Повърхнини от втора степен. Общи свойства.

За повърхнините от втора степен в пространството са в сила свойства, аналогични на тези на кривите от втора степен в равнината.

Нека спрямо афинна координатна система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ повърхнината от втора степен S е зададена с уравнението си

$$S : f(x, y, z) = 0,$$

където

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = {} & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + \\ & + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ & + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}, \end{aligned}$$

е полином от втора степен над $\mathbb{R}$, т.е. $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,j = 1,\dots,4$ като поне един от коефициентите a_{ij}, $i,j = 1,2,3$ е различен от нула.

квадратичната част на f означаваме с

$$\varphi(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz.$$

Означаваме с

$$f_1(x,y,z) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14},$$
$$f_2(x,y,z) = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24},$$
$$f_3(x,y,z) = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34},$$
$$f_4(x,y,z) = a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44}. \quad (1)$$

Отново е в сила тъждеството на Ойлер

$$f(x,y,z) = f_1(x,y,z)x + f_2(x,y,z)y + f_3(x,y,z)z + f_4(x,y,z)$$

---

(1) Хомогенни координати в пространството се въвеждат аналогично на тези в равнина - всяка точка получава координати $g(x,y,z,t) \neq (0,0,0,0)$ ... При $t=0$ точката е безкрайна, а при $t \neq 0$ - крайна. $S: f(x,y,z,t) = a_{11}x^2 + \dots + a_{14}xt + a_{24}yt + a_{34}zt + a_{44}t^2 \dots$ и ... f_i - полупроизводните съответно по x,y,z,t ... за $t=1$

Нека точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е такава, че координатите ѝ анулират f_1, f_2 и f_3, т.е

$$f_1(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_2(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_3(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Тогава M_0 се нарича център на S.

Не е трудно да се забележи, че ако повърхнината S има поне четири некомпланарни точки, то нейните центрове са точно центровете на симетрия на S (2)

Ако освен да е център на S, точката M_0 е и от повърхнината, то тя се нарича особена точка. Следователно точката M_0 е особена за S точно тогава, когато анулира и четирите полинома f_1, f_2, f_3 и f_4, т.е. $\Leftrightarrow$

$$f_1(M_0) = f_2(M_0) = f_3(M_0) = f_4(M_0) = 0.$$

---

(2) Точка с координати (x, y, z) е от повърхнината S точно тогава, когато точката с координати $(-x, -y, -z)$ е от S.

Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е център на S

Тогава при смяна на $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ с координатната система $K' = M_0\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, т.е. смяната е

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y', \quad z = z_0 + z',$$

уравнението на S спрямо K' добива вида

$$S: \varphi(x', y', z') + f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

и се нарича <u>централно уравнение</u> на S.

Взаимно положение на права и повърхнина от втора степен

Нека g е права, инцидентна с дадена точка G и колинеарна с даден вектор $\vec{u}$.

Тогава, ако координатите на G и $\vec{u}$ спрямо K са съответно $G(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, то координатно параметричните уравнения на g са

$$g: \begin{cases} x = x_1 + \lambda\alpha \\ y = y_1 + \lambda\beta \\ z = z_1 + \lambda\gamma \end{cases}, \quad \lambda \in (-\infty, \infty).$$

За общите точки на g и S (като заместим x, y, z в уравнението на S) получаваме условието

$$f(x_1 + \lambda\alpha, y_1 + \lambda\beta, z_1 + \lambda\gamma) = 0$$

Последното уравнение има вида

$$(*)\quad A\lambda^2 + B\lambda + C = 0,$$

където

$$A = \varphi(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$B = f_1(x_1, y_1, z_1)\alpha + f_2(x_1, y_1, z_1)\beta + f_3(x_1, y_1, z_1)\gamma$$

и

$$C = f(x_1, y_1, z_1).$$

Векторът $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ се нарича <u>асимптотичен</u> за повърхнината S, ако $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$; направлението на $\vec{u}$ наричаме <u>асимптотично направление</u>

I. Нека $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ е асимптотичен за S, т.е

$$A = 0$$

Ако $B \neq 0$, то уравнението $(*)$ има единствено решение, т.е. S и g имат точно една обща точка.

Ако $B = 0$ и $C = 0$, то уравнението $(*)$ има решение за всяка стойност на λ.

Следователно g изцяло се съдържа в S. В този случай g се нарича <u>образуваща</u> на повърхнината S.

Нека $B=0$, но $C \neq 0$. Тогава уравнението (*) няма решение, откъдето и g няма общи точки с S; в този случай правата g се нарича <u>асимптота</u> на S.

