3.

$$p_k = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{M-k}}{\binom{N}{M}}.$$

Формулата за пълната вероятност дава следното рекурентно уравнение за $p_k(n, M, N)$:

$$p_k(n+1, M, N) = p_k(n, M, N)\frac{N - M - n + k}{N - n} + p_{k-1}(n, M, N)\frac{M - n + k}{N - n}.$$

Хипергеометричното разпределение намира приложение в т. нар. статистически контрол на качеството. В партида от N изделия M са дефектни. При случайно избрани n изделия (извадка без връщане с обем n), броят на дефектните изделия в извадката е сл.в. X с хипергеометрично разпределение

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

В играта Спорт-тото ‘"6 от 49„ вероятността с един фиш от 6 числа да се спечели тройка, четворка, петица или шестица се пресмята като броят на познатите числа има хипергеометрично разпределение

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

или вероятност за k познати резултата от $M = 6$ печеливши от общо $N = 49$ числа.

3.6 Съвместни (двумерни) разпределения

Определение 3.8 *Съвместно разпределение на случайните величини X и Y, наричаме следната таблица:*

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
y_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$\dots$	$p_{1,n}$	$\dots$
y_2	$p_{2,1}$	$\dots$			$\dots$
$\dots$	$\dots$				
y_m	$p_{m,1}$	$p_{m,2}$	$\dots$	$p_{m,n}$	$\dots$

където x_i и y_j са съответно стойностите на сл.в. X и Y и те могат да бъдат краен или най-много изброим брой;
$p_{j,i} = \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j)$ са вероятностите с които случайните величини вземат съответните стойности, при това

$$\sum_{i,j} p_{j,i} = 1$$

Пример 3.9 *Хвърляме два зара. Нека случайната величина X е броят на шестиците, а Y броят на единиците паднали се върху заровете. Ще намерим съвместното разпределение на X и Y.*

Ясно е, че X и Y могат да вземат като стойности числата 0, 1 и 2. Събитието $\{X = 0, Y = 0\}$ означава, че върху заровете не се е паднала нито една шестица или единица, тогава $\mathrm{P}(X = 0, Y = 0) = (4/6)^2$. Аналогично $\mathrm{P}(X = 1, Y = 0) = 2(1/6)4/6$ и т.н.

Съвместното разпределение на X и Y има вида:

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

$\square$

Ако разполагаме със съвместното разпределение на X и Y не е проблем да се пресметне разпределението само на едната случайна величина. Това разпределение се нарича *маргинално разпределение*. Намирането му става, съгласно формула за пълната вероятност, чрез сумиране по ред или по стълб, т.е.

$$\mathrm{P}(X = x_i) = \sum_j \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j), \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Аналогично

$$\mathrm{P}(Y = y_j) = \sum_i \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j), \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Пример 3.10 *Ще намерим маргиналните разпределения на случайните величини от предходния пример. Маргиналните разпределения често се записват отдолу и отстрани на таблицата със съвместните разпределения*

$Y \backslash X$	0	1	2	
0	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	

$\square$

По нататък ще въведем две понятия, които се използват като мярка за линейната зависимост между случайните величини X и Y.

Определение 3.9 *Ковариация на случайните величини X и Y наричаме числото:*

$$cov(X,Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)]. \tag{3.6.17}$$

Ако $cov(X,Y) = 0$ казваме, че случайните величини са некорелирани.

За пресмятане на ковариацията обикновено се използва представянето дадено в следващото твърдение.

Твърдение 3.2

$$cov(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y. \tag{3.6.18}$$

Доказателство: Ще използваме линейността на математическото очакване.

$$cov(X,Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)] = \mathrm{E}[(XY - Y\,\mathrm{E}X - X\,\mathrm{E}Y + \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y)] =$$

$$= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(Y\,\mathrm{E}X) - \mathrm{E}(X\,\mathrm{E}Y) + \mathrm{E}(\mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y),$$

където сме използвали, че $\mathrm{E}X$ е константа. Тогава от свойство **E2** следва $\mathrm{E}(Y\mathrm{E}X) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$. Аналогично $\mathrm{E}(X\,\mathrm{E}Y) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$. Съгласно **E1** математическото очакване на константа е самата константа, т.е. $\mathrm{E}(\mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y) = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$. С това доказателството е завършено. □

Твърдение 3.3 *Ако случайните величини X и Y са независими, то*

$$cov(X,Y) = 0.$$

Доказателство: Твърдението следва директно от (3.6.18) и свойство **E4** на математическото очакване.

