Пресмятане на обеми с тройни интеграли

Ако $K \subseteq \mathbb{R}^3$, то обемът на K е троен интеграл: $V(K) = \iiint_K 1\,dx\,dy\,dz$.

Зад. 1. Намерете обема на елипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$.

Реш. Правим линейна смяна $\left| \begin{matrix} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{matrix} \right.$, $|J| = \left| \begin{matrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{matrix} \right| = abc$.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \iff K: u^2 + v^2 + w^2 \le 1$, K - единично кълбо

$\Rightarrow V_{\text{елипсоид}} = \iiint_K |J|\,du\,dv\,dw = abc \cdot \iiint_K 1\,du\,dv\,dw$.

В K правим ~~полярна~~ сферична смяна, $\begin{matrix} u = r\sin\theta\cos\varphi \\ v = r\sin\theta\sin\varphi \\ w = r\cos\theta \end{matrix}$, $\begin{matrix} r \ge 0 \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix}$, $|J| = r^2\sin\theta$.

$u^2 + v^2 + w^2 \le 1 \iff r^2 \le 1$, така сферичната смяна преобразува кълбото K до паралелепипед T: $\left| \begin{matrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right.$.

$V = abc \iiint_K 1\,du\,dv\,dw = \left[\iiint_T r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\right] \cdot abc =$

$= abc \int_0^1 r^2\,dr \cdot \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \cdot \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi = abc \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3} abc$.

В частност, при $a = b = c = R$, обем на кълбо с радиус R е $\frac{4\pi}{3} R^3$.

Зад. 2. Намерете обема на $K: \left| \begin{matrix} 1 \le x^2 + y^2 \le 2x \\ x \le y\sqrt{3} \\ y^4 z^2 \le x^4 \end{matrix} \right.$.

Реш. $2x \ge 1 \Rightarrow x \ge 1/2$, $y \ge x/\sqrt{3} \ge \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$.

Тогава $y^4 z^2 \le x^4$ можем да решим спрямо z (делим на $y > 0$).

$z^2 \le x^4/y^4 = \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^2$, $|z| \le \left|\frac{x^2}{y^2}\right| = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow -\frac{x^2}{y^2} \le z \le \frac{x^2}{y^2}$.

Така K е цилиндрично тяло по z: $K: \left| \begin{matrix} -\frac{x^2}{y^2} \le z \le \frac{x^2}{y^2} \\ (x, y) \in D \end{matrix} \right.$, $D: \left| \begin{matrix} 1 \le x^2 + y^2 \le 2x \\ x \le y\sqrt{3} \end{matrix} \right.$

$\Rightarrow V(K) = \iiint_K 1\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{-\frac{x^2}{y^2}}^{x^2/y^2} 1\,dz\right) dx\,dy = \iint_D \frac{2x^2}{y^2}\,dx\,dy$.

За решаване на получения двоен интеграл, правим полярна смяна: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $r \ge 0$, $|J| = r$.

Както споменахме, $x \ge 0$, $y \ge 0$ $\Rightarrow \varphi \in [0; \pi/2]$.

$x^2+y^2 \ge 1 \Rightarrow r \ge 1$

$x^2+y^2 \le 2x \Rightarrow r^2 \le 2r\cos\varphi$, $r \le 2\cos\varphi$. $\Rightarrow 1 \le r \le 2\cos\varphi$

$\Rightarrow 2\cos\varphi \ge 1$, $\cos\varphi \ge 1/2$, $\varphi \le \pi/3 \Rightarrow \varphi \in [0; \pi/3]$.

