F - (числово) поле

Линейни пространства

Опр. V е ЛП над (числово поле) F, ако

1) $V \neq \emptyset$

2) $+, \cdot$ - бинарни операции

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$(u, v) \longmapsto u + v$$

$$\cdot : F \times V \longrightarrow V$$
$$(\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v$$

3) $(V, +)$ – абелева група (4 св-ва)

Заб.
- $\forall u, v, w \in V \quad (u+v)+w = u+(v+w)$ асоциативност
- $\forall u, v \in V \quad u+v = v+u$ комутативност
- $\exists \theta \in V : \forall u \in V \quad u+\theta = \theta+u = u$
  (съществуване на нулев елемент)
- $\forall u \in V \ \exists (-u) \in V : \ u+(-u) = (-u)+u = \theta$
  (съществуване на противоположен ел.)

(– от 2) $\Rightarrow$ V е затворено относно $+$)

4) (още 4 св-ва)

разл. операция $\cdot$

- $\forall v \in V \quad 1.v = v$
- $\forall \lambda, \mu \in F$ и $\forall v \in V \quad (\lambda \mu)v = \lambda(\mu . v)$

еднакви

3) $F^n = \underbrace{F \times F \times \dots \times F}_{n} = \{ a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in F \}$

$a + b := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ за $a, b \in F^n$

$\lambda . a := (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$ за $\lambda \in F$ и $a \in F^n$

$(\theta = (0, 0, \dots, 0)$; $-a = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n))$

Проверка!

Следствия от аксиомите (св-ва на ЛП)

$(V, +)$ - абел. гр. $\Rightarrow$ | θ е единствен
$\forall v \in V$ $(-v)$ е единствен

<u>Опр.</u> $\forall\, u, v \in V \quad u - v := u + (-v)$ (разлика)

<u>Тв.</u> Уравнението $u + x = v \; (u, v \in V)$ <u>има</u> <u>единствено</u> реш. $x = v - u$

<u>Зад.</u> В $(G, \cdot)$ уравн. $ax = b \; (xa = b)$ има единствено реш. $x = a^{-1}b \; (x = ba^{-1})$

<u>Д-во</u> 1) има ($\Leftrightarrow \exists$). Ще покажем, че $x := v - u$ е реш.

$$u + x = u + (v - u) = u + (v + (-u)) = u + ((-u) + v) =$$

$$= \big(u + (-u)\big) + v = \theta + v = v$$

2) единственост. Нека x_0 е реш. $\Rightarrow u + x_0 = v$

$\Rightarrow (-u) + (u + x_0) = (-u) + v$

$\Rightarrow ((-u)+u) + x_0 = v + (-u)$

$\Rightarrow \theta + x_0 = v - u \Rightarrow x_0 = v - u$

Зад. От $\exists!$ единствеността на реш. на $u + x = v$
$\Rightarrow$ $\exists!$ на нулев и противоположен ел.
$(\theta : \forall u \quad u + x = u \; ; \; -u : u + x = \theta)$

Тв 1) $\forall v \in V \qquad 0 . v = \theta$

2) $\forall \lambda \in F \qquad \lambda . \theta = \theta$

3) Ако за $\lambda \in F$ и $v \in V$ $\lambda v = \theta$, то $\lambda = 0$ или $v = \theta$

Д-во 1) $v \in V$

$\underline{v + 0.v} = 1.v + 0.v = (1+0).v = 1.v = \underline{v}$

$\Rightarrow 0.v = \theta$ ($v + x = v$ има ед. реш.; 1 реш. е θ)

$\to v + (-v) = \theta$

2) $\lambda . \theta = \lambda . (0.v) = (\lambda . 0). v = 0.v = \theta$

произволен е-т от V

3) Нека $\lambda v = \theta$ за $\lambda \in F$ и $v \in V$ и нека $\lambda \neq 0$

$\theta = \frac{1}{\lambda} \cdot \theta = \frac{1}{\lambda} (\lambda v) = (\frac{1}{\lambda} \lambda) v = 1.v = v \Rightarrow v = \theta$

Тв $\forall v \in V \quad -v = (-1).v$

Д-во $\quad v + (-1).v = 1.v + (-1)v = (1+(-1))v = 0.v = \vartheta$

$\Rightarrow (-1)v = -v$ $\quad$ ($v + x = \vartheta$ има ед. реш. $(-v)$)

Зад. (Докажете)

1) $\lambda(u-v) = \lambda u - \lambda v$

2) $-(u-v) = v-u$

3) $-(-u) = u$

Зад (обобщение) $\quad$ 1) ϑ и $(-u)$ са единствени

2) $u + x = v \quad \to \quad x = v - u$

3) $0.u = \vartheta$, $\lambda.\vartheta = \vartheta$; $\underline{\lambda v = \vartheta} \Rightarrow \lambda = 0$ или $v = \vartheta$

