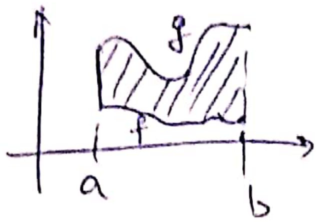
Криволинейни трапци

Целта ни ще бъде да представяме множества от точки в равнината като криволинейни трапци (или обединение от такива).

Напомняме дефиницията:

Деф. Криволинеен трапец по x наричаме множество от вида

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ f(x) \le y \le g(x) \end{cases}$$, където $a<b$ са реални числа и $f(x) \le g(x)$ за всяко $x \in [a;b]$.



Две от "страните" на трапеца са графиките на функциите f и g, а основите са правите $x=a$ и $x=b$.

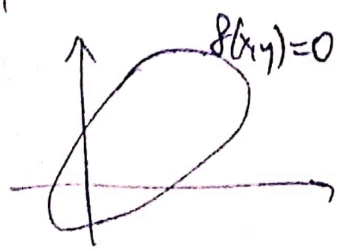
Ако $f(a)=g(a)$, то лявата основа се изражда до точка.

Такива ~~фигури~~ фигури се наричат още криволинеен трапец с вертикални основи

Деф. Криволинеен трапец по y (или с хоризонтални основи) наричаме фигура от вида $\begin{cases} c \le y \le d \\ h(y) \le x \le t(y) \end{cases}$

Множества от точки в равнината можем да задаваме като решения на система неравенства: $\begin{cases} f_1(x,y) \le 0 \\ f_2(x,y) \le 0 \\ \vdots \end{cases}$

Множеството от точките, за които $f(x,y)=0$ е крива в равнината. Нека f е непрекъсната. Кривата разделя равнината на области. Във всяка от тях, знакът на f е постоянен. За да определим дали е + или −, е достатъчно да разгледаме една точка от областта.



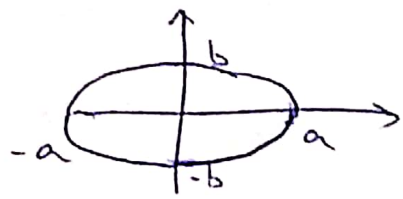
Някои криви

- $Ax+By+C=0$, $(A,B)\neq(0,0)$ е права.

В едната полуравнина $Ax+By+C>0$,
в другата, $Ax+By+C<0$.
Така решенията на $Ax+By+C\geq 0$ е полуравнина заедно с контурната права.

- $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ex+F=0$, $(A,B,C)\neq(0,0,0)$

Това е уравнение на крива от втора степен.
В зависимост от знака на B^2-4AC, това е елипса, парабола или хипербола.
С подходящи трансформации от общото уравнение се достига до уравнение от възможно най-прост вид (с най-малко параметри) – т.нар. канонично уравнение.
За елипса, то е $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$ е вътрешността на елипсата,
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geq 1$ е външността на елипсата.

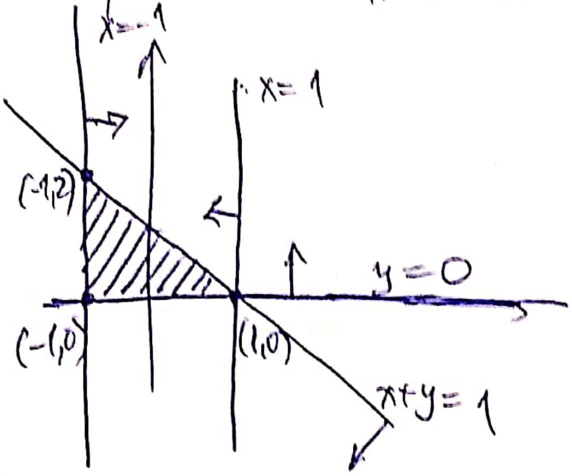
Накрая, частен случай на елипса е окръжност $(a=b)$

$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2=1$ – канонично уравнение

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ – уравнение на окръжност с център $(\alpha;\beta)$ и радиус R.

Зад. 1. Представете като трапец по x и като трапец по y множеството:
$$\begin{cases} x+y \le 1 \\ -1 \le x \le 1 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Реш. Всички зададени "криви" всъщност са прави.
Чертаем ги на един чертеж.



