24*. Метрични канонични уравнения на повърхнините от втора степен.

Нека спрямо ортонормирана координатна система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е дадена повърхнината от втора степен S с уравнение

$$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2$$
$$+ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Квадратичната част на полинома f означаваме с $\varphi(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2$, а матрицата ѝ с

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\varphi(x,y,z)$ може да се представи във вида

$$\varphi(x,y,z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)x + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z)y$$
$$+ (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z)z,$$

откъдето

$$\varphi(x,y,z) = (x\ y\ z)\,A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Нека $K' = O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$ е друга ортонормирана координатна система и

$$\vec{e}_i{}' = \alpha_{i1}\vec{e}_1 + \alpha_{i2}\vec{e}_2 + \alpha_{i3}\vec{e}_3 \quad , \; i = 1,2,3$$

Означаваме с C матрицата от координатите им

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

Тогава формулите за смяна са

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' \\ y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' \\ z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' \end{aligned} \quad ,$$

където $M_K(x,y,z) \longrightarrow M_{K'}(x',y',z')$.

Накратко горните формули записваме

$$(x \; y \; z) = (x' \; y' \; z')\, C$$

или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

При такава смяна за квадратичната част φ' на f' получаваме

$$\varphi'(x',y',z') = (x' \; y' \; z') \; CAC^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Означаваме с A' матрицата на φ'

$$A' = CAC^T$$

Можем да изберем C, така че матрицата A' да е диагонална

$$A' = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix},$$

където s_1, s_2, s_3 са корените на характеристичното уравнение

$$\delta(s) = \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-s & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-s \end{vmatrix} = 0 .$$

Числата s_1, s_2, s_3 са собствените стойности (числа) на A (от A – симетрична матрица се получава, че s_1, s_2 и s_3 са реални числа. Векторите, които им съответстват, т.е. тези, чиито координати са решения на хомогенната система

$$\begin{pmatrix} a_{11}-s_i & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-s_i & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-s_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \alpha_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i=1,2,3$$

са собствените вектори на A. Наричаме ги главни направления на повърхнината S.

Спрямо K' уравнението на S има вида

$$f'(x',y',z') = s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + s_3 z'^2 + 2a'_{14} x' + 2a'_{24} y' + 2a'_{34} z' + a_{44} = 0.$$

Опростяваме линейната част на горното уравнение като преминаваме към нова координатна система $K'' = O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ чрез смяната

$$x' = x_0 + X$$
$$y' = y_0 + Y$$
$$z' = z_0 + Z,$$

където x_0, y_0, z_0 са координатите на O' спрямо K'. Числата x_0, y_0, z_0 определяме допълнително в зависимост ~~на~~ от коефициентите в уравнението на S, така че да получим спрямо K'' възможно най-много нулеви коефициенти.

След смяната S ще има следното уравнение

$$f(X,Y,Z) = s_1 X^2 + s_2 Y^2 + s_3 Z^2 + 2(s_1 x_0 + a'_{14}) X + 2(s_2 y_0 + a'_{24}) Y + 2(s_3 z_0 + a'_{34}) Z + a'_{44} = 0$$

където $a'_{44} = f'(x_0, y_0, z_0)$.

За числата s_1, s_2 и s_3 имаме най-общо три възможности:

1. Нека $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$ и $s_3 \neq 0$ Тогава определяме

$$x_0 = -\frac{a'_{14}}{s_1}, \quad y_0 = -\frac{a'_{24}}{s_2}, \quad z_0 = -\frac{a'_{34}}{s_3}$$

