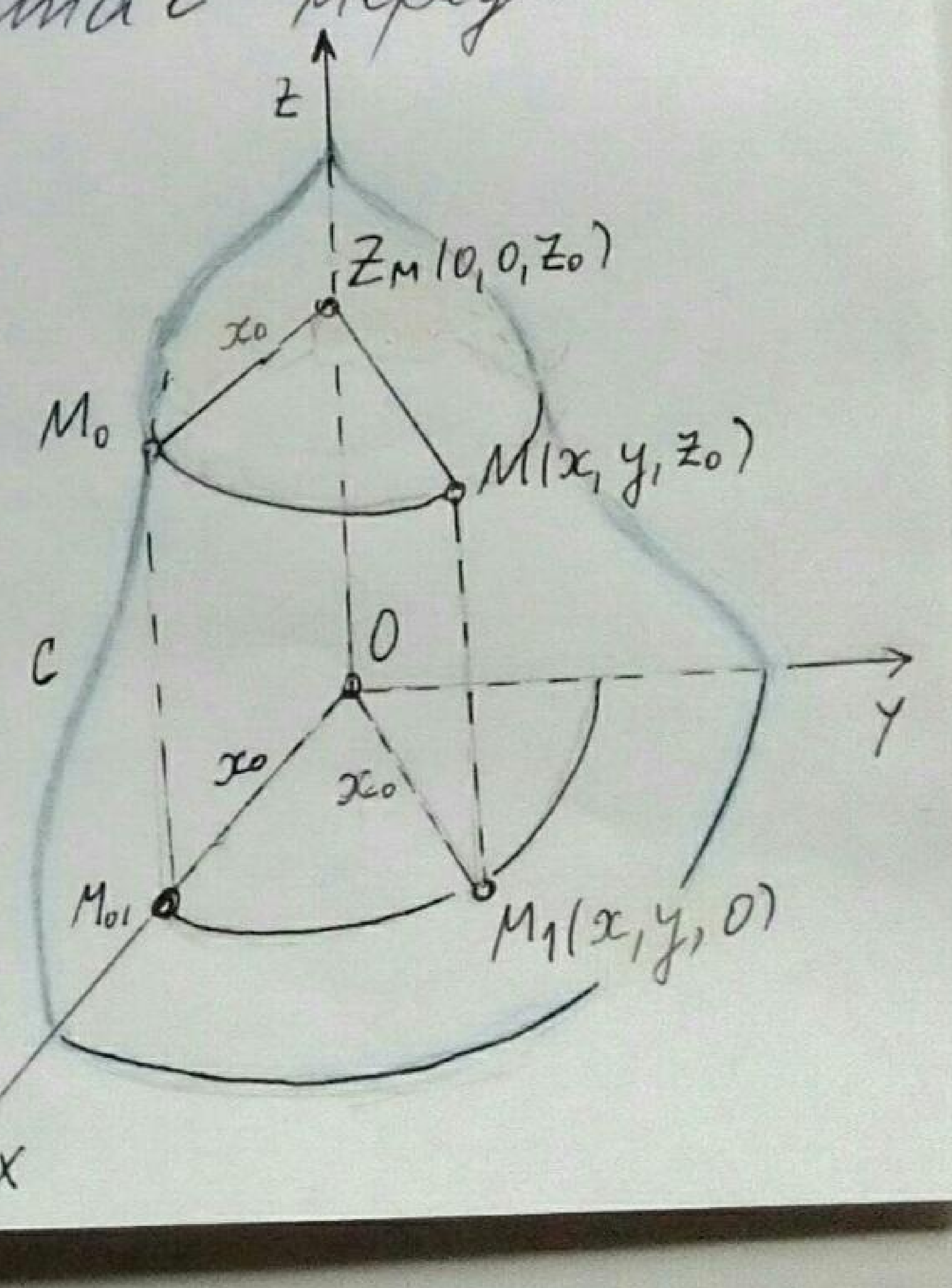
Ротационни повърхнини.

Нека са дадени права l и крива c, лежащи в една равнина. При пълното си завъртане около l, c описва повърхнина S, която се нарича ротационна.

Нека M е точка от c, α_M - равнината през M, перпендикулярна на l и Z_M е пресечната точка на α_M и l. Тогава при ротацията около l точката M описва окръжност k_M, лежаща в α_M, с център Z_M и радиус $|Z_M M|$. Всяка такава окръжност се нарича паралел на S, l ос S, а сечението на S с равнина през оста l - меридиан на S.

Ще намерим уравнение на S спрямо ортонормирана координатна система $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ с ос $l \equiv Oz$ и c лежаща в координатната равнина Oxz. Нека c е с уравнение

$$c\begin{cases} f(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad M(x,y,z)\in c.$$



Тогава α_M, $\alpha_M \ni M$ и $\alpha_M \perp Oz$ пресича кривата c в точка M_0, $M_0(x_0, 0, z_0)$, където $f(x_0, z_0) = 0$ и $\alpha_M \cap Oz = Z_M(0, 0, z_0)$.

