# ЗАДАЧИ ПО АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

## V ЧАСТ: Уравнения на права в равнината.

Всички задачи от тази част са зададени спрямо ОКС *K = Oxy* в равнината.

1 зад. Дадени са точките : $A(5,1), B(3,3)$ и $C(-1,5)$. Да се намерят:

a) Уравнения на симетралите на страните *AB* и *AC* на триъгълник *ABC*;
b) Координатите на центъра на описаната около триъгълник *ABC* окръжност ( пресечната точка на симетралите);
c) Дължината на радиуса на описаната около триъгълник *ABC* окръжност (разстоянието от центъра до произволен връх на триъгълника).

2 зад. Дадени са правите: $a: 3x - 2y + 1 = 0, b: x - y + 1 = 0$ и $m_B: 2x - y - 1 = 0$. Нека правите $a$ и $b$ съдържат съответно страните *BC* и *AC* на триъгълник *ABC*, а правата $m_B$ съдържа медианата му през върха *B*. Да се намерят координатите на върховете и лицето на триъгълник *ABC*.

3 зад. Дадени са т. *A(2,-2)* и т. *B(4,2).*

a) Намерете т. *C* от правата $x - y = 0$ такава, че *⊿ABC* да бъде правоъгълен с прав ъгъл при върха *C*;

b) Намерете уравнения на страните на *⊿ABC* за получената т*. C* в подточка а). Кои от страните са успоредни на координатните оси?

4 зад. Дадени са точките : $A(1,2), B(-2,1)$ и $C(-1,-2)$. Да се намерят:

a) Уравнения на правите, които съдържат средните отсечки на триъгълник *ABC*;
b) Уравнения на височините на триъгълник *ABC* ;
*c)* Дължината на медианата $AA_1$ на триъгълник *ABC* .

5 зад. В успоредника *ABCD* са дадени уравненията на две от страните му: *AB : 2x + y − 7 = 0* и *AD : x − 2y + 4 = 0*, както и пресечната точка на диагоналите му: *M(1, 0)*. Намерете уравненията на другите две страни.

6 зад. Даден е успоредник *ABCD* с върхове *A(2, 1), B(−1, 0)* и пресечна точка на диагоналите

*Q(1, 1).* Намерете координатите на върховете *C, D* и медицентъра *G* на триъгилника *ABQ*, уравненията на страните на успоредника, както и лицето на *ABCD*.

7 зад. Дадени са правите: $g: 2x - 3y + 1 = 0, a: x + 5y + 7 = 0$ и точката $P(2, 6)$. Светлинен лъч $l$ минава през точката $P$, отразява се от правата $g$ и отразеният лъч $l'$ става успореден на правата $a$. Да се намерят уравнения на правите, съдържащи лъчите $l$ и $l'$.

8 зад. Нека *A(1,7)* е връх на *ΔABC*. Ако правите $p: 2x + 3y - 10 = 0$ и $q: \begin{cases} x = -3 + 2s \\ y = s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$ са симетрали съответно на страните AB и AC, намерете координатите на върховете *B* и *C* и лицето на триъгълника.

9 зад. Дадени са правите: $b_A: 4x - 3y + 2 = 0, h_A: x + 3y + 8 = 0$ и точката $B(-3, 5)$. Да се намерят координатите на върховете *A* и *C* на триъгълник *ABC*, ако правите $b_A$ и $h_A$ съдържат съответно вътрешната ъглополовяща и височината през върха А на триъгълника.

10 зад. Дадени са правите: $g: 2x - y - 5 = 0$ и $b: 3x - y - 1 = 0$. Да се намери уравнение на правата $b'$, ортогонално симетрична на правата $b$ относно правата $g$.

## VI ЧАСТ: Уравнения на права и равнина в пространството

Всички задачи от тази част са зададени спрямо ОКС *K = Oxyz* в тримерно пространство.

1 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през точките *M*, *N* и *P*, ако:

$M(-1,0,1), N(0,-1,1), P(2,3,3)$.