и за уравнението на S получаваме

$$(1) \quad s_1 X^2 + s_2 Y^2 + s_3 Z^2 + a'_{44} = 0$$

2. Ако точно едно от числата s_1, s_2, s_3 е нула, то без ограничение на общността приемаме

$$s_3 = 0, \quad s_1 \neq 0, \quad s_2 \neq 0$$

и определяме

$$x_0 = -\frac{a'_{14}}{s_1}, \quad y_0 = -\frac{a'_{24}}{s_2}.$$

2.1. Ако $a'_{34} \neq 0$, то числото z_0 определяме, така че $f'(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Уравнението на S добива вида

$$(2) \quad s_1 X^2 + s_2 Y^2 + 2a'_{34} Z = 0$$

2.2. Ако $a'_{34} = 0$, то уравнението не зависи от z'. Следователно z_0 може да е кое да е число. Удобно е да изберем $z_0 = 0$. В този случай уравнението на S добива вида

$$(3) \quad s_1 X^2 + s_2 Y^2 + a'_{44} = 0$$

3. Нека две от числата s_1, s_2, s_3 са нули. Без ограничение на общността приемаме

$$s_1 \neq 0\,,\quad s_2 = s_3 = 0.$$

Полагаме

$$x_0 = -\frac{a'_{14}}{s_1}\,,\quad y_0 = 0\,,\quad z_0 = 0.$$

За уравнението на S получаваме

$$(*)\quad s_1 X^2 + 2a'_{24}Y + 2a'_{34}Z + a'_{44} = 0$$

3.1. Ако $a'_{24} = a'_{34} = 0$, то

$$(4)\quad S:\ s_1 X^2 + a'_{44} = 0.$$

3.2. Нека поне един от коефициентите a'_{24}, a'_{34} е различен от нула.

От уравнението на S $(*)$ се забелязва, че координатната равнина $O'YZ$ пресича повърхнината в правата

$$g: \begin{cases} 2a'_{24}Y + 2a'_{34}Z + a'_{44} = 0 \\ X = 0\,. \end{cases}$$

Сега сменяме $K' = O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$ с нова ортонормирана координатна система $K'' = O''\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}''\vec{e}_3{}''$ (запазваме $\vec{e}_1{}'$). Центърът O'' избираме да е точка от g, а $\vec{e}_3{}''$ е вектор, колинеарен с g. ($\vec{e}_2{}''$ избираме така, че $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'', \vec{e}_3{}'' \in S^+$ т.е. $\vec{e}_2{}'' = \vec{e}_3{}'' \times \vec{e}_1{}'$.)

Координатите на $\vec{e}_3''$ спрямо K' са

$$\vec{e}_3'' = \frac{1}{\sqrt{a_{24}'^2 + a_{34}'^2}} (0, a_{34}', -a_{24}') \ldots$$

Спрямо K''' правата g е оста $O''z''$ => е с уравнения

$$g: \begin{cases} X' = 0 \\ Y' = 0 \end{cases}$$

и следователно уравнението на S става

$$(5) \qquad S_1 X'^2 + a_{24}' Y' = 0$$

(т.е. можем да се освободим от коефициента пред Z и от свободния член)

Уравненията (1), (2), (3), (4) и (5) се наричат канонични уравнения на повърхнина от втора степен.

Получените резултати се обобщават в следната

<u>Теорема.</u> За всяка повърхнина от втора степен има координатна система, спрямо която тя има канонично уравнение, т.е. уравнение от вида (1), (2), (3), (4) или (5), където числата S_1, S_2, S_3 са различни от нула.

Анализираме петте случая за каноничното уравнение на S.

1. Нека уравнението на S е

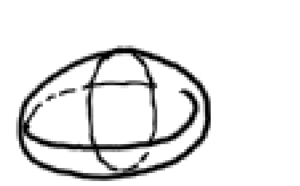
$$s_1x^2+s_2y^2+s_3z^2+a'_{44}=0$$

Ако $a'_{44}\neq 0$, полагаме

$$a=\sqrt{\left|\frac{a'_{44}}{s_1}\right|},\quad b=\sqrt{\left|\frac{a'_{44}}{s_2}\right|},\quad c=\sqrt{\left|\frac{a'_{44}}{s_3}\right|}.$$

В зависимост от знаците на s_1, s_2, s_3 попадаме в някой от следните четири случая (при евентуално разменяне ~~на~~ в означенията на координатите). Без ограничение на общността считаме $s_1>0$.

