Предварителни сведения (1)

1. Отсечка е основно геометрично понятие. Две различни точки A и B определят точно една отсечка с краища A и B. Може да се каже, че отсечката с краища A и B съдържа точките между тях. Означаваме с AB, (AB) или с малки латински букви. Отсечката BA съвпада с отсечката AB.

2. За отсечките е въведено отношението (релацията) еднаквост или конгруентност. – $a \cong b$ или $a \equiv b$. Прието е еднаквите отсечки да се наричат равни. Необходимостта от разглеждането на това отношение идва от представата ни, че с преместване можем да „напаснем" отсечката a, така че да съвпадне с b.

Отношението равенство на отсечки е релация на еквивалентност, тъй като има следните три свойства

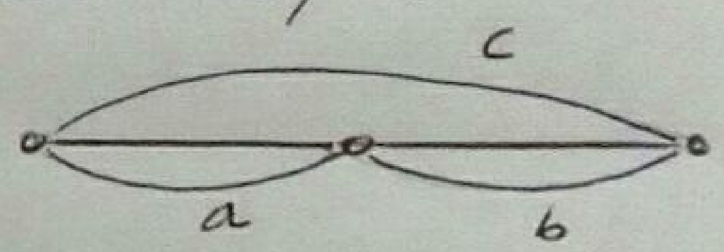
Нека a, b и c са произволни отсечки. Тогава

1. За $\forall a$ е изпълнено $a = a$ - рефлексивност
2. Ако $a = b$, то $b = a$ - симетричност
3. Ако $a = b$ и $b = c$, то $a = c$ - транзитивност

Да отбележим, че ако a и b са произволни отсечки и S_a и S_b са множествата от отсечките еднакви съответно с a и b, то от свойствата 1, 2 и 3 следва, че S_a и S_b или нямат общ елемент - $S_a \cap S_b = \emptyset$ (когато $a \neq b$) или съвпадат - $S_a \equiv S_b$ (точно тогава, когато $a = b$). Следователно релацията „равенство на отсечки" разделя множеството от отсечките се разбива на непресичащи се подмножества, наречени класове на еквивалентност по отношение на горната релация. Две отсечки попадат в един и същи клас точно тогава, когато са равни. Това наблюдение е в сила за всяка релация на еквивалентност, а именно:

Всяка релация на еквивалентност разбива множеството, върху което действа, на непресичащи се класове на еквивалентност, като два елемента от множеството са в един и същи клас точно тогава, когато са в разглежданата релация.

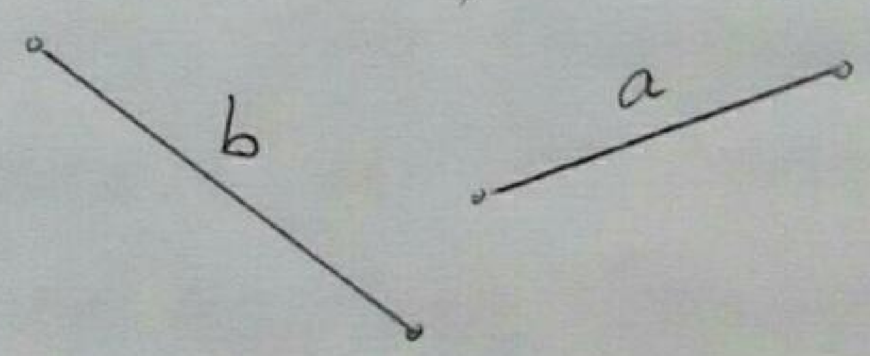
За две различни отсечки a и b можем да кажем, че едната, например a, е по-малка от b. Записване $a < b$.
Ако отсечка c се разделя от своя вътрешна точка на две отсечки, конгруентни съответно с a и b, то казваме, че c е **сбор** на a и b. Записване $c = a + b$.



Отношенията „по-малка“ и „сбор“ остават същите, ако разглежданите отсечки се заменят с равни на тях. В смисъл, ако $a^* = a$ $b^* = b$ $c^* = c$, то от $a < b$ и $c = a + b$, следват $a^* < b^*$ и $c^* = a^* + b^*$. Ето защо „по-малка“ и „сбор“ считаме за релации между класовете равни отсечки.

