Матрици и наредени n-орки. Системи Линейни Уравнения

Марин Ц. Геновски
ФМИ

26 октомври 2017 г.

Матрици и наредени n-орки

Понятието за матрица от тип $m \times n$, или $m \times n$ матрица, се тълкува като правоъгълна таблица от числа, или, по-общо, елементи на кое да е фиксирано поле F, разположени съответно в m реда и n стълба. В частност, матрица от тип $n \times n$ за кое да е отнапред зададено естествено число n наричаме квадранта матрица от n-ти ред. При записване на дадена $m \times n$ матрица A използваме означението

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Елементите a_{ij} на матрицата $A = (a_{ij})_{m \times n}$ се определят еднозначно посредством двойката индекси i, j, които определят на кой ред и на кой стълб в записа на горната матрица се намира съответният елемент. Множеството, изчерпващо се от всевъзможните матрици от тип $m \times n$, чиито елементи лежат в дадено фиксирано поле F, обозначаваме $F_{m \times n}$. В действителност това множество се оказва mn-мерно линейно пространство относно операциите събиране на матрици и умножение на матрица със скаларна стойност $\lambda \in F$, които след малко ще въведем. Множеството, чиито елементи са всевъзможните квадратни матрици от n-ти ред с елементи от полето K, обикновено бележим $M_n(K)$. В този частен случай допускаме K да бъде кой да е комутативен пръстен с единица (значи не е необходимо K да бъде поле, в смисъл, че не е задължително всеки ненулев елемент на K да бъде обратим), при което самото множество $M_n(K)$ се явява пръстен с единица (в общия случай некомутативен) съгласно операциите събиране и умножение на матрици.[1] Оттук нататък ще се уговорим, освен ако изрично не е посочено нещо друго, под K да разбираме някое фиксирано числово поле, значи $K \leqq \mathbb{C}$.

Елементите от вида a_{ii} при $i = 1, \dots, n$ на дадена квадратна матрица $A \in M_n(K)$ съставляват така наречения *главен диагонал* на A. Другият диагонал на матрицата носи названието *втори*, или *второстепенен диагонал* на A. За всяко $0 \neq \lambda \in K$ матрица от вида

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \tag{2}$$

[1] Съображенията ни, когато поставихме изискването F да бъде поле, а не какъв да е комутативен пръстен с единица, се касаеха до това, че ако F не беше поле, то тогава $F_{m \times n}$ нямаше да бъде линейно пространство. Например матричният пръстен $M_n(K)$ при произволен комутативен пръстен с единица, например $K = \mathbb{Z}$, не е линейно пространство.

наричаме *скаларна матрица*. Скаларната матрица $(a_{ij})_{n\times n}$, където $a_{ii} = 1$ за всяко $i = 1, \dots, n$, наричаме *единична*. Единствената единична матрица в $M_n(K)$ обозначаваме с E_n, или просто E, ако нейният ред се подразбира. Скоро ще стане ясно, че за всяко $\lambda \in K$ взаимно еднозначно съответната на λ скаларна матрица от $M_n(K)$ се изразява като λE_n. *Нулева* матрица е всяка матрица, всичките елементи на която са тъждествено равни на числото нула.

Да транспонираме дадена матрица $A \in K_{m\times n}$ означава да разменим редовете на матрицата със съответните ѝ стълбове, значи i-тият ред сега се явява i-ти стълб, а пък j-тият стълб се явява j-ти ред, съответно за всяко $i = 1, \dots, m$ и за всяко $j = 1, \dots, n$. Транспонираната матрица на A бележим с A^t. Например транспонираната матрица на (1) е

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}. \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Двойка матрици $A, B \in K_{m\times n}$ събираме, като покомпонентно съберем съответните им елементи, значи ако

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn}, \end{bmatrix} \tag{4}$$

то $A+B = (c_{ij})_{m\times n}$, където $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$ при $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Аналогично, произведението на скаларната стойност $\lambda \in K$ с матрицата A се изразява посредством $\lambda\,(a_{ij})_{m\times n} = (\lambda a_{ij})_{m\times n}$.

Наредени n-орки наричаме матриците, които притежават един единствен ред (стълб), значи матриците от вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

или пък от вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Тези още зовем матрици-редове, съответно матрици-стълбове. Ясно е, че всевъзможните матрици от кой да е измежду посочените по-горе два типа можем да отъждествяваме с елементите на декартовото произведение K^n.