$x \le y\sqrt{3} \Rightarrow \cos\varphi \le \sin\varphi\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\varphi \ge \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi \ge \pi/6 \Rightarrow \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

Така D се преобразува до T: $\begin{cases} \pi/6 \le \varphi \le \pi/3 \\ 1 \le r \le 2\cos\varphi \end{cases}$ - трапец по φ.

$$V = \iint_D \frac{2x^2}{y^2}\,dx\,dy = \iint_T \frac{2.\cancel{r^2}\cos^2\varphi}{\cancel{r^2}\sin^2\varphi}\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(\int_1^{2\cos\varphi} 2r\cdot\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}\,dr\right)d\varphi = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}\cdot r^2\Big|_1^{2\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}(4\cos^2\varphi - 1)\,d\varphi = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{4\cos^4\varphi - \cos^2\varphi}{1-\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

Делим с частно и остатък:

$$\begin{array}{r|l} 4t^4 - t^2 & 1-t^2 \\ \hline -\ +4t^4 - 4t^2 & -4t^2-3 \\ \hline 3t^2 & \\ -\ 3t^2 - 3 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

$\Rightarrow (4t^4 - t^2) = (1-t^2)(-4t^2-3) + 3.$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{4\cos^4\varphi - \cos^2\varphi}{1-\cos^2\varphi}\,d\varphi = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(-4\cos^2\varphi - 3 + \frac{3}{1-\cos^2\varphi}\right)d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(-4\cdot\frac{1+\cos 2\varphi}{2} - 3 + 3\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi}\right)d\varphi = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\Big(-5 - 2\cos 2\varphi + 3\cdot\underbrace{\frac{1}{\sin^2\varphi}}_{\text{Табличен интеграл}}\Big)\,d\varphi$$

$$= -5\varphi - \sin 2\varphi - 3.\operatorname{cotg}\varphi\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \left(-\frac{5\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} - 3.\operatorname{cotg}\frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{5\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3} + 3.\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\frac{5\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \cancel{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{3}} + 3.\sqrt{3} = -\frac{5\pi}{6} + 2\sqrt{3} = \boxed{\frac{12\sqrt{3} - 5\pi}{6}}$$

Зад. 3. Намерете обема на тялото $K: \left| \begin{array}{l} 0 \le 4z \le x^2+y^2 \\ x^2+y^2 \le 4x \end{array} \right.$

Реш. K е цилиндрично тяло: $\left| \begin{array}{l} 0 \le z \le \frac{x^2+y^2}{4} \\ (x,y) \in D \end{array} \right.$, където $D: x^2+y^2 \le 4x$.

$$V(K) = \iiint_K 1\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_0^{\frac{x^2+y^2}{4}} 1\,dz \right) dx\,dy = \iint_D \frac{x^2+y^2}{4}\,dx\,dy.$$

Интегралът може да се реши с обичайната полярна смяна. Ще покажем друг подход с по-малко сметки.

$D: \; x^2-4x+y^2 \le 0 \iff x^2-4x+4+y^2 \le 4, \quad (x-2)^2+y^2 \le 2^2.$

D е кръг с център $(2,0)$. Ще направим смяна, съобразена с D.

Нека $\left| \begin{array}{l} x-2 = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right.$, $r \ge 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ – на практика транслирана полярна смяна.

$(x-2)^2+y^2 \le 2^2 \iff r^2 \le 2^2 \iff r \le 2.$

$\left| \begin{array}{l} x = 2+r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right.$, $J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$, както при нетранслирана смяна.

$$\Rightarrow V(K) = \iint_D \frac{x^2+y^2}{4}\,dx\,dy = \iint_{[0;2]\times[0;2\pi]} \underbrace{\frac{(2+r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}{4}}_{\frac{x^2+y^2}{4}} \cdot \underbrace{r}_{|J|}\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4+4r\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\, r\,d\varphi\,dr =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r + 4r^2\cos\varphi + r^3)\,dr\,d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} 2r^2 + \frac{4r^3}{3}\cos\varphi + \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 \,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(8 + \frac{32}{3}\cos\varphi + 4\right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(3 + \frac{8}{3}\cos\varphi\right) d\varphi = \left(3\varphi + \frac{8}{3}\sin\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \underline{6\pi}.$$

Избраната смяна преобразува D в правоъгълник.

