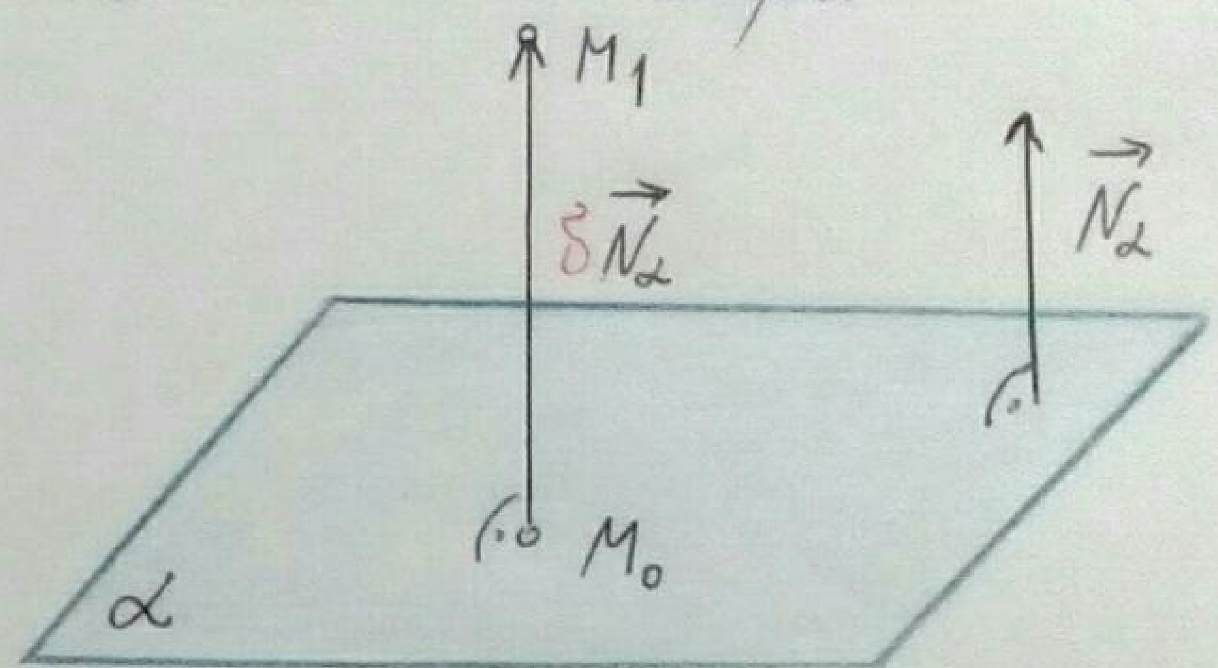
13. Нормално уравнение на равнина. Разстояние на точка до равнина. 13.1.

Нормално уравнение на равнина в пространството е аналог на нормално уравнение на права в равнина.

Нека $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ е ортонормирана координатна система и равнината α е зададена с общото си уравнение



(1) $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$

Тогава от условието за компланарност на вектор и равнина имаме, че вектор $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ е компланарен с $\alpha \Leftrightarrow Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0 \Leftrightarrow$ векторът $\vec{N}(A, B, C)$ е перпендикулярен на $\vec{p}$ (имаме $\vec{N}\vec{p} = 0$).

Ако $\vec{N}$ е с дължина 1, т.е. $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, уравнението (1) се нарича нормално уравнение на α. Ако $|\vec{N}| \neq 1$, то векторът

$$\vec{N_2} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right)$$ е единичен вектор,

перпендикулярен на α и уравненията

$$\pm \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

са двете нормални уравнения на α.

Нека сега α е зададена с нормално уравнение

$$(2)\quad \alpha: Ax + By + Cz + D = 0, \text{ т.е. } A^2+B^2+C^2 = 1.$$

Ако $M_1 \not Z \alpha$, $\overrightarrow{M_0M_1} \perp \alpha$, $M_0 \, Z \, \alpha$, то $\overrightarrow{M_0M_1} \parallel \overrightarrow{N_\alpha} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M_1} = \delta \overrightarrow{N_\alpha}$,

δ се нарича ориентирано разстояние на M_1 до α. Означаваме $\delta = (M_1, \alpha)$. Ако $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ спрямо K, то имаме

$x_1 - x_0 = \delta A$, $y_1 - y_0 = \delta B$, $z_1 - z_0 = \delta C \Rightarrow$