4) $(-1)v = -v$

<u>Заб.</u> Ако не се сетим кои са „естествените" кандидати за нулев и противоположен ел., можем да използваме $0.v = 0$ и $(-1)v = -v$

<u>Пр.</u> F - поле; X - множ.

$$F^X := \{ f : X \to F \}$$

$$\forall f, g \in F^X, \forall x \in X \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$\forall f \in F^X, \forall \lambda \in F, \forall x \in X \quad (\lambda f)(x) := \lambda . f(x)$$

$\Rightarrow f+g, \lambda f \in F^X$

$(F^X, +, \cdot)$ е ЛП над F

1/ асоц. $f, g, h \in F^X$; $\underline{x} \in X$

$$[(f+g)+h](x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x)$$

// асоц. събир. в F

$$[f+(g+h)](x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$$

$\overset{\forall x}{\Rightarrow}$ $(f+g)+h = f+(g+h)$

2/ ком. – аналог.

3/ $\underset{\sim}{0}$ → (конкурсиз $0.f$; $(0.f)(\underline{x}) = 0.f(x) = \underline{0}$)

$0 : X \longrightarrow F$ $\forall x \in X$ $0(x) = 0$

$x \longmapsto 0$ и проверяв

4) $f \in F^X$ (кандидат $-f = (-1)\cdot f$; $(-f)(x) = (-1)\cdot f(x) =$
$= -f(x)$)

$(-f)(x) := -f(x)$, $\forall x \in X$ и проверяваме

5) $f \in F^X$, $x \in X$

$(1.f)(x) = 1.f(x) = f(x) \xrightarrow{\forall x} 1.f = f$

6, 7, 8 – аналогично.
↑ – дистриб. закон в полето
асоц. закон в полето

$\underline{\text{Пр}}$ (Сл. от горното)

1) $X = \{1, 2, \dots, n\}$; $f \in F^X$

$f: \{1, \dots, n\} \to F \xleftrightarrow{\text{биекция}} (f(1), f(2), \dots, f(n)) \in F^n$

$i \in \{1, \dots, n\}$ $(f+g)(i) = f(i) + g(i)$

$$f+g \longleftrightarrow (f(1)+g(1), \dots, f(n)+g(n))$$
$$= (f(1), \dots, f(n)) + (g(1), \dots, g(n)) \in F^n$$

Аналог. за λf

Тоест от F^X е л.п. $\Rightarrow$ F^n е л.п.

2) $X = \mathbb{N}$, $f \in F^X$

$$f: \mathbb{N} \to F \xleftrightarrow{\text{биекция}} \{ \underbrace{\{f(i)\}_{i=1}^{\infty}}_{f_i} \mid \underbrace{f(i)}_{= f_i} \in F \}$$

$\forall i \in \mathbb{N};\ \forall f, g \in F(X);\ \forall x \in X$

$$(f+g)(i) = f(i) + g(i) \quad (h = f+g;\ h_i = f_i + g_i)$$

$$(\lambda f)(i) = \lambda \cdot f(i) \quad (t = \lambda f;\ t_i = \lambda f_i)$$

$\Rightarrow$ последовательности с эл. из F с заданными опер. сл/ум

3) $m, n \in \mathbb{N}$ $\quad X = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$

Опр. Матрица $A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$ (с елементи a_{ij}) (с m реда и n стълба) е правоъгълна таблица от числа $a_{ij} \in F$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A - матр. с m реда и n стълба; от тип $m \times n$

Множ. от $\forall$ матр. от тип $m \times n$ с ел. от F

Бележим с $F_{m \times n}$

Ако $m=n$ → A е квадратна матрица от ред $\underline{n}$

множ. → $M_n(F)$

$X = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$; $\mathcal{A} \in F^X$

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{\text{биекция}} \begin{pmatrix} \mathcal{A}(1,1) & \mathcal{A}(1,2) & \dots & \mathcal{A}(1,n) \\ \mathcal{A}(2,1) & \mathcal{A}(2,2) & \dots & \mathcal{A}(2,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{A}(m,1) & \mathcal{A}(m,2) & \dots & \mathcal{A}(m,n) \end{pmatrix} = A = (a_{ij})$$

$(i,j) \in X$ → $\mathcal{A}((i,j)) = \mathcal{A}(i,j) = a_{ij}$

$C = A + B$ $\quad c(i,j) = a(i,j) + b(i,j)$

$\begin{matrix} C & A & B \\ \uparrow & \downarrow & \downarrow \\ c & a & b \end{matrix}$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i,j$

Аналог. за $\lambda \in F$ и $A \in F_{m \times n}$ $(\leftrightarrow a \in F^{\times})$

$D = \lambda A \Rightarrow d_{ij} = \lambda a_{ij}$

$\Rightarrow$ Тогава $F_{m \times n}$ с горните опер. е ЛП