Примерни задачи по Диференциални уравнения и приложения

Задача 1. Колко решения има задачата

а) $\begin{cases} y' = x^3 + y^3 \\ y(3) = 3 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} {y'}^2 - 2xyy' = x^2y^2 + 1 \\ y(2) = 1 \end{cases}$

в) $\begin{cases} {y'}^2 - xyy' + x^2 + y = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} y' = x + \mathrm{tg}(xy) \\ y(1) = \pi/2 \end{cases}$

д) $\begin{cases} y'' + x^2y' + 5xy = 2 \\ y(2) = 1 \\ y'(2) = 2 \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} \left| \begin{array}{l} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{array} \right. \\ x(0) = 3\ ;\ y(0) = 3 \end{cases}$

Задача 2. Колко са решенията на уравнението

а) $y' = xy^2 + 4$ **б)** $y' = 2y^2 - 5x$

в) $y'' = 2xy' + 3y + x$ **г)** $y''' = xy'' + (x+1)y$

които удовлетворяват условията $y(1) = 2$ и $y'(1) = 3$.

Задача 3. Колко решения на системата

а) $\begin{cases} \dot{x} = 2xy + 1 \\ \dot{y} = x^2 + 4y^2 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dot{x} = x + y - z + 1 \\ \dot{y} = x - y + z + 2 \\ \dot{z} = x + y + z + 3 \end{cases}$

удовлетворяват условията $x(1) = 0$ и $y(1) = 2$.

Задача 4. Колко решения на уравнението

а) $y' = x^2 + y^2$ **б)** $y' + 2x = 0$

в) $y'' + y = 0$ **г)** $y'' - 2 = 0$

удовлетворяват условията $y(0) = 0$ и $y(\pi) = 0$.

Задача 5. Кой е интегрираща множител за:

а) уравнението с разделящи се променливи $dy + f(x)g(y)dx = 0$?

б) линейното уравнение $dy + [a(x)y + b(x)]dx = 0$?

Проверете, че полученото уравнение след умножаване с интегриращия множител произлиза от пълен диференциал.

Задача 6. За уравнението

$$(*) \quad y' + y^2 + x^2 = 2xy + 5$$

намерете частно решение $y_1(x)$ от вида $ax+b$. Уравнение от какъв тип за $z(x)$ се получава след полагане $y(x) = z(x) + y_1(x)$ в $(*)$?

Задача 7. Дадена е задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = 2y + x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

а) Сведете задачата до интегрално уравнение и образувайте редицата $y_n(x)$, $n = 0, 1, 2, ...$, от последователни приближения за решението на задачата;

б) Пресметнете първите три последователни приближения y_0, y_1 и y_2;
в) За всяко естествено n, намерете константа $C(n)$, такава че

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le C(n)|x|^n\ , \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

г) Докажете че редицата $y_n(x)$, $n = 0, 1, 2, ...$, е равномерно сходяща в интервала $(-\infty, +\infty)$.

Задача 8. За кои от следните задачи на Коши може да се приложи теоремата за съществуване и единственост (Теоремата на Пикар) в правоъгълника $\Pi = \{|x| < 1,\ |y| < 2\}$?

а) $\begin{cases} y' = |x| \sin y \\ y(0) = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} y' = \operatorname{arctg}(y + x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} y' = \sqrt{y + x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} y' = y^2 + \sqrt{|x|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

д) $\begin{cases} y' = x^2 + \sqrt{|y|} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} y' = y^{4/3} - x + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

За задачите, за които може да се приложи теоремата, определете интервал, в който е дефинирано решението.

Задача 9. Докажете, че решението на задачата на Коши

а) $\begin{cases} y' = xy^2 - x^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ е четна функция. **б)** $\begin{cases} y' = y^2 - x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ е нечетна функция.

Задача 10. Определете особените и обикновените точки на уравнението
а) $xy' = y + 4x^2$
б) $xy' = -y + 6x^2$
Какво е поведението на решенията около $x = 0$? Има ли решения на уравнението, дефинирани за $x \in (-\infty, +\infty)$?

Задача 11. Определете особените точки на уравнението
а) $2yy' = xy'^2 + x$ **б)** $y'^2 + xy = y^2 + xy'$
Има ли особени решения на уравнението?

Задача 12. Като използвате (само!) теоремата за единственост на решението на задача на Коши за линейни уравнения, докажете, че всяко решение на уравнението

$$y'' + y = 0$$

може да се представи като линейна комбинация на функциите $\sin x$ и $\cos x$.

