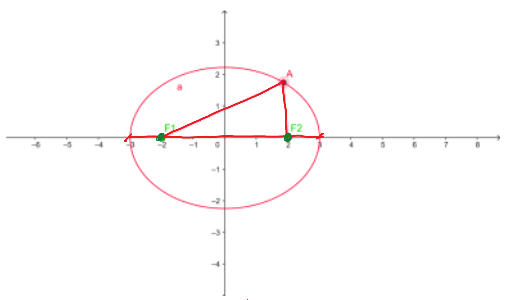
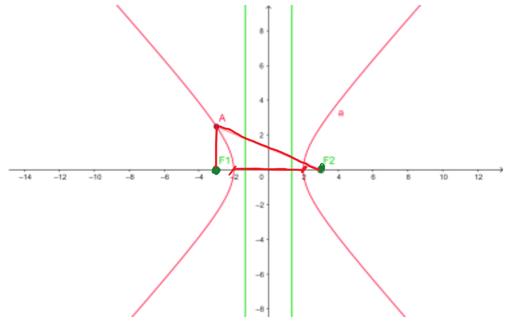
Основни свойства на коничните сечения



фиг. 1



фиг. 2

I Фокални свойства:

1) Елипса: Дадени са $F_1 \neq F_2$ : $|F_1F_2| = 2c$ и числото $a > c$.

$2a > 2\boxed{c}$

Геометричното място на $\forall$ точки $A$ от равнината, за които

$$\boxed{|\vec{F_1A}| + |\vec{F_2A}| = 2\boxed{a}}$$ е елипса $\mathcal{E}: \frac{x^2}{\boxed{a}^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

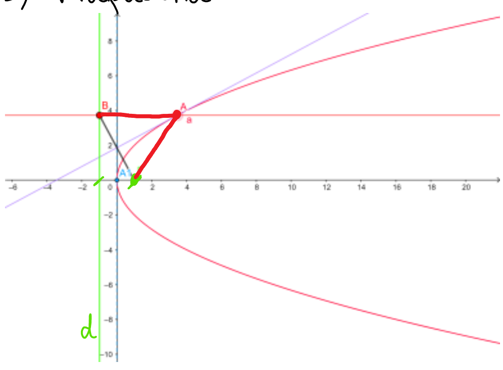
$b^2 = a^2 - \boxed{c}^2$

2) Хипербола: $F_1 \neq F_2$, $|F_1F_2| = 2c$, $0 < a < c$

ГМ на $\forall$ т. $A$: $$\boxed{\left|\,|\vec{F_1A}| - |\vec{F_2A}|\,\right| = 2a}$$ е хипербола $\mathcal{X}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$b^2 = c^2 - a^2$

3) Парабола



$F \notin d$, $F$ - фокус

$d$ - директриса

$|\delta(F, d)| = p$

ГМ на $\forall$ т. $A$ : $|FA| = |\delta(A, d)|$ е

парабола $\Pi: y^2 = 2p.x$

---

II Уравнение на допирателна в т. $M_0(x_0, y_0)$ към конично сечение

1) $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$

$$\boxed{t_0: \frac{x.x_0}{a^2} + \frac{y.y_0}{b^2} = 1}$$ е допирателната към $\mathcal{E}$ в т. $M_0$;

2) $\chi: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad M_0(x_0, y_0) \in \chi$ $\quad \boxed{t_0: \frac{x.x_0}{a^2} - \frac{y.y_0}{b^2} = 1}$ е допирателната към $\chi$ в т. $M_0$;

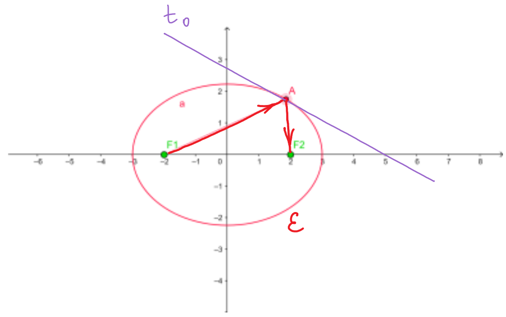
3) $\pi: y^2 = 2p.x$ $\quad M_0(x_0, y_0) \in \pi$ $\quad \boxed{t_0: y.y_0 = p.(x + x_0)}$ е допират. към $\pi$ в т. $M_0$

---

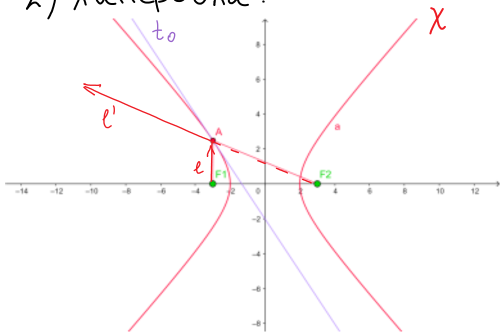
## III Оптични свойства на конични сечения

1) Елипса

Допирателната $t_0$ в т. A от $\varepsilon$ е външна ъглополовяща при върха A на $\triangle F_1F_2A$.



