Равнинни криви

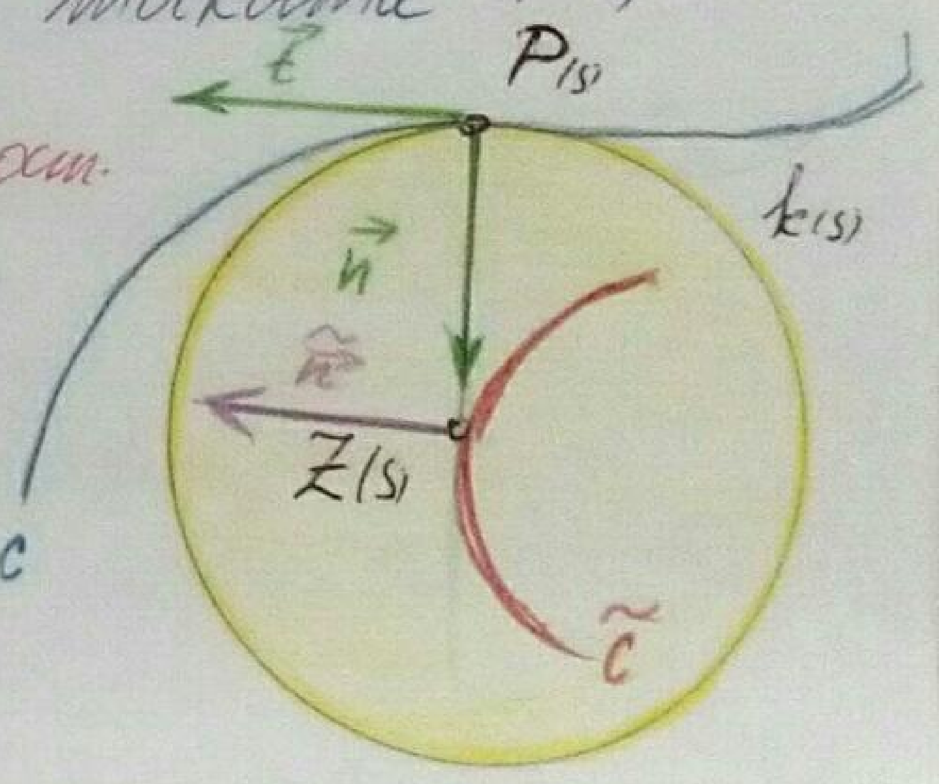
Нека $c : \vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in S$, $\vec{r}(s)$ е равнинна крива $\Leftrightarrow \tau(s) = 0 \Rightarrow \vec{b}'(s) = \vec{o}$. Тогава за формулите на Френе имаме $\begin{cases} \vec{t}' = \varkappa \vec{n} \\ \vec{n}' = -\varkappa \vec{t} \end{cases}$

Естествените уравнения на c: $\begin{cases} \varkappa = \varkappa(s) \\ \tau = 0 \end{cases}$, $\varkappa(s) > 0$.

/ По-нататък ще въведем равнинна кривина $k(s)$, която допуска и отрицателни стойности /

Еволюта и еволвента на равнинна крива.

Нека $R(s) = \dfrac{1}{\varkappa(s)}$ е радиусът на кривината в т. $P(s)$. Точката $Z = Z(s)$ върху главната нормала, за която $\overrightarrow{PZ}$ и $\vec{n}$ са еднопосочни и $|\overrightarrow{PZ}| = R(s)$ се нарича център на кривината в точката P, а окръжността $k = k(Z(s), R(s))$ – оскулачна окръжност.



Тогава множеството от центровете на кривина на c образува крива $\tilde{c}$, която се нарича еволюта на c и съответно има уравнение

$$\tilde{c} : \vec{\tilde{r}}(s) = \vec{r}(s) + \frac{1}{\varkappa(s)} \vec{n}(s).$$

Забележка. Да отбележим, че параметърът s не е естествен за еволютата $\tilde{c}$ ②

Имаме $\dfrac{d\vec{\tilde{r}}}{ds} = \dot{\vec{\tilde{r}}} = \vec{r}\,'(s) + \left(\dfrac{1}{\varkappa(s)}\right)'\vec{n} + \dfrac{1}{\varkappa(s)}\vec{n}\,' = \vec{t} + \left(\dfrac{1}{\varkappa(s)}\right)'\vec{n} - \dfrac{1}{\varkappa}\varkappa\vec{t} = \left(\dfrac{1}{\varkappa(s)}\right)'\vec{n}$

Следователно: Нормалите на кривата c са допирателни за нейната еволюта $\tilde{c}$ - $\vec{\tilde{t}} \parallel \vec{n}$

Нека $c \in C^{(2)}$: $\varkappa = const$, $\varkappa \neq 0$. Тогава c е окръжност и обратно, ако c е окръжност, то $\varkappa = const$. В този случай еволютата се изражда в точка - Z_0 - имаме $\varkappa' = 0 \Leftrightarrow \vec{\tilde{r}} = \vec{p}$ - константен вектор.

