Упражнение№14:

Денотационна семантика по име

В следващите няколко задачи ще обясним как се дефинира $D_N(R)$ — *денотационната семантика по име* на програмата R. В част от задачите са пресметнати и съответните функции $D_V(R)$, за да видим разликата между двата типа семантики.

Задача 1. (Писмен изпит, 20.06.2017, спец. Информатика)
Да се намерят функциите $D_V(R)$ и $D_N(R)$ за следната програма R:

```
F( X, X)    where
F( X, Y) = if  X mod 2 = 0  then  X/2  else  F( X+1, F( X, Y) )
```

Решение. В задачата се търсят и двете функции $D_V(R)$ и $D_N(R)$. Ще ги пресметнем поотделно, за да наблюдаваме как оператор, идващ от една и съща програма, но интерпретиран в две различни области на Скот, може да има съвсем различни най-малки неподвижни точки.

$D_V(R)$ се дефинира в добре познатата ни ОС $\boldsymbol{\mathcal{F}_2} = (\mathcal{F}_2,\ \subseteq,\ \emptyset^{(2)})$ с носител всички частични двуместни функции над $\mathbb{N}$. Дефиницията на $F(X, Y)$ определя следния оператор $\Gamma :\ \mathcal{F}_2 \longrightarrow\ \mathcal{F}_2$:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 0 \\ f(x+1, f(x,y)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Γ е термален оператор, следователно е непрекъснат, и значи към него можем да приложим теоремата на Кнастер-Тарски, според която за най-малката неподвижна точка f_Γ имаме следното представяне:

$$f_\Gamma\ =\ \bigcup_n\ \Gamma^n(\emptyset^{(2)}).$$

Да означим с f_n функцията $\Gamma^n(\emptyset^{(2)})$. Ще намерим явния вид на всяка от функциите f_n, което в тази област на Скот е съвсем лесна задача.

Да напомним, че функциите f_n се дефинират рекурентно по следния начин:

$$\left| \begin{array}{l} f_0 = \emptyset^{(2)} \\ f_{n+1} = \Gamma(f_n). \end{array} \right.$$

Тъгвайки от $f_0 = \emptyset^{(2)}$, за f_1 ще имаме:

$$f_1(x,y) \simeq \Gamma(\emptyset^{(2)})(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} x/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 0 \\ \emptyset^{(2)}(x+1, \emptyset^{(2)}(x,y)), & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x\ mod\ 2\ =\ 0 \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

За f_2 получаваме:

$$f_2(x,y) \simeq \Gamma(f_1)(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \ mod\ 2 \ = \ 0 \\ f_1(x+1, \underbrace{f_1(x,y)}_{\neg !}\ ), & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \ mod\ 2 \ = \ 0 \\ \neg !, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Излезе, че $f_1 = f_2$, откъдето следва, че $f_1 = f_2 = f_3 \dots$, както вече имахме повод да се убедим. Значи редицата от последователните приближения на f_Γ ще изглежда така:

$$f_0 \overset{\text{деф}}{=} \ \emptyset^{(2)} \subset \ f_1 \ = \ f_2 \ = f_3 \dots$$

Ясно е, че границата на тази редица е f_1, и следователно $f_\Gamma = f_1$. Сега за $D_V(R)$ ще имаме:

$$D_V(R)(x) \overset{\text{деф}}{\simeq} f_\Gamma(x,x) \simeq \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \ mod\ 2 \ = \ 0 \\ \neg !, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

За да дефинираме *денотационната семантика по име $D_N(R)$*, разглеждаме областта на Скот

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_2^\perp} = (\mathcal{F}_2^\perp,\ \sqsubseteq,\ \Omega^{(2)}),$$

с носител множеството от всички *тотални* функции на два аргумента в $\mathbb{N}_\perp \overset{\text{деф}}{=} \mathbb{N} \cup \{\perp\}$:

$$\mathcal{F}_2^\perp = \{f \mid f : \mathbb{N}_\perp^2 \ \to \mathbb{N}_\perp\}.$$

Наредбата $\sqsubseteq$ в $\mathcal{F}_2^\perp$ е поточковата наредба:

$$f \sqsubseteq g \iff \ \forall x \forall y\ f(x,y) \sqsubseteq g(x,y),$$

а $\Omega^{(2)}(x,y) = \perp$ за всяко x, y от $\mathbb{N}_\perp$.

