14. Полупространства. Представяне на права чрез две равнини.

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е афинна координатна система и α е с уравнение

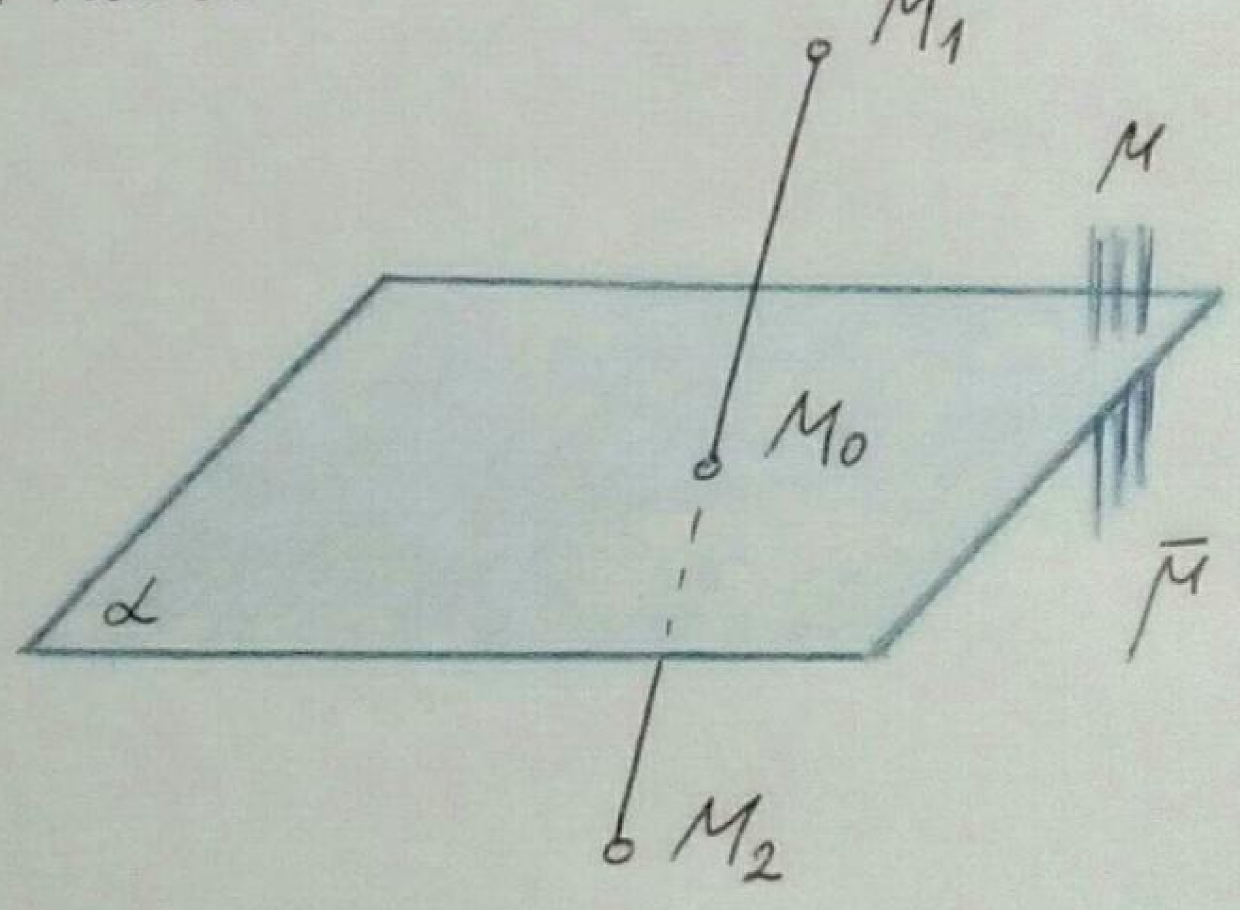
$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$$ спрямо K и точките

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. В сила е следната

Теорема 1. Отсечката (M_1M_2) пресича равнината α точно тогава, когато $l(x_1, y_1, z_1)\, l(x_2, y_2, z_2) < 0$.

Тук $l(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$ е полиномът на α

Доказателството е аналогично на това в Тема 11.



