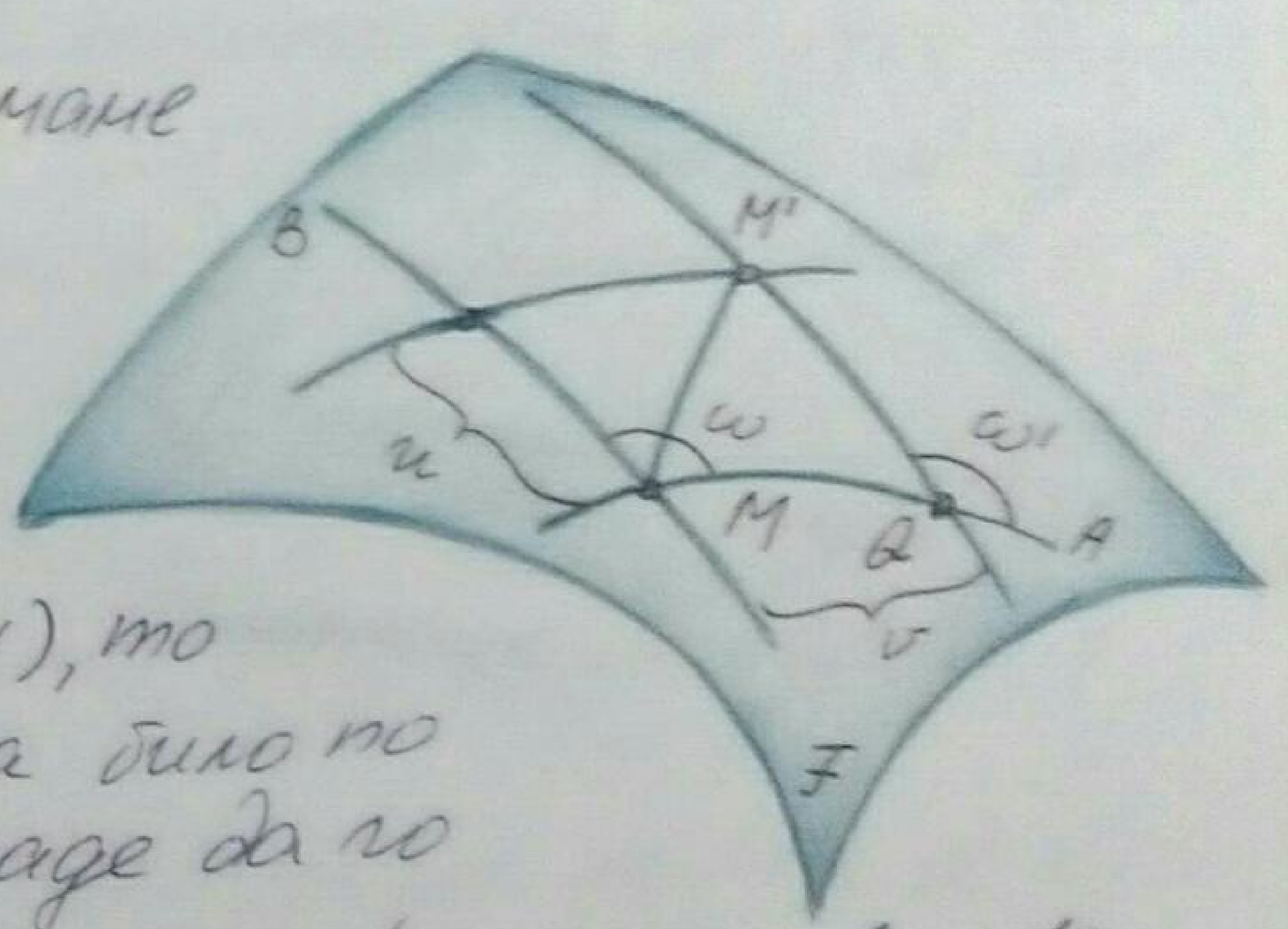
Първа основна форма. Дължина на дъга от линия...

За разстоянието между две точки $M(x,y)$ и $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ в равнина отнесена спрямо декартова[1] к. с-ма имаме

$$MM'^2 = \Delta x^2 + 2\cos\omega \Delta x \Delta y + \Delta y^2,$$

където ω - ъгълът между полож-те посоки на осите.



Ако $M(u,v)$ и $M'(u,v) \in F$, $F: \vec{r} = \vec{r}(u,v)$, то и да измерваме $|MM'|$ било по права било по най-краткия път няма да ни се удаде да го изразим чрез Δu и Δv с толкова проста формула. Ако M и M' считаме за безкр. близки, то главната част на разстоянието $|MM'|$ се изразява с формула, сходна с горната и представлява нейно обобщение.