$x+y=1$ е правата през $(1,0)$ и $(0,1)$
$x=1$ е права успоредна на Oy през $(1,0)$
$x=-1$ – аналогично
$y=0$ е абсцисата

За да определим от коя страна на всяка крива е търсеното множество избираме точка извън всяка права.

Нека $x=y=2$. $x+y=4 \nleq 1$. $\Rightarrow$ множеството е от страната на $x+y=1$, която не съдържа точката $(2,2)$, т.е. надолу и наляво.

Аналогично за останалите прави:
Наляво от $x=1$
Надясно от $x=-1$
Нагоре от $y=0$

Пресичайки всички полуравнини получаваме защрихования триъгълник.

Върховете му намираме като пресечни точки на двойки прави:

$\begin{cases} x+y=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow (1,0)$ $\quad \begin{cases} x+y=1 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow (-1,2)$ $\quad \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow (-1,0)$

Трапец по x: Ясно е, че $-1 \le x \le 1$.
Долната граница за y се дава от $y=0$, а горната от $x+y=1$.
Решаваме относно y и получаваме: $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x. \end{cases}$

Трапец по y: $0 \le y \le 2$.
Лявата (долна) граница за x се дава от $x = -1$,
а дясната (горна) — от $x + y = 1$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ -1 \le x \le 1-y \end{cases}.$$

Истината е, че можеше и без картинка.
За трапец по x имаме директно $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{cases}$
$-1 \le x \le 1$ е дадено, от ~~те~~ останалите уравнения изразяваме y.
Накрая, $1-x \ge 0$ за всяко $x \in [-1;1]$, т.че изпълнява дефиницията за криволинеен трапец.

Трапец по y: Имаме $y \ge 0$. Горна граница нямаме за сега.
Останалите решаваме спрямо x:
$-1 \le x \le 1$ и $x \le 1-y$.
Получихме две горни граници за x: 1 и $1-y$.
Интересува ни по-малката. Но от $y \ge 0 \Rightarrow 1-y \le 1$.
Така $-1 \le x \le 1-y$.
Но горната граница за x, трябва да е поне колкото долната $\Rightarrow 1-y \ge -1$, откъдето $y \le 2$.
Така $\begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ -1 \le x \le 1-y \end{cases}$. — същото, което получихме и с графиките.

Добре е да се прави проверка. Например $\begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ -1 \le x \le 1-y \end{cases}$
можем да заместим y с конкретна стойност.
При $y = 2$, имаме $-1 \le x \le -1$, т.е. горната основа на този трапец се изражда до точката $x = -1$. Това се потвърждава от чертежа.

Зад. 2. Представете като обединение на криволинейни трапци множеството $\begin{cases} x^2+y^2\le 2 \\ x^2-y^2\ge 1 \end{cases}$.

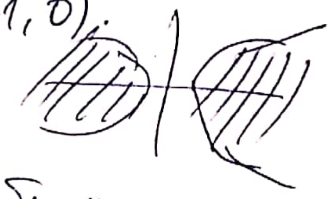
Реш. $x^2+y^2=2$ е окръжност с радиус $\sqrt{2}$.

$x^2+y^2\le 2$ е вътрешността, т.е. кръга с радиус $\sqrt{2}$ и център $(0,0)$.

$x^2-y^2=1$ е хипербола с върхове $(1,0)$ и $(-1,0)$.

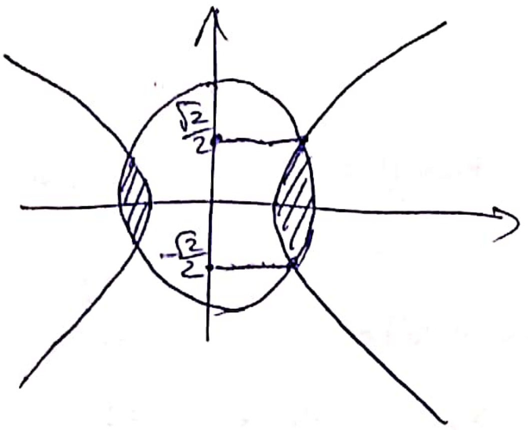
$(0,0)$ не изпълнява $x^2-y^2\ge 1$.

$(2,0)$ и $(-2,0)$ го изпълняват.



$\Rightarrow$ $x^2-y^2\ge 1$ са двете защриховани области

Налагаме на общ чертеж:



Има симетрия спрямо Oy.

Да разгледаме дясната част, т.е. $x\ge 0$.

Удобно е да мислим за трапец по y.