Да отбележим, че не можем да събираме две конкретни отсечки, но от горното наблюдение следва, че можем да събираме равни на тях отсечки.

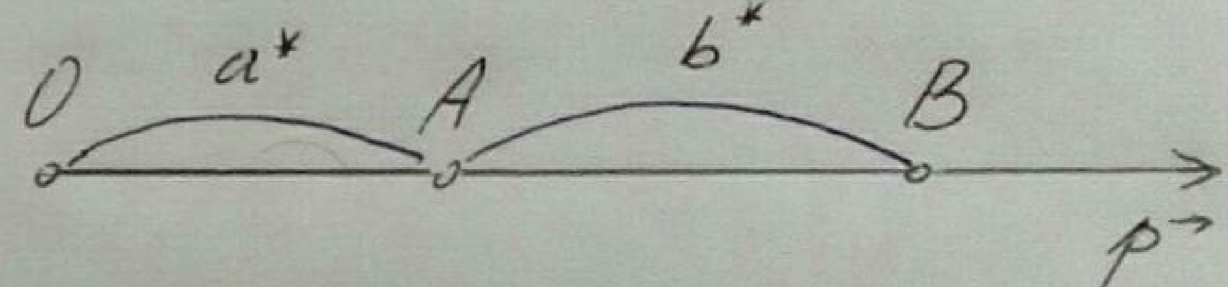
Как? Нека a и b са произволни отсечки, а $\vec{p}$ е лъч с начало O.



Нека $A \in \vec{p}$,

така че $(OA) = a$,

$B \in \overrightarrow{\overline{AO}}$ (противоположният лъч на лъча $\overrightarrow{AO}$), така че $(AB) = b$



Тогава $(OB) = (OA) + (AB)$, където $(OA) = a^* = a$ и $(AB) = b^* = b$.

По този начин, за сбор на отсечките a и b считаме отсечката $c^* = a^* + b^*$.

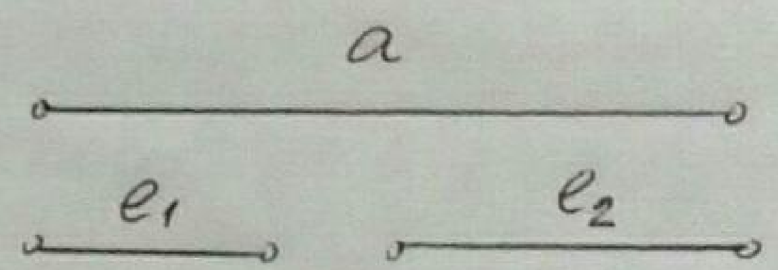
Не е случайно, че за отсечките използване същите означения – „<", „>" и „+", както и за реалните числа.
Има естествена връзка между отсечките и реалните положителни числа (тяхното множество се означава стандартно с $\mathbb{R}^+$)
Тази връзка се състои във възможността да измерване отсечките.
На произволна отсечка a се съпоставя реално положително число, $\mu(a)$, което се нарича дължина на a, при отнапред избрана единична отсечка e (еталон). На практика, вместо $\mu(a)$ пишем $|a|$.

Измерването на отсечки има следните свойства:

1. Ако $a = b$, то $|a| = |b|$ (равни отсечки имат равни дължини).
2. Ако $c = a + b$, то $|c| = |a| + |b|$ (дължината на сбора на две отсечки е сбора от дължините на отсечките).
3. $|e| = 1$. (дължината на отсечката еталон е едно).

Нека дължината на отсечка a с еталон e е реалното положително число α, т.е. $|a|_e = \alpha$. Тогава казваме, че a се получава като умножение на отсечката e с числото α – $a = \alpha e$ (накратко - отсечката a е α по еталона e).

Ясно е, че ако една и съща отсечка a измерим с два различни еталона e_1 и e_2, то дължините ѝ спрямо тях ще са различни.



