3. Линейни пространства

От училище са известни операциите събиране на два вектора и умножение на вектор с число, както и техни свойства.

Линейните пространства са обобщение на познатите вектори.

Дефиниция. *Множество V наричаме* ***линейно пространство над*** $\mathbb{R}$*, ако са дефинирани операции $+ : V \times V \to V$ и $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, изпълняващи свойствата:*

- $u + v = v + u$ *за всеки* $u, v \in V$
- $(u + v) + w = u + (v + w)$ *за всеки* $u, v, w \in V$
- *Има* $\boldsymbol{0} \in V$*, такъв че за всеки* $v \in V$ *е изпълнено* $v + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + v = v$
- *За всеки* $v \in V$ *има* $(-v) \in V$*, такъв че* $v + (-v) = (-v) + v = \boldsymbol{0}$
- $1 \cdot v = v$ *за всеки* $v \in V$
- $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$ *за всеки* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *и всяко* $v \in V$
- $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ *за всеки* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *и всяко* $v \in V$
- $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ *за всяко* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и всеки* $u, v \in V$

Елементите на линейно пространство V наричаме вектори, а елементите на $\mathbb{R}$ – скалари или числа. Операцията $+$ наричаме събиране на вектори, а операцията $\cdot$ – умножение на вектор с число (по-точно е умножение на число с вектор).

Примери за линейни пространства

- $V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ с покоординатните операции:
  $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ и
  $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$
- $V = \mathbb{R}^{m \times n} = \{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix} \mid x_{ij} \in \mathbb{R}\}$ с покоординатните операции
- $V = \{\mathbf{0}\}$ с операции $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ и $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- Множеството от всички (безкрайни) редици отново с покоординатните операции
- $V = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ с операциите сума на функции и произведение на функция с число дефинирани от равенствата:
  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ за всяко $x \in \mathbb{R}$ и
  $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$ за всяко $x \in \mathbb{R}$

Проверката дали дадено множество е линейно пространство по дефиниция е доста дълга. В такива ситуации е полезно следното

Твърдение. *Нека V е линейно пространство над $\mathbb{R}$ и $U \subseteq V$.*
Ако за всеки $u, v \in U$ и всяко $\lambda \in \mathbb{R}$ е изпълнено, че:
$u + v \in U$ и $\lambda \cdot u \in U$, то U е линейно пространство относно операциите на V.
Ако горното условие не е изпълнено, то U ***не*** *е линейно пространство.*

Задача 1. *За кои стойности на* $p \in \mathbb{R}$ *множеството* $U = \{(x, y, z) \mid x - 2y + 3z = p\}$ *е линейно пространство относно обичайните операции?*

Решение. *Съобразяваме, че* $U \subseteq \mathbb{R}^3$, *като* $\mathbb{R}^3$ *е линейно пространство. Възползваме се от твърдението: Дали* U *е линейно пространство зависи от това дали* U *"запазва" операциите събиране и умножение с число. По-точно* U *е линейно пространство точно когато за всеки* $u, v \in U$ *и всяко* $\lambda \in \mathbb{R}$ *е изпълнено, че:* $u + v \in U$ *и* $\lambda \cdot u \in U$.

И така нека $u = (x_1, y_1, z_1) \in U$, $v = (x_2, y_2, z_2) \in U$.

Тогава $x_1 - 2y_1 + 3z_1 = x_2 - 2y_2 + 3z_2 = p$.

$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

Така, $u + v \in U$ *точно когато* $(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) = p$.

От друга страна, $x_1 + x_2 - 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) = (x_1 - 2y_1 + 3z_1) + (x_2 - 2y_2 + 3z_2) = p + p = 2p$.

Следователно, $u + v \in U$ *точно когато* $p = 2p$, *т.е. когато* $p = 0$. *Така за* $p \neq 0$ *получихме, че сума на два елемента от* U *не попада в* U. *Иначе казано, при* $p \neq 0$ U *не е линейно пространство.*

Нека сега $p = 0$. *Проверихме, че* U *запазва събирането на вектори.*

$\lambda \cdot u = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

Така $\lambda \cdot u \in U$ *точно когато* $\lambda x_1 - 2\lambda y_1 + 3\lambda z_1 = 0$.

От друга страна $\lambda x_1 - 2\lambda y_1 + 3\lambda z_1 = \lambda(x_1 - 2y_1 + 3z_1) = \lambda \cdot 0 = 0 = p$, *така че* $\lambda \cdot u \in U$.

Следователно при $p = 0$, U *запазва събирането и умножението на вектори, т.е.* U *е линейно пространство.*

Извод: *Търсените стойности на* p *са единствено* $p = 0$.

Задачи за упражнение

Задача 2. *Да се провери, че следните множества образуват линейни пространства над* $\mathbb{R}$ *относно обичайните операции:*

a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x - y = y - 2z = 0\}$;

b) $V = \{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mid a_{12} = a_{21},\ a_{13} = a_{31},\ a_{23} = a_{32}\}$;

c) безкрайните редици, които са аритметични прогресии.*