В общия случай обратното твърдение не е изпълнено. Възможно е $cov(X,Y) = 0$, но случайните величини да бъдат зависими.

Определение 3.10 *Коефициент на корелация $\rho_{X,Y}$ на случайните величини X и Y наричаме:*

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D}X}\sqrt{\mathrm{D}Y}}. \tag{3.6.19}$$

Твърдение 3.4 *Коефициент на корелация $|\rho_{X,Y}| \leq 1$ за произволни случайни величини X и Y.*

Доказателство: Ще разгледаме следната случайна величина

$$\left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 \geq 0 \tag{3.6.20}$$

Тя е неотрицателна, следователно и математическото и очакване е неотрицателно. Имаме следната верига:

$$0 \leq \mathrm{E}\left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 = \tag{3.6.21}$$

$$= \frac{\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2}{\mathrm{D}X} + \frac{\mathrm{E}(Y - \mathrm{E}Y)^2}{\mathrm{D}Y} + 2\frac{\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)}{\sqrt{\mathrm{D}X}\sqrt{\mathrm{D}Y}} =$$

$$= \frac{\mathrm{D}X}{\mathrm{D}X} + \frac{\mathrm{D}Y}{\mathrm{D}Y} + 2\rho_{X,Y} = 2 + 2\rho_{X,Y}.$$

В последното равенство приложихме дефинициите на дисперсия и корелация. Сега от $2 + 2\rho_{X,Y} \geq 0$ елемантарно следва $\rho_{X,Y} \geq -1$.

Аналогично, за да се докаже неравенството $\rho_{X,Y} \leq 1$ се разглежда случайната величина

$$\left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} - \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 \geq 0.$$

Твърдение 3.5 $|\rho_{X,Y}| = 1$ *тогава и само тогава, когато случайните величини X и Y са линейно зависими.*

Доказателство: Нека X и Y са линейно зависими, т.е. съществуват константи a и b, такива че $X = aY + b$. Ще докажем че $|\rho_{X,Y}| = 1$. Наистина тогава

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}(aY + b) = a\,\mathrm{E}Y + b,$$

$$\mathrm{D}X = \mathrm{D}(aY + b) = \mathrm{D}(aY) + \mathrm{D}b = a^2\mathrm{D}Y.$$

Следователно

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)]}{\sqrt{\mathrm{D}X}\sqrt{\mathrm{D}Y}} = \frac{\mathrm{E}[(aY + b - (a\,\mathrm{E}Y + b))(Y - \mathrm{E}Y)]}{\sqrt{a^2\mathrm{D}Y}\sqrt{\mathrm{D}Y}} =$$

$$= \frac{\mathrm{E}[a(Y - \mathrm{E}Y))(Y - \mathrm{E}Y)]}{|a|\,\mathrm{D}Y} = \frac{a\,\mathrm{E}(Y - \mathrm{E}Y)^2}{|a|\,\mathrm{D}Y} = \frac{a}{|a|}$$

Последният израз е равен на ± 1 в зависимост от знака на a. С това твърдението е доказано в едната посока.

Забележка. Ако $a > 0$, т.е. когато едната случайна величина расте и другата расте, тогава е изпълнено $\rho_{X,Y} = 1$. Обратно Ако $a < 0$, т.е. когато едната случайна величина расте, а другата намалява $\rho_{X,Y} = -1$.

Нека сега $|\rho_{X,Y}| = 1$. Ще докажем, че случайните величини X и Y са линейно зависими.

За определеност ще приемем, че $\rho_{X,Y} = -1$. Отново ще разгледаме случайната величина (3.6.20). Съгласно равенства (3.6.21)

$$\mathrm{E}\left[\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right]^2 = 2 + 2\rho_{X,Y} = 0$$

След като очакването на една неотрицателна случайна величина е 0. То и самата случайна величина е равна на нула, т.е.