Нека спрямо e_i отсечката a има дължини съответно α_i, $i=1,2$ и
дължината на e_2 спрямо e_1 е k, т.е. $|e_2|_{e_1} = k$

Имаме $a = \alpha_1 e_1$, $a = \alpha_2 e_2$, $e_2 = k e_1$ $\Rightarrow a = (\alpha_2 \cdot k) e_1 \Rightarrow$
$\alpha_1 = k\alpha_2$, а $\alpha_2 = \frac{1}{k}\alpha_1$. (ясно е, че ако $e_1 < e_2$, то $k > 1$)

Ако b е също отсечка и $b = \beta_1 e_1$, $b = \beta_2 e_2$, то също $\beta_1 = k\beta_2$

Тогава $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$ $\Rightarrow$ това отношение не зависи от еталона, а само от отсечките. Наричаме го отношение на a и b – $\frac{a}{b}$.

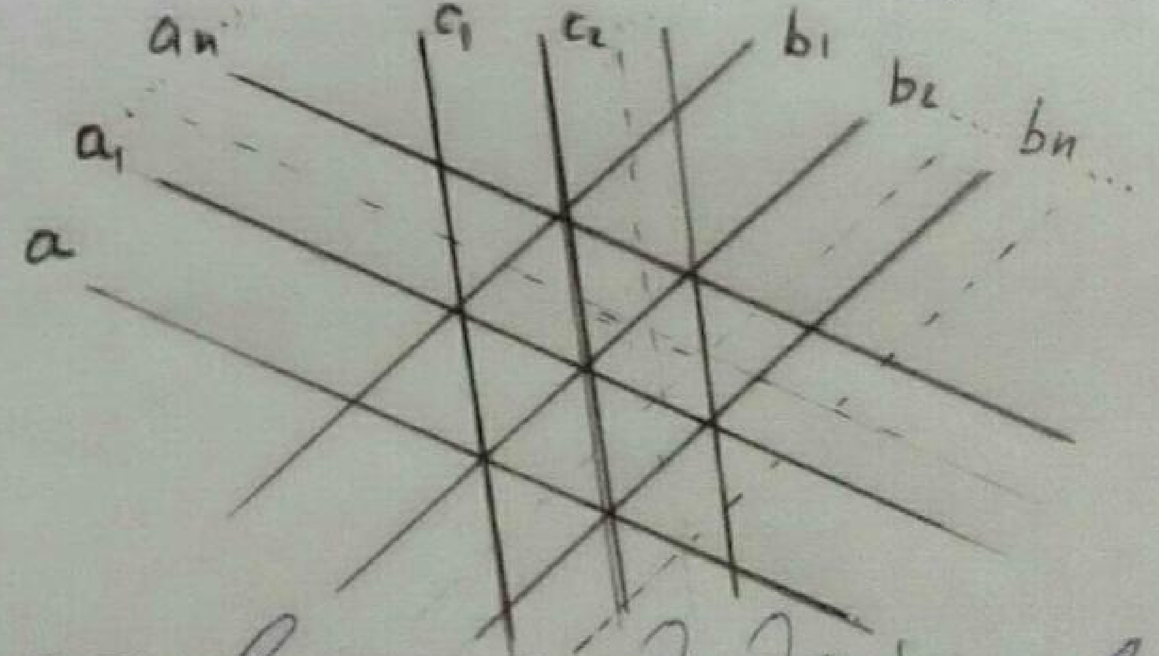
Аксиома на Евклид

Казваме, че правите a и b са успоредни, ако лежат в една равнина и нямат обща точка. Означаваме $a \parallel b$.

Аксиома на Евклид за успоредност: През точка, нележаща на дадена права минава точно една права, успоредна на дадената.