Също така $|Z_M M| = |Z_M M_0| = |x_0|$. Следователно точката M лежи на окръжност k_M в равнината α_M с център Z_M и радиус $|x_0|$. Уравнението на k_M е

$$k_M : \begin{cases} x^2 + y^2 = x_0^2 \\ z = z_0 \end{cases},$$

Следователно за уравнението на S получаваме

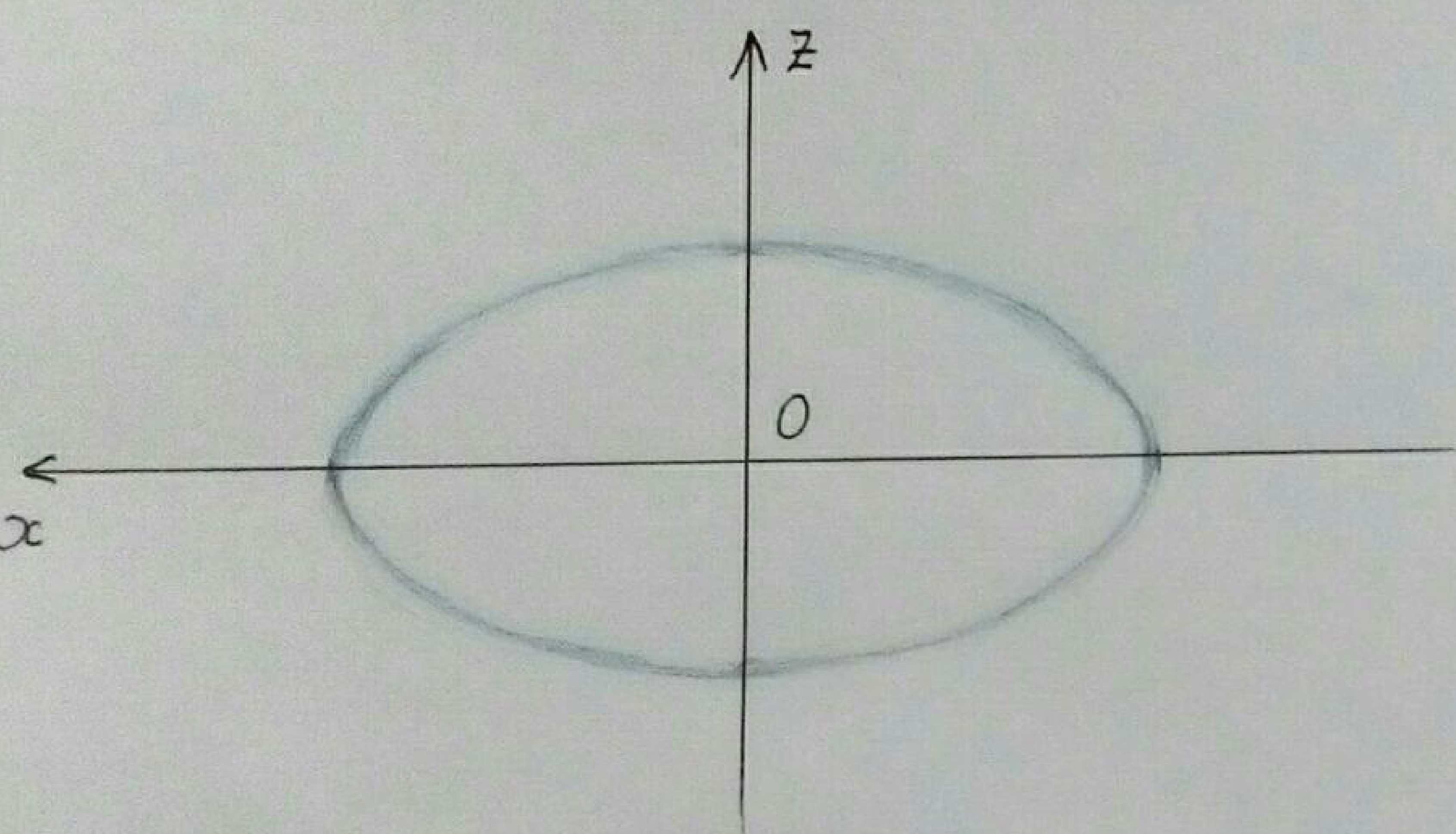
$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0 \quad (1)$$

Обратно, всяко уравнение от вида (1) е уравнение на ротационна повърхнина с ос Oz, меридиан в Oxz с уравнение $c_0 \begin{cases} f(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases};$

Също така, равнината $x = 0$ пресича S в меридиан с уравнение $c_1 : \begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0. \end{cases}$