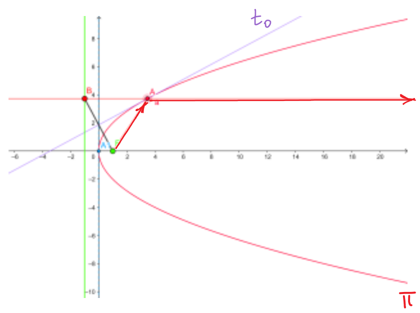

2) Хипербола.




Допирателната $t_0$ в т. A от $\chi$ е вътрешна ъглополовяща при върха A на $\triangle F_1AF_2$.

3) Парабола:

Допирателната $t_0$ към т. $A \in \pi$ е вътрешна ъглополовяща през върха A на $\triangle ABF$.




---



## I Хомогенни координати в равнината

$K = Oxy$ - декартова к.с. $\Leftrightarrow$ ДКС, $M(X, Y)$ – нехомогенни к-ти

Всяка наредена тройка числа $\boxed{(x, y, t) : \frac{x}{t} = X, \quad \frac{y}{t} = Y}$

се нарича тройка хомогенни координати на M

Пример:

$M(\overset{X}{3},\overset{Y}{4}) \Rightarrow M(\underset{x}{3},\underset{y}{4},\underset{t}{1}) \quad M(\underset{x}{6},\underset{y}{8},\underset{t}{2}) \quad M(\underset{x}{-9},\underset{y}{-12},\underset{t}{-3})$

нехомогенни
единствени

$M(k.x,\ k.y,\ k.t) \quad k \neq 0$

хомогенните координати са с точност до множител $\neq 0$

---

Уравнения на линии в хомогенни координати

1) $K = O_{XY} \Rightarrow g:\ \underbrace{A.\underset{\frac{x}{t}}{X} + B.\underset{\frac{y}{t}}{Y} + C = 0}_{t} \Rightarrow g:\ A.x + B.y + C.t = 0$

хомогенно уравнение

$M(x,y,t)$
хомогенни к-ти на $M$

$g[A,B,C]$
хомогенни к-ти на правата $g$

Кога $M \in g$? $\quad [A\ \ B\ \ C].\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = A.x + B.y + C.t = 0$

2) $\varepsilon:\ \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \qquad X = \frac{x}{t},\ Y = \frac{y}{t} \to \varepsilon:\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = t^2$

уравнение на $\varepsilon$ в хомогенни координати

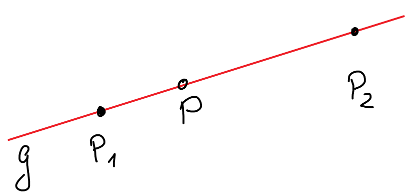
$\chi$:

$\pi$:

---

3) Параметрични уравнения на права през 2 точки
в хомогенни координати

$g \begin{cases} \ni P_1(x_1, y_1, t_1) \\ \ni P_2(x_2, y_2, t_2) \end{cases}$



$P \in g$, $P$- произволна

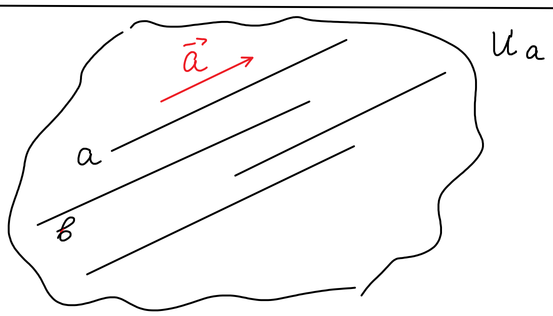
$g: \begin{cases} x = \lambda.x_1 + \mu.x_2 \\ y = \lambda.y_1 + \mu.y_2 \\ t = \lambda.t_1 + \mu.t_2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} \lambda \in \mathbb{R} \\ \mu \in \mathbb{R} \end{matrix} \qquad (\lambda, \mu) \neq (0,0)$

---

II Безкрайни елементи

$a \parallel \vec{a}(p,q) \neq (0,0)$

* $U_a = \{\forall\, b \parallel a,\ a\}$ - безкрайна точка на $a$



$a \parallel b \iff U_a = U_b$

* Координати на $U_a$

$$a \parallel \vec{a}(p,q) \Rightarrow a \ni U_a(p,q,\underset{t}{0}) : (p,q) \neq (0,0)$$

* Безкрайна права $\omega$ в равнината

$\omega = \{\forall U : t=0\}$ $\quad \boxed{\omega : t=0}$ $\quad \boxed{\omega[0,0,1]}$

