Пресмятане на суми на редове. Развитие в ред на Маклорен

Като приложение на степенните редове ще пресметнем някои суми и ще развиваме функции в ред.

С помощта на дефиницията за сума на ред получаваме, че:

- Ако $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ са сходящи и сумите им са A и B, то редът $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)$ е сходящ и сумата му е $A+B$
- Ако $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ е сходящ със сума A и $\lambda \in \mathbb{R}$, то редът $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n)$ е сходящ и сумата му е $\lambda . A$.

Иначе казано, редове можем почленно да събираме и да умножаваме с число.

Степенните редове, като специален вид редове, също можем почленно да събираме и умножаваме с число. Оказва се, че можем и да ги интегрираме и диференцираме почленно. По-точно:

Нека $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = f(x)$ в интервал $\langle -a; a \rangle$.

Тогава за всяко $x \in (-a; a)$ (от отворения интервал) е изпълнено:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

$$\int f(x)\,dx = \int\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int a_n x^n\,dx\right) = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \dots$$

Последното равенство е изпълнено с точност до константа.

Ако $\int f(x)dx = F(x) + C$, C намираме като заместим с конкретна стойност на x, в случая е удобно $x=0$:

$F(x) + C = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \dots$ при $x=0$: $F(0) + C = 0 \rightarrow C = -F(0)$.

Зад. Пресметнете сумите:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^n$ б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+3}{2^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$.

Реш. Знаем, че $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ за $|x| < 1$.

С помощта на интегриране и диференциране ще решим задачата.

а) Редът има радиус на сходимост $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} = 1$.
При $x=1$ и $x=-1$, общият член не клони към 0 → разходящ.
⇒ Редът е сходящ за $x\in(-1;1)$ и разходящ иначе.
Ако $|x|\geq 1$, редът като разходящ няма сума. Считаме, че $|x|<1$.
От $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ / с интегриране получаваме множител $n+1$ в знаменателя
| с диференциране – множител в числител.
В условието има множител в числител ⇒ трябва да диференцираме:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

при $n=0$, събираемото е 0.

Разписваме $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1.x^0+2.x^1+3.x^2+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ – смяна на променливата по която сумираме.

Да забележим, че $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)x^n + x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n =$

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)' + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1+1-x}{(1-x)^2} = \frac{2-x}{(1-x)^2}.$$

Окончателно, търсената сума е $\frac{2-x}{(1-x)^2}$ при $|x|<1$.
(Проверка $x=0$: $2 = 2+3.0+4.0^2+\dots$).

б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n+3}{2^n}$ е сходящ числов ред (Даламбер).
За да се възползваме от свойствата на степенните редове, трябва да въведем променлива. Тук числото $(1/2)$ участва на n-та степен в n-тото събираемо. Ако заместим $1/2$ с x получаваме степенния ред
$\sum_{n=0}^{\infty}(4n+3)x^n$ с радиус на сходимост 1. $\frac{1}{2}\in(-1;1)$, т.е. диференцирания и интегрирания са легални.
В а) пресметнахме $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$.
Знаем също, че $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Тъй като редове можем да събираме почленно и да умножаваме с число, можем да правим техни линейни комбинации:

$(4n+3)x^n = (4n+4)x^n - x^n = 4\cdot(n+1)x^n + (-1)\cdot x^n.$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(4n+3)x^n = 4\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n + (-1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n = 4\cdot\frac{1}{(1-x)^2} + (-1)\cdot\frac{1}{1-x} =$

$= \frac{4-(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{3+x}{(1-x)^2}.$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n+3}{2^n} = \frac{3+x}{(1-x)^2}\Big|_{x=1/2} = \frac{3+1/2}{(1-1/2)^2} = \frac{7/2}{1/4} = 14.$

в) Нека разгледаме $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$. Радиусът на сходимост е 1.