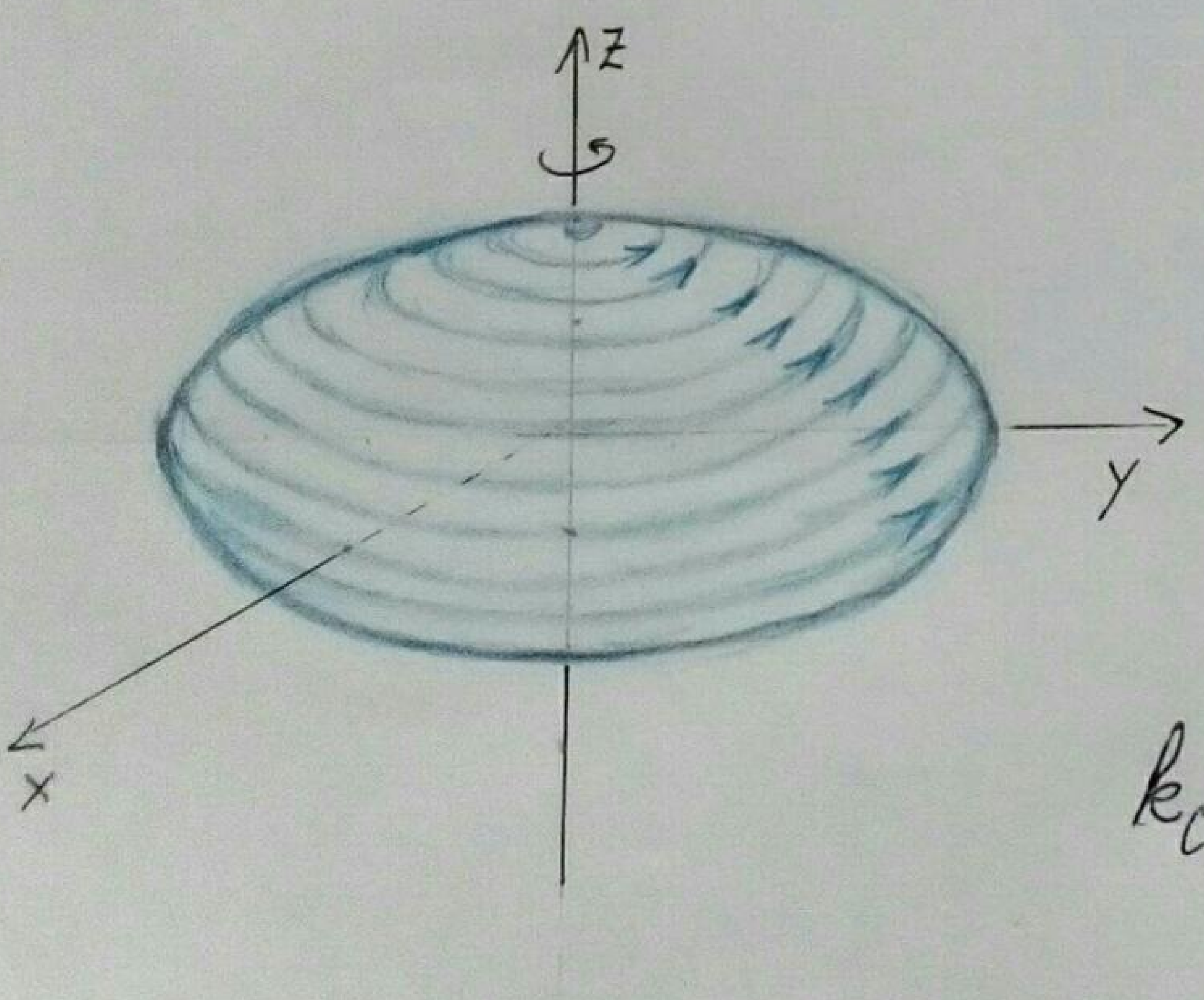
Примери

1. В Oxz е дадена елипсата $\mathcal{E}: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1, \ a > b \\ y = 0 \end{cases}$



Ако завъртим $\mathcal{E}$ около оста Oz ще получим ротационна повърхнина с уравнение

$$\mathcal{E}_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$



Тази повърхнина е известна като ротационен плосък елипсоид (диск).

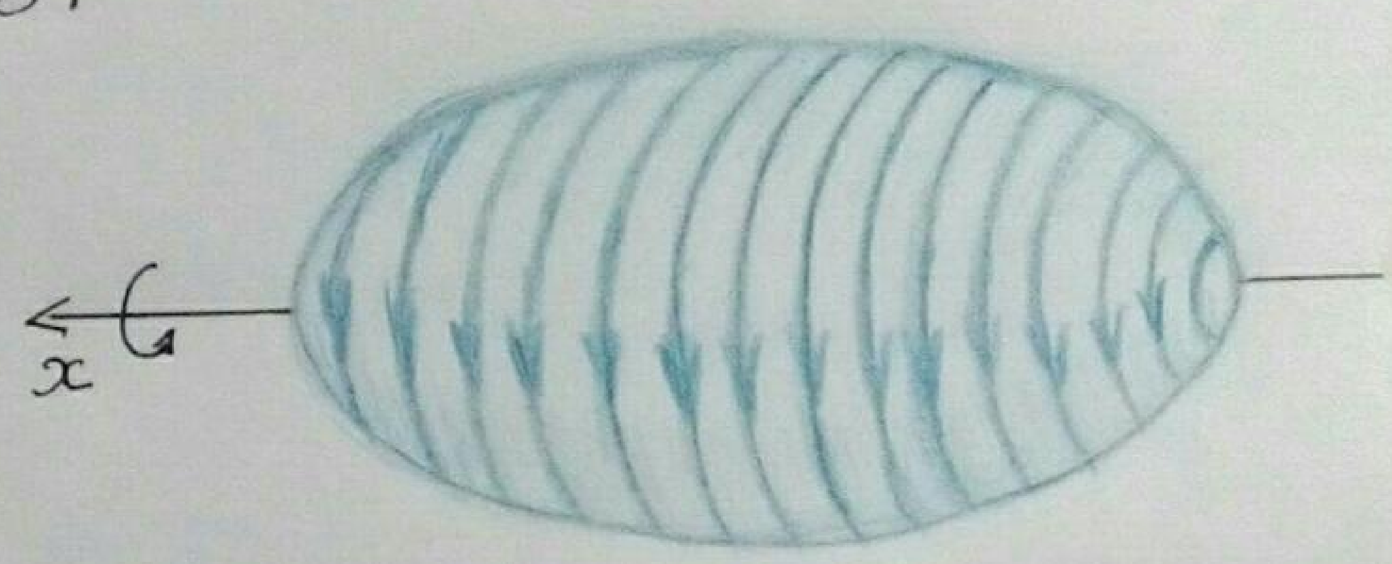
Равнините $z = c$, $|c| < b$ пресичат $\mathcal{E}_1$ в окръжности k_c с уравнения:

$$k_c : \begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{b^2}(b^2 - c^2) \\ z = c \end{cases}$$

