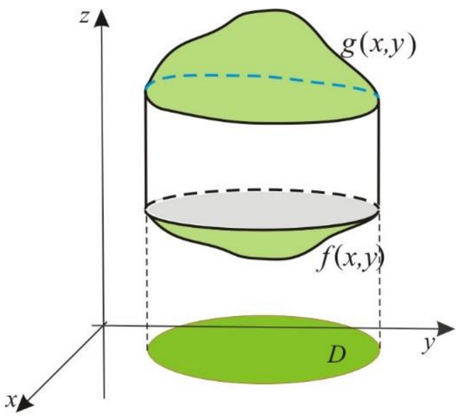
Тройни интеграли

Цилиндрично тяло – казваме, че множеството T е цилиндрично тяло, ако съществуват две непрекъснати функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$, дефинирани в компактното множество D, такива че точката $(x,y,z)\in T$ тогава и само тогава, когато $(x,y)\in D$ и $f(x,y)\le z\le g(x,y)$ (фиг. 1).



Фиг. 1

Пресмятане на тройни интеграли върху цилиндрично тяло:

$$\iiint_T F(x,y,z)dxdydz=\iint_D\left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)}F(x,y,z)dz\right)dxdy\,.$$

Смяна на променливите в тройни интеграли

Нека са дадени функциите $\begin{cases}x=f(u,v,w)\\ y=g(u,v,w)\\ z=h(u,v,w)\end{cases}$ и нека $\Delta=\begin{vmatrix}f_u' & g_u' & h_u'\\ f_v' & g_v' & h_v'\\ f_w' & g_w' & h_w'\end{vmatrix}$. Тогава

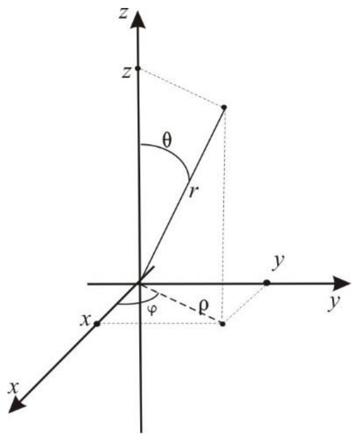
$$\iiint_T F(x,y,z)dxdydz=\iiint_{T'}F(f,g,h)|\Delta|dudvdw\,,$$

където T' е образът на T.

Смяна в сферични координати

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\sin\theta & 0\le\varphi\le 2\pi\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\,, & 0\le\theta\le\pi\\ z=r\cos\theta & r\ge 0\end{cases}\qquad \text{(фиг. 2)}$$

Функционалната детерминанта е
$\Delta=r^2\sin\theta$.



Фиг. 2

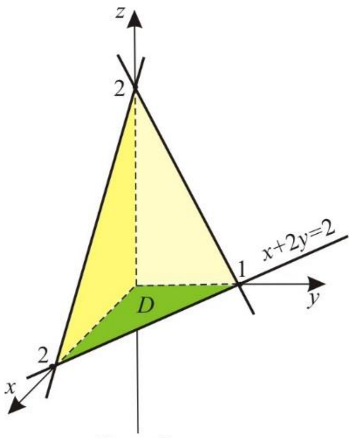
Обем V на компактно тяло T:

$$V=\iiint_T dxdydz\,.$$

Задача 1. Да се пресметне интеграла $\iiint_T xdxdydz$, където T е тетраедърът заграден от координатните равнини и равнината α с уравнение $x+2y+z=2$.

Решение. Равнината α се пресича с равнината Oxy ($z=0$) в правата $x+2y=2$. Тетраедърът T е изобразен на фиг. 3 .

Отгоре тетраедърът (като цилиндрично тяло) е заградено от равнината $z=2-x-2y$, а от долу от равнината $z=0$. Проекцията D е триъгълникът в равнината Oxy, заграден от правите $x+2y=2$, $x=0$ и $y=0$. Тогава



Фиг. 3

$$I=\iiint\limits_{T} xdxdydz=\iint\limits_{D}\left(\int\limits_{0}^{2-x-2y} xdz\right)dxdy=\iint\limits_{D} x(2-x-2y)dxdy\,.$$

Множеството D се представя като криволинеен трапец така $D:\begin{vmatrix}0\le x\le 2\\ 0\le y\le \dfrac{2-x}{2}\end{vmatrix}.$

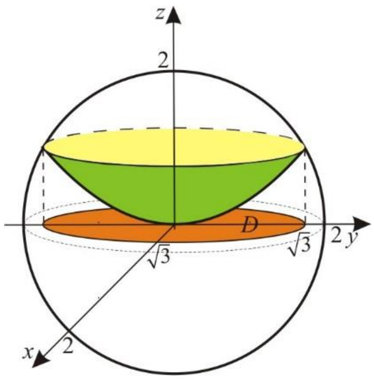
Пресмятаме двойния интеграл:

$$I=\iint\limits_{D} x(2-x-2y)dxdy=\int\limits_{0}^{2}\left(\int\limits_{0}^{\frac{2-x}{2}} x(2-x-2y)dy\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} x\left(\int\limits_{0}^{\frac{2-x}{2}}(2-x-2y)d(2-x-2y)\right)dx=-\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2} x(2-x-2y)^2\Big|_0^{\frac{2-x}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2} x(2-x)^2dx=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2}(x^3-4x^2+4x)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{16}{4}-\frac{4.8}{3}+\frac{4.4}{2}\right)=\frac{1}{3}.$$

Задача 2. Да се пресметне обемът на частта T от пространството, удовлетворяваща неравенствата $3z\ge x^2+y^2$ (ротационен параболоид) и $x^2+y^2+z^2\le 4$ (кълбо) (фиг. 4).