В тази ОС $F(X,Y)$ определя следния оператор $\Delta\colon \mathcal{F}_2^\perp \longrightarrow \mathcal{F}_2^\perp$:

$$\Delta(f)(x,y) = \begin{cases} x /^* 2, & \text{ако } x \ mod^*\ 2 \ =^* \ 0 \\ f(x +^* 1, f(x,y)), & \text{ако } x \ mod^*\ 2 \ =^* \ 1 \\ \perp, & \text{ако } \ x = \perp. \end{cases}$$

Звездичките в базисните функции $+$, $/$, mod и $=$ означават техните *естествени продължения*. Тъй като е досадно да пишем всеки път звездички, по-надолу обикновено ще ги изпускаме, но винаги ще ги имаме предвид.

На лекции коментирахме, че някои термални оператори могат да не са непрекъснати в цялата област на Скот $\boldsymbol{\mathcal{F}_2^\perp} = (\mathcal{F}_2^\perp,\ \sqsubseteq,\ \Omega^{(2)})$. Когато, обаче, ги ограничим до множеството на всички *монотонни* функции

$$\mathcal{M}_2 = \{f \mid f\colon\ \mathbb{N}_\perp^2 \ \longrightarrow\ \mathbb{N}_\perp \ \&\ f \text{ е монотонна}\},$$

те със сигурност са непрекъснати. Операторът Δ, който дефинирахме по-горе, е термален, и значи той е непрекъснат в областта на Скот $\boldsymbol{\mathcal{M}_2} = (\mathcal{M}_2,\ \sqsubseteq,\ \Omega^{(2)})$. Тогава по теоремата на Кнастер-Тарски Δ притежава най-малка неподвижна точка f_Δ, за която е в сила представянето:

$$f_\Delta \ = \bigsqcup_n \Delta^n(\Omega^{(2)}).$$

Да отбележим, че $\Omega^{(2)}$ е монотонна функция, а операторът Δ, приложен върху монотонна функция, връща също тъй монотонна функция. Следователно за всяко n функцията $\Delta^n(\Omega^{(2)})$ е монотонна. Разбира се, и f_Δ ще е монотонна, като точна горна граница на монотонни.

Функцията f_Δ е дефинирана в $\mathbb{N}_\perp^2$, което означава, че допълнителният елемент $\perp$ участва в нейните аргументи и стойности. От друга страна, $D_N(R)$ е частична функция в $\mathbb{N}^2$. Затова се налага да върнем обратно f_Δ в света на частичните функции. Това става посредством преобразование, което на всяка $f \in \mathcal{F}_k^\perp$ съпоставя частична функция $f^\circ \in \mathcal{F}_k$, дефинирана посредством равенството

$$f^\circ(\bar{x}) \simeq \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{ако } \ f(\bar{x}) \neq \perp \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Главата на програмата R е термът $F(X,X)$, тогава по дефиниция

$$D_N(R)(x) \simeq f_\Delta^\circ(x,x).$$

За да намерим $D_N(R)$, ще трябва да пресметнем f_Δ. Нека отново с f_n означим n-тата апроксимация $\Delta^n(\Omega^{(2)})$. Имаме по определение:

$$\left|\begin{array}{l} f_0 = \Omega^{(2)} \\ f_{n+1} = \Delta(f_n). \end{array}\right.$$

От общата теория знаем, че $\Omega^{(2)} = f_0 \ \sqsubseteq\ f_1 \ \sqsubseteq\ \dots$, т.е. редицата от последователните приближения на f_Δ отново е монотонно растяща, този път, разбира се, по отношение на наредбата $\sqsubseteq$.

Сега се насочваме към определяне на явния вид на f_n. Тръгвайки от $f_0 = \Omega^{(2)}$, за f_1 ще имаме:

$$f_1(x,y) = \Delta(\Omega^{(2)})(x,y) \overset{\text{деф } \Delta}{=} \begin{cases} x/^*2, & \text{ако } x \ mod^*\ 2 \ =^*\ 0 \\ \Omega^{(2)}(x +^* 1, \Omega^{(2)}(x,y)), & \text{ако } x \ mod^*\ 2 \ =^*\ 1 \\ \perp, & \text{ако } \ x = \perp \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \; mod \; 2 \; = \; 0 \quad \underline{\textbf{(за всяко } y, \textbf{ включително за } \mathbf{y = \perp})} \\ \perp, & \text{ако } x \; mod \; 2 \; = \; 1 \; \vee \; x = \perp. \end{cases}$$