$\Rightarrow$ Има функция $f(x)$ - сума на реда дефинирана в $(-1;1)$, т.че $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)} = f(x)$. Диференцирайки, ще съкратим знаменател:

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n(n+1)}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1}$. Сега второ диференциране няма да съкрати знаменателя.

Затова първо умножаваме почленно по x:

$xf(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. След първо диференциране пада $n+1$:

$(xf(x))' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ и след второ, пада и n:

$(xf(x))'' = \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} = x^{1-1}+x^{2-1}+x^{3-1}+\ldots = 1+x+x^2+\ldots = \frac{1}{1-x}.$

За да възстановим $f(x)$ трябва да интегрираме двукратно:

$(xf(x))' = \int(xf(x))''dx = \int\frac{dx}{1-x} = -\int\frac{d(1-x)}{1-x} = -\ln(1-x)+C.$

За да намерим C, ползваме че:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = (xf(x))' = -\ln(1-x)+C$ и след заместване $x=0$, получаваме $C=0$.

$\Rightarrow (xf(x))' = -\ln(1-x)$. Интегрираме още веднъж:

$$xf(x) = \int (xf(x))' dx = \int -\ln(1-x)\,dx = \int \ln(1-x)\,d(1-x) \overset{\text{по части}}{=}$$

$$(1-x)\ln(1-x) + \int \cancel{(1-x)} \cdot \frac{1}{\cancel{1-x}} \cdot (+1)\,dx + D = (1-x)\ln(1-x) + \int 1\,dx + D =$$

$$= x + (1-x)\ln(1-x) + D.$$

Отново заместваме $x=0 \Rightarrow D=0$.

Така намерихме, че $f(x) = \frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x} = 1 + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}$, за $|x|<1$.

При $x=0$, изразът вдясно да се разбира като граница при $x \to 0$.

Но нас ни интересува $x=1/2$:

Търсената сума е $f(1/2) = 1 + \frac{\cancel{1/2}\ln(1/2)}{\cancel{1/2}} = 1 + \ln(1/2) = 1 - \ln 2$.

г) I начин) Нека $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$.

Искаме да съкратим n^3 и да стигнем до $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, за целта трябва да се появят множители в знаменател, т.е. трябва да интегрираме.

Обаче $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ не съкращава множител n.

Затова първо делим на x! $\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^{n-1}$

$$\Rightarrow \int \frac{f(x)}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int n^3 x^{n-1} dx\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot n^2.$$

Така степента падна от n^3 на n^2. Още два пъти същото.

$$\frac{1}{x} \cdot \int \frac{f(x)}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} n^2 \Rightarrow \int \frac{1}{x}\left(\int \frac{f(x)}{x}dx\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \cdot n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n.$$

$$\frac{1}{x} \cdot \int \frac{1}{x}\left(\int \frac{f(x)}{x}dx\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$ и интегрираме за последен път:

$$\int \frac{1}{x} \cdot \left(\int \frac{1}{x} \cdot \left(\int \frac{f(x)}{x}dx\right)dx\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + \ldots = x(1+x+\ldots) = \frac{x}{1-x}.$$

За да извадим $f(x)$ изпод интегралите, трябва да се върнем наобратно. Диференциране, умножаване по x и пак... и пак....

През цялото време работим с рационални функции.

Сметките са дълги и досадни. Ще си ги спестим.

II начин) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Диференцираме:

сменяме сумационната променлива.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

Диференцираме пак:

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) x^n.$$

И трети път:

$$\frac{6}{(1-x)^4} = \left(\frac{2}{(1-x)^3}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1) x^n.$$

Да отбележим, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$; горните изрази важат за $|x|<1$.

Търсим линейна комбинация на четирите равенства, която да дава $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$. Нека означим коефициентите на тази линейна комбинация с A, B, C и D.

$$A\cdot\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1) x^n + B\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) x^n + C\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n + D\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n.$$

Достатъчно е да намерим A, B, C, D, т.че:

$$A(n+3)(n+2)(n+1) + B(n+2)(n+1) + C(n+1) + D = n^3 \text{ за всяко } n\in\mathbb{N}.$$

Но това са полиноми от трета степен. Може да разкрием скобите и да сравняваме съответните коефициенти.

