12.1.

12. Общо уравнение на равнина. Компланарност на вектор и равнина. Взаимно положение на две равнини.

Има аналогия между права в равнината и равнина в пространството. Тази аналогия е видима при аналитичното им описание.

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е афинна координатна система и α е произволна равнина. Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е произволна фиксирана точка от α, а $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ и $\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$ са два ненулеви неколинеарни вектори, компланарни с α. Тогава точка $M(x, y, z)$ лежи в равнината α точно тогава, когато векторът $\overrightarrow{M_0M}$ е компланарен с $\alpha \Leftrightarrow$ векторите $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ са линейно зависими $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Означаваме с $A = p_2q_3 - p_3q_2$, $B = p_3q_1 - p_1q_3$, $C = p_1q_2 - p_2q_1$ и $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Тогава уравнението

$$(1)\quad Ax + By + Cz + D = 0$$

се нарича общо уравнение на равнината α спрямо K.

Всяка равнина има уравнение от вида (1), като поне един от коефициентите му е различен от нула - ако допуснем, че $A = B = C = 0$, то ще следва, че $\vec{p}$ и $\vec{q}$ са колинеарни, противоречие. Така имаме $A^2 + B^2 + C^2 = 0$.

Обратно. Всяко уравнение от вида (1) с $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ е общо уравнение на точно една равнина.

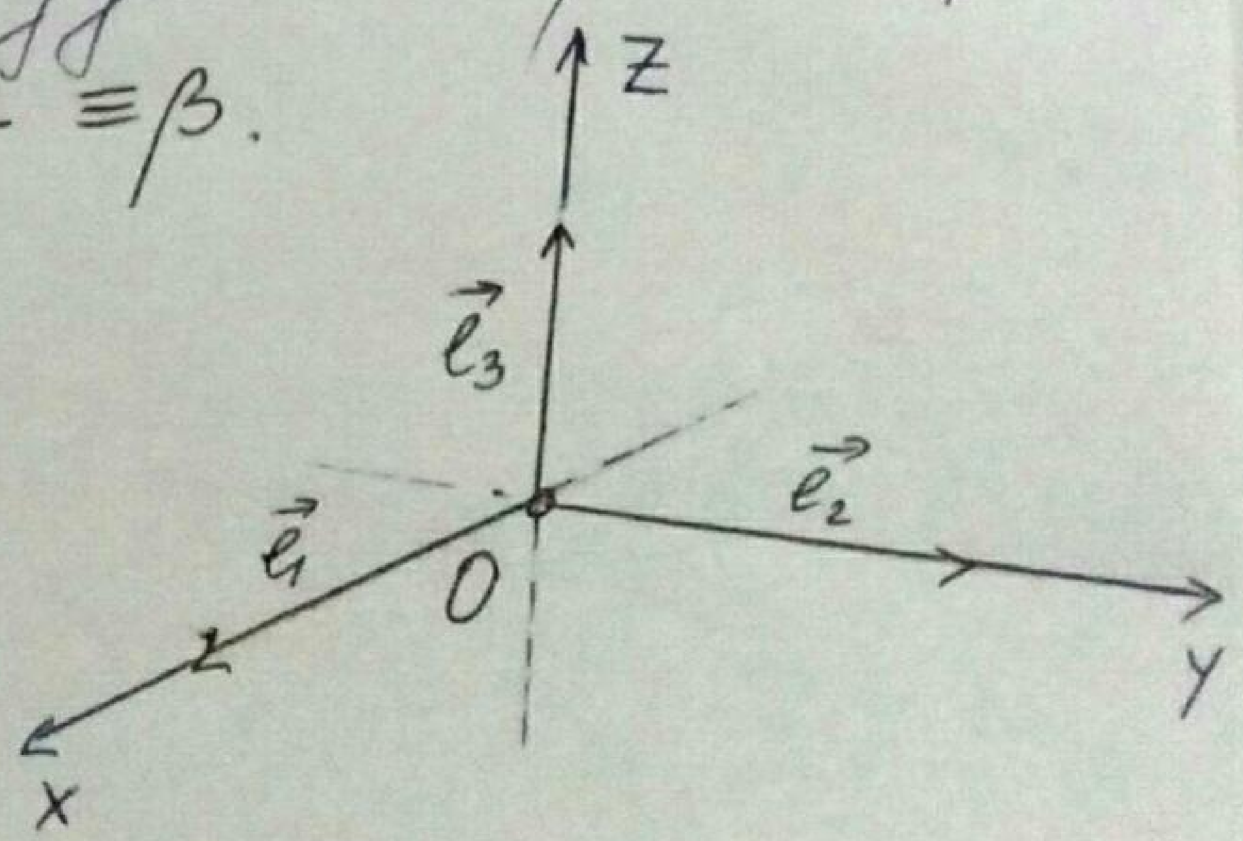
Без ограничение на общността считаме $A \neq 0$. Точките $M_0\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$, $M_1\left(-\frac{B+D}{A}, 1, 0\right)$ и $M_2\left(-\frac{C+D}{A}, 0, 1\right)$ са три точки, чиито координати удовлетворяват уравнението (1) като при това векторите $\overrightarrow{M_0M_1}\left(-\frac{B}{A}, 1, 0\right)$ и $\overrightarrow{M_0M_2}\left(-\frac{C}{A}, 0, 1\right)$ са неколинеарни и определят равнина α през точката M_0