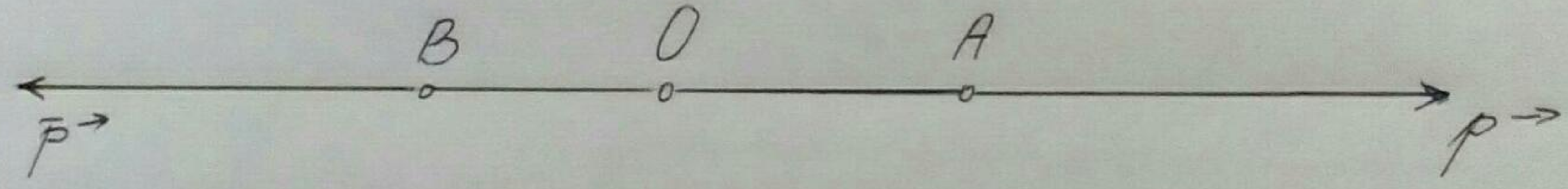
Удобно е да говорим за обобщена успоредност, като допуснем b да съвпада с a. Тогава релацията успоредност (обобщена) е релация на еквивалентност в множеството от правите в евклидовата геометрия, тъй като са изпълнени

1. За всяка права a, $a \parallel a$.
2. Ако $a \parallel b$, то $b \parallel a$.
3. Ако $a \parallel b$, $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

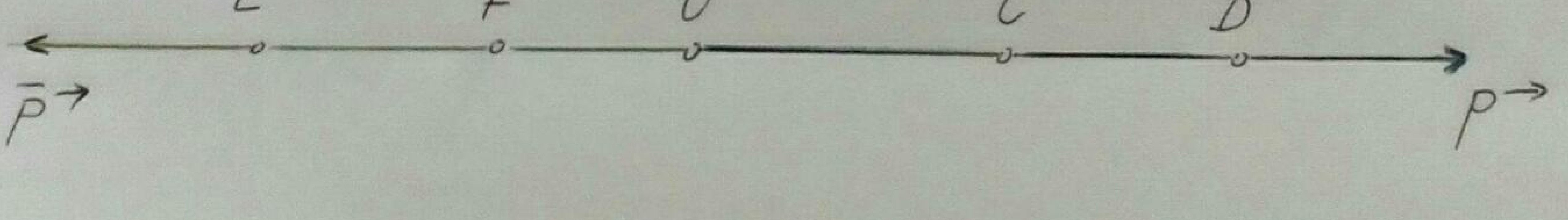


Следователно множеството от правите под действието на релацията успоредност се разбива на непресичащи се класове на еквивалентност като две прави са от един и същи клас точно тогава, когато съвпадат или са успоредни

Ако O и g са съответно точка и права, такива че $O \in g$, то O разделя множеството от точките на g (без O) на две подмножества, наречени лъчи с начало O. Ако са означени съответно с $p^{\rightarrow}$ и $\bar{p}^{\rightarrow}$, то $\bar{p}^{\rightarrow}$ се нарича противоположен на $p^{\rightarrow}$, а $p^{\rightarrow}$ – противоположен на $\bar{p}^{\rightarrow}$. Две точки са от противоположни лъчи точно тогава, когато O е между тях и



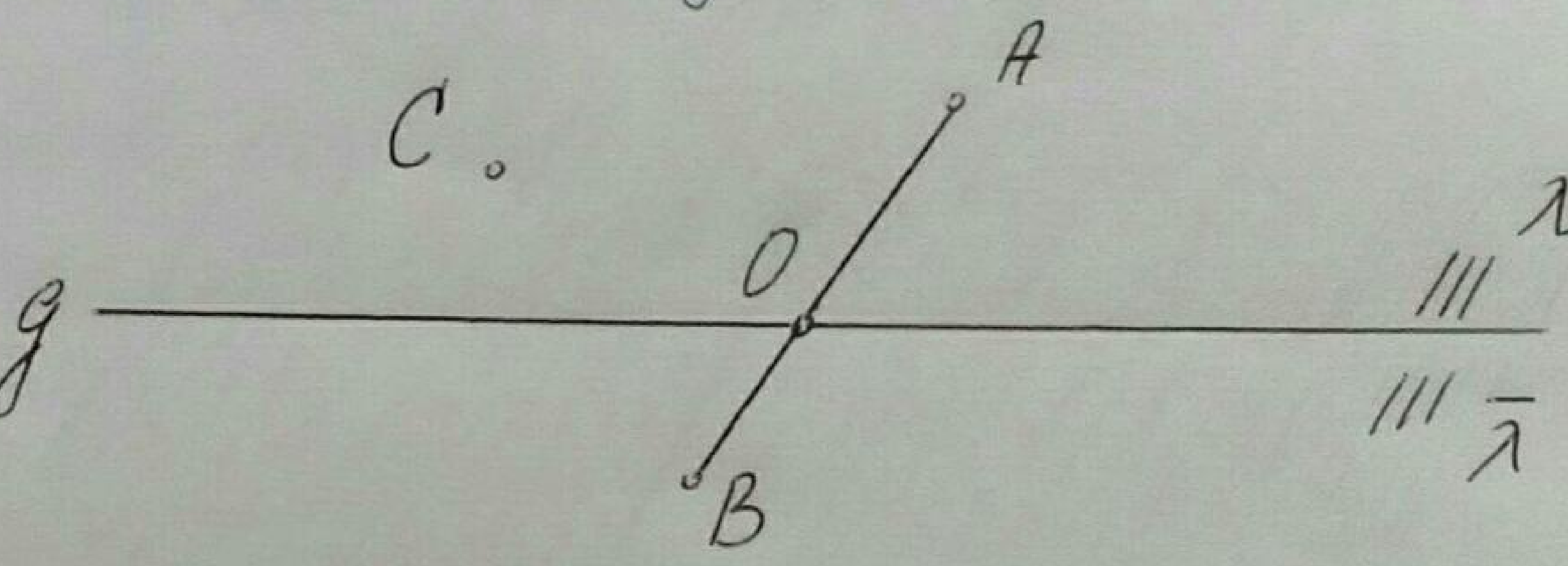
от един и същи лъч точно тогава, когато O не е между тях



