10. Класификация на еднаквостите в пространството.

10 I. Еднаквости, които имат поне една неподвижна точка.

Теорема 1. Ако еднаквост има неподвижна точка, то тя има и неподвижна права, инцидентна с нея.

Док. Нека φ е еднаквост, която спр. окс $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ има представянето

$$(1) \quad \varphi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}, \quad A = a_{ij}, \quad A \text{ – ортогонална} - AA^T = E.$$

Без огран. на общността (б.о.о) можем да изберем: неподв. за φ т-ка да е O, т.е. $\varphi(O) = O \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ще док., че $\exists$ права l, $l \ni O$: $\varphi(l) = l$.

За целта е достат. да покажем, че $\exists$ т. $L(x, y, z) \neq O$ и $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ такива, че $\vec{OL'} = k\vec{OL}$ ($\vec{OL} \parallel \vec{OL'}$)

$\Rightarrow$ е необходимо $x' = kx$, $y' = ky$, $z' = kz$ $\Rightarrow$

Търсим реш-я (ненулеви) на с-мата

$$(2) \quad \begin{cases} (a_{11} - k)x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + (a_{22} - k)y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33} - k)z = 0 \end{cases}$$

Тази лин. хомог. с-ма има ненулево реш-е

$$\Longleftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow k^3 + ak^2 + bk - \underbrace{\det A}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow$$

Отн. k това е у-ние от III-та степен с реални коефициенти $\Rightarrow$ има поне един реален корен $k_0 \neq 0$ и нека (x_0, y_0, z_0) е ненул. реш-е на с-мата ( ), което съответства на k_0. $\Rightarrow$

т. $L_0(x_0, y_0, z_0) \xrightarrow{\varphi} L_0'(k_0x_0, k_0y_0, k_0z_0)$ — вследствие $k_0 = \pm 1$

$\Rightarrow \overrightarrow{OL_0} \xrightarrow{\varphi} \overrightarrow{OL_0'} = k\overrightarrow{OL_0}$.

Нека $l = OL_0 \Rightarrow \varphi(l) = l$. $\square$

* * * * * *

Нека φ е еднаквост, която има неподв. т-ка $O \Rightarrow$ неподв. права $l \ni O$. Избираме к-та с-ма така, че $K = O\vec{e_1}e_2e_3$ - ортон. и $l \equiv Oz$, т.е. $l \parallel \vec{e_3}$

От $Oz \xrightarrow{\varphi} Oz \Rightarrow \forall$ т. $M(0,0,z) \xrightarrow{\varphi} M'(0,0,\underset{=\pm z}{z'})$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 0 &= a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 0 + a_{13}\cdot z \quad \forall z \in \mathbb{R} \\ 0 &= a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot 0 + a_{23}\cdot z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_{13} = a_{23} = 0 \Rightarrow$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \end{pmatrix}$. От $\det A \neq 0 \Rightarrow a_{33} \neq 0$

От $A'A = E \Rightarrow a_{11} \cdot 0 + a_{21} \cdot 0 + a_{31} \cdot a_{33} = 0 \Rightarrow a_{31} = 0$

$a_{12} \cdot 0 + a_{22} \cdot 0 + a_{32} \cdot a_{33} = 0 \Rightarrow a_{32} = 0$

От $a_{33}^2 = 1 \Rightarrow a_{33} = \lambda = \pm 1 \Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1 \text{ и } a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \Rightarrow$$

матрицата $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ е ортогонална $\Rightarrow$

$\exists!\, \theta \in [0, 2\pi) : A^* = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}, \ \varepsilon = \pm 1. \Rightarrow$

$$\varphi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ където } A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\theta \in [0, 2\pi)$, $\varepsilon = \pm 1$, $\lambda = \pm 1$.

<u>Неподвижни точки за φ</u> ?

