Адюнгирани количества и поддетерминанти. Формули на Крамер.

В тази глава ще разгледаме начин за пресмятане на детерминанти чрез свеждането им към сума от детерминанти от по-нисък ред. Ще използваме обичайните вече означения за детерминанта от ред $n : \Delta = |a_{ij}|, i, j = 1, 2 \dots, n$, а $\Delta = \sum (-1)^{[i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_n]} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ ще бъде нейното развитие. Нека фиксираме p и q $(1 \leq p, q \leq n)$ и разгледаме елемента в p-тия ред и q-тия стълб на детерминантата a_{pq}. От всички членове в развитието на Δ, които съдържат така избрания елемент, изваждаме a_{pq} пред скоби. Изразът в скобите, означаваме с A_{pq} и наричаме *адюнгирано количество* на a_{pq}. Т.к. всеки член от развитието на Δ съдържа точно по един елемент от всеки стълб и всеки ред на детерминантата, изваждайки a_{pq} пред скоби от някои от тях означава, че в A_{pq} няма елементи от p-тия ред и q-тия стълб на Δ. По-конкретно, a_{pq} се съдържа в елементите от вида $(-1)^{[i_1 \ \cdots \ i_{p-1} \ q \ i_{p+1} \ \cdots \ i_n]} a_{1i_1} \dots a_{p-1,i_{p-1}} a_{pq} a_{p+1,i_{p+1}} \dots a_{ni_n}$, т.е. всички членове, за които $i_p = q$. Следователно имаме, че $A_{pq} = (-1)^{[i_1 \ \cdots \ i_{p-1} \ q \ i_{p+1} \ \cdots \ i_n]} a_{1i_1} \dots a_{p-1,i_{p-1}} a_{p+1,i_{p+1}} \dots a_{ni_n}$, където $i_1 \ \dots \ i_{p-1} \ i_{p+1} \ \dots \ i_n$ е произволна пермутация на $1, \dots, q-1, q+1, \dots, n$. Забележете, че така се оказва, че A_{pq} е сума на $(n-1)!$ събираеми. И така, сумата $a_{pq} A_{pq}$ изчерпва всички членове на Δ, които съдържат елемента a_{pq}. Сега може да направим абсолютно същото за всяко $1 \leq q \leq n$ и да групираме всички членове в развитието по следния начин: $\Delta = a_{p1} Ap1 + a_{p2} A_{p2} + \dots a_{pn} A_{pn} = \sum_{k=1}^{n} a_{pk} A_{pk}$. Това развитие на Δ се нарича развитие по адюнгираните количества на p-тия ред. По аналогичен начин, ако оставим q фиксирано, а освободим p, се вижда, че можем да развием Δ по адюнгираните количества на q-тия стълб като $\Delta = a_{1q} A_{1q} + a_{2q} A_{2q} + \cdots + a_{nq} A_{nq}$.

Нека сега

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,q-1} & a_{1q} & a_{1,q+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p-1,1} & a_{p-1,2} & \dots & a_{p-1,q-1} & a_{p-1,q} & a_{p-1,q+1} & \dots & a_{p-1,n} \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{p,q-1} & a_{pq} & a_{p,q+1} & \dots & a_{pn} \\ a_{p+1,1} & a_{p+1,2} & \dots & a_{p+1,q-1} & a_{p+1,q} & a_{p+1,q+1} & \dots & a_{p+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,q-1} & a_{nq} & a_{n,q+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и си представим, че „зачертаваме“ p-тия ред и q-тия стълб. Получаваме детерминантата от ред $n-1$

$$\Delta_{pq} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,q-1} & a_{1,q+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p-1,1} & a_{p-1,2} & \dots & a_{p-1,q-1} & a_{p-1,q+1} & \dots & a_{p-1,n} \\ a_{p+1,1} & a_{p+1,2} & \dots & a_{p+1,q-1} & a_{p+1,q+1} & \dots & a_{p+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,q-1} & a_{n,q+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

която ще наричаме поддетерминанта на a_{pq}. Ясно е, че $\Delta_{pq} = \sum (-1)^{[i_1\ \dots\ i_{p-1}\ i_{p+1}\ \dots\ i_n]} a_{1i_1} \dots a_{p-1,i_{p-1}} a_{p+1,i_{p+1}} \dots a_{ni_n}$, където $i_1\ \dots\ i_{p-1}\ i_{p+1}\ \dots\ i_n$ е произволна пермутация на $1, \dots, q-1, q+1, \dots, n$ (общо $(n-1)!$ брой събираеми).