Ако права g лежи в равнина α, то точките от α извън g се разделят на две подмножества, наречени полуравнини с контур g, като две точки A и B са от различни полуравнини точно тогава, когато има точка O от g, която е между тях.

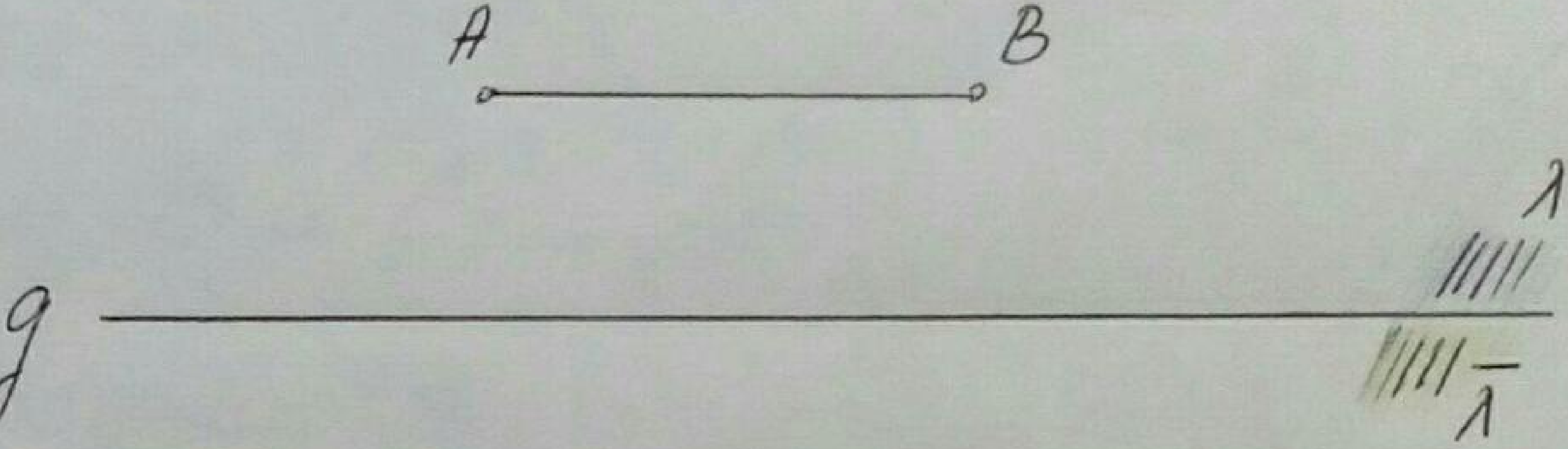
Ако едната полуравнина е означена с λ, допълнителната ѝ означаваме с $\bar{\lambda}$.

