Текстовете са от: Т. Генчев, Обикновени диференциални уравнения, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 1991 г.

ЛИНЕЙНИ ХОМОГЕННИ УРАВНЕНИЯ

Да разгледаме линейното диференциално уравнение

$$L(x) \equiv a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = f(t), \tag{1}$$

където коефициентите a_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, и f са комплексни функции на реалната променлива t, дефинирани и непрекъснати в интервала $(\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}$. (Дали (α, β) е отворен или затворен, краен или безкраен, е без значение.) По-нататък ще разглеждаме (1) при основното предположение, че коефициентът $a_0 = 1$, без да споменаваме това изрично. Числото n се нарича ред на диференциалното уравнение.

Основната задача за (1), която ще изследваме, е задачата на Коши: Дадени са $t_0 \in (\alpha, \beta)$ и произволна n-орка от комплексни числа $x_0, x_0', x_0'', \ldots, x_0^{(n-1)}$. Търсим решение на (1), което удовлетворява началните условия

$$x(t_0) = x_0, \quad x^{(\nu)}(t_0) = x_0^{(\nu)}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2}$$

Най-важният резултат в теорията на линейните уравнения е следната

Теорема за съществуване и единственост. При направените предположения съществува единствено решение на задачата (1), (2) и то е дефинирано в целия интервал (α, β).

Обърнете внимание, че броят на началните условия (2) е равен на n, т.е. съвпада с реда на уравнението (в пълно съответствие с вече изследвания в § 8 на гл. 1 случай $n = 1$).

Характерна особеност на задачата на Коши в линейния случай и в частност на задачата (1), (2) е, че решението се оказа дефинирано в целия дефиниционен интервал на коефициентите

Теоремата за съществуване и единственост ще бъде в основата на следващите построения, които по същество имат алгебричен характер.

Лема 1. Решенията на линейното хомогенно уравнение

$$L(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(t) x^{(n-\nu)} = 0 \tag{3}$$

образуват (комплексно) линейно пространство.

Доказателство. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_k$ са функции от $C^n\langle a, b\rangle$, а $C_1, C_2, \ldots, C_k$ са комплексни константи. Очевидно*

$$L\left(\sum_{\nu=1}^{k} C_\nu x_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{k} C_\nu L(x_\nu). \tag{4}$$

Следователно от $L(x_\nu) = 0$, $\nu = 1, \ldots, k$, имаме $L\left(\sum\limits_{\nu=1}^{k} C_\nu x_\nu\right) = 0$ и лемата е доказана.

Възниква въпросът за размерността на пространството $\mathfrak{N}$ от всевъзможните решения на (3). Ще докажем, че $\dim \mathfrak{N} = n$.

Дефиниция 1. Нека $t \longrightarrow f_\nu(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, са комплексни функции. Ще казваме, че системата $f_1, f_2, \ldots, f_k$ е *линейно независима в* (α, β), когато тъждеството

$$\sum_{\nu=1}^{k} C_\nu f_\nu(t) \equiv 0 \quad \text{в} \quad (\alpha, \beta)$$

е възможно само ако всяка от комплексните константи $C_1, \ldots, C_k$ е равна на нула.

Дефиниция 2. Ще казваме, че решенията $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на (3) образуват *фундаментална система*, когато $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са линейно независими в (α, β) **.

Засега не знаем дали фундаментални системи изобщо съществуват. За щастие въпросът се решава елементарно с помощта на един прост критерий.

---

*Операторът $x \longrightarrow L(x)$ се нарича линеен именно защото удовлетворява (4).

**Обърнете внимание, че по дефиниция фундаменталната система се състои от n решения.

Дефиниция 3. Нека $x_1, \ldots, x_n$ са функциите от $C^{n-1}(\alpha, \beta)$. Детерминантата

$$W(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} x_1(t) & \ldots\ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \ldots\ldots & x_n'(t) \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \ldots\ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

се нарича *детерминанта на Вронски* за системата $\{x_\nu\}_1^n$.

Лема 2. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е произволна n-орка от решения на хомогенното уравнение (3) и $W = W(t)$ е нейната детерминанта на Вронски. В такъв случай следните три твърдения са еквивалентни:

а) $W(t_0) \neq 0$ за поне едно $t_0 \in (\alpha, \beta)$;

б) системата $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е фундаментална;

в) $W(t) \neq 0$ за всяко $t \in (\alpha, \beta)$.

Д о к а з а т е л с т в о. Достатъчно е да установим импликациите а) $\longrightarrow$ б) $\longrightarrow$ в) $\longrightarrow$ а).

За да докажем, че от а) следва б), да допуснем, че $W(t_0) \neq 0$ за някакво $t_0 \in (\alpha, \beta)$, но въпреки това системата $\{x_\nu\}_1^n$ е линейно зависима. Последното означава, че съществуват комплексни константи $\{C_\nu\}_1^n$ такива, че

$$\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu x_\nu(t) \equiv 0 \quad \text{в} \quad (\alpha, \beta) \tag{5}$$

и поне една от тях е различна от нула. Като диференцираме (5) спрямо t, получаваме

$$\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu x_\nu^{(k)}(t) \equiv 0 \quad \text{в} \quad (\alpha, \beta), \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{6}$$

Тъждествата (5) и (6) показват, че стълбовете в детерминантата на Вронски са линейно зависими. Следователно $W(t) \equiv 0$ в (α, β), което противоречи на а).