18.10

Нека завъртим елипсата около оста Ox. Тогава получаваме ротационна повърхнина с уравнение:

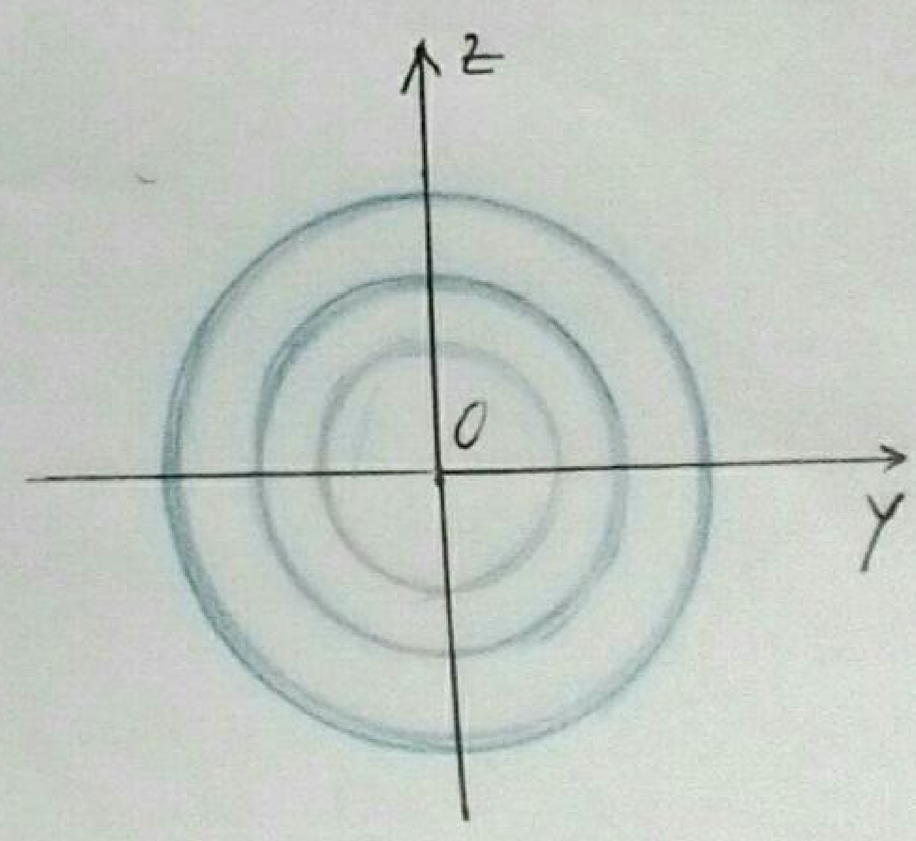
$$\mathcal{E}_2: \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1, \quad a>b.$$



Това е така наречения ротационен продълговат елипсоид.