От друга страна, ако полиноми от трета степен съвпадат за безброй много стойности, те са равни за всяка (комплексна) стойност на аргумента. Тук е удобно да заместим с числата $-1, -2, -3$:

$n=-1$: $\underline{D=-1}$ (A, B, C изчезват)

$n=-2$: $-C+D=-8 \Rightarrow \underline{C=7}$

$n=-3$: $2B-2C+D=-27$, $2B=-27+14+1=-12$, $B=-6$.

$n=0$: $6A+2B+C+D=0$, $6A=12-7+1=6$, $A=1$.

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n = \sum_{0}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1) x^n - 6\sum_{0}^{\infty} (n+2)(n+1) x^n + 7\sum_{0}^{\infty} (n+1) x^n - \sum_{0}^{\infty} x^n$$

и заместваме

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n = \frac{6}{(1-x)^4} - 6\cdot\frac{2}{(1-x)^3} + 7\cdot\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)} =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^4}\left[6 - 12(1-x) + 7(1-x)^2 - (1-x)^3\right] =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^4}\left[6 - 12 + 12x + 7 - 14x + 7x^2 - 1 + 3x - 3x^2 + x^3\right] =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^4}\left[x^3 + 4x^2 + x\right] = \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}.$$

В частност, при $x = 1/2$ получаваме:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} = \frac{1/2\,(1/4 + 4\cdot 1/2 + 1)}{(1-1/2)^4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{13}{4}\cdot 16 = 13.2 = 26.$$

Някога по дефиниция за сума на ред сметнахме

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}.$$

$$\sum_{0}^{\infty} n\cdot x^n = \sum_{0}^{\infty}(n+1)x^n - \sum_{0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

$$\Rightarrow \sum_{0}^{\infty} n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2.$$

Задачите досега бяха да се представи безкрайна сума като една функция (т.е. да се сумира реда).

Сега ще разгледаме обратното: функция да се представи като степенен ред (този ред се нарича ред на Тейлър, а в частния случай, когато редът е около точката 0 — ред на Маклорен).

~~Една от~~ Така например $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$, $|x| < 1$.

Една от ползите на такова представяне е, че всяка функция се изразява само с операциите събиране и умножение.

Сходимостта на подобен ред ни дава приблизителни стойности на функцията от степенния ред, сметнат до някое конкретно място.

Освен $\frac{1}{1-x}$, следните развития се извеждат на лекции:

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, важи за всяко $x \in \mathbb{R}$.

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, за всяко $x \in \mathbb{R}$.

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$, $x \in (-1;1]$.

$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $x \in (-1;1)$ поне
заняком α се включват
и границата.

Тук $\alpha \in \mathbb{R}$ е реално и биномните коефициенти се дефинират така:

$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(k-1))}{k(k-1)\dots 2.1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ както горе, така и долу има по точно k множителя.

<u>k е неотрицателно цяло число.</u>

Да отбележим, че при заместване на x с друг израз в тези развития, те продължават да са валидни!

Така например заместваме $(-x)$ на мястото на x в $\ln(1+x)$:

$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}.(-1)^n.x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n}$ за $-x \in (-1;1]$,
т.е. $x \in [-1;1)$.

Да пресметнем биномния коефициент $\binom{-1}{n}$:

$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{n!} = \frac{(-1)^n.n!}{n!} = (-1)^n$.

$\Rightarrow (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$.

Да заменим x с $-x$:

$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n}.x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, така че

геометричната прогресия е частен случай на развитието $(1+x)^\alpha$.

<u>Задача</u>. Развийте в ред на Маклорен и намерете областта на сходимост!

