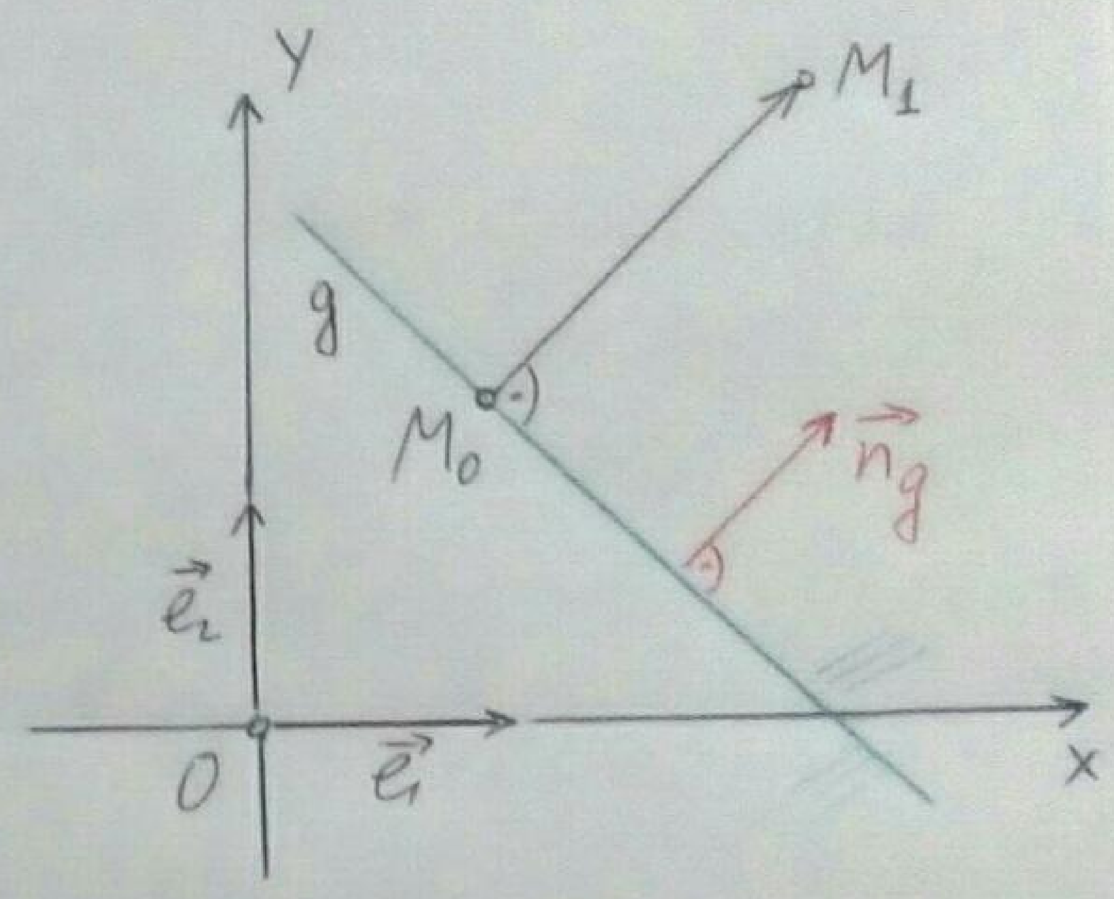
10. Нормално уравнение на права. Разстояние от точка до права.



Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ е ортонормирана координатна система и g е произволна права с общо уравнение

$$g: ax + by + c = 0.$$

От $\vec{p}(-b, a) \parallel g$ непосредствено получаваме, че векторът $\vec{n}(a, b)$ е перпендикулярен на g. Имаме $\vec{n} \neq \vec{o}$ и $\vec{n}.\vec{p} = -ab + ba = 0$.

Следователно единичен вектор $\vec{n}_g$, перпендикулярен на g има координати $\vec{n}_g\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ както и $\vec{n}_g(\cos\theta, \sin\theta)$.

Следователно g има уравнение $g: \cos\theta . x + \sin\theta y + c' = 0$ и това уравнение се нарича нормално уравнение на g.

Всяка права има точно два различни единични нормални вектора $\vec{n}_g$ и противоположният му $-\vec{n}_g$. Следователно: Всяка права има точно две нормални уравнения $g: \dfrac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0$

Нека g е зададена с нормално уравнение от вида (*)

$$g: \cos\theta . x + \sin\theta . y + c = 0,$$

т.е. с единичен нормален вектор $\vec{n}_g$. Чрез него еднозначно е определена полуравнината, която изцяло съдържа лъча, зададен от $\vec{n}_g$. Нека $M_1(x_1, y_1)$ е произволна точка и $M_0(x_0, y_0)$ е петата на перпендикуляра от M_1 към g. Векторите $\vec{M_0M}$ и $\vec{n}_g$ са колинеарни. Следователно $\overrightarrow{M_0M_1} = \delta \vec{n}_g$. Имаме

$$x_1 - x_0 = \delta\cos\theta \quad и \quad y_1 - y_0 = \delta\sin\theta \Rightarrow$$

$$x_0 = x_1 - \delta\cos\theta \quad и \quad y_0 = y_1 - \delta\sin\theta .$$

От $M_0 \in g \Rightarrow \cos\theta(x_1 - \delta\cos\theta) + \sin\theta(y_1 - \delta\sin\theta) + c = 0 \Rightarrow$ за числото δ получаваме $\delta = \cos\theta . x_1 + \sin\theta . y_1 + c$.

