2. Системи от линейни уравнения

Система от линейни уравнения наричаме система от вида $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Числата $a_{ij} \in \mathbb{R}$ наричаме коефициенти на системата, а $b_i \in \mathbb{R}$ – десни страни. Неизвестни са $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Решение наричаме наредена n-орка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от реални числа, удовлетворяваща всички m наброй равенства.

Система може да е няма решение (*несъвместима*), да има точно едно решение (*определена*) или безбройно много решения (*неопределена*).

Системи линейни уравнения решаваме като извършваме следните еквивалентни преобразувания с уравненията от системата:

- Умножаване на уравнение по число $\lambda \in \mathbb{R}$ и прибавяне към друго уравнение.
- Умножаване на уравнение по **ненулево** число $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Размяна на две уравнения.

С тези преобразувания се стремим да приведем системата към еквивалентна на нея с единици “по главния диагонал” и нули извън него.

Ако получим уравнение $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b \neq 0$, то системата е *несъвместима*.

Ако получим уравнение $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$, го премахваме от системата.

Ако уравненията останат по-малко от неизвестните, обявяваме някое(някои) от неизвестните за параметри и изразяваме останалите чрез тях.

Така определените преобразувания върху линейни уравнения са всъщност преобразувания върху редовете на разширената матрица на системата.

Задача 1. *Да се реши системата в зависимост от стойностите на параметъра λ:*

$$\begin{cases} x - y + z & = 2 \\ 3x - 2y + (\lambda + 3)z & = 5 \\ 2x - (\lambda + 2)y + z & = 2\lambda + 5 \end{cases}$$

Решение. *Разглеждаме разширената матрица на системата* $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & \lambda + 3 & 5 \\ 2 & -\lambda - 2 & 1 & 2\lambda + 5 \end{array}\right)$.

Преобразуваме, като на първа стъпка нулираме елементите 3 и 2 от първия стълб. Умножаваме първия ред по (-3) и прибавяме към втория. След това умножаваме първия ред по (-2) и прибавяме към третия.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & \lambda + 3 & 5 \\ 2 & -\lambda - 2 & 1 & 2\lambda + 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -\lambda - 2 & 1 & 2\lambda + 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda & -1 \\ 0 & -\lambda & -1 & 2\lambda + 1 \end{array}\right)$$

Сега нулираме коефициентите -1 и λ от втория стълб. Сумираме втория ред към първия. После събираме втория ред, умножен по λ, към третия.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda & -1 \\ 0 & -\lambda & -1 & 2\lambda + 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 + \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & -1 \\ 0 & -\lambda & -1 & 2\lambda + 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 + \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 1 & \lambda + 1 \end{array}\right)$$

Последния ред е всъщност уравнението $(\lambda^2 - 1)z = \lambda + 1$.

Това е параметрично линейно уравнение с едно неизвестно. Коефициентът пред z се нулира при $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$.

- *Нека* $\lambda = 1$. *Тогава* $0z = 2$ *няма решение и съответно системата също няма решение(несъвместима).*
- *Нека* $\lambda = -1$. *Тогава* $0z = 0$ *и оставаме с две уравнения в системата. Предвид това, че* $\lambda = -1$, *системата придобива вида* $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$, *т.е.* $\begin{cases} x = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$
  Всички решения са от вида $(1, p-1, p)$ *за произволно реално* p.
- *Нека* $\lambda \neq \pm 1$. *Тогава* $z = \frac{\lambda+1}{\lambda^2-1} = \frac{1}{\lambda-1}$. *От другите две уравнения изразяваме* x *и* y:

$$x = 1 - (1+\lambda)z = 1 - \frac{1+\lambda}{\lambda-1} = \frac{-2}{\lambda-1},$$

$$y = -1 - \lambda z = -1 - \frac{\lambda}{\lambda-1} = \frac{-2\lambda+1}{\lambda-1}.$$

Обобщение:
При $\lambda = 1$ *системата е несъвместима.*
При $\lambda = -1$ *системата е неопределена с решение* $(1, p-1, p)$, $p \in \mathbb{R}$.
Във всички останали случаи системата е определена с решение $(\frac{-2}{\lambda-1}, \frac{-2\lambda+1}{\lambda-1}, \frac{1}{\lambda-1})$.

Задачи за упражнение

Задача 2. *Решете системата:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 8 \\ 6x_1 + 9x_2 - 7x_3 + 7x_4 = 18 \\ 4x_1 + 6x_2 - 12x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Задача 3. *Решете системата в зависимост от стойностите на параметъра* λ:

$$\begin{cases} x + y - 2z & = 1 \\ 2x + y - (\lambda+4)z & = 3 \\ 3x + (1-\lambda)y - 6z & = 2\lambda + 7 \end{cases}$$

Задача 4. *За кои стойности на* λ *и* μ *системата*

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = \lambda \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = 2 \\ -19x_1 - 19x_2 - 20x_3 + (11+\mu)x_4 & = 6 - 2\lambda \\ 4x_1 + 7x_2 + 8x_3 + x_4 & = 2 \end{cases}$$

е несъвместима?

Упътване: Не е нужно да решавате системата докрай.