Следователно е в сила следната

<u>Теорема</u>. Ако права е от асимптотично направление на повърхнина, то тя е в едно от следните три положения спрямо повърхнината:

1. Правата има точно една (реална) обща точка с повърхнината.
2. Правата е образуваща на повърхнината - кая да е нейна точка принадлежи на повърхнината.
3. Правата е асимптота на повърхнината - няма нито реални, нито имагинерни общи точки с повърхнината.

II. Нека векторът $\vec{a}(\alpha, \beta, \mu)$ не е асимптотичен за S. Тогава $A \neq 0$ и уравнението (*) има две различни или съвпадащи решения. Ако решенията са две комплексно спрегнати числа, то правата g няма общи реални точки с S и казваме, че g е <u>външна</u> за S. Ако двете различни решения са реални, то на тях съответстват две различни точки от g. Тъй като сме в случая, когато g не е от асимптотично направление, то g не е образуваща за S; в този случай казваме, че g пресича S (в две различни точки).

Ако g не е от асимптотично направление и има точно една обща точка с S, то g се нарича <u>допирателна</u> (или тангента на S. Можем да изберем точката G от g да е допирната точка на правата g с повърхнината S. (смяна на параметъра)

Тогава уравнението (*) добива вида

$$(**) \quad (A\lambda + 2B)\lambda = 0 .$$

Следователно правата g е тангента към S с допирна точка G точно тогава, когато $B = 0$. Също така, за всяка точка $M(x, y, z)$ от правата g имаме $\overrightarrow{GM} \parallel \vec{n}$

т.е.

$$x - x_1 = \lambda\alpha, \quad y - y_1 = \lambda\beta, \quad z - z_1 = \lambda\gamma .$$

Следователно условието $B = 0$ се описва с уравнението

$$(***) \; f_1(x_1, y_1, z_1)(x - x_0) + f_2(x_1, y_1, z_1)(y - y_0) + f_3(x_1, y_1, z_1)(z - z_0) = 0 .$$

Ако G не е особена точка, то (***) е уравнение на равнина, която се

нарича <u>допирателна равнина</u>.
Ако освен това, S не е разпадаща се (неизродена) повърхнина, не е трудно да се докаже (а и геометрично интуитивно е ясно), че допирателната равнина пресича повърхнината в двойка различни или съвпадащи прави (реални или комплексни), които са от асимптотични направления и че всички останали прави от равнината, минаващи през G, са допирателни към S.

Казано по друг начин. Ако G е точка от неизродена повърхнина от втора степен, то допирателната ѝ равнина в G, с уравнение

$$f_1(G)(x-x_1)+f_2(G)(y-y_1)+f_3(G)(z-z_1)=0$$

допира повърхнината в разпадаща се крива от втора степен.

Нека δ е произволна равнина, която пресича повърхнината от втора степен S, $\delta \cap S = k$. Ясно е, че k е крива от втора степен. Тогава не е трудно да се провери, че

1. Ако вектор $\vec{u}$ е асимптотичен за повърхнината S, то той е асимптотичен за всяка крива k, лежаща в равнина δ, компланарна с $\vec{u}$.

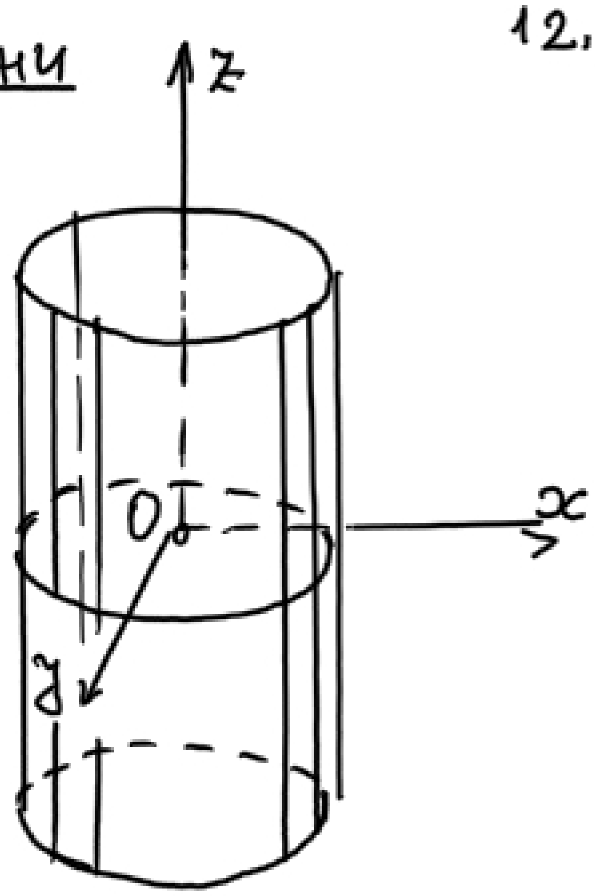
Обратно:

2. Всеки асимптотичен за кривата k вектор е асимптотичен $\vec{u}$ за S.