Равнините $x=c$, $|c|<a$ пресичат $\mathcal{E}_2$ в окръжности k'_c

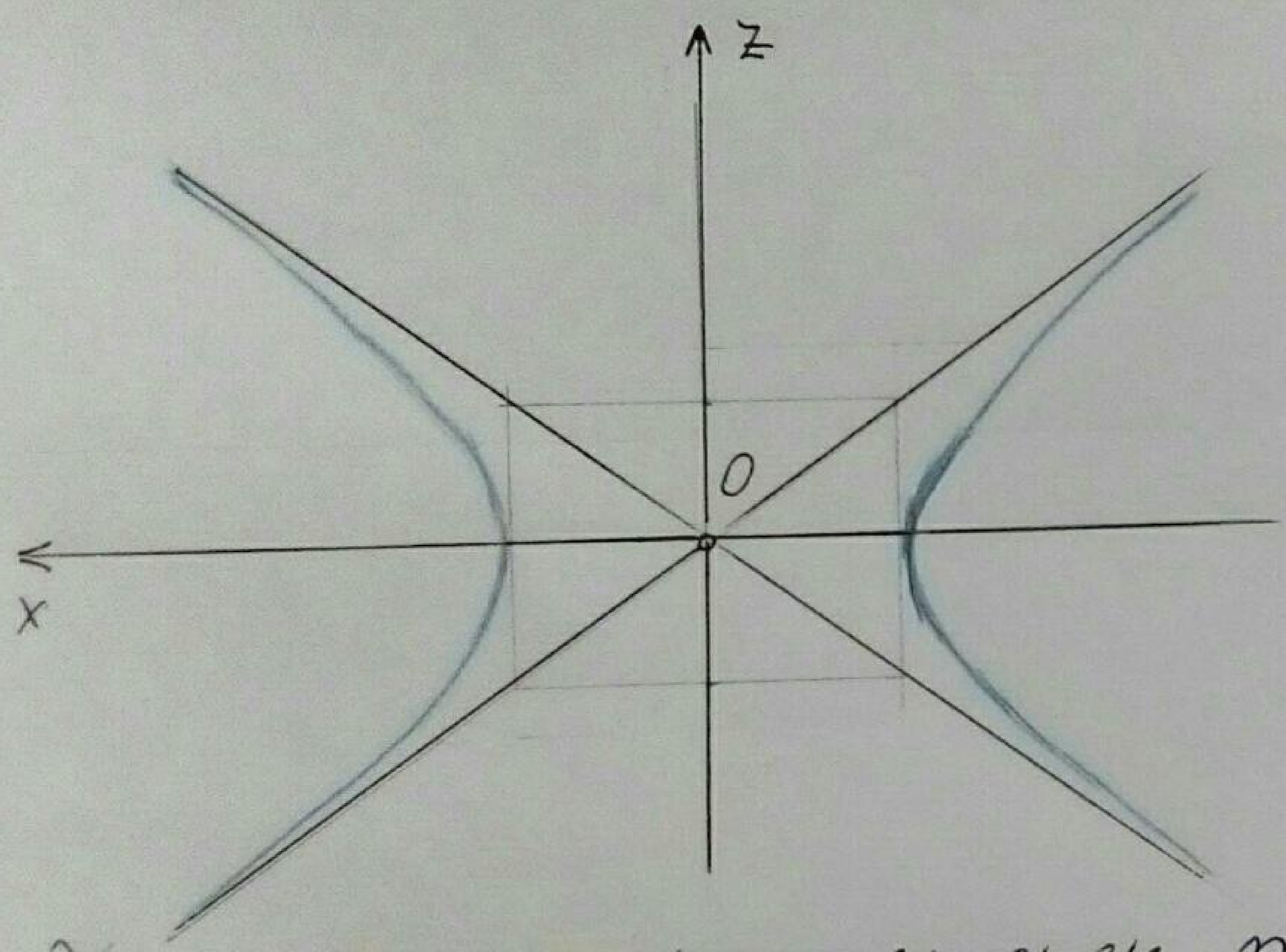
$$k'_c: \begin{cases} y^2+z^2=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-c^2) \\ x=c \end{cases}$$ с център O и радиус $R_k=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}$



За $c=0$ получаваме най-големия паралел

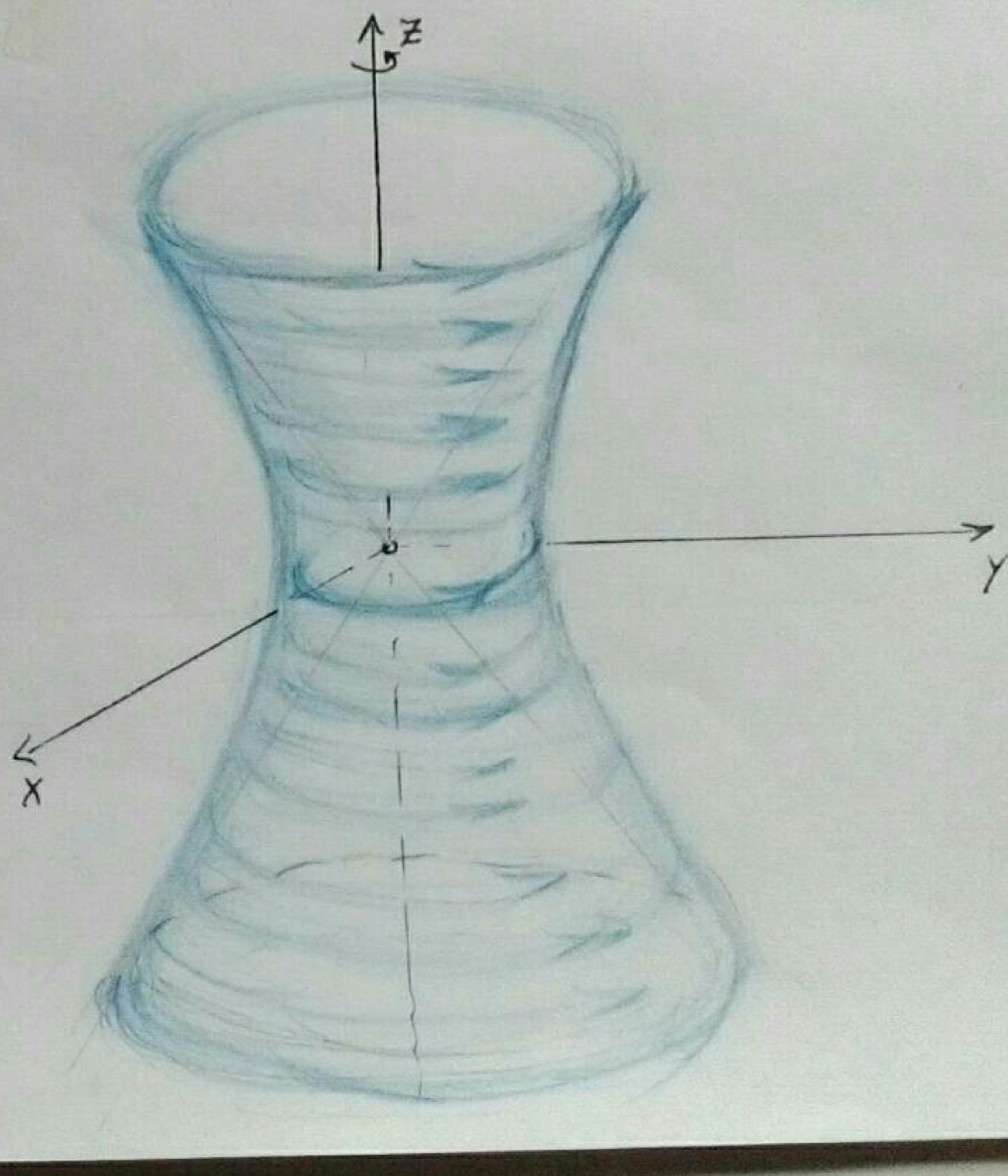
$$k'_0: \begin{cases} y^2+z^2=b^2 \\ x=0 \end{cases}$$ - този с радиус b.

