Тв. $V \neq \{0\}$ КМЛП; $\dim V = n$; Тогава

$\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис $\iff \forall v \in V \; \exists! \, \lambda_i \in F : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

Д-во $(\Rightarrow)$ / знаем от опр. (за произволно ЛП)

$(\Leftarrow)$ От $\forall v \in V \; \exists \lambda_i \in F : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \Rightarrow V = \underline{\ell(e_1, \dots, e_n)}$

Ако $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \theta$ (за $\lambda_i \in F$), то $\forall i = 1, \dots, n \;\; \lambda_i = 0$

$\left(\sum_{i=1}^{n} 0 . e_i = \theta \text{ и единственост} \right) \Rightarrow [e_1, \dots, e_n]$ – ЛН

базис

Заб. ЛН $\overset{(def)}{\iff}$ единственост на представянето на θ (само $\exists$)

$\overset{сега}{\iff}$ единственост на представянето (като ЛК) на произволен вектор пораждащо мн-во $\overset{(def)}{\Leftrightarrow}$ $\forall$ вектор се представя като ЛК

базис $\Leftrightarrow$ единствено представяне

<u>Опр.</u> V е ЛП с базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ $(\dim V = n)$ и

$v \in V$. Знаем, че $\exists!\, \lambda_i \in F : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – координати на v в базиса $e_1, \dots, e_n$

<u>Зад.</u> Пишем ги $\underbrace{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}_{\in F^n \cong F_{1\times n}}$ или $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in F_{n\times 1}$

по-често

Тв Нека $[e_1, \ldots, e_n]$ е базис на V

1) $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i \Rightarrow u+v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) e_i$

(координатите на сума на 2 в-ра са сумата от координатите на векторите:

$$(\lambda_1+\mu_1, \lambda_2+\mu_2, \ldots, \lambda_n+\mu_n) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n))$$

2) $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, $\lambda \in F \Rightarrow \lambda u = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i) e_i$

(координатите на произведение на вектор със скалар са произведението на коорд. на вектора със скалара:

$$(\lambda\lambda_1, \lambda\lambda_2, \ldots, \lambda\lambda_n) = \lambda \cdot (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n))$$

Сл. Ако $\dim V = n$, то $V \cong F^n$

Д-во Ясно е, че $\varphi : V \longrightarrow F^n$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \longmapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

(! φ зависи от избора на базис $[e_1, \dots, e_n]$)

е биекция; от т.е $\rightarrow$ запазва операциите $\Rightarrow$ **ИЗ**

Ранг на система вектори

Опр. X - система в-ри; $r(X) := \dim \ell(X)$

Заб. V - КМЛП $\Rightarrow \ell(X) \leq V \Rightarrow \exists \dim \ell(X)$

($\ell(X)$ - КМЛП)

Опр. X – система вектори във V

и $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq V$

(подсистема)

Казваме, че $\{x_i \mid i \in I\}$ е максимална линейнонезависима подсистема (МЛНП), ако:

1) $\{x_i \mid i \in I\}$ – ЛН

2) $\forall x \in X \quad \{x_i \mid i \in I\} \cup \{x\}$ ЛЗ

Тс. Ако $\{x_i \mid i \in I\}$ е МЛНП на X, то

$\{x_i \mid i \in I\}$ е базис на $l(X)$

Зад. (Сл.) 1) МЛНП е базис на $\ell(X)$ избран от X

2) $\left|[x_i \mid i \in I]\right| = r(X)$
(брой на ел.)

Зад. Ако $X = [x_1, \dots, x_n]$, $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}]$ е МЛНП,
$(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n)$
тогава:

1) $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}]$ – ЛН

2) $\forall i = 1, \dots, n$ $\quad [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}, x_i]$ – ЛЗ

$\Updownarrow$

2') $X \subseteq \ell(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ $\left(\Rightarrow \ell(X) \subseteq \ell(\underbrace{e_{i_1}, \dots, e_{i_n}}_{\in X}) \Rightarrow = \right)$

базис

$\Rightarrow r(X) = r(x_1, \ldots, x_n) = \dim \ell(X) = k$

Зад. Д-вото на Тв. е аналогично:

Ако $\{x_i \mid i \in I\}$ са ЛН, то

$$\{x_i \mid i \in I\} \cup \{x\} - \text{ЛЗ} \iff x \in \ell(\{x_i \mid i \in I\})$$

$(\Leftarrow)$ очев.

$(\Rightarrow)$ доказано.

Зад. Не променяме ранга, като махаме от системата вектор, който е ЛК на останалите (тоест, ако системата е ЛЗ). При това ЛО се запазва.

$[x_1 \ldots x_n]$ — ЛЗ $\xrightarrow{\text{б.о.о.}}$ x_n е ЛК на $[x_1 \ldots x_{n-1}]$

$l(x_1 \ldots x_n) = l(x_1 \ldots x_{n-1})$

1 док

$r(x_1 \ldots x_n) = r(\underbrace{x_1 \ldots x_{n-1}}_{\text{подсистема}})$

ЛН → МАЛН

ЛЗ - продължаваме

Сложно: ...