Следователно за вида на равнинните сечения на дадена повърхнина от втора степен можем да съдим по асимптотичните направления на сечението.

Цилиндрични повърхнини

1. Елиптичен цилиндър.



$$C_E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$a \geq b > 0$$

Ясно е, че координатните равнини и равнините, успоредни на Oxy са равнини на симетрия за цилиндъра. При $a \neq b$ цилиндърът няма други равнини на симетрия.

Векторът $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ е асимптотичен за C_E точно тогава, когато

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 0.$$

Следователно единственото реално асимптотично направление на C_E се получава при $\alpha = \beta = 0$, $\gamma \neq 0$ и това е направлението на оста Oz. Тогава за равнинните сечения на C_E имаме следните възможности:

Равнина, успоредна на оста Oz или пресича цилиндъра в двойка успоредни прави (образуващи), или се допира до цилиндъра в негова образуваща, или е външна

Всяка равнина, която не е успоредна на Oz пресича цилиндъра в елипса (това може да се получи и от по-прости геометрични съображения). Не е трудно да се покаже, че има равнина, която пресича C_ε в окръжност, т.е. C_ε е наклонен кръгов цилиндър.

При $a=b$, C_ε е ротационен цилиндър.

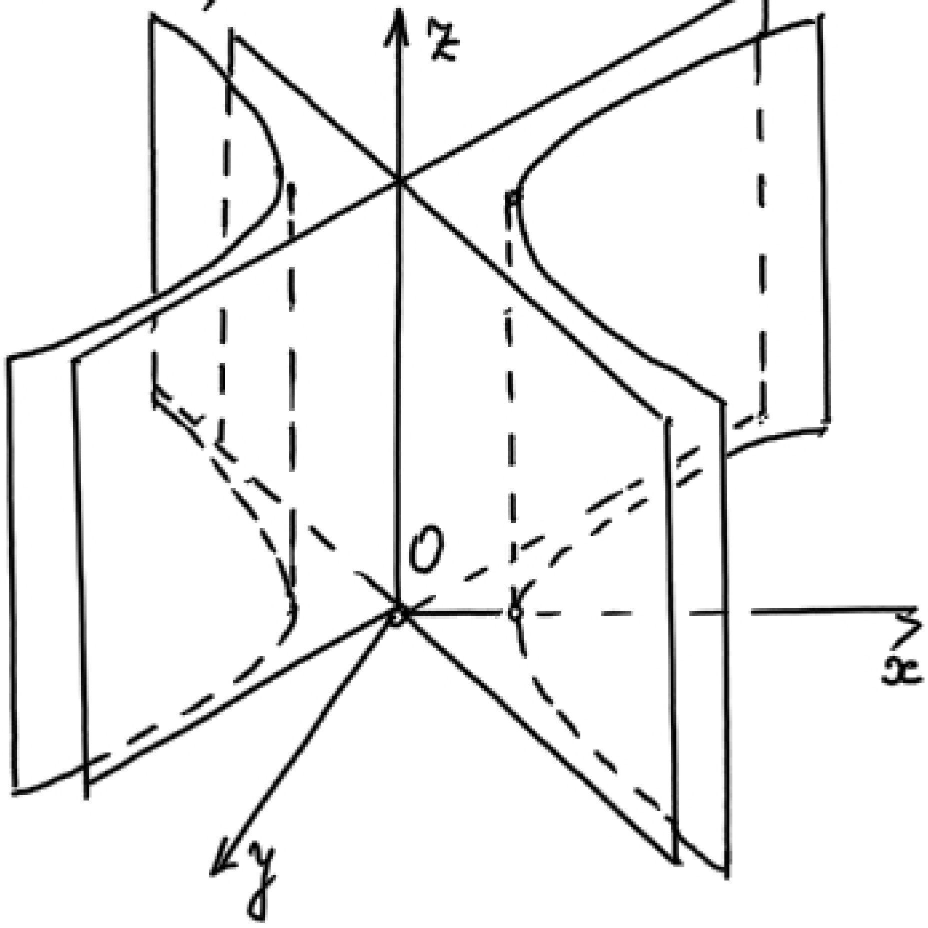
2. Имагинерен цилиндър.

$$\overline{C}_\varepsilon : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \ , \ a \geq b > 0 .$$

Няма реални точки, но има едно реално асимптотично направление - това на оста Oz.

