Векторно и смесено произведение

ОКС $K = O\vec e_1\vec e_2\vec e_3$

$\vec a \ne \vec 0$, $\vec b \ne \vec 0$

$\vec a, \vec b$ – ЛНЗ

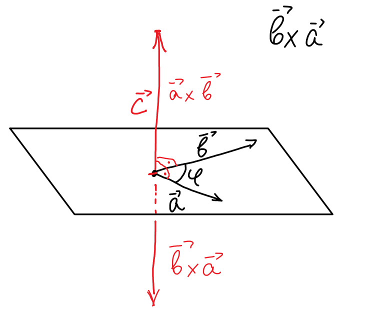
$\underset{1}{\vec a} \times \underset{2}{\vec b} = \underset{3}{\vec c}$ – вектор

1) Направление:

$\vec c \perp \vec a$, $\vec c \perp \vec b$

2) Посока:

$\underset{1}{\vec a}, \underset{2}{\vec b}, \underset{3}{\vec c}$ – имат положителна ориентация {$\vec a, \vec b, \vec c$ същата ориент. като $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$}



3) Дължина: $|\vec c| = |\vec a \times \vec b| = |\vec a|.|\vec b|.\sin\sphericalangle(\vec a, \vec b)_e$

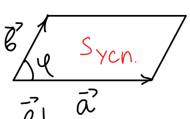
Свойства на векторно произведение

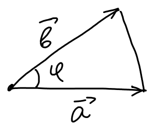
1) $\underbrace{\vec a \times \vec b}_{\vec c} = -\underbrace{\vec b \times \vec a}_{-\vec c}$ – антикомутативност

2) $(\alpha.\vec a + \beta.\vec b) \times \vec p = \alpha.(\vec a \times \vec p) + \beta.(\vec b \times \vec p)$

3) $\vec a \ne \vec 0$, $\vec b \ne \vec 0$ $\quad \vec a \times \vec b = \vec 0 \iff \vec a \parallel \vec b$

4) $|\vec a \times \vec b| = S_{усп.}$





$S_\Delta = \dfrac{|\vec a \times \vec b|}{2}$

5) $\underset{[0;\pi]}{\sin\sphericalangle(\vec a, \vec b)_e} = \dfrac{|\vec a \times \vec b|}{|\vec a|.|\vec b|}$ {не препоръчвам} $\quad \cos\sphericalangle(a, b) = \dfrac{(\vec a.\vec b)}{|\vec a|.|\vec b|}$

6) Формула на Лагранж

$(\vec a \times \vec b)^2 = |\vec a \times \vec b|^2 = (|\vec a|.|\vec b|.\sin\varphi)^2 = |\vec a|^2.|\vec b|^2.\sin^2\varphi =$

$= |\vec a|^2.|\vec b|^2.(1 - \cos^2\varphi) = \vec a^2.\vec b^2 - \vec a^2.\vec b^2.\cos^2\varphi = \vec a^2.\vec b^2 - (\vec a.\vec b)^2$

$(\vec a \times \vec b)^2 = \vec a^2.\vec b^2 - (\vec a.\vec b)^2$

Смесено произведение

$\vec a, \vec b, \vec c$

$(\vec a\,\vec b\,\vec c) = \overbrace{(\vec a \times \vec b).\vec c}^{\vec o}$ – число

смесено произв.

$(\vec a\vec b\vec c) = (\vec a \times \vec b).\vec c = \vec a.(\vec b \times \vec c)$

Свойства

! 1) $(\underset{1}{\vec a}\,\underset{2}{\vec b}\,\underset{3}{\vec c}) = (\underset{2}{\vec b}\,\underset{3}{\vec c}\,\underset{1}{\vec a}) = (\underset{3}{\vec c}\,\underset{1}{\vec a}\,\underset{2}{\vec b})$

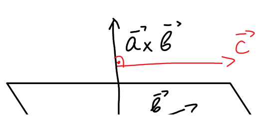
$(\vec a\vec b\vec c) = -(\vec b\vec a\vec c) = (\vec b\vec c\vec a)$

$(\vec a \times \vec b).\vec c = (\vec b \times \vec c).\vec a = \vec a.(\vec b \times \vec c)$

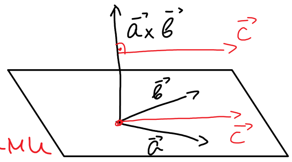
Векторното произв. е с по-висок приоритет

2) $((\alpha_1.\vec a_1 + \alpha_2.\vec a_2)\,\vec b\,\vec c) = \alpha_1.(\vec a_1\vec b\vec c) + \alpha_2.(\vec a_2\vec b\vec c)$

