Числови редове.

Нека е дадена числовата редица $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Ще казваме, че тя определя **числов ред**, записван формално във вида:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Числата

$$S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

се наричат **частични (парциални) суми** на реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение. *Редът* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ще наричаме* **сходящ**, *ако редицата* $\{S_k\}$ *от частичните му суми е сходяща. Границата* S *на тази редица се нарича* **сума** *на реда.*

Формално това се записва чрез равенството

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ще наричаме **разходящ**, ако редицата $\{S_n\}$ от частичните му суми не притежава граница.

Необходимо условие за сходимост. Да предположим, че редът с общ член a_n е сходящ, т.е. че редицата $\{S_n\}$ от частичните му суми притежава граница S . Тогава имаме

$$a_n = S_{n+1} - S_n.$$

Като извършим в това равенство граничен преход при $n \to \infty$, получаваме:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$$

т.е. изпълнено е твърдението:

Теорема 1. *Ако един числов ред е сходящ, то общият му член клони към нула.*

Обратното твърдение не е вярно: Пример за това е реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Оценка на остатъка на един сходящ ред. Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ и има сума S, а S_n са неговите частични суми, то величината $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ се нарича n-ти **остатък** на реда. Очевидно $R_n \to 0$. Както от теоретична, така и от приложна гледна точка е интересно да се направят оценки, показващи колко бързо тази величина намалява или казано по-просто, да се определи колко събираеми трябва да се вземат, за да се изчисли сумата на реда с дадена точност. Ще направим такива оценки за някои примери.

1. За реда $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} = e$ имаме

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!\,n}\,,$$

т.е. скоростта на намаляване на остатъците е доста висока.

Може да се покаже, че от тази оценка следва, че числото e е ирационално (виж упражнение 1.).

2. За реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ при $|x|<1$ имаме

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = x^{n+1}\frac{1}{1-x}.$$

Тук скоростта на сходимост е по-бавна, отколкото в предния пример, но също достатъчно добра.

Необходимо и достатъчно условие на Коши за сходимост на редове. Ще преформулираме на езика на редовете НДУ на Коши за сходимост на редици. Нека n и m са две естествени числа, така че $m>n$. Имаме

$$S_m\,-\,S_n\,=\,\sum_{k=n+1}^{m} a_k\,.$$

Да си припомним, че редицата S_n е сходяща точно тогава, когато за всяко $\varepsilon>0$ съществува номер ν , така че при $n,m>\nu$ да имаме $|S_m-S_n|<\varepsilon$. Удобно е да положим $m=n+p$, p - естествено. Оттук получаваме следното твърдение (условие на Коши за сходимост на редове):

Теорема 2. *Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon>0$ съществува номер ν , така че при всяко естествено $n>\nu$ и всяко естествено $p>0$ да имаме*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \,<\, \varepsilon.$$