Т-ка $M(x, y, z)$ е неподвижна за $\varphi \Leftrightarrow (x, y, z)$ е решение на ЛХС-ма

$$(A - E^{(3)}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ където } A - E^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & -\varepsilon\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

т.е. (x, y, z) удовлетворява:

$$\left| (\cos\theta - 1)x - \varepsilon\sin\theta \cdot y = 0 \right.$$

Означаваме с $(A^* - E^{(2)}) = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta - 1 \end{pmatrix}$

Броят на ненулевите реш-я на (3) зависи както от $r(A - E^{(3)}) = R$, така и от $r(A^* - E^{(2)}) = r$

Имаме $\det(A^* - E^{(2)}) = (\varepsilon+1)(1-\cos\theta)$

$\det(A - E^{(3)}) = (\lambda - 1)[(\varepsilon+1)(1-\cos\theta)]$

Всъщност $r \leq R \leq r+1$.

Имаме следните възможности:

1. $R = 0$ $\Rightarrow r = 0 \Rightarrow \theta = 0$ и $\varepsilon = 1$

$\Rightarrow \lambda = 1$ $\quad (A - E^{(3)}) = 0$ $\quad \Rightarrow$

$\varphi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad \varphi: \begin{array}{l} x' = x \\ y' = y \\ z' = z \end{array}$

φ е идентитетът в $\mathbb{E}_3$ $\quad \varphi = id$

2. $R = 1$ $\Rightarrow$ имаме две възможности

2.1. $r = 0$ или 2.2. $r = 1$.

2.1. $r = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ $(\lambda \neq 1)$ $\overset{4}{\Rightarrow} \theta = 0, \varepsilon = 1$ $\Rightarrow$

$\varphi: \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$ $\Rightarrow$ т. $M(x, y, z)$ е неподв. за φ $\Leftrightarrow z = 0$, т.е. $\Leftrightarrow M \in Oxy$

φ - симетрия относно равнината Oxy

<u>2.2 $\tau = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \ (\tau = k) \Rightarrow \varepsilon = -1$</u>

(ако доп. $\varepsilon = 1 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \tau = 0$ и $\varphi = id.$?)

$$\varphi : \begin{cases} x' = \cos\theta . x + \sin\theta . y \\ y' = \sin\theta . x - \cos\theta . y \\ z' = z \end{cases}$$

$\Rightarrow M(x,y,z)$ е непод. за $\varphi \Leftrightarrow$

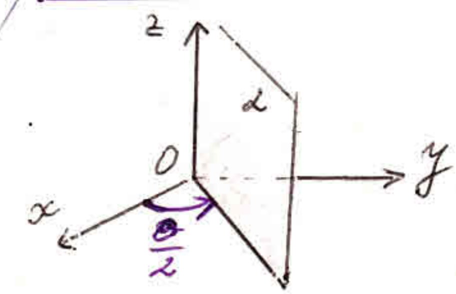
$$\left| \begin{array}{l} (\cos\theta - 1)x + \sin\theta . y = 0 \\ \sin\theta . x - (\cos\theta + 1) . y = 0 \end{array} \right.$$

(за $\theta \neq 0, \pi$) тези у-ния са лин. зависими $\Rightarrow$

коорд-те на всички неподвижни т-ки удовлетворяват у-нието на равнината:

$$\alpha : \sin\frac{\theta}{2} . x - \cos\frac{\theta}{2} . y = 0$$

и φ се нар. <u>симетрия относно равнина α</u>, α - съдържа Oz.



В частност

при $\theta = 0$ $\varphi : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$ - симетрия относно Oxz

при $\theta = \pi$: $\varphi : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$ - симетрия относно Oyz.

Лесно се проверява, че ако φ е симетрията отн. α и $P, P' = \sigma_\alpha(P)$ са двойка съответни т-ки при σ_α, то $PP' \perp \alpha$, средата на отс. (PP')

3. $k=2 \Rightarrow$ 3.1 $r=1$ или 3.2 $r=2$.