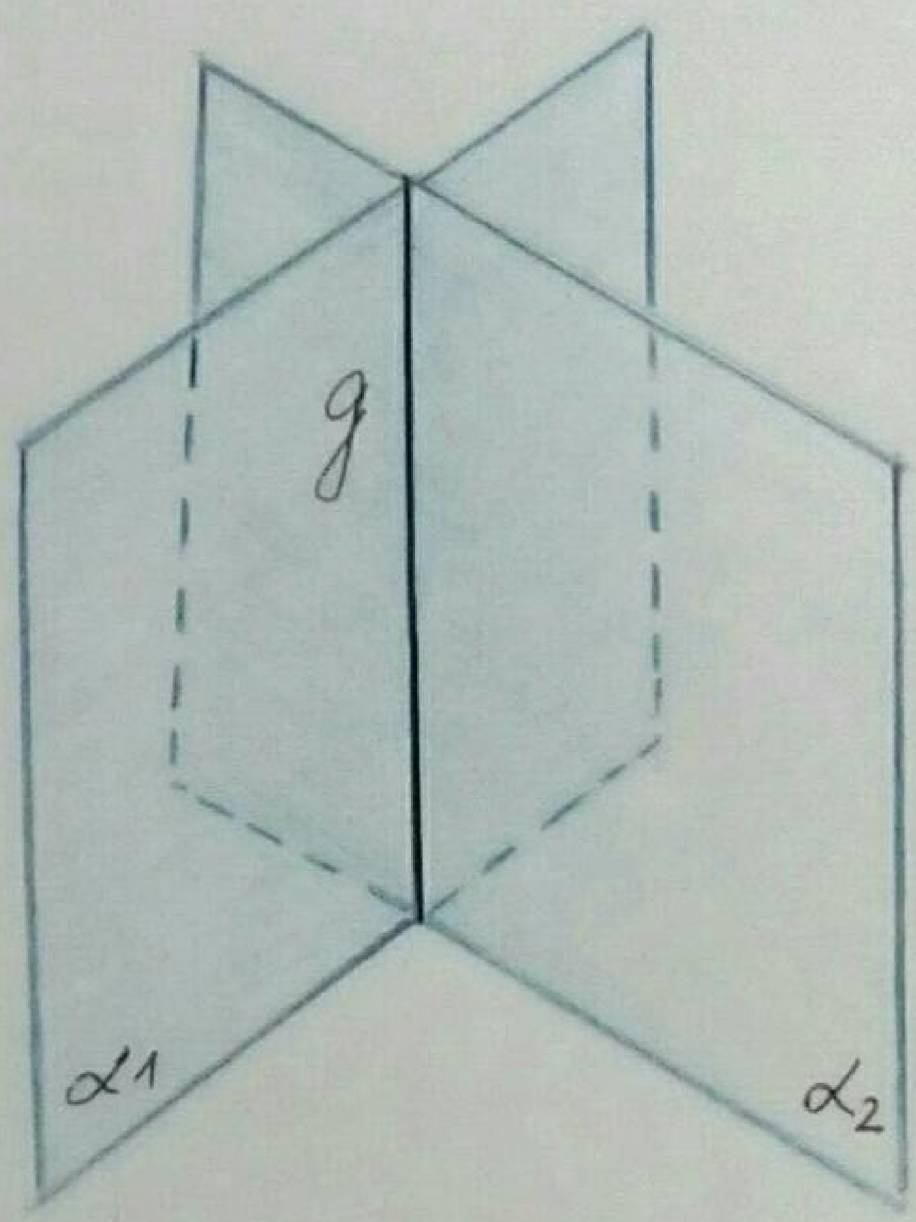
Полупространствата спрямо α аналитично се определят по същия начин както полуравнините спрямо права в равнина:

$$\mu := \{ M(x, y, z), \text{ за които } l(x, y, z) > 0 \}$$

$$\bar{\mu} := \{ M(x, y, z), \text{ за които } l(x, y, z) < 0 \}.$$

Нека $K=O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е афинна координатна система и g е пресечната права на две равнини α_1 и α_2, зададени съответно с уравненията

$$\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{и} \quad \alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$



Тъй като α_1 и α_2 не са успоредни, имаме, че коефициентите пред x, y и z не са съответно пропорционални. Това значи, че поне едно от числата

$$A_1B_2-A_2B_1, \quad A_1C_2-A_2C_1, \quad B_1C_2-B_2C_1$$

не е нула $\iff \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}=2.$

Точка $M(x,y,z)$ лежи на правата g точно тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват както уравнението на α_1, така и на α_2.
Системата

$$(3)\quad \left|\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{array}\right.$$

се нарича двойка уравнения на правата g.

Ясно е, че ако вместо α_1 и α_2 вземем други две равнини през g ще получим друга двойка уравнения на g.

Множеството S на всички равнини през правата g се нарича сноп пресичащи се равнини с ос на снопа – g. Ясно е, че снопът S се определя напълно от равнините α_1 и α_2. Аналитично той може да се опише по следния начин.