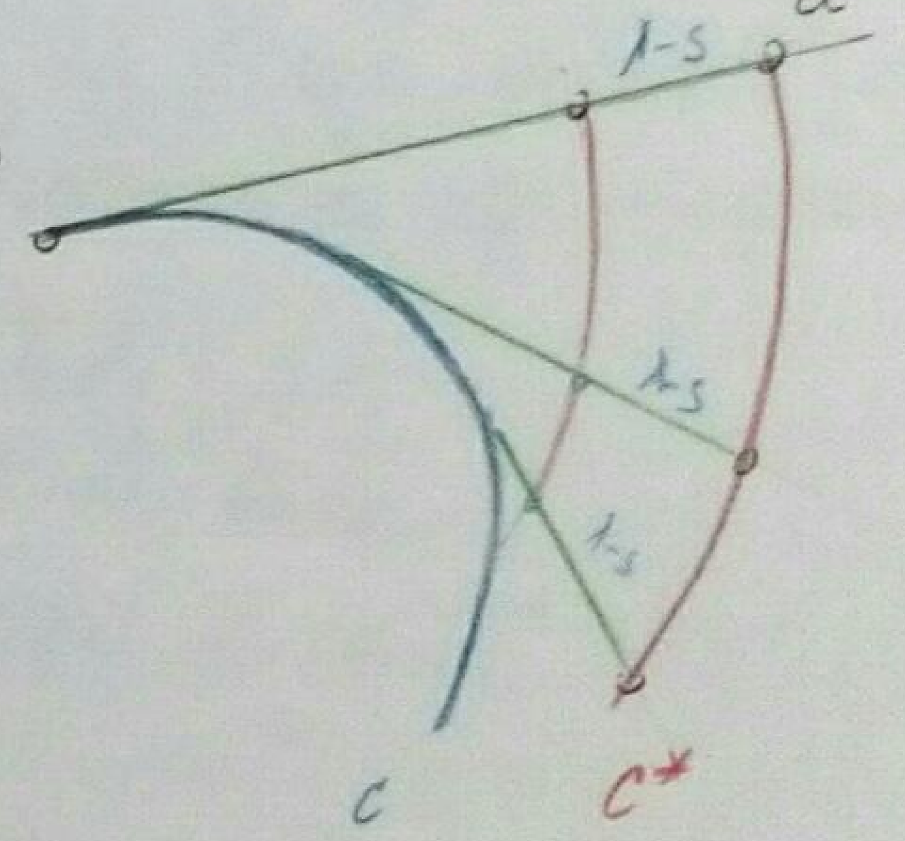
Нека $\varkappa(s) \neq const$. Тогава дължината на дъгата $\tilde{c}_{[a,b]}$ от еволютата $\tilde{c}$ е равна на разликата на радиусите на кривината в точките $A = A(a)$ и $B = B(b)$, т.е. $\vec{OA} = \vec{r}(a)$, $\vec{OB} = \vec{r}(B)$

Имаме $\displaystyle\int_a^b |\dot{\vec{\tilde{r}}}(s)|\,ds = \int_a^b \left|\left(\frac{1}{\varkappa(s)}\right)'\right| ds = \int_a^b |R'(s)|\,ds = \left|\frac{1}{\varkappa(b)} - \frac{1}{\varkappa(b)}\right| = |R(b) - R(a)|$

Ако c - крива, а $\tilde{c}$ - нейната еволюта, то c се нарича еволвента на $\tilde{c}$. Връзката между еволюта и еволвента позволява да се постъпи обратно - при дадена крива да дефинираме еволвента

Еволвента Нека $c: \vec{r}=\vec{r}(s)$, $s \in S$: $\vec{r}'^{2}(s)=1$ т.е. c е отнесена спрямо естествения си параметър. $P \in c$: $\vec{OP}=\vec{r}(s)$, а $g=g(s)$ е допирателната в т. $P(s)$ към c и нека т. $Q(s) \in g(s)$: $|\vec{PQ}|=|\lambda|$, $|\lambda|>|s|$ е такава, че (векторните функции) векторите $\vec{PQ}$ и $\vec{t}(s)$ са еднопосочни при $s<0$ и противоположни при $s>0$

Кривата, която описват Q (множ-то от т-те Q) наричаме еволвента на c



При $\lambda>s$ c_{λ}^{*} е еволвента на c с уравнение

$$\boxed{c^{*}: \vec{r}^{*}(s)=\vec{r}(s)+(\lambda-s)\vec{t}}$$

Следователно за $\dot{\vec{r}}^{*}(s)$ $\left(\frac{d\vec{r}^{*}}{ds}=\dot{\vec{r}}^{*}_{s}\right)$ имаме

$$\dot{\vec{r}}^{*}=\vec{r}'(s)+(\lambda-s)'\vec{t}+(\lambda-s)\vec{t}'=\vec{t}-\vec{t}+(\lambda-s).\varkappa\vec{n}.$$

$\Rightarrow$ нормалите на c^{*} са допирателни за c $\Rightarrow$

c е еволюта на c^{*}

Като следствие получаваме, че две произволни еволвенти отсичат от допирателните на еволютата си отсечки с постоянна дължина.

Формули на Френе за равнинни линии

За равнинна крива с имаме, че лежи в оскулачната си р-на α. $\vec{b}$ е конст. в-р $\Rightarrow \vec{b}' = \vec{0} \Rightarrow$ имаме

$$\vec{t}' = \varkappa \vec{n}, \quad \vec{n}' = -\varkappa \vec{t}, \qquad \varkappa = \varkappa(s) = |\vec{r}''(s)| > 0$$

За $\vec{t}$ и $\vec{n}$ не може да се твърди дали принадлежат на S^+_α или не. Нека в α имаме $K_\alpha = O\vec{e}_1\vec{e}_2$, задаваща S^+_α. Тогава за всяка т-ка $\vec{r} = \vec{r}(s)$ в α можем да дефинираме положително ориентирана ортонормирана двойка вектори $\vec{T}(s)$ и $\vec{N}(s)$. Нека

$$\vec{T} = T_1\vec{e}_1 + T_2\vec{e}_2$$
$$\vec{N} = N_1\vec{e}_1 + N_2\vec{e}_2$$

(От) $\vec{T}, \vec{N} \in S^+_\alpha \Leftrightarrow \begin{vmatrix} T_1 & T_2 \\ N_1 & N_2 \end{vmatrix} > 0$. Допълваме K_α до ОКС $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3 : K \in S^+$ т.е. $O\vec{T}\vec{N}\vec{e}_3 \in S^+ \Rightarrow \vec{T} \times \vec{N} = \vec{e}_3$.

