Неща, които според мен трябва да се учат в началото на първия семестър

Йонко Йонков

15 октомври 2021 г.

Съждения

Просто съждение е просто изречение, което е истина или лъжа.
Пример: "Навън вали." е съждение, докато "Колко е часът" или "Тръгвайте" не са съждения.
Освен прости съждения има и съставни съждения, които са изградени от прости съждения, свързани чрез логически съюзи.
Пример: "Ако навън вали, то няма да ходя на университет." е съставно съждение.

Логически съюзи

Определение 1: Дизюнкция $\vee$

На български има смисъл на "или". Дизюнкцията е вярна, когато поне едно от двете съждения е вярно, тоест:

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

Определение 2: Конюнкция $\wedge$

На български има смисъл на "и". Конюнкцията е вярна, когато и двете съждения са верни, тоест:

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Определение 3: Изключващо или $\oplus$

На български има смисъл на "или..., или". Изключващото или ни дава истина, ако точно едно от двете съждения е вярно, тоест:

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Определение 4: Импликация $\implies$

На български има смисъл на "ако...., то". Импликацията $p \implies q$ се състои от две части: p наричаме антецедент или предпоставка, а q - консеквент. Таблицата на истинност е следната:

p	q	$p \implies q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Определение 5: Би-импликация $\iff$

Би-импликацията $p \iff q$ на български има смисъл на "p, тогава и само тогава когато q". Таблицата на истинност е следната:

p	q	$p \iff q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Тя задава еквивалентност на две съждения, тоест за всяка стойност на простите съждения, участващи в тях, тяхната истинност да съвпада.

Определение 6: Отрицание $\neg$

Отрицанието ни връща противоположната стойност на това, което връща съждението, тоест:

p	$\neg p$
F	T
T	F

Приоритет на логическите съюзи

1. Отрицание
2. Конюнкция
3. Дизюнкци

Еквивалентност на съставни съждения

Определение 7: Тавтология

Едно съставно съждение е тавтология, ако за всяка стойност на простите съждения в него, стойността му е истина. Например съждението $p \vee \neg p$ има следната таблица.

p	$p \vee \neg p$
F	T
T	T

Определение 8: Противоречие

Едно съставно съждение е противоречие, ако за всяка стойност на простите съждения в него, стойността му е лъжа. Например съждението $p \wedge \neg p$ има следната таблица.

p	$p \wedge \neg p$
F	F
T	F

Определение 9: Условност

Едно съставно съждение е условно, ако за поне една стойност на простите му съждения е истина и за поне една е лъжа. Например съждението $\neg p$ има следната таблица.

p	$\neg p$
F	T
T	F

Определение 10: Еквивалентни съждения

Нека p и q са съждения. Те са еквивалентни, ако тяхната би-импликация е тавтология. Ще бележим го бележим така: $p \equiv q$.

Свойства на логическите съюзи

1.Свойства на константите: $p \vee T \equiv T$, $p \wedge F \equiv F$, $p \vee F \equiv p$, $p \wedge T \equiv T$
2.Свойства на отрицанието: $p \wedge \neg p \equiv F$, $p \vee \neg p \equiv T$
3.Свойства на идемпотентност: $p \wedge p \equiv p$, $p \vee p \equiv p$
4.Закон за двойното отрицание: $\neg(\neg p) \equiv p$
5.Комутативност: $p \wedge q \equiv q \wedge p$, $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \iff q \equiv q \iff p$, $p \oplus q \equiv q \oplus p$
6.Асоциативност: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$, $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, $(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)$
7.Дистрибутивност: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
8.Закони на Де Морган: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$, $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

9.Поглъщане: $p \vee (p \wedge q) \equiv p,\ p \wedge (p \vee q) \equiv p$
10.Свойство на импликацията: $p \implies q \equiv \neg p \vee q$
11.Свойства на би-импликацията: $p \iff q \equiv (p \implies q) \wedge (q \implies p) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

Предикатна логика

Определение 11: Едноместен предикат

Едноместен предикат е съждение, в което има "празно място", в което се слага обект от някаква предварително зададена област, наречена домейн. За всеки обект от домейна, предикатът е или истина или лъжа.

