Функции на две променливи - 2

Основни дефиниции и теореми

1. Граница на функция

Нека функцията $f(x;y)$ е дефинирана в множеството *D*.

Казваме, че функцията $f(x;y)$ има граница *A* в точката $(x_0;y_0)$, ако за **всяка** сходяща редица от точки $(x_n;y_n)\in D$, клоняща към $(x_0;y_0)$, съответната редица от функционални стойности $f(x_n;y_n)$ клони към *A*.

Това записваме по следните начини:

$$(x;y)\to(x_0;y_0) \quad \Rightarrow f(x;y)\to A \quad ; \qquad \lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)=A$$

$$P_n\to P_0 \quad \Rightarrow \quad f(P_n)\to A \qquad ; \qquad \lim_{P\to P_0} f(x;y)=A.$$

4. Непрекъсната функция

Нека функцията $f(x;y)$ е дефинирана в множеството *D*.

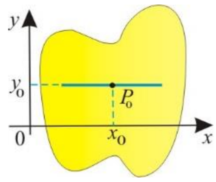
Казваме, че функцията $f(x;y)$ е непрекъсната в точката $(x_0;y_0)\in D$, ако за **всяка** сходяща редица от точки $(x_n;y_n)\in D$, клоняща към $(x_0;y_0)$, съответната редица от функционални стойности $f(x_n;y_n)$ клони към $f(x_0;y_0)$.

5. Частни производни

Нека функцията $f(x;y)$ е дефинирана в множеството *D* и точката $(x_0;y_0)\in D$.

Ако функцията $\varphi(x)=f(x;y_0)$ е диференцуема в т. x_0, казваме, че функцията $f(x;y)$ има **частна производна по** *x* в т. $(x_0;y_0)$.

(Разглеждаме функцията $f(x;y)$ само по правата през $(x_0;y_0)$, успоредно на оста Ox).



Производната $\varphi'(x_0)$ се означава така

$$f_x{}'(x_0;y_0) \text{ или } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0).$$

Аналогично се дефинира частна производна по *y*, която се означава $f_y{}'(x_0;y_0)$ или $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)$.

6. Теорема на Шварц. Нека функцията $f(x;y)$ е дефинирана в отвореното множество *D* и точката $(x_0;y_0)\in D$. Нека в *D* съществуват производните $u(x;y)=f'_x(x;y)$ и $v(x;y)=f'_y(x;y)$. Частните производни $u(x;y)$ и $v(x;y)$ се наричат втори частни производни и се означават така

$$u'_x=f''_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad u'_y=f''_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}; \quad v'_x=f''_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}; \quad v'_y=f''_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Ако производната $f''_{xy}(x;y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x;y)$ е непрекъсната в точката $(x_0;y_0)\in D$, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0;y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0;y_0).$$

Аналогично се дефинират производни от по-висок ред и ако те са непрекъснати реда на диференциране не играе роля. Например $f'''_{xxy}=f'''_{xyx}=f'''_{yxx}$.

Задача 1. Да се намерят частните производни от първи ред на функцията

а) $f(x;y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; б) $f(x;y)=\ln(x+\ln y)$ в) $f(x;y)=(1+xy)^y$.

Решение. а) Нека $y_0\neq 0$ е произволно фиксирано число. Разглеждаме функцията $\varphi(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y_0}$. Тогава

$$\varphi'(x)=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y_0}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y_0}\right)^2}.\frac{1}{y_0}=\frac{y_0}{y_0^2+x^2} \text{ или } f_x'(x;y)=\frac{y}{y^2+x^2}.$$

Нека x_0 е произволно фиксирано число. Разглеждаме функцията $\psi(y)=\operatorname{arctg}\frac{x_0}{y}$.

Имаме $\psi'(y)=\left(\operatorname{arctg}\frac{x_0}{y}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{x_0}{y}\right)^2}.\frac{-x_0}{y^2}=\frac{-x_0}{y^2+x_0^2}$ или $f_y'(x;y)=\frac{-x}{y^2+x^2}$.

б) Нека y_0 е произволно фиксирано число от дефиниционното множество на $f(x;y)$. Разглеждаме функцията

$\varphi(x)=\ln(x+\ln y_0)$. Тогава $\varphi'(x)=\frac{1}{x+\ln y_0}$ или $f_x'(x;y)=\frac{1}{x+\ln y}$.

Нека x_0 е произволно фиксирано число от дефиниционното множество на $f(x;y)$. Разглеждаме функцията $\psi(y)=\ln(x_0+\ln y)$.

Имаме $\psi'(y)=\frac{1}{x_0+\ln y}.\frac{1}{y}$ или $f_y'(x;y)=\frac{1}{(x+\ln y)y}$.

в)) Нека y_0 е произволно фиксирано число от дефиниционното множество на $f(x;y)$. Разглеждаме функцията $\varphi(x)=f(x;y_0)=(1+xy_0)^{y_0}$.

Тогава $\varphi'(x)=y_0(1+xy_0)^{y_0-1}.y_0$ или $f_x'(x;y)=y^2(1+xy)^{y-1}$.

Нека x_0 е произволно фиксирано число от дефиниционното множество на $f(x;y)$. Разглеждаме функцията $\psi(y)=f(x_0;y)=(1+x_0y)^y=e^{y\ln(1+x_0y)}$.

Имаме

$$\psi'(y)=e^{y\ln(1+x_0y)}.\left(\ln(1+x_0y)+\frac{yx_0}{1+x_0y}\right) \text{ или } f_y'(x;y)=(1+xy)^y.\left(\ln(1+xy)+\frac{yx}{1+xy}\right).$$

Задача 2. Докажете, че функцията $z(x;y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ удовлетворява навсякъде в дефиниционното множество уравнението $z''_{xx}(x;y)+z''_{yy}(x;y)=\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$.