За да докажем, че от б) следва в), да допуснем, че $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е фундаментална, но $W(t_0) = 0$ за някакво $t_0 \in (\alpha, \beta)$. След това да разгледаме системата от линейни алгебрични уравнения

$$(7) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu x_\nu^{(k)}(t_0) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

с неизвестни $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Понеже детерминантата на (7) е точно $W(t_0)$, от равенството $W(t_0) = 0$ и от теоремата на Руше следва, че (7) има ненулево решение $\{C_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. След като направихме тази констатация, да разгледаме функцията

$$\eta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu x_\nu(t),$$

където $C_1, C_2, \ldots, C_n$ са компонентите на някакво ненулево решение на (7).

Понеже функциите $\{x_\nu\}_1^n$ удовлетворяват хомогенното уравнение, според лема 1 и $\eta = \eta(t)$ има това свойство. От друга страна, дефиницията на η ни позволява да запишем системата (7) във вида

$$(8) \qquad \eta(t_0) = 0, \qquad \eta'(t_0) = 0, \ldots, \qquad \eta^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

Тези равенства показват, че η е решение на задачата на Коши за хомогенното уравнение $L(x) = 0$ с нулеви начални условия.

Следователно теоремата за единственост ни дава $\eta(t) \equiv 0$ в (α, β), т.е.

$$(9) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu x_\nu(t) \equiv 0.$$

Оказа се, че системата $\{x_\nu\}_1^n$ е линейно зависима, противно на предположението. С това импликацията б) $\longrightarrow$ в) е установена.

Понеже от в) следва а), доказателството на лема 2 е завършено. С нейна помощ леко получаваме

Теорема 1. *Уравнението (3) притежава безбройно много фундаментални системи.*

Доказателство. Да вземем произволна ненулева детерминанта

$$A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

с елементи комплексни числа. Да фиксираме $t_0 \in (\alpha, \beta)$ и да разгледаме задачата на Коши

$$(10) \quad L(x) = 0, \qquad x^{(\nu)}(t_0) = a_k^{\nu+1}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Ако x_k е решението на (10) (според теоремата за съществуване x_k наистина съществува), за $k = 1, 2, \dots, n$ получаваме системата $x_1, x_2, \dots, x_n$ от решения на (3), която очевидно е фундаментална. Наистина нека W е нейната детерминанта на Вронски. Очевидно $W(t_0) = A \neq 0$ и твърдението следва от лема 2.

Теорема 2. Линейното пространство $\mathfrak{N}$, образувано от решенията на (3), има размерност n и всяка фундаментална система на (3) е негова база.

Доказателство. Нека $x = x(t)$ е решение на $L(x) = 0$ и $t_0 \in (\alpha, \beta)$ е произволна точка. Да вземем произволна фундаментална система $\{x_\nu\}_1^n$ от решения на (3) и да разгледаме линейната система

$$(11) \quad \begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^n C_\nu x_\nu(t_0) = x(t_0), \\ &\sum_{\nu=1}^n C_\nu x'_\nu(t_0) = x'(t_0), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\sum_{\nu=1}^n C_\nu x_\nu^{(n-1)}(t_0) = x^{(n-1)}(t_0) \end{aligned}$$

с неизвестни $C_1, C_2, \dots, C_n$. Понеже детерминантата на (11) е точно $W(t_0)$ и $W(t_0) \neq 0$, веднага заключаваме, че (11) има решение. След като разполагаме с този резултат, да разгледаме решението $\eta(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^n C_\nu x_\nu(t)$ на (3) с константи $C_1, C_2, \dots, C_n$, удовлетворяващи (11). Като представим (11) във вида

$$(12) \quad \eta(t_0) = x(t_0), \qquad \eta^{(\nu)}(t_0) = x^{(\nu)}(t_0), \qquad \nu = 1, 2, \dots, n-1,$$

и приложим теоремата за единственост, получаваме $\eta(t) \equiv x(t)$, т.е.

$$x(t) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu x_\nu(t), \qquad t \in (\alpha, \beta), \tag{13}$$

и доказателството е завършено. Равенството (13) е известно като формула за общото решение на (3).

ЛИНЕЙНИ НЕХОМОГЕННИ УРАВНЕНИЯ

Да разгледаме нехомогенното уравнение

$$L(x) = f(x) \tag{$*$}$$

при предположение, че и f, както и коефициентите на $(*)$ са дефинирани и непрекъснати в (α, β). Следващата лема описва структурата на общото решение на $(*)$.

Лема 1. Нека $x_0 = x_0(t)$ е решение на $(*)$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е фундаментална система на (3). В такъв случай всяко решение $x = x(t)$ на $(*)$ има вида

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu x_\nu(t), \qquad t \in (\alpha, \beta),$$

където $\{C_\nu\}_1^n$ са подходящи константи.

Доказателство. Нека $x = x(t)$ е решение на $(*)$. Като извадим равенствата

$$L(x) = f(t) \quad \text{и} \quad L(x_0) = f(t),$$

получаваме $L(x - x_0) = 0$ и твърдението следва веднага от (13).