ДИФЕРЕНЦИАЛНА ГЕОМЕТРИЯ
ЗАДАЧИ ЗА КРИВИ

1 зад. Спрямо ОКС $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ в E^3 е дадена линията

$$c: \begin{cases} x^1 = 3q \\ x^2 = 3q^2, \; q > 0 \, . \\ x^3 = 2q^3 \end{cases}$$

a) Намерете векторните инварианти на ***c***;
b) Докажете, че ***c*** е обща винтова линия и намерете уравнения на цилиндричната повърхнина, която я съдържа;
c) От всяка точка P на линията c върху допирателната, по посока противоположна на допирателния вектор $\vec{t}$ е нанесена отсечка с дължина $d = 3q.(2q^2+1)$ до точка Q. Когато точката P описва линията ***c***, точката Q описва линията $\bar{c}$. Намерете бинормалния вектор $\bar{b}$ и торзията $\bar{\tau}$ на $\bar{c}$;
d) Намерете уравнения на нормалната равнина и на главната нормала в точката $P_0(3,3,2)$ от линията c.

2 зад. Спрямо ОКС $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ в E^3 е дадена линията

$$c: \begin{cases} x^1 = \cos\alpha . \cos q & q > 0 \\ x^2 = \cos\alpha . \sin q, & \alpha = const. \\ x^3 = \sin\alpha . q & \alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

.

a) Намерете естествените уравнения на линията c;
b) Намерете уравнения на геометричното място $\bar{c}$ на центровете на кривина на линията c. Каква линия е $\bar{c}$?
c) Намерете уравнения на оскулачната равнина и допирателната в точката $P_0 \in c$, получена за $q_0 = \frac{\pi}{4}$.

3 зад. Нека c: $x = x(s)$, $x \in C^3(I)$ е линия, зададена спрямо естествения си параметър. Линията $\bar{c}$: $\bar{x} = \int \vec{b}(s)ds$, където $\vec{b}(s)$ е бинормалният вектор на линията c. Да се изразят векторните и скаларните инварианти на $\bar{c}$ чрез тези на c.

4 зад. Спрямо ОКС $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ в E_3 е дадена линия $\boldsymbol{\gamma}$ с уравнения:

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = 2q \\ x^2 = \ln q, \; q > 0. \\ x^3 = q^2 \end{cases}$$

a) Намерете уравненията на нормалната равнина и бинормалата в точка P_0 (2, 0, 1) от кривата γ.
b) Докажете, че γ е обща винтова линия и намерете уравнения на цилиндричната повърхнина, която я съдържа;
c) От всяка точка P на линията γ върху бинормалата, по посока **противоположна** на бинормалния вектор $\vec{b}$ е нанесена отсечка с дължина $d = 2q^2 + 1$ до точка Q. Когато точката P описва линията γ, точката Q описва линията $\bar{\gamma}$. Намерете бинормалния вектор $\bar{b}$ и торзията $\bar{\tau}$ на $\bar{\gamma}$.

5 зад. Спрямо ОКС $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ в E_3 е дадена линията $\boldsymbol{\gamma}$ с уравнения:

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = e^q \cos q \\ x^2 = e^q \sin q\,, \quad q > 0. \\ x^3 = 0 \end{cases}$$

От всяка точка P на γ по бинормалата в положителна посока е нанесена отсечка $P\bar{P}$ с дължина $d = \frac{1}{2\sqrt{2}\varkappa}$ ($\varkappa(q)$ е кривината в точка от γ). Когато P описва линията γ, $\bar{P}$ описва линия $\bar{\gamma}$.

a) Намерете координатни параметрични уравнения на линията $\bar{\gamma}$;
b) Да се намерят естествени уравнения на $\bar{\gamma}$ и да се докаже, че тя е обща винтова линия.

6 зад. Дадена е правилна линия $c: x = x(s),\ x \in C^3(I)$ с постоянна кривина и ненулева торзия. Нека $\overline{c}$ е геометричното място на центровете на кривина на линията c.

a) Да се изразят векторните и скаларните инварианти на $\overline{c}$ чрез тези на c. Да се докаже, че $\overline{\varkappa} = const.$
b) Да се намери геометричното място на центровете на кривина на линията $\overline{c}$.

7 зад. Спрямо ОКС $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ в E^3 е дадена кривата линия

$$c: \begin{cases} x^1 = ch\, q \\ x^2 = sh\, q\ ,\ q \geq 0. \\ x^3 = \ \ q \end{cases}$$

a) Да се намерят скаларните и векторните инварианти на $\boldsymbol{c}$ и да се докаже, че тя е обща винтова линия;
b) Да се намерят уравнения на оскулачната равнина и главната нормала в точката $P_0(1, 0, 0)$ на линията $\boldsymbol{c}$;
c) От всяка точка P на линията c върху бинормалата, по посока на бинормалния вектор $\vec{b}$ е нанесена отсечка с дължина $\sqrt{2}q.ch\, q$ до точка Q. Когато точката P описва кривата $\boldsymbol{c}$, точката Q описва кривата $\bar{c}$. Да се намерят уравнения на кривата $\bar{c}$. Да се докаже, че $\bar{c}$ е равнинна и да се намери равнината, в която лежи.