Фиг. 4

Решение. Двете повърхности се пресичат по кривата, решение на системата

$$\begin{vmatrix}x^2+y^2+z^2=4\\ 3z=x^2+y^2\end{vmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{vmatrix}3z+z^2=4\\ 3z=x^2+y^2\end{vmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{vmatrix}z=1\\ x^2+y^2=3\end{vmatrix}.$$

($z=-4$ очевидно не е решение на системата).

Проекцията на тази крива върху равнината Oxy се получава при $z=0$. Така множеството D в равнината Oxy се определя с неравенството $x^2+y^2\le 3$ или тялото T се състои от точките, за които е изпълнено $T:\begin{cases}(x,y)\in D\\ \dfrac{x^2+y^2}{3}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\end{cases}$. Тогава имаме

$$V=\iiint\limits_{T} dxdydz=\iint\limits_{D}\left(\int\limits_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\right)dxdy=\iint\limits_{D}\left(\sqrt{4-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{3}\right)dxdy\,.$$

Ще направим смяна в полярни координати $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases},\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ \rho\ge 0\,.$

(по този начин всъщност правим смяна в цилиндрични координати в тройния интеграл)

Множеството D се преобразува така

$$D: x^2+y^2\le 3 \quad \Leftrightarrow \quad D': \begin{cases} \rho^2\le 3, \rho\ge 0 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad D': \begin{cases} 0\le\rho\le\sqrt{3} \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases}.$$

Тогава

$$V=\iiint\limits_T dxdydz=\iint\limits_D\left(\sqrt{4-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{3}\right)dxdy=\iint\limits_{D'}\left(\sqrt{4-\rho^2}-\frac{\rho^2}{3}\right)\rho d\varphi d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-\rho^2}-\frac{\rho^2}{3}\right)\rho d\rho\right)d\varphi=2\pi\left(\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-\rho^2}\rho d\rho-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\rho^3}{3}d\rho\right)=2\pi\left(-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}(4-\rho^2)^{\frac{1}{2}}d(4-\rho^2)-\frac{\rho^4}{12}\Big|_0^{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=2\pi\left(-\frac{2}{2.3}(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}}-\frac{9}{12}\right)=2\pi(-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-\frac{3}{4})=\frac{19\pi}{6}.$$

Втори начин. Ще решим задачата като направим смяна в сферични координати:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\theta & 0\le\varphi\le 2\pi \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, & 0\le\theta\le\pi \\ z=r\cos\theta & r\ge 0 \end{cases}.$$

Преобразуваме множеството T:

$$T: \begin{cases} x^2+y^2\le 3z \\ x^2+y^2+z^2\le 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad T': \begin{cases} r^2\sin^2\theta\le 3r\cos\theta \\ r^2\le 4, r\ge 0 \\ 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\theta\le\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad T': \begin{cases} 0\le r\le\dfrac{3\cos\theta}{\sin^2\theta} \\ 0\le r\le 2 \\ 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\theta\le\pi \end{cases}.$$

Ограниченията за r са две и r трябва да бъде по-малко от по-малкото. Затова T' ще се разложи на две части:

$$-\begin{cases} 0\le\dfrac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}\le 2 \\ 0\le\theta\le\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2\theta+3\cos\theta-2\le 0 \\ \cos\theta\ge 0 \\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(\cos\theta-\frac{1}{2})(\cos\theta+2)\le 0 \\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta-\frac{1}{2}\le 0 \\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

Така за T_1' получаваме

$$T_1': \begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ \dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \\ 0\le r\le\dfrac{3\cos\theta}{\sin^2\theta} \end{cases} \quad \text{или} \quad T_1': \begin{cases} (\rho,\varphi)\in D_1 \\ 0\le r\le\dfrac{3\cos\theta}{\sin^2\theta} \end{cases}, \text{ където } D_1: \begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ \dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

$$-\begin{cases} \dfrac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}\ge 2 \\ 0\le\theta\le\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2\theta+3\cos\theta-2\ge 0 \\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(\cos\theta-\frac{1}{2})(\cos\theta+2)\ge 0 \\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta-\frac{1}{2}\ge 0 \\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$$

$$T_2':\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}\\ 0\le r\le 2\end{cases}\quad \text{или}\quad T_2':\begin{cases}(\rho,\varphi)\in D_2\\ 0\le r\le 2\end{cases},\ \text{където}\ D_2:\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}\end{cases}.$$

