1 (Не)определимост

Задача 1 $\mathcal{L} = \langle pow; = \rangle$ *е език с единствен двуместен функционален символ и формално равенство.* $S = \langle \mathbb{N}; pow^S; = \rangle$ *е структура за* $\mathcal{L}$, *в която:*

$$pow^S(x, y) = z \iff x^y = z.$$

Да се определят: (i) 0, *(ii)* 1, *(iii)* $\times$, *(iv)* $+$. *Да се намерят всички автоморфизми на* S.

Задача 2 $\mathcal{L} = \langle b; = \rangle$ *е език с единствен двуместен функционален символ и формално равенство.* $S = \langle \mathbb{N}; b^S; = \rangle$ *е структура за* $\mathcal{L}$, *в която:*

$$b^S(x, y) = z \iff 2^x(2y + 1) = z.$$

Да се определят: (i) 0, *(ii)* 1, *(iii)* $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *(iv) множеството от онези естествени числа, които имат точно* 219 *единици в двоичния си запис. Да се намерят всички автоморфизми на* S.

Задача 3 $\mathcal{L} = \langle b; = \rangle$ *е език с единствен двуместен функционален символ и формално равенство.* $S = \langle \mathbb{N}; b^S; = \rangle$ *е структура за* $\mathcal{L}$, *в която:*

$$b^S(x, y) = z \iff 3^x(y + 1) = z.$$

Да се определят: (i) 0, *(ii)* 1, *(iii)* $\{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *(iv)* $+$. *Да се намерят всички автоморфизми на* S.

Задача 4 $\mathcal{L} = \langle a; = \rangle$ *е език с единствен двуместен функционален символ и формално равенство.* $S = \langle \mathbb{N}; a^S; = \rangle$ *е структура за* $\mathcal{L}$, *в която:*

$$a^S(x, y) = \begin{cases} y + 1, \text{ ако } x = 0 \\ a^S(x - 1, 1), \text{ ако } x > 0, y = 0 \\ a^S(x - 1, a^S(x, y - 1)), \text{ ако } x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

Да се определят: (i) 0, *(ii)* 1, *(iii)* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *където* $f(n) = 2^n$. *Да се намерят всички автоморфизми на* S.

Задача 5 Конус *наричаме множество от точки* C *в равнината, което заедно с всяка своя точка* P *съдържа целия лъч* $OP^{\rightarrow}$, *тоест:*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2((a, b) \in C \Rightarrow \forall \lambda \geq 0((\lambda a, \lambda b) \in C)).$$

$\mathcal{L} = \langle cone, cut \rangle$ е език с един едноместен и един двуместен предикатен символ. $\mathcal{S} = \langle 2^{\mathbb{R}^2}; cone^S, cut^S \rangle$ е структура за $\mathcal{L}$ с носител множества от точки в равнината, в която:

$$\begin{array}{rcl} cone^S(X) & \iff & X \text{ е конус} \\ cut^S(X,Y) & \iff & (X \cap Y) \setminus \{(0,0)\} \neq \emptyset. \end{array}$$

Да се докаже, че:

1. *$\{(0,0)\}$ и $\mathbb{R}^2$ са определими.*

2. *множеството от лъчи с начало $O = (0,0)$ е определимо.*

3. *равенството на конуси, тоест релацията:*

   $$R = \{(X,X) \,|\, X \text{ е конус}\}$$

   е определима.

4. *никой нетривиален лъч с начало $O = (0,0)$ не е определим.*

Определимо ли е множеството от прави през точката $O = (0,0)$? Защо?

Задача 6 Сума *на две множества от точки в равнината $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ наричаме:*

$$A + B = \{(a_1 + b_1, a_2 + b_2) \,|\, (a_1, a_2) \in A, (b_1, b_2) \in B\}.$$

Разглеждаме език $\mathcal{L} = \langle sum; cat \rangle$ с двуместен функционален и двуместен предикатен символ. $S = \langle 2^{\mathbb{R}^2}; sum^S, cat^S \rangle$ е структура за $\mathcal{L}$ с носител множествата от точки в равнината и интерпретации:

$$\begin{array}{rcl} sum^S(A,B) & = & A + B \\ cat^S(A,B) & \iff & A \cap B \neq \emptyset. \end{array}$$

Да се докаже, че в S:

1. *равенството на множества от точки е определимо.*

2. *$\{(0,0)\}$ и $\mathbb{R}^2$ са определими.*

3. *множеството от всички едноточкови множества е определимо.*

4. *множеството от централно симетрични множества, тоест такива, за които:*
$$A = \{(-a,-b) \mid (a,b) \in A\}$$
е определимо.

Определимо ли е множеството $\{(0,1),(0,-1)\}$? Защо?
Кои са автоморфизмите на S? Защо?

2 Изпълнимост

Задача 7 *Нека $\mathcal{L}$ е език с едноместен функционален символ h, двуместен предикатен символ p и формално равенство. Изпълнимо ли е множеството от формули над езика $\mathcal{L}$:*

$$\begin{array}{rcl}
\forall x \exists z(p(x,z)) & & \\
\forall x \forall y(p(x,y) & \Rightarrow & \neg p(y,x)) \\
\forall x \forall y \forall z(p(x,y) \& p(y,z) & \Rightarrow & p(x,z)) \\
\forall x \forall y(h(x)=h(y) & \Rightarrow & \neg p(x,y) \& \neg p(y,x)) \\
\forall x \exists y(h(x)=h(y) & \& & x \neq y)?
\end{array}$$

Задача 8 *Нека $\mathcal{L}$ е език с едноместен функционален символ h, два двуместни предикатни символа p и q и формално равенство. Изпълнимо ли е множеството от формули над езика $\mathcal{L}$:*

$$\begin{array}{rcl}
\forall x \exists y \exists z(y \neq z \& q(x,z) & \& & q(x,y)) \\
\forall x \forall z([q(x,z) \Rightarrow p(x,z)] & \& & p(x,z) \Rightarrow \neg p(z,x)) \\
\forall x \forall y \forall z(p(x,y) \& p(y,z) & \Rightarrow & p(x,z)) \\
\forall x \forall y(h(x)=h(y) & \Rightarrow & \neg q(x,y)) \\
\forall x \exists y(h(x)=h(y) & \& & p(x,y))?
\end{array}$$

Задача 9 *Нека $\mathcal{L}$ е език с един двуместен предикат p и формално равенство. Изпълнимо ли е множеството от формули Φ:*

$$\begin{array}{rc}
\forall x \forall y & (p(x,y) \vee p(y,x) \vee x=y) \\
\neg \exists x \exists y \exists z & (p(x,y) \,\&\, p(y,z) \,\&\, p(z,x)) \\
\forall x \exists y \exists z \exists t & (p(x,y) \,\&\, p(y,z) \,\&\, p(z,t) \,\&\, p(t,x))?
\end{array}$$

А ако към Φ добавим формулата:

$$\forall x \forall y \exists z (p(x,z) \& p(z,y))?$$