Задача 13. Като използвате теоремата за съществуване и единственост на решението на задача на Коши за линейни уравнения, докажете за уравнението $y'' + xy = 0$, че:
а) множеството от всички решения на уравнението образува линейно пространство;
б) всеки три решения на уравнението са линейно зависими;
в) съществува двойка линейно независими решения на уравнението.

Задача 14. Функциите $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са две решения на уравнението $y'' + x^2y + 2y = 0$, а $W(x)$ е тяхната детерминанта на Вронски. Като използвате (само!) теоремата за съществуване и единственост на решението на задача на Коши за линейни уравнения, докажете, че:

а) Ако $W(0) = 1$, то $W(x) \neq 0$ за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$;

б) Ако $W(0) = 1$, то функциите $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са линейно независими;

в) Ако $W(0) = 0$, то $W(x) = 0$ за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$.

Задача 15. Възможно ли е да се допират графиките на две различни решения на уравнението $y'' - xy' + x^2 y = 1$? Защо?

Задача 16. Нека $f(x)$ е непродължимото решение на задачата на Коши

$$\begin{cases} y'' = x^2 y + 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

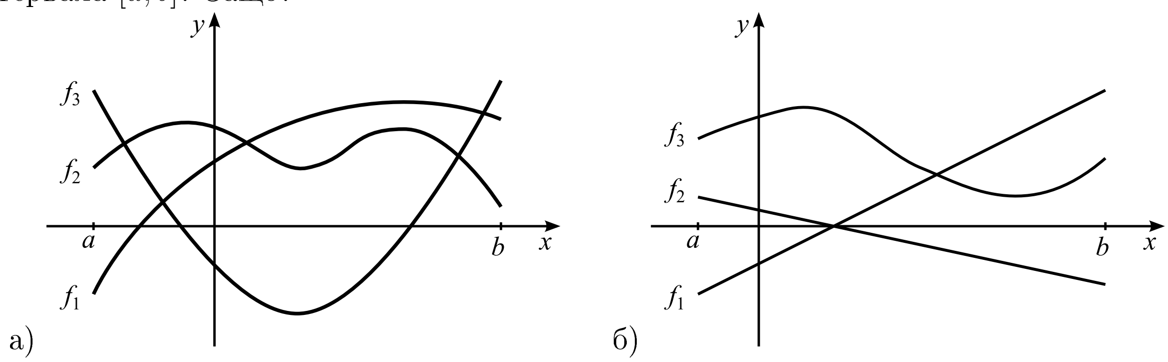
а) Какъв е дефиниционния интервал на $f(x)$?
б) Каква е най-малката стойност на $f(x)$? Защо?

Задача 17. Дадени са функциите $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x) \in C^1([0,4])$. Възможно ли е да са линейно зависими в интервала $[0,4]$, ако:

а) $f_1(1) = 0,\ f_1(2) > 0,\ f_1'(2) = 0$; $f_2(1) > 0,\ f_2'(2) > 0$; $f_3(1) > 0,\ f_3'(2) < 0$;

б) $f_1(1) = 0,\ f_2(1) = f_3(1) > 0$; $f_1(2) = f_2(2) > 0,\ f_3(2) = 0$; $f_1(3) = f_3(3) > 0,\ f_2(3) = 0$.

Задача 18. На чертежа са изобразени графиките на три непрекъснати в интервала $[a,b]$ функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$. Линейно зависими ли са функциите $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ в интервала $[a,b]$? Защо?



Задача 19. Пресметнете детерминантата на Вронски на двойката функции $y_1(x) = 2 - 3x^2$ и $y_2(x) = 2x^3 + 1$. Могат ли $y_1(x)$ и $y_2(x)$ да са решения в интервала $(-1,1)$ на едно и също линейно уравнение

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

с непрекъснати коефициенти $a(x), b(x) \in C(-1,1)$? Защо?

Задача 20. При какви стойности на реалния параметър k уравнението

$$y'' + ky = \sin \pi x$$

няма нито едно периодично решение?

Задача 21. Дадено е уравнението

$$y'' + ay' + 4y = 0$$

където a е реалния параметър.
а) При какви стойности на a всички решения на уравнението са ограничени за $x \in (-\infty, +\infty)$?
б) При какви стойности на a всички решения на уравнението клонят към 0 при $x \to -\infty$?
в) При какви стойности на a уравнението има поне две периодични решения?

Задача 22. Дадено е уравнението

$$(x-1)y'' + (x-2)y' - y = 0, \quad x > 1.$$

а) Намерете две частни решения на уравнението от вида $y_1(x) = e^{ax}$ и $y_2(x) = bx + c$, $b \neq 0$.
б) Покажете, че намерените частни решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са линейно независими в интервала $(1, +\infty)$.
в) Намерете общото решение на уравнението.

