Намиране суми на степенни редове

За намиране на сумата на степенни редове се използват основните теореми за диференциране и интегриране на степенни редове и основните развития, които ще припомним:

1. Редовете, получени чрез диференциране или чрез интегриране имат същия радиус на сходимост като дадения ред и при $|x-a|<R$ са в сила равенствата

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots$$

$$f'(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-a)^n\right]'\sum_{n=0}^{\infty}(a_n(x-a)^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}n(x-a)^{n-1}=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\ldots$$

$$\int f(x)dx=\int\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int a_n(x-a)^n dx\right]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}+C$$

Теорема на Абел. Сумата на реда $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ е непрекъсната функция в областта на сходимост.

2. Основни суми на степенни редове.

а) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots..$ радиус на сходимост $R=1$

б) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots.=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ сходящ за всяко x

в) $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

г) $(1+x)^\alpha=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ радиус на сходимост $R=1$

д) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots.=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, сходящ за всяко x

е) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, радиус на сходимост $R=1$

ж) $\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, радиус на сходимост $R=1$

з) $\arcsin x=x+\frac{1}{2.3}x^3+\frac{1.3}{2.4.5}x^5+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$, радиус на сходимост $R=1$.

Задача 1. Намерете сумата на реда

а) $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}$; б) $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$; в) $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{3n-1}$.

Решение. а) Да разгледаме реда, който се получава от дадения чрез диференциране (така ще съкратим множителя $\frac{1}{n+1}$):

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\binom{\frac{1}{3}}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}x^{n}.$$

Така получихме биномиална сума при $\alpha=\frac{1}{3}$ (вж. основно развитие г)):

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}x^{n}=(1+x)^{\frac{1}{3}}.$$

Този ред има радиус на сходимост равен на 1 и следователно и радиусът на дадения ред е 1. Тогава можем да интегрираме почленно в интервала $(-1;1)$:

$$S(x)=\int S'(x)dx=\int (1+x)^{\frac{1}{3}}dx=\frac{(1+x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+x)^4}+C.$$

За да пресметнем константата *C*, даваме на *x* стойност 0:

$$S(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}\frac{0^{n+1}}{n+1}=0=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+0)^4}+C \quad\Rightarrow\quad 0=\frac{3}{4}+C \quad\Rightarrow\quad C=-\frac{3}{4}.$$

Така получихме $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+x)^4}-\frac{3}{4}$ при $(-1;1)$.

Да изследваме редът при $x=\pm1$. Първо да пресметнем $\binom{\frac{1}{3}}{n}$:

$$\binom{\frac{1}{3}}{n}=\frac{\frac{1}{3}.\overbrace{(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)...(\frac{1}{3}-n+1)}^{n-1\text{ множителя}}}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}2.5.(3n-4)}{3^n n!}\text{ при } n\geq 2$$

(В числителя отделихме първия множител, защото останалите множители са отрицателни. За да има в числителя повече от 1 множител пресмятанията правим при $n\geq 2$).

При $x=-1$ членовете са

$$a_n=\binom{\frac{1}{3}}{n}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}=\frac{(-1)^{n-1}2.5.(3n-4)(-1)^{n+1}}{3^n n!(n+1)}=\frac{2.5.(3n-4)}{3^n(n+1)!}>0.$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2.5.(3n-4)(3n-1)}{3^{n+1}(n+2)!}.\frac{3^n(n+1)!}{2.5.(3n-4)}=\frac{3n-1}{3n+6}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$ и $\frac{3n-1}{3n+6}<1$. Критерия на Даламбер не дава резултат.

$n\left(\frac{3n+6}{3n-1}-1\right)=\frac{7n}{3n-1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{7}{3}$ – от критерия на Раабе и Дюамел следва, че редът $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ е сходящ.

При $x=1$ членовете са $b_n=\binom{\frac{1}{3}}{n}\frac{(1)^{n+1}}{n+1}=\frac{(-1)^{n-1}2.5.(3n-4)}{3^n(n+1)!}=(-1)^{n-1}a_n$ и $|b_n|=a_n$.

Следователно редът $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}\frac{1^{n+1}}{n+1}$ е абсолютно сходящ. Тогава по теоремата на Абел

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+x)^4}-\frac{3}{4} \text{ при } [-1;1].$$

б) За да съкратим множителя $\frac{1}{n(n+1)}$ ще трябва да диференцираме два пъти:

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \text{ и}$$

$$S''(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

Полученият ред е геометрична прогресия с частно равно на x и радиус на сходимост равен на 1. Можем да интегрираме почленно в $(-1;1)$

$$S'(x)=\int S''(x)dx=\int\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x)+C_1 \text{ и}$$

$$S'(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0^n}{n}=0=-\ln(1-0)+C_1 \quad\Rightarrow\quad 0=C_1 \text{ или } S'(x)=-\ln(1-x) \text{ в } (-1;1).$$

Интегрираме в $(-1;1)$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\int S'(x)dx=\int-\ln(1-x)dx=-x\ln(1-x)+\int xd\ln(1-x)=$$

$$=-x\ln(1-x)-\int\frac{x}{1-x}dx=-x\ln(1-x)-\int\frac{x-1+1}{1-x}dx=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)+C_2$$

и $S(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0^{n+1}}{n(n+1)}=0.\ln(1-0)+0+\ln(1-0)+C_2 \quad\Rightarrow\quad C_2=0$.