Стандартната смяна $\left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right.$ преобразува D до $r^2 \le 4r\cos\varphi$, $r \le 4\cos\varphi$.

Тогава $4\cos\varphi \ge r \ge 0 \Rightarrow \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Така получаваме трапеца: $\left| \begin{array}{l} -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le r \le 4\cos\varphi \end{array} \right.$ и последващите сметки са по-дълги (за упражнение).

Зад 4. Намерете обема на $K: \begin{cases} x^2+y^2 \le 3z \\ x^2+y^2+z^2 \le 4 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

Реш. Срещат се изрази x^2+y^2 и $x^2+y^2+z^2$. Да пробваме сферична смяна: $\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$, $\begin{aligned} &r \ge 0 \\ &0 \le \theta \le \pi \\ &0 \le \varphi \le 2\pi \end{aligned}$

$x^2+y^2+z^2 \le 4 \Rightarrow r \le 2$

$x, y \ge 0 \Rightarrow \varphi$ – в първи квадрант, $0 \le \varphi \le \pi/2$.

$x^2+y^2 \le 3z \Rightarrow r^2\sin^2\theta \le 3r\cos\theta$, $0 \le r \le \dfrac{3\cos\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{3\cos\theta}{1-\cos^2\theta} \Rightarrow \cos\theta \ge 0$ $\boxed{0 \le \theta \le \pi/2}$

Имаме горни граници за r: 2 и $\dfrac{3\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$.

Решаваме $2 \le \dfrac{3\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$, $2-2\cos^2\theta \le 3\cos\theta$, $2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 \ge 0$

$\cos\theta_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \dfrac{-3\pm 5}{4} \begin{matrix} \nearrow 1/2 \\ \searrow -2 \end{matrix}$.

$2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 \ge 0$ за $\cos\theta \le -2$ или $\cos\theta \ge 1/2$.

Първото е невъзможно, $\cos\theta \ge 1/2$ за $0 \le \theta \le \pi/3$.

Така след сферична смяна получаваме две множества

$K_1 \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/3 \\ 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \end{cases} \cup K_2 \begin{cases} \pi/3 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le r \le \dfrac{3\cos\theta}{\sin^2\theta} \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \end{cases}$.

$V(K) = \iiint\limits_K 1\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{K_1 \cup K_2} |J|\,dr\,d\varphi\,d\theta = \iiint\limits_{K_1} r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta +$

$+ \iiint\limits_{K_2} r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$

За K_2 имаме $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\,d\varphi \cdot \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^{\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta =$

$\displaystyle = \frac{\pi}{2} \cdot \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin\theta \cdot \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}} d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin\theta \cdot \frac{27\cos^3\theta}{\sin^6\theta} \cdot \frac{1}{3}\,d\theta =$

$\displaystyle = \frac{9\pi}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^3\theta}{\sin^5\theta}\,d\theta$. Този интеграл е решим, но изглежда труден.

Ако стигнем до труден интеграл, може да пробваме друга смяна.

Втори опит: Цилиндрична смяна: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = t$, $|J| = r$, $r \ge 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $t \in \mathbb{R}$.

$x^2+y^2+z^2 \le 4 \Rightarrow r^2+t^2 \le 4$

$x^2+y^2 \le 3z \Rightarrow r^2 \le 3t$

$x, y \ge 0 \Rightarrow 0 \le \varphi \le \pi/2$.

Решаваме спрямо t: $t \ge \frac{r^2}{3} \ge 0$,

$t^2 \le 4-r^2$, но $t^2 \ge 0 \Rightarrow 4-r^2 \ge 0 \Rightarrow r \le 2$; коренуваме.

$t \le \sqrt{4-r^2}$. Така $\frac{r^2}{3} \le t \le \sqrt{4-r^2}$. и $r \le 2$.

Но долната граница не трябва да надвишава горната.