От $\vec{T}, \vec{N}$ – ортонормирана двойка в-ри ф-ции получаваме, че

$$\left| \begin{array}{l} \vec{T}' = K\vec{N} \\ \vec{N}' = -K\vec{T} \end{array} \right. , \quad K = K(s).$$

Нека сега $\vec{T} = \vec{t} = \vec{r}'$. Тогава

$$\vec{r}'' = \vec{T}' = K\vec{N}, \quad \vec{T} \wedge \vec{N} = \frac{1}{K}\vec{r}' \times \vec{r}''$$ и от

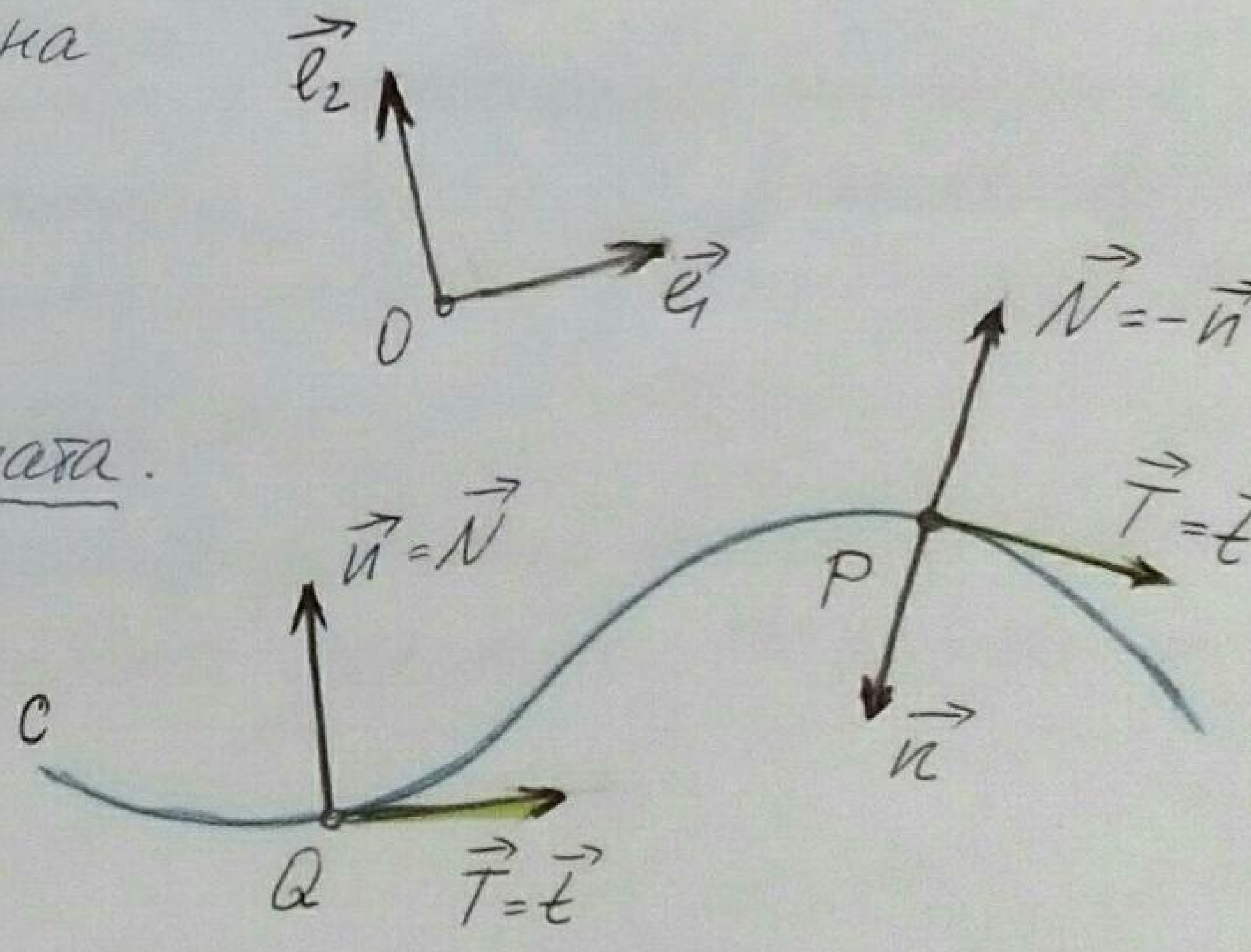
От $\vec{T}\vec{N}\vec{e_3} \in S^+$ => смесеното им произведение $\vec{T}\vec{N}\vec{e_3} = +1$

$\vec{T}\vec{N}\vec{e_3} = \frac{1}{k}\vec{r}'\vec{r}''\vec{e_3}$ => $k = \vec{r}'\vec{r}''\vec{e_3}$ => $\vec{N} = \varepsilon\vec{n}$, $\varepsilon = \pm 1$ => $k = \pm\varkappa$

Нека $c: \begin{cases} x = q \\ y = f(q) \end{cases}$, т.е. $y = f(x)$. От $\dot{s} = \sqrt{1+\dot{f}^2}$ => $\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dq} \cdot \frac{dq}{ds} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\dot{s}}$

=> $\vec{r}'\left(\frac{1}{\sqrt{1+\dot{f}^2}}, \frac{\dot{f}}{\sqrt{1+\dot{f}^2}}, 0\right)$ и $\vec{r}''\left(\frac{-\dot{f}\ddot{f}}{(1+\dot{f}^2)^2}, \frac{\ddot{f}}{(1+\dot{f}^2)^2}, 0\right)$ =>