Системи Линейни Уравнения

Нека да разгледаме полиномиалния пръстен $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$, чиито елементи са всевъзможните полиноми на n неопределени (на n независими променливи) съответно с коефициенти от K. На всеки един от тези измежду тях, които имат вида $f = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu + b$ еднозначно съответства по едно *линейно алгебрично уравнение* от вида $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu + b = 0$. *Решение* на едно такова уравнение наричаме всяка наредена n-орка $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ такава, че когато положим $x_\nu = \xi_\nu$ съответно при всяко $\nu = 1, \dots, n$, горното уравнение се превръща в тъждество. В общия случай решенията на горното уравнение са безкрайно много. Произволна крайна съвкупност от уравнения от горепосочения тип наричаме *система линейни алгебрични уравнения*. Тези обикновено представяме във вида

$$\left| \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 \;+\; a_{1,2}x_2 \;+\cdots+\; a_{1,n}x_n \;=\; b_1 \\ a_{2,1}x_1 \;+\; a_{2,2}x_2 \;+\cdots+\; a_{2,n}x_n \;=\; b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right. . \tag{7}$$

Тук с $a_{i,j}$ бележим коефициента, който е разположен в i-тото уравнение пред j-тата неизвестна величина, а пък b_i е свободният член в записа на i-тото уравнение. Решение на системата е всяка наредена n-орка $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, която превръща всяко едно измежду уравненията, съставляващи тази система, в тъждество. Всяко едно решение на системата наричаме нейно *частно решение*, а пък съвкупността от всички нейни решения се нарича *общо решение* на системата.

Матрицата (1) наричаме *основна матрица* на разглежданата система линейни уравнения, а матрицата

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right], \tag{8}$$

която се получава, като към предната присъединим матрицата-стълб, чиито елементи са съответно свободните членове $b_1, b_2, \dots, b_m$, се нарича *присъединена*, или *разширена* матрица на разглежданата система.

Една система линейни алгебрични уравнения наричаме *хомогенна*, ако $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$. В противен случай системата е *нехомогенна*. Системите уравнения, които имат поне едно решение наричаме *съвместими*, а пък тези, които не притежават нито едно решение, наричаме *несъвместими*. Хомогенните системи винаги са съвместими, понеже $(0, 0, \dots, 0)$ е решение на всяка хомогенна система. Съвместимите системи с едно единствено решение са *определени*, а пък тези с две или повече решения наричаме *неопределени*. При неопределените системи известен брой измежду неизвестните величини изиграват ролята на свободни параметри, докато останалите неизвестни, наречени в този случай главни неизвестни, се изразяват с тяхна помощ.

Две системи линейни уравнения са *еквивалентни* тогава и само тогава, когато съвпадат общите им решения, значи когато всяко решение на едната система е решение и на другата система и обратно. *Елементарни преобразувания* на система линейни уравнения са следните три преобразувания.

а) Умножаване на двете страни на някое измежду дадените уравнения със скаларна стойност $0 \neq \lambda \in K$;

б) Умножаване на двете страни на някое уравнение със скаларна стойност $\lambda \in K$ и прибавянето му към друго уравнение;

в) Разменяне на местата на две измежду дадените уравнения.

В действителност се оказва, че двойка системи са еквивалентни тогава и само тогава, когато едната можем да получим чрез краен брой последователни прилагания на горните елементарни преобразувания върху другата.

Методът на Гаус за решаване на системи линейни алгебрични уравнения се състои в последователно отстраняване на неизвестните величини. Ако ни е дадена системата (7), избираме едно такова измежду дадените уравнения, което съдържа ненулев коефициент пред x_1, и, умножавайки това уравнение с подходящи константи, го прибавяме съответно към всяко друго уравнение в системата, което съдържа ненулев коефициент пред x_1. Така получаваме система, еквивалентна на първата, която съдържа x_1 само в едно от уравненията. Работейки след това само върху останалите уравнения, по съвършено същия начин отстраняваме неизвестното x_2 от всички измежду тях с изключение най-много на едно и прочее. Целта ни е получаването на система уравнения, имаща триъгълен, или, по-общо, стъпаловиден (трапецовиден) вид. Ясно е, че това може винаги да бъде осъществено въз основа на описаните по-горе елементарни преобразувания, при положение, че работим върху разширената матрица на разглежданата система (ако тази е хомогенна, то съвсем спокойно можем да се задоволим с работа върху основната матрица, тъй като при всички елементарни преобразувания свободните членове ще останат тъждествено равни на нула). След краен брой извършени елементарни преобразувания над основната (разширената) матрица на (7), неминуемо е налице точно един измежду следните три случая.