Задача 23. Възможно ли е периодична функция да е решение на уравнението в интервала $x \in (-\infty, +\infty)$? Защо?

а) $y' = xy^2 - x$ **б)** $y'' + 2xy = 2x$ **в)** $y'' + xy' = -x$ **г)** $y'' + 4y = x$

Задача 24. Нека $x(t), y(t)$ са решение на системата

а) $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + e^t \\ \dot{y} = 4x + 3y \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{2}{t}x + \dfrac{8}{t}y \\ \dot{y} = \dfrac{2}{t}x + \dfrac{2}{t}y \end{cases}$ в интервала $t \in (0, +\infty)$.

Изведете линейно диференциално уравнение, което се удовлетворява от функцията $x(t)$. Намерете общото решение на системата.

Задача 25. Приложете теоремата за съществуване и единственост в цилиндъра $G = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : \ |t| \leq 2, \ x^2 + y^2 \leq 1\}$, за да намерите интервал, в който съществува решение на задачата на Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = 2x^2 + y \end{cases}$$
$$x(0) = 0, \ \ y(0) = 0$$

Задача 26. Дадена е задачата на Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - y \\ \dot{y} = x + t \end{cases}$$
$$x(0) = 0, \ \ y(0) = 1$$

а) Сведете задачата до система от две интегрални уравнения и образувайте редиците $x_n(t)$ и $y_n(t)$, $n = 0, 1, 2, ...$, от последователни приближения по метода на Пикар за решението на задачата.
б) Пресметнете първите три последователни приближения (x_0, y_0; x_1, y_1 и x_2, y_2).
в) За всяко естествено n, намерете константа $C(n)$, такава че

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq C(n)|t|^n \ , \quad t \in (-\infty, +\infty);$$

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq C(n)|t|^n \ , \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

г) Докажете че редиците $x_n(t)$ и $y_n(x)$, $n = 0, 1, 2, ...$, са равномерно сходящи в интервала $(-\infty, +\infty)$.

Задача 27. Векторните функциите $\mathrm{x}_1(t) = (x_1^1(t), x_1^2(t))$ и $\mathrm{x}_2(t) = (x_2^1(t), x_2^2(t))$ са две решения на системата

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & t+2 \\ 3t & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix},$$

а $W(t)$ е детерминанта на Вронски на $\mathrm{x}_1(t)$ и $\mathrm{x}_2(t)$. Като използвате (само!) теоремата за съществуване и единственост на решението на задача на Коши за линейна система, докажете, че:

а) ако $W(0) = 1$, то $W(x) \neq 0$ за всяко $t \in (-\infty, +\infty)$;

б) ако $W(0) = 1$, то $\mathrm{x}_1(t)$ и $\mathrm{x}_1(t)$ са линейно независими;

в) ако $W(0) = 0$, то $W(x) = 0$ за всяко $t \in (-\infty, +\infty)$.

Задача 28. Нека функциите $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяват системата

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$$

а) Покажете, че $[x(t)]^2 - [y(t)]^2$ не зависи от t.
б) Определете равновесните точки на системата. Начертайте фазов портрет. Кои равновесни точки са устойчиви?

Задача 29. При какви стойности на реалния параметър α системата

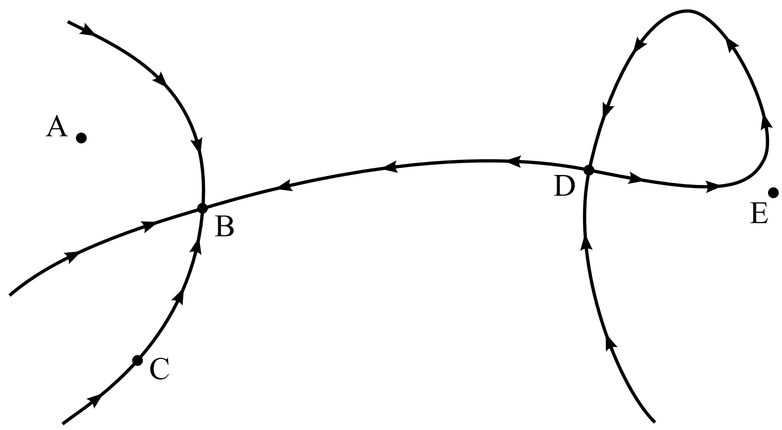
$$\begin{cases} \dot{x} = \quad y \ + \ \sin t \\ \dot{y} = -x + \alpha \cos t \end{cases}$$

