Упражнение 8 - Теория, задачи, решения

ЕК, МС

14.04.2021

1 Двумерни дискретни случайни величини

Нека $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е вероятностното пространство на експеримент $\mathcal{E}$. Нека X и Y са дискретни случайни величини върху $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. Изображението

$$Z : \Omega \to \mathbb{R}^2 \quad \omega \longmapsto (X(w), Y(w))$$

се нарича двумерна дискретна случайна величина. Изображението

$$Z(\Omega) \longrightarrow [0,1] \quad z \longmapsto \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega |\ (X(w), Y(w)) = z\})$$

се нарича теглова функция на Z или съвместна теглова функция на X и Y. Понеже X и Y са дискретни, то образът $Z(\Omega)$ на Z е изброим. Задаването на двумерна дискретна случайна величина е еквивалентно на задаване на изброима пълна група от събития върху $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, тези събития са

$$Z^{-1}(z) = \{\omega \in \Omega |\ (X(w), Y(w)) = z\} =: \{Z = z\},$$

където z пробягва $Z(\Omega)$. Следователно $\sum_{z \in Z(\Omega)} \mathbf{P}(Z = z) = \mathbf{P}(\cup_{z \in Z(\Omega)} Z^{-1}(z)) = 1$. На двумерна дискретна случайна величина еднозначно се съпоставя теглова функция, тоест функция с дефиниционна област - дискретно подмножество на $\mathbb{R}^2$ и сума от функционалните стойности равна на 1. Тегловите функции на X и Y се получават от тегловата функция на Z:

$$\mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(\{X = x\} \cap \Omega) = \mathbf{P}(\{X = x\} \cap \left(\cup_{y \in Y(\Omega)} \{Y = y\}\right))$$

$$= \mathbf{P}(\cup_{y \in Y(\Omega)} (\{X = x\} \cap \{Y = y\})) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}(Z = (x, y)).$$

Аналогично тегловата функция $y \longmapsto \mathbf{P}(Y = y)$ на Y е $\mathbf{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(Z = (x, y))$. Същите резултати са в сила и за $n-$мерни случайни величини, $n \geq 3$.

1.1 Условия на задачите от упражнение 8

Задача 1 Нека $\xi,\ \eta$ са независими случайни величини с разпределение $\mathbf{P}(\xi = k) = \mathbf{P}(\eta = k) = q^k p,\ k = 0, 1, ...,\ p > 0,\ p + q = 1$. Нека $\zeta = \max(\xi, \eta)$.
a) Да се намери разпределението на ζ,
b) Да се намери разпределението на $\tau = (\zeta, \xi)$.

Задача 2 В урна има 3 бели и 2 черни топки. От урната теглим последователно без връщане топки. Нека ξ е номера на опита при който се появява първата бяла топка. След това продължаваме да теглим докато се появи черна топка. Нека η е номера на опита при който се появява черна топка (след първата бяла). Приемаме че $\eta = 6$, ако не се появи черна. Да се определи:
a) Съвместното разпределение на ξ и η;
b) $\mathbf{P}(\eta > 2|\xi = 1)$ и $\mathbf{P}(\eta = 3|\xi < 3)$.

Задача 3 Хвърлят се два червени и един син зар. Нека ξ е броят на шестиците върху червените зарове, а η е броя на двойките върху трите зара. Да се определи:
a) Съвместното разпределение на ξ и η;
b) $\mathbf{P}(\xi > 0|\eta = 1)$.

Задача 4 Хвърлят се два червени и един син зар. Нека X е броя на падналите се четни числа върху червените зарове, а Y е броя на падналите се петици върху трите зара. Да се определи:

а) съвместното разпределение на X и Y;
б) разпределенението на $Z = \max\{X, Y\}$, и очакването на Z, ако $Y = 1$.

Задача 5 Хвърлят се два неразличими червени зара и един син зар. Нека X е броя на падналите се четни числа върху червените зарове, а Y е броя на падналите се петици върху трите зара. Да се определи:

а) съвместното разпределение на X и Y;
б) разпределенението на $Z = \max\{X, Y\}$, и очакването на Z, ако $Y = 1$.

Задача 6 От числата 1,2,3,4,5 се избират по случаен начин три числа без повторение. Нека X е случайната величина - средното по големина от избраните три, а Y е случайната величина най-малкото от избраните числа. Да се определи:
а) съвместното разпределение на X и Y;
б) маргиналните разпределения на X и Y;
в) да се провери дали X и Y са независими;
г) ковариацията и коефициента на корелация на X и Y;
д) разпределението, очакването и дисперсията на случайната величина $Z = X - 2Y$.