2 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през точката *P* и правата $g$, ако:

$$P(-2,-1,2), \quad g: \begin{cases} x = 4 + s \\ y = 3 + s \\ z = 2 + s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

3 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през пресичащите се прави $a$ и $b$, ако:

$$a: \begin{cases} x = -2 + s \\ y = 2 + s \\ z = 1 - s \end{cases}, s \in \mathbb{R}, \quad b: \begin{cases} x = 0 + 2p \\ y = 4 + 2p \\ z = 4 + 3p \end{cases}, p \in \mathbb{R}.$$

4 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава правата $a$ и е успоредна на правата $b$, ако:

$$a: \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 2 - s \\ z = 1 + s \end{cases}, s \in \mathbb{R}, \quad b: \begin{cases} x = 5 + 2p \\ y = 4 + 3p \\ z = 3 - 3p \end{cases}, p \in \mathbb{R}.$$

5 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през правата $g$ и е перпендикулярна на равнината $\beta$, ако:

$$g: \begin{cases} x = 4 + s \\ y = 3 + s \\ z = 2 + s \end{cases}, s \in \mathbb{R}, \quad \beta: x + y - 2z + 2 = 0.$$

6 зад. Да се намерят координатни параметрични уравнения на правата $g$, която е зададена като пресечница на две равнини:

$$g: \begin{cases} 2x + y + z - 7 = 0 \\ x - y + 2z - 5 = 0 \end{cases}.$$

7 зад. Дадена е точка *A(1, 2, 3)*. Да се намерят уравненията на:

a) Равнините през т. *A*, успоредни съответно на координатните равнини *Oxy*, *Oxz* и *Oyz*;
b) Равнините през т. *A*, минаващи съответно през координатните оси *Ox, Oy* и *Oz*;
c) Правите през т. *A*, успоредни съответно на *Ox, Oy* и *Oz*;
d) Правите през т. *A*, перпендикулярни съответно на *Oxy, Oxz* и *Oyz*;
e) Правата през т. *A* и координатното начало.

8 зад. Дадени са точките *M(1,2,1), N(1,0,1)*, правите

$$a: \begin{cases} x = 1 + 4p \\ y = -2 + 3p \\ z = p \end{cases}, p \in \mathbb{R},$$

$$b: \begin{cases} x = -1 + 2s \\ y = 3 + 4s \\ z = 3s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

и равнината $\alpha: 2x + y - 2z - 1 = 0$. Намерете:

a) Правата *l*, минаваща през т. *M* и т. *N*;

b) Правата $m$, минаваща през т. $M$ и перпендикулярна на равнината $\alpha$;
c) Равнина $\beta$, съдържаща т. $M$ и успоредна на правите $a$ и $b$;
d) Равнина $\gamma$, минаваща през т. $N$ и успоредна на равнината $\alpha$;
e) Равнина $\delta$, съдържаща т. $N$, успоредна на $b$ и перпендикулярна на равнината $\alpha$;
f) Разстоянието от т. $M$ до равнината $\alpha$ ;
g) Точката $M'$ – ортогонално симетрична на $M$ относно правата a.

9 зад. Дадени са точката $M(-1, 1, 2)$ и правата $a: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$.

a) Да се намерят координатни параметрични уравнения на правата $g$, която е успоредна на правата $a$ и минава през точката $M$;
b) Да се намери разстоянието от точката $M$ до правата $a$;
c) Да се намерят координатите на точката $M'$, ортогонално симетрична на точката $M$ относно правата $a$.

10 зад. Дадени са точките $A(3, 4, 0)$ и $B(3, 3, -2)$, и равнината $\beta: x + 2y - z + 1 = 0$. Светлинен лъч минава през точката $A$, отразява се от равнината $\beta$ и отразеният лъч минава през точката $B$. Да се намерят уравнения на правите, съдържащи падащия и отразения лъчи.

11 зад. Дадени са равнината $\alpha: x - 2y + 5z - 2 = 0$ и правата $b: \begin{cases} x = 2 - 3s \\ y = 0 + 1s \\ z = 6 - 5s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$. Да се намерят уравнения на правата $b'$, ортогонално симетрична на $b$ относно равнината $\alpha$.

12 зад. Дадени са правите: $a: \begin{cases} x = \ \ 2 + 0s \\ y = -3 - 1s \\ z = \ \ 1 + 1s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$, $\quad b: \begin{cases} x = -2 + 2p \\ y = \ \ 1 - 1p \\ z = -5 - 1p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$.

a) Да се докаже, че правите $a$ и $b$ са кръстосани;
b) Да се намерят уравнения на оста на кръстосаните прави $a$ и $b$;
c) Ако точките $A$ и $B$ са краищата на оста-отсечка на кръстосаните прави $a$ и $b$, а т. $O(0, 0, 0)$ е началото на координатната система, да се намери лицето на триъгълник $OAB$.