Полуравнина се определя еднозначно от контура си и коя да е своя точка

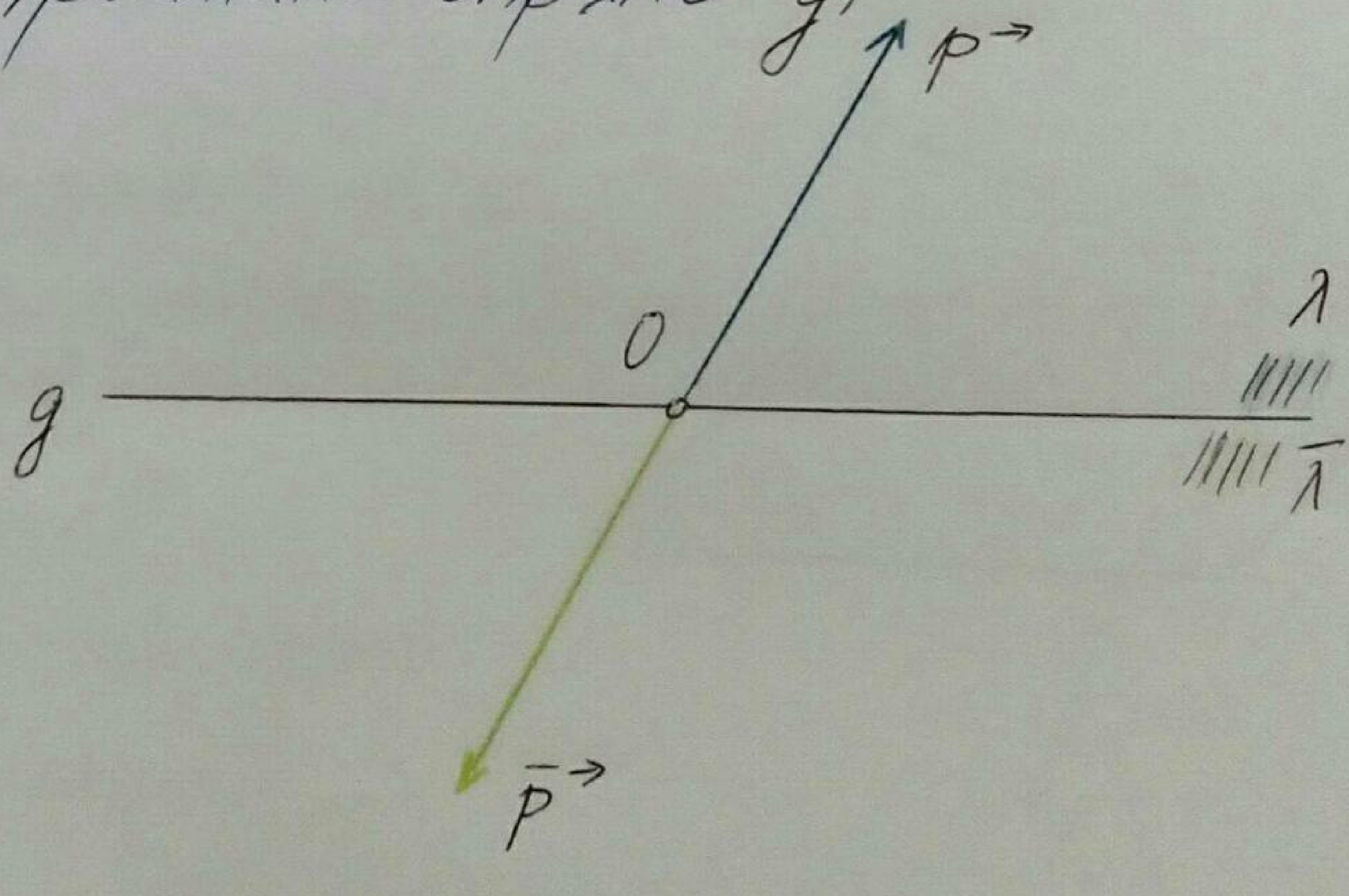


На чертежа λ се определя от A, а $\bar{\lambda}$ - от B.
Ако т. $C \in \lambda$, то отсечката (AC) не пресича g, докато (BC) пресича g.