Пример: Всеки кон е .... Нека домейн е {син,кафяв,жълт,червен}. Очевидно като сложим на празното място кафяв, то съждението ще е истина, а при заместване с някой от другите цветове, бихме имали лъжа, ако говорим за истинността на съждението в житейския смисъл.

Квантори

Кванторите са символите ∀ и ∃. Първият означава "за всяко", а вторият "съществува".
Пример за използване на кванторите: Нека A = {ябълка, круша, банан} и B = {портокал, краставица} са домейни съответно за първото и второто съждение, които ще разгледаме. Да разгледаме следните съждения:
1.$\forall x \in \boldsymbol{A}\ x$ е плод. (Означава всеки обект от областта A е плод.)
2.$\exists x \in \boldsymbol{A}\ x$ е зеленчук. (Означава, че има обект от областта A, който е зеленчук.)
3.$\exists x \in \boldsymbol{B}\ x$ е плод. (Означава, че има обект от областта B, който е плод.)
4.$\forall x \in \boldsymbol{B}\ x$ е зеленчук. (Означава, че всеки обект от обласста B е зеленчук.)
Първото съждение е вярно, понеже ябълката е плод, крушата е плод и бананът е плод.
Второто съждение е невярно, понеже нито ябълката, нито крушата, нито бананът е зеленчук.
Третото съждение е вярно, понеже портокалът е плод.
Четвъртото съждение е невярно, понеже портокалът не е зеленчук.

Многоместни предикати

Както при едноместните предикати, тук също имаме съждение с "празни места които "запълваме"с обекти от домейна. Например:
$(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})[x < y]$. За всяко естествено число x, можем да намерим друго естествено число y, такова че x е по - малко от y.

Отрицания на предикатни формули

Когато имаме предикат от вида $\forall x P(x)$, то отрицанието е $\exists x \neg P(x)$. Обратно, ако имаме предикат от вида $\exists x$ P(x), то отрицанието му е $\forall x\ \neg P(x)$.
Ще разгледаме известната дефиниия на Коши за граница на функция. Тук домейнът ни е D.
Нека a е точка на сгъстяване на $D \subseteq \mathbb{R}$. Казваме, че функцията $f : D \to \mathbb{R}$ има границиа L при x клонящо към a, ако:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \big(0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-L| < \varepsilon\big)$.
Сега отрицанието му е $\neg\Big(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\big(0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-L| < \varepsilon\big)\Big) \equiv$
$\equiv \exists \varepsilon > 0\ \neg\Big(\exists \delta > 0\ \forall x\big(0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-L| < \varepsilon\big)\Big) \equiv$
$\equiv \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0 \neg\Big(\forall x\big(0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-L| < \varepsilon\big)\Big) \equiv$
$\equiv \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x\ \Big(\neg(0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-L| < \varepsilon)\Big) \equiv$
$\equiv \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x\ \Big(\neg\big(\neg(0 < |x-a| < \delta \vee |f(x)-L| < \varepsilon)\big)\Big) \equiv$
$\equiv \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x\ \big(0 < |x-a| < \delta \wedge |f(x)-L| \geq \varepsilon\big)$

Множества

Множеството се приема за първично понятие и не се дефинира, но се отбелязват свойствата му.
Примери за множества:
$A = \{a, b, c\}$ е множеството от символите a, b и c. $B =$ {ябълка, круша} е множеството от ябълка и круша. Множеството $C = \{b, a, c\}$ съвпада с множеството A, понеже съдържат едни и същи елементи и както казахме наредбата няма значение. $D = \{a, b, a, c\}$ не е множество, защото има елемент, който се повтаря, в случая това е символът a. В такъв случай D се нарича мултимножество.