Решение. Нека y е произволно **фиксирано число**.

Тогава $z'_x(x;y)=\left((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'_x=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}.2x$

И за всяка точка $(x;y)$ имаме $z'_x(x;y)=-x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$.

Отново при фиксирано y имаме

$$z''_{xx}(x;y)=\left(-x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_x=-(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}-x.\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}2x=\frac{3x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}-\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Като вземем предвид, че функцията е симетрична спрямо x и y, лесно се съобразява, че

$$z''_{yy}(x;y)=\frac{3y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}-\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \qquad \text{(проверете).}$$

Оттук

$$z''_{xx}(x;y)+z''_{yy}(x;y)=\frac{3x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}-\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}+\frac{3y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}-\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Задача 3. Нека $f(t)$ е два пъти диференцуема функция, дефинирана за всяко t. Да се докаже, функцията $z(x;y)=x+\varphi(xy)$ удовлетворява уравнението

$$x^2z''_{xx}-2xyz''_{xy}+y^2z''_{yy}+2yz'_y=0.$$

Решение. Намираме първо първите частни производни

$z'_x(x;y)=(x+\varphi(xy))'_x=1+\varphi'(xy).y$ диференцираме при фиксирано y

$z'_y(x;y)=(x+\varphi(xy))'_y=\varphi'(xy).x$ диференцираме при фиксирано x

Намираме вторите частни производни

$z''_{xx}(x;y)=(1+\varphi'(xy).y)_x{}'=y\varphi''(xy).y=y^2\varphi''(xy)$ диференцираме при фиксирано y

$z''_{xy}(x;y)=(1+\varphi'(xy).y)_y{}'=\varphi'(xy)+y\varphi''(xy).x=xy\varphi''(xy)+\varphi'(xy)$ диференцираме при фиксирано x

$z''_{yy}(x;y)=(\varphi'(xy).x)_y{}'=x\varphi''(xy).x=x^2\varphi''(xy)$ диференцираме при фиксирано x

Заместваме в уравнението получените производни

$$x^2z''_{xx}-2xyz''_{xy}+y^2z''_{yy}+2yz'_y=$$
$$=x^2.y^2\varphi''(xy)-2xy.[xy\varphi''(xy)+\varphi'(xy)]+y^2.x^2\varphi''(xy)+2y.\varphi'(xy).x=0.$$

Задача 4. (За самостоятелна работа) Докажете, че функцията $z(x;y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x-y}$ удовлетворява равенството $z'_x+z'_y=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$.

Задача 5. (За самостоятелна работа) Нека $f(t)$ е диференцуема функция, дефинирана за всяко t.

а) Да се докаже, функцията $z(x;y)=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ удовлетворява уравнението $xz'_x+yz'_y=0$.

б) Намерете $z''_{xy}(x;y)$.

Задача 6. Нека $f(t)$ е два пъти диференцуема функция, дефинирана за всяко t. Да се докаже, функцията $z(x;y)=x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)+\dfrac{y^2}{x}$ удовлетворява уравнението

$$x^2z''_{xx}+2xyz''_{xy}+y^2z''_{yy}=0$$

Задача 6. Дадена е функцията $z(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{при } x^2+y^2=0\end{cases}$. Да се намерят всички частните производни до втори ред.

Решение. Да намерим първо $z'_x(x;y)$.

Нека $y \neq 0$ произволно **фиксирано** число:

$$z'_x(x;y) = \left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3).2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}.$$

Нека $y = 0$. Тогава $z(x;0) = \begin{cases} \dfrac{x^3.0 - x.0^3}{x^2+0^2} = 0 & \text{при } x^2 \neq 0 \\ 0 & \text{при } x^2 = 0 \end{cases}$.

Функцията $z(x;0) = 0$ е константа и следователно $z'_x(x;0) = 0$ за всяко x. Така

$$z'_x(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{при } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{при } x^2+y^2 = 0 \end{cases}.$$

Аналогично се получава

$$z'_y(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{при } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{при } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

(Направете сметките самостоятелно)

Сега да пресметнем $z''_{xy}(x;y)$.

Нека $x \neq 0$ произволно **фиксирано** число:

$$z''_{xy}(x;y) = (z'_x(x;y))'_y = \left(\frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}\right)'_y =$$

$$= \frac{(x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4)(x^2+y^2)^2 - (x^4y + 4x^2y^3 - y^5)2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4} =$$

$$= \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}.$$

Нека $x = 0$. Тогава $z'_x(0;y) = \begin{cases} \dfrac{0^4y + 4.0^2y^3 - y^5}{(0^2+y^2)^2} = -y & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$.

Тогава $z'_x(0;y) = -y$. Така $z''_{xy}(0;y) = (-y)'_y = -1$.

Така получихме, че

$$z''_{xy}(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3} & \text{при } x^2+y^2 \neq 0 \\ -1 & \text{при } x^2+y^2 = 0 \end{cases}.$$

Аналогично се получава (направете сметките самостоятелно)

$$z''_{yx}(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3} & \text{при } x^2+y^2 \neq 0 \\ 1 & \text{при } x^2+y^2 = 0 \end{cases}.$$

Съгласно теоремата на Шварц, ако $z''_{xy}(x;y)$ е непрекъсната в т. $(0;0)$, трябва да бъде изпълнено $z''_{xy}(0;0) = z_{yx}(0;0)$. Понеже в нашата задача това равенство не е вярно, то смесените производни не са непрекъснати. Докажете, този факт директно от дефиницията на непрекъснати функции.

В точките различни $(0;0)$ рационалните функции са непрекъснати, следователно смесените производни трябва да бъдат равни.