$$k = \frac{\ddot{f}}{(1+\dot{f}^2)^{3/2}}$$. k – равнинна кривина



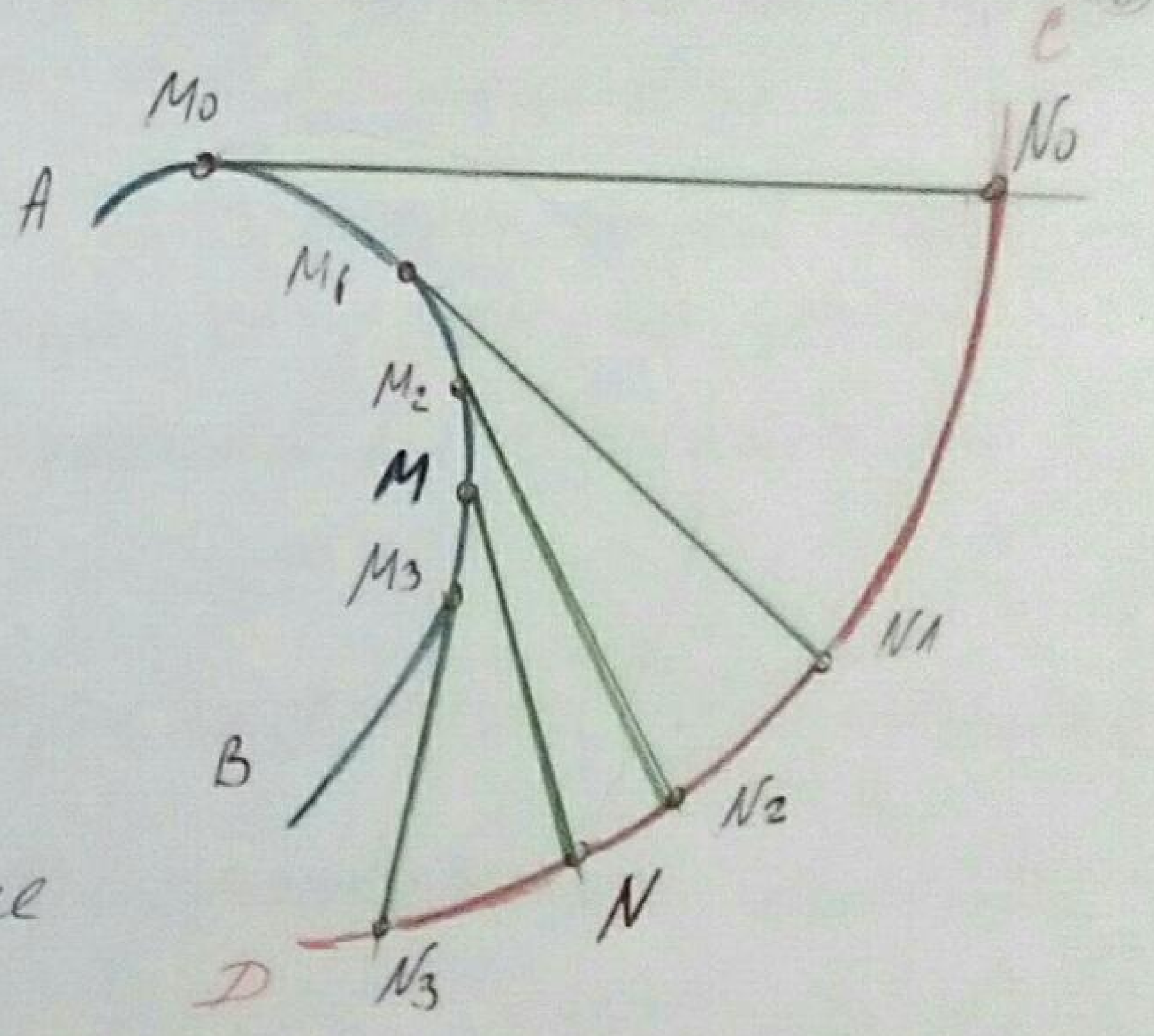
Така че, ако в т-ка P от c имаме $\ddot{f} < 0$, то в околност на P, c е вдлъбната.

В този случай $k < 0$ и $\vec{N} = -\vec{n}$

Ако в т. Q имаме $\ddot{f} > 0$, то c е изпъкнала в околност на Q и $k > 0$, $\vec{N} = \vec{n}$

Механична интерпретация

Нека $\overset{\frown}{AB}$ е крива. В точка от $\overset{\frown}{AB}$ – M_0 е закрепена нееластична гъвкава нишка M_0N_0, която намотаваме върху $\overset{\frown}{AB}$ (нека $\overset{\frown}{AB}$ – правилна). Тогава краят N_0 описва крива $\overset{\frown}{CD}$ – еволвента на $\overset{\frown}{AB}$, а $\overset{\frown}{AB}$ – еволюта на $\overset{\frown}{CD}$.



Геометрично имаме, че докато намотаваме

$M_0N_0 \to M_1N_1 \to M_2N_2 - \cdots \to MN \to M_3N_3$

дължината на нишката M_0N_0 се намалява с дължината на дъгата, т.е. $M_3N_3 = M_2N_2 - \overset{\frown}{M_2M_3}$. Като построение - върху $\overset{\frown}{AB}$ в т. M_0 вземаме $|M_0N_0| = \lambda$. Върху допирателните нанасяме отсечки с дължина $\lambda - s$

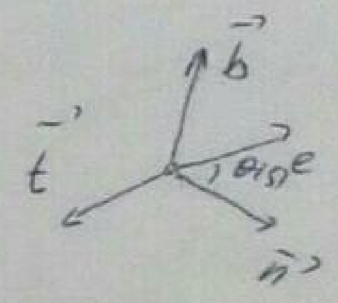
$\Rightarrow$ за еволвентата имаме $\bar{\tau} = \tau + (\lambda - s)t$.

Фактически - еволвента на $\overset{\frown}{AB}$ е геометричното място на краищата на отсечките по допирателните, чиято дължина намалява точно с нарастването на дъгата.

В сила са следните твърдения.

1. Дължината на дъга на еволютата е равна на разликата на дължините на отсечките по допирателните в краищата.
2. Всяка крива има безбр. много еволвенти. През всяка т-ка от произволна допирателна минава точно една еволвента. Ако кривата е равнинна, то еволвентите ѝ лежат в равнината на кривата.
3. Допирателните към еволютата са главни нормали на еволвентата.
4. Две различни еволвенти отсичат от допирателните отсечки с постоянна дължина.