Задача 7 Четири пъти последователно се хвърля монета. Нека X е броят гербове паднали се при първите три хвърляния, а Y е броят гербове от последните две. Да се определи:
а) съвместното разпределение на X и Y;
б) условните разпределения на X и Y;
в) $\mathbf{P}(X = Y)$, $\mathbf{P}(X > 1 \mid Y = 1)$ и $\mathbf{P}(X + Y > 2 \mid X = 2)$;
г) разпределението на $\mathbf{E}(X|Y)$, $\mathbf{E}(Y|X)$.

1.2 Решения на задачите от упражнение 8

Задача 1 Решение: $\mathbf{P}(\zeta = 0) = p^2$, при $k \geq 1$ получаваме

$$\mathbf{P}(\zeta = k) = \mathbf{P}(\max(\xi, \eta) = k) = \mathbf{P}(\{\xi < k,\ \eta = k\} \cup \{\xi = k,\ \eta < k\} \cup \{\xi = k,\ \eta = k\})$$

$$= \mathbf{P}(\{\xi < k,\ \eta = k\}) + \mathbf{P}(\{\xi = k,\ \eta < k\}) + \mathbf{P}(\{\xi = k,\ \eta = k\}) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{P}(\{\xi = i,\ \eta = k\})$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{P}(\{\xi = k,\ \eta = i\}) + \mathbf{P}(\{\xi = k\} \cap \{\eta = k\}) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{P}(\{\xi = i\} \cap \{\eta = k\})$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{P}(\{\xi = k\} \cap \{\eta = i\}) + \mathbf{P}(\{\xi = k\} \cap \{\eta = k\}) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{P}(\{\xi = i\})\mathbf{P}(\{\eta = k\})$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{P}(\{\xi = k\})\mathbf{P}(\{\eta = i\}) + \mathbf{P}(\{\xi = k\})\mathbf{P}(\{\eta = k\}) = 2pq^k(1 - q^k) + p^2q^{2k}, \quad \text{при } k \geq 1.$$

Следователно $\mathbf{P}(\zeta = k) = \begin{cases} p^2, & \text{за } k = 0 \\ 2pq^k(1 - q^k) + p^2q^{2k}, & \text{за } k \geq 1 \end{cases}$

b) $\mathbf{P}(\tau = (k, l)) = \mathbf{P}(\zeta = k, \xi = l) = \begin{cases} 0, & \text{за } k < l \\ pq^k(1 - q^{k+1}), & \text{за } k = l \\ p^2q^{k+l}, & \text{за } k > l \end{cases}$ При $k = l$: $\mathbf{P}(\tau = (k, k)) = \mathbf{P}(\zeta = k, \xi = k) = \mathbf{P}(\cup_{m=0}^{k}\{\xi = k, \eta = i\}) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(\{\xi = k, \eta = i\}) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(\{\xi = k\})\mathbf{P}(\{\eta = i\}) = pq^k(1 - q^{k+1})$.
При $k > l$: $\mathbf{P}(\tau = (k, l)) = \mathbf{P}(\zeta = k, \xi = l) = \mathbf{P}(\eta = k, \xi = l) = \mathbf{P}(\eta = k)\mathbf{P}(\xi = l) = p^2q^{k+l}$.

Задача 2 $\xi(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, $\eta(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. За краткост полагаме $\mathbf{P}(\xi = k,\ \eta = l) := \mathbf{P}(k, l)$.
a) Тогава $\mathbf{P}(1, 2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, $\mathbf{P}(1, 3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$, $\mathbf{P}(1, 4) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$, $\mathbf{P}(1, 5) = \mathbf{P}(1, 6) = 0$. $\mathbf{P}(2, 2) = \mathbf{P}(2, 6) = 0$, $\mathbf{P}(2, 3) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$, $\mathbf{P}(2, 4) = \mathbf{P}(2, 5) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$, $\mathbf{P}(3, 2) = \mathbf{P}(3, 3) = \mathbf{P}(3, 4) = \mathbf{P}(3, 5) = 0$, $\mathbf{P}(3, 6) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.
b) $\mathbf{P}(\eta > 2|\xi = 1) = \frac{\mathbf{P}(\cup_{k \in \{3,4,5,6\}}\{\eta = k, \xi = 1\})}{\mathbf{P}(\xi = 1)} = \frac{\mathbf{P}(1,3) + \mathbf{P}(1,4) + \mathbf{P}(1,5) + \mathbf{P}(1,6)}{\mathbf{P}(\xi = 1)} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$ и
$\mathbf{P}(\eta = 3|\xi < 3) = \frac{\mathbf{P}(1,3) + \mathbf{P}(2,3)}{\mathbf{P}(\xi = 1) + \mathbf{P}(\xi = 2)} = \frac{1}{3}$.

