Симетрични оператори.

Нека $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ е квадратна матрица с реални елементи. Ще казваме, че матрицата A е *симетрична*, ако $A^t = A$. Малко по-подробно, ако $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$, то $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ за всеки $ij = 1, 2, \dots, n$.

Твърдение 1. *Ако A е реална симетрична матрица, то всички характеристични корени на A са реални числа.*

Доказателство. Нека λ е характеристичен корен на матрицата $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ (в най-общия случай $\lambda \in \mathbb{C}$). Разглеждаме хомогенната система

$$(*)\left|\begin{array}{rcrcrl} (\alpha_{11}-\lambda)x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & +\cdots+ & \alpha_{1n}x_n & =0, \\ \alpha_{11}x_1 & + & (\alpha_{12}-\lambda)x_2 & +\cdots+ & \alpha_{1n}x_n & =0, \\ \dots & & & & & \\ \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & +\cdots+ & (\alpha_{1n}-\lambda)x_n & =0. \end{array}\right.$$

Детерминантата на $(*)$ е

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = f_A(\lambda) = 0$$

и следователно системата $(*)$ има ненулево решение

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \neq (0, 0, \dots, 0).$$

В такъв случай са изпълнени равенствата

$$(**)\left|\begin{array}{rcrcrl} (\alpha_{11}-\lambda)\xi_1 & + & \alpha_{12}\xi_2 & +\cdots+ & \alpha_{1n}\xi_n & =0, \\ \alpha_{11}\xi_1 & + & (\alpha_{12}-\lambda)\xi_2 & +\cdots+ & \alpha_{1n}\xi_n & =0, \\ \dots & & & & & \\ \alpha_{11}\xi_1 & + & \alpha_{12}\xi_2 & +\cdots+ & (\alpha_{1n}-\lambda)\xi_n & =0 \end{array}\right.$$

за числата $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$. Нека $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогава i-тото равенство от $(**)$ е

$$\alpha_{i1}\xi_1 + \cdots + (\alpha_{ii} - \lambda)\xi_i + \cdots + \alpha_{in}\xi_n = 0$$

или еквивалентно

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j = \lambda\xi_i.$$

Двете страни на последното равенство умножаваме с $\overline{\xi_i}$, т.е. комплексно спрегнатото на ξ_i, за да получим

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j\overline{\xi_i} = \lambda|\xi_i|^2.$$

Сумираме всички подобни равенства за i менящо се от 1 до n, което ни дава

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j\overline{\xi_i}}_{=b} = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2}_{=a}.$$

Числото $a = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2$ е реално положително число. За спрегнатото на b имаме от симетричността на A

$$\begin{aligned}\bar{b} = \overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j\overline{\xi_i}} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_{ij}}\overline{\xi_j}.\overline{\overline{\xi_i}} \\ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\overline{\xi_j}\xi_i &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\xi_i\overline{\xi_j} = b\end{aligned}$$

и по този начин b също е реално число. Следователно $\lambda = \dfrac{b}{a}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Нека V е евклидово пространство с $\dim V = n < \infty$, а $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$. Казваме, че операторът φ е *симетричен*, ако за всеки два вектора $x, y \in V$ е изпълнено $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$. За да е в сила последното е достатъчно $(\varphi(e_i), e_j) = (e_i, \varphi(e_j))$ за всеки $i, j = 1, 2, \ldots, n$ за кой да е базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ на V.

Следващото твърдение разкрива връзката между симетричните оператори и симетричните матрици.

Твърдение 2. *Нека $e_1, e_2, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на евклидовото пространство V. Нека $\varphi \in \operatorname{Hom}(V)$ и има матрица A спрямо дадения базис. Тогава φ е симетричен оператор тогава и само тогава, когато A е симетрична матрица.*

Доказателство. Нека $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}_{n\times n}$. Тогава имаме, че

$$\begin{aligned}(\varphi(e_i), e_j) &= (\alpha_{1i}e_1 + \dots + \alpha_{ji}e_j + \dots + \alpha_{ni}e_n, e_j)\\ &= \alpha_{1i}\underbrace{(e_1, e_j)}_{=0} + \dots + \alpha_{ji}\underbrace{(e_j, e_j)}_{=1} + \dots + \alpha_{ni}\underbrace{(e_n, e_j)}_{=0}\\ &= \alpha_{ji}(e_j, e_j) = \alpha_{ji}.\end{aligned}$$

По абсолютно същия начин получаваме, че

$$(e_i, \varphi(e_j)) = \alpha_{ij}.$$

Сега φ е симетричен $\Leftrightarrow (\varphi(e_i), e_j) = (e_i, \varphi(e_j))$ за всеки $i, j = 1, 2, \dots, n$ $\Leftrightarrow \alpha_{ji} = \alpha_{ij}$ за всеки $i, j = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow A$ е симетрична матрица. □

Ако φ е симетричен оператор, и A е матрицата му спрямо ортонормиран базис на V, то Твърдение 2 дава, че матрицата A е симетрична, а според Твърдение 1 всички характеристични корени на A, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n$ са реални числа. Имайки предвид определението за собствена стойност на линеен оператор и горните разсъждения достигаме до