с уравнение

$$\alpha: \begin{vmatrix} x+\frac{D}{A} & y & z \\ -\frac{B}{A} & 1 & 0 \\ -\frac{C}{A} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{или}$$

$$\frac{1}{A}\begin{vmatrix} Ax+D & y & z \\ -B & 1 & 0 \\ -C & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{A}(Ax+By+Cz+D) = 0.$$

Ако (1) е уравнение на две равнини α и β, то тъй като координатите на произволна точка от α го удовлетворяват, то тази точка ще е и от β, следователно $\alpha \equiv \beta$.

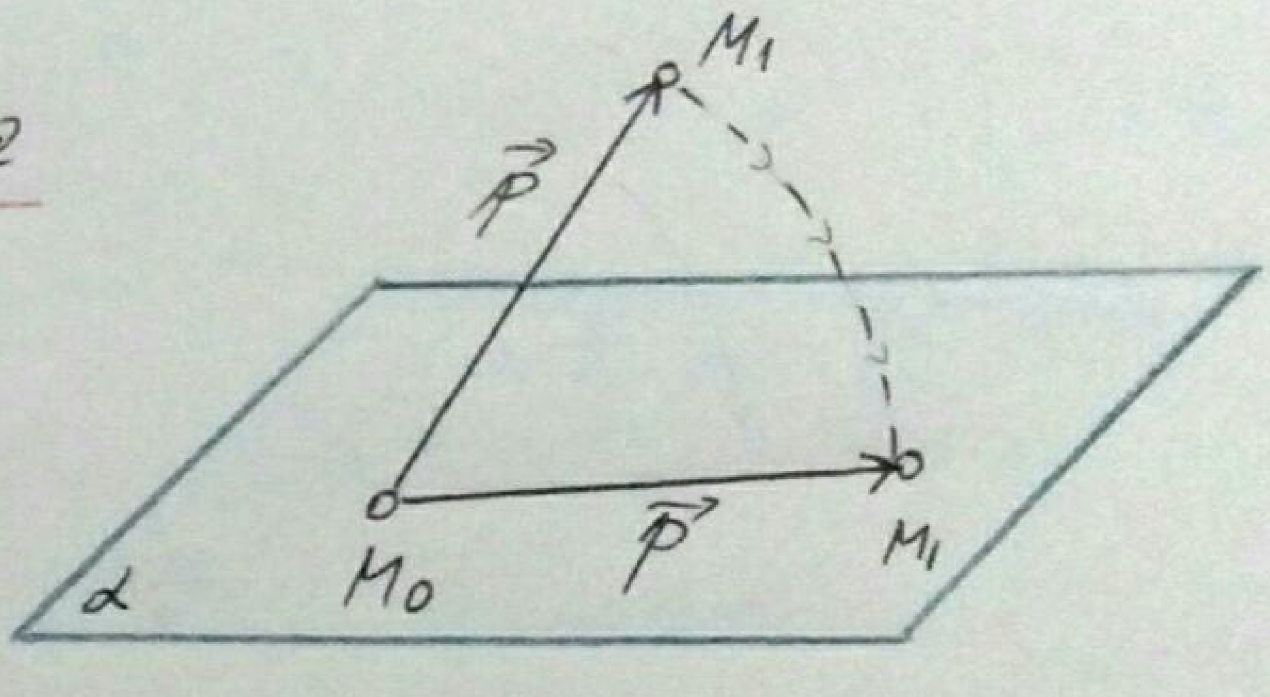


Например уравнението на координатната равнина Oxy, определена от т. $O(0,0)$, компланарна с $\vec{e}_1(1,0,0)$ $\vec{e}_2(0,1,0)$ е

$$Oxy: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Oxy: \ z = 0.$$

Уравнението на координатната равнина Oyz е $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow Oyz: \; x = 0$ и на Oxz е $y = 0$.



! Компланарност на вектор с равнина

Нека α е зададена с общо уравнение $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ и $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ е произволен вектор, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е фиксирана точка от α, а $M_1(x_1, y_1, z_1)$ е такава точка, че $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{p}$. Тогава $\vec{p}$ е компланарен с α ($\vec{p} \parallel \alpha$) точно тогава, когато точката M_1 е в равнината α – точно тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват уравнението на α

$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Имаме $p_1 = x_1 - x_0$, $p_2 = y_1 - y_0$, $p_3 = z_1 - z_0$

$$\Rightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = A(p_1 + x_0) + B(p_2 + y_0) + C(p_3 + z_0) + D =$$