$\Rightarrow \frac{r^2}{3} \le \sqrt{4-r^2}$, $r^2 \le 3\sqrt{4-r^2}$, $r^4 \le 9(4-r^2)$, $r^4+9r^2-36 \le 0$,

$$r^2_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+4.36}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{-9 \pm 15}{2} \to 3, \ \to -12.$$

$r^4+9r^2-36 \le 0$ за $r^2 \in [-12; 3]$. Но $r^2 \ge 0$, т.е. за $r^2 \le 3$.

Така $r \le \sqrt{3}$.

Окончателно φ - независима, по r и t, полученото множество е трапец по r:

$$T: \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le r \le \sqrt{3} \\ \frac{r^2}{3} \le t \le \sqrt{4-r^2} \end{cases}$$

$$V = \iiint_K 1\,dx\,dy\,dz = \iiint_T |J|\,d\varphi\,dr\,dt = \iiint_T r\,d\varphi\,dr\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 1\,d\varphi \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dt \right) dr = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} r \cdot t \Big|_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} dr =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{3}} r\left(\sqrt{4-r^2} - \frac{r^2}{3}\right) dr = \frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\sqrt{3}} r\sqrt{4-r^2}\,dr - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3}{3}\,dr \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-r^2}\,dr^2 - \frac{r^4}{12}\Big|_0^{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} (4-r^2)^{1/2}\,d(4-r^2) - \frac{9}{12} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} (4-r^2)^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\left((4-3)^{3/2} - (4-0)^{3/2} \right) \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{3}(1-8) \right) = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{3}{4}^{\,(3} + \frac{7}{3}^{\,(4} \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{28-9}{12} = \boxed{\frac{19\pi}{24}}$$

Зад. 5. Намерете обема на тялото $K: \begin{cases} (9x^2+y^2)^2 \le z \le xy^2 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Реш. K е цилиндрично тяло: $\begin{cases} (9x^2+y^2)^2 \le z \le xy^2 \\ (x,y) \in D \end{cases}$, където

$$D: \begin{cases} (9x^2+y^2)^2 \le xy^2 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

$$V(K) = \iint_D \left(\int_{(9x^2+y^2)^2}^{xy^2} 1\, dz \right) dx\,dy = \iint_D \left(xy^2 - (9x^2+y^2)^2 \right) dx\,dy.$$

Полярна смяна за D не помага особено, защото $9r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 + 8r^2\cos^2\varphi$.

Вместо това, нека $x^2 = \frac{r^2\cos^2\varphi}{9}$, $y^2 = r^2\sin^2\varphi$, т.е.

избираме обобщената полярна смяна: $\begin{cases} x = \frac{r}{3}\cos\varphi & , r \ge 0 \\ y = r\sin\varphi & ; 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$

$$|J| = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\cos\varphi & -\frac{r}{3}\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = \frac{r}{3}\cos^2\varphi + \frac{r}{3}\sin^2\varphi = \frac{r}{3}$$

$y \ge 0 \Rightarrow \sin\varphi \ge 0 \Rightarrow \varphi \in [0;\pi]$.

$(9x^2+y^2)^2 \le xy^2$. Заместваме:

$$\left(9 \cdot \frac{r^2}{9}\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right)^2 \le \frac{r}{3}\cos\varphi \cdot r^2\sin^2\varphi$$

$$r^4 \le \frac{r^3}{3}\cos\varphi\sin^2\varphi \Rightarrow r \le \frac{1}{3}\cos\varphi\sin^2\varphi.$$

От $r \ge 0 \Rightarrow \cos\varphi\sin^2\varphi \ge 0 \Rightarrow \cos\varphi \ge 0 \Rightarrow \varphi \in [0;\pi/2]$.

