F - поле, $f \in F[x]$ - неразложим

$$F[x]/(f) = \{ \bar{g} = g + (f) \mid g \in F[x] \}$$

$$\bar{g} = \{ g + fh \mid h \in F[x] \}$$

$$g = qf + r, \quad \deg r < \deg f \qquad \bar{g} = \bar{r} \Leftrightarrow g - r \in (f)$$

$$F[x]/(f) = \{ \bar{r} \mid r \in F[x], \deg r < \deg f \}$$

$\bar{r}_1 = \bar{r}_2 \Rightarrow f \mid r_1 - r_2$ Ако $r_1 - r_2 \neq 0$ $\deg f \leq \deg(r_1 - r_2) < \deg f$ ↯

$\deg r_1, \deg r_2 < \deg f$ $\Rightarrow r_1 = r_2$

Твърдение $F \subset F[x]/(f)$

Уговорим $\quad F < F[x]/(f)$

$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \\ \alpha & \longleftrightarrow & \bar{x} \end{array}$$

<u>Сл.</u> 1) $\forall f \in F[x] \ \exists K > F$ и $\exists \alpha \in K : f(\alpha) = 0$

2) $\forall f \in F[x] \ \exists K > F$ и $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$:

$$f = a(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n), \quad a \in F$$

ст. коэф. на f

<u>Опр.</u> $f \in F[x]$, $K > F$, $f = a(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$,

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, $a \in F$

$$L = \bigcap_{\substack{F < P < K \\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in P}} P$$

L – поле на разлагане на f над F в K

<u>Зад.</u> Оказва се, че полето на разлагане е единствено с точност до изоморфизъм, т.е. ако L_1 е ПР на f над F в K, и

L_2 е ПР на f над F в K_2, то

$$L_1 \cong L_2$$

Формули на Виет

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in F[x],\ a_n \neq 0$$

$$f = a_n (x-\alpha_1) \ldots (x-\alpha_n)\ ; \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K > F$$

$$a_{n-1} = a_n \left(-(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\right)$$

$$a_{n-2} = a_n \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_i \alpha_j$$

$$a_{n-3} = -a_n \sum_{1 \le i < j < k \le n} \alpha_i \alpha_j \alpha_k$$

$$\ldots$$

$$a_0 = a_n (-1)^n \alpha_1 \ldots \alpha_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_i \alpha_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sum_{1 \le i < j < k \le n} \alpha_i \alpha_j \alpha_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\ldots$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Формули на Виет

Симетрични полиноми

F - поле

<u>Опр.</u> $F[x_1, \ldots, x_n] = \big(F[x_1, \ldots, x_{n-1}]\big)[x_n]$

пръстен от полиноми на <u>n</u> променливи

<u>Тв.</u> $F[x_1, \ldots, x_n]$ - област (дори и за F - област)

<u>Забл.</u> 1) $f \in F[x_1, \ldots, x_n]$, $f = \sum\limits_{i=0}^{k_n} a_i x_n^i$; $a_i \in F[x_1, \ldots, x_{n-1}]$

$k_n = \deg_n f$ - степен на f относно x_n ($a_n \neq 0$)

2) $F[x_1, \ldots, x_n] = F[x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}] \quad \forall \sigma \in S_n$

$\deg_i f$ - относно x_i

3) $f = \sum\limits_{i \in I} a_i x^i$; $i = (i_1 \dots i_n)$ — мултииндекс

$|I| < \infty$ $\qquad x^i := x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$; $a_i \in F$

- $\deg f = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} i_k \mid a_i \neq 0 \right\}$ $\qquad \deg x_1^2 = \deg x_1 x_2 = \deg x_2^2 = 2$
- Лексикографска наредба

Опр. $a x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} > b x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$, ако $\exists\, 1 \le k \le n$

$i_1 = j_1,\ i_2 = j_2,\ \dots\ i_{k-1} = j_{k-1},\ i_k > j_k$ $\quad (a, b \in F)$