Оттук за f_2 получаваме:

$$f_2(x,y) = \Delta(f_1)(x,y) \stackrel{\text{деф } \Delta}{=} \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \; mod \; 2 \; = \; 0 \\ f_1(\underbrace{x+1}_{\text{четно}}, \underbrace{f_1(x,y)}_{\perp}), & \text{ако } x \; mod \; 2 \; = \; 1 \\ \perp, & \text{ако } \; x = \perp \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \; mod \; 2 \; = \; 0 \\ (x+1)/2, & \text{ако } x \; mod \; 2 \; = \; 1 \\ \perp, & \text{ако } x \; = \; \perp. \end{cases}$$

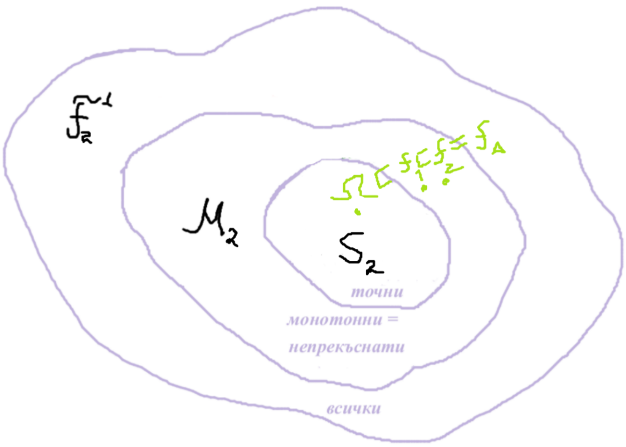
Забелязваме, че f_2 вече има числова стойност почти навсякъде (с изключение на точките от вида $(\perp, y)$). Това означава, че най-вероятно за всяко $n \geq 2$, f_n ще е същата като f_2. Наистина, при $n \geq 2$ имаме $f_2 \sqsubseteq f_n$, което означава, че за всяка т. $(x,y) \in \mathbb{N}^2_\perp$:

$$f_2(x,y) \sqsubseteq f_n(x,y).$$

Ако $x \in \mathbb{N}$, то $f_2(x,y) \in \mathbb{N}$ и от горното включване ще имаме, че $f_2(x,y) = f_n(x,y)$. При $x = \perp$ по определение

$$f_n(\perp, y) = \Delta(f_{n-1})(\perp, y) \stackrel{\text{деф } \Delta}{=} \perp.$$

Следователно от втората нататък апроксимациите на f_Δ ще са едни и същи. Както вече съобразихме, всички апроксимации са монотонни. Първата функция $\Omega^{(2)}$ е точна, докато f_1 и f_2 вече очевидно не са.



От $f_2 = f_3 = f_4 \ldots$ получаваме, че

$$f_\Delta \stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup_n \Delta^n(\Omega^{(2)}) \;=\; f_2,$$

т.е. f_Δ има вида

$$f_\Delta(x,y) = \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \; mod \; 2 \;=\; 0 \\ (x+1)/2, & \text{ако } x \; mod \; 2 \;=\; 1 \\ \perp, & \text{ако } x \;=\; \perp. \end{cases}$$

Тогава

$$f_\Delta^\circ(x,y) = \begin{cases} x/2, & \text{ако } x \; mod \; 2 \;=\; 0 \\ (x+1)/2, & \text{ако } x \; mod \; 2 \;=\; 1, \end{cases}$$

а оттук

$$D_N(R)(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f_\Delta^\circ(x,x) = \lceil \frac{x}{2} \rceil.$$

□

Задача 2. Намерете $D_N(R)$ за следната програма R:

```
F( X, Y)    where
F( X, Y) = if  X = 0  then  0  else  F( X − 1, F( X, Y) )
```

Решение. Тук операторът $\Delta : \mathcal{F}_2^\perp \longrightarrow \mathcal{F}_2^\perp$, определен от F, се задава по следния начин:

$$\Delta(f)(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ако } \; x =^* 0 \\ f(x -^* 1, f(x,y)), & \text{ако } \; x >^* 0 \\ \perp, & \text{ако } \; x = \perp. \end{cases}$$

Отново искаме да намерим явния вид на функциите $f_n \;=\; \Delta^n(\Omega^{(2)})$