13 зад. Дадени са кръстосаните прави: $a: \begin{cases} x = 1 + 1s \\ y = 0 + 1s \\ z = 0 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$, $\quad b: \begin{cases} x = 0 - 1p \\ y = 1 - 1p \\ z = 2 + 2p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$ и равнината $\beta: x + y - 1 = 0$. Нека точките $A \in a$ и $B \in b$ са краищата на оста-отсечка на правите $a$ и $b$, а точките $C$ и $D$ са прободните точки съответно на правите $a$ и $b$ с равнината $\beta$. Да се намери обемът на тетраедъра $ABCD$.

14 зад. Дадени са точките $A(0, 0, -1)$ и $B(-2, -8, -3)$, равнината $\beta: 3x + 4y - z + 1 = 0$ и правата $b: \begin{cases} x = 3 + 3s \\ y = -8 + 1s \\ z = 1 - 1s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$. Да се намерят:

a) Уравнение на равнината $\gamma$, която минава през точките $A$ и $B$, и е перпендикулярна на равнината $\beta$;
b) Координатни параметрични уравнения на пресечницата $g$ на равнините $\beta$ и $\gamma$;
c) Разстоянието от точката $B$ до правата $g$.

## VII ЧАСТ: Криви от втора степен

1 зад. Спрямо ОКС *K = Oxy* в равнината са дадени следните криви от II степен с техни метрични канонични уравнения:

$$\varepsilon_1\colon \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,\ \varepsilon_2\colon \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,\ \chi_1\colon \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1,\ \chi_2\colon \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1,$$

$$\pi_1\colon y^2 = 8x, \quad \pi_2\colon x^2 = 12y.$$

a) Да се намерят координатите на върховете и уравненията на върховите допирателни на всяка от кривите;

b) Да се намерят координатите на фокусите и уравненията на директрисите на всяка от кривите.

2 зад. Спрямо ОКС *K = Oxy* в равнината да се намери:

a) Уравнение на допирателната $t_0$ към кривата $\varepsilon\colon \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ в нейната точка $M_0(1, \sqrt{2})$;

b) Уравнение на допирателната $t_0$ към кривата $\chi\colon \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ в нейната точка $M_0(2\sqrt{3}, 1)$;

c) Уравнение на допирателната $t_0$ към кривата $\pi_1\colon y^2 = 8x$ в нейната точка $M_0(2, 4)$.

**ВСИЧКИ ЗАДАЧИ ДО 10-та СА В РАЗШИРЕНА ЕВКЛИДОВА РАВНИНА,**

**В ХОМОГЕННИ КООРДИНАТИ.**

3 зад. Дадени са точките $A(1, 2, 1)$и $B(2, -1, 2)$. Да се намери уравнение на правата *AB*. Да се намерят координатите на безкрайната точка на правата *AB*.

4 зад. Да се определи типът на кривите от втора степен според броя на особените и безкрайните им точки:

a) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4xt - 6yt + 3t^2 = 0$;

b) $x^2 - 2xy - 2y^2 - 4xt - 6yt + 3t^2 = 0$;

c) $x^2 - 2xy + y^2 - 4xt - 6yt + 3t^2 = 0$.

5 зад. При кои стойности на параметъра $\lambda$ кривата *k*: $x^2 + 2\lambda xy - y^2 + 5xt - 9t^2 = 0$ минава през безкрайната точка на правата $a\colon 2x - y + 7t = 0$.

6 зад. Дадени са кривата от втора степен $k\colon 4x^2 - 2xy - 3y^2 - 12xt + 10yt + 8t^2 = 0$ и правата $a\colon 2x - y - 2t = 0$. Да се намерят уравнения на допирателните към кривата *k* в пресечните и точки с дадената права.

7 зад. Дадени са кривата от втора степен $k: 4x^2 - 2xy - 3y^2 - 12xt + 10yt + 8t^2 = 0$ и точката $M(5, 2, 1)$ – външна за кривата. Да се намерят уравнения на двете допирателни към кривата, които минават през дадената точка *M*.

8 зад. Да се намерят координатите на центровете на следните криви от втора степен:

a) $2x^2 - 4xy - 3y^2 + 2xt + 6yt - 5t^2 = 0$;

b) $x^2 - 2xy + y^2 - 2xt + 4yt + 7t^2 = 0$.

9 зад. Да се намерят уравнения на асимптотите на кривата

$$k: 10x^2 + 21xy + 9y^2 - 41xt - 39yt + 4t^2 = 0.$$

10 зад. Спрямо ОКС *K = Oxy* в равнината са дадени кривите от втора степен с уравнения:

a) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;

b) $9x^2 + 18xy + 9y^2 - 42x - 30y + 9 = 0$.

Да се намери метрично канонично уравнение на всяка от кривите, както и последователните координатни трансформации, водещи до него.