Нека т. $M(u,v)$ е фиксирана, а т. M' клони към M по произволна крива от F. През M построяваме координатните линии – MA (u-линия) и MB (v-линия), ω - ъгълът между тях.

– имаме $\sin\omega \neq 0$

1) $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$, $|\vec{e_i}| = 1$, $\measuredangle \vec{e_1}\vec{e_2} = \omega$

През M' построяваме v-линия и нека Q е пресечната ѝ точка с MA. При това $\measuredangle\omega'$ при Q ще е еквивалентен на $\measuredangle\omega' - \omega' \approx \omega$ тъй като при $M \to M'$ $\measuredangle\omega' \to \measuredangle\omega$

За праволинейния $\Delta MQM'$ имаме, че външният ъгъл ω'' при Q, образуван от секущите MQ и $M'Q$: $\omega'' \approx \omega'$. Това е така, защото тези секущи сключват безкр. малки ъгли с допирателните в т. Q, а и мярката на $\measuredangle\omega'$ е крайна величина.

В съотношението $MM^2 = MQ^2 + 2MQ.QM'\cos\omega'' + QM'^2$ (1), разглеждано като еквивалентност заменяме отделните събираеми вдясно с еквивалентни величини.

Означаваме с r и $\tilde{r}$ съотв. радиус векторите на M и Q и пред вид, че MQ се мени само по u, а QM' - само по v, имаме

$$MQ^2 = \Delta r^2 = r_u d_u^2$$

$$QM'^2 = \Delta\tilde{r}^2 \approx \tilde{r}_v^2 dv^2 \approx r_v^2 d_v^2$$

$$MQ.QM'.\cos\omega'' \approx \sqrt{r_u^2}\, du \sqrt{r_v^2}\, d_v . \cos\omega \approx r_u r_v\, du\, dv.$$

$\Rightarrow$ в (1) имаме
$$\widetilde{MM'}^2 = r_u^2 du^2 + 2 r_u r_v\, d_u d_v + r_v^2 d_v^2. \qquad (2)$$

Аналитично (2) може да се получи лесно. Имаме ③

$$\overset{\frown}{MM'}^2 = \Delta r^2 \approx dr^2 \approx (r_u du + r_v dv)^2 \approx r_u^2 du^2 + 2 r_u r_v du dv + r_v^2 dv^2.$$

Геометричното извеждане на (2) е полезно, тъй като при него се изяснява геометричния смисъл на участващите в (2) величини.

Ако с s означим дъгата, по която се движи M' стремейки се към M, то $\overset{\frown}{MM'}^2 \approx ds^2$ и $ds^2 = dr^2$. Следователно (2) приема вида

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \qquad (3)$$

където $E = r_u^2$, $r_u r_v = F$, r_v^2 са така наречените гаусови коефициенти. Величината ds^2, определена с (3) се нарича линеен елемент на повърхнината. Дясната част на (3) представлява хомогенен полином (форма) на du, dv от втора степен и се нарича първа гаусова квадратична диференциална форма или първа основна форма. Коефициентите E, F, G бидейки функции на u, v са постоянни величини (независещи от du, dv) в дадена точка $M(u, v)$

④

Геометричен смисъл на E, F, G

Нека ds_u и ds_v са диференциалите на дъгите съотв. на u- и v-линиите през Q. Тогава $ds_u \approx MQ$, $ds_v \approx QM'$. От по-горе:

$$ds_u^2 = E\,du^2\ ;\ E = \left(\frac{ds_u}{du}\right)^2\ ,\ ds_v^2 = G\,dv^2\ ;\ G = \left(\frac{ds_v}{dv}\right)^2,$$

т.е. E е квадратът на производната на дъга на u-линията по нейния параметър, а G - квадратът на производната на дъга от v-линията по v.

Накрая

$$ds_u ds_v \cos\omega = F\,du\,dv\ ;\ F = \frac{ds_u}{du}\cdot\frac{ds_v}{dv}\cos\omega \quad \text{или}$$

$$F = \sqrt{EG}\,\cos\omega . \qquad (4)$$

Така че при дадени скорости на движение по параметричните линии F е пропорционален на косинус от ъгъла между тях.

