ГЕОМЕТРИЯ – ОБЩИ ЗАДАЧИ

1 зад. Дадена е линейната трансформация φ_C на разширената евклидова равнина E_2^* с матрица $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Да се намерят неподвижните точки и прави на φ_C.

2 зад. В E_2^* са дадени двете четворки точки: A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), O(0, 0, 1) и E(1, 1, 1), и

A'(3, 4, 0), B'(–4, 3, 0), O'(14, 2, 5) и E'(13, 9, 5). Да се намери аналитично представяне (матрица) на линейната трансформация φ_C на E_2^*, при която точките A, B, O и E се изобразяват съответно в точки A', B', O' и E'. Да се определят неподвижните точки и неподвижните прави под действие на φ_C.

3 зад. Да се намери аналитично представяне на централно проектиране ψ на E_2^* върху правата $g: x - 3y + 2t = 0$ с център:

а) т.S (1, 1, –2);

б) безкрайната точка U_{AB} на правата AB: A (–1, 4, 2), B (3, 0, 1).

Да се намерят образите на безкрайната точка U_b на правата $b: x + 2y - t = 0$ при централните проектирания от а) и б).

4 зад. Да се намери аналитично представяне (матрица) на линейната трансформация φ_C на E_3^*, при която точките A(1, 0, 0, 0), B(0, 1, 0, 0), D(0, 0, 1, 0), O(0, 0, 0, 1) и E(1, 1, 1, 1) се изобразяват съответно в точки A'(3, 1, –1, 1), B'(5, 0, 0, 1), D'(6, –1, 2, 1), O'(2, 2, –2, 1) и E'(16, 2, –1, 4). Да се намерят неподвижните точки и равнини под действие на φ_C.

5 зад. Да се намери аналитично представяне на централно проектиране ψ на E_3^* върху равнината α, определена от точките: A(1, 3, 0, 1), B(1, 3, 1, 0) и O(0, 0, 0, 1) с център:

а) т.S (1, 2, 1, 1);

б) безкрайната точка U_g на правата g, пресечница на равнините

$\beta: x + z = 0$ и $\gamma: x + y + 2z = 0$.

6 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ в равнината са дадени точките: $A(-1, 2)$, $B(0, 3)$, $D(1, 0)$ и точките: $A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{(3\sqrt{2}+2)}{2}\right)$, $B'\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{(3\sqrt{2}+2)}{2}\right)$, $D'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}-2}{2}\right)$.

а) Да се докаже, че триъгълниците ABD и $A'B'D'$ са еднакви;

б) Да се намери ортогонална трансформация (ОТ) ϕ, която изобразява точките A, B и D съответно в точки A', B', D'.

7 зад. Да се намери аналитично представяне на ротация в равнината с център S (a, b) и ъгъл на завъртане θ.

8 зад. Да се докаже, че ортогоналната трансформация ϕ:

$$\phi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

е ротация и да се намерят центъра и ъгъла на завъртане.

9 зад. Да се намери аналитично представяне на ОТ ϕ, която е движение и при, която точките $A(2, 0)$ и $B(2, 2)$ се изобразяват съответно в точки $A'\left(1+\sqrt{2}, 1\right), B'(1, 1+\sqrt{2}\,)$. Да се докаже, че ϕ е ротация. Да се намерят центъра и ъгъла на завъртане.

10 зад. Да се докаже, че ортогоналната трансформация ϕ:

$$\phi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

е осева симетрия и да се намери уравнение на оста ѝ.

11 зад. Спрямо ОКС $K=Oxyz$ в пространството да се намери аналитично представяне на:

а) ротация ρ с ос Ox и ъгъл θ;

б) ротация ρ с ос Oy и ъгъл θ;

в) ротация ρ на ъгъл $\frac{\pi}{2}$ с ос правата $g\colon \begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = -1 + s \\ z = 2 - 2s \end{cases}, s \in R.$

12 зад. Да се докаже, че ортогоналната трансформация ϕ:

$$\phi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

е ротация и да се намерят уравнения на правата, която е ос на ротацията.

13 зад. Спрямо ОКС $K=Oxyz$ в пространството да се намери аналитично представяне на симетрия σ_g относно правата $g: \begin{cases} x = 0 - s \\ y = 1 + 2s, s \in R. \\ z = 3 + s \end{cases}$

14 зад. Да се докаже, че дадената ОТ ϕ е симетрия относно равнина и да се намери уравнение на равнината на симетрия:

а) $\phi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$;

б) $\phi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

15 зад. Дадена е ОТ $\phi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Да се докаже, че ϕ е въртящо отражение. Да се намерят уравнения на оста на ротация и равнината на симетрия на ϕ.

16 зад. Да се намери аналитично представяне на плъзгащо отражение ϕ с равнина на симетрия $\alpha: x + 2y - 2 = 0$ и вектор на транслация $\vec{p}(-2, 1, 3)$.

17 зад. Спрямо ОКС $K=Oxyz$ в пространството са дадени точките: A(-1, 2, 3) и B(0, 1, 2). Да се намери аналитично представяне на винтово движение ϕ с ос на ротация правата AB, ъгъл на ротация $\frac{\pi}{2}$ и вектор на транслация $\vec{p} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BA}$, $|\vec{p}| = 1$.