$$= Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = Ap_1 + Bp_2 + Cp_3.$$

(От $M_0 \in \alpha \Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$).

12.5.

Следователно векторът $\vec{p}$ е компланарен с равнината α точно тогава, когато
$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0.$$

Взаимно положение на две равнини.

Нека спрямо $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ равнините α_1 и α_2 имат съответно уравнения
$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$A_i^2 + B_i^2 + C_i^2 \neq 0, \; i = 1, 2.$

Тогава равнините са успоредни точно тогава, когато всеки вектор $\vec{p}$, компланарен с α_1 е компланарен и с α_2 и обратно $-\vec{p} \parallel \alpha_2 \Rightarrow \vec{p} \parallel \alpha_1$.

Следователно системата
$$(2) \left| \begin{array}{l} A_1\lambda + B_1\mu + C_1\nu = 0 \\ A_2\lambda + B_2\mu + C_2\nu = 0 \end{array} \right.$$
има две линейно независими решения, на които съответстват два неколинеарни вектора $\vec{p}(p_1, p_2, p_3) \not\parallel \vec{q}(q_1, q_2, q_3)$, компланарни с α_i, $i = 1, 2$.

Известно е, че (2) има две линейно независими решения точно тогава, когато рангът на матрицата от коефициентите на

12.6.

матрицата е едно - $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1 \iff A_2 = kA_1, B_2 = kB_1$ и $C_2 = kC_1$, за някое $k \neq 0$.

Равнините α_1 и α_2 съвпадат точно тогава, когато имат обща точка M_0.

От $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Rightarrow A_2 = kA_1, B_2 = kB_1$ и $C_2 = kC_1, k \neq 0$.

Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_0 \in \alpha_1$, $M_0 \in \alpha_2$. От $M_0 \in \alpha_1 \Rightarrow D_1 = -(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0)$.