само като факт

За еволюта $\tilde{c} : \bar{r} = r + \frac{1}{\varkappa}\vec{n} + \frac{tg\theta}{\varkappa}\vec{b}$ 

– ако c не е равнинна.

имаме безбр. много еволюти, но
само една от тях лежи в една равнина – нарича се план-еволюта

серт от стр 1

От това, че $\widehat{AB}$ – правилна следва, че в т. M съществува допирателната в т. M („свършва нагоре") е перпендикулярна на ST (ако съществува)

Тгава върху ST (допирателната в т. M) имаме „+" и „–" посоки съответно на нарастването, намаляването на дъгите

и... еднозн. е определена главната нормала в т. M.

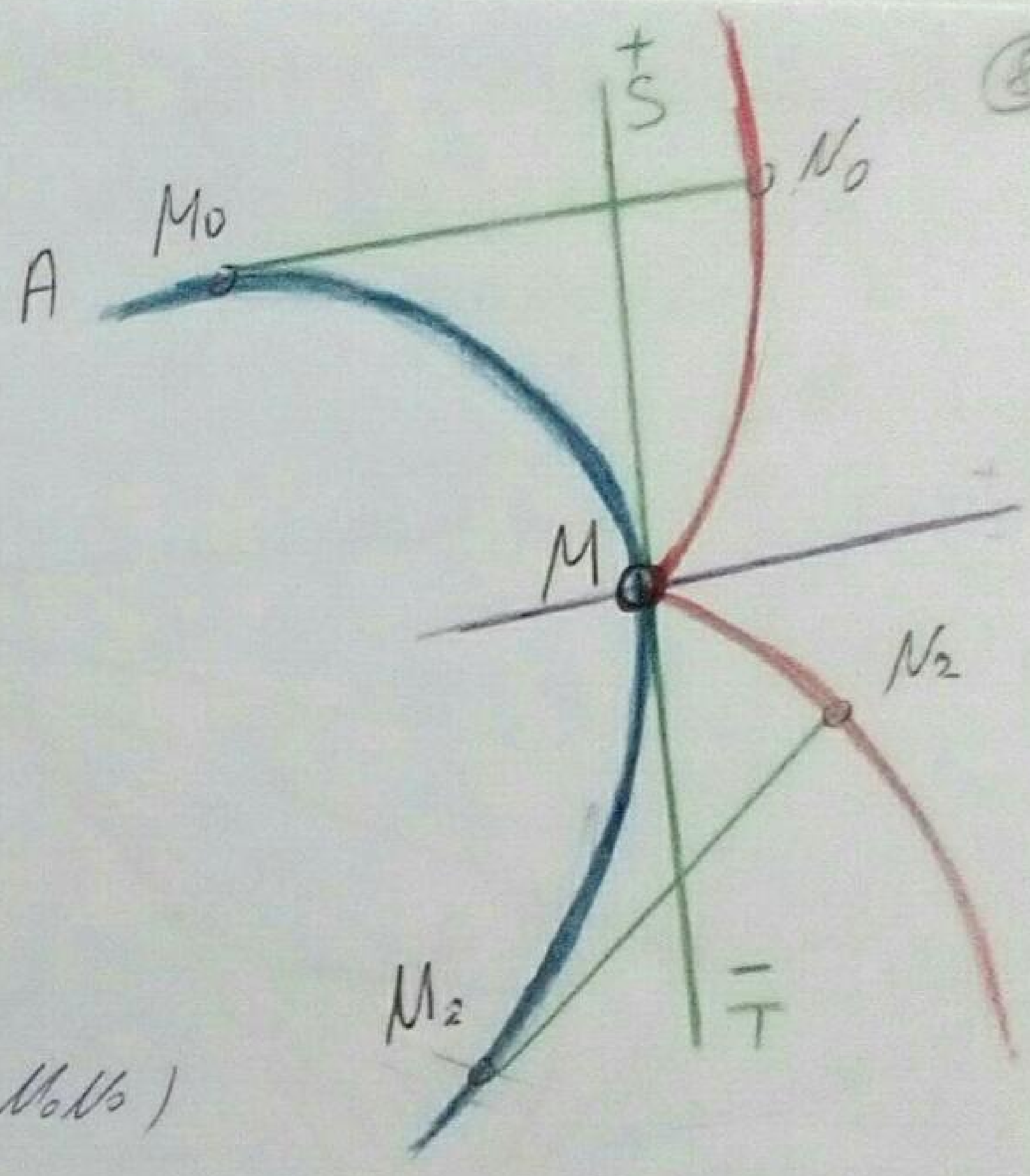
Върху допирателната имаме посоките „+" и „–" – посоките на нарастване и намаляване на дъгите => ако вземем т-ка M_2, такава че $M / M_1 M_2$ (върху дъгата) и нанасяме „отрицателни" отсечки

$$M_2N_2 = M_0N_0 - \overset{\smile}{M_0M_2} = \overset{\smile}{M_0M} - \overset{\smile}{M_0M_2} = -\overset{\smile}{MM_2}$$

– получаваме втори клон на еволвентата

M – „точка на обръщане" на еволвентата от I-ви род („отмотаване на нишката $M_1N_1 = M_0N_0$)
(смяна на посоката)

(... и все пак ! към еволвентата в т. М нямаме допирателна в истинския смисъл...) – клоновете са вдлъбнати в различни страни)