3. Хиперболичен цилиндър.

$$C_x: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \; a>0, \; b>0$$



Равнините на симетрия за C_x са координатните равнини и тези, успоредни на Oxy.

За асимптотичен вектор $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ на C_x имаме

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 0.$$

Следователно $\vec{u}$ е компланарен или 15.
с равнината δ_1 или с равнината δ_2, където

$$\delta_1: \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad и \quad \delta_2: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

или с пресечницата им – оста Oz.

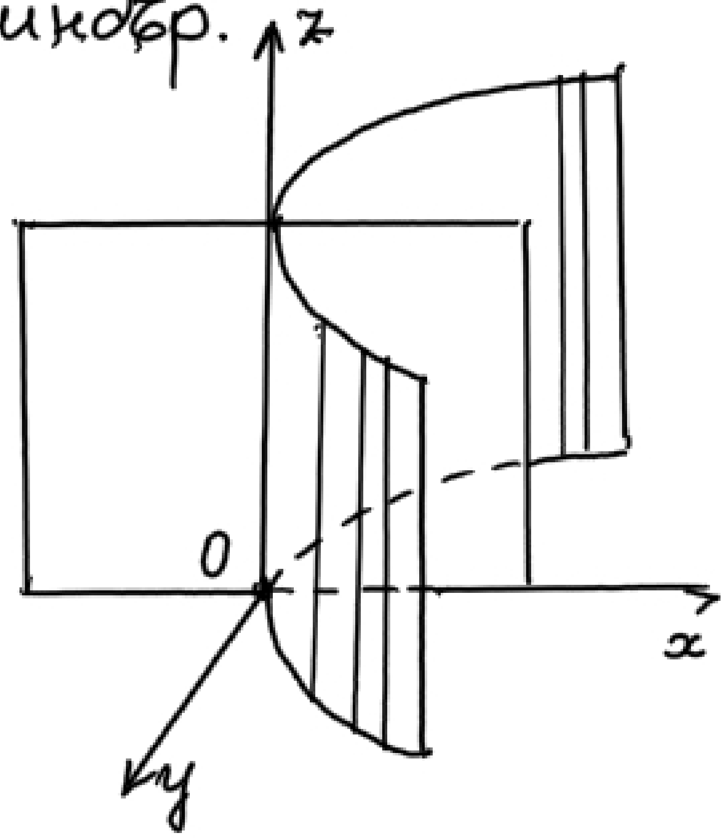
Равнина, успоредна на Oz или пресича C_χ в двойка успоредни прави, или се допира до цилиндъра в негова образуваща или е външна за C_χ.

Нека δ е произволна равнина, която не е успоредна на Oz. Тогава δ пресича равнините δ_1 и δ_2 съответно в пресичащи се прави l_1 и l_2. Равнината δ пресича всички образуващи на C_χ. Тези пресечни точки са точките на крива (неизродена) в δ, която има две асимптотични (реални) направления. От неизродените криви от втора степен степен само хиперболата има две (реални) асимптотични направления. Следователно получаваме:

Всяка равнина, която не е успоредна на оста Oz пресича цилиндъра в хипербола.

4. Параболичен цилиндър.

$C_\pi : y^2 = 2px, \; p > 0.$



Равнини на симетрия за C_π са координатните равнини Oxz, Oxy и успоредните на Oxy.

За асимптотичен вектор $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ имаме $\beta^2 = 0$. Следователно всички вектори, които са компланарни с равнината Oxz са асимптотични за C_π.