Аксиома за обема

Определение 12: Подмножество $\subseteq$

Нека A и B са множества. A е подмножество на B, тогава и само тогава когато всеки елемент на A се съдържа в B. Означаваме го с $A \subseteq B$. Тоест на формалния език дефиницията е следната: $A \subseteq B \iff \forall x \in A \implies x \in B$.

Пример: $\{1, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

Определение 13: Аксиома за обема

Ако две множества A и B имат едни и същи елементи, то те са равни:
$\forall x\ (x \in A \iff x \in B) \equiv A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

Аксиома за отделянето

Определение 14: Аксиома за отделянето

Нека M е множество и $P(x)$ е едноместен предикат с домейн M. Тогава има множество $M' \subseteq M$, за което $P(x)$ е в сила за всеки елемент от M'.

Например: $\mathbb{N}' = \{x \in \mathbb{N} | x$ е четно $\}$. Така N' съдържа всички естествени числа, които са четни.

Аксиома за степенното множество

Определение 15: Степенно множество

За всяко множество M съществува множество 2^M, което съдържа всичките му под-мва, тоест $2^M = \{m | m \subseteq M\}$.

Например нека $M = \{a, b\}$. Тогава $2^M = \left\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\right\}$, където $\emptyset$ е празното множество, тоест $\{\}$.

Кардиналност на множество

Понеже още не сме дефинирали какво е функция, ще кажем неформално какво е кардиналност на множество. Нека M е множество. Кардиналност на M наричаме броят на елементите му, ако M съдържа краен брой елементи. Бележим го с $|M|$. Например $|\{1, 2, 3\}| = 3$, а $\mathbb{N}$ е безкрайно. Ако кардиналността на M е m, то кардиналността на 2^M е 2^m.

Основните множества в математиката

$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ е множеството на естествените числа. В различните предмети числото 0 също може да бъде считано за естествено
$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ е множеството на целите числа
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} | (a, b) = 1\right\}$ е множеството на рационалните числа. $(a, b) = 1$ означава, че най - големият общ делител на a и b е 1.
$\mathbb{R}$ - множеството на реалните числа
$\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$ - множеството на комплексните числа

Операции върху множества

По - надолу ще смятаме, че A и B са множества, освен ако друго не е изрично казано. С $\mathbb{U}$ ще означаваме универсалното множество над A и B, тоест $A \subseteq \mathbb{U}$ и $B \subseteq \mathbb{U}$.

Определение 16: Обединение на множества $\cup$

Множеството $A \cup B = \{x | x \in A \lor x \in B\}$ се нарича обединение на множестата A и B.

Пример: $A = \{1,3\}$, $B = \{2,3\}$. Тогава $A \cup B = \{1,2,3\}$.

Определение 17: Сечение на множества $\cap$

Множеството $A \cap B = \{x | x \in A \land x \in B\}$ се нарича сечение на множествата A и B.

Пример: $A = \{1,3\}$, $B = \{2,3\}$. Тогава $A \cap B = \{3\}$.

Определение 18: Разлика на множества $\setminus$

Множеството $A \setminus B = \{x | x \in A \land x \notin B\}$ се нарича разлика на A с B.

Пример: $A = \{1,3\}$, $B = \{2,3\}$. Тогава $A \setminus B = \{1\}$.

Определение 19: Симетрична разлика на множества $\triangle$

Множеството $A \triangle B = \{x | x \in A \oplus x \in B\}$ се нарича симетрична разлика на A с B.

Пример: $A = \{1,3\}$, $B = \{2,3\}$. Тогава $A \triangle B = \{1,2\}$.