Тъй като $r_u \neq \vec{0}$ и $r_u^2 = \left(\frac{ds_u}{du}\right)^2 > 0$, $r_v \neq \vec{0}$ и $r_v = \left(\frac{ds_v}{dv}\right)^2$, то

$$E(u,v) > 0 \qquad G(u,v) > 0 \qquad \forall u, v$$

Що се отнася до F от (4) имаме $F>0$ при $\measuredangle\omega$ - остър, $F<0$ при ω - тъп и $F=0$ при ω - прав. Ако координатните линии се пресичат навсякъде под прав ъгъл, то $F\equiv 0$, и обратно, ако $F\equiv 0$, то координатната мрежа е ортогонална. (5)

Дискриминантата на първата основна форма - $EG-F^2$ е винаги положителна:

$$EG-F^2 = r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2 = (r_u \times r_v)^2 > 0 \qquad (5)$$

<u>Геометричен смисъл</u>. Нека σ е лицето на $\Delta MQM'$ =>

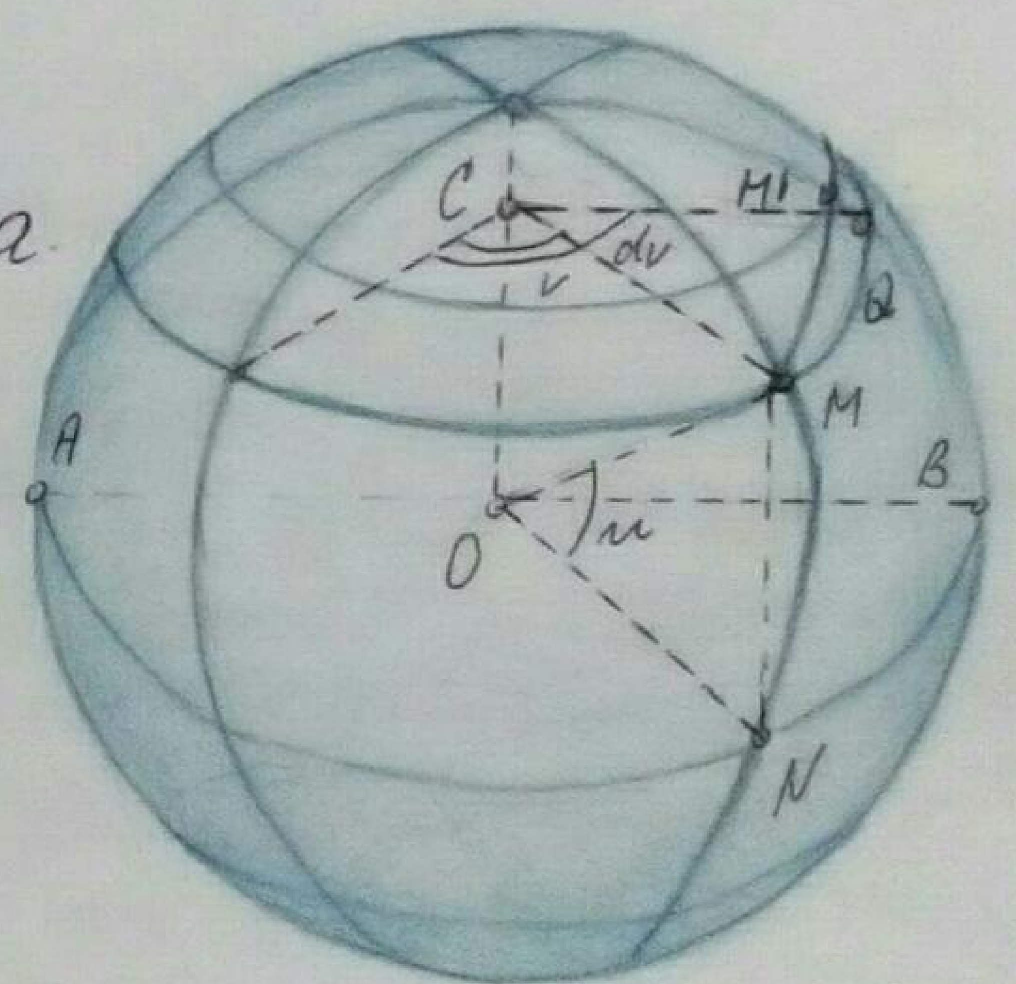
$$\sigma^2 = \frac{1}{4} MQ^2 . QM'^2 \sin^2\omega = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MQ} \times \overrightarrow{QM'})^2.$$

$\overrightarrow{MQ} \approx r_u du$, $\overrightarrow{QM} \approx r_v dv$ и $\measuredangle\omega \neq 0$ $(\measuredangle\omega = \measuredangle(r_u, r_v))$ =>

$$\sigma^2 \approx (r_u \times r_v)^2 \left(\frac{1}{2} du dv\right)^2 \text{ или от (5) } \sigma^2 \approx (EG-F^2)\tilde{\sigma}^2,$$

където $\tilde{\sigma}$ е лицето на правоъгълен триъгълник с катети du, dv. Така че $EG-F^2$ е границата, към която клони отношението на квадрата на лицето на праволинейния триъгълник MQM' към квадрата на лицето на правоъгълния триъгълник, чиито катети са нарастванията на координатите u, v, които съответстват на страните MQ и $M'Q$.