2. В Oxz е дадена хиперболата $\chi : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1. \\ y = 0 \end{cases}$



При завъртането на χ около имагинерната ѝ ос Oz се получава повърхнината χ_1 с уравнение

$$\chi_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$



χ_1 се нарича ротационен прост хиперболоид.
Равнините $z = c$ пресичат χ_1 в окръжности k_c с уравнения:

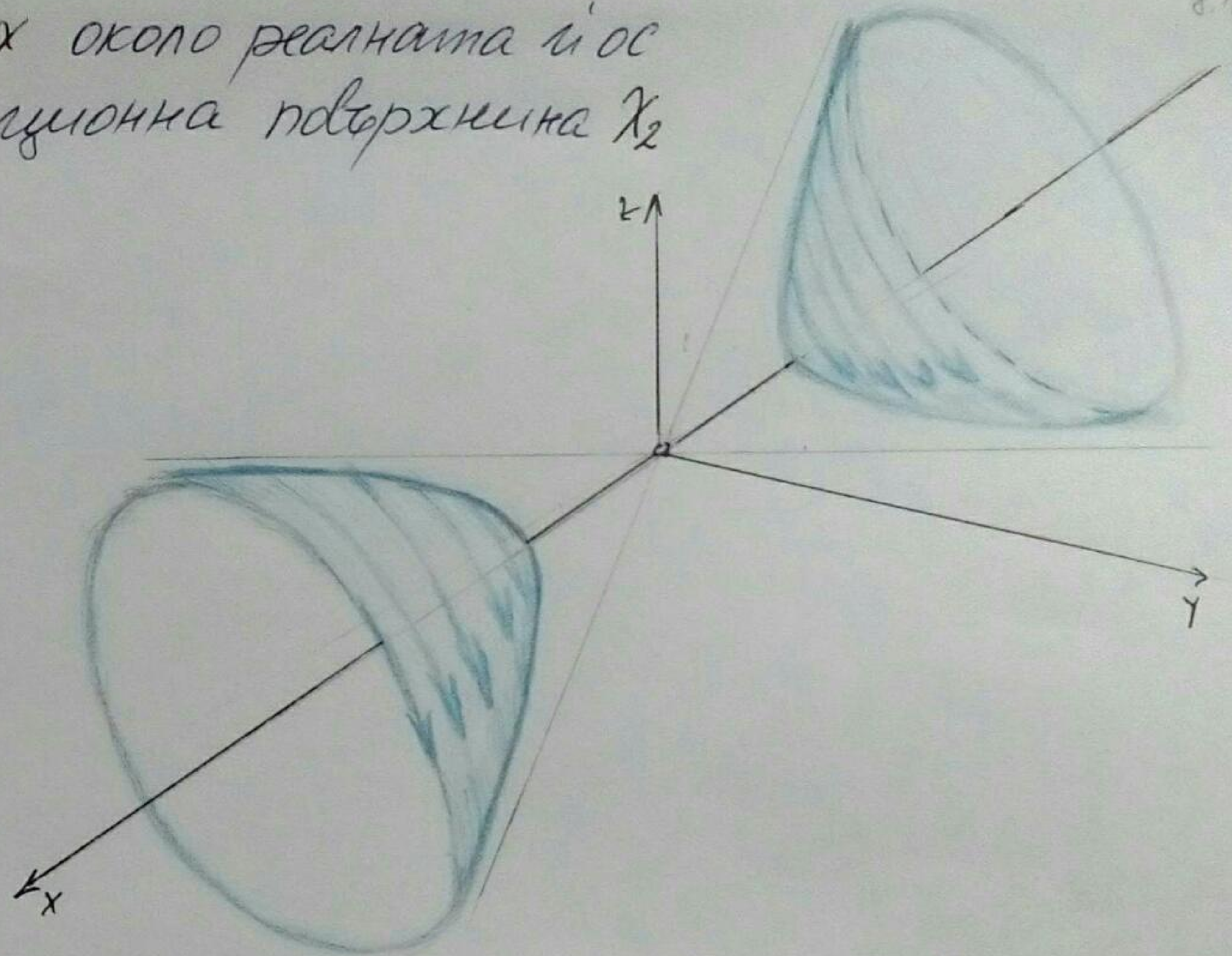
$$k_c : \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + c^2) \\ z = c. \end{cases}$$

Най-малката окръжност е тази в Oxy –

$k_0 : \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}$ и е с радиус a.