3) $\vec a \ne \vec 0$ $\quad \vec b \ne \vec 0$ $\quad \vec c \ne \vec 0 \Rightarrow (\vec a\vec b\vec c) = 0 \iff$

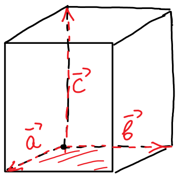


3) $\vec{a} \neq \vec{o}$ $\vec{b} \neq \vec{o}$ $\vec{c} \neq \vec{o}$ $\Rightarrow$ $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0 \Leftrightarrow$
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лин. зависими
(компланарни)

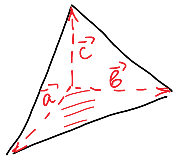


$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) > 0 \Leftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in S^+$ имат положит. ориентация, като $\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3$
$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) < 0 \Leftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in S^-$ имат отрицателна ориентация

4) Ако $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са ЛНЗ



$V_{парал.} = |(\vec{a}\vec{b}\vec{c})|$



$V_{тетраедър} = \dfrac{|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})|}{6}$

---

1 зад.
Да се док., че $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са ЛНЗ $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{c}$ и $\vec{c}\times\vec{a}$ са ЛНЗ
Д-во.
I Нека $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са ЛНЗ $\Rightarrow$ $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \neq 0$

Разгл. $\alpha.(\vec{a}\times\vec{b}) + \beta.(\vec{b}\times\vec{c}) + \gamma.(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{o}$ $/.\vec{a}$ (1) $\alpha = ?, \beta = ?, \gamma = ?$
$/.\vec{b}$ (2)
$/.\vec{c}$ (3)

(1) $\alpha.[(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{a}] + \beta.[(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a}] + \gamma.[(\vec{c}\times\vec{a}).\vec{a}] = (\vec{o}.\vec{a}) = 0$

$\alpha.\underbrace{(\vec{a}\vec{b}\vec{a})}_{0 \text{ лин. зав.}} + \beta.\underbrace{(\vec{b}\vec{c}\vec{a})}_{\neq 0} + \gamma.\underbrace{(\vec{c}\vec{a}\vec{a})}_{0} = 0 \Rightarrow \beta = 0$

(2) $\alpha.\underbrace{(\vec{a}\vec{b}\vec{b})}_{=0} + \cancel{0.(\vec{b}\vec{c}\vec{b})} + \gamma.\underbrace{(\vec{c}\vec{a}\vec{b})}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

(3) $\alpha.\underbrace{(\vec{a}\vec{b}\vec{c})}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

От $\alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow (\vec{a}\times\vec{b})$, $(\vec{b}\times\vec{c})$ и $(\vec{c}\times\vec{a})$ са ЛНЗ

II Нека $(\vec{a}\times\vec{b})$ $(\vec{b}\times\vec{c})$ и $(\vec{c}\times\vec{a})$ са ЛНЗ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са ЛНЗ
Упр.

---

2 зад.
$\vec{a}$ и $\vec{b}$: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$

$(\vec{a}.\vec{b}) = 0$
$(\vec{a}\times\vec{b}) \neq \vec{o}$ $\vec{a}, \vec{b}$ – ЛНЗ

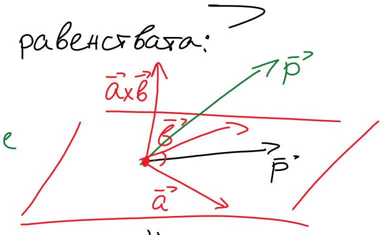
Да се определи неизвестният вектор $\vec{p}$ от равенствата:
$\vec{a}\times\vec{b}$ $\vec{p}$
$1) (\vec{p}, \vec{a}) = 4$

Да се определи неизвестният вектор $\vec{p}$ от равенствата:

$$\begin{cases} (\vec{a}.\vec{p}) = 4 \\ (\vec{b}.\vec{p}) = 2 \\ (\vec{a}\vec{b}\vec{p}) = -8 \end{cases}$$

$\vec{p} = \alpha.\vec{a} + \beta.\vec{b} \to$ Не

$\vec{p} = \underset{?}{\alpha}.\vec{a} + \underset{?}{\beta}.\vec{b} + \underset{?}{\gamma}.(\vec{a}\times\vec{b})$



Не, защото $(\vec{a}\vec{b}\vec{p}') \neq 0$

$\vec{p} = \alpha.\vec{a} + \beta.\vec{b} + \gamma.(\vec{a}\times\vec{b}) \; /.\vec{a} \; /.\vec{b} \; /.(\vec{a}\times\vec{b})$

