6. Класификация на еднаквостите в равнината

Класификацията на еднаквостите в E_2 се извършва въз основа на броя и разположението на неподвижните за еднаквост φ точки.

Нека φ е еднаквост, M - точка и $\varphi(M) = M'$. Тогава спрямо коя да е ортонормирана координатна система φ има вида

$\boxed{\varphi : x' = Cx + \vec{p}}$, където C е ортогонална матрица ($CC^T = E$)

Ако $M(x,y)$, то $\varphi(M) = M'(x',y')$, където в равнинния случай, който разглеждаме в тази тема матрицата C е от вида

$$C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}, \varepsilon = \pm 1. \text{ По-подробно, } \varphi: \begin{cases} x' = \cos\theta . x - \varepsilon\sin\theta . y + a \\ y' = \sin\theta . x + \varepsilon\cos\theta . y + b \end{cases}$$

Точка M се нарича неподвижна (инвариантна) за φ, ако $\varphi(M) = M$

Ако $M(x,y)$ е неподвижна за φ, то $x' = x$ и $y' = y$ $\Leftrightarrow$

$$(1) \begin{cases} (\cos\theta - 1)x - \varepsilon\sin\theta . y + a = 0 \\ \sin\theta . x + (\varepsilon\cos\theta - 1) . y + b = 0 \end{cases}$$

Решенията на (1) зависят от Δ, където $\Delta = \begin{vmatrix} \cos\theta - 1 & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta - 1 \end{vmatrix}$ $\Rightarrow$

$$\Delta = (\varepsilon + 1)(1 - \cos\theta)$$

За вектора $\vec{p}(a,b)$ имаме две възможности -
или $\vec{p}=\vec{0}$ или $\vec{p}\neq\vec{0}$
Да разгледаме първо случая, когато $\vec{p}=\vec{0}$. Тогава системата (1) е линейна хомогенна система и има тривиално решение $x=0, y=0$.
Следователно точката $O(0,0)$ е неподвижна за φ точка(*)

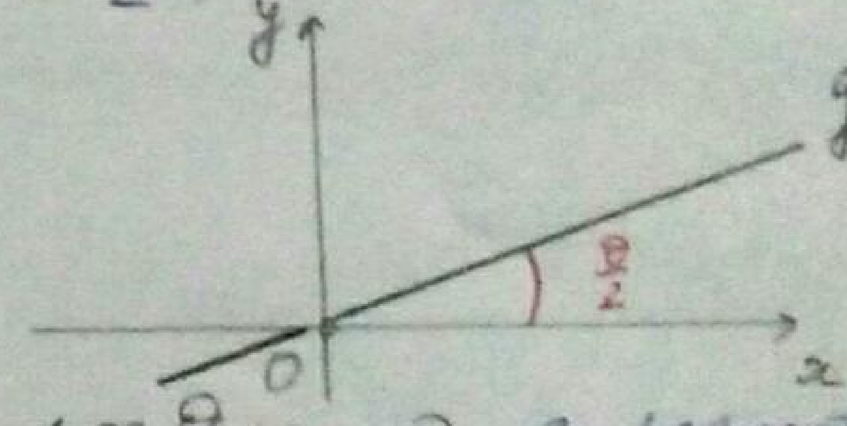
I.1. Нека $\Delta = 0$

I.1.1. При $\theta=0$ и $\varepsilon=1$ имаме $\varphi:\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$ => всяка точка е неподвижна за φ, т.е. φ е идентитетът в равнината - $\varphi = id$.

I.1.2 При $\varepsilon=-1$, $\theta\neq 0$.
В този случай (1) добива вида (1') $\varphi:\begin{cases} (\cos\theta-1).x+\sin\theta.y=0 \\ \sin\theta.x-(\cos\theta+1)y=0 \end{cases}$

след преработване на у-ята ($\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, $\cos\theta-1=-2\sin^2\frac{\theta}{2}$, $1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$)
получаваме, че и двете уравнения имат вида

$\sin\frac{\theta}{2}.x-\cos\frac{\theta}{2}.y=0$.