Ако на u-линия параметърът u е равен на дъгата ѝ s_u, то (от по-горе) $E = 1$ като, ако $s_u = u$ за всички u-линии, то $E \equiv 1$; ако $s_u = u$ само за една u-линия, да кажем за $v = v_0$, то $E(u, v_0) = 1$ за всички стойности на u. Обратно, ако $E = 1$ (тъждествено или при $v = v_0$), то дъгата s_u на u-линията е равна на параметъра (за всички u-линии или по линията $v = v_0$) с точност до събираемо. Аналогично отношението $G = 1$ означава, че по v-линия дъгата ѝ е равна на параметъра v.



Пример 1 Означаваме с u и v съответно ширината и дължината на сфера с радиус a. Да намерим линейния елемент на сферата.

През т. M построяваме паралела MQ, а през друга т. M' - меридиана $M'Q$.
В триъгълника MQM' имаме

$$MQ \approx CM\,dv \approx a\cos u\,dv$$

$$M'Q = d(BQ) = d(au) = a\,du$$

От $\measuredangle Q = 90^\circ$ имаме $MM'^2 \approx MQ^2 + M'Q^2$. Следователно

$$ds^2 = a^2 du^2 + a^2 \cos^2 u\, dv^2$$

$\Rightarrow \quad E = a^2,\ F = 0,\ G = a^2\cos^2 u \quad$ и $\quad W = \sqrt{EG - F^2} = a^2 \cos u$

- тук пишем $a^2\cos u$, а не $-a^2\cos u$, тъй като ширината u се мени от -90° до 90°, а $W > 0$.

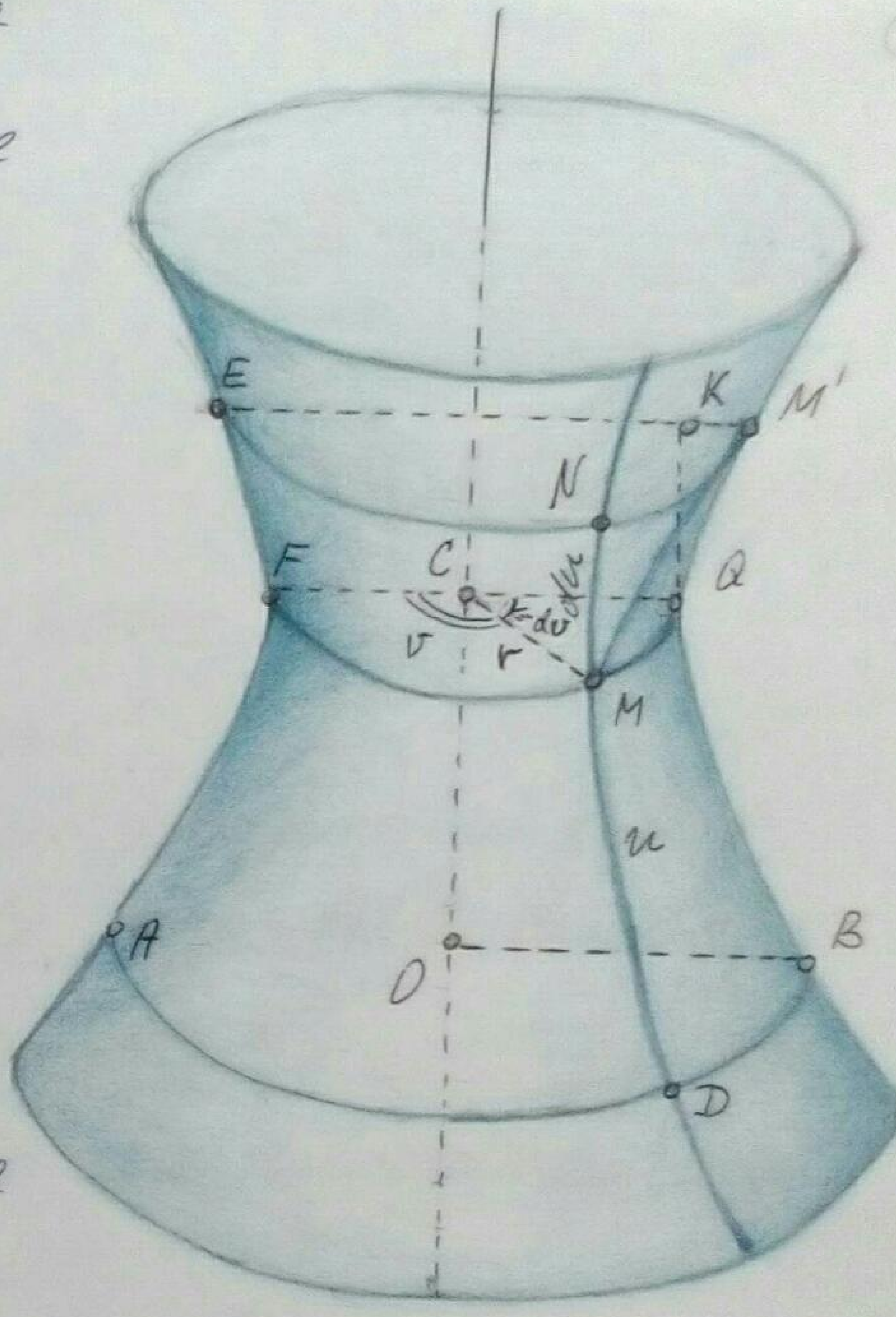
Същият резултат получаваме аналитично от уравнението на сферата