3.1 $r=1 \Rightarrow \lambda=-1$ $(k=2) \Rightarrow \varepsilon=-1$ (ако $\varepsilon=1 \Rightarrow \theta=0$ $\Rightarrow r=0$ ↯)

$\Rightarrow \varphi: \begin{cases} x' = \cos\theta . x + \sin\theta . y \\ y' = \sin\theta . x - \cos\theta . y \\ z' = \quad\quad -z. \end{cases}$ $\Rightarrow$ т. $M(x,y,z)$ е неподв. за $\Leftrightarrow z=0$ и (x,y) са реш-я

на с-мата $\begin{vmatrix} (\cos\theta-1)x + \sin\theta . y = 0 \\ \sin\theta . x - (\cos\theta+1) . y = 0 \end{vmatrix}$ от. 2.2 $\Rightarrow$

М лежи както в равнината $\alpha: \sin\frac{\theta}{2} x - \cos\frac{\theta}{2} y = 0$,

така и в р-та $Oxy: z=0$.

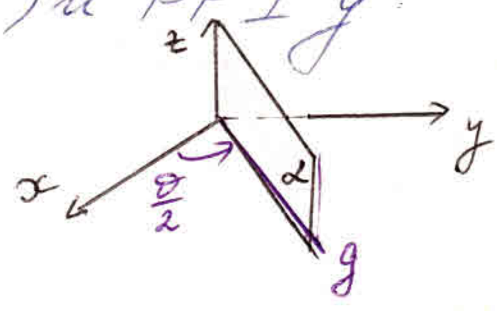
$\Rightarrow M \in g$, $g = \alpha \cap (Oxy)$, $g: \begin{cases} \sin\frac{\theta}{2} x - \cos\frac{\theta}{2} y = 0 \\ z=0 \end{cases}$

φ се нар. симетрия относно правата g

зад.: $\det A = 1 \Rightarrow \varphi$ не сменя ориентацията ... $(\varphi = \sigma_\alpha \sigma_{Oxy})$

$\varphi^2 = id$. Лесно се забелязва, че ако $P' = \varphi(P)$, $P' \neq P$,

то, $PP' \cap g = P_0$ - средата на (PP') и $PP' \perp g$



3.2 $r=2 \Rightarrow \lambda=1$

и $\varepsilon=1$, $\theta \neq 0$

$\Rightarrow \varphi: \begin{cases} x' = \cos\theta . x - \sin\theta . y \\ y' = \sin\theta . x + \cos\theta . y \\ z' = z \end{cases}$

(x,y) е реш-е на с-мата $(1 \times c')$

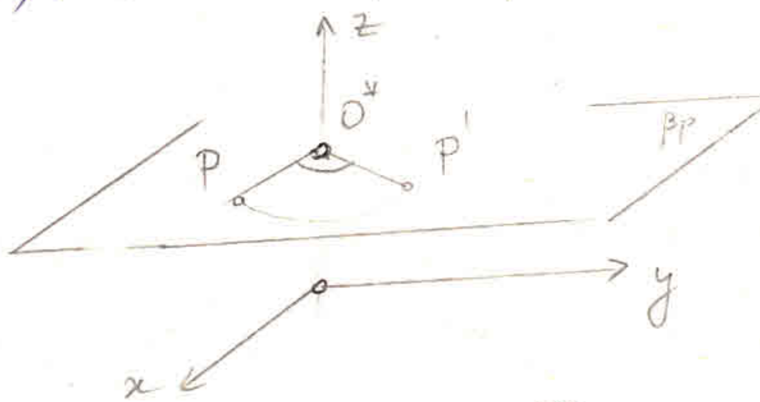
$$\begin{cases}(\cos\theta-1)x-\sin\theta\cdot y=0\\ \sin\theta\cdot x+(\cos\theta-1)y=0\end{cases}$$

z – произволно.