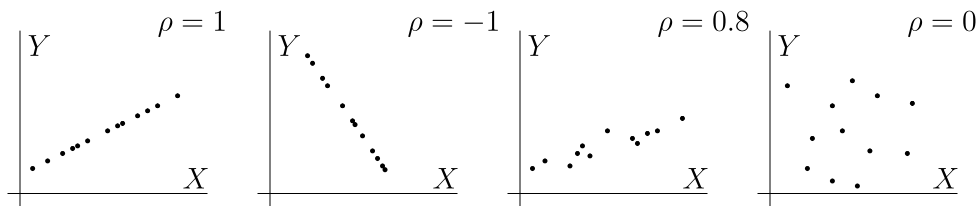
$$\frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}X}} + \frac{Y - \mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}} = 0$$

Ще напомним, че в това равенство $\mathrm{E}X$, $\mathrm{E}Y$, $\mathrm{D}X$ и $\mathrm{D}Y$ са константи. Можем да изразим X по следния начин

$$X = \left(-\frac{\sqrt{\mathrm{D}X}}{\sqrt{\mathrm{D}Y}}\right) Y + \frac{\sqrt{\mathrm{D}X}\,\mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}Y}} + \frac{\mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{D}Y}},$$

което означава линейна зависимост между X и Y. □

Пример 3.11 *На следващите схеми е показано влиянието на коефициента на корелация върху степента на линейна зависимост между случайните величини X и Y. Всяко наблюдение над случайните величини е представено като точка с координати (X, Y).*



При $\rho = 1$ точките лежат върху растяща права.
При $\rho = -1$ правата е намаляваща.
При $\rho = 0.8$ точките са разположени в околност на права.
При $\rho = 0$ точките са разпръснати.

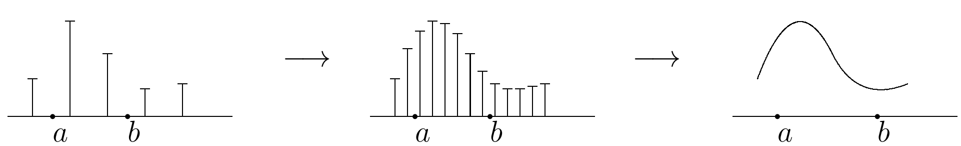
Не съществува връзка между коефициента на корелация ρ и наклона на правата. Знакът на ρ показва дали правата е растяща или намаляваща. А големината на ρ доколко силна е линейната зависимост. Обърнете внимание, че става дума само за линейна зависимост. Възможно е да съществува друг тип връзка между случайните величини, която няма как да се установи с коефициента на корелация.

Глава 4

Непрекъснати случайни величини

До сега разглеждахме дискретни случайни величини, чиито стойности са краен или най-много изброим брой. Това ограничение върху броя на стойностите прави дискретните случайни величини неудобни за описване на редица явления. Например, температурата на въздуха се описва с реално число в интервала $(-45, 52)$, влажността, количеството въглероден двуокис също са реални числа. Затова се налага разглеждането на случайни величини стойностите на които са подмножество на реалните числа, т.е. могат да вземат нейзброим брой различни стойности. Такива случайни величини ще наричаме непрекъснати.

За непрекъснатите случайни величини би било безмислено да се въвежда разпределение под формата на таблица като (3.1.1), тъй като не е възможно описването на всички стойности. Затова, като аналог на разпределенията се използва функция наречена *плътност*, която играе ролята на вероятност. Формално, непрекъснатите случайни величини се дефинират като се извършва граничен преход по дискретните случайни величини. Можем да си представим този процес като вземем една дискретна случайна величина и увеличаваме броят на нейните стойности все повече и повече, докато нейното разпределение се превърне в непрекъснатата функция плътност. Това е илюстрирано в следващата схема.



4.1 Функция на разпределение и вероятностна плътност

В този учебник няма да се спираме на формалната (аксиоматична) дефиниция на понятието непрекъсната случайна величина. Вместо това ще дефинираме функцията плътност, а чрез нея и случайната величина.

Определение 4.1 *Плътност на непрекъснатата случайната величина X наричаме функцията $f_X(x)$, изпълняваща следните условия:*