Текстовете са от: Т. Генчев, Обикновени диференциални уравнения, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 1991 г.

Линейни системи с постоянни коефициенти

Метод на изключването

В пълно съответствие със скаларния случай линейните системи с постоянни коефициенти се решават експлицитно. В този параграф ще изложим най-простия метод, който води до целта, без да се използват почти никакви сведения от линейната алгебра — метода на изключването. Както ще видим, с помощта на елементарни операции (диференциране и образуване на подходящи линейни комбинации) задачата се свежда до решаване на едно единствено диференциално уравнение с постоянни коефициенти и на система от линейни алгебрични уравнения. При този подход операционните означения, въведени в § 5 на трета глава, и формулата за отместване ще играят основна роля.

Понеже в разсъжденията, които следват, се налага многократно да диференцираме дадената система, целесъобразно е да започнем с един общ резултат, който ни осигурява тази възможност.

Теорема 1. Да разгледаме нормалната система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t,\ \mathbf{x}) \tag{1}$$

при предположение, че $\mathbf{f} \in C^k(D)$, $k \geq 1$, където D е област в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогава всички решения на (1) притежават непрекъснати производни до $(k+1)$-ви ред включително.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ е решение на (1) с максимален дефиниционен интервал $(\alpha,\ \beta)$. Понеже според теоремата за диференциране на съставни функции функцията $t \longrightarrow \mathbf{f}(t,\ \mathbf{x}(t)) \in C^1(\alpha,\ \beta)$, тъждеството $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t,\ \mathbf{x}(t))$ показва, че $\ddot{\mathbf{x}}(t) \in C^2(\alpha,\ \beta)$. След едно диференциране получаваме

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{x}(t)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}(t, \mathbf{x}(t))\dot{x}^j(t) \tag{2}$$

и веднага заключаваме, че дясната страна на (2) има непрекъсната производна, т.е. че $\dddot{\mathbf{x}}$ съществува и е непрекъсната в $(\alpha,\ \beta)$.

След k последователни диференцирания стигаме до формулирания резултат.

Сега вече можем да пристъпим към нашата истинска задача. Да разгледаме линейната (не непременно нормална) система

$$\sum_{j=1}^{n} L_j^i(p)x^j = f^i(t), \qquad t \in (\alpha,\ \beta),\ i = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

където $L_j^i(p)$ са полиноми на символа $p = \frac{d}{dt}$, т.е. линейни диференциални оператори, а функциите $f^i(\alpha,\ \beta) \longrightarrow \mathbf{H}$ притежават достатъчен брой производни. Ако въведем $(n \times n)$-матрицата $L(p) = (L_j^i(p))$ и векторите-стълбове $\mathbf{x} = (x^1,\ x^2, \dots,\ x^n)$, $\mathbf{f} = (f^1,\ f^2, \dots,\ f^n)$, (3) взема вида

$$L(p)\mathbf{x} = \mathbf{f}(t), \qquad t \in (\alpha,\ \beta). \tag{4}$$

Сега да допуснем, че векторът $\mathbf{x} = (x^1,\ x^2, \dots,\ x^n)$ удовлетворява (3) и притежава достатъчен брой производни. Според теорема 1 това свойство ще бъде налице, ако векторната функция $t \longrightarrow \mathbf{f}(t)$ е достатъчно гладка и системата (3) може да се сведе до нормална.

Да означим с $M_i^k(p)$ адюнгираното количество на елемента $L_k^i(p)$ от матрицата $L(p)$, да умножим i-тото уравнение на (3) с $M_i^k(p)$ и да съберем получените тъждества*. Получаваме

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_i^k(p)L_j^i(p)x^j = \sum_{i=1}^{n} M_i^k(p)f^i(t),$$

т.е.

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} M_i^k(p)L_j^i(p)\right)x^j = \sum_{i=1}^{n} M_i^k(p)f^i(t). \tag{5}$$

---

*Понеже $M_i^k(p)$ е полином на p, умножението на i-тото уравнение с $M_i^k(p)$ означава, че действаме на това равенство с диференциалния оператор със символичен запис $M_i^k(p)$.

Ако означим с $D(p)$ детерминантата на матрицата $L(p) = (L_j^i(p))$ и вземем предвид добре известното тъждество

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^k(p) L_j^i(p) = \begin{cases} 0 & \text{за} \quad j \neq k, \\ D(p) & \text{за} \quad j = k, \end{cases}$$

от (5) получаваме тъждеството

$$D(p)x^k = \sum_{i=1}^{n} M_i^k(p) f^i(t) \tag{6}$$

за x^k и понеже k беше произволно, като дадем на k стойностите $1, 2, \dots, n$, намираме уравнения за всичките координати на евентуалното решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$.