Така получихме $S(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$ при $x\in(-1;1)$.

Редът $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ е сходящ при $x=\pm1$ (защо?) и следователно при $x\in[-1;1]$ е непрекъсната функция по теоремата на Абел.

Функцията $(1-x)\ln(1-x)+x$ е дефинирана и непрекъсната при $x=-1$ и следователно

$S(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$ при $x\in[-1;1)$.

При $x=1$ функцията $(1-x)\ln(1-x)+x$ не дефинирана, но

$\lim_{x\to1}[(1-x)\ln(1-x)+x]=1$ (следва от $\lim_{t\to0}(t\ln t)=0$).

Тогава $S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^{n+1}}{n(n+1)}=\lim_{x\to1}[(1-x)\ln(1-x)+x]=1$ или $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

С това пресметнахме сумата на $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ в $[-1;1]$ (навсякъде където е сходящ).

б) За да съкратим множителя в знаменателя $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{3n-1}$ ще диференцираме почленно: $S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{3n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{3n-1}}{3n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{3n-2}$.

Получихме геометрична прогресия с частно x^3, радиус на сходимост $R=1$ и **първи член** равен на *x*. Тогава $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{3n-2}=\frac{x}{1-x^3}$ при $-1<x<1$.

Интегрираме в $(-1;1)$: $S(x)=\int S'(x)dx=\int\frac{x}{1-x^3}dx$. За да пресметнем интеграла, разлагаме $\frac{x}{1-x^3}$ на елементарни дроби:

$$\frac{x}{1-x^3}=\frac{A}{1-x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\quad\Rightarrow\quad x=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(1-x)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1\quad\Rightarrow\quad 1=3A\quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{3}\\ x=0\quad\Rightarrow\quad 0=A+C\quad\Rightarrow\quad C=-A=-\frac{1}{3}\\ 0=A-B\quad\text{(сравняваме}\quad\Rightarrow\quad B=\frac{1}{3}\\ \qquad\qquad\text{коефициентите пред } x^2) \end{array}\right\}\quad\Rightarrow\frac{x}{1-x^3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)$$

$$\int\frac{x}{1-x^3}dx=\frac{1}{3}\left(\int\frac{1}{1-x}dx+\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx\right)=-\frac{1}{3}\ln(1-x)+\frac{1}{3}\int\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln(1-x)+\frac{1}{3.2}\int\frac{d(x+\frac{1}{2})^2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\frac{2}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx=$$

$=$

$$=-\frac{1}{3}\ln(1-x)+\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+x+1}{(1-x)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Така получихме

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{3n-1}=\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+x+1}{(1-x)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C \text{ при } -1<x<1.$$

При $x=0$ имаме

$$S(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0^{3n-1}}{3n-1}=0=\frac{1}{6}\ln\frac{0^2+0+1}{(1-0)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2.0+1}{\sqrt{3}}+C\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\qquad 0=\frac{1}{6}\ln 0-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+C\quad\Rightarrow 1\quad C=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6\sqrt{3}} \text{ или}$$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{3n-1}=\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+x+1}{(1-x)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}} \text{ при } -1<x<1.$$

При $x=1$ редът $S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$ е разходящ (защо?).

При $x=-1$ редът $S(-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n-1}}{3n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ е сходящ по критерия на Лайбниц. Тогава по теоремата на Абел

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{3n-1}=\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+x+1}{(1-x)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}} \text{ при } -1\le x<1$$

Задача 2. Намерете сумата на реда

а) $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$; б) $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$.

Решение. а) За да премахнем коефициентите в $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$ е добре да интегрираме два пъти:

$$F(x)=\int S(x)dx=\int\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int (n+1)(n+2)x^n\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+1}+C_1$$

$$G(x)=\int F(x)dx+C_1x=C_1x+\int (\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1})dx=C_1x+\sum_{n=0}^{\infty}\int (n+2)x^{n+1}dx=C_1x+\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}+C_2$$

Получихме геометрична прогресия с частно x, радиус на сходимост $R=1$ и първи член x^2. Тогава $G(x)=C_1x+C_2+\frac{x^2}{1-x}$ при $-1<x<1$. Сега ще диференцираме два пъти (да отбележим, че не е необходимо да пресмятаме константите C_1 и C_2):

$$G'(x)=\left(\int F(x)\right)'=F(x)=\left(C_1x+C_2+\frac{x^2}{1-x}\right)'=C_1+\left(\frac{x^2-1+1}{1-x}\right)'=$$

$$=C_1+\left(-x-1+\frac{1}{1-x}\right)'=C_1-1+\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$S(x)=\left(\int S(x)dx\right)'=S(x)=\left(C_1-1+\frac{1}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

Окончателно

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\frac{2}{(1-x)^3} \text{ при } -1<x<1.$$

В крайните точки ±1 редът е разходящ (общият му член не клони към нула).