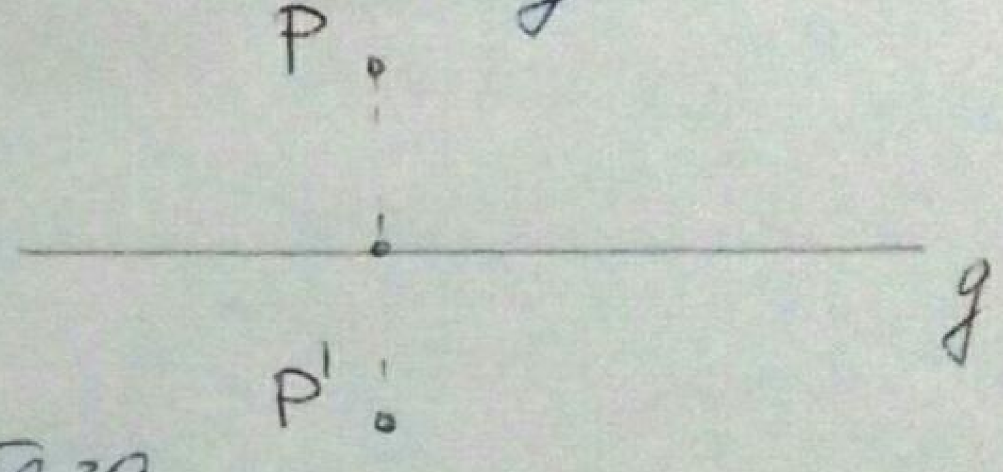
Следователно всяка точка от правата $g: \sin\frac{\theta}{2}x-\cos\frac{\theta}{2}y=0$ е неподвижна за φ и φ се нарича симетрия с ос g.
Да отбележим, че спрямо ОКС $K=O\vec{e_1}\vec{e_2}$ g сключва с Ox ъгъл $\frac{\theta}{2}$.

(*) координатите на точка, образа ѝ, матрицата C са спрямо ОКС $K=O\vec{e_1}\vec{e_2}$

I 1.3. При $\varepsilon = -1$ и $\theta = 0$

В този случай за координатите (x,y) на неподвижните точки получаване условието $y=0$ и $\varphi \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ и φ е симетрия с ос Ox

Лесно се проверява, че единствените неподвижни точки на осева симетрия σ_g са точките от оста ѝ g. Също така, двойка съответни при σ_g точки P и $P' = \sigma_g(P)$ лежат на права $PP' \perp g$ и средата P_0 на отсечката (PP') лежи върху g.
Единствените неподвижни при σ_g прави са g и перпендикулярите на g. От $\sigma_g^2 = id$ непосредствено следва, че матрицата на σ_g е симетрична спрямо коя да е ортонормирана база.

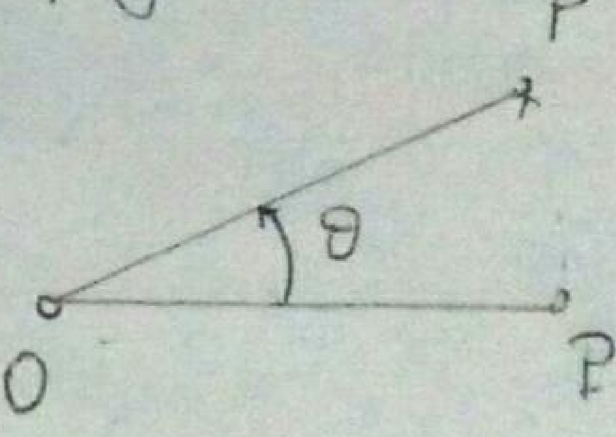


I.2. Нека $\Delta \neq 0$. Следователно $\varepsilon = 1$ и $\theta \neq 0$. Тогава (1) има единствено решение – тривиалното и $O(0,0)$ е единствената неподвижна за φ точка. Аналитично φ има вида

$$\varphi: \begin{cases} x' = \cos\theta\, x - \sin\theta\, y \\ y' = \sin\theta\, x + \cos\theta\, y \end{cases}$$

и се нарича ротация с център O и ъгъл θ.
Означаваме $\rho_O(\theta)$.

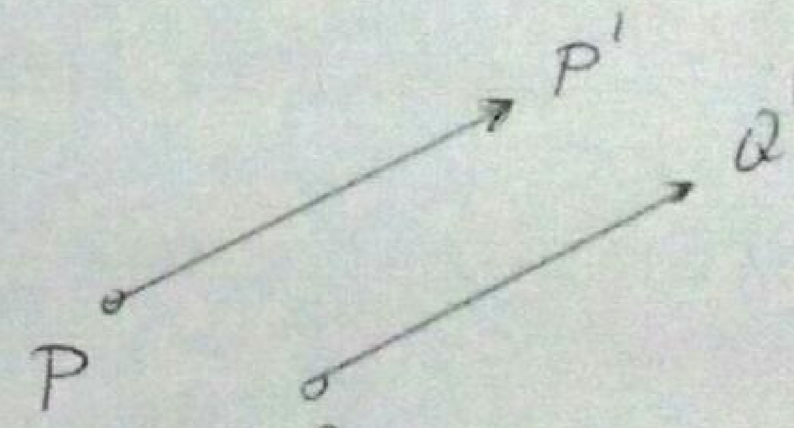
Лесно се проверява, че ако $P \neq O$, P – произволна точка, то $\varphi(P) = P' \neq P$ и $\measuredangle(OP, OP') = \theta$.