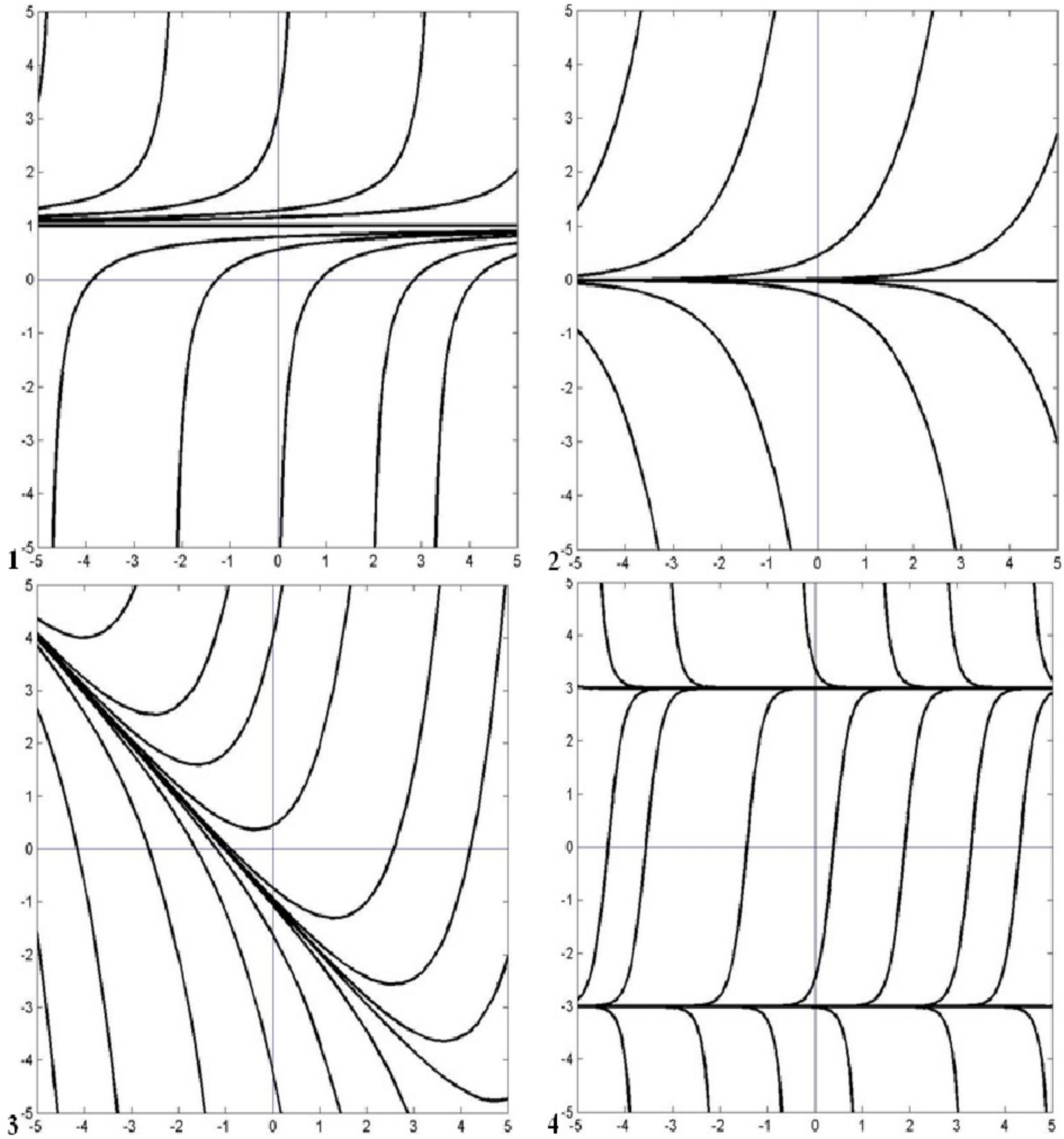
има поне едно периодично решение?

Задача 30. На чертежа са изобразени няколко фазови криви и всички равновесни точки A, B, C, D и E на системата

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

където $f(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ и $g(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$. За кои от равновесните точки можем със сигурност да твърдим че са неустойчиви? Кои от равновесните точки е възможно да са устойчиви?