Задача 3 За домашна работа.
Задача 4 $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, $Y(\Omega) = Z(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. Всеки елементарен изход $w \in \Omega$ има вида $w = ((a, b), c)$, тоест е наредена двойка с първа компонента наредената двойка (a, b) - точките върху червените зарове, и втора компонента - точките върху синия зар. Следователно

$$\Omega = V(6, 2) \times V(6, 1) \Rightarrow |\Omega| = |V(6, 2)|.|V(6, 1)| = 6^3 = 216.$$

Означения: $p_{k,l} := \mathbf{P}(X = k, Y = l)$, $q_k := \mathbf{P}(X = k)$, $r_l := \mathbf{P}(Y = l)$, $s_m := \mathbf{P}(Z = m)$. Пресмятаме: $p_{0,0} = \frac{20}{216}$, $p_{0,1} = \frac{24}{216}$, $p_{0,2} = \frac{9}{216}$, $p_{0,3} = \frac{1}{216}$, $p_{1,0} = \frac{60}{216}$, $p_{1,1} = \frac{42}{216}$, $p_{1,2} = \frac{6}{216}$, $p_{1,3} = 0$, $p_{2,0} = \frac{45}{216}$, $p_{2,1} = \frac{9}{216}$, $p_{2,2} =_{2,3}= 0$ (Записваме резултата в табличен вид).

b) Пресмятаме

$$s_0 = p_{0,0} = \frac{20}{216},\ s_1 = p_{0,1} + p_{1,0} + p_{1,1} = \frac{126}{216},$$

$$s_2 = p_{0,2} + p_{2,0} + p_{2,1} + p_{1,2} + p_{2,2} = \frac{69}{216},\ s_3 = p_{0,3} + p_{1,3} + p_{2,3} = \frac{1}{216}.$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Z \mid Y = 1) &= \sum_{k=0}^{3} k\mathbf{P}(Z = k \mid Y = 1)\\ &= \frac{\mathbf{P}(Z = 1, Y = 1)}{\mathbf{P}(Y = 1)} + \frac{2\mathbf{P}(Z = 2, Y = 1)}{\mathbf{P}(Y = 1)}\\ &= \frac{p_{0,1} + p_{1,1}}{r_1} + \frac{2p_{2,1}}{r_1} = \frac{84}{75} = 1.12\end{aligned}$$

Задача 5 $X(\Omega) = \{0, 1, 2\},\ Y(\Omega) = Z(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. Всеки елементарен изход $w \in \Omega$ има вида $w = ([a, b], \{c\})$, тоест е наредена двойка с първа компонента мултимножеството $[a, b]$ - точките върху червените зарове, и втора компонента - точките върху синия зар. Следователно

$$\Omega = C(6, 2) \times C_6^1 \Rightarrow |\Omega| = |C(6, 2)|.|C_6^1| = 126.$$

Означения: $p_{k,l} := \mathbf{P}(X = k, Y = l),\ q_k := \mathbf{P}(X = k),\ r_l := \mathbf{P}(Y = l),\ s_m := \mathbf{P}(Z = m)$. Пресмятаме: $p_{0,0} = \frac{15}{126},\ p_{0,1} = \frac{13}{126},\ p_{0,2} = \frac{7}{126},\ p_{0,3} = \frac{1}{126},\ p_{1,0} = \frac{30}{126},\ p_{1,1} = \frac{21}{126},\ p_{1,2} = \frac{3}{126},\ p_{1,3} = 0,\ p_{2,0} = \frac{30}{126},\ p_{2,1} = \frac{6}{126},\ p_{2,2} =_{2,3}= 0$ (Записваме резултата в табличен вид).