При $\theta = \pi$, еднаквостта се нарича централна симетрия

Да разгледаме втория случай II $\binom{a}{b} \neq \binom{0}{0}$

Сега спрямо (x,y) системата (1) е линейна нехомогенна система и има единствено решение точно тогава, когато $\Delta \neq 0$ и няма решение $\Leftrightarrow \Delta = 0$



II.1. Нека $\Delta = 0$ $\Rightarrow$ φ няма неподвижни точки

II.1.1. $\varepsilon = +1$, $\theta = 0$ $\Rightarrow \varphi: \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

φ се нарича транслация с даден (по големина и посока) вектор $\vec{p}(a, b)$

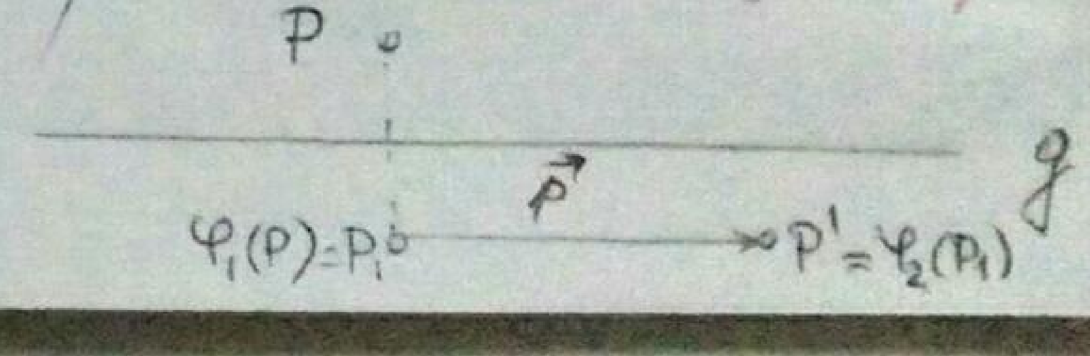
Неподвижни прави - колинеарните с $\vec{p}$.

II.1.2. $\varepsilon = -1$ $\Rightarrow \varphi: \begin{cases} x' = \cos\theta . x + \sin\theta . y + a \\ y' = \sin\theta . x - \cos\theta . y + b \end{cases}$

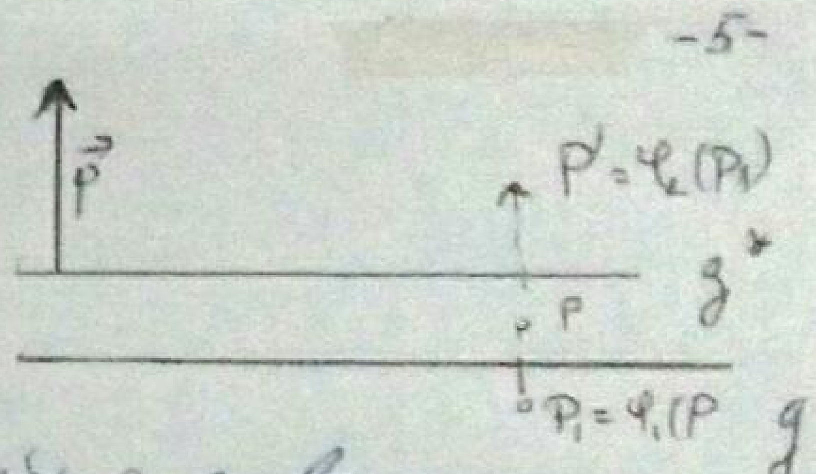
Представяме еднаквостта φ като произведение от две еднаквости $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$, където $\varphi_1: \begin{cases} x' = \cos\theta . x + \sin\theta . y \\ y' = \sin\theta . x - \cos\theta . y \end{cases}$ и $\varphi_2: \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

От I.1.2 имаме, че φ_1 е симетрия с ос g, а от II.1.1 – φ_2 е транслация с вектор $\vec{p}(a, b)$.

Нека векторът $\vec{p}$ е колинеарен с g. Тогава φ се нарича плъзгащо отражение или транслационна симетрия.