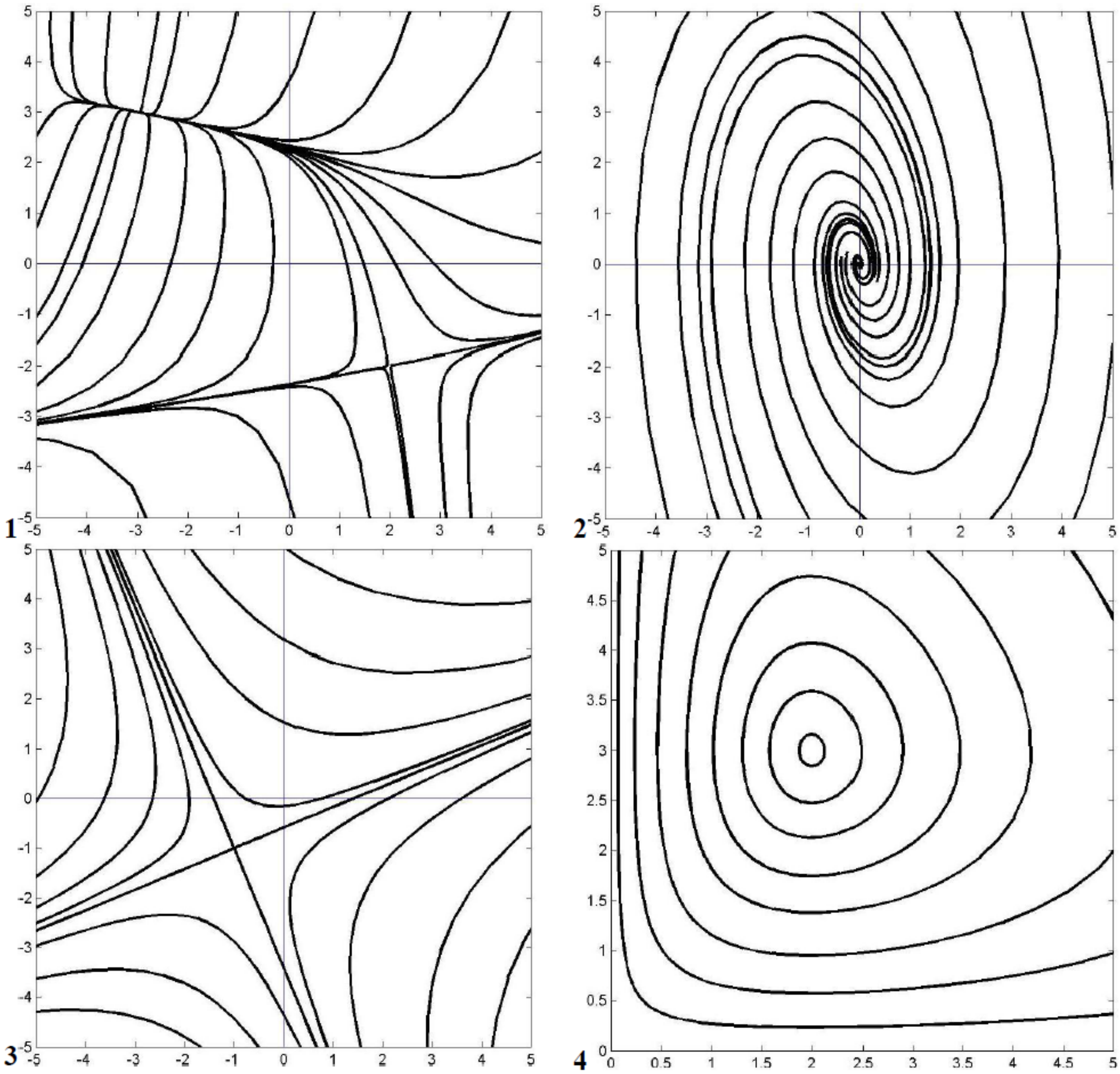


Фиг. 1

Задача 31. Интегрални криви на кое уравнение са начертани на графиките 1, 2, 3 и 4 от Фиг. 1?

а) $y' = y$ **б)** $y' = x + y$ **в)** $y' = -1 - y$

г) $y' = (y-1)^2$ **д)** $y' = 2x$ **е)** $y' = 9 - y^2$



Фиг. 2

Задача 32. Фазови криви на коя ситема са начертани на графиките 1, 2, 3 и 4 от Фиг. 2?

а) $\begin{cases} \dot{x} = x + y + 2 \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = \sin x \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} \dot{x} = 5x + \;\; y \\ \dot{y} = \;\; x + 5y \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x + y^2 - 6 \end{cases}$ **д)** $\begin{cases} \dot{x} = \quad 3x - xy \\ \dot{y} = -2y + xy \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} \dot{x} = \;\; x - y \\ \dot{y} = 4x + y \end{cases}$