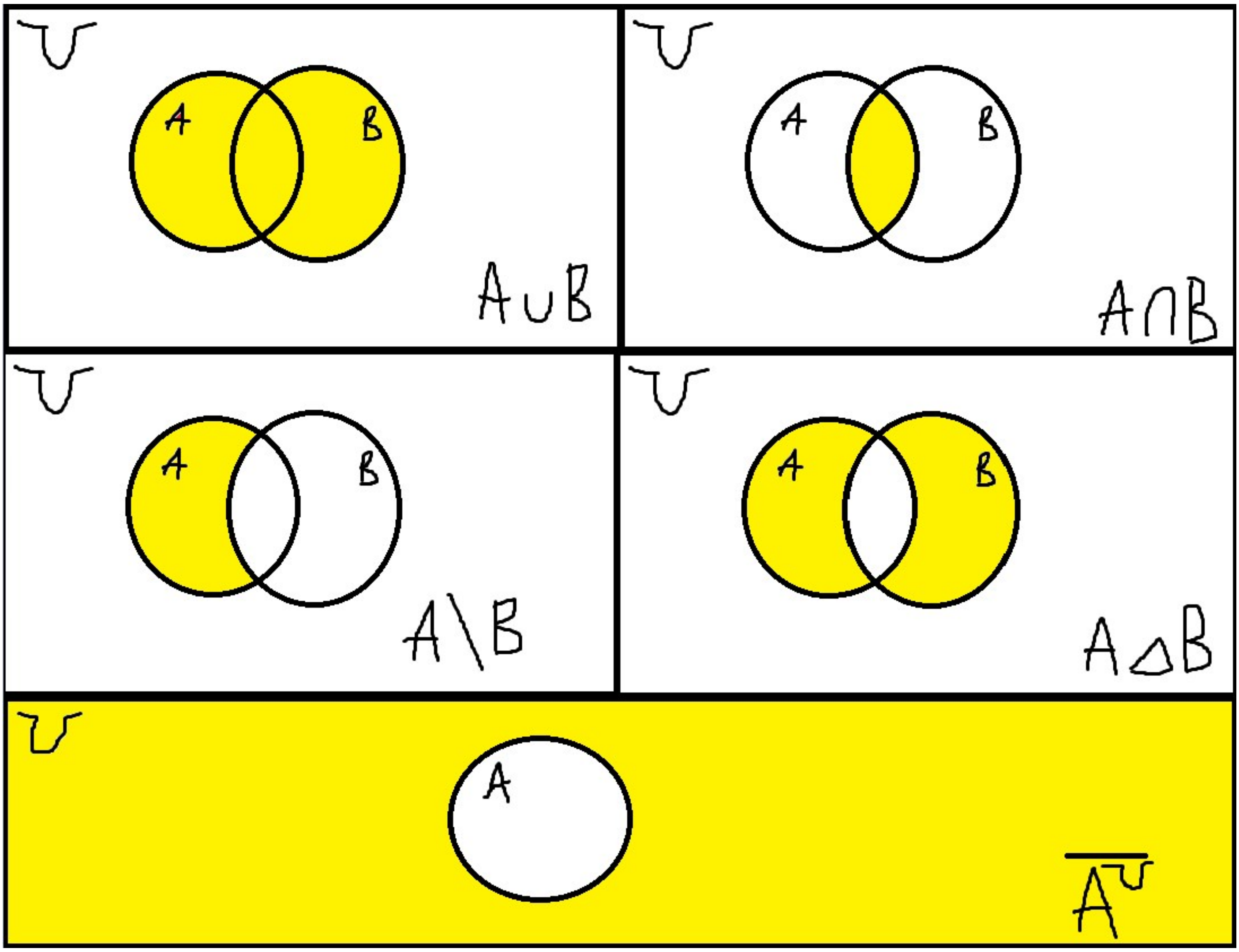
Определение 20: Допълнение на множество $\overline{A}$

Множеството $\overline{A^{\mathbb{U}}} = \{x \in \mathbb{U} | x \notin A\}$ се нарича допълнение на A спртямо $\mathbb{U}$.

Пример: $\mathbb{U} = \{1,2,3,4,5\}, A = \{1,3\}$. Тогава $\overline{A^{\mathbb{U}}} = \{2,4,5\}$.