Зад. 1) $\underbrace{x_1 \dots x_1}_{i_1} \underbrace{x_2 \dots x_2}_{i_2} \dots \underbrace{x_{k-1} \dots x_{k-1}}_{i_{k-1}} \underbrace{x_k \dots \dots x_k}_{i_k} x_{k+1} \dots$

$\underbrace{x_1 \dots x_1}_{j_1} \underbrace{x_2 \dots x_2}_{j_2} \dots \underbrace{x_{k-1} \dots x_{k-1}}_{j_{k-1}} \underbrace{x_k \dots x_k}_{j_k} x_{k+1} \dots$

2) ЛН е пълна наредба в/у $\{x^i \mid i \in \mathbb{N}_0^n\}$

мон. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

3) $\exists$ старши едночлен (кой-голям) относно ЛН

<u>Означение</u>: $[f]$

<u>ТС.</u> $\forall f, g \in F[x_1 \ldots x_n] \Rightarrow [fg] = [f][g]$

<u>Д-во</u> $[f] = a x^p = a x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}$; $[g] = b x^q$

<u>Заб.</u> $\forall$ едночлен в f е $\leq [f]$ относно ЛН и е $= [f] \Leftrightarrow$ съвпада с $[f]$

$c x^i < a x^p$; $d x^j < b x^q$

произволен едночлен на $f \neq a x^p$; произволен едночлен на $g \neq b x^q$

$\exists\, k, l:$

$i_1 = p_1, \ldots, i_{k-1} = p_{k-1}, \; i_k < p_k$

$j_1 = q_1, \ldots, j_{l-1} = q_{l-1}, \; j_l < q_l$

$s = \min(k, l)$

$i_1 + j_1 = p_1 + q_1, \ldots, i_{s-1} + j_{s-1} = p_{s-1} + q_{s-1}$ u

$i_s + j_s < p_s + q_s$

$\Rightarrow cd\, x^{i+j} < ab\, x^{p+q} = a x^p \cdot b x^q$

$= c x^i\, d x^j$

$\Rightarrow [fg] = ab\, x^{p+q} = [f] \cdot [g]$

Опр. $f \in F[x_1, \dots, x_n]$ е симетричен, ако $\forall \sigma \in S_n$

$$\sigma \circ f := f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f$$

Зад. f - симетр. $\Leftrightarrow \forall \sigma = (i\,j) \quad (i\,j) \circ f = f$

Пр. $x_1 + 2x_2$ не е симетр.

Пр/Опр. $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i, \ \sigma_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j, \ \sigma_3 = \sum_{1 \le i < j < k} x_i x_j x_k, \ \dots)$

$\sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n$ — елементарни симетрични полиноми (ЕСП)

Пр/Опр. $s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ — степенни сборове (симетрични пол. са)

Тл. f — симметр. $[f] = a x^{i} \Rightarrow i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n$

Д-во $\exists\, \sigma \in S_n: \; i_{\sigma(1)} \geq i_{\sigma(2)} \geq \dots \geq i_{\sigma(n)}$

$$\Rightarrow \sigma^{-1} \circ [f] = a\, x_{\sigma^{-1}(1)}^{i_1} \dots x_{\sigma^{-1}(n)}^{i_n} = a\, x_1^{i_{\sigma(1)}} \dots x_n^{i_{\sigma(n)}}$$

$$\underset{\sigma^{-1}(k)}{\overset{\shortparallel}{1}}$$

$$x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \;\shortparallel\; x_{\sigma(1)}^{i_{\sigma(1)}} \dots x_{\sigma(n)}^{i_{\sigma(n)}}$$

$$\left(x_k^{i_k} = x_{\sigma(s)}^{i_{\sigma(s)}} \quad k = \sigma(s) \right)$$

$$\sigma^{-1} \circ x_{\sigma(1)}^{i_{\sigma(1)}} \dots x_{\sigma(n)}^{i_{\sigma(n)}} =$$