Горната и долната основа са изродени (т.е. са точки).

Ограниченията за x идват от хиперболата и окръжността.

Първо намираме пресечните точки като решение на системата:

$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2-y^2=1 \end{cases} \Rightarrow 2x^2=3,\quad x^2=\frac{3}{2}=\frac{6}{4},\quad x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

Но $x>0 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{6}}{2}$

Тогава $y^2=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2},\ y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Тогава $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le y\le\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решаваме неравенствата спрямо x и ползваме, че $x\ge 0$:

$x^2+y^2\le 2 \Rightarrow x^2\le 2-y^2 \Rightarrow x\le\sqrt{2-y^2}$.

$x^2-y^2\ge 1 \Rightarrow x^2\ge 1+y^2 \Rightarrow x\ge\sqrt{1+y^2}$

Така $I\ \begin{cases} -\sqrt{2}/2\le y\le \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{1+y^2}\le x\le\sqrt{2-y^2} \end{cases}$.

Случаят $x<0$ е аналогичен.
Интервалът за y е същия.

$x^2 \le 2-y^2 \Rightarrow |x| \le \sqrt{2-y^2}$ и понеже $|x|=-x$,

$-x \le \sqrt{2-y^2} \Rightarrow x \ge -\sqrt{2-y^2}$.

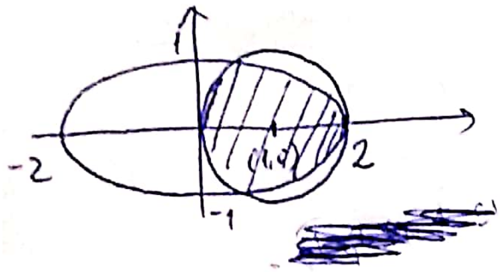
$x^2 \ge 1+y^2$, $|x| \ge \sqrt{1+y^2}$, $-x \ge \sqrt{1+y^2} \Rightarrow x \le -\sqrt{1-y^2}$.

$$\text{II}: \left| \begin{array}{l} -\frac{\sqrt{2}}{2} \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2-y^2} \le x \le -\sqrt{1-y^2}. \end{array} \right.$$

(тук окръжността дава долна граница за x, а елипсата – горна).

<u>Зад. 3</u>. Представете като хоризонтални и вертикални трапци множествата:
$$\left| \begin{array}{l} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 \le 1 \\ (x-1)^2+y^2 \le 1. \end{array} \right.$$

<u>Реш.</u> Първото уравнение е канонично уравнение на елипса.
Второто е уравнение на окръжност с център $(1,0)$ и радиус 1.



Вътре сме в окръжността и в елипсата.
Трапци по x! Решаваме спрямо y:

$y^2 \le 1 - \frac{x^2}{4}$

$-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \le y \le \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$, в частност $1-\frac{x^2}{4} \ge 0$
$\Downarrow$
$-2 \le x \le 2$.

$y^2 \le 1-(x-1)^2 = 1-x^2+2x-1 = 2x-x^2$.

Но $y \ge 0 \Rightarrow 2x-x^2 \ge 0 \Rightarrow x \in [0;2]$.

Тогава $-\sqrt{2x-x^2} \le y \le \sqrt{2x-x^2}$.

За x имаме $0 \le x \le 2$.

За y имаме долни граници $-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ и $-\sqrt{2x-x^2}$
и горни граници $\sqrt{2x-x^2}$ и $\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$.

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \le x \le 2 \\ \max\left(-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}, -\sqrt{2x-x^2}\right) \le y \le \min\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}, \sqrt{2x-x^2}\right). \end{array} \right.$$

Можем авно да сметнем коя от функциите реализира max/min.

Решаване $\sqrt{2x-x^2} = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$

$2x - x^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$, $\frac{3}{4}x^2 - 2x + 1 = 0$, $3x^2 - 8x + 4 = 0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{3}$ $\nearrow 2$, $\searrow 2/3$.

При $x \in [\frac{2}{3}; 2]$ y се определя от $\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$.

При $x \in [0; \frac{2}{3}]$ — от $\sqrt{2x-x^2}$.

Така
$$\left| \begin{array}{l} 0 \le x \le 2/3 \\ -\sqrt{2x-x^2} \le y \le \sqrt{2x-x^2} \end{array} \right. \cup \left| \begin{array}{l} \frac{2}{3} \le x \le 2 \\ -\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \le y \le \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}. \end{array} \right.$$

Трапци по y: Решаване спрямо x.

