\ y_2 \leq 0 \\ y_3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (DK)\quad \begin{cases} \max\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \\ -2y_1 + y_2 + y_3 \leq -3 \\ y_1 = 1 \\ -y_2 + 4y_3 \leq -2 \\ y_2 \leq 0,\ y_3 \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Връзката между променливите на (DL) и (DK) е

$$(\#)\quad (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (y_1, -y_2, -y_3)$$

От последната СТ за решение на (DK) имаме

$$y^* = c_B^T B^{-1} = [1, -3, -2]\begin{bmatrix} 1 & 8/5 & 2/5 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & -1/5 & 1/5 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[1, \frac{8}{5} - \frac{12}{5} + \frac{2}{5}, \frac{2}{5} - \frac{3}{5} - \frac{2}{5}\right] = \left[1, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right].$$

От връзката (#) за решение на (DL) имаме

$$\pi^* = \left[1, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right].$$

Оптим. ст-т на цел. ф-ия на (DL) е:

$$-3.1 + \frac{2}{5} + 4.\frac{3}{5} = -3 + \frac{2}{5} + \frac{12}{5} = \frac{14}{5} - 3 = -\frac{1}{5}.$$

Работили сме вярно, т.к тя е = на z_L^*.