Деф. Нека V е ЛП над F и $a_1, a_2, \dots, a_n$ е базис на V. Нека $v = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$.
Тогава v има координати $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ спрямо базиса $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Пр: $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

$v = (3,4,5) \Rightarrow$ координатите са $3,4,5$.

Деф: Нека T е система вектори. S наричаме МЛНЗП (максимална линейно независима подсистема на T, ако: $S \subseteq T$

1) S е линейно независима
2) $(\forall t \in T \setminus S)[S \cup \{t\}$ е линейно зависима$]$

Детерминанти от ред 2 и 3

$\det : \mathcal{M}_n(F) \to \mathbb{F}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Правило на Саурос

① Нека $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ - обр. стандартния базис на $\mathbb{V}$. Докажете, че $a_1=e_1+2e_2+2e_3$; $a_2=-2e_1-e_2+e_3$; $a_3=3e_1+e_2-2e_3$ a_1, a_2, a_3 също образуват базис на $\mathbb{V}$. Намерете координатите на $u=2e_1+2e_2+e_3$ спрямо a_1, a_2, a_3 и координатите на $v=2a_1+2a_2+a_3$ спрямо e_1, e_2, e_3.

Решение: Щом e_1, e_2, e_3 обр. базис, то $\dim\mathbb{V}=3$.

Така, ако a_1, a_2, a_3 са ЛНЗ, то те ще са базис.

Гн с детерминанта

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \;a_1 \quad a_2 \quad a_3 \end{array} = 1.(-1).(-2)+3.2.1+(-2).1.2-3.(-1).2-1.1.1-2.(-2)^2=$$

$$=2+\cancel{6}-4+6-1-\cancel{8}=1\neq 0$$

Щом $\det\neq 0 \Rightarrow a_1, a_2, a_3$ са ЛНЗ $\Rightarrow$ са базис на $\mathbb{V}$

II н. Да док. че $a_1 a_2 a_3$ са ЛЗ. Тогава

$\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 : (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$ и

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \lambda_3 a_3 = \overline{0}_V$$

$$\lambda_1 (e_1 + 2e_2 + 2e_3) + \lambda_2(-2e_1 - e_2 + e_3) + \lambda_3 (3e_1 + e_2 - 2e_3) = \overline{0}_V$$

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_1 \cdot 2e_2 + \lambda_1 \cdot 2e_3 - \lambda_2 \cdot 2e_1 - \lambda_2 \cdot e_2 + \lambda_2 \cdot e_3 + \lambda_3 \cdot 3e_1 + \lambda_3 \cdot e_2 - \lambda_3 \cdot 2e_3 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

$$\left| \begin{aligned} &(\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3)\, e_1 = 0 \cdot e_1 \\ &(2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3)\, e_2 = 0 \cdot e_2 \\ &(2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)\, e_3 = 0 \cdot e_1 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$-\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 6 \\ \hline 0 & 3 & -5 \end{array} \qquad -\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 6 \\ \hline 0 & 5 & -8 \end{array} \qquad +\begin{array}{ccc} 0 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{array} \qquad +\begin{array}{ccc} 0 & 6 & -10 \\ 3 & -6 & 9 \\ \hline 3 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad -\begin{array}{ccc} 0 & 15 & -24 \\ 0 & 15 & -25 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\lambda_3 = 0 \Rightarrow 3\lambda_2 = 5\lambda_3$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{5}{3}\cdot\lambda_3 = \frac{5}{3}\cdot 0 = 0 \quad \text{и} \quad 3\lambda_1 = \lambda_3 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$\Longrightarrow a_1, a_2, a_3$ са ЛНЗ, защото $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$