$$= x_{\sigma^{-1}(\sigma(1))}^{i_{\sigma(1)}} \dots x_{\sigma^{-1}(\sigma(n))}^{i_{\sigma(n)}} = x_1^{i_{\sigma(1)}} \dots x_n^{i_{\sigma(n)}}$$

$$x_{\sigma^{-1}(k)}^{i_k} \xrightarrow{k = \sigma(s)} x_s^{i_{\sigma(s)}} \xrightarrow{\forall k}$$

$$\left.\begin{aligned}&\bullet\ \sigma^{-1}\circ[f] \geq [f]\\ &\bullet\ \sigma^{-1}\circ[f] \text{ — едночлен на } f \ (f\text{-симетр.})\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sigma^{-1}\circ[f]}_{\text{усл. е осъществено}} = [f]$$

$$\overset{3}{\underset{i_1}{x_1}}\ \overset{2}{\underset{i_2}{x_2}}\ \overset{}{\underset{i_3}{x_3}} \xrightarrow{(123)} x_2^3 x_3^2 x_1 = x_1^{i_3}\, x_2^{3\,(i_1)}\, x_3^{2\,(i_2)}$$

$$\text{степ. } (3,2,1) \longrightarrow (1,3,2)$$

! преподреждане на индексите на i_1, i_2, i_3

---

f - сим. $\quad [f] = a x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}\ ; \quad i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq i_n$

$$[\sigma_1^{s_1}\dots\sigma_n^{s_n}] = [\sigma_1]^{s_1}\dots[\sigma_n]^{s_n} =$$

$$= x_1^{s_1}(x_1x_2)^{s_2}(x_1x_2x_3)^{s_3}\dots(x_1\dots x_{n-1})^{s_{n-1}}(x_1\dots x_n)^{s_n} =$$

$$= x_1^{\overbrace{s_1+s_2+\dots+s_n}^{}_{\;i_1}} \cdot x_2^{\overbrace{s_2+\dots+s_n}_{\;i_2}} \dots x_{n-1}^{\overbrace{s_{n-1}+s_n}_{\;i_{n-1}}} x_n^{\overbrace{s_n}_{\;i_n}}$$

$$s_n = i_n,\ s_{n-1} = i_{n-1} - i_n,\ \dots,\ s_2 = i_2 - i_3,\ s_1 = i_1 - i_2$$

$$\Rightarrow [a\sigma_1^{i_1-i_2}\sigma_2^{i_2-i_3}\dots\sigma_{n-1}^{i_{n-1}-i_n}\sigma_n^{i_n}] = a x^{i_1}\dots x_n^{i_n} = [f]$$

<u>Основна теорема за симетричните полиноми</u>

$$\forall f \in F[x_1,\dots,x_n]\ \exists g \in F[x_1,\dots,x_n]:$$

$$f(x_1,\dots,x_n) = g(\sigma_1(x_1,\dots,x_n), \sigma_2(x_1,\dots,x_n), \dots, \sigma_n(x_1,\dots,x_n))$$

Твд. Всеки симетр. полином се представя като полином във ЕСП

Твд. Представянето е единствено (без д-во)

Д-во $[f] = a x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$; $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n$

$$f_1 := f - a\,\sigma_1^{i_1 - i_2}\,\sigma_2^{i_2 - i_3} \dots \sigma_{n-1}^{i_{n-1} - i_n}\,\sigma_n^{i_n}$$

- $[f_1] < [f]$
- f_1 – симетр.
- $\left|\{\text{едночлени } g \mid g \overset{\text{мн.}}{<} [f]\}\right| < (i_1 + 1)^n$

$\Bigg\}$ след краен брой стъпки ще получим 0. $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ е полином на ЕСП

Сл. $f \in F[x]$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — все корн. f;

$g \in F[x_1, \ldots, x_n]$ — симметр.

$\Rightarrow g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F$

Д-во $\exists h : g = h(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$

$$\Rightarrow g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = h(\underbrace{\sigma_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ldots, \sigma_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}_{\in F \text{ (по Виета)}}) \in F$$