$\frac{x^2}{2^2} \le 1 - y^2 \Rightarrow x^2 \le 4 - 4y^2$, $-2\sqrt{1-y^2} \le x \le 2\sqrt{1-y^2}$

В частност, $1 - y^2 \ge 0 \Rightarrow y \in [-1; 1]$.

$(x-1)^2 \le 1 - y^2$, $|x-1| \le \sqrt{1-y^2} \Rightarrow 1-\sqrt{1-y^2} \le x \le 1+\sqrt{1-y^2}$.

$-1 \le y \le 1$

$\max(-2\sqrt{1-y^2}, 1-\sqrt{1-y^2}) \le x \le \min(2\sqrt{1-y^2}, 1+\sqrt{1-y^2})$.

При $-1 \le y \le 1$, $\sqrt{1-y^2} \in [0; 1] \Rightarrow 1 - \sqrt{1-y^2} \ge 0 \ge -2\sqrt{1-y^2}$.

$\Rightarrow \max(-2\sqrt{1-y^2}, 1-\sqrt{1-y^2}) = 1 - \sqrt{1-y^2}$.

Аналогично, $2\sqrt{1-y^2} - (1+\sqrt{1-y^2}) = \sqrt{1-y^2} - 1 \le 0$

$\Rightarrow 2\sqrt{1-y^2} \le 1 + \sqrt{1-y^2} \Rightarrow \min(2\sqrt{1-y^2}, 1+\sqrt{1-y^2}) = 2\sqrt{1-y^2}$.

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} -1 \le y \le 1 \\ 1-\sqrt{1-y^2} \le x \le 2\sqrt{1-y^2}. \end{array} \right.$$

Но трябва $2\sqrt{1-y^2} \ge 1 - \sqrt{1-y^2} \to 3\sqrt{1-y^2} \ge 1$,

$9(1-y^2) \ge 1$, $9y^2 \le 8$,

$y^2 \le 8/9$, $|y| \le \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Окончателно, $\begin{cases} -\frac{2\sqrt{2}}{3} \le y \le \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 1-\sqrt{1-y^2} \le x \le 2\sqrt{1-y^2} \end{cases}$

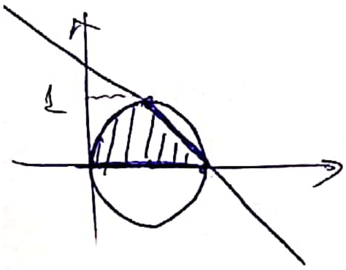
На практика в решението не ползвахме чертеж. Получените резултати се потвърждават от чертежа. Долното ограничение за x идва от окръжността, а горното – от елипсата.

В решението намерихме стойностите $x = 2/3$ и $y = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Точките $\left(\frac{2}{3}, \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ са пресечните на окръжността и елипсата.

Зад. 4. Представете като криволинеен трапец (по x или по y) множеството: $\begin{cases} x+y \le 2 \\ x^2+y^2 \le 2x \\ y \ge 0. \end{cases}$

Реш. Преобразуваме $x^2+y^2 \le 2x$ до $x^2-2x+y^2 \le 0$ /+1

$(x-1)^2+y^2 \le 1$ – окръжност с център $(1,0)$ и радиус 1.



Правата $x+y=2$ и окръжността имат не повече от 2 общи точки. Директно се съобразява, че $(2,0)$ и $(1,1)$ са общи точки.

Удобно е да изразим като трапец по y: $0 \le y \le 1$. За x горното ограничение е $x \le 2-y$ от правата. Долното е от окръжността: $(x-1)^2 \le 1-y^2$

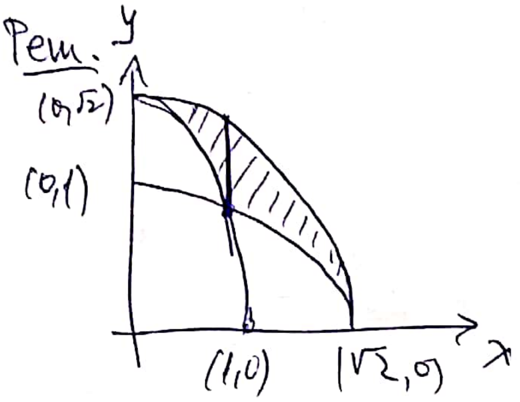
$|x-1| \le \sqrt{1-y^2} \Rightarrow -\sqrt{1-y^2} \le x-1 \le \sqrt{1-y^2}$.