Сега трябва да изразим e_1, e_2, e_3 чрез a_1, a_2, a_3

$$\begin{cases} 1.e_1 + 2e_2 + 2e_3 = a_1 \\ -2e_1 - e_2 + e_3 = a_2 \\ 3e_1 + e_2 - 2e_3 = a_3 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & a_1 \\ -2 & -1 & 1 & a_2 \\ 3 & 1 & -2 & a_3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & a_1 \\ 0 & 3 & 5 & 2a_1 + a_2 \\ 0 & -5 & -8 & a_3 - 3a_1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -4 & -a_1 - 2a_2 \\ 0 & 3 & 5 & 2a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 + 5a_2 + 3a_3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a_1 + 6a_2 + 4a_3 \\ 0 & 1 & 0 & -a_1 - 8a_2 - 5a_3 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 + 5a_2 + 3a_3 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{aligned} e_1 &= a_1 + 6a_2 + 4a_3 \\ e_2 &= -a_1 - 8a_2 - 5a_3 \\ e_3 &= a_1 + 5a_2 + 3a_3 \end{aligned}$$

$u = 2e_1 + 2e_2 + e_3 =$

$$= 2\underbrace{(a_1 + 6a_2 + 4a_3)}_{e_1} + 2\underbrace{(-a_1 - 8a_2 - 5a_3)}_{e_2} + \underbrace{(a_1 + 5a_2 + 3a_3)}_{e_3} =$$

$= a_1 + a_2 + a_3 \Rightarrow$ коорд. на u спрямо a_1, a_2, a_3 са 1, 1, 1.

Сега искаме да изразим $v = 2a_1 + 2a_2 + a_3$ чрез e_1, e_2, e_3

$v = 2(e_1 + 2e_2 + 2e_3) + 2(-2e_1 - e_2 + e_3) + (3e_1 + e_2 - 2e_3) =$

$= e_1 + 3e_2 + 4e_3 \Rightarrow$ коорд. на v спрямо e_1, e_2, e_3 са 1, 3, 4

Домашна общуото условие $a_1 = 2e_1 + 2e_2 - e_3$,
$a_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3$; $a_3 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3$,
u, v - същите.

(2) Да се докаже, че системата вектори е ЛНЗ и да се допълни до базис на $\mathbb{F}^4$.

$a_1 = (-1, 2, 3, -2)$; $a_2 = (2, 1, -4, -3)$; $a_3 = (1, 3, -2, -3)$

Решение: Трябва да док. че a_1, a_2, a_3 са ЛНЗ.
Да доп. че $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq (0,0,0) : \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = \vec{0}_V$.

$$\lambda_1(-1, 2, 3, -2) + \lambda_2(2, 1, -4, -3) + \lambda_3(1, 3, -2, -3) = (0,0,0,0)$$

$$\left|\begin{array}{l} -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + -4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{array}\right.$$

Можем направо да подредим a_1, a_2, a_3 по редове и да дърпаме

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 2 & -7 \\ 0 & 5 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 13 & 0 & 13 \\ 0 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim$$

ако получим нулев ред, то те са ЛЗ

$$\sim \begin{bmatrix} -3 & 104 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & -10 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Не е нулев ред и повече няма накъде да дърпаме $\Rightarrow$ са ЛНЗ. Сега искаме да го допълним до базис на $\mathbb{F}^4$. Добавяме $a_4 = (0, 1, 0, 0)$

$$\begin{bmatrix} -3 & 104 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & -10 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Очевидно $a_4 \notin l(a_1, a_2, a_3)$

$\Rightarrow a_1, a_2, a_3, a_4$ обр. базис на $\mathbb{F}^4$.

(3) За кои стойности на параметъра λ, векторът $v=(2,-3,\lambda)$ е линейна комбинация на векторите $a_1=(1,2,-1)$; $a_2=(2,3,1)$, $a_3=(1,0,5)$?

<u>Решение:</u> Питаме се за кои λ $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = v$$

$$\lambda_1(1,2,-1) + \lambda_2(2,3,1) + \lambda_3(1,0,5) = (2,-3,\lambda)$$

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 0\cdot\lambda_3 = -3 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = \lambda \end{array}\right.$$

Доведохме задачата до: За кои стойности на λ системата е съвместима.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 5 & \lambda \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 3 & 6 & \lambda+2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-19 \end{array}\right]$$

Тази система е съвместима за $\lambda = 19$.