Диаграми на Вен за операциите върху множества

Диаграмите на Вен е нагледно представяне на логическото отношение между крайни множества. Рисунка на диаграма на Вен НЕ Е ДОКАЗАТЕЛСТВО!



Свойства на операциите върху множества

Нека $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ са произволни множества и $\mathbb{U}$ е множество, за което: $A \subseteq \mathbb{U}$ и $B \subseteq \mathbb{U}$ и $C \subseteq \mathbb{U}$. Тогава следните свойства са в сила:

1. Свойства на празното множество и универсума: $A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$, $A \cap \mathbb{U} = A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.
2. Свойства на допълнението: $A \cup \overline{A}^{\mathbb{U}} = \mathbb{U}$, $A \cap \overline{A}^{\mathbb{U}} = \varnothing$.
3. Свойства на идемпотентност: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
4. Закон за двойното допълнение: $\overline{\overline{A}}^{\mathbb{U}} = A$
5. Комутативност: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$, $A \triangle B = B \triangle A$
6. Асоциативност: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
7. Дистрибутивност: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
8. Закони на Де Морган: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
9. Поглъщане: $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$.

Декартово произведение

Определение 21: Декартово произведение

$A \times B = \{(a,b) | a \in A \land b \in B\}$ ще наричаме декартово произведение на множеството А с множеството В. Елементите на това множество се наричат наредени двойки.

Пример: $A = \{1,2\}$, $B = \{a,b\}$. Тогава $A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$. Забележете, че $A \times B \neq B \times A$. Аналогично можем да дефинираме декартово произведение на повече от две множества, като то НЕ е асоциативно. Можем да разгледаме декартовото произведение на едно множество със себе си n пъти. Например $\mathbb{R}^n = \left\{(a_1,...,a_n) | a_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \{1,2,...,n\}\right\}$ ни дава множеството от всички n-мерни вектори с реални координати. С $\mathbb{R}$ се означава множеството на реалните числа.

Покриване и разбиване

Определение 22: Покриване на множество

Покриване на A е всяко множество от множества M, за което:
1.$(\forall x \in M)\left[x \subseteq A\right)\right]$
2. $\bigcup\limits_{x \in M} x = A$

Примери: $A = \{1,2,3\}$, $M = \left\{\{1,2\},\{2,3\},\{3\}\right\}$ е покриване на A. Но $M' = \left\{\{1,2\},\{2\}\right\}$ не е покриване, понеже обединението на множествата от M' е множеството $\{1,2\} \neq \{1,2,3\}$.

Определение 23: Разбиване на множество

Разбиване на A е всяко множество M, което е покриване на A и освен това е в сила:
$\forall x,y \in M\ (x \neq y \implies x \cap y = \emptyset)$.

Примери: $A = \{1,2,3\}$, $M = \left\{\{1,2\}\{3\}\right\}$ е разбиване на A. Но $M' = \left\{\{1,2\},\{2\},\{3\}\right\}$ не е разбиване, понеже $\{1,2\} \cap \{2\} = \{2\} \neq \emptyset$.

Метод на математическата индукция

Индукцията е метод за формално доказване на свойства на естествените числа или равномощни с $\mathbb{N}$ множества. Състои се от следните стъпки: Нека $P(x)$ е предикат с домейн $\mathbb{N}$. Нека $m, n \in \mathbb{N}$ и $n \geq m$. Ако са изпълнени следните неща:

База: Доказателство, че $P(m)$ е истина.
Индукционна хипотеза: Допускаме, че за произволно $k \in \mathbb{N} \wedge k \geq m$ $P(k)$ е истина.
Индукционна стъпка: Доказваме, че $P(k+1)$ е истина, като използваме, че $P(k)$ е истина.
Така сме доказали, че $\forall n \geq m\big(P(n)\big)$ е истина.
Пример: Да се докаже, че $\forall n \in \mathbb{N}$ сумата $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Доказателство. Ще използваме метода на математическата индукция, за да докажем твърдението.
База: Нека $n = 1$. Тогава като заместим n с 1 получаваме $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Значи $P(1)$ е истина.
Индукционно предположение: Допускаме, че за произволно $k \geq 1$ твърдението е в сила. Тоест $1+2+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$.
Индукционна стъпка: Ще докажем, че $1+2+...+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. От индукционната хипотеза имаме, че $1+2+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$. Тогава имаме $\frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Така доказахме, че $P(k+1)$ е истина и значи $\forall n \in \mathbb{N}\ \big(P(n)\big)$ е истина. □