Ако завъртим хиперболата χ около реалната ѝ ос – Ox, то получената ротационна повърхнина χ_2 е с уравнение

$$\chi_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$



Равнините $x = c$ пресичат χ_2 в окръжности k'_c

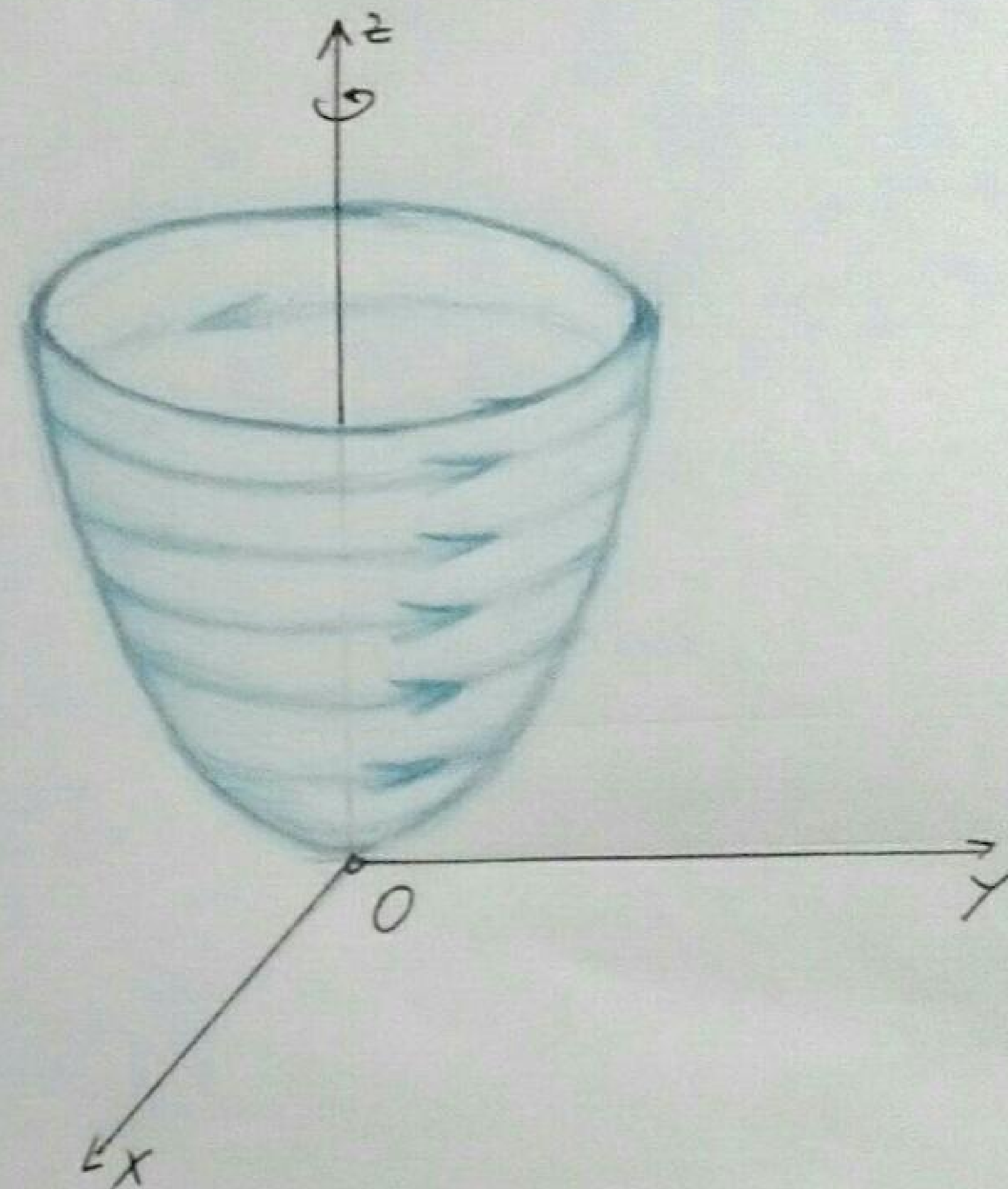
$$k'_c : \begin{cases} y^2 + z^2 = \dfrac{b^2}{a^2}(c^2 - a^2) \\ x = c \end{cases}, \ |c| > a$$

χ_2 се нарича ротационен двоен хиперболоид.

Самостоятелно: Дадена е хиперболата $\chi^* \begin{cases} \dfrac{z^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$. Намерете уравненията на ротационните повърхнини при завъртането на χ^* около Oz и при завъртането на χ^* около Oy.

18.13

3. В Oxz е дадена параболата $\pi: \begin{cases} x^2 = 2pz, & p>0 \\ y = 0 \end{cases}$



Завъртаме π около оста ѝ Oz.

Получаваме повърхнината Π с уравнение $\Pi: x^2+y^2=2pz$,

която се нарича ротационен параболоид.