8 зад. Спрямо ОКС $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ в E^3 е дадена правилната крива

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = \ ch\, q \\ x^2 = 2sh\, q, q \in \mathbb{R}. \\ x^3 = \ \ e^q \end{cases}$$

a) Да се намерят бинормалният вектор и торзията в произволна точка на кривата;
b) Да се докаже, че кривата е равинна и да се намери общо уравнение на равнината, която я съдържа.

9 зад. Спрямо ОКС $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ в E^3 е дадена крива линия $\boldsymbol{\gamma}$ с уравнения:

$$\gamma: \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}q^2 \\ x^2 = \frac{1}{6}q^3 \quad q > 0. \\ x^3 = \ q \end{cases}$$

a) Да се намерят скаларните и векторните инварианти на γ;

b) Да се докаже, че γ е обща витлова линия. Да се определи постоянното направление, сключващо постоянен ъгъл с допирателния вектор в точките на γ и да се намери този ъгъл;

c) От всяка точка P на кривата γ по главната нормала е нанесена отсечка $P\bar{P}$ с дължина $d = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$ ($\varkappa(q)$е кривината в точка от γ). Когато P описва кривата γ, $\bar{P}$ описва крива $\bar{\gamma}$. Докажете, че $\bar{\gamma}$ е права линия.

10 зад. Спрямо ОКС $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ в E^3 е дадена кривата линия

$$c: \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}q^2 \\ x^2 = \frac{1}{6}q^3 \quad q > 0. \\ x^3 = \quad q \end{cases}$$

а) Да се намерят скаларните и векторните инварианти на $\boldsymbol{c}$ и да се докаже, че тя е обща винтова линия;

б) Да се намерят уравнения на ректифициращата равнина и бинормалата в точката $P(2, \frac{4}{3}, 2)$ на линията $\boldsymbol{c}$;

в) От всяка точка P на линията c върху допирателната, по посока противоположна на допирателния вектор $\vec{t}$ е нанесена отсечка с дължина $\frac{1}{2}(2+q^2)q$ до точка Q. Когато точката P описва кривата $\boldsymbol{c}$, точката Q описва кривата $\bar{c}$. Да се намерят уравнения на кривата $\bar{c}$. Да се докаже, че $\bar{c}$ е равнинна и да се намери равнината, в която лежи.

11 зад. Нека $c: x = x(s),\ x \in C^3(I)$ е крива линия, зададена спрямо естествения си параметър. Кривата $\bar{c} = \int \vec{b}(s)ds$, където $\vec{b}(s)$ е бинормалният вектор на кривата c, се нарича придружаваща крива на кривата c.

a) Да се изразят векторните и скаларните инварианти на $\bar{c}$ чрез тези на c;

b) Да се намерят координатни параметрични уравнения, кривина и торзия на кривата $\bar{c}$, ако

$$c: \begin{cases} x^1 = a(q - sin\, q) \\ x^2 = a(1 - cos\, q) \\ x^3 = 4a.cos\frac{q}{2} \end{cases}, q \in (0;\ \pi), a = const., a > 0.$$

12 зад. Оскулачните равнини на трикратно гладка правилна крива са успоредни на дадена (фиксирана) права. Да се докаже, че кривата е равнинна.

13 зад. Оскулачните равнини на трикратно гладка правилна крива минават през фиксирана точка. Докажете, че кривата е равнинна.

14 зад. Допирателните на трикратно гладка крива минават през фиксирана точка. Докажете, че кривата е права линия.

15 зад. Нека $c: x = x(s),\ x \in C^2(I)$ е правилна крива линия, зададена спрямо естествения си параметър с торзия $\tau \equiv 0$ и кривина $\kappa = const. > 0$. Докажете, че линията c лежи върху окръжност с радиус $R = \frac{1}{\kappa}$.

16 зад. Главните нормали на трикратно гладка правилна крива минават през фиксирана точка. Докажете, че кривата е окръжност (или дъга от окръжност).

17 зад. Нека $c\colon x = x(s),\ x \in C^2(I)$ е правилна пространствена крива линия, зададена спрямо естествения си параметър. Кривата $\overline{c}\colon \overline{x} = x(s) + \int \vec{b}(s)ds$, където $\vec{b}(s)$ е бинормалният вектор на линията c, се нарича спрегната крива на кривата c. Ако $\overline{c}$ е трикратно гладка правилна линия, да се изразят скаларните и векторните инварианти на $\overline{c}$ чрез тези на c в съответните точки на двете криви.

18 зад. (Криви на Бертран)
Две трикратно гладки правилни криви c и $\overline{c}$ се наричат криви на Бертран, ако в съответните точки нормалите на c са нормали и на $\overline{c}$.

Да се докаже, че:
a) Разстоянието между съответните точки на c и $\overline{c}$ е постоянно;
b) Ъгълът между допирателните в съответните точки на c и $\overline{c}$ е постоянен;
c) Съществува линейна връзка между кривината и торзията на c и между кривината и торзията на $\overline{c}$