От $\det(A^*-E^{(2)})\neq 0 \Rightarrow \exists!$ реш.-е е тривиалното – $(0,0)$ $\Rightarrow$ единствените неподв. за φ т-ки са т-те от оста Oz, т.е. с коорд. $M(0,0,z)$ $\forall z$ –

φ - ротация с ос Oz на $\measuredangle\theta$. $\rho_{Oz}(\theta)$

Лесно се проверява, че дв-ка съответни при φ точки P и $P'=\varphi(P)$ лежат в равнина $\beta_P \perp Oz$. Ако $O^*=\beta_P\cap Oz$, то $|PO^*|=|P'O^*|$ и $\measuredangle PO^*P'=\theta$



Предишният случай 3.1 –
3.1' – ротация на $\measuredangle\pi$.

4. $R=3 \Rightarrow r=2 \Rightarrow \lambda=-1,\ \varepsilon=1,\ \theta\neq 0$ $\Rightarrow \exists!$ реш. $O(0,0,0)$

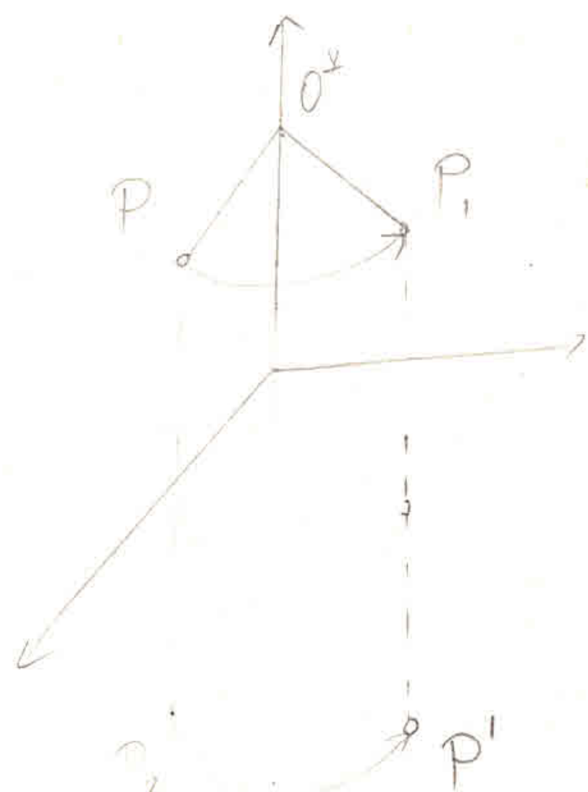
$$\Rightarrow \varphi:\begin{cases}x'=\cos\theta\, x-\sin\theta\cdot y\\ y'=\sin\theta\cdot x+\cos\theta\cdot y\\ z'=\qquad -z\end{cases}$$

Можем да представим $\varphi=\varphi_2\circ\varphi_1$, където

$$\varphi_1:\begin{cases}x'=\cos\theta\, x-\sin\theta\cdot y\\ y'=\sin\theta\cdot x+\cos\theta\cdot y\\ z'=z\end{cases},\quad \varphi_2\begin{cases}x'=x\\ y'=y\\ z'=-z\end{cases},\ \text{т.е.}$$

φ_1 е ротация с ос Oz ... – симетрията

φ е произведение от ротация и симетрия 10.0
тносно равнина, перпендикулярна на оста
на ротация
φ се нар. въртящо отражение или ротаци-
онна симетрия.
Ако $R = 3 \Rightarrow$ единствената неподвижна за
φ т-ка е O = пресечната т-ка на оста и р-та
на симетрия.
$\varphi = \sigma_\alpha \circ \rho_g(\theta)$, $g \perp \alpha$ $g \cap \alpha = G$
g - ос, θ - ъгъл, α - равнина на въртящото
отражение.
В този случай $\rho_g(\theta)\sigma_\alpha = \sigma_\alpha \rho_g(\theta)$



Зад. - напр. - ротациите с
ос Oy и Ox.

10.II Еднаквости, които нямат неподвижни точки.