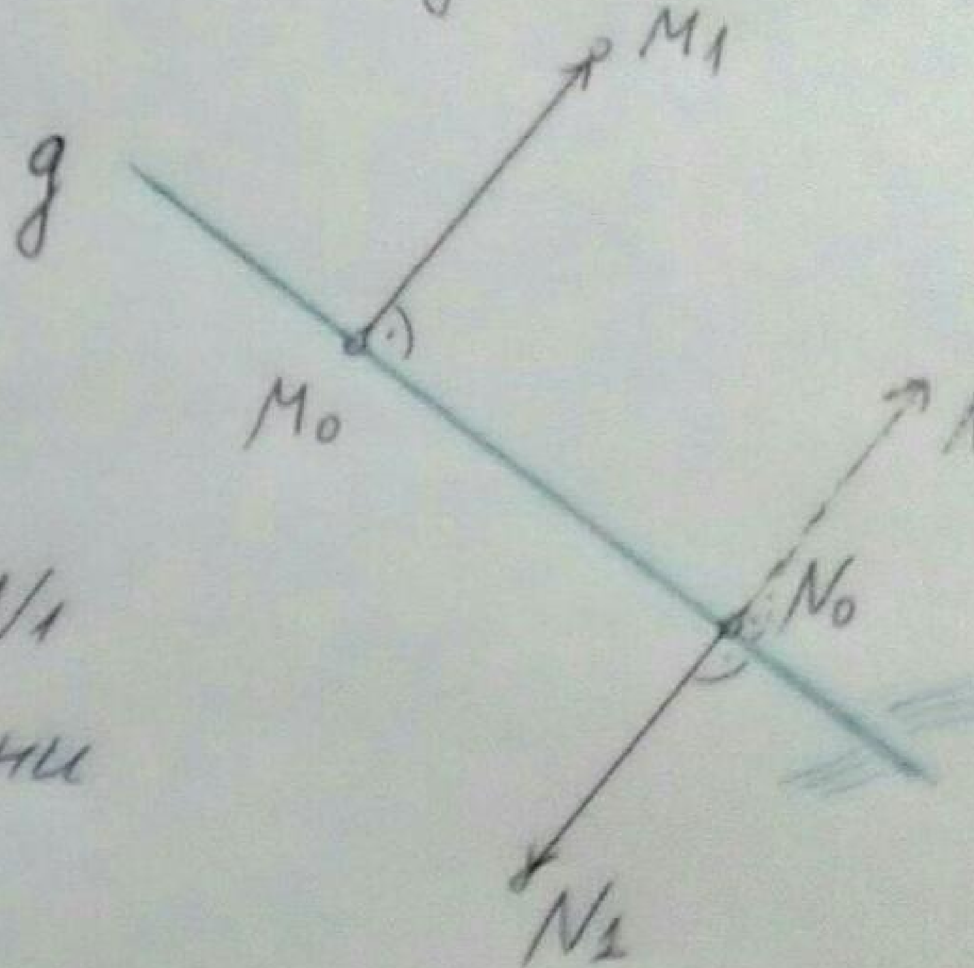
Това число δ се нарича ориентирано разстояние на точката M_1 до правата g. Означаваме: (M_1, g). Ясно е, че $(M_1, g) > 0$ точно тогава, когато векторите $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{n}_g$ са еднопосочни и $(M_1, g) < 0$ точно тогава, когато $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{n}_g$ са противопосочни.

Ако g е с общо уравнение от вида $g: ax + by + c = 0$,

то $(M_1, g) = \dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

За разстоянието от M_1 до g имаме $|\overrightarrow{M_0M_1}| = |\delta||\vec{n}_g| = |\delta|$ и

$$|M_1, g| = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|.$$



С помощта на ориентираното разстояние можем да определим дали две точки M_1 и N_1 лежат в една или в различни полуравнини спрямо права g.

Ако $(M_1, g) = \delta_1$ и $(N_1, g) = \delta_2$, то M_1 и N_1 са в една полуравнина $\iff$ $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{N_0N_1}$ са еднопосочни $\iff$ $\delta_1\delta_2 > 0$.

M_1 и N_1 са в различни полуравнини спрямо g $\iff$ $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{N_0N_1}$ са противопосочни $\iff$ $\delta_1\delta_2 < 0$

(*) пояснение

Ако g е с общо уравнение $g: ax + by + c = 0$, то едното нормално уравнение на g е $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y + c = 0$

Означаваме с $A = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и с $B = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Имаме $A^2 + B^2 = 1$. Тогава $\exists!\, \theta \in [0, 2\pi]$, така че $A = \cos\theta$ и $B = \sin\theta$.