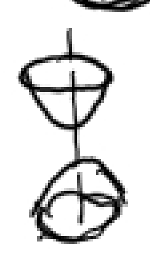
① $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – елипсоид



② $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ – имагинерен елипсоид

③ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – прост хиперболоид

④ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – двоен хиперболоид



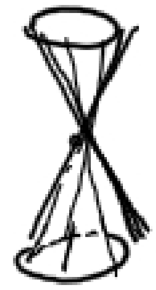
Ако $a'_{44} = 0$ полагаме

$$a = \sqrt{\frac{1}{s_1}} \;,\; b = \sqrt{\left|\frac{1}{s_2}\right|} \;,\; c = \sqrt{\left|\frac{1}{s_3}\right|}$$

и получаваме уравненията

(5) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ – имагинерен конус

(6) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ – конус (реален)



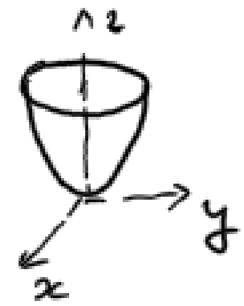
2. Нека каноничното уравнение на S е от вида

$$s_1 x^2 + s_2 y^2 + 2a'_{34} z = 0$$

Полагаме $a = \sqrt{\left|\dfrac{a'_{34}}{s_1}\right|}$, $b = \sqrt{\left|\dfrac{a'_{34}}{s_2}\right|}$

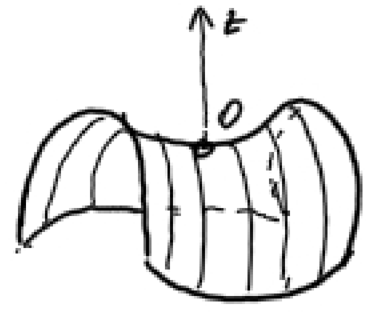
Можем да изберем координатните оси и ориентацията им (ако се налага) така, че каноничното уравнение на S да е от един от следните два вида

(7) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ – елиптичен параболоид



(8) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$

хиперболичен параболоид



3. Нека S е с уравнение от вида

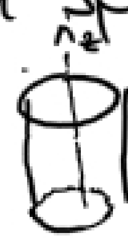
$$s_1 x^2 + s_2 y^2 + a'_{44} = 0$$

При $a'_{44} \neq 0$ означаваме с

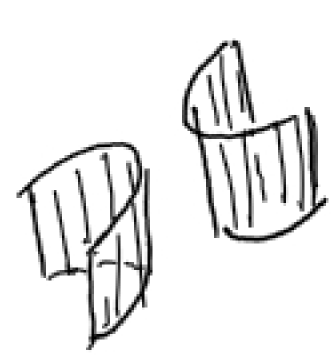
$$a = \sqrt{\left|\frac{a'_{44}}{s_1}\right|} \quad \text{и с} \quad b = \sqrt{\left|\frac{a'_{44}}{s_2}\right|}.$$

Получаваме следните три уравнения

(9) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – елиптичен цилиндър



(10) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – хиперболичен цилиндър



(11) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ –

елиптичен имагинерен цилиндър

Тези ~~уравнения~~ (виж тема 18) са уравнения на цилиндрични повърхнини.

При $a'_{44} = 0$, означаваме

$$a = \sqrt{\frac{1}{s_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{|s_2|}}.$$

Получаваме уравненията

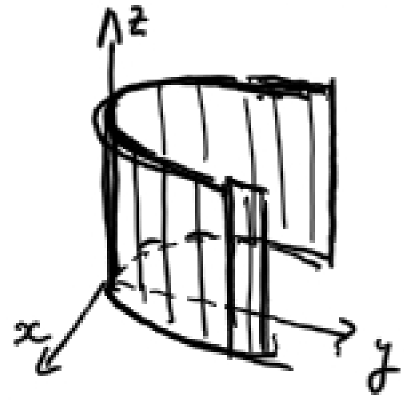
(12) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ – двойка комплексно спрегнати пресичащи се равнини.