$\underbrace{(\vec{p}.\vec{a})}_{4} = \alpha.\underbrace{\vec{a}^2}_{4} + \beta.\underbrace{(\vec{b}.\vec{a})}_{0} + \gamma.\underbrace{(\vec{a}\vec{b}\vec{a})}_{0} \Rightarrow 4 = \alpha.4 \Rightarrow \alpha = 1$

$\underbrace{(\vec{p}.\vec{b})}_{2} = 1.\underbrace{(\vec{a}.\vec{b})}_{0} + \beta.\underbrace{\vec{b}^2}_{1} + \gamma.\underbrace{(\vec{a}\vec{b}\vec{b})}_{0} \Rightarrow \beta = 2$

$\underbrace{(\vec{a}\vec{b}\vec{p})}_{-8} = 1.\underbrace{(\vec{a}\vec{a}\vec{b})}_{0} + 2.\underbrace{(\vec{b}\vec{a}\vec{b})}_{0} + \gamma.\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})^2}_{\vec{a}^2.\vec{b}^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2 = 4.1 - 0}$

$\gamma = -2$

$\vec{p} = 1.\vec{a} + 2.\vec{b} - 2.(\vec{a}\times\vec{b})$

$$\boxed{\begin{aligned} &(\vec{a}.\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \\ &(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \\ &(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ са лин. зависими} \end{aligned}}$$

04.11 Формула за двойно векторно произведение

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \boxed{(\vec{a}.\vec{c}).\vec{b}} - (\vec{b}.\vec{c}).\vec{a}$ – вектор

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = -(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} = -\left[(\vec{b}.\vec{a}).\vec{c} - (\vec{c}.\vec{a}).\vec{b}\right] =$

$= \boxed{(\vec{a}.\vec{c}).\vec{b}} - (\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}$

Детерминанти от ред 2 и ред 3

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21} \to$ число

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 3.2 = 4 - 6 = -2$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.2 = 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} = 1.5.9 + 2.6.7 + 3.4.8 - 7.5.3 - 8.6.1 - 9.4.2 =$

$\mathrm{I}\ \mathrm{II}\ \mathrm{III}\ \mathrm{I}\ \mathrm{II} = 45+84+96-105-48-72 = -3+12-9=0$

Детерминанта на Грам

* $\Gamma(\vec{a}) = |\vec{a}^2| = \vec{a}^2$ $=\vec{0} \Rightarrow$ л.з. $\neq\vec{0} \Rightarrow |\vec{a}|$

* $\Gamma(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & (\vec{a}.\vec{b}) \\ (\vec{b}.\vec{a}) & \vec{b}^2 \end{vmatrix} = \vec{a}^2.\vec{b}^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2 = (\vec{a}\times\vec{b})^2$ $=0 \Leftrightarrow$ л.з. $\neq 0 \Rightarrow S_{усп.}$

* $\Gamma(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & (\vec{a}.\vec{b}) & (\vec{a}.\vec{c}) \\ (\vec{b}.\vec{a}) & \vec{b}^2 & (\vec{b}.\vec{c}) \\ (\vec{c}.\vec{a}) & (\vec{c}.\vec{b}) & \vec{c}^2 \end{vmatrix} = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2$ $=0 \Leftrightarrow$ л.з. $\neq 0 \Rightarrow V$

* $\Gamma(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ са линейно зависими

Задача: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$: $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \measuredangle(\vec{b},\vec{c}) = \measuredangle(\vec{c},\vec{a}) = \frac{\pi}{3}$

$\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 1$

$(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}.\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c}) = \frac{1}{2}$

а) ?, че $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ са ЛНЗ

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ са ЛНЗ $\Leftrightarrow (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \neq 0$

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2 = \Gamma(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a}\vec{b} & \vec{a}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{b} & \vec{b}^2 & \vec{b}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{c} & \vec{b}\vec{c} & \vec{c}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & 1 & \frac12 \\ \frac12 & \frac12 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & \frac12 \\ \frac12 & 1 \\ \frac12 & \frac12 \end{matrix} = 1 + \frac18 + \frac18 - \frac14 - \frac14 - \frac14 = \frac12 \neq 0$$

$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2 = \frac12 \Rightarrow (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \pm\frac{1}{\sqrt2} \neq 0 \Rightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ са ЛНЗ

б) Нека $\vec{OA} = \vec{a}+\vec{b}$, $\vec{OB} = \vec{b}+\vec{c}$, $\vec{OC} = \vec{a}+\vec{c}$

$V_{OABC} = ?$ $V_{OABC} = \frac16 \cdot |(\vec{OA}\ \vec{OB}\ \vec{OC})|$ смесено произв.