За първата функция f_1 ще имаме:

$$f_1(x,y) \stackrel{\text{деф}}{=} \Delta(\Omega^{(2)})(x,y) \stackrel{\text{деф}\,\Delta}{=} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \Omega^{(2)}(x-1, \Omega^{(2)}(x,y)), & \text{ако } \; x > 0 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \perp, & \text{ако } \; x > 0 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \quad (\textbf{включително и за } \boldsymbol{y = \perp}) \\ \perp, & \text{ако } \; x > 0 \;\vee\; x = \perp. \end{cases}$$

За следващата апроксимация f_2 получаваме:

$$f_2(x,y) \overset{\text{деф}}{=} \Delta(f_1)(x,y) \overset{\text{деф}\ \Delta}{=} \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ f_1(x-1, f_1(x,y)), & \text{ако } \ x>0 \\ \perp, & \text{ако } \ x=\perp \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ f_1(0, \underbrace{f_1(1,y)}_{\perp}), & \text{ако } x=1 \\ \perp, & \text{ако } \ x>1 \\ \perp, & \text{ако } \ x=\perp \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ 0, & \text{ако } x=1 \\ \perp, & \text{ако } \ x>1 \ \vee \ x=\perp. \end{cases}$$

Това ни навежда на мисълта, че f_n ще има следния общ вид:

$$f_n(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x<n \\ \perp, & \text{ако } \ x \geq n \ \vee \ x=\perp. \end{cases} \tag{1}$$

Да го покажем с индукция относно n. За началните стойности на n това наистина е така. Сега ако допуснем, че за произволно n f_n има горния вид, то за следващата f_{n+1} ще имаме:

$$f_{n+1}(x,y) \overset{\text{деф}}{=} \Delta(f_n)(x,y) \overset{\text{деф}\ \Delta}{=} \begin{cases} 0, & \text{ако } x=0 \\ f_n(x-1, f_n(x,y)), & \text{ако } \ x>0 \\ \perp, & \text{ако } \ x=\perp \end{cases}$$

$$\overset{\text{и.х.}}{=} \begin{cases} 0, & \text{ако } \ x=0 \\ 0, & \text{ако } \ x>0 \ \& \ x-1<n \\ \perp, & \text{ако } \ x-1 \geq n \\ \perp, & \text{ако } \ x=\perp \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{ако } \ x<n+1 \\ \perp, & \text{ако } \ x \geq n+1 \ \vee \ x=\perp. \end{cases}$$

с което индуктивната ни хипотеза се потвърди и за $n+1$.

За да намерим точната горна граница $\bigsqcup\limits_n f_n$ на редицата $\{f_n\}_n$, ще се възползваме от следното наблюдение, което вече направихме:

Ако $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq \dots$ е монотонно растяща редица в $\mathcal{F}_k^{\perp}$, а $g = \bigsqcup\limits_n f_n$ е нейната точна горна граница, то за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}_{\perp}^k$ и всяко *естествено* z е вярно, че:

а) $g(\bar{x}) = \perp \iff \forall n \ f_n(\bar{x}) = \perp$;

б) $g(\bar{x}) = z \iff \exists n \ f_n(\bar{x}) = z$.

Оттук, гледайки общия вид (1) на f_n, не е трудно да се убедим, че точна горна граница на редицата $\{f_n\}_n$ ще е функцията

$$g(x,y) \overset{\text{деф}}{=} f_\Delta(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако } x=\perp. \end{cases} \tag{2}$$

Наистина, ако $x = \perp$, а $y \in \mathbb{N}_\perp$ е произволно, то за всяко n ще имаме, съгласно (1), че $f_n(x,y) = \perp$, откъдето по условието **а)** от по-горе, и $g(x,y) = \perp$.

Ако x е *естествено число*, а $y \in \mathbb{N}_\perp$, гледайки общия вид (1) на f_n, виждаме, че т. (x,y) попада в $Dom(f_n)$ за $n = x{+}1$, примерно. По-точно, имаме, че $f_n(x,y) = 0$, откъдето и $g(x,y) = 0$, съгласно условие **б)**.