а) $\ln(3x^2+4x+1)$ б) $\dfrac{1}{\sqrt{9+x^2}}$ в) $\ln\left(\dfrac{3x+1}{2+x}\right)$ г) $\dfrac{x^3}{x^2-2x-8}$

д) $\frac{1}{4}\left(\ln(1+x)+\ln(1-x)\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$ е) $\operatorname{arctg}x$ ж) $2x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)$

з) $\int_0^x \ln(t+\sqrt{1+t^2})\,dt$.

<u>Реш.</u> а) $\ln(3x^2+4x+1)=\ln\left((3x+1)(x+1)\right)=\ln(1+x)+\ln(1+3x)$.

$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$, $x\in(-1;1]$. За втория ред заместваме x с $3x$:

$\ln(1+3x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(3x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^n x^n}{n}$, $3x\in(-1;1]$, $x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$.

Търсения ред получаваме с почленно събиране:

$$\ln(3x^2+4x+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\frac{(-1)^{n-1}3^n x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(3^n+1)\cdot x^n$$

като представянето е валидно, където са валидни всяко от двете събираеми, т.е. в сечението на двата интервала, т.е. за $x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$

б) Преобразуваме за да получим нещо познато:

$$\frac{1}{\sqrt{9+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{9(1+\frac{x^2}{9})}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{x}{3})^2}}=\frac{1}{3}\cdot\left(1+\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)^{-1/2}.$$

Последното е частен случай на формулата $(1+x)^{\alpha}$ за $\alpha=-\frac{1}{2}$.

Да сметнем биномните коефициенти $\binom{-1/2}{n}$:

$$\binom{-1/2}{n}=\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}=\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}$$

$$=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2\cdot1)(2\cdot2)\dots(2(n-1))(2n)}=(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{9+x^2}}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\cdot\left(\frac{x^2}{9}\right)^n=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{9^n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{9}\right)^n\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot x^{2n}$$, като представянето важи за $\left|\frac{x}{3}\right|<1$, $x\in(-3;3)$.

в) $\ln\left(\frac{3x+1}{2+x}\right) = \ln(1+3x) - \ln(2+x) = \ln(1+3x) - \ln\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) =$
$= \ln(1+3x) - \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - \ln 2$ и аналогично на а) довършете сами

г) Разпендане знаменателя: Представяне като сума от елементарни дроби:

$$\frac{1}{x^2-2x-8} = \frac{1}{(x-4)(x+2)} = \frac{4-x+x+2}{6} \cdot \frac{1}{(x-4)(x+2)} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{4-x}{(x-4)(x+2)} + \frac{x+2}{(x-4)(x+2)}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+2}\right)$$

Формулите за геометрична прогресия са от вида $\frac{1}{1-\ldots}$

преобразуване до този вид:

$$\frac{1}{x^2-2x-8} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{4-x} - \frac{1}{2+x}\right) = \frac{-1}{6}\left(\frac{1}{4(1-\frac{x}{4})} + \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})}\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{4}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})}\right) = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{4}} + \frac{1}{1-(-\frac{x}{2})}\right)$$

$$= -\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n\right) = -\frac{1}{12}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2\cdot 4^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\cdot 4^n} + \frac{(-1)^n}{2^n}\right)\cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1+2\cdot(-2)^n}{24\cdot 4^n}\, x^n.$$

Представянията $\frac{1}{1-\frac{x}{4}}$ и $\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})}$ важат съответно за $\left|\frac{x}{4}\right|<1$ и $\left|-\frac{x}{2}\right|<1$. Сечението дава $|x|<2$.

Окончателно, $\frac{x^3}{x^2-2x-8} = x^3\cdot\frac{1}{x^2-2x-8} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1+2(-2)^n}{24\cdot 4^n}\, x^{n+3}$ за $|x|<2$.

д) Когато не се вижда какво да правим, диференцираме.

Нека $f(x) = \frac{1}{4}[\ln(1+x) - \ln(1-x)] + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

$$f'(x) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1\,(-1)}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1-x+1+x}{1-x^2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+x^2+1-x^2}{1-x^4}\right) = \frac{1}{1-x^4} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(x^4)^n$$ за $|x^4|<1$, т.е. за $x\in(-1;1)$.