(4) В четиримерно ЛП са дадени векторите

$v_1 = (-11, 6, 2, 7)$; $v_3 = (\mu - 1, 1, 1, 2)$; $v = (-2, \lambda, 3, 3)$

$v_2 = (1, 5, 4, -2)$; $v_4 = (1, 1, 1, -1)$;

а) За кои стойности на λ и μ векторът v може да се представи като ЛК на v_1, v_2, v_3, v_4 по точно един начин

б) – // – v се представя по повече от един начин и да се намерят две такива представяния

в) – // – не може да се представи като ЛК на v_1, v_2, v_3, v_4.

Решение: Нека $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 +$
$+ \lambda_4 v_4 = v$

$\lambda_1(-11,6,2,7) + \lambda_2(1,5,4,-2) + \lambda_3(\mu-1,1,1,2) + \lambda_4(1,1,1,-1) =$
$= (-2, \lambda, 3, 3)$

$$\begin{cases} -11\lambda_1 + \lambda_2 + (\mu-1)\lambda_3 + \lambda_4 = -2 \\ 6\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \lambda \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 3 \\ 7\lambda_1 + -2\lambda_2 + 2\lambda_3 + -\lambda_4 = 3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -11 & 1 & \mu-1 & 1 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & -2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & -1 & \mu+2 & 0 & 1 \\ 13 & 3 & 3 & 0 & \lambda+3 \\ 9 & 2 & 3 & 0 & 6 \\ 7 & -2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2\mu+5 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 2\lambda-12 \\ 9 & 2 & 3 & 0 & 6 \\ 16 & 0 & 5 & -1 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \mu+1 & 0 & \lambda-2 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 2\lambda-12 \\ 0 & 1 & -12 & 0 & 9\lambda-51 \\ 0 & 0 & 43 & 1 & 183-32\lambda \end{array}\right]$$

1) По точно един начин $\Leftrightarrow$ системата да е опр.

$\mu+1 \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq -1$

2) По повече от един начин $\Leftrightarrow$ с-мата е неопр.

$\mu = -1$ и $\lambda = 2$

Да намерим две такива заместваме
λ с 2 и μ с -1 и получаваме

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ -\underline{1} & 0 & -3 & 0 & -8 \\ 0 & \underline{1} & -12 & 0 & -33 \\ 0 & 0 & 43 & \underline{1} & 119 \end{array}\right]$$

Нека $x_3 = p$

$x_4 = 119 - 43p$

$x_2 = -33 + 12p$

$x_1 = 8 - 3p$

1) За $p = 0$

$\underline{x_1 = 8}$, $\underline{x_2 = -33}$, $\underline{x_3 = 0}$, $\underline{x_4 = 119}$

2) За $p = 1$ $\underline{x_1 = 5}$; $\underline{x_2 = -21}$; $\underline{x_3 = 1}$; $\underline{x_4 = 76}$

3) Не може да се представи ~~со~~ несъвместима с-ма

$\mu = -1$ и $\lambda \neq 2$

⑤ В ЛП $\mathbb{V}$ с базис e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 са дадени векторите

$$v_1 = -3e_1 - 3e_2 + e_3 - e_4 - e_5$$
$$v_2 = -7e_1 - e_2 - 2e_3 + 3e_4 + \underline{e_5}$$
$$v_3 = 3e_1 - 2e_2 + 2e_3 - 2e_4 - 3e_5$$
$$v_4 = -2e_1 + 2e_2 - e_3 \qquad + 4e_5$$

Обърках усл в записа -вините папката

Да се намерят:

а) Ранг на $v_1, \dots, v_4$

б) МЛНЗП на $v_1, \dots, v_4$

в) Да се допълни до базис на $\mathbb{V}$ с-мата $v_1, \dots, v_4$

__Деф:__ $\mathbb{V}$ е ЛП над $\mathbb{F}$ и $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{V}$

$$r(a_1, \dots, a_n) = \dim l(a_1, \dots, a_n)$$