Нека φ е еднаквост, която няма неподвижни точки $\Rightarrow$ спрямо всяка ОКС $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ φ а предст.:

$$\varphi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}, \; A \text{ - ортогонална и } \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

с-мата $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}$, записана $(A - E^{(3)}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

няма решение $\Leftrightarrow R = r(A - E^{(3)}) \leq 2$

Ако означим с $B = \left[A - E^{(3)} \begin{matrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{matrix} \right]_{3\times 4}$ и $\operatorname{rank}(B) \doteq R^*$, то

(разширената матрица)

За R и R^* имаме $R < R^* \leq 3$

Представяме φ като произведение от две еднаквости. $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$

$$\varphi_1 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \varphi_2 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = E^{(3)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}$$

Ясно е, че $O(0,0,0)$ е неподв. за φ_1 и както преди избиране K така, че Oz да е неподвижна за φ_1 права. От $R < 3 \Rightarrow \varphi_1$ не е въртящо отражение $\Rightarrow$ за φ остават следните възможности.

1.) $R = 0 \Rightarrow \varphi_1 = id$

2.) $R = 1 \Rightarrow \varphi_1$ - симетрия относно равнина - σ_α

1.) $k = 0 \Rightarrow k^* = 1$, $\varphi_1 = id \Rightarrow \varphi = \varphi_2$: $\begin{cases} x' = x + a_{14} \\ y' = y + a_{24} \\ z' = z + a_{34} \end{cases}$, $P \to P'$, $(x,y,z) \to (x+a_{14}, \dots$

φ - транслация с в-р $\vec{p}(a_{14}, a_{24}, a_{34})$ - τ_p

2.) $k = 1 \Rightarrow k^* = 2 \Rightarrow \varphi_1$ е симетрия отн. α $(\alpha \perp Oz)$ (или $\alpha \supset Oz$)

Можем да изберем К. с-ма : $\alpha \equiv Oxy \Rightarrow$

$\varphi_1 : \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$. Транслацията φ_2 представяме като произв-е от две транслации $\varphi_2 = \varphi_2'' \circ \varphi_2'$, където

$\varphi_2' : \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z + a_{34} \end{cases}$, $\varphi_2'' : \begin{cases} x' = x + a_{14} \\ y' = y + a_{24} \\ z' = z \end{cases}$

$(\vec{p}(a_{14}, a_{24}, a_{34}) = \vec{p_1} + \vec{p_2}$, $\vec{p_1}(0, 0, a_{34})$, $\vec{p_2}(a_{14}, a_{24}, 0))$

Тогава $\varphi = (\varphi_2'' \varphi_2') \varphi_1 = \varphi_2'' \underbrace{(\varphi_2' \varphi_1)}_{=\psi} = \varphi_2'' \psi$, където

$\psi = \varphi_2' \varphi_1 : \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z + a_{34} \end{cases}$ неподвижни за ψ. $\Rightarrow z' = z \Rightarrow z = \frac{1}{2} a_{34} \Rightarrow$

$\Rightarrow \psi$ е симетрията относно р-та $\mu : z = \frac{1}{2} a_{34}$ т.е. $\mu \parallel Oxy$ и $\mu \equiv Oxy \Leftrightarrow a_{34} = 0$

Векторът $\vec{p_2}(a_{14}, a_{24}, 0) \neq \vec{0}$. Ако доп. $\vec{p_2} = \vec{0} \Rightarrow \varphi = \psi$ - симетрия $\Rightarrow$ .. неподв. т-ки - не сме в този случай

От $\varphi = \varphi_2'' . \psi = \tau_{p_2} \cdot \sigma_\mu \Rightarrow \varphi$ е произведение от симетрия относно р-нина μ и транслация с в-р $\vec{p_2} \parallel \mu$ -