$\Rightarrow x \ge 1-\sqrt{1-y^2}$. е долното ограничение.

Така: $\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 1-\sqrt{1-y^2} \le x \le 2-y. \end{cases}$

Зад.5. Представете множеството $\begin{cases} x^2+y^2 \le 2 \\ x^2+\frac{1}{2}y^2 \ge 1 \\ \frac{1}{2}x^2+y^2 \ge 1 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$ като трапец или обединение на трапци.

Реш.

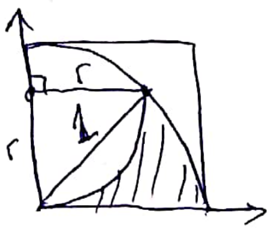


Кривите са окръжност и 2 елипси.
Вътре в окръжността, извън елипсите.
2 трапеца по x.
За y – горната граница е от окръжността.
Долните граници от двете елипси.

Общата точка на елипсите изпълнява $\frac{1}{2}x^2+y^2=1=x^2+\frac{1}{2}y^2$.
$\Rightarrow x^2=y^2$ и от $x, y \ge 0 \Rightarrow x=y$ и $\frac{3}{2}x^2=1$, $x=\frac{\sqrt{6}}{3}=y$.
При $x \le \frac{\sqrt{6}}{3}$, ограничението за y идва от $x^2+\frac{1}{2}y^2 \ge 1 \Rightarrow y \ge \sqrt{2-2x^2}$
При $x \ge \frac{\sqrt{6}}{3}$ – от $\frac{1}{2}x^2+y^2 \ge 1 \Rightarrow y \ge \sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \le x \le \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \sqrt{2-2x^2} \le y \le \sqrt{2-x^2} \end{cases} \cup \begin{cases} \sqrt{6}/3 \le x \le \sqrt{2} \\ \sqrt{1-\frac{1}{2}x^2} \le y \le \sqrt{2-x^2}. \end{cases}$$

Зад.6.

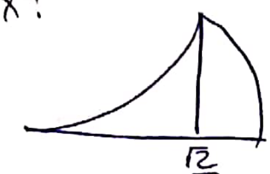


В единичен квадрат са вписани две четвърт окръжности. Представете защрихованата област
а) като обединение на 2 трапеца по x
б) като трапец по y.

Реш. Нека долния ляв ъгъл на квадрата е началото на координатна система. Голямата окръжност има уравнение $x^2+y^2=1$.
Тъй като сме в първи квадрант, $x, y > 0$.
За малката окръжност, от Питагор $2r^2=1 \Rightarrow r=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Центърът ѝ е $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ и уравнението е $x^2+(y-\frac{\sqrt{2}}{2})^2=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2$

Общата точка на двете окръжности е $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2 трапеца по x:



Единия се ограничава от $y=0$ и малката окръжност $\left(x \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

При $x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$ – от $y=0$ и голямата окръжност.

$x^2+y^2 \le 1$ (вътре в голямата) $\Rightarrow y^2 \le 1 - x^2$, $y \le \sqrt{1-x^2}$.

$x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \ge \frac{1}{2}$ (извън малката) $\Rightarrow \left|y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| \ge \sqrt{\frac{1}{2} - x^2}$.

Тъй като $y \le \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\frac{\sqrt{2}}{2} - y \ge \sqrt{\frac{1}{2} - x^2}$, $y \le \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{\frac{1}{2} - x^2}$.

Така:

$$\left|\begin{array}{l} 0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{\frac{1}{2} - x^2} \end{array}\right. \cup \left|\begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{2} \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \end{array}\right.$$

Трапец по y. y е между 0 и $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

x се мени между малката и голямата окръжност.

$$x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \ge \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 \ge \frac{1}{2} - y^2 + y\sqrt{2} - \frac{1}{2} = y\sqrt{2} - y^2.$$

Тъй като $x > 0$, то $x \ge \sqrt{y\sqrt{2} - y^2}$.

От голямата окръжност, $x^2 + y^2 \le 1 \Rightarrow x^2 \le 1 - y^2$, $x \le \sqrt{1-y^2}$.

Окончателно,

$$\left|\begin{array}{l} 0 \le y \le \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{y\sqrt{2} - y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \end{array}\right.$$