Разбира се, бихме могли да използваме директно дефиницията за точна горна граница в ОС $\boldsymbol{\mathcal{F}_2^\perp} = (\mathcal{F}_2^\perp,\ \sqsubseteq,\ \Omega^{(2)})$, особено ако искаме да си представим нещата нагледно. Ето как ще изглежда редицата от стойностите на $\{f_n\}_n$ в т. (x,y), където $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}_\perp$:

$$\underbrace{f_0(x,y)}_{\perp},\ \dots\ ,\underbrace{f_x(x,y)}_{\perp},\ \underbrace{f_{x+1}(x,y)}_{0},\ \underbrace{f_{x+2}(x,y)}_{0},\ \dots$$

С други думи, редицата от тези стойности е

$$\underbrace{\perp,\ \dots\ ,\perp}_{x+1 \text{ пъти}},\ 0,\ 0,\ \dots$$

и нейната граница очевидно е 0, откъдето по дефиницията за точна горна граница получаваме, че $g(x,y) = 0$.
При $x = \perp$ ще имаме

$$\underbrace{f_0(x,y)}_{\perp},\ \underbrace{f_1(x,y)}_{\perp},\ \underbrace{f_2(x,y)}_{\perp},\ \dots$$

и следователно $g(x,y) = \perp$.
От общия вид (2) на f_Δ виждаме, че

$$f_\Delta^\circ(x,y) = 0 \quad \text{за всяко } x \in \mathbb{N} \text{ и } y \in \mathbb{N}.$$

откъдето $D_N(R) \stackrel{\text{деф}}{=} f_\Delta^\circ = \lambda x, y.0.$ □

Целта на тази задача беше да илюстрираме как се прилага теоремата на Кнастер–Тарски за функционалната плоска ОС $\mathcal{F}_2^\perp$. Ако условието беше просто да се намери $D_N(R)$, задачата има далеч по-кратко и елегантно решение.

Задача 3. Без да използвате теоремата на Кнастер-Тарски, намерете $D_N(R)$ за програмата R:

```
F( X, Y)     where
F( X, Y)  =  if  X  =  0  then  0  else  F( X − 1, F( X, Y) )
```

Решение. Отново тръгваме от оператора $\Delta\colon\ \mathcal{F}_2^\perp \longrightarrow \mathcal{F}_2^\perp$, който се определихме по-горе. Да вземем *произволна* негова неподвижна точка

$f \in \mathcal{F}_2^{\perp}$. Тогава за нея е изпълнено:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ако} \;\; x =^* 0 \\ f(x -^* 1, f(x,y)), & \text{ако} \;\; x >^* 0 \\ \perp, & \text{ако} \;\; x = \perp. \end{cases} \tag{3}$$

С индукция по $x \in \mathbb{N}$ ще покажем, че $\forall x Q(x)$, където

$$Q(x) \stackrel{\text{деф}}{\iff} \forall y \in \mathbb{N}_\perp \; f(x,y) = 0.$$

При $x = 0$ очевидно $f(0,y) \stackrel{(3)}{=} 0$, а допускайки, че за някое x $Q(x)$ е в сила, ще имаме за $x+1$ (и кое да е $y \in \mathbb{N}_\perp$):

$$f(x+1,y) \stackrel{(3)}{=} f(x, \underbrace{f(x+1,y)}_{\text{от } \mathbb{N}_\perp}) \stackrel{\text{и.х.}}{=} 0.$$

Следователно и за f_Δ ще е вярно, че $\forall x \in N \; \forall y \in \mathbb{N}_\perp \; f_\Delta(x,y) = 0$, откъдето за $D_N(R)$ отново ще имаме, разбира се, че

$$D_N(R)(x,y) \simeq f_\Delta^\circ(x,y) \;\; = \;\; 0.$$

$\square$

Всъщност горният оператор Δ има *единствена* неподвижна точка и това е функцията

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ако} \;\; x \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако} \;\; x = \perp. \end{cases}$$

Съвсем не е такова положението с оператора Γ, чрез който се дефинира семантиката по стойност на горната програма R.

Задача 4. Да се опишат всички неподвижни точки на оператора

$$\Gamma\colon \; \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2,$$

определен от програмата R от *Задача 3* в ОС $(\mathcal{F}_2, \; \subseteq, \; \emptyset^{(2)})$.

Упътване. Операторът Γ е следният:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ f(x-1, f(x,y)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Съобразете, че всички негови неподвижни точки имат този общ вид:

$$f_n(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x \leq n \\ \neg !, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \text{или} \qquad f_\infty(x,y) = 0 \quad \text{за всяко } x,y \in \mathbb{N}.$$

$\square$