Защо работи? Ами нека си вземем едно такова естествено число например 3. Защото е вярно за 2, а защо е вярно за 2? Ами защото е вярно за 1, а за 1 е вярно от базата.
Има задачи, обаче в които просто да допуснем за произволно число не ни е достатъчно. Ще въведем силна индукция. При нея имаме $t > 1$ на брой бази и в зависимост от това, можем да използваме, че твърдението е вярно за $n-1, n-2, ..., n-t$. Структурата е следната:

База: Доказателство, че $P(m) \wedge P(m+1) \wedge ... \wedge P(m+t-1)$.
Индукционно предположение: Нека $k > m \wedge P(m)$ е истина $\wedge P(m+1)$ е истина $\wedge ... \wedge P(m+t-1)$ е истина $\wedge ... \wedge P(k-1)$ е истина.
Индукционна стъпка: Доказваме, че $P(k)$ е в сила, като използваме, че $P(k-1)$ е истина и $P(k-2)$ е истина и ... и $P(m)$ е истина.
Пример: Да се докаже, че $\forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 8$, n може да се представи в следния вид: $n = 5a+3b$, където $a, b \in \mathbb{N}$.

Доказателство. Да се опитаме да го докажем със слаба индукция.
База: Ще докажем, че $P(8)$ е истина. $8 = 5.1+3.1$ и $1 \in \mathbb{N}$. Значи $P(8)$ е истина.
Индукционна хипотеза: Да допуснем, че за произволно $k \in \mathbb{N}$ $P(k)$ е истина, тоест $\exists a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, за които $k = 5a+3b$.
Индукционна стъпка: Знаем, че $k = 5a+3b$ и значи $k+1 = 5a+3b+1$, но така нищо не можем да докажем. Значи има два варианта: или твърдението не е вярно или индукционното ни предположение не е достатъчно силно. Да опитаме сега със силна индукция.
База: Ще докажем, че $P(9)$ е истина и $P(10)$ е истина. $9 = 5.0+3.3$ и понеже $0, 3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то $P(9)$ е истина. Аналогично $10 = 5.2+3.0$ и от $2, 0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то $P(10)$ е истина.
Индукционна хипотеза: Нека $P(8) \wedge P(9) \wedge P(10) \wedge ... \wedge P(k-3) \wedge P(k-2) \wedge P(k-1)$ е истина за всяко $k > 10$
Индукционна стъпка: Ще докажем, че $P(k)$ е истина. От индукционната хипотеза, имаме че $P(k-3)$ е истина, тоест $k-3 = 5a+3b$ за някои $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогава $k = 5a+3b+3$ и значи $k = 5a+3(b+1)$. Щом $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то очевидно $a, b+1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. И значи $P(k)$ е истина. Тогава $\forall n \geq 8\big(P(n)\big)$ е истина. □

Защо това работи? Ами например работи за 11, защото е вярно за $11-3=8=5.1+3.1$ и значи $11=5.1+3.2$.

Релации

Определение 24: Релация

Нека са дадени множествата $A_1, A_2, ..., A_n$, които ще наричаме съответно първи, втори,..., n-ти домейн. Релация над тези домейни е всяко $R \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

При n = 2 релацията се нарича двуместна, а при n = 1 - едноместна.

Определение 25: Релация над декартовия квадрат

Нека A е множество. Релация над декартовия квадрат е всяко $R \subseteq A \times A$. Нека $a, b \in A$. Елементите a и b са в релация, ако $(a,b) \in R$. Алтернативен запис е aRb.