Така D преобразуваме до $T: \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le r \le \frac{1}{3}\cos\varphi\sin^2\varphi. \end{cases}$

$$V(K) = \iint_D \left(xy^2 - (9x^2+y^2)^2\right) dx\,dy = \iint_T \left(\frac{r^3}{3}\cos\varphi\sin^2\varphi - r^4\right) \cdot \frac{r}{3}\, dr\,d\varphi =$$

$$= \iint_T \left(\frac{r^4}{9}\cos\varphi\sin^2\varphi - \frac{r^5}{3}\right) dr\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{1}{3}\cos\varphi\sin^2\varphi} \left(\frac{r^4}{9}\cos\varphi\sin^2\varphi - \frac{r^5}{3}\right) dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left. \frac{r^5}{45}\cos\varphi\sin^2\varphi - \frac{r^6}{18} \right|_0^{\frac{\cos\varphi\sin^2\varphi}{3}} d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{45}\cdot\frac{\cos^5\varphi\sin^{10}\varphi}{35}\cdot\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi-\frac{1}{18}\cdot\frac{\cos^6\varphi\sin^{12}\varphi}{36}\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos^6\varphi\cdot\sin^{12}\varphi\left(\frac{1}{3^2.5.35}-\frac{1}{2.3^2.36}\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos^6\varphi\sin^{12}\varphi\cdot\left(\frac{6-5}{2.3^8.5}\right)d\varphi=\frac{1}{10.3^8}\int_0^{\pi/2}\sin^{12}\varphi\cos^6\varphi\,d\varphi.$$

Получихме нещо подобно на първия опит за решение от предишната задача. За пълнота, ще го сметнем този път. Сметките са дълги, но показват в действие важна техника за пресмятане на определени интеграли: намиране на рекурентна връзка след интегриране по части.

И така, нека $I_{m,n}=\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x\,dx$, $m,n\in\mathbb{N}$

$$I_{m,n}=\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^{n-1}x\cdot\cos x\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^{n-1}x\,d\sin x=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x\,d\frac{\sin^{m+1}x}{m+1}=\frac{1}{m+1}\int_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x\,d\sin^{m+1}x\overset{\text{по части}}{=}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{m+1}\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x\Big|_0^{\pi/2}}_{0\text{, за } n\geq 2,\ m\in\mathbb{N}}-\frac{1}{m+1}\int_0^{\pi/2}\sin^{m+1}x\cdot(n-1)\cos^{n-2}(x)\cdot(-\sin x)\,dx$$

в $\pi/2$ от $\cos x$
в 0 от $\sin x$

$$=\frac{n-1}{m+1}\int_0^{\pi/2}\sin^{m+2}x\cos^{n-2}x\,dx=$$

$$=\frac{n-1}{m+1}\cdot I_{m+2,n-2}.$$

$\Rightarrow I_{m,n}=\frac{n-1}{m+1}I_{m+2,n-2}$ и може да повтаряме докато $n\geq 2$.

В конкретния случай, $I_{12,6}=\frac{5}{13}\cdot I_{14,4}=\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{15}\cdot I_{16,2}=$ тук $n=2$

$$=\frac{5.\cancel{3}}{13.\cancel{15}}\cdot\frac{1}{17}\cdot I_{18,0}=\frac{1}{13.17}\cdot I_{18,0}=\frac{1}{221}\int_0^{\pi/2}\sin^{18}x\,dx.$$

cos изчезна, остана само sin под интеграла.

Да означим $J_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$.

За J_n също ще намерим рекурентна връзка:

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}x \cdot \sin x\, dx = -\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}x\, d\cos x = \underbrace{-\cos x \sin^{n-1}x \Big|_0^{\pi/2}}_{0 \text{ за } n\geq 2} +$$

$$+\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot (n-1)\sin^{n-2}x \cdot \cos x\, dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}x \cos^2 x\, dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)\, dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}x\, dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx =$$

$$J_n = (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n.$$

$$\Rightarrow n J_n = (n-1) J_{n-2} \Rightarrow J_n = \frac{n-1}{n} \cdot J_{n-2}$$ и продължаваме нататък.