От $M_0 \in \alpha_2 \Rightarrow D_2 = -(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0) = -k(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0) = kD_1$.

Следователно е в сила следната

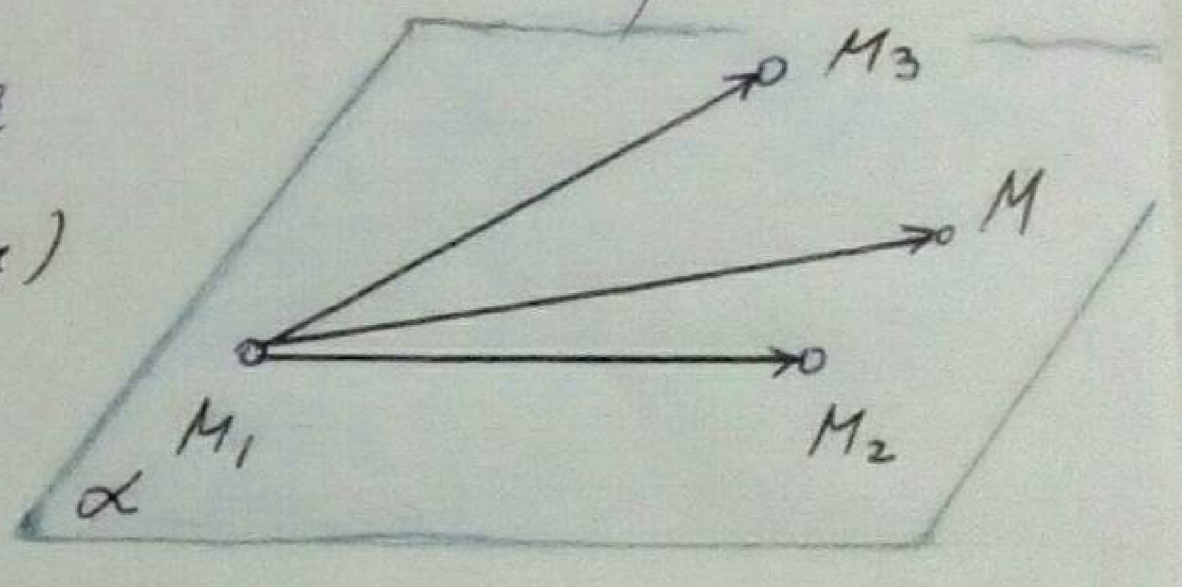
Теорема. Спрямо афинна координатна система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ всяка равнина има общо уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$ като $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Две уравнения от този вид са уравнения на една и съща равнина точно тогава, когато съответните им коефициенти са пропорционални.

Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е дадена точка и α е произволна равнина през нея с общо уравнение $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$.
Тогава $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \Rightarrow D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Като заместим в уравнението на α, получаваме

$$(3) \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Следователно (3) е уравнение на произволна равнина α през M_0.

Всеки три неколинеарни точки определят единствена равнина α.



Ако $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ са три такива точки, то точката $M(x, y, z)$ ще лежи в α точно тогава, когато векторите $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ са компланарни $\Longleftrightarrow$