Свойства

Определение 26: Рефлексивност

Една релация R е рефлексивна, ако $\forall a \in A\big((a,a) \in R\big)$.

Определение 27: Симетричност

Една релация R е симетрична, ако $\forall a,b \in A \wedge a \neq b\big((a,b) \in R \implies (b,a) \in R\big)$.

Определение 28: Транзитивност

Една релация R е транзитивна, ако $\forall a,b,c \in A\Big(\big((a,b) \in R \wedge (b,c)\big) \in R \implies (a,c) \in R\Big)$

Определение 29: Релация на еквивалентност

Една релация R е релация на еквивалентност, ако е едновременно рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Пример за релация на еквивалентност: Равенството при естествените числа. Опитайте се да го докажете! Има и други свойства, но засега ще се спрем на тези.

Определение 30: Клас на еквивалентност

Нека $R \subseteq A \times A$ е релация на еквивалентност и $a \in A$. Тогава $[a] = \{b \in A | (a,b) \in R\}$ се нарича класът на еквивалентност на a.

Пример: $A = \{1,2,3,4,5\}$ и $R = \{(a,b) | a \in A \wedge b \in A \wedge a = b\}$. Тогава $\forall a \in A\ \big([a] = \{a\}\big)$.

Твърдение 1: Теорема за класовете на еквивалентност

Нека $R \subseteq A \times A$ е релация на еквивалентност и M е множеството от всички класове на еквивалентност на R. Тогава M образува разбиване на À.

Например при горната релация $M = \big\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\big\}$ очевидно е разбиване на A.

Функции

Определение 31: Частична функция

Нека X и Y са множества, които ще наричаме съответно домейн и кодомейн. Функцията f е всяка релация над $X \times Y$, за която $\forall a \in X$ $\exists$ не повече от едно $b \in Y$, такива че $(a,b) \in f$.

Пример: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \begin{cases} n & \text{if } n \text{ е четно} \\ \text{undefined} & \text{if } n \text{ е нечетно.} \end{cases}$

Определение 32: Тотална функция

Нека X и Y са съответно домейн и кодомейн. Фукцията f е тотална, ако $\forall a \in X$ $\exists$ точно един $b \in Y$, такива че $(a,b) \in f$.

Пример: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. Когато кажем функция, ще си мислим за тотална функция.

Определение 33: Инекция

Нека $f : X \to Y$ е фунцкия. f е инекция, ако $\forall x_1, x_2 \in X (x_1 \neq x_2) \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.

Пример: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ е инекция, докато $f(x) = x^2$ не е инекция, защото например $f(1) = f(-1)$.

Определение 34: Сюрекция

Нека $f : X \to Y$ е фунция. f е сюрекция, ако $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)$, такива че $y = f(x)$.

Пример: $f : R \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ не е сюрекция, защото с каквото и да заместим x, не можем да получим 0. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ е сюрекция, защото ако искаме да получим числото $y \in \mathbb{R}^+$, то можем да заместим x с $\log_2 y$, защото $2^{\log_2 y} = y$.

Определение 35: Биекция

Една функция е биекция, ако е едновременно инекция и сюрекция.

Пример:$f : X \to X, \forall x \in X, f(x) = x$ е биекция. Тази функция се нарича идентитет.

Определение 36: Обратна функция

Нека $f : X \to Y$ е функция. Обратна функция на f е функцията $f^{-1} : Y \to X$, такава че $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$.

Твърдение 2: Съществуване на обратна функция

Нека f е функция. Тогава f е обратима $\iff$ f е биекция.

Определение 37: Кардиналност на множество

Нека M е множество. Кардиналност на множество е стойността на функцията, която съпоставя на M броят на елементите му. Бележим с $|M|$.

Смисълът на инекцията и сюрекцията е следният. Ако $f : X \to Y$ е инекция, то $|Y| \geq |X|$, а ако е сюрекция, то $|Y| \leq |X|$. Така ако f е биекция, то това означава, че $|X| = |Y|$, тоест биекцията означава равномощност между двете множества.