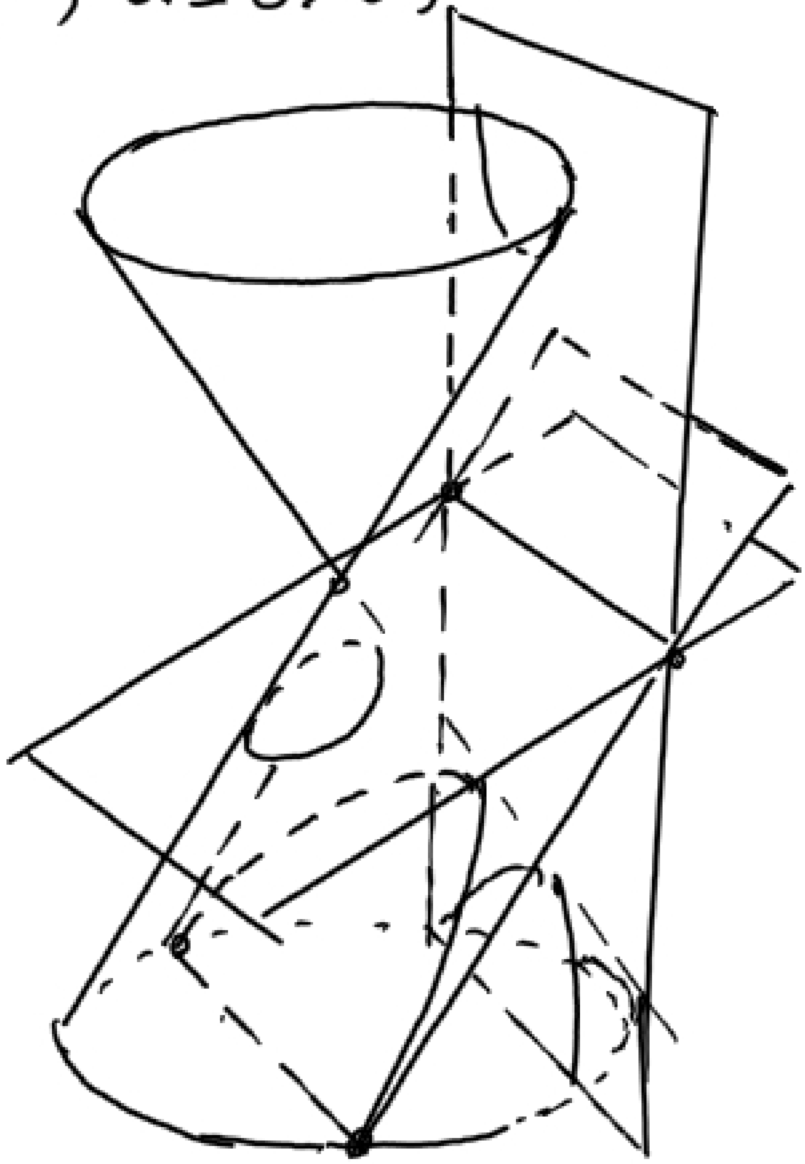
Произволна равнина δ, която не е успоредна на оста Oz, пресича равнината Oxz в права ℓ, а цилиндъра – в неизродена крива от втора степен, имаща само едно асимптотично направление. Следователно,

Всяка равнина, която не е успоредна на Oxz пресича цилиндъра C_π в парабола.

Равнина, успоредна на оста Oz пресича C_π в двойка успоредни прави, или се допира до цилиндъра в негова образуваща или е външна равнина.

5. Реален конус.

$$K: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a \geq b > 0, \; c > 0.$$



Връх на конуса е $O(0,0,0)$.

Управителна крива – примерно елипсата:

$$\varepsilon: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c. \end{cases}$$

Координатните равнини са равнини на симетрия, а O – център на симетрия, център на конуса и негова особена точка.

За асимптотичен вектор $\vec{u}(\alpha, \beta, \mu)$ на K имаме

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\mu^2}{c^2} = 0.$$

Следователно асимптотичните направления на конуса са точно направленията на образуващите му.

За равнина δ_0, минаваща през върха O на конуса имаме три възможности:

1. Единствената обща точка за δ_0 и K е върхът O.
2. δ_0 минава по образуваща на K.
3. δ_0 пресича K в две негови образуващи

Нека δ е произволна равнина, която не минава през върха на конуса и δ_0 е равнина през O, успоредна на δ. Ясно е, че δ пресича конуса в неразпадаща се крива. Тази крива ще има толкова асимптотични направления, колкото образуващи на конуса са успоредни на δ.

Ако δ_0 пресича K само във върха му O, то δ_0, следователно и δ не съдържа реални асимптотични направления на K, откъдето следва, че δ пресича K в елипса. Ако δ_0 минава по образуваща на K, то δ е успоредна на точно една образуваща на конуса, следователно δ пресича K в парабола. В последния случай δ е компланарна с две асимптотични направления на K, откъдето следва, че δ пресича конуса в хипербола.

6. Имагинерен конус.

$$\bar{K}: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a \geq b > 0, \; c > 0$$

Има единствена реална точка – върхът $O(0,0,0)$ и няма (реални) асимптотични направления.