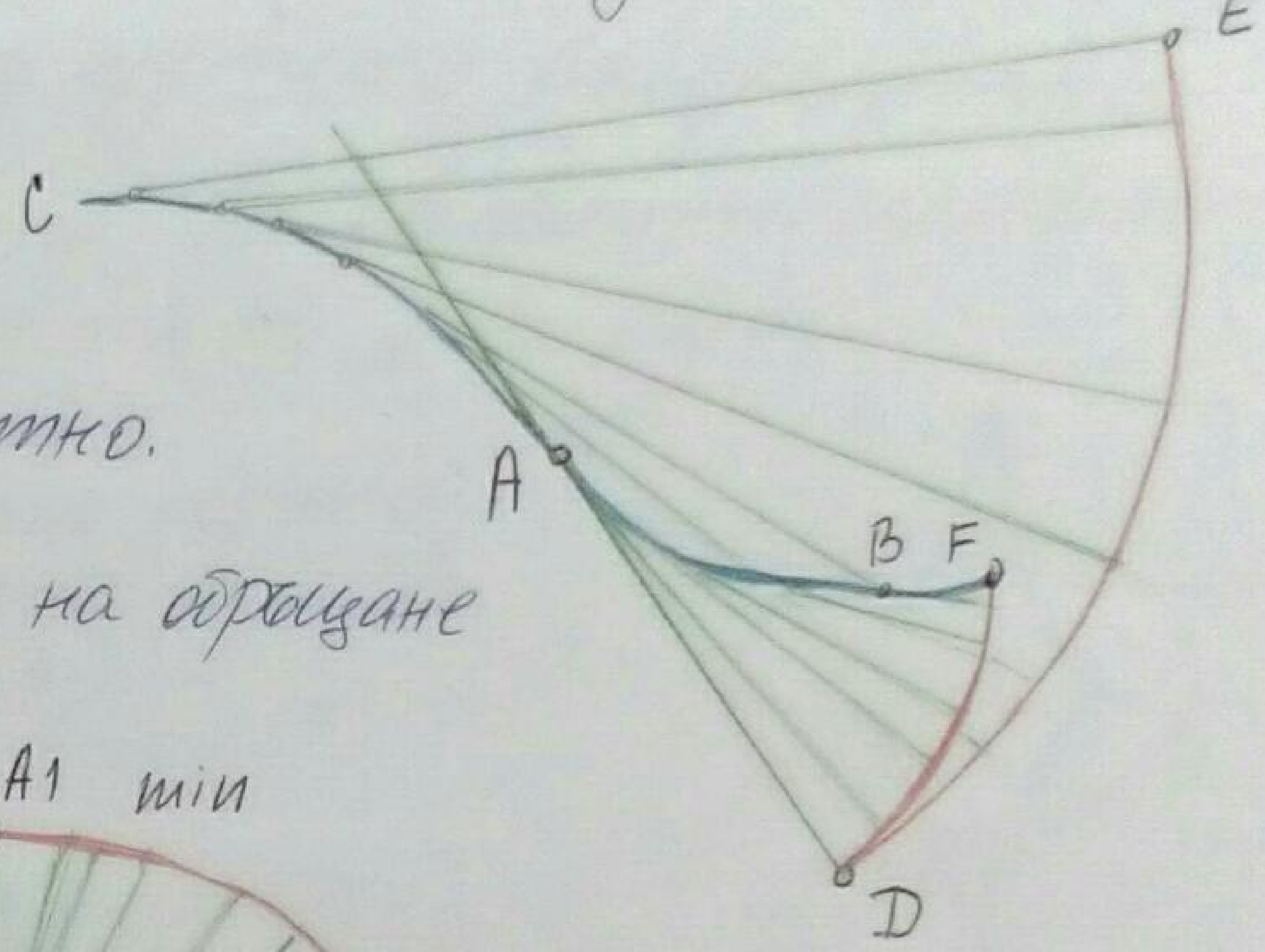


В сила е Теорема Дължината на дъгата на равнинна еволюта е равна по модул на разликата на радиусите на кривината в краищата.

Като следствие получаваме, че Радиусът на на кривината на еволвентата се изменя монотонно – в смисъл – намалява с нарастването на дъгата. Фактически на точките на екстремум на кривината на еволютата отговарят, съответстващи „неправилни" точки на „обръщане".

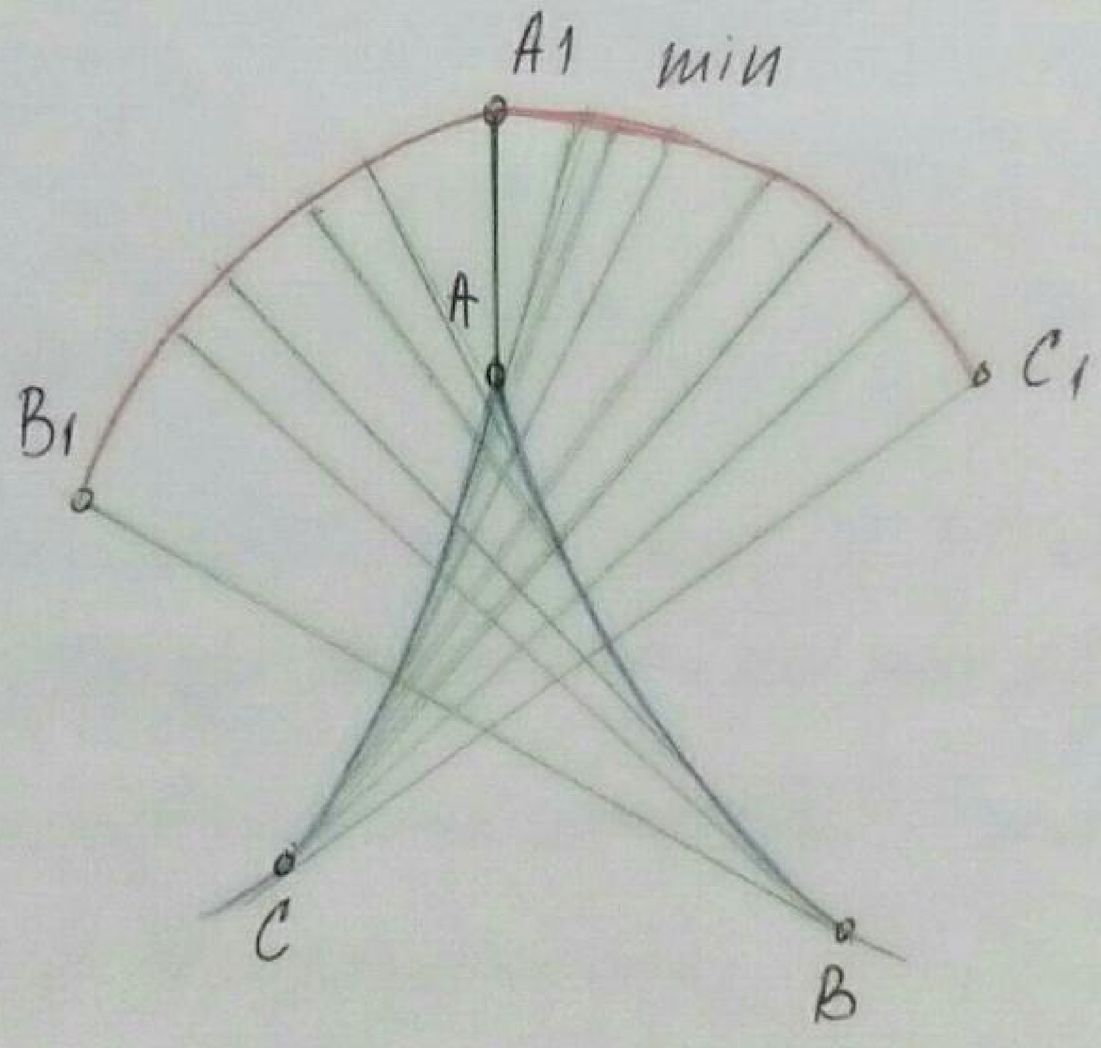
Имаме, че на инфлексна точка на еволютата съответства точка на обръщане на еволвентата от II-ри род - т.е такава точка, в която клоновете са вдлъбнати в една страна.
(намотаване, отмотаване