(13) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ – двойка реални пресичащи се равнини.

4. Уравнението (5) записваме като

(14) $x^2 = 2py$, $(p \neq 0)$,

което е уравнение на параболичен цилиндър



5. Нека уравнението на S е

$$s_1 x^2 + a'_{44} = 0$$

В зависимост от това, дали $a'_{44} \neq 0$ или $a'_{44} = 0$ и от това дали s_1 и a'_{44} са с различни или едни и същи знаци се получават уравненията

(15) $x^2 - a^2 = 0$ - двойка реални успоредни равнини.

(16) $x^2 + a^2 = 0$ - двойка успоредни комплексно спрегнати равнини

(17) $x^2 = 0$ - две съвпадащи равнини.

Това са разпадащи се повърхнини

забележка.

Разпадащите се повърхнини са също така цилиндрични повърхнини (изродени)

Примерно (13) $S: b^2x^2 - a^2y^2 = 0$

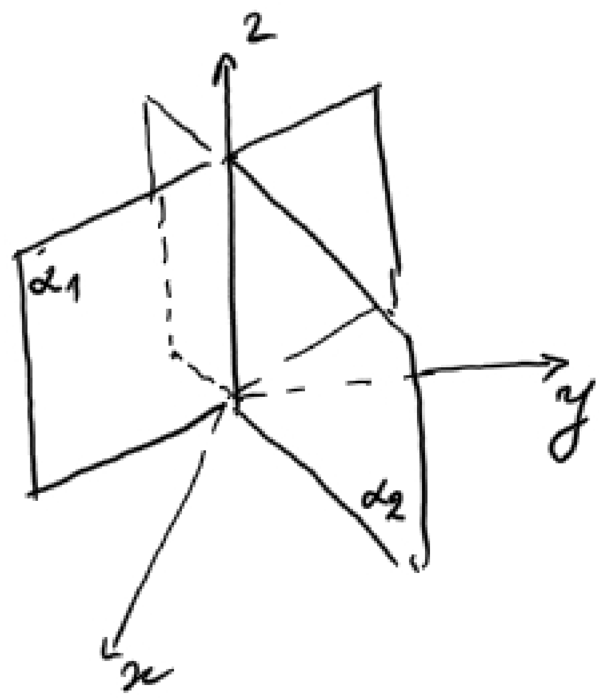
$\Rightarrow (bx - ay)(bx + ay) = 0$

S е изродена цилиндрична повърхнина

с управителна крива

$$c: \begin{cases} (bx - ay)(bx + ay) = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

която е двойка пресичащи се реални прави.



С тези изследвания доказахме, че е в сила следната

Теорема. Съществуват точно седемнадесет вида повърхнини от втора степен; каноничните им уравнения са дадени с (1) – (17).

Повърхнините най-общо се разделят на следните типове.

I. Разпадащи се – тези с уравнения (12), (13), (15), (16) и (17).

II. Цилиндри – тези с уравнения (9), (10), (11) и (14).

III. Конуси – тези с уравнения (5) и (6).

IV. Елипсоиди – тези с уравнения (1) и (2).

V. Параболоиди – тези с уравнения (7) и (8).

VI. Хиперболоиди – тези с уравнения (3) и (4).

Задача. Спрямо ОКС $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ повърхнината S има уравнение

$$4x^2+2y^2+3z^2+4xz-4yz+6x+4y+8z+2=0$$

Да се намерят каноничното уравнение на S и последователните трансформации, чрез които се стига до него.