Означения

Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ е функция. Тогава

$$\sum_{i=k}^{n} f(i) = \begin{cases} f(k) + f(k+1) + f(k+2) + \ldots + f(n) & \text{if } k \leq n \\ 0 & \text{if } k > n \end{cases}$$
$$\prod_{i=k}^{n} f(i) = \begin{cases} f(k)f(k+1)f(k+2)\ldots f(n) & \text{if } k \leq n \\ 1 & \text{if } k > n \end{cases}$$

Кванторите $\forall$ и $\exists$ върху $\emptyset$

Всяко твърдение от вида $(\forall x \in \emptyset)\ P(x)$ винаги е истина, а всяко твърдение от вида $(\exists x \in \emptyset)\ P(x)$ е лъжа.
Например: Нека имаме маса, върху която няма бутилки. Тогава съждението "Всяка бутилка на масата е зелена" е истина, а съждението "има бутилка на масата, която е зелена" е лъжа.

Как доказваме твърдения

За да докажем, че твърдение от вида $(\forall x \in A)(P(x))$ е достатъчно да си вземем произволно $x \in A$ и за него да докажем, че $P(x)$ е истина.
За да докажем, че твърдение от вида $(\exists x \in A)(P(x))$ е достатъчо да посочим един представител $x \in A$, за който $P(x)$ е истина.
За да докажем, че твърдение от вида: $p \implies q$ има два варианта:
Вариант 1: Допускаме, че p е истина и се опитваме да докажем, че q е истина.
Вариант 2: Доказваме твърдението в контрапозиция, тоест импликацията $\neg q \implies \neg p$, което е еквивалентно с $p \implies q$.
Вариант 3: Допускане на противното. Нека p е истина и допуснем, че q не е истина. Тогава $\neg q$ е истина и доказваме, че тогава не е вярно p, което е в противоречие с допускането, че p е истина, което значи че $(p \land \neg q) \implies F \equiv \neg p \lor \neg(\neg q) \equiv \neg p \lor q \equiv p \implies q$ е истина . Често противоречието се отбелязва с $\lightning$.
Пример: Ще докажем, че ако имаме числото $\sqrt{2}$, то то не е рационално число. Да допуснем, че е рационално число, тогава $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, където $a, b \in \mathbb{Z}$ и $b \neq 0$ и a и b са с различна четност. Повдигаме двете страни на квадрат и получаваме $\frac{a^2}{b^2} = 2$, тоест $a^2 = 2b^2$.
1 случай: a и нечетно и b е четно. Тогава a^2 също е нечетно и b^2 също е четно. Но тогава $2b^2$ е

четно и значи a е четно $\lightning$, защото допуснахме, че a е нечетно.
2 случай: a е четно и b е нечетно. Тогава $a = 2k$ за $k \in \mathbb{Z}$ и $b = 2p + 1$ за $p \in \mathbb{Z}$. Тогава $a^2 = 4k^2$ и значи a^2 се дели на 4, което значи че $2b^2$ се дели на 4, което значи че b^2 се дели на 2, тоест b^2 е четно, но това би означавало, че и b е четно $\lightning$, защото допуснахме че b е нечетно.
Сега изчерпахме всички възможни случаи за a и b, поради което твърдението ни е доказано $\square$.

Когато имаме твърдение за естествените числа, често се използва индукция, ако е възможно, но понякога може да има много по - просто доказателство.
Естествено, много от твърденията могат да се докажат по много различни начини.

Забелязани грешки/препоръки

Ако сте забелязали някакви грешки във файла или имате някакви препоръки, моля да ми пишете на *ionko333@abv.bg* или във фейсбук Йонко Йонков. Надявам се този файл да ви помогне със следването във ФМИ. Благодаря на Иво Стратев за откриването и коригирането на голям брой грешки във файла и многото препоръки.