b) Пресмятаме

$$s_0 = p_{0,0} = \frac{15}{126},\ s_1 = p_{0,1} + p_{1,0} + p_{1,1} = \frac{64}{126},$$

$$s_2 = p_{0,2} + p_{2,0} + p_{2,1} + p_{1,2} + p_{2,2} = \frac{46}{126},\ s_3 = p_{0,3} + p_{1,3} + p_{2,3} = \frac{1}{126}.$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Z \mid Y = 1) &= \sum_{k=0}^{3} k\mathbf{P}(Z = k \mid Y = 1)\\ &= \frac{\mathbf{P}(Z = 1, Y = 1)}{\mathbf{P}(Y = 1)} + \frac{2\mathbf{P}(Z = 2, Y = 1)}{\mathbf{P}(Y = 1)}\\ &= \frac{p_{0,1} + p_{1,1}}{r_1} + \frac{2p_{2,1}}{r_1} = 1.15\end{aligned}$$

Задача 6 Имаме $X(\Omega) = \{2, 3, 4\},\ Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. Нека $T = (X, Y)$ и $\mathbf{P}(X = k,\ Y = l) = p_{k,l}$.

a) Тегловата функция $(k, l) \longmapsto p_{k,l}$ на T има вида: $p_{2,1} = \frac{3}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10},\ p_{3,1} = \frac{1}{5},\ p_{4,1} = \frac{1}{10},\ p_{3,2} = \frac{1}{5},\ p_{4,2} = \frac{1}{10},\ p_{4,3} = \frac{1}{10},\ p_{2,2} = p_{2,3} = p_{3,3} = 0.$

b) Тегловата функция $k \longmapsto \mathbf{P}(X = k)$ на X има вида: $\mathbf{P}(X = 2) = \sum_{l=1}^{3} p_{2,l} = \frac{3}{10},\ \mathbf{P}(X = 3) = \sum_{l=1}^{3} p_{3,l} = \frac{2}{5},\ \mathbf{P}(X = 4) = \sum_{l=1}^{3} p_{4,l} = \frac{3}{10}$. Тегловата функция $l \longmapsto \mathbf{P}(Y = l)$ на Y има вида: $\mathbf{P}(Y=1)=\sum_{k=2}^4 p_{k,1}=\frac{3}{5},\ \mathbf{P}(Y=2)=\sum_{k=2}^4 p_{k,2}=\frac{3}{10},\ \mathbf{P}(Y=3)=\sum_{k=2}^4 p_{k,3}=\frac{1}{10}$.

c) X и Y са зависими, поради $p_{4,1}=\frac{1}{10}\neq\frac{9}{50}=\mathbf{P}(X=4)\mathbf{P}(Y=1)$.

d) $\mathsf{cov}(X,Y)=\mathbf{E}((X-\mathbf{E}X)(Y-\mathbf{E}Y))=\mathbf{E}XY-\mathbf{E}X\mathbf{E}Y=\sum_{k=2}^4\sum_{l=1}^3 klp_{k,l}-(\sum_{k=2}^4 kP(X=k))(\sum_{l=1}^3 lP(Y=l))=\frac{24}{5}-3\times\frac{3}{2}=\frac{3}{10}$. Корелационният коефициент на X и Y е: $\rho(X,Y)=\frac{\mathsf{cov}(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}=\frac{0.3}{\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{9}{20}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0.577$

e) Имаме $Z(\Omega)=\{-2,-1,0,1,2\}$ и нека $\mathbf{P}(Z=m)=p_m$. Тегловата функция $m\longmapsto p_m$ на Z се задава чрез: $p_{-2}=p_{4,3}=\frac{1}{10},\ p_{-1}=p_{3,2}=\frac{1}{5},\ p_0=p_{2,1}+p_{4,2}=\frac{2}{5},\ p_1=p_{3,1}=\frac{1}{5},\ p_2=p_{4,1}=\frac{1}{10}$. Средното и вариацията: $\mathbf{E}Z=\mathbf{E}(X-2Y)=\mathbf{E}X-2\mathbf{E}Y=0,\ D(X-2Y)=DX+4DY-4\mathsf{cov}(X,Y)=\frac{3}{5}+4\times\frac{9}{20}-4\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$.