Ако $\vec{p}$ е перпендикулярен на g, то не е трудно да се провери, че φ е симетрия с ос g^*, където $g^* \parallel g$.

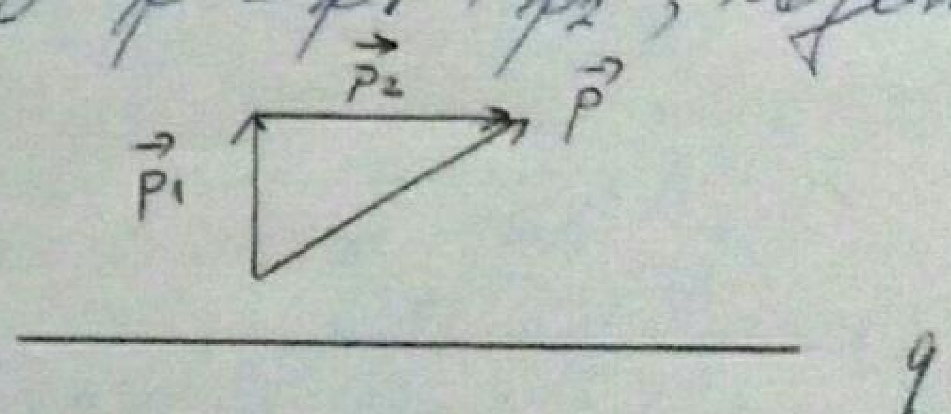


От $\vec{p} \perp g$ имаме $\vec{p}\left(m\sin\frac{\theta}{2}, -m\cos\frac{\theta}{2}\right)$ и, както в I.1.2. двете уравнения на системата (1) са линейно зависими.

$$\left|\begin{array}{l}(\cos\theta - 1)x + \sin\theta . y + m\sin\frac{\theta}{2} = 0 \\ \sin\theta . x - (1+\cos\theta)y - m\cos\frac{\theta}{2} = 0\end{array}\right. \quad \dots \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l}-\sin\frac{\theta}{2}x + \cos\frac{\theta}{2}.y + m = 0 \\ \sin\frac{\theta}{2}.x - \cos\frac{\theta}{2}.y - m = 0\end{array}\right. \quad m \neq 0$$

$\Rightarrow \varphi$ е симетрия с ос g^*, $g^* \parallel g$

Ако $\vec{p}$ е в общо положение спрямо g, то $\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$, където $\vec{p_1} \perp g$, а $\vec{p_2} \parallel g$. Следователно еднаквостта φ е $\varphi = \tau_{p_2} \circ \tau_{p_1} \circ \sigma_g \Rightarrow$



$\varphi = \tau_{p_2} \circ \sigma_{g^*}$, $g^* \parallel \vec{p_2} \Rightarrow \varphi$ е плъзгащо отражение с ос g^* и вектор $\vec{p_2}$

II. Нека $\Delta \neq 0$. В този случай системата (1) има единствено (ненулево) решение (x_0, y_0). Следователно φ има единствена неподвижна точка $G(x_0, y_0)$ и φ е ротация с център $G_0 \neq 0$. Аналитично φ има вида

$$\varphi: \begin{cases} x' = \cos\theta . x - \sin\theta . y + a \\ y' = \sin\theta . x + \cos\theta . y + b \end{cases}$$

и означаване $\rho_{G_0}(\theta)$.

За видовете еднаквости в E_2 имаме:

1. Идентитет ; id ; $\forall$ точка е неподвижна
2. Осева симетрия с ос g ; σ_g ; неподвижни точки са тези от оста ѝ, а неподвижни прави – g и перпендикулярните на g
3. Ротация с център G на ъгъл θ – $\rho_G(\theta)$; единствената неподвижна за ρ точка е центърът ѝ, неподвижни прави в общия случай няма, освен при $\theta = \pi$.
4. Транслация с вектор $\vec{p}$ – τ_p, неподвижни точки няма ; правите, колинеарни с $\vec{p}$ са неподвижните за τ_p прави.
5. Плъзгащо отражение с ос g и вектор $\vec{p}$, $\vec{p} \parallel g$, $\varphi = \tau_p \circ \sigma_g$. Неподвижни точки при φ няма, а неподвижна права е само оста g.

(За упражнение)

Да се докаже, че:
1. Произведението от две осеви симетрии е ротация или транслация.
2. Всяка еднаквост се представя като произведение от най-много три осеви симетрии.
3. Симетриите спрямо успоредни прави имат една и съща матрица.