Ще запишем случая $n=2k$, защото той ни интересува.

$$J_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot J_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-4} \cdot J_{2k-4} = \dots$$

$$= \frac{2k-1}{2k} \cdots \frac{3}{4} \cdot J_2 = \frac{(2k-1)}{2k} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot J_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot J_0 =$$

$$= \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^0 x\, dx = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

~~[illegible]~~ Аналогична формула е в сила и за $n = 2k+1$.

Там ~~[illegible]~~ е при $n=1$, $\int_0^{\pi/2} \sin^1 x\, dx = 1$.

и тогава $J_{2k+1} = \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$.

Да се върнем към задачата, $J_{18} = J_{2\cdot 9} = \dfrac{(2\cdot 9-1)!!}{(2\cdot 9)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{17!!}{18!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}$.

Окончателно, $V = \dfrac{1}{10\cdot 3^8} \cdot I_{12,6} = \dfrac{1}{10\cdot 3^8} \cdot \dfrac{1}{221} \cdot J_{18} =$

$$= \boxed{\frac{1}{10\cdot 3^8} \cdot \frac{1}{221} \cdot \frac{17!!}{18!!} \cdot \frac{\pi}{2}}$$

, което е астрономически малко, но все пак положително число (защото е обем, трябва да е положително).

Scanned with CamScanner

Както с двойни интеграли може да се намери център на тежестта на равнинна фигура, така с тройни интеграли може да се намери център на тежестта на пространствено тяло. Няма да се спираме конкретно на този въпрос, защото няма нищо ново като идеи.

Ще покажем с два примера как могат да се сметат "обеми" на многомерни тела. Ако $K \subseteq \mathbb{R}^n$, то "обемът" на K е

$V = \underbrace{\iiint\cdots\int}_{K} 1\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$. Всъщност това е n-мерния обем.

1-мерен обем – дължина, 2-мерен обем – лице

3-мерен обем – обем, n-мерен обем за $n \geq 3$ също ще наричаме обем.

Принципът на Кавалиери гласи, че ако: $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $K: \begin{cases} a \leq x_1 \leq b \\ (x_2, \dots, x_n) \in D_{x_1} \end{cases}$

то $V_n(K) = \int_a^b \Big(\underbrace{\iint\cdots\int_{D_{x_1}} 1\, dx_2 \dots dx_n}_{n-1 \text{ мерен обем на } D_{x_1}} \Big) dx_1 = \int_a^b V_{n-1}(D_{x_1})\, dx_1$.

Зад. 6. Намерете "обема" на множеството $\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq a, \ a > 0 \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$.

Реш. Това множество се нарича n-мерен симплекс.

При $n=1$: – отсечка с дължина a, ~~дб~~

$n=2$:  – правоъгълен триъгълник със страна a, лице $\frac{a^2}{2}$.

$n=3$: 

– правоъгълна триъгълна пирамида с основа правоъгълен триъгълник със страна a и височина a $\Rightarrow$ обем $\dfrac{\frac{a^2}{2} \cdot a}{3} = \dfrac{a^3}{6}$.

Виждаме, че обемът е константа по a^n (поне за $n = 1, 2, 3$). Ще видим, че това е в сила за всяко n.

Реш. Нека с $V_n(a)$ означим търсения обем.

Правим линейна смяна $\begin{cases} x_1 = a\cdot y_1 \\ \vdots \\ x_n = a\cdot y_n \end{cases}$ Якобианът в случая е n×n детерминанта.

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & & 0 \\ & a & \\ 0 & & a \end{vmatrix} = a^n.$$

$x_i \geq 0 \Rightarrow a\cdot y_i \geq 0 \Rightarrow y_i \geq 0.$

Още $x_1 + \dots + x_n \leq a \iff a(y_1 + \dots + y_n) \leq a \iff y_1 + \dots + y_n \leq 1.$

Преобразувахме симплекса до $\begin{cases} y_1, \dots, y_n \geq 0 \\ y_1 + \dots + y_n \leq 1 \end{cases}$ - симплекс с $a = 1$.

$$V_n(a) = \underbrace{\iint\dots\int}_{n} 1\, dx_1 \dots dx_n = \underbrace{\iint\dots\int}_{n} a^n dy_1 \dots dy_n = a^n \cdot V_n(1).$$

Както предположихме, $V_n(a) = \text{const} \cdot a^n$.