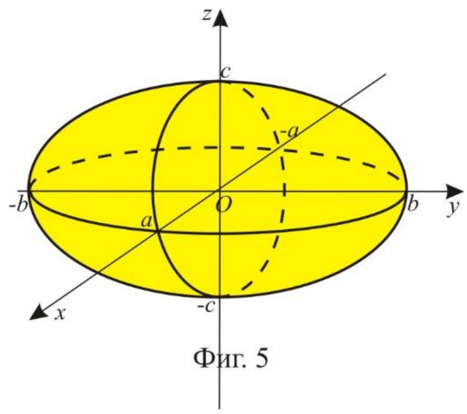
Тогава обемът на тялото е

$$V=\iiint\limits_T dxdydz=\iiint\limits_{T'} r^2\sin\theta drd\varphi d\theta=\iiint\limits_{T_1'} r^2\sin\theta drd\varphi d\theta+\iiint\limits_{T_2'} r^2\sin\theta drd\varphi d\theta=$$

$$=\iint\limits_{D_1}\left(\sin\theta\int\limits_0^{\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}} r^2dr\right)d\varphi d\theta+\iint\limits_{D_2}\left(\sin\theta\int\limits_0^2 r^2dr\right)d\varphi d\theta=$$

$$=9\iint\limits_{D_1}\frac{\sin\theta\cos^3\theta}{\sin^6\theta}d\varphi d\theta+\frac{8}{3}\iint\limits_{D_2}\sin\theta d\varphi d\theta=9\int\limits_0^{2\pi}\left(-\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{cotg}^3\theta d\operatorname{cotg}\theta\right)d\varphi+\frac{8}{3}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta d\theta\right)d\varphi=$$

$$=2\pi.9.\left(-\frac{1}{4}\operatorname{cotg}^4\theta\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right)-\frac{16\pi}{3}\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=2\pi.\frac{1}{4}-\frac{16\pi}{3}\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{19\pi}{6}.$$



Фиг. 5

Задача 3. Да се пресметне обемът на елипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1,\ a\ge 0, b\ge 0, c\ge 0$.

Решение. Ще направим смяна в обобщени сферични координати
$$\begin{cases}x=ar\cos\varphi\sin\theta\\ y=br\sin\varphi\sin\theta\\ z=cr\cos\theta\\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\pi,\ r\ge 0\end{cases}.$$

Първо да пресметнем функционалната детерминанта

$$\Delta(\varphi,\theta,r)=\begin{vmatrix}x_\varphi' & y_\varphi' & z_\varphi'\\ x_\theta' & y_\theta' & z_\theta'\\ x_r' & y_r' & z_r'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-a\sin\varphi\sin\theta & br\cos\varphi\sin\theta & 0\\ ar\cos\varphi\cos\theta & br\cos\varphi\cos\theta & -cr\sin\theta\\ a\cos\varphi\sin\theta & b\sin\varphi\sin\theta & cr\cos\theta\end{vmatrix}=$$

$$=abcr^2\sin\theta\begin{vmatrix}-\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta\\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=$$

$$=abcr^2\sin\theta\left(-\sin\varphi\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}-\cos\varphi\begin{vmatrix}\cos\varphi\cos\theta & -\sin\theta\\ \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}\right)=$$

$$=abcr^2\sin\theta(-\sin^2\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-\cos^2\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta=-abcr^2\sin\theta.$$

Тялото T се преобразува така

$$T:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad T':\begin{cases}\frac{(ar\cos\varphi\sin\theta)^2}{a^2}+\frac{(br\sin\varphi\sin\theta)^2}{b^2}+\frac{(cr\cos\theta)^2}{c^2}\le 1\\ 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\pi\le\pi, r\ge 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad T':\begin{cases}r^2(\cos^2\varphi\sin^2\theta+\sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\theta)\le 1\\ 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\theta\le\pi, r\ge 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}(\varphi,\theta)\in D\\ 0\le r\le 1\end{cases},$$ където

$$D:\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le\theta\le\pi\end{cases}.$$

Обемът на елипсоидът е

$$V=\iiint_T dxdydz=\iiint_{T'}\left|-abcr^2\sin\theta\right|d\varphi d\theta dr=abc\iint_D\left(\sin\theta\int_0^1 r^2dr\right)d\varphi d\theta=$$

$$=abc\int_0^1 r^3dr.\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\right)d\varphi=\frac{abc}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta.\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{3}(-\cos\pi+\cos 0).2\pi=\frac{4\pi}{3}abc\,.$$

Домашна работа

1. Пресметнете тройния интеграл $\iiint_T (x^2+y^2)dxdydz$, където $T:\begin{cases}1\le x^2+y^2+z^2\le 4\\ z\ge 0\end{cases}$.

2. Намерете обема на тялото, заградено от равнините с уравнения $y=0$, $z=0$, $3x+2y=12$, $3x+y=6$ и $x+y+z=6$.