Теорема. *В сила е равенството* $A_{pq} = (-1)^{p+q} \Delta_{pq}\ \forall p, q = 1, 2, \dots, n$.

Доказателство. Както A_{pq}, така и Δ_{pq} е сума на всевъзможните събираеми от вида

$$a_{1i_1} \dots a_{p-1,i_{p-1}} a_{p+1,i_{p+1}} \dots a_{n,i_n}, \qquad (1)$$

където $i_1\ \dots i_{p-1}\ i_{p+1}\ \dots\ i_n$ е произволна пермутация на $1, \dots, q-1, q+1, \dots, n$. Нека разгледаме пермутациите $\tau = i_1\ \dots i_{p-1}\ i_{p+1}\ \dots\ i_n$ и $\sigma = i_1\ \dots i_{p-1}\ q\ i_{p+1}\ \dots\ i_n$. (1) участва в поддетерминантата Δ_{pq} със знак $(-1)^{[\tau]}$, а в адюнгираното количество A_{pq} със знак $(-1)^{[\sigma]}$. Ясно е, че всяка инверсия в τ е инверсия и в σ. Остава да проверим колко нови инверсии има в σ поради наличието на допълнителния елемент q. Нека от числата $i_1, \dots, i_{p-1}$ m на брой $(0 \le m \le p-1)$ са по-големи от q. Тогава те образуват m на брой инверсии с q. Останалите $p-1-m$ числа са по-малки от q. Естествените числа, които са по-малки от q са

$q-1$ на брой и сега $p-1-m$ от тях стоят пред q в σ. Тогава остават $q-1-(p-1-m) = q-p+m$ числа, по-малки от q, които стоят след него в разглежданата пермутация и, естествено, образуват $q-p+m$ на брой инверсии с q. Следователно общият брой на новите инверсии в σ, „причинени“ от q е $m+(q-p+m) = q-p+2m$ или еквивалентно $[\sigma] = [\tau]+p-q+2m$. Тогава имаме

$$(-1)^{[\sigma]} = (-1)^{[\tau]+p-q+2m} = (-1)^{[\tau]+p+q+2(m-p)} = (-1)^{[\tau]}(-1)^{p+q}.$$

Така имаме, че (1) участва в Δ_{pq} със знак $(-1)^{[\tau]}$, а в A_{pq} със знак $(-1)^{[\tau]}(-1)^{p+q}$. Следователно равенството $A_{pq} = (-1)^{p+q}\Delta_{pq}$ е изпълнено дори почленно. □

Имайки предвид, че $\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{pk}A_{pk}$ и $A_{pk} = (-1)^{p+k}\Delta_{pk}$ получаваме:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{p+k}a_{pk}\Delta_{pk}.$$

От това равенство става ясно как детерминантата Δ от ред n се изразява чрез n на брой детерминанти от ред $n-1$ $(\Delta_{pq}, \Delta_{p2}, \dots, \Delta_{pn})$. Това развитие се нарича развитие на детерминанта по поддетерминантите на p-тия ред. Аналогичен резултат е валиден и за развитие на детерминанта по поддетерминантите на q-тия стълб:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+q}a_{kq}\Delta_{kq}.$$

Дефиниция. *Нека $i, j \in \mathbb{N}$. Символ на Кронекер наричаме*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ако } i = j \\ 0, \text{ ако } i \neq j \end{cases}.$$

В сила е следното

Твърдение.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{pk}A_{qk} = \delta_{pq}\Delta.$$

Доказателство. При $p = q$ просто получаваме дефиницията за развитие на детерминанта по адюнгираните количества на p-тия ред:

$$\Delta = \delta_{pp}\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{pk}A_{pk}.$$

Нека сега $p \neq q$. Да разлгедаме детерминантата Δ_1 от ред n, чиито p-ти и q-ти редове са едни и същи:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