Задача 7 $X(\Omega)=\{0,1,2,3\},\ Y(\Omega)=\{0,1,2\}$. Нека $Z=(X,Y)$ и $\mathbf{P}(X=k,\ Y=l)=p_{k,l}$.

a) Тегловата функция $(k,l)\longmapsto p_{k,l}$ на Z има вида: $p_{0,2}=p_{3,0}=0,\quad p_{0,0}=p_{0,1}=p_{1,2}=p_{2,0}=p_{3,1}=p_{3,2}=\frac{1}{16},\quad p_{1,1}=p_{2,1}=\frac{3}{16},\quad p_{1,0}=p_{2,2}=\frac{1}{8}$.

b) Нека $\mathbf{P}(X=k|\ Y=l)=q_{k,l}$ и $\mathbf{P}(Y=l|\ X=k)=r_{l,k}$. Тегловата функция $k\longmapsto\mathbf{P}(X=k)$ на X има вида: $\mathbf{P}(X=0)=\sum_{l=0}^2 p_{0,l}=\frac{1}{8},\ \mathbf{P}(X=1)=\frac{3}{8},\ \mathbf{P}(X=2)=\frac{3}{8},\ \mathbf{P}(X=3)=\frac{1}{8}$. Тегловата функция $l\longmapsto\mathbf{P}(Y=l)$ на Y има вида: $\mathbf{P}(Y=0)=\sum_{k=0}^3 p_{k,0}=\frac{1}{4},\ \mathbf{P}(Y=1)=\frac{1}{2},\ \mathbf{P}(Y=2)=\frac{1}{4}$. От $q_{k,l}=\frac{p_{k,l}}{\mathbf{P}(Y=l)}$ и $r_{l,k}=\frac{p_{k,l}}{\mathbf{P}(X=k)}$, получаваме $q_{0,2}=q_{3,0}=0,\quad q_{0,0}=q_{1,2}=q_{2,0}=q_{3,2}=\frac{1}{4},\ q_{0,1}=q_{3,1}=\frac{1}{8},\ q_{1,1}=q_{2,1}=\frac{3}{8},\ q_{1,0}=q_{2,2}=\frac{1}{2};\ r_{2,0}=r_{0,3}=0,\quad r_{0,0}=r_{2,3}=\frac{1}{2},\ r_{0,2}=r_{2,1}=\frac{1}{6},\ r_{1,0}=r_{1,1}=r_{1,2}=r_{1,3}=\frac{1}{4},\ r_{0,1}=r_{2,2}=\frac{1}{12}$. Следователно тегловата функция на $(X|Y=l)$ има вида $k\longmapsto q_{k,l},\ k\in X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$ и $l\in Y(\Omega)=\{0,1,2\}$. Аналогично, условното разпределение на Y при условие $X=k$ се задава чрез тегловата функция на $(Y|X=k):\quad l\longmapsto r_{l,k}$.

c) $\mathbf{P}(X=Y)=p_{0,0}+p_{1,1}+p_{2,2}=\frac{3}{8},\quad \mathbf{P}(X>1|\ Y=1)=\frac{p_{2,1}+p_{3,1}}{\mathbf{P}(Y=1)}=\frac{1}{2},\ \mathbf{P}(X+Y>2|\ X=2)=\mathbf{P}(Y>0|\ X=2)=\frac{p_{2,1}+p_{2,2}}{\mathbf{P}(X=2)}=\frac{5}{6}$.

d) От $\mathbf{E}(X|Y=0)=\sum_{k=0}^3 kq_{k,0}=1,\ \mathbf{E}(X|Y=1)=\frac{3}{2},\ \mathbf{E}(X|Y=2)=2,\ \mathbf{E}(Y|X=0)=\frac{1}{4},\ \mathbf{E}(Y|X=1)=\frac{7}{12},\ \mathbf{E}(Y|X=2)=\frac{5}{12},\ \mathbf{E}(Y|X=3)=\frac{5}{4}$, следва $\mathbf{E}(X|Y)(\Omega)=\{1,\frac{3}{2},2\},\ \mathbf{E}(Y|X)(\Omega)=\{\frac{1}{4},\frac{7}{12},\frac{5}{12},\frac{5}{4}\}$. Тегловата функция $k\longrightarrow s_k$ на $\mathbf{E}(X|Y)$ има вида $s_1=\mathbf{P}(Y=0)=\frac{1}{4},\ s_{\frac{3}{2}}=\mathbf{P}(Y=1)=\frac{1}{2},\ s_2=\mathbf{P}(Y=2)=\frac{1}{4}$. Тегловата функция $k\longrightarrow t_k$ на $\mathbf{E}(Y|X)$ има вида $t_{\frac{1}{4}}=\mathbf{P}(X=0)=\frac{1}{8},\ t_{\frac{7}{12}}=\mathbf{P}(X=1)=\frac{3}{8},\ t_{\frac{5}{12}}=\mathbf{P}(X=2)=\frac{3}{8},\quad t_{\frac{5}{4}}=\mathbf{P}(X=3)=\frac{1}{8}$.