б) За да премахнем коефициентите n^2 в $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ ще искаме да интегрираме, но предварително трябва да изнесем x пред сумата:

$$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=xF(x), \text{ където } F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}.$$

$$G(x)=\int F(x)dx=\int\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int n^2x^{n-1}dx\right)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=xH(x)+C_1,$$

където $H(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$.

Отново интегрираме

$$L(x)=\int H(x)dx=\int\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int nx^{n-1}dx\right)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n+C_2.$$

Получихме геометрична прогресия с частно x, радиус на сходимост $R=1$ и първи член x. Тогава $L(x)=\frac{x}{1-x}+C_2$.

Диференцираме полученото равенство в $-1<x<1$:

$$L'(x)=\left(\int H(x)dx\right)'=H(x)=\left(\frac{x}{1-x}+C_2\right)'=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$ или

$G(x)=xH(x)+C_1$ в $-1<x<1$.

Диференцираме полученото равенство в $-1<x<1$:

$$F(x)=G'(x)=(xH(x)+C_1)'=\left(\frac{x}{(1-x)^2}+C_2\right)'=\frac{(1-x)^2-x.2(1-x)(-1)}{(1-x)^4}=\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Така получихме $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=xF(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ в $-1<x<1$.

В крайните точки ± 1 редът е разходящ (общият му член не клони към нула).

Задача 3. Намерете сумата на реда

а) $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{4n+4}}{(2n+1)!}$; б) $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+1)}{n!}x^{2n}$.

Решение. а) Редът $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{4n+4}}{(2n+1)!}$ прилича на развитието $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (в знаменателя участват само факториели на нечетни числа и членовете му са с алтернативно сменящи се знаци).

Написваме реда по следния начин:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{4n+4}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^2.x^{2(2n+1)}x}{(2n+1)!}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(3x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}=$$

$$=x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}=x^2\sin t=x^2\sin(3x^2).$$

(Означихме $3x^2=t$, за да се види по-ясно, че това е развитие на $\sin x$).

Получихме $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{4n+4}}{(2n+1)!}=x^2\sin(3x^2)$. Равенството е в сила за всяко x.

б) Представяме реда като сума на два реда:

$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+1)}{n!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n}{n!}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}=$ (в първия ред първия член е 0)

$$=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}=3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^{n+1}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^2)^n=$$

(В първия ред преномерирахме индексите и преработихме двата реда, за да приличат на развитието на функцията $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$):

$$=3x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^2)=3x^2e^{x^2}+e^{x^2}.$$

Получихме $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+1)}{n!}x^{2n}=(3x^2+1)e^{x^2}$ за всяко x.

Задача 3. Намерете сумата на реда

а) $S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(2n+1)!}$; б) $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2.4...(2n).2^{n+3}}$;

в) $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(2n+1)!}$.

Решение. За да пресметнем сумите ще разгледаме подходящи степенни редове, редове на които можем да пресметнем сумата.

а) Ред с алтернативно сменящи се знаци и факториел на нечетни числа е редът $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Преобразуваме сумата

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(2n+1)!}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\right)-1=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad -1.$$

Виждаме, че търсената сума се получава при $x=2$ от $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$:

$$S=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad -1=\frac{1}{2}\sin 2\ -1.$$

б) Ред с алтернативно сменящи се знаци и факториел на четни числа е редът $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Преобразуваме сумата

$$S=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2.4...(2n).2^{n+3}}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2.4...(2n).2^{n+3}}\right)-\frac{1}{1.2^3}+\frac{1}{2.2^4}=\frac{1}{8}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2.4...(2n).\sqrt{2}^{2n}}\right)-\frac{3}{32}.$$

(Като вземем пред вид $2.4.6...(2n)=2^n n!$ и $0!=1$, то приемаме, че $2.4.6...(2n)$ при $n=0$, че този израз е равен на 1).

Виждаме, че търсената сума се получава при $x=\sqrt{2}$ от $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$:

$$S=\frac{1}{8}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2.4...(2n).\sqrt{2}^{2n}}\right)-\frac{3}{32}=\frac{1}{8}\cos\sqrt{2}\quad-\frac{3}{32}.$$

в) Първо да намери ред, в който в знаменателите има факториели само на нечетни числа и само на четни числа. За целта да съберем и извадим почленно редовете

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \ldots = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}.$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Двата реда са сходящи за всяко x.

За да получим множител $n+1$ в числителя ще диференцираме функцията $x \operatorname{sh} x$:

$$(x \operatorname{sh} x)' = \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!} \right)' =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2) x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Сумата, която търсим се получава при $x = 1$:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1).1^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^1 - e^{-1}}{2} + 1.\frac{e^1 + e^{-1}}{2} \right) = \frac{1}{2} e.$$

Задача 4. (За самостоятелна работа) Намерете сумата:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{3^{\frac{n+1}{2}}}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$;

в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2}$ (представете първо като сума на два реда като разложите общия член на елементарни дроби);

г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n!}$.