Марковски вериги

Нека $E_1, E_2, ..., E_n$ са възможните несъвместими събития-изходи при всеки от опитите $T_1, T_2, ..., T_m$, а E_j^k означава, че при опита T_k се появява събитието E_j.

Ако събитията-изходи $E_1, E_2, ..., E_n$ наречем "състояния на една система", а опитите T_k се извършват в определени моменти от времето $t_k (k = 1, 2, ..., m)$, тогава системата преминава от едно състояние в друго в дискретни моменти.

Ще казваме, че състоянията на системата $E_1, E_2, ..., E_n$ образуват **верига на Марков** с краен брой състояния, ако е изпълнено:

$$\mathbf{P}(E_{jk}^k | E_{j_1}^1 E_{j_2}^2 ... E_{j_{k-1}}^{k-1}) = \mathbf{P}(E_{jk}^k | E_{j_{k-1}}^{k-1}),$$

където всяко от целите числа $j_1, j_2, ..., j_k$ е между числата от 1 до n. Веригата се нарича **еднородна**, ако:

$$\mathbf{P}(E_j^{k+1} | E_i^k) = p_{ij}, \ k = 1, 2, ..., m-1,$$

т.е. тази вероятност е една и съща за всеки от моментите $t_k (k = 1, 2, ..., m)$. Вероятността p_{ij} се нарича **вероятност на прехода** от състояние E_i в състояние E_j.

Вероятностите на преход $p_{ij}, \ i, j = 1, 2, ..., n$, образуват матрица, която се нарича **матрица на прехода**:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Тук $p_{i1}, p_{i2}, ..., p_{in}$ (числата от i-тия ред на P, $i = 1, 2, ..., n$) са вероятностите, че системата, която в даден момент t_k се намира в състояние E_i, в следващия момент t_{k+1} да се намира съответно в състояние $E_1, E_2, ..., E_n$, при което $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Матрицата на преход P е стохастична, т.е. тя е: **1)** квадратна; **2)** с неотрицателни елементи и **3)** сумата от елементите на всеки ред е равна на единица.

Матрицата на преход P заедно с вероятностите $p_1, p_2, ..., p_n$ системата да е в състояние съответно $E_1, E_2, ..., E_n$ в началния момент t_0 (при началния опит) напълно определя веригата на Марков.

Вероятности на преход за m стъпки. Ергодичност. Стационарни разпределения.

Всеки преход на системата от едно състояние в даден момент в друго състояние в следващия момент се нарича **стъпка** на марковската верига. Ако се разгледат m последователни стъпки на веригата ($m > 1$), представляват интерес вероятностите на преход $p_{ij}^{(m)}$ - системата от състояние E_i в началния момент да премине след m последователни стъпки в състояние E_j. Тези вероятности за всички възможни крайни и начални състояния на системата се записват в следната матрица:

$$P^{(m)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(m)} & p_{12}^{(m)} & \cdots & p_{1n}^{(m)} \\ p_{21}^{(m)} & p_{22}^{(m)} & \cdots & p_{2n}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}^{(m)} & p_{n2}^{(m)} & \cdots & p_{nn}^{(m)} \end{pmatrix}$$

Нека $p^{(0)} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ е векторът на началните вероятности, а $p^{(m)}$ - векторът, чийто координати са вероятностите на преход във всяко от състоянията след m последователни стъпки. Доказва се, че:

$$p^{(m)} = p^{(0)}.P^{(m)} = p^{(0)}.P^m \ ,$$

където P^m е m-тата степен на матрицата P.

Стационарно разпределение на марковска верига наричаме вектора $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$, такъв че $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$ и $\pi = \pi.P$.

Една марковска верига се нарича **ергодична**, ако $\lim\limits_{m \to \infty} p_{ij}^{(m)}$ съществува за всяко i,j. Тогава

$$\lim_{m \to \infty} p_{ij}^{(m)} = \pi_j,$$

т.е. вероятността системата да попадне в състояние E_j след достатъчен брой стъпки не зависи от началното ѝ състояние.

Ако в една марковска верига векторът на началните вероятности $p^{(0)}$ съвпада с вектора π, за всяко m:

$$p^{(m)} = p^{(0)} = \pi.$$

веригата на Марков се нарича **стационарна**.

<u>**Видове състояния и множества от състояния**</u>

Състоянието E_k се нарича **достижимо** от състояние E_j, ако съществува такова $m \geq 1$, че $p_{jk}^{(m)} > 0$.

Състоянията E_i и E_j се наричат **свързани (съобщаващи се)**, ако те са достижими едно от друго. Пишем $E_i \leftrightarrow E_j$.

Множеството от състояние C се нарича **затворено**, ако от кое да е състояние от C системата не може да попадне в никое състояние извън C.

Множеството C е затворено тогава и само тогава, когато $p_{jk} = 0$ за всички j и k, за които E_j е от C, а E_k не е от C.

Всяко затворено множество от състояния определя верига на Марков, която може да се изучава независимо от другите състояния.

Верига на Марков се нарича **неразложима**, ако в нея единственото затворено множество е това от всички състояния.

Едно състояние се нарича поглъщащо, ако то само́ образува затворено множество. Състоянието E_k е поглъщащо, ако $p_{kk} = 1$.

Нека $f_j^{(m)}$ е вероятността системата отново да се върне в състояние E_j за пръв път след m стъпки. $f_j^{(m)}$ се определя от следната рекурентна зависимост:

$$f_j^{(1)} = p_{jj} \quad f_j^{(m)} = p_{jj}^{(m)} - f_j^{(1)} p_{jj}^{(m-1)} - \ldots - f_j^{(m-1)} p_{jj}$$

Тогава $f_j = \sum_{s=1}^{\infty} f_j^{(s)}$ е вероятността, ако тръгне от състояние E_j, системата някога да се върне отново в E_j. Състоянието E_j се нарича **възвратно**, ако $f_j = 1$, и **невъзвратно**, ако $f_j < 1$.

Периодът $d(i)$ на състояние E_i е НОД на множеството от възможни периоди на връщане в E_i. Ако $d(i) = 1$, състоянието е **апериодично**, а ако множеството е празното, то $d(i) = \infty$.

Твърдение: ако една марковска верига е неразложима и има едно апериодично състояние, тогава всички състояния са **апериодични**.

Една *марковска верига* е ***апериодична***, ако всичките ѝ състояния са такива.

Състоянието E_j се нарича **ергодично**, ако е апериодично и възвратно.

Твърдение: *Всяка неразложима и апериодична марковска верига е* ***ергодична.***