От свойствата на детерминантите имаме, че $\Delta_1 = 0$. Развиваме Δ_1 по адюнгираните количества на q-тия ред. Тези адюнгирани количества са същите, както за q-тия ред на Δ, т.е. са $A_{q1}, A_{q2}, \dots, A_{qn}$. Следователно

$$\delta_{pq}\Delta = 0 = \Delta_1 = a_{p1}A_{q1} + \dots + a_{pn}A_{qn} = \sum_{k=1}^{n} a_{pk}A_{qk}.$$

С това твърдението е доказано. $\square$

Нека сега да разгледаме системата от n линейну уравнения с n неизвестни

$$\left| \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{array} \right. ,$$

където коефициентите a_{ij}, b_k принадлежат на дадено числово поле F за $\forall i, j, k = 1, \dots, n$. С $\Delta = |a_{ij}|$ означаваме детерминантата, която съответства на тази система. Нека фиксираме индекса k. Тогава $A_{1k}, \dots, A_{nk}$ са адюнгираните количества, които съответстват на k-кия стълб на Δ. Умножаваме първия ред на системата с A_{1k}, втория с A_{2k}, ..., $k-$тия с

A_{kk}, ..., n-тия ред с A_{nk} след което ги събираме. Получаваме израза

$$\begin{aligned}
&x_1(\underbrace{a_{11}A_{1k} + a_{21}A_{2k} + \dots + a_{n1}A_{nk}}_{=0}) + \dots \\
&+ x_k(\underbrace{a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{kk}A_{kk} + \dots + a_{nk}A_{nk}}_{=\Delta}) + \dots \\
&+ x_n(\underbrace{a_{1n}A_{1k} + a_{2n}A_{2k} + \dots + a_{nn}A_{nk}}_{=0}) = b_1A_{1k} + b_2a_{2k} + \dots + b_nA_{nk}.
\end{aligned}$$

Забележете, че всички изрази в скобите, с изключение на k-тия са равни на нула а k-тият е равен на детерминантата Δ, съгласно последното твърдение. В такъв случай окончателно имаме

$$\Delta x_k = b_1A_{1k} + b_2a_{2k} + \dots + b_nA_{nk}. \tag{2}$$

Нека сега разгледаме детерминантата от ред n

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

чийто k-ти стълб се състои от числата $b_1, b_2, \dots, b_n$. Тя се различава от Δ само по k-тия си стълб и следователно адюнгираните ѝ количества по него са същите, както за k-тия стълб на Δ, т.е. $A_{1k}, A_{2k}, \dots, A_{nk}$. Следователно $\Delta_k = b_1A_{1k} + b_2a_{2k} + \dots + b_nA_{nk}$ и уравнение (2) може да се запише във вида

$$\Delta x_k = \Delta_k,$$

където Δ_k е детерминантата от ред n, като k-тия стълб на Δ се замени със стълба от свободните членове на системата $b_1, b_2, \dots, b_n$. Тези разсъждения са в сила за всяко $k = 1, 2, \dots, n$. Сега, ако предположим, че $\Delta \neq 0$ получаваме равенствата

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

като единствено решение на системата линейни уравнения. Горните формули се наричат *формули на Крамер.* Ще извършим проверка, с която ще установим, че тези формули наистина дават решение на системата. Нека вземем i-тото уравнение на системата

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

или записано по друг начин

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i.$$

Имаме още, че

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}(b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \cdots + b_nA_{nk}) = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n} b_jA_{jk}.$$

Заместваме този израз за x_k в i-тото уравнение и получаваме

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n} b_jA_{jk}\right) &= \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ik}b_jA_{jk}\\ &= \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n} b_j\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}\right) = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n} b_j\Delta\delta_{ij} = \frac{1}{\Delta}\Delta b_i = b_i.\end{aligned}$$

По този начин проверихме, че $x_1, x_2, \ldots, x_n$, зададени с формулите на Крамер удовлетворяват произволно уравнение на системата линейни уравнения. В случаят, когато $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ системата се нарича *хомогенна*. Тогава тя винаги има решение и то е $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Ако $\Delta \neq 0$, то това решение е единствено.