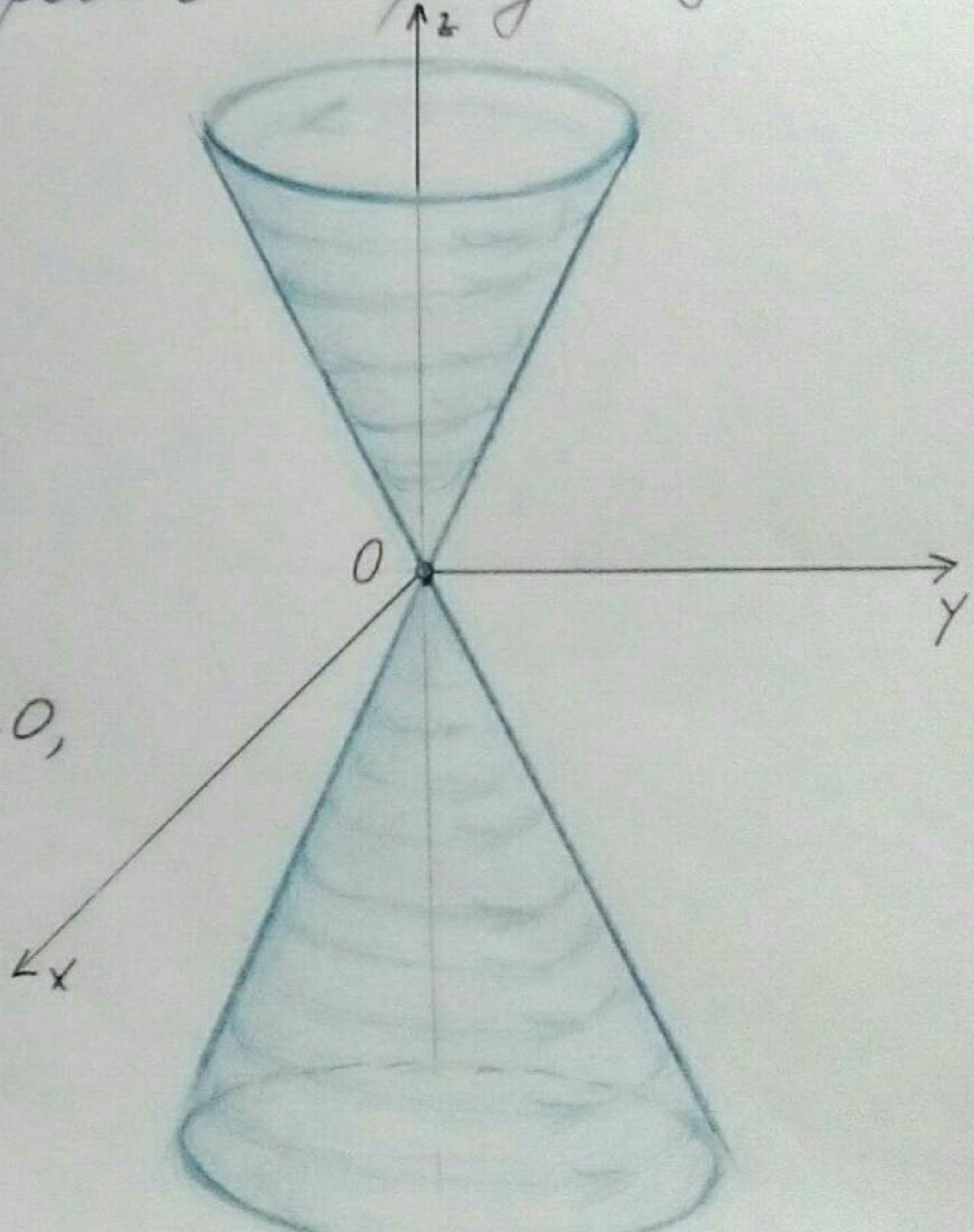
Паралелите на Π - сечението на Π с равнините $z=c$, $c>0$ (при $p>0$) са окръжности с уравнения $k_c: \begin{cases} x^2+y^2=2pc \\ z=c \end{cases}$

Меридианите на Π са параболи, еднакви с π.

- Ако $p<0$ получаваме ротационен параболоид $\overline{\Pi}$, симетрично разположен на Π спрямо координатната равнина Oxy.
- Ако завъртим π около Ox ще получим ротационна повърхнина $S_\pi: \dfrac{x^4}{4p^2} = y^2+z^2$ и както се вижда от уравнението ѝ е повърхнина от четвърта степен.

4. Асимптотите на хиперболата $X: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ са с уравнения $l_{1,2} \begin{cases} z = \pm \frac{b}{a} x \\ y = 0 \end{cases}$.

Да завъртим тази двойка прави около Oz. Ясно си представяме, че ще получим ротационен конус с връх O и образуваща коя да е от асимптотите.



Като крива в равнината асимптотите се задават със следната крива от втора степен $\gamma: \begin{cases} a^2 z^2 - b^2 x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

При завъртането на γ около Oz получаваме уравнението: $b^2x^2 + b^2y^2 - a^2z^2 = 0$, което обикновено се записва

$$K_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0.$$

K_1 е асимптотичен конус на простия хиперболоид $X_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0.$

18.15

Ако завъртим g_m около Ox, то получаваме ротационен конус K_2 с уравнение

$$K_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0.$$

От своя страна, K_2 е асимптотичен конус за двойния хиперболоид X_2

$$X_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

За разлика от простия хиперболоид X_1, чийто асимптотичен конус K_1 е „вътре" в хиперболоида, тук асимптотичния конус K_2 на двойния хиперболоид X_2 е „вън" от него, или казано по друг начин двойният хиперболоид е „вътре" в асимптотичния си конус.

18.16

забележка: Уравнението на p намираме като алгебрична крива от втора степен, чиито точки удовлетворяват уравненията на асимптотите.

Имаме, че точка принадлежи на p <=> координатите и удовлетворяват $z - \frac{b}{a}x = 0$ или $z + \frac{b}{a}x = 0$ и $y = 0$.

$$\Rightarrow (az - bx)(az + bx) = 0 \,;\; y = 0 \Rightarrow p : \begin{cases} a^2z^2 - b^2x^2 \\ y = 0 \end{cases}.$$