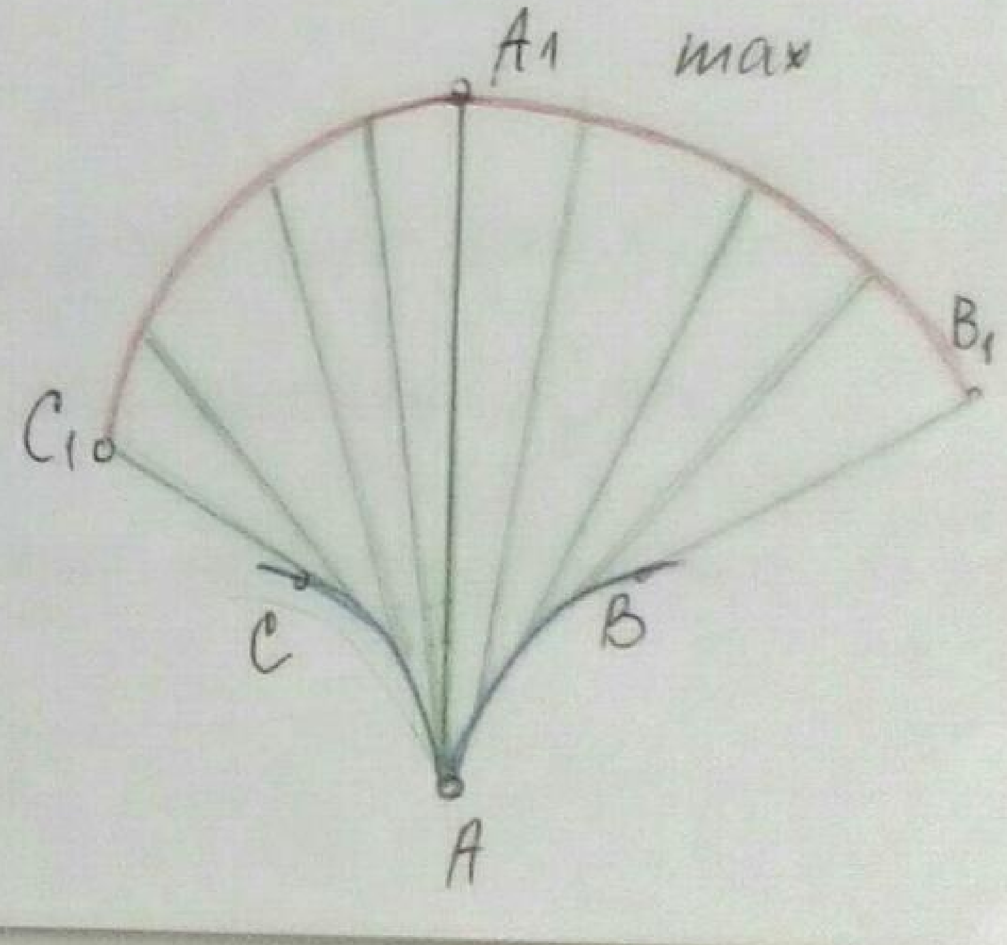
В т. A кривината на еволютата сменя знака си, т.е. векторът по допирателната се завърта наобратно.



Нека сега еволютата има т-ка на обръщане от I-ви род A.

AA_1 - нормала за двете еволвенти => допирателна то съвкупността от от тези еволвенти образува крива с непрекъснато изменяща се допирателна.



