18. Аналитично задаване на различни видове наведена аксонометрия

Нека $\bar{K} = \{\bar{O}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ е ортонормирана координатна система. Избираме проекционната равнина π[A, B, C, 0] да минава през началото $\bar{O}$ на $\bar{K}$. Освен това, нека $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, т.е. нормалният вектор $\vec{N}^\pi(A, B, C) \perp \pi$ е единичен $\left(|\vec{N}^\pi| = 1\right)$.

Проекционният център $U_S(l, m, n, 0)$ е безкрайна точка, нележаща в π и следователно $Al + Bm + Cn \neq 0$.

Тъй като разглеждаме наведена аксонометрия, то $U_S \not\perp \pi$. Нека векторът $\vec{s}(l, m, n)$, колинеарен с правата s е единичен, т.е. $|\vec{s}| = 1$ или $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Ако $\vec{s} \parallel \vec{N}^\pi$, то $\vec{s} = \varepsilon.\vec{N}^\pi$ и понеже $|\vec{s}| = |\vec{N}^\pi| = 1$ имаме, че $l = \varepsilon A, m = \varepsilon B, n = \varepsilon C, \varepsilon = \pm 1$.

От тук получаваме, че $Al + Bm + Cn = \varepsilon(A^2 + B^2 + C^2) = \varepsilon = \pm 1$.

Следователно за наведена аксонометрия ($U_S \not\perp \pi$) имаме $Al + Bm + Cn \neq \pm 1$.

Нека $\psi_\pi^{U_S}$ е централното (в случая успоредно) проектиране от U_S в π и

$\bar{M}(x, y, z, t) \xrightarrow{\psi_\pi^{U_S}} M(x', y', z', t')$:

1) Тъй като $\bar{M} \in MU_S$, то (1) $\begin{cases} x' = \lambda x + \mu l \\ y' = \lambda y + \mu m \\ z' = \lambda z + \mu n \\ t' = \lambda t + \mu.0 \end{cases}$ $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$;

2) Също така от $M \in \pi$ следва, че (2) $Ax' + By' + Cz' = 0$.

Тогава от (1) и (2) имаме $\lambda(Ax + By + Cz) + \mu(Al + Bm + Cn) = 0$ и можем да изберем $\lambda = (Al + Bm + Cn)$ и $\mu = -(Ax + By + Cz)$.

Заместваме λ и μ в (1) и получаваме:

$$\begin{cases} x' = (Al + Bm + Cn)x - (Ax + By + Cz)l = (Bm + Cn)x - Bly - Clz \\ y' = (Al + Bm + Cn)y - (Ax + By + Cz)m = -Amx + (Al + Cn)y - Cmz \\ z' = (Al + Bm + Cn)z - (Ax + By + Cz)n = Anx - Bny + (Al + Bm)z \\ t' = (Al + Bm + Cn)t \end{cases}$$

Така за $\psi_\pi^{U_S}$ получаваме:

$$(3) \qquad \psi_\pi^{U_S} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bm + Cn & -Bl & -Cl & 0 \\ -Am & Al + Cn & -Cm & 0 \\ -An & -Bn & Al + Bm & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Al + Bm + Cn \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Обикновено се избира π да съвпада с някоя от координатните равнини на $\bar{K}$. Така се получават трите най-използвани наведени аксонометрични проекции.

Ако изберем проекционната равнина π да съвпада с координатната равнина $(\overline{Oxz})$ имаме π[0, 1, 0, 0], (т.е. $A = C = 0$, $B = 1$). Тогава:

$$\psi_\pi^{U_S} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & -l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \psi_\pi^{U_S} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 & -\frac{l}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{n}{m} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Образът се определя с точност до подобност от матрицата $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{l}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{n}{m} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и можем да приемем, че: $\psi_{\pi}^{U_S}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{l}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{n}{m} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

Оттук намираме:

$$\overline{E}_1(1, 0, 0, 1) \xrightarrow{\psi_{\pi}^{U_S}} E_1(1, 0, 0, 1),$$

$$\overline{E}_2(0, 1, 0, 1) \xrightarrow{\psi_{\pi}^{U_S}} E_2(-\frac{l}{m}, 0, -\frac{n}{m}, 1),$$

$$\overline{E}_3(0, 0, 1, 1) \xrightarrow{\psi_{\pi}^{U_S}} E_3(0, 0, 1, 1).$$

поне
=> диметрия.

Следователно векторите на аксонометричната координатна система имат координати: $\vec{e}_1(1, 0, 0)$, $\vec{e}_2(-\frac{l}{m}, 0, -\frac{n}{m})$ и $\vec{e}_3(0, 0, 1)$.

I. <u>Кавалиерна перспектива</u>:

Тази проекция е наведена изометрия, т.е. $p = q = r = 1$. Освен това избираме $\measuredangle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \measuredangle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 135^0$.

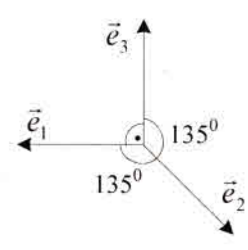
От $p = q = r$ следва, че $\frac{l^2 + n^2}{m^2} = 1$, а от $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ – $\frac{1 - m^2}{m^2} = 1$, т.е. $m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

От $\cos\measuredangle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \cos\measuredangle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \cos 135^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ получаваме последователно:

$-\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\vec{e}_1\vec{e}_2}{|\vec{e}_1||\vec{e}_2|}$, откъдето $\frac{l}{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\vec{e}_2\vec{e}_3}{|\vec{e}_2||\vec{e}_3|}$, откъдето $\frac{n}{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ако $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $l = n = m\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. Тогава

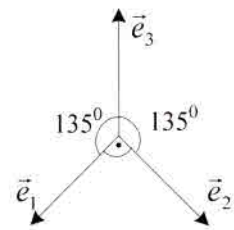
$$\psi_{\pi}^{U_S}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$



II. Военна перспектива

Тази наведена аксонометрична проекция е също изометрия с $p = q = r = 1$, а проекционната равнина π съвпада с $(\overline{Ox\,y})$, като $\sphericalangle(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \sphericalangle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 135^0$. Тогава $\pi[0, 0, 1, 0]$, т.е. $A = B = 0, C = 1$ и разсъждавайки както при кавалиерната перспектива, тук получаваме:

$$\psi_{\pi}^{U_S} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$



III. Кабинетна проекция

Това е най-често използваната наведена аксонометрична проекция. Тя е диметрия, при която за коефициентите на изменение имаме $p = 2q = r$. Проекционната равнина π съвпада с $(\overline{Oxz})$, т.е. $\pi[0, 1, 0, 0]$. Ъглите между аксонометричните оси са $\sphericalangle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \sphericalangle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 135^0$.

От $p = r = 1$ и $q = \dfrac{1}{2}$ имаме $\dfrac{l^2 + n^2}{m^2} = \dfrac{1}{4}$ и $\dfrac{1 - m^2}{m^2} = \dfrac{1}{4}$, т.е. $m = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

От $\cos\sphericalangle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \cos\sphericalangle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ получаваме последователно:

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\vec{e}_1\vec{e}_2}{|\vec{e}_1||\vec{e}_2|}$, откъдето $\dfrac{l}{m} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\vec{e}_2\vec{e}_3}{|\vec{e}_2||\vec{e}_3|}$, откъдето $\dfrac{n}{m} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Така в този случай :

$$\psi_{\pi}^{U_S} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$