Твърдение 3. *Симетричен оператор на евклидово пространство V с $\dim V = n$ има n на брой собствени стойности. С други думи всички характеристични корени на φ са негови собствени стойности. (Ще отбележим само, че собствените стойности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ в общия случай не са различни числа, т.е. те трябва да бъдат броени заедно с кратностите си.)*

Преминаваме към

Твърдение 4. *Нека φ е симетричен оператор на евклидовото пространство V. Ако x и y са два собствени вектора на φ, отговарящи на <u>различни</u> собствени стойности λ и μ, то $x \perp y$ (x и y са ортогонални, т.е. $(x, y) = 0$).*

Доказателство. По определението за собствени вектори имаме, че $x \neq o$, $\varphi(x) = \lambda x$ и $y \neq o$, $\varphi(y) = \mu y$, а по условие имаме, че $\lambda \neq \mu$. Понеже φ е симетричен, то получаваме последователно

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)),$$

$$(\lambda x, y) = (x, \mu y),$$

$$\lambda(x, y) = \mu(x, y),$$

$$(\lambda - \mu)(x, y) = 0,$$

но т.к. $\lambda \neq \mu$ това е възможно единствено при $(x, y) = 0$. □

Теорема (за диагонализация). *Нека φ е симетричен оператор на n-мерното евклидово пространство V. Тогава съществува ортонормиран базис*

$$f_1, f_2, \ldots, f_n,$$

на V, спрямо който матрицата на оператора е диагонална матрица

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Доказателство. Според Твърдение 3 φ има n на брой собствени стойности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Нека $f_1, f_2, \ldots, f_n$ са съответните им собствени вектори. Ще проведем доказателството с индукция по n – размерността на пространството V. При $n = 1$ нека $f_1 \in V$ е единичен вектор, т.е. $|f_1| = 1$. Тогава f_1 образува ортонормиран базис на V. Матрицата на φ е $(\lambda_1)_{1\times1}, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ и очевидно е диагонална. Нека допуснем, че $n \geq 2$ и че твърдението е изпълнено за $n - 1$ Ще го докажем за n. Нека λ_1 е собствена стойност на φ, а f_1 е съответстващият ѝ собствен вектор. Без ограничение на общността можем да считаме, че $|f_1| = 1$. Да разгледаме множеството

$$W = \{x \in V | (x, f_1) = 0\}.$$

1. $W \leq V$. Наистина за произволни вектори $x, y \in W$ и произволни числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имаме

$$(\alpha x + \beta y, f_1) = \alpha(x, f_1) + \beta(y, f_1) = \alpha.0 + \beta.0 = 0$$

и следователно $\alpha x + \beta y \in W$.

2. $\dim W = n-1$. Наистина, f_1 може да се допълни до ортогонален базис $f_1, a_2, \ldots, a_n$ на V. Тогава $a_2, \ldots, a_n \perp f_1$ и следователно $a_2, \ldots, a_n \in W$. Тъй като $a_2, \ldots, a_n$ са линейно независими, то $\dim W \geq n-1$. Ако допуснем, че $W = n$, то $W = V$ и ще имаме $(f_1, f_1) = 0$ което е невъзможно, т.к. $f_1 \neq o$. Така $\dim W = n-1$.

3. За всеки вектор $x \in W$ е изпълнено и $\varphi(x) \in W$. Наистина, ако $x \in W$, то $(x, f_1) = 0$. Оттук получаваме

$$(\varphi(x), f_1) = (x, \varphi(f_1)) = (x, \lambda_1 f_1) = \lambda_1 (x, f_1) = \lambda_1 .0 = 0.$$

1. и 2. означават, че W е евклидово пространство с $\dim W = n-1$. 3. означава, че φ е симетричен оператор на W. Тогва според индукционното предположение съществува ортонормиран базис $f_2, \ldots, f_n$ на W, спрямо който матрицата на φ е диагонална

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Векторите $f_1; f_2, \ldots, f_n$ образуват ортонормиран базис на V. Освен това $\varphi(f_i) = \lambda_i f_i$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$ което означава, че матрицата на φ е

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Принципът на математическата индукция доказва теоремата. □

Следствие. *Ако $A \in \mathbb{R}_{n \times n}$ е симетрична матрица, то съществува неособена матрица $T \in \mathbb{R}_{n \times n}$, такава че*

$$T^{-1}AT = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

е диагонална матрица. ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ са характеристичните корени на A.)

Нека V е n-мерно евклидово пространство и $e_1, e_2, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на V. Съществува единствен $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, такъв че матрицата му спрямо този базис да е симетрична. От Твърдение 2 следва, че φ е симетричен оператор. Според теоремата съществува ортонормиран базис $f_1, f_2, \dots, f_n$ на V, спрямо който матрицата на φ е D. Нека T е матрицата на прехода от e към f тогава $D = T^{-1}AT$.

Забележка: Като матрица на прехода между два ортонормирани базиса на пространството V матрицата T има свойството $TT^t = E$, т.е. $T^{-1} = T^t$. Матрици с това свойство се наричат *ортогонални*.