φ - плъзгащо отражение

$M \to M_1$

3. $R=2 \Rightarrow R^*=3$ и φ_1 е ротация с ос Oz

спрямо избраната к-с-ма $\varphi=\varphi_2\circ\varphi_1$, и $\varphi_2=\varphi_2''\circ\varphi_2'$,

$$\varphi_1: \begin{cases} x'=\cos\theta.x-\sin\theta.y \\ y'=\sin\theta.x+\cos\theta.y \\ z'=z \end{cases}$$, където

$$\varphi_2'' \begin{cases} x'=x \\ y'=y \\ z'=z+a_{34} \end{cases}, \quad \varphi_2' \begin{cases} x'=x+a_{14} \\ y'=y+a_{24} \\ z'=z+ \end{cases},$$

Тогава $\varphi=\varphi_2'\circ\varphi_1$,
$$\begin{cases} x'=\cos\theta.x-\sin\theta.y+a_{14} \\ y'=\sin\theta.x+\cos\theta.y+a_{24} \\ z'=z \end{cases}$$

е ротация с ос Oz, ако $a_{14}=a_{24}=0 \Rightarrow a_{34}\neq 0$
или с ос $\ell^* \parallel Oz$

Ако $(a_{14},a_{24})\neq(0,0)$, то лин-та нехомог. с-ма:
$$\begin{cases} (\cos\theta-1).x-\sin\theta.y+a_{14}=0 \\ \sin\theta.x+(\cos\theta-1)y+a_{24}=0 \end{cases}$$
има $\det\neq 0$
$=2(\cos\theta-1)\neq 0$ иначе

има $\exists!$ ненул. решение $(x_0,y_0) \Rightarrow$

$M(x_0,y_0,z) \xrightarrow{\varphi} M(x_0,y_0,z)\ \forall z\in\mathbb{R} \Rightarrow$ всяка т-ка от правата: $\ell: \begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=\mu \end{cases}, \mu\in\mathbb{R}$ е неподвижна за $\varphi \Rightarrow$

$\varphi=\rho_\ell(\theta)$ - т.е. φ е ротация на ъгъл θ с ос $\ell\parallel Oz$.
Едновременно φ_2'' е транслация с в-р $\vec{p}(0,0,a_{34})$, $\vec{p}\neq\vec{0}$
/в противен случай $\Rightarrow \varphi''=id \Rightarrow \varphi=\varphi$ - ротация $\Rightarrow$
еднаквостта ще има неподв. т. ...

Тъй като $\vec{p} \parallel Oz \Rightarrow \vec{p} \parallel l \Rightarrow \varphi = \varphi_2 \circ \varphi$ е
произведение от ротация с ос l и трансла-
ция с вектор $\vec{p} \parallel l$ φ се нар. винтово движение.
l - ос на φ, θ - ъгъл на φ, $|\vec{p}|$ - стъпка на φ.
$\varphi = \tau_p \circ \rho_l(\theta) = \rho_l(\theta)\tau_p$

„Рекапитулация" - Класификация.

Нека спр. ОКС $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ еднаквост φ е задад. с

$$\varphi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} \text{ и } B = \left[A - E^{(3)} \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} \right] \text{ и}$$

$R = r(A - E^{(3)})$, $R^* = r(B)$.

Тогава φ е от един от следните видове:

	R	R^*	Вид еднаквост	Неподв. т-ки
1.	0	0	идентитет - id	∀ т. ∀X
2.	0	1	транслация с $\vec{p}$	
3	1	1	симетрия спрямо р-на α σ_α	$\forall X \in \alpha$
4.	1	2	плъзгащо отражение: $\varphi = \tau_p \sigma_\alpha$, $\vec{p} \parallel \alpha$	няма
5	2	2	Ротация с ос l $\rho_l(\theta)$	$\forall X \in l$
6	2	3	винтово д-ние $\varphi = \rho_l(\theta)\tau_p$, $\vec{p} \parallel l$	няма
7.	[illegible]	[illegible]	[illegible]	т-ка $O = \alpha \cap l$.