Решение. Матрицата на квадратичната част е

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Характеристичното ѝ уравнение е

$$\delta(s)=\det(A-sE)=0, \text{ т.е.}$$

$$\delta(s)=\begin{vmatrix} 4-s & 0 & 2 \\ 0 & 2-s & -2 \\ 2 & -2 & 3-s \end{vmatrix}=(4-s)(2-s)(3-s)-4(2-s)-4(4-s)=0$$

$$\ldots \quad -s^3+9s^2-18s=0 \quad \Longrightarrow$$

$$s(s^2-9s+18)=0 \quad \Longrightarrow$$

собствените стойности на A са 0, 3 и 6. Да изберем $s_1=0$, $s_2=3$ и $s_3=6$. За координатите на съответните им собствени вектори имаме..

$$(A-s_i)\vec{e}_i^{\,\prime}=\vec{o}, \quad i=1,2,3$$

$$s_1=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 4\alpha_{11}+2\alpha_{13}=0 \\ 2\alpha_{12}-2\alpha_{13}=0 \\ 2\alpha_{11}-2\alpha_{12}+3\alpha_{13}=0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \alpha_{12}=\alpha_{13}$, $\alpha_{13}=-2\alpha_{11} \Rightarrow \vec{a}(1,-2,-2)$.

От $\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2+\alpha_{22}^2=1 \Rightarrow \vec{e}_1^{\,\prime}\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

$$s_2=3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha_{21}+2\alpha_{23}=0 \\ -\alpha_{22}-2\alpha_{23}=0 \\ 2\alpha_{21}-2\alpha_{22}=0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \alpha_{21}-\alpha_{22}=0 \Rightarrow \alpha_{21}=\alpha_{22}$, $\alpha_{23}=-\frac{1}{2}\alpha_{22}$

$\vec{b}(2,2,1)$, От $\alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2+\alpha_{23}^2=1 \Rightarrow \vec{e}_2^{\,\prime}\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

(проверяване $\vec{e}_1^{\,\prime}\perp\vec{e}_2^{\,\prime}$, т.е. $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}=0$?
$1.2-2.2-2.(-1)=0$)

Третият собствен вектор $\vec{e}_3^{\,\prime}$ можем да намерим като $\vec{e}_3^{\,\prime}=\vec{e}_1^{\,\prime}\times\vec{e}_2^{\,\prime}$ (така не променяме ориентацията)

$$\times\begin{array}{l} \frac{1}{3}(1,-2,-2) \; 1 \\ \frac{1}{3}(2,2,-1) \; 2 \end{array} = \frac{1}{9}(6,-3,6)=\frac{1}{3}(2,-1,2)$$

За матрицата C имаме

$$C=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

От $x' = Cx$ имаме $x = C^T x'$, т.е.

формулите за смяна са

$$x = \frac{1}{3}(x' + 2y' + 2z')$$
$$y = \frac{1}{3}(-2x' + 2y' - z')$$
$$z = \frac{1}{3}(-2x' - y' + 2z')$$

… за уравнението на S спрямо $K' = O\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ имаме

$$3y'^2 + 6z'^2 - 6x' + 4y' + 8z' + 2 = 0.$$

$K' \to K'' = N_0\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$, $N_0(x_0, y_0, z_0)$, т.е.

$$x' = X + x_0, \quad y' = Y + y_0, \quad z' = Z + z_0$$

$$\Rightarrow 3(Y^2 + 2y_0 + y_0^2) + 6(Z^2 + 2z_0Z + z_0^2)$$
$$-6(X + x_0) + 4(Y + y_0) + 8(Z + z_0) + 2 = 0$$

Избираме $y_0 = -\frac{2}{3}$, $z_0 = -\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ пропадат коефициентите пред Y и Z. Избираме $x_0 = -\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $a_{44}' = 0$

Получаваме спрямо K''

$$3Y^2 + 6Z^2 - 6X = 0 \quad \text{или}$$
$$Y^2 + 2Z^2 = 2X$$

– елиптичен параболоид.