Док (2 начина) $X = [x_1 \ldots x_n]$

$x_1 = 0$ → започваме X с $[x_2 \ldots x_n]$

$x_1 \neq 0$

$l(x_1) = l(X)$ → $[x_1]$ - МАЛН

$\neq$ → $\exists i = 2 \ldots n : x_i \notin l(x_1) \xrightarrow[i=2]{\text{б.о.о.}} x_2 \notin l(x_1)$

$\ell(x_1, x_2)$ — $\ell(x_1, x_2) = \ell(X) \to [x_1, x_2]$ МЛНП

$\ell(x_1, x_2)$ — $\neq \xrightarrow{\text{б.о.о.}} x_3 \notin \ell(x_1, x_2)$

$\ell(x_1, x_2, x_3)$ — т.д.

<u>Тв.</u> Пусть $U \cong V$. ($\varphi: U \to V$ — ИМ)

1) $u_1, \dots, u_n \in U$ — ЛН $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n)}_{\in V}$ — ЛН

$\Updownarrow$

2) . . . . ЛЗ $\Leftrightarrow$. — — — ЛЗ

<u>Д-во</u> (2)($\Rightarrow$) $\exists \lambda_i \in F$: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_U \xrightarrow{\varphi} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(u_i) = 0_V$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ $\qquad\Downarrow$

$\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)$ — ЛЗ

(⇐) $\varphi^{-1}: V \to U$ ИМ следва — аналогично

<u>Сл.</u> $e_1, \dots, e_n$ – базис на V ($\Rightarrow \dim V = n$; $V \cong F^n$). Тогава

$v_1, \dots, v_k \in V$ са ЛН (ЛЗ) $\Leftrightarrow$ коорд. на $v_1, \dots, v_k$ са ЛН (ЛЗ)

<u>Тв.</u> $\varphi: U \to V$ ИМ и $X \subseteq U$

Тогава $\varphi(\ell(X)) = \ell(\varphi(X))$

<u>Заб.</u> $\varphi(X) = \{\varphi(x) \mid x \in X\}$

<u>Сл.</u> $e_1, \dots, e_n$ – базис на V. Тогава координатите на вект. от ЛО на система е ЛО на коорд. на вект. от системата

Заб Вектор $v \in \ell$ (в-ри) $\Leftrightarrow$ коорд. на $v \in \ell$ (коорд. на вект.)

Заб Елементарни преобразувания на матрици

1) Размяна на 2 реда
2) Прибавяне на ред умножен с число към друг ред
3) Умножение на ред с число $\neq 0$

Ако редовете на матр. са (коорд. на) в-ри спрямо базис на система $v_1, \dots, v_n$, то ЕП $\Leftrightarrow$

1) Размяна на 2 в-ра в сист.
2) Прибавяне на в-р умн. с число към друг
3) умн. на в-р с число $\neq 0$

!!! И трите ще проверим ЛО (и за векторите, и за коорд.)

($\ell(u,v) = \ell(v,u)$; 2) $\ell(\overset{u'}{u}, \overset{v'-\lambda u'}{v}) = \ell(\overset{u'}{u}, \overset{v'}{\overline{v+\lambda u}})$;

$\supseteq$ ясно

$\ell(\lambda u) = \ell(u)$ за $\lambda \neq 0$)

Зад. $v_1, \dots, v_k \in V$; $e_1, \dots, e_n$ – базис на V

$k = 1, \dots, n$ $\quad v_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j$ $\big((\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in})$ – коорд. на $v_i\big)$

$\Lambda = (\lambda_{ij}) \in F_{m \times n}$

Λ ЕП $\Lambda' = (\lambda'_{ij}) \in F_{m \times n}$

За $i = 1, \dots, k$ $\quad v_i' := \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}' e_j$

Тогава $\ell(v_1, \dots, v_k) = \ell(v_1', \dots, v_k')$. В частност,

$r(v_1, \dots, v_k) = r(v_1', \dots, v_k')$

<u>Зад.</u> $$\Lambda \sim \left(\begin{array}{cccccc} \ast \neq 0 & & & & & \\ & \ast & & & & \\ & & \ast \; \dots & & & \\ & & & \ast & & \\ & 0 & & & \ast \; \dots & \\ & & & & & \ast \\ & & & & 0 & \end{array} \right) \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{бр.} \\ \text{е} \\ \text{рангът} \end{array}$$

1) $I = \emptyset$, $J = \emptyset$

2) Докато е възможно за $k = 1, 2, \dots$

– $\lambda_{i_k j_k} \neq 0 : i_k \notin I, \; j_k \notin J$

$\Rightarrow I := I \cup \{i_k\}; \; J = J \cup \{j_k\}$

$\Rightarrow \forall i \; \underline{\notin \overline{I}}$ прибавяме i_k-ти ред умн. с $\left(-\frac{\lambda_{i j_k}}{\lambda_{i_k j_k}}\right)$ към i-ти ред

$|I| = |J| = r$ ранг