Нека $l_1(x,y,z) = A_1x + B_1y + C_1z + D_1$ и $l_2(x,y,z) = A_2x + B_2y + C_2z + D_2$ са полиномите съответно на α_1 и α_2 и полиномът

$$(4)\quad l(x,y,z) = \lambda_1 l_1(x,y,z) + \lambda_2 l_2(x,y,z)$$

е ненулева линейна комбинация на l_1 и l_2. Тогава:

1. За всяка двойка $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \setminus (0,0)$ (4) е полином на равнина от снопа S.
2. Всяка равнина от снопа S има полином, получаващ се от (4) за подходящи λ_1 и λ_2.

Доказателствата на 1. и 2. повтарят доказателствата на Теорема 2. от Тема 11 (за снопове прави в равнина). Следователно ще е в сила следната

<u>Теорема 2</u>. Една равнина α минава през пресечната права g на равнините α_1 и α_2 точно тогава, когато полиномът на α е линейна комбинация на полиномите на α_1 и α_2.

По правата g можем да изберем такава двойка равнини от снопа S, че да са съответно успоредни на по една от координатните оси.

Нека g е зададена с уравненията (3). От $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$ имаме, че поне една от детерминантите

$\Delta_x = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ е различна от нула.

Без ограничение на общността считаме, че $\Delta_x \neq 0$. В частност $(B_1, B_2) \neq (0,0)$ и $(C_1, C_2) \neq (0,0)$. Тогава g може да се зададе с равнините β_1 и β_2 от S по следния начин:

$$g: \begin{cases} \beta_1: C_2 l_1(x,y,z) - C_1 l_2(x,y,z) = A_1^* x + \Delta_x y + D_1^* = 0 \\ \beta_2: -B_2 l_1(x,y,z) + B_1 l_2(x,y,z) = A_2^* x + \Delta_x z + D_2^* = 0 \end{cases}.$$

Като решим спрямо x и y, получаваме

$$(5) \quad g: \begin{cases} y = bx + m \\ z = cx + n \end{cases}.$$

Уравненията (5) се наричат канонични уравнения на g. Той като коефициентът пред z в уравнението на β_1 е нула, то β_1 е успоредна на Oz. Също така, коефициентът пред y в уравнението на β_2 е нула, откъдето имаме, че $\beta_2 \parallel Oy$.

Геометричното тълкуване на коефициентите b, c, m и n се получава по следния начин. Полагаме в (5) $x = \lambda$ и записваме

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = b\lambda + m \\ z = c\lambda + n \end{cases} \quad \text{или} \quad g: \begin{cases} x = 0 + 1.\lambda \\ y = m + b.\lambda \\ z = n + c.\lambda . \end{cases} \quad (6)$$

(6) са координатно параметрични уравнения на g. От тях се вижда, че точката $P(0, m, n)$ лежи на g – това е пресечната точка на g с координатната равнина Oyz. Векторът $\vec{p}$ с координати $\vec{p}(1, b, c)$ е колинеарен с правата g.

14.6.

Това, че $\vec{p} \parallel g$ се забелязва и от това, че $\vec{p} \parallel \beta_1$ и $\vec{p} \parallel \beta_2$.

От условието на компланарност на вектор и равнина имаме
$b.1 - 1.b + 0.c = 0 \Rightarrow \vec{p} \parallel \beta_1$ и $c.1 + 0.b - 1.c = 0 \Rightarrow \vec{p} \parallel \beta_2$.

Ако $\Delta y \neq 0$, то g може да се зададе с равнините γ_1 и γ_2

$g: \begin{cases} \gamma_1 : x = a^* y + m^* \\ \gamma_2 : z = c^* y + n^* \end{cases}$. Тук $\gamma_1 \parallel Oz$ и $\gamma_2 \parallel Ox$. Векторът $\vec{p}^*(a^*, 1, c^*)$ е колинеарен с g, а пресечната точка на g с координатната равнина Oxz е $P^*(m^*, 0, n^*)$.

Ако $\Delta z \neq 0$, то g може да се зададе с δ_1 и δ_2, $\delta_1 \parallel Ox$, $\delta_2 \parallel Oy$ (аналогично).

Лесно се проверява, че ако g е зададена с уравнението (3), то векторът $\vec{g}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ е колинеарен с правата g.

Имаме $A_1(B_1C_2 - B_2C_1) + B_1(C_1A_2 - C_2A_1) + C_1(A_1B_2 - A_2B_1) = 0 \Rightarrow \vec{g} \parallel \alpha_1$,

както и $A_2(B_1C_2 - B_2C_1) + B_2(C_1A_2 - C_2A_1) + C_2(A_1B_2 - A_2B_1) = 0 \Rightarrow \vec{g} \parallel \alpha_2$

Следователно $\vec{g} \parallel (\alpha_1 \cap \alpha_2)$ т.е. $\vec{g} \parallel g$.