$$x = a\cos u \cos v,\quad y = a\cos u \sin v,\quad z = a\sin u.$$

Имаме $ds^2 = dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2[(\sin u \cos v\, du - \cos u \sin v\, dv)^2 + (-\sin u \sin v\, du + \cos u \cos v\, dv)^2 + \cos^2 u\, du^2]$.

<u>Забележка</u>. Получаваме, че E, G и W са положителни освен при $u = \pm 90^\circ$, когато $G = 0$ и $W = 0$. По-горе доказахме, че тези величини не могат да са равни на нула. Това противоречие се обяснява с това, че координатната ни мрежа не удовлетворява условието никои две линии от едно семейство да нямат обща точка. А именно - за полюсите на сферата ($u = \pm 90^\circ$), където това условие е нарушено формулите за G и W не са верни. Тук v-линиите (паралелите) се израждат в точка, така че векторът на скоростта $\vec{r}_v$ се изражда в $\vec{0}$ (v-линиите имат две общи т-ки - полюсите - там не може да се определи еднозначно дължина.

Пример 2 Линеен елемент на ротационна повърхнина S



1.) Да отнесем S спрямо криволинейните координати u и v – „ширина" и „дължина". Приемаме AB за начален паралел, а AE – за начален меридиан. Имаме

$u = DM$, $v = \angle FCM$; $r = CM = \varphi(u)$,

$QM' \approx du$; $MQ \approx r\,dv$.

Както в пример 1, намираме

$$ds^2 \approx QM'^2 + MQ^2 \qquad (6)$$

т.е.

$$ds^2 = du^2 + (\varphi(u))^2 dv^2. \qquad (7)$$

Тук $E = 1$, което следва от това, че за параметър u е приета дъгата на u-линията. Това, че $F = 0$ следва от ортогоналността на параметричната мрежа.

Формулата (7) може да се получи аналитично от уравнението на ротационна повърхнина

$$S \begin{cases} x = r(u)\cos v \\ y = r(u)\sin v \\ z = \int_0^u \sqrt{du^2 - (dr(u))^2}. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$

$$= (\cos v\, dr - r\sin v\, dr)^2 + (\sin v\, dr + r\cos v\, dv)^2 + du^2 - dr^2 = du^2 + r^2(u)\, dv^2$$

Така за катеноида ($r = \sqrt{b^2 + u^2}$) имаме

$$ds^2 = du^2 + (b^2 + u^2)\, dv^2.$$

2.) Отнасяме S спрямо криволинейни координати r и v.

Имаме $OC = z = f(z)$, $QK \approx dz$, $KM' \approx dr$, $MQ \approx r\,dv$, откъдето

$\Rightarrow$ в (6) $$ds^2 = (1 + (f'(r))^2)\, dr^2 + r^2 dv^2.$$

Горната формула се получава аналитично от уравнението на S $\{x = r\cos v,\ y = r\sin v,\ z = f(r)\}$

Например за ротационния параболоид $z = f(r) = \frac{r^2}{2p}$ имаме

$$ds^2 = \left(1 + \frac{r^2}{p^2}\right) dr^2 + r^2 dv^2.$$