I част: Вектори.

1 зад. Дадени са линейно независимите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, като $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ и $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{a} \times \vec{b}, \overrightarrow{OB} = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b}), \overrightarrow{OC} = 2\vec{a}$.

a) Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ са линейно независими;

b) Ако т.H е петата на височината от върха O към страната BC на триъгълник BOC, да се изрази вектора $\overrightarrow{OH}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

c) Нека т.M е медицентърът на триъгълник ABC. Да се намери дължината на вектора $\overrightarrow{OM}$.

2 зад. Дадени са линейно независимите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, като $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{b}, \overrightarrow{OB} == (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$.

а) Ако точката G е медицентърът на триъгълник OAB, да се изрази вектора $\overrightarrow{OG}$ като линейна комбинация на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се намери дължината на вектора $\overrightarrow{OG}$.

б) Да се намери лицето на триъгълник OAB.

3 зад. Даден е тетраедър $OABC$, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Точките A_1 и C_1 са медицентровете съответно на триъгълниците BOC и AOB.

Да се изразят чрез $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторите $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OC_1}$ и $\overrightarrow{C_1A_1}$ и да се докаже, че $\overrightarrow{C_1A_1}$ и $\overrightarrow{CA}$ са колинеарни.

Ако $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = \sqrt{2}$ и всеки два вектора сключват ъгъл, равен на $\frac{\pi}{4}$, да се намери обема на тетраедъра $OABC$.

4 зад. Дадени са линейно независимите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{a} \times \vec{b}, \overrightarrow{OC} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$.

а) Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ са линейно независими;

б) Нека т.M е медицентър на триъгълник ABC. Да се намери $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, ако $|\overrightarrow{OM}| = \frac{\sqrt{6}}{6}$;

в) При така намерения $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, да се пресметне обема на тетраедъра $OABC$.

5зад. Дадени са линейно независимите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. $\overrightarrow{OA} = \vec{a} \times \vec{b}, \overrightarrow{OB} = \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b}), \overrightarrow{OC} = \vec{a}$.

а) Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ са линейно независими;

б) Нека т.H е пета на височината от върха O към стената ABC на тетраедъра $OABC$. Да се изрази вектора $\overrightarrow{OH}$ като линейна комбинация на $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$;

в) Ако $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$, да се пресметне обема на тетраедъра $OABC$.

6 зад. Дадени са линейно независимите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, като $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$.

Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{a} \times \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$. Да се определи елементарно геометричния ъгъл между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако обема на тетраедъра $OABC$ е равен на $\frac{1}{8}$.

II част: Уравнения на права в равнината.

1 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ в равнината са дадени т.$B(-4, 3)$ и правите:

$m_c: 4x - y + 6 = 0$ и $h_c: 3x - y + 4 = 0$.

Да се намерят координатите на върховете A и C на триъгълник ABC, ако m_c е медианата, а h_c е височината при върха C на триъгълника. Да се намери лицето на триъгълник ABC.

2 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ в равнината са дадени т.$B(3, 4)$ и правите:

$b_c: 2x + y - 5 = 0$ и $h_c: x + y - 5 = 0$.

Да се намерят координатите на върховете A и C на триъгълник ABC, ако b_c е вътрешната ъглополовяща, а h_c е височината при върха C на триъгълника. Да се намери лицето на триъгълник ABC.

3 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ са дадени точката $P(-3, 3)$ и правите :

$a: 3x - 4y + 5 = 0$ и $g: 2x - y + 4 = 0$.

Светлинен лъч, успореден на правата a , се отразява от правата g и отразеният лъч минава през т.P. Намерете уравненията на правите b и b', съдържащи падащия и отразения лъчи.

4 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ в равнината са дадени т.$B(6, 1)$, т.$C(4, 3)$ и т.$M(4, 1)$, които са съответно два от върховете и медицентъра на $\Delta\, ABC$. Да се намерят: координатите на третия връх на триъгълника, лицето на триъгълника и уравнение на правата, която е успоредна на страната BC и минава през точката M.

5 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ са дадени правите:

$h_1: 2x - 3y + 7 = 0, h_2: x + 2y - 7 = 0$ и точка $A(1, 5)$.

а) Да се намерят уравненията на страните на триъгълник ABC, ако височините му през върховете B и C лежат съответно на правите h_1 и h_2.
б) Да се намерят лицето на триъгълника, координатите на центъра и дължината на радиуса на **описаната** около него окръжност.

6 зад. Спрямо ОКС $K = Oxy$ са дадени правите:
$h: x - 7y - 6 = 0,\ m: 5x - 13y - 30 = 0$ и точката $B\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

а) Да се намерят координатите на върховете на триъгълник ABC, ако височината и медианата му през върха C лежат съответно на правите h и m;
б) Да се намерят координатите на центъра и дължината на радиуса на **вписаната** в триъгълника окръжност.