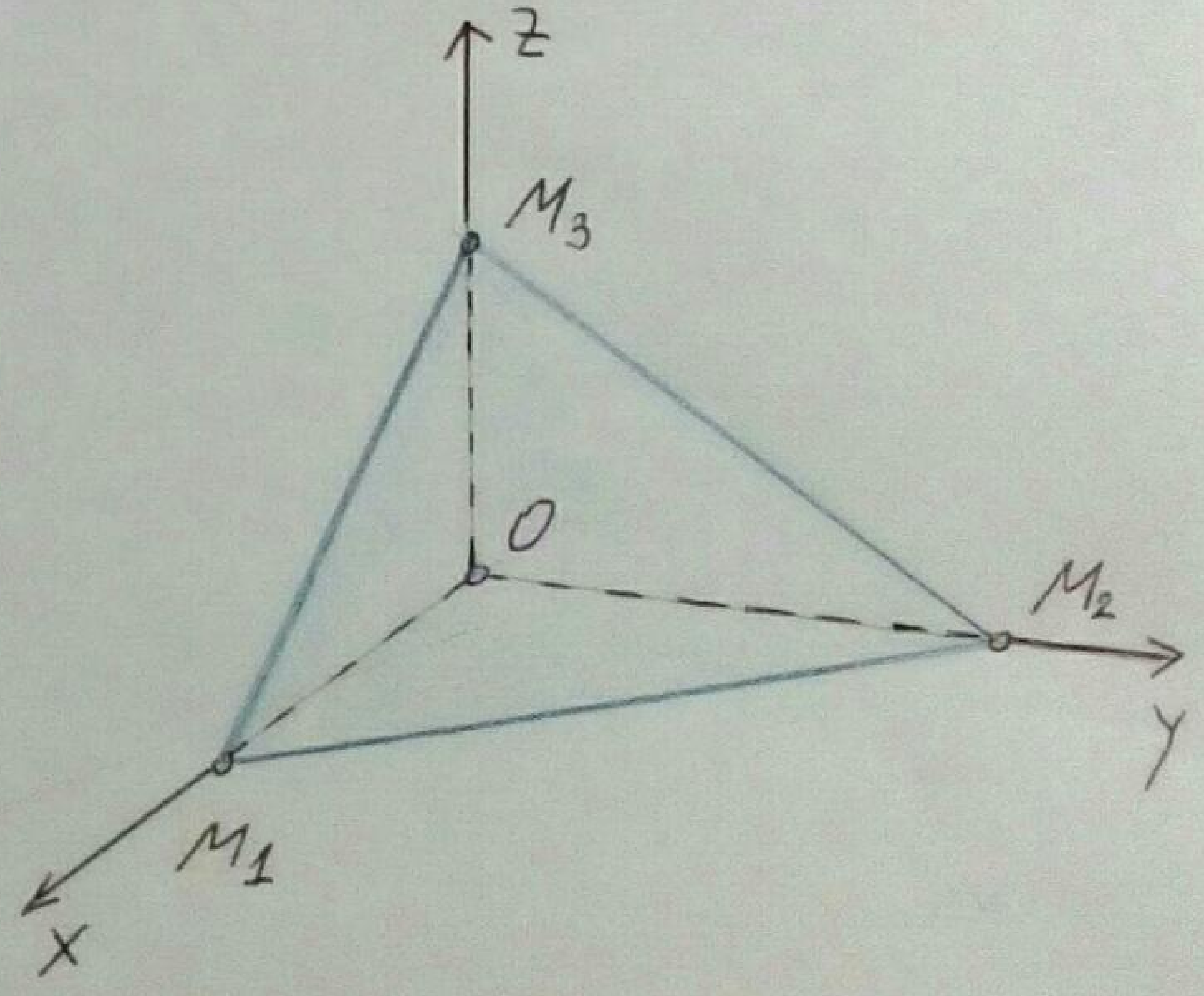
$$(4) \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следователно (4) е уравнение на равнината, минаваща през точките M_1, M_2 и M_3.

Ясно е, че равнина минава през началото на координатната система точно тогава, когато свободният член D в уравнението ѝ (1) е нула.

Ако равнина α пресича координатните оси съответно в точки $M_1(A,0,0)$, $M_2(0,B,0)$ и $M_3(0,0,C)$, различни от O, то (4) добива вида

$$\begin{vmatrix} x-A & y & z \\ -A & B & 0 \\ -A & 0 & C \end{vmatrix} = BC(x-A) + ACy + ABz = 0 \Rightarrow \quad (ABC \neq 0)$$



$$(5) \quad \frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1.$$

(5) се нарича отрезово уравнение.

Ясно е, че равнина, която не минава през O и не е успоредна на коя да е от координатните оси, има, при това единствено, отрезово уравнение.