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(\sum_{n=0} x^{4n}\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + C.$

При $x=0$, получаваме $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

Къде важи представянето?

При диференциране и интегриране радиусът на сходимост се запазва. При интегриране може краищата да се появят.

При диференциране може краищата да изчезнат.

Тук $f(x)$ не е дефинирана в $x=-1$ и в $x=1$.

$\Rightarrow$ Представянето важи за $x \in (-1;1)$.

в) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$

$\Rightarrow f(x) = \int f'(x)\,dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$

При $x=0$, получаваме $C=0$.

Геометричната прогресия $\frac{1}{1-(-x^2)}$ развиваме за $x^2 \in (-1;1)$, т.е. за $x \in (-1;1)$

При интегриране може краища да се появят. А кога се появяват?

Правило: $\sum a_n R^n$ е сходящ числов ред за степенния ред $\sum a_n x^n$ на функцията $f(x)$. Ако още f е непрекъсната за $x=R$, то развитието важи и при $x=R$.

В случая при $x=1$, $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ е сходящ по Лайбниц и arctg е непрекъсната за $x=1$. $\Rightarrow$ Развитието важи за $x=1$.

Аналогично важи и за $x=-1$.

Така, $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, \quad x \in [-1;1]$.

В частност за $x=1$, получаваме следната формула за π:

$\pi/4 = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$, която носи името на Лайбниц.

Така можем да сметнем π: $\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right)$ спираме на достатъчно голямо n.

4) $2x\,\mathrm{arctg}\,x - \ln(1+x^2) = f(x)$. Диференцираме:

$$f'(x) = 2.\mathrm{arctg}\,x + 2x.\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.2x = 2.\mathrm{arctg}\,x$$

$$= 2.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{за } x \in [-1;1].$$

Интегрираме, краищата не могат да изчезнат $\Rightarrow$ Областта е $[-1;1]$.

$$f(x) = C + \int 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.2.x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} *$$

$x=0 \Rightarrow C=0$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}, \quad x \in [-1;1].$$

3) $f(x) = \int_0^x \ln(t+\sqrt{1+t^2})\,dt$. Теоремата на Лайбниц-Нютон дава $f'(x)$:

$f'(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$. Продължаваме да диференцираме:

$$f''(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}.\left(1+\frac{1.2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}.\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n}(x^2)^n = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}.x^{2n}$$

От $f'(0) = \ln 1 = 0 = f(0)$ получаваме, че константите при интегрирането са нули.

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}.\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.x^{2n+2}.$$

Представянето важи поне за $x \in (-1;1)$.

Евентуално и за краищата.

Причината поради която константите винаги бяха 0 в разглежданите примери, е че $f(0)=0$ за разгледаните функции. Това разбира се не е задължително.

Пр. $f(x) = \mathrm{arctg}\,\frac{2-2x}{1+4x}$, $f(0) = \mathrm{arctg}\,2$. Развийте сами.

Накрая ще споменем още едно приложение на развитие в ред.
Както е известно, не всички функции могат да се интегрират в познатите ни от училище функции.
За да сметнем подобни интеграли, може да развием подинтегралната функция в ред и да интегрираме почленно.
Например $\int \frac{\sin t}{t} dt$ не се изразява в познатите функции.

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x \frac{\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right)}{t} dt = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots\right) dt$$

$$= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}\right) dt \underset{\text{е размяна на } \Sigma \text{ и } \int}{\overset{\text{почленното интегриране}}{=}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} \Bigg|_0^x \underset{\text{всяко събираемо е } 0}{\overset{\text{в долния край}}{=}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} - \dots$$

Тъй като развитието на $\sin$ важи за всяко $x \in \mathbb{R}$, то

и $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} - \dots$ важи за всяко x.

Събираемите много бързо клонят към 0, така че взимайки първите няколко члена получаваме много добро приближение за безкрайната сума.