а) Получено е уравнение от вида $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu = b_i$, където $a_1 = \ldots = a_n = 0$ и $b_i \neq 0$. Ако е налице тази ситуация, то системата е несъвместима (няма решение).

б) Основната матрица на (7) е в стъпаловиден вид (значи навсякъде под главния диагонал стоят само нули), при което, евентуално след още известен брой елементарни преобразувания, можем да доведем A до *диагонален* вид, значи $a_{ij} = 0$ винаги, когато $i \neq j$. Тогава системата е определена (притежава, при това еднозначно определено решение).

в) Матрицата на системата е приведена в трапецовиден вид,както по-горе, при което обаче диагонален вид не може да бъде достигнат. Тогава системата е съвместима, но неопределена, и частните решения са безкрайно много, зависещи от един или повече параметъра.

Ще илюстрираме гореописания метод в лицето на решенията на няколко задачи.

Задача 1. Да се намерят решенията на дадената система линейни алгебрични уравнения.

$$\text{а)}\ \left|\begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 0 \\ 5x_1 & +5x_2 & -x_3 & +2x_4 & = 0 \\ 7x_1 & +9x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = 0 \end{array}\right. \qquad \text{б)}\ \left|\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +\lambda x_3 & = 1 \\ x_1 & +\lambda x_2 & +x_3 & = \lambda \\ \lambda x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \end{array}\right.$$

Решение. Няма да описваме в подробности елементарните преобразувания, извършени върху матриците на системите.

а) Тъй като системата е хомогенна, то можем да се задоволим с работа само върху основната матрица на дадената система. Съставяме тази и прилагаме върху нея необходимия брой елементарни преобразувания, докато не я доведем до трапецовиден вид. Имаме

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & -1 & 2 \\ 7 & 9 & -3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & 4 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -3 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

В записа на последната матрица сме изпуснали последните два реда, които, след като към тях добавим втория, умножен с -1, са нулеви и, понеже всяка наредена четворка $(\xi_1, \ldots, \xi_4)$ е решение на уравнението $0x_1 + \cdots + 0x_4 = 0$, не влияят на системата. Първите две неизвестни избираме за главни, а останалите две тълкуваме като свободни параметри. Полагаме $x_3 = \xi$, $x_4 = \zeta$, откъдето $x_2 = \dfrac{4\xi - 3\zeta}{5}$ и $x_1 = \dfrac{-3\xi + \zeta}{5}$.

б) Тук $\lambda \in K$ е параметър. Нека първо $\lambda \neq 0$ (понеже ще имаме да умножаваме първия ред на системата по λ). Съставяме разширената матрица на системата и я привеждаме в триъгълен вид. Имаме

$$\begin{aligned} A &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & (\lambda-1) & (1-\lambda) & (\lambda-1) \\ 0 & (1-\lambda) & (1-\lambda^2) & (1-\lambda) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & (\lambda-1) & (1-\lambda) & (\lambda-1) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & 0 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

При $\lambda = 1$ матрицата на системата се изражда в матрицата-ред

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Полагаме, както по-горе $x_2 = \xi$, $x_3 = \zeta$, откъдето наредената тройка $(-\xi - \zeta, \xi, \zeta)$ е решението на системата. Аналогично, при $\lambda = -2$ търсеното решение има вида $(\xi, \xi + 1, \xi)$. Ако сега $\lambda \neq -2$ и $\lambda \neq 1$, от $(1-\lambda)(\lambda+2)x_3 = 0$ имаме $x_3 = 0$. После $x_2 = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda - 1} = 1$ и, последно, $x_1 = 1 - 1 = 0$. Значи в този случай решението на системата е наредената тройка $(0, 1, 0)$. Непосредствена проверка показва, че същото решение получаваме и ако положим $\lambda = 0$.