Да допуснем, че $D(p)$ не се редуцира до константа, и да се съсредоточим върху основния случай $\mathbf{f} \equiv 0$, т.е. когато системата е хомогенна. (Условието $D(p) \neq \text{const}$ е естествено и означава, че системата (3) не е прекалено изродена. Читателят лесно ще съобрази, че то е изпълнено за всички системи, които могат да се сведат към нормални.)

И така да разгледаме хомогенната система

$$L(p)\mathbf{x} = 0. \tag{7}$$

Вече констатирахме, че ако $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ е решение на (7), имаме $D(p)x^k = 0$ за $k = 1, 2, \ldots, n$, т.е. всичките координати на $\mathbf{x}$ удовлетворяват едно и също уравнение с постоянни коефициенти. Това е най-важното заключение, до което ни доведе изложеният метод. Трябва дебело да подчертаем обаче, че уравнението за координатите

$$D(p)x^k = 0, \tag{8}$$

до което стигнахме, е само следствие от (7) и следователно, след като определим x^k, $k = 1, 2, \ldots, n$, от (8), трябва да заместим обратно в (7), за да видим при какви връзки между произволните константи векторът $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ наистина удовлетворява изходната система. (Такива връзки трябва да се очакват, защото за да стигнем до (8), в общия случай диференцираме уравненията на (7).) Преди да илюстрираме метода с два примера, ще направим една забележка, която улеснява или по-точно разделя на части практическата работа.

Нека $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ са корените на характеристичното уравнение $D(\alpha) = 0$ на (8) с кратности съответно $r_1, r_2, \ldots, r_m$. В такъв случай според изученото в § 5 на трета глава имаме

$$x^k(t) = \sum_{\nu=1}^{m} P_\nu^k(t) e^{\alpha_\nu t}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

където $P_\nu^k(t)$ е полином от степен, ненадминаваща $r_\nu - 1$. Следователно предполагаемото решение $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ има вида

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}_1(t)e^{\alpha_1 t} + \mathbf{g}_2(t)e^{\alpha_2 t} + \cdots + \mathbf{g}_m(t)e^{\alpha_m t}, \tag{9}$$

където

$$\mathbf{g}_\nu(t) = (P_\nu^1(t),\ P_\nu^2(t), \ldots,\ P_\nu^n(t)), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, m. \tag{10}$$

От него произтича следното правило за решаване на системата $L(p)\mathbf{x} = 0$:

а) Намираме корените на уравнението $D(\alpha) = 0$ и образуваме функциите (10), в които полиномите са с неопределени коефициенти и P_ν^k е от степен $r_\nu - 1$ $(k = 1, 2, \dots, n)$.

б) Определяме коефициентите на полиномите P_ν^k, $k = 1, 2, \dots, n$, при фиксирано ν от системата полиномни уравнения $L(p + \alpha_\nu)\mathbf{g}_\nu(t) = 0$, които се получават, като приравним на нула коефициентите пред $e^{\alpha_\nu t}$, $s = 0, 1, 2, \dots, r_\nu - 1$.

След като по този начин определим функциите $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m$, образуваме общото решение (9).

И така да разгледаме системата

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \qquad A = (a_j^i) \in \mathfrak{M}_n, \tag{14}$$

където a_j^i са реални или комплексни числа.

В по-подробен запис (14) взема вида

$$\begin{aligned} (a_1^1 - p)x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n &= 0, \\ a_1^2 x^1 + (a_2^2 - p)x^2 + \cdots + a_n^2 x^n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \cdots + (a_n^n - p)x^n &= 0, \end{aligned} \tag{15}$$

т.е. $L(p)\mathbf{x} = 0$, където $L_j^i(p) = a_j^i - \delta_j^i p$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, и $\delta_j^i = \begin{cases} 0 & \text{за } i \neq j \\ 1 & \text{за } i = j \end{cases}$ е символът на Кронекер. В случая

$$D(p) = \begin{vmatrix} a_1^1 - p & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - p & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n - p \end{vmatrix} = |A - Ip| \tag{16}$$

и характеристичното уравнение $D(\alpha) = 0$ съвпада с уравнението за собствените стойности на матрицата A. Естествено възникват два случая:

а) Уравнението $D(\alpha) = 0$ има n различни корена — да ги означим с $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

б) Уравнението $D(\alpha) = 0$ има m, $m < n$, различни корена $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Ще започнем с първия случай. И така да допуснем, че а) е налице. Понеже в случая $r_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, според т. 6.1 общото решение на (14) има вида

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{g}_\nu e^{\alpha_\nu t}, \tag{17}$$

където координатите на $\mathbf{g}_\nu$ са полиноми на t от нулева степен, т.е. константи.