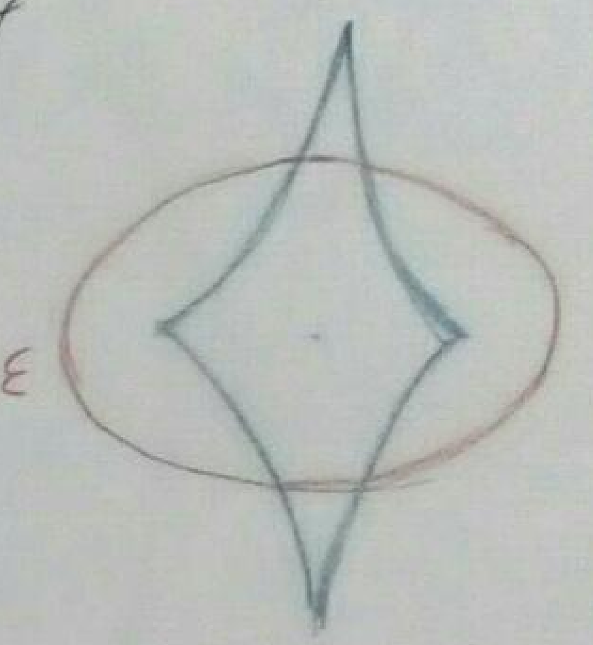


Радиусът на кривина в участъка B_1A_1 се изменя монотонно, както и в C_1A_1

При това, ако в B_1A_1 радиусът на кривина намалява, то той намалява и в C_1A_1. Така в т. A_1 имаме <u>минимум</u> <u>на</u> <u>радиуса</u> <u>на</u> <u>кривина</u>. Ако расте в B_1A_1, то расте и в C_1A_1, така че в т. A_1 имаме <u>максимум</u> <u>на</u> <u>радиуса</u> <u>на</u> <u>кривина</u>. Следователно.

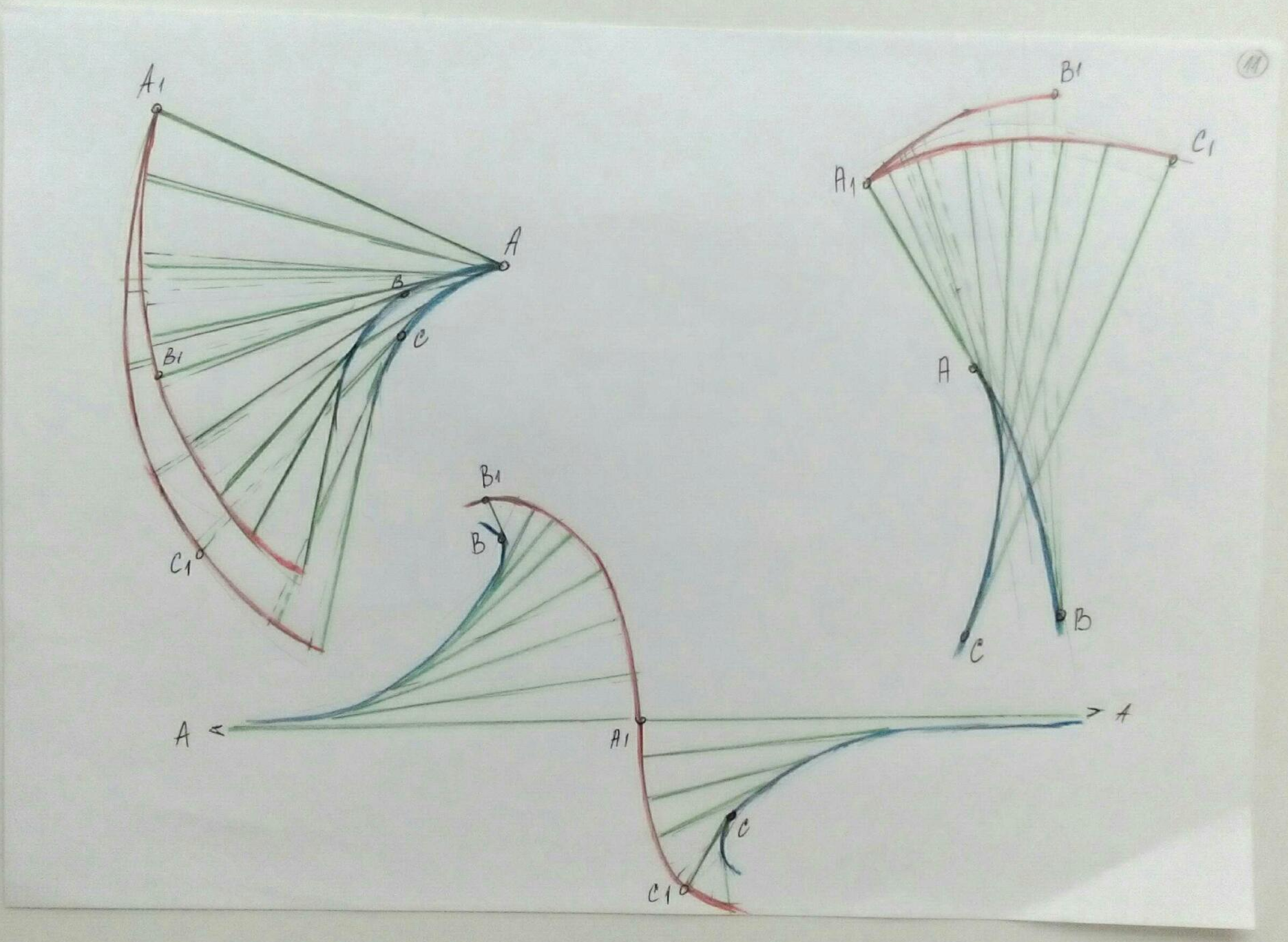
<u>I.</u> На екстремума на кривината на еволвента съответства точка на обръщане на еволютата от I-ви род.

<u>Пример</u> Елипса: $\varepsilon \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$, ако положим



$t = tg\frac{\theta}{2}$, то $\varepsilon: \begin{cases} x = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = b\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$

По нататък, ако еволютата има точка на обръщане от II-ри род, то еволвентата също има т-ка на обръщане от II-ри род. Ако еволвентата има инфлексна точка (точка на изправяне $\varkappa = 0$) то еволютата отива в безкрайност.


11
A1
A
B
C
B1
C1
B1
C1
A1
A
C
B
B1
B
A
A1
A
C
C1