$(\vec{OA}\ \vec{OB}\ \vec{OC}) = (\vec{OA}\times\vec{OB}).\vec{OC} = [(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})].(\vec{a}+\vec{c}) =$

$= [\vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c} + \underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{0}} + \vec{b}\times\vec{c}].(\vec{a}+\vec{c}) = \underset{0}{(\vec{a}\vec{b}\vec{a})} + (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) + \underset{0}{(\vec{a}\vec{c}\vec{a})} + \underset{0}{(\vec{a}\vec{c}\vec{c})} + (\vec{b}\vec{c}\vec{a}) + \underset{0}{(\vec{b}\vec{c}\vec{c})} =$

$= (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) + (\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = 2.(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \overset{\text{от а)}}{=} 2.(\pm\frac{1}{\sqrt2}) = \pm\sqrt2$

$V_{OABC} = \frac{|\pm\sqrt2|}{6} = \frac{\sqrt2}{6}$

Координатни условия за колинеарност и компланарност на вектори и точки

I $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ – произволна

$\vec{a}(a_1, a_2)$

$\vec{b}(b_1, b_2)$

Кога са л.з.? $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow a_1.b_2 = a_2.b_1 \Leftrightarrow a_1.b_2 - a_2.b_1 = 0$

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \dots \end{vmatrix} = 0$

$\vec{b}(b_1, b_2)$

$b_1 \quad b_2 \iff a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

$A_1(x_1, y_1)$
$A_2(x_2, y_2)$
$A_3(x_3, y_3)$

Кога са колинеарни?
Кога $\exists \triangle A_1A_2A_3$

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff A_1, A_2, A_3$ – колинеарни

$\neq 0 \iff \exists \triangle A_1A_2A_3$

II) $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ – произволна

$\vec{a}(a_1 \; a_2 \; a_3)$
$\vec{b}(b_1 \; b_2 \; b_3)$ кога са л.з.? $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$
$\vec{c}(c_1 \; c_2 \; c_3)$

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad 1$

$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad 2$

$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad 3$

Кога $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са л.з.?

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са л.з.

$A_1(x_1 \; y_1 \; z_1)$
$A_2(x_2 \; y_2 \; z_2)$
$A_3(x_3 \; y_3 \; z_3)$
$A_4(x_4 \; y_4 \; z_4)$

Кога $A_1A_2A_3$ са колин.? $\iff \overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{A_1A_3}$

Кога $A_1 \dots A_4$ са компланарни?

$\Updownarrow$

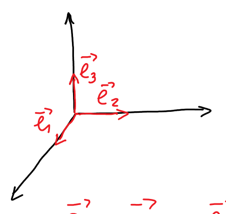
$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Координатно представяне на векторно и смесено произведение

ОКС $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ $\quad |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$

$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in S^+$



$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$

$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$

$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \qquad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$

$\vec{a}(a_1 \; a_2 \; a_3) \iff \vec{a} = (a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3) \times$

$\vec{b}(b_1 \; b_2 \; b_3) \iff \vec{b} = (b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + b_3 \cdot \vec{e}_3)$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_2 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \quad \text{ОКС}$$

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} < 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in S^- \\ = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ са л.з.} \\ > 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in S^+ \end{array}$$

Пресмятане на лице и обем спр. ОКС

примери:

1) ОКС $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ $\quad A(1,2)$, $B(3,5)$, $C(6,0)$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot |-25| = \frac{25}{2} \text{ кв. ед}$$

ф-ла за лице спр. $O\vec{e_1}\vec{e_2}$

2) ОКС $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ $\quad A(1,2,1)$, $B(3,5,2)$, $C(6,0,1)$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$$

$$\begin{array}{l} \vec{AB}(2,3,1) \\ \vec{AC}(5,-2,0) \end{array} \times \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC}\,(2,\ 5,\ -19) \Rightarrow |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 19^2} = \sqrt{390}$$

$$361 + 25 + 4 = 390$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{390}}{2}$$

$V_{ABCD} = ?$ $\quad A(1,2,1)$, $B(3,5,2)$, $C(6,0,1)$, $D(2,5,0)$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{AB}\ \vec{AC}\ \vec{AD})|$$

$\vec{AB}(2,3,1)$

$\vec{AC}(5,-2,0)$

$\vec{AD}(1,3,-1)$

$$(\vec{AB}\ \vec{AC}\ \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$