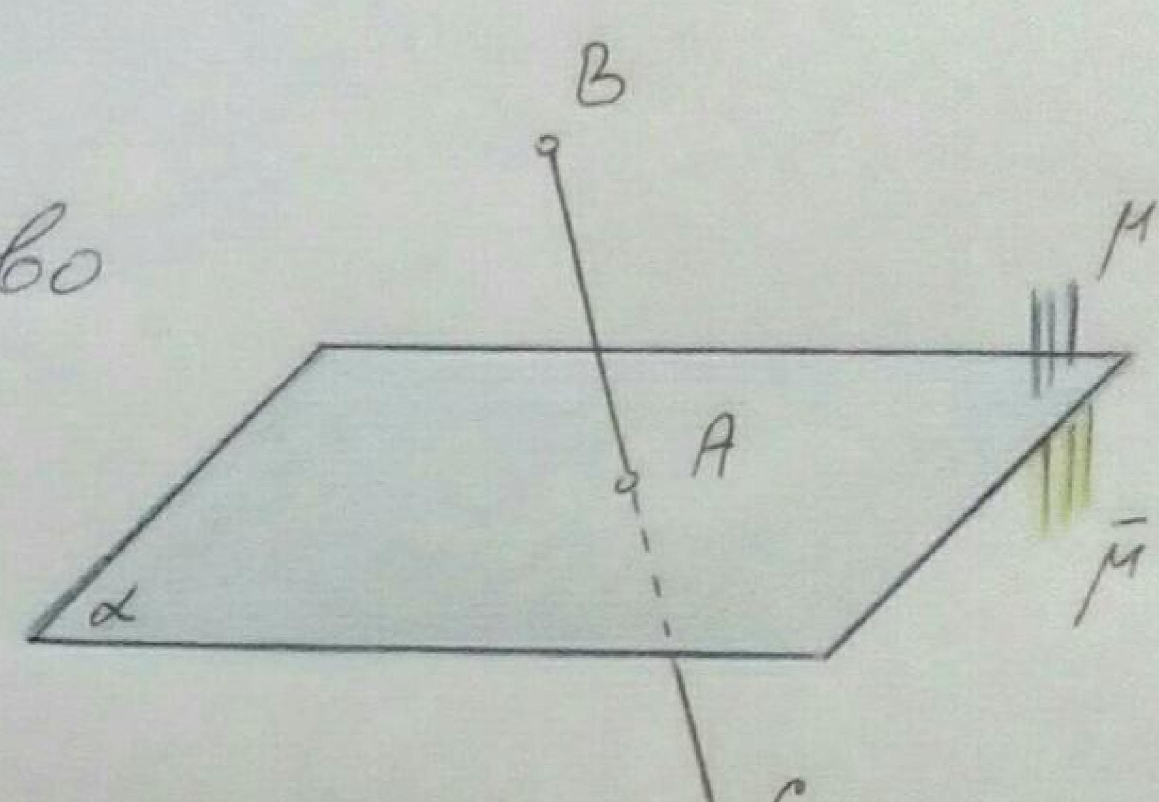
Ясно е, че ако отсечка (AB) лежи на права, успоредна на контура g, то точките A и B са в една полуравнина спрямо g.



Ако $p^{\rightarrow}$ е лъч с начало O от контура g, то $p^{\rightarrow}$ лежи изцяло в една полуравнина спрямо g, а противоположният му лъч $\bar{p}^{\rightarrow}$ – изцяло в допълнителната полуравнина.



Аналогично. Ако α е равнина, то тя разделя 3-мерното пространство на две полупространства с контур α като две точки B и C са от различни полупространства точно тогава, когато има точка A от α, която е между тях. Казано по друг начин - $B \in \mu$, $C \in \bar{\mu} \Leftrightarrow$ отсечката (BC) пресича равнината α.



Ако отсечка (DE) е успоредна на α, то D и E са в едно полупространство спрямо α.

Всеки лъч $\vec{p}$ с начало P от контура α е изцяло в едно полупространство спрямо α