Зад. По принцип: за в-ри $v_1, \dots, v_n \in V$

Розгл. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \theta$ ($\lambda_1 \dots \lambda_n$ са неизвестни)

Търсим $\lambda_1 \dots \lambda_n$. Тогава, ако $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$

$\Rightarrow v_1 \dots v_n$ са ЛЗ. Ако $\sum \lambda_i v_i = \theta$ е възможно

само за $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow v_1 \dots v_n$ - ЛН

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ винаги е реш.
- $\sum \lambda_i v_i = \theta$
  - има единств. реш. $\rightarrow$ ЛН.
  - има >1 реш. $\rightarrow$ ЛЗ

Заб. В геометрията
- 2 ЛЗ вектора $\to$ колинеарни
- 3 ЛЗ вектора $\to$ компланарни

Пр. $V = F^2$ (ЛП над F) $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

$$l(e_1, e_2) = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in F\}$$

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \lambda_1 (1,0) + \lambda_2 (0,1) = (\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2) = (\lambda_1, \lambda_2)$$

$\Rightarrow l(e_1, e_2) = F^2$ (e_1 и e_2 пораждат F^2)

Ако $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \theta = (0,0)$, то $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \Rightarrow$

e_1 и e_2 ЛН

$(\lambda_1, \lambda_2) - \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 = \vartheta = (0, 0)$

ЛК на (λ_1, λ_2), e_1 и e_2 с коеф. $\underset{\neq 0}{1}, -\lambda_1, -\lambda_2$

е нетривиална и дава ϑ $\Rightarrow$ тези в-ри са ЛЗ

Деф. $[u_1, \dots, u_n]$ — система в-ри (n-орка в-ри)

Св-ва на ЛЗ и ЛН

1) $[u]$ е ЛЗ $\Leftrightarrow$ $u = \vartheta$

1') $[u]$ е ЛН $\Leftrightarrow$ $u \neq \vartheta$

2) $[u, v]$ е ЛЗ $\Leftrightarrow$ u и v са колинеарни

($\exists \lambda \neq 0$ $u = \lambda v$ или $v = \lambda u$)

3. $[u_1 \ldots u_n]$ – ЛЗ $\iff$ един от векторите е ЛК на останалите

<u>Д-во</u> $(\Rightarrow)$

$\exists (\lambda_1 \ldots \lambda_n) : \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \theta \\ (\lambda_1 \ldots \lambda_n) \neq (0, \ldots 0) \end{array} \right.$

Б.о.о. $\lambda_n \neq 0 \Rightarrow u_n = \sum_{i=1}^{n-1} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_n} \right) u_i$

$(\Leftarrow)$ Б.о.о. u_n е ЛК на $u_1 \ldots u_{n-1}$

$\Rightarrow \exists \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1} \mid u_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \theta$

$\lambda_n := -1 \neq 0 \rightarrow (\lambda_1 \ldots \lambda_n) \neq (0, \ldots 0)$

$\Rightarrow u_1 \ldots u_n$ – ЛЗ

4) $[u_1, \dots, u_n]$ – ЛЗ $\Leftrightarrow$ $\forall \sigma \in S_n$ $[u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}]$ – ЛЗ

4') $[u_1, \dots, u_n]$ – ЛН $\Leftrightarrow$ $\forall \sigma \in S_n$ $[u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}]$ – ЛН

Зад. $[u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}]$, $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$

е подсистема на $[u_1, \dots, u_n]$

5) Всяка подсистема на ЛН система в-ри е ЛН

5') Всяка надсистема на ЛЗ система в-ри е ЛЗ

$\Leftrightarrow$ Всяка система в-ри, която съдържа ЛЗ

вектори е ЛЗ

б.о.о. $[u_1, \dots, u_n]$; $[u_1, \dots, u_k]$ − ЛЗ. Трябва
сист. подсистема
да покажем, че $[u_1, \dots, u_n]$ е ЛЗ $(k \leq n)$

$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \theta \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0) \end{array} \right. \xRightarrow[\lambda_i := 0]{i = k+1, \dots, n} \left| \begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \theta \\ (\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_k}_{\neq (0, \dots, 0)}, \overset{=0}{\lambda_{k+1}}, \dots, \overset{=0}{\lambda_n}) \neq (\overbrace{0, \dots, 0}^{n}) \end{array} \right.$

$\Rightarrow [u_1, \dots, u_n]$ − ЛЗ

б) Всяка система, която съдържа θ е ЛЗ

Основна лема на ЛА

Нека $b_1 \ldots b_n \in \ell(a_1 \ldots a_k)$ и $n > k$.