За неизвестните вектори $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ получаваме уравненията

$$L(p + \alpha_\nu)\mathbf{g}_\nu = 0, \quad \text{т.е.} \quad (A - (p + \alpha_\nu)I)\mathbf{g}_\nu = 0, \tag{18}$$

$\nu = 1, 2, \ldots, n$, където с I сме означили единичната $(n \times n)$-матрица. Понеже очевидно $p\mathbf{g}_\nu = \dfrac{d}{dt}\mathbf{g}_\nu = 0$, равенствата (18) се редуцират до съотношенията

$$(A - \alpha_\nu I)\mathbf{g}_\nu = 0, \quad \text{т.е. до} \quad A\mathbf{g}_\nu = \alpha_\nu \mathbf{g}_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{19}$$

които означават, че $\mathbf{g}_\nu$ е или нулев, или собствен вектор на A, отговарящ на собственото число α_ν. Обратното също е вярно: Ако векторите $\mathbf{g}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяват (19), то (17) е решение на (14).

Както е известно от линейната алгебра, в случая а) всяка система от собствени вектори $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n$, където $\mathbf{h}_\nu$ отговаря на собственото число α_ν, образува база в $\mathbf{C}^n$. За удобство на читателя ще припомним доказателството.

Ще разсъждаваме индуктивно и ще покажем, че за всяко k, $1 \le k \le n$, системата от вектори $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k$ е линейно независима. Ако $k = 1$, няма какво да доказваме, защото собствените вектори по дефиниция са различни от нула.

Да допуснем, че нашето твърдение е вярно за всяко $k \le n-1$, и да вземем произволна линейна комбинация

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \mathbf{h}_\nu = 0. \tag{20}$$

В такъв случай

$$0 = A\left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \mathbf{h}_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \alpha_\nu \mathbf{h}_\nu. \tag{21}$$

От друга страна, като умножим (20) с α_n и го извадим от (21), намираме

$$(\alpha_1 - \alpha_n)c_1\mathbf{h}_1 + (\alpha_2 - \alpha_n)c_2\mathbf{h}_2 + \dots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n)c_{n-1}\mathbf{h}_{n-1} = 0, \tag{22}$$

което заедно с индуктивната хипотеза ни дава $(\alpha_\nu - \alpha_n)c_\nu = 0$, т.е. $c_\nu = 0$, $\nu = 1, 2, \dots n-1$, защото $\alpha_n \neq \alpha_\nu$ за $\nu \neq n$. Сега вече от (20) следва и $c_n = 0$ и твърдението, че $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2, \dots,$ $\mathbf{h}_n$ са линейно независими, е доказано.

За да завършим обсъждането на а), остава да отбележим, че в този случай на всяко собствено число α_ν отговаря едномерно собствено пространство, т.е. множество от безбройно много собствени вектори, които са колинеарни помежду си. Следователно, ако $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2, \dots,$ $\mathbf{h}_n$ е фиксирана база от собствени вектори на A, като $\mathbf{h}_j$ отговаря на α_j, то ще имаме $\mathbf{g}_\nu = c_\nu \mathbf{h}_\nu$ и формулата (17) за общото решение взема вида

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \mathbf{h}_\nu e^{\alpha_\nu t}, \tag{23}$$

където $c_\nu \in \mathbf{C}$ са произволни константи.

Остава да кажем няколко думи за случая б), когато A има $m < n$ различни собствени числа. Разбира се, и сега разполагаме поне с m линейно независими собствени вектора, но изобщо казано, техният брой не е достатъчен, за да образуват база в $\mathbf{C}^n$. Ето защо в съответствие със скаларния случай общото решение на системата има по-сложния вид (17), където $\mathbf{g}_\nu = \mathbf{g}_\nu(t)$ са вектори, чиито координати са полиноми на t.

Пример 2. За системата от трети ред

$$\dot{x}^1 = 2x^1 - x^2 - x^3, \quad (13)$$

$$\dot{x}^2 = 2x^1 - x^2 - 2x^3,$$

$$\dot{x}^3 = -x^1 + x^2 + 2x^3$$

намираме

$$D(p) = \begin{vmatrix} 2-p & -1 & -1 \\ 2 & -1-p & -2 \\ -1 & 1 & 2-p \end{vmatrix} = (1-p)^3.$$

Следователно $(p-1)^3 x^k = 0$, $k = 1,2,3$, откъдето

$$x^1 = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)e^t,$$

$$x^2 = (c_4 + c_5 t + c_6 t^2)e^t,$$

$$x^3 = (c_7 + c_8 t + c_9 t^2)e^t.$$

Като заместим в (13) и разделим на e^t, получаваме уравненията $Q_k(t) = 0$, $k = 1,2,3$, където Q_k са полиноми от втора степен. Понеже равенствата $Q_k(t) = 0$, $k = 1,2,3$, трябва да са в сила за всяко $t \in \mathbf{R}$, като приравним на нула коефициентите във всяко от тях, намираме търсените връзки между константите c_j, $j = 1,2,\ldots,9$.

Получаваме

$$x^1 = (c_1 + c_2 t)e^t,$$

$$x^2 = (2c_2 + c_4)e^t,$$

$$x^3 = (c_1 - c_2 - c_4 - c_2 t)e^t.$$

Подробностите предоставяме на читателя.