7 зад. Спрямо ОКС $K = Oxy$ са дадени точките $P(-5, 4)$ и $S(-3, -1)$, и правата $m: x + y - 3 = 0$.
а) Светлинен лъч минава през точката P и след отразяването си от правата m става успореден на ординатната ос. Намерете уравненията на правите g и g', съдържащи падащия и отразения лъчи;
б) Намерете координатите на върховете на триъгълник ABC, за който точката S е център на описаната окръжност, а падащият и отразения лъчи съдържат две от страните му.

III част: Уравнения на права и равнина в пространството.

1 зад. Дадени са точката $M(-1, 1, 2)$ и правата $a \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$.

a) Да се намерят координатни параметрични уравнения на правата g, която е успоредна на правата a и минава през точката M;
b) Да се намери разстоянието от точката M до правата a и координатите на точката M', ортогонално симетрична на точката M относно правата a;

c) Да се намери уравнение на равнината α, която минава през т.M и правата a.

2 зад. Дадени са точките $A(0,0,-1)$ и $B(-2,-8,-3)$, равнината $\beta: 3x+4y-z+1=0$ и правата $b\begin{cases} x=3+3s \\ y=-8+1s, s\in\mathbb{R} \\ z=1-1s \end{cases}$. Да се намерят:

a) Уравнение на равнината γ, която минава през точките A и B, и е перпендикулярна на равнината β;

b) Разстоянието от точката B до правата b и координатите на точката B‘, ортогонално симетрична на точката B относно правата b.

3 зад. Спрямо ОКС $K=Oxyz$ са дадени точката $C(0, 0, -3)$, равнината α: $2x+2y-z+1=0$ и правите :

$$a\begin{cases} x=p \\ y=-2+p \\ z=-1+2p \end{cases}, p\in\mathbb{R},\quad b\begin{cases} x+z=0 \\ y+z-2=0 \end{cases},\quad c\begin{cases} x=1+2q \\ y=-1+6q, q\in\mathbb{R} \\ z=2-q \end{cases}$$

a) Да се намерят уравнения на трансверзалата t на кръстосаните прави a и b, която е успоредна на правата c;

b) Ако т. $\mathrm{A}=a\cap\alpha$ и т. $\mathrm{B}=\mathrm{b}\cap\alpha$, намерете уравнения на височината h_c от върха C към страната AB на триъгълник ABC. Намерете лицето на ABC.

4 зад. Спрямо ОКС $K=Oxyz$ в пространството са дадени точка $P(1, 5, 0)$, правите

$$a:\begin{cases} x=1-2q \\ y=2+q, q\in\mathbb{R} \\ z=0+2q \end{cases} \text{ и } b:\begin{cases} x+y-5=0 \\ 3x-2z-9=0 \end{cases}, \text{ и равнина } \alpha: y-z-2=0.$$

a) Светлинен лъч минава през точка P, отразява се от равнината α и пресича правите a и b. Да се намерят уравнения на правите съдържащи съответно падащия и отразения лъч.

b) Нека правата a пресича равнината α в точка A, а правата b пресича равнината α в точка B. Да се намери лицето на триъгълник ABP.

5 зад. Спрямо ОКС $K=Oxyz$ в пространството са дадени точките $M(1, 5, 0)$, $B(5, 0, 3)$, $A(3, 1, 3)$, правите $a:\begin{cases} x+z-1=0 \\ 2y-z-4=0 \end{cases}$ и $b:\begin{cases} x=1+2s \\ y=4-2s, q\in\mathbb{R} \\ z=-3+3s \end{cases}$, и равнината $\alpha: y-z-2=0$.

a) Да се намери трансверзала на правите a и b, минаваща през точка A.

b) Светлинен лъч l минава през точката M, отразява се от равнината α и отразения лъч l’ минава през точката B. Да се намерят уравненията на l и l’.

6 зад. Спрямо ОКС $K=Oxyz$ в пространството са дадени: точки $P(3, 1, 5)$ и $Q(-2, 12, 1)$,

равнина α: $x+2y+2z-6=0$ и правите: $a:\begin{cases} x=3+s \\ y=0+s, s\in R \\ z=3+2s \end{cases}$, $b:\begin{cases} x=2-p \\ y=3-p, p\in R \\ z=1+3p \end{cases}$.

a) Да се намерят координатите на точки A и B – краищата на оста-отсечка на кръстосаните прави a и b;

b) Светлинен лъч l минава през т.P, отразява се от равнината α и отразения лъч l’ минава през точката Q. Да се намерят кординатите на точката C, в която правите l и l’ пробождат равнината α.

c) Да се намери лицето на триъгълник ABC.