Тогава $[b_1 \ldots b_n]$ е ЛЗ

<u>Зад.</u> Повече на брой в-ри, които са ЛК на по-малко на брой в-ри са ЛЗ

<u>Д-во</u> Инд. по $\underline{k}$

$k = 1 \to n > 1 \to \underline{n \geq 2}$; $b_1 \ldots b_n \in \ell(a_1)$

$$\exists \lambda_i : b_1 = \lambda_1 a_1, \; b_2 = \lambda_2 a_1, \underbrace{\ldots b_n = \lambda_n a_1,}_{\text{може да ги няма}}$$

$$\lambda_2 b_1 + (-\lambda_1) b_2 = \theta$$

$$\lambda_1 = 0 \to b_1 = \theta \to [b_1 \dots b_n] - ЛЗ$$

$$\lambda_1 \neq 0 \to (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0) \to [b_1, b_2] - ЛЗ \to [b_1 \dots b_n] \; ЛЗ$$

Нека Тв. е вярно за k. Ще го докажем за $k+1$ $(b_1 \dots b_n \in \ell(a_1 \dots a_{k+1});\ n > k+1)$

$b_1 \dots b_n$ са ЛК на $a_1 \dots a_{k+1}$

$$b_1 = \lambda_{11} a_1 + \dots + \lambda_{1k} a_k + \lambda_{1,k+1} a_{k+1}$$

$$b_2 = \lambda_{21} a_1 + \dots + \lambda_{2k} a_k + \lambda_{2,k+1} a_{k+1}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$b_n = \lambda_{n1} a_1 + \dots + \lambda_{nk} a_k + \lambda_{n,k+1} a_{k+1}$$

$$-\frac{\lambda_{1,k+1}}{\lambda_{n,k+1}}, \; -\frac{\lambda_{2,k+1}}{\lambda_{n,k+1}}$$

Ако $\lambda_{n1} = \lambda_{n2} = \dots = \lambda_{n,k+1} = 0 \to b_n = \theta \to [b_1 \dots b_n]$ - ЛЗ

б.о.о. $\lambda_{n,k+1} \neq 0$

$$b_i' = b_i - \frac{\lambda_{i,k+1}}{\lambda_{n,k+1}} b_n \quad \text{за } i = 1 \dots n-1$$

$b_1' \dots b_{n-1}' \in \ell(a_1 \dots a_k)$; $n-1 > k$ $(n > k+1)$

От инд. доп. $\Rightarrow b_1' \dots b_{n-1}'$ са ЛЗ

$$\Rightarrow \exists \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1} : \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i b_i' = \theta \\ (\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}) \neq (0, \ldots 0) \end{array} \right.$$

$$\theta = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i b_i' = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left(b_i - \frac{\lambda_{i,k+1}}{\lambda_{n,k+1}} b_n \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i b_i + \Big(\underbrace{- \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \frac{\lambda_{i,k+1}}{\lambda_{n,k+1}}}_{=: \lambda_n} \Big) b_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$$

$$(\underbrace{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}_{\neq (0 \ldots 0)}, \lambda_n) \neq (0, \ldots 0)$$

$$\Rightarrow b_1, \ldots b_n \quad - \text{ЛЗ}$$

Базис, размерност, координати

Зад. $[a_1 \ldots a_n]$ – ЛЗ $\rightarrow$ 1 е ЛК на ост.

б.о.о. a_n е ЛК на $a_1 \ldots a_{n-1}$

$\ell(a_1 \ldots a_n) = \ell(a_1 \ldots a_{n-1})$

$(\{a_1 \ldots a_n\} \subseteq \ell(a_1 \ldots a_{n-1}) \rightarrow \ell(a_1 \ldots a_n) \subseteq \ell(\ell(a_1 \ldots a_{n-1}))$

$= \ell(a_1 \ldots a_{n-1})$

$\supseteq$ ясно$)$

Тв. $[a_1 \ldots a_n]$ – ЛН, $a \notin \ell(a_1 \ldots a_n) \Rightarrow [a_1 \ldots a_n, a]$ – ЛН

Д-во Нека $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \lambda a = \theta$ за някои $\lambda_1 \ldots \lambda_n, \lambda$

Ако $\lambda \neq 0$, то $a = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda}\right) a_i \in \ell(a_1 \ldots a_n)$ $\perp$

$\Rightarrow \lambda = 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0 \xRightarrow[\text{ЛН}]{a_1 \ldots a_n} \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

$(\ldots + \lambda \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0)$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda = 0 \Rightarrow a_1 \ldots a_n, 0 - \text{ЛН}$$

Зам. В общем случае система в-ров

$u = [u_i \mid i \in I]$; I — множ. индексов

(не в форме $\{u_i \mid i \in I\}$; $\{1,1,2\} = \{1,2\}$)

$$\begin{aligned} u : I &\longrightarrow V \\ i &\longmapsto u_i \end{aligned}$$

Тогава

— системата $\underline{u}$ е ЛЗ $\Leftrightarrow$ Ако всяка крайна нейна подсистема е ЛЗ

— $\underline{u}$ е ЛН $\Leftrightarrow$ Всяка крайна нейна подсистема е ЛН

подсистема — $J \subseteq I$ $\quad \{u_j \mid j \in J\}$ — подсистема на $\underline{u}$

— $\underline{u}$ е $\underbrace{\text{ЛЗ}}_{}$ (ЛН) $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \forall \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$

$u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_n}$ са ЛЗ (ЛН)

Опр. Системата $e = \{e_i \mid i \in I\}$ $(\{e_i \mid i \in I\} \subseteq V)$ се нарича <u>базис</u>, ако:

1/ e е ЛН

2/ $l(e) = l(\{e_i \mid i \in I\}) = V$

($\underline{e}$ е пораждащо множество на V;
$\underline{e}$ поражда V)

Забел. ЛН $\Rightarrow$ вектор. в $\underline{e}$ са различни помежду си и $\neq 0$