$\omega : \underset{0}{A}.x + \underset{0}{B}.y + \underset{1}{C}.t = 0$

$U(p,q,0)$

$U \ni \omega \quad [0\ 0\ 1].\begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

---

## Разширена евклидова равнина $E_2^*$

* $\forall M(x,y,t)$ $t \neq 0$ – крайни точки
* $\forall U(x,y,0)$: $(x,y) \neq (0,0)$ – безкрайни точки
* $\forall g[A,B,C]$: $(A,B) \neq (0,0)$ – крайни прави
* $\omega[0\ 0\ 1]$ – безкрайна права

Пример:

1) $g: 3x+2y+t=0$ $\quad U_g = ?$ $\quad U_g \ni g : 3x+2y+t=0$

$U_g \ni \omega : t=0$

$$U_g = g \cap \omega \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 3x+2y+t=0 \\ t=0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 3x+2y=0 \\ t=0 \end{array} \right. \Rightarrow 3x=-2y \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{-2}{3}.y \\ t=0 \end{array}$$

Изб. $y=-3$
$x=2$
$t=0$

$U_g(2,-3,0)$

2) $g \begin{cases} \ni P_1(1,2,3) \\ \ni P_2(3,2,1) \end{cases}$ $\quad U_g = ?$

$$g: \begin{cases} x = \lambda.1 + \mu.3 = -8 \\ y = \lambda.2 + \mu.2 = -4 \\ t = \lambda.3 + \mu.1 = 0 \end{cases}$$

$P_1 \quad P_2$

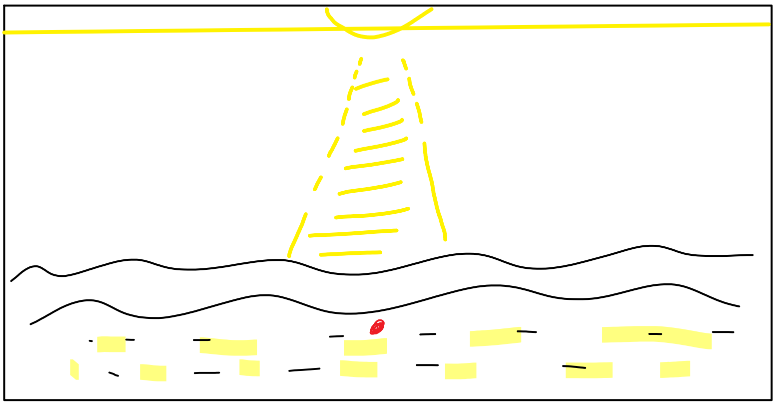
$\omega : t=0 \Rightarrow 3\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -3\lambda$

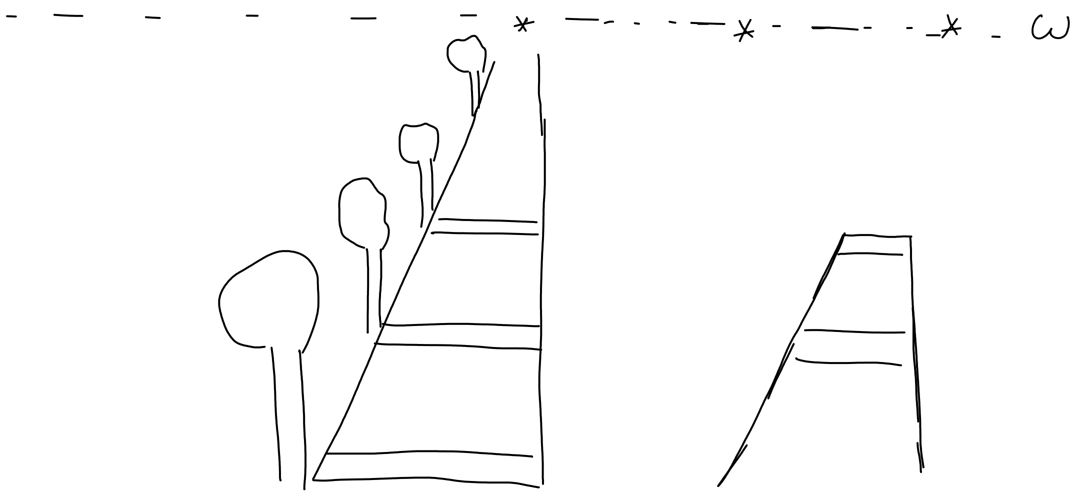
Изб. $\underbrace{\lambda = 1 \Rightarrow \mu = -3}_{g}$

$U_g(-8,-4,0) \ /:(-4)$

$U_g(2,1,0)$

---






Тема 19 от лекциите на доц. Русева подробно разглежда въпросите за хомогенни координати и безкрайни елементи.

Весели празници!