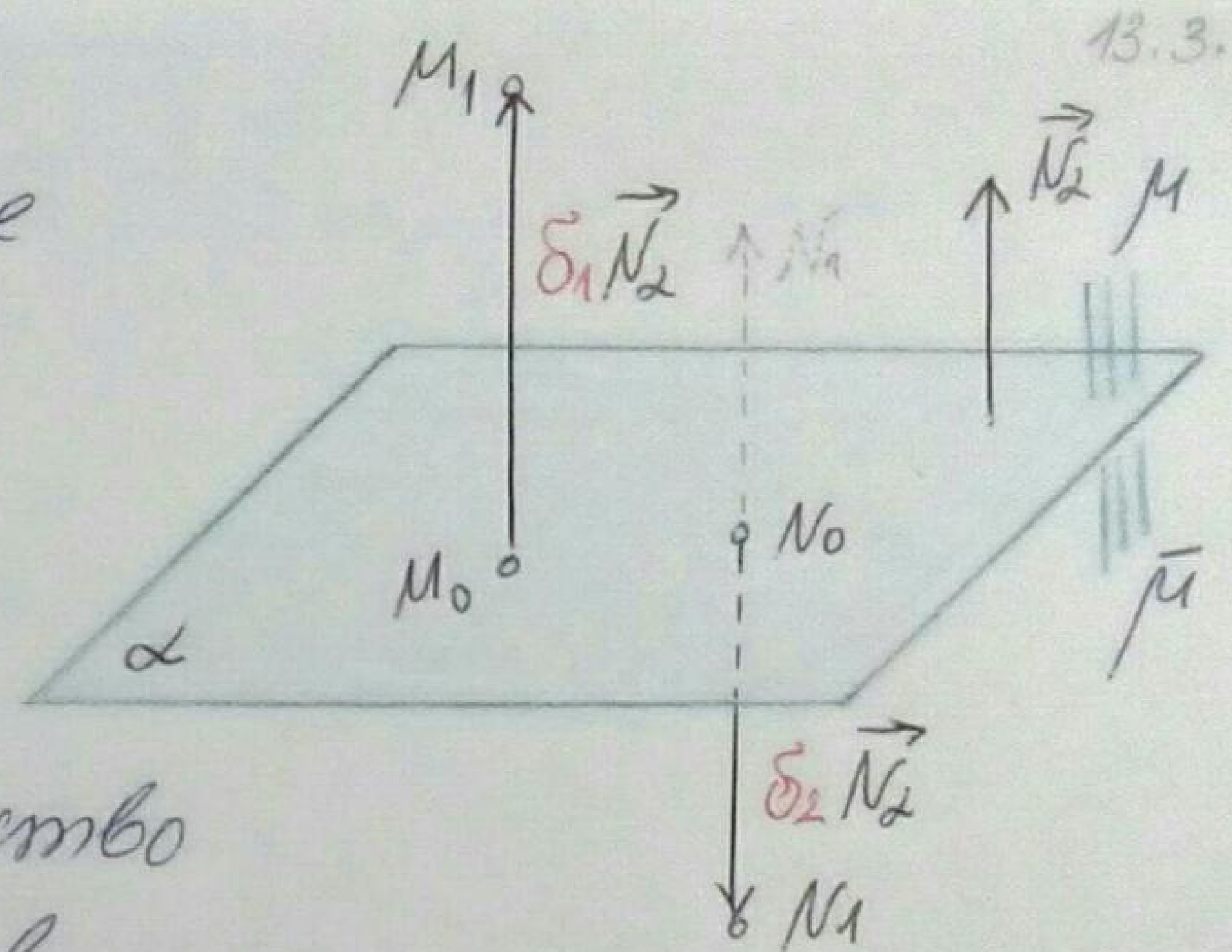
$x_0 = x_1 - \delta A$, $y_0 = y_1 - \delta B$, $z_0 = z_1 - \delta C$.

Като заместим x_0, y_0 и z_0 в (2) от $M_0 \, Z \, \alpha$ получаваме

$$\delta = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D.$$

За разстоянието на M_1 до α имаме $|M_1, \alpha| = |\delta|$.

Както в равнината, ориентираното разстояние на точка до равнина може да се използва за различаване на точки спрямо полупространствата с контур α.



Ако $\delta_1 = (M_1, \alpha)$ и $\delta_2 = (N_1, \alpha)$,

то M_1 и M_2 са в едно полупространство точно тогава, когато $\delta_1 \delta_2 > 0$ и са в различни полупространства точно тогава, когато $\delta_1 \delta_2 < 0$.