Остава да намерим тази константа, т.е. $V_n(1)$.

Прилагаме Кавалиери. За фиксирано $y_1 \in [0;1]$,

множеството което се получава е $\begin{cases} y_2, \dots, y_n \geq 0 \\ y_2 + \dots + y_n \leq 1 - y_1 \end{cases}$

$(n-1)$-мерен симплекс с $a = 1 - y_1$.

$V_n(1) = \int_0^1 V_{n-1}(1-y_1)\, dy_1$ съгласно Кавалиери.

Но $V_n(a) = a^n V_n(1)$ важи за всяко n и всяко a, т.е.

$$V_{n-1}(1-y_1) = (1-y_1)^{n-1} \cdot V_{n-1}(1) \Rightarrow$$

$$V_n(1) = \int_0^1 (1-y_1)^{n-1} \cdot V_{n-1}(1)\, dy_1 = V_{n-1}(1) \int_0^1 (1-y)^{n-1} dy =$$

$$-V_{n-1}(1) \int_0^1 (1-y)^{n-1} d(1-y) \underset{(n\geq 1)}{=} -V_{n-1}(1) \cdot \frac{(1-y)^n}{n}\Big|_0^1 = V_{n-1}(1) \cdot \left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\Rightarrow V_n(1) = \frac{1}{n} \cdot V_{n-1}(1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot V_{n-2}(1) = \dots = \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{V_1(1)}_{1} = \frac{1}{n!}.$$

Намерихме константата $V_n(1) = \frac{1}{n!}$ и тя се съгласува с пресметнатите по-рано $n = 1, 2, 3$.

Окончателно, $V_n(a) = \frac{a^n}{n!}$.

Зад 7. Намерете обема на $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $K: x_1^2+\dots+x_n^2 \le R^2$, $R>0$.

Бел. K е n-мерно кълбо с радиус R.

при $n=1$, K е отсечка с дължина $2R$

$n=2$, K е кръг с лице πR^2

$n=3$, K е кълбо с обем $\frac{4}{3}\pi R^3$ от задача 1.

Както и при симплекса изглежда, че обема е константа по R^n.

Реш. Означаваме търсения обем с $V_n(R)$.

Със смяната $\begin{cases} x_1 = Ry_1 \\ x_2 = Ry_2 \\ \dots \\ x_n = Ry_n \end{cases}$, $|J| = R^n$, получаваме $V_n(R) = R^n V_n(1)$ като в задача 6.

За краткост, вместо $V_n(1)$, нека пишем просто V_n.

Така $V_n(R) = V_n \cdot R^n$. Остава да намерим обема на $K_1: x_1^2+\dots+x_n^2 \le 1$

Фиксираме x_1. Тогава $x_2^2+\dots+x_n^2 \le 1-x_1^2 \Rightarrow 1-x_1^2 \ge 1$, $x_1 \in [-1;1]$.

$x_2^2+\dots+x_n^2 \le \left(\sqrt{1-x_1^2}\right)^2$ – това е $(n-1)$-мерно кълбо с радиус $\sqrt{1-x_1^2}$.

$$V_n = \iint_{K_1}\!\dots\!\int 1\,dx_1\dots dx_n = \int_{-1}^{1} V_{n-1}\left(\sqrt{1-x_1^2}\right)dx_1 = \int_{-1}^{1} V_{n-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} V_{n-1}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1}dx = V_{n-1}\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1}dx,$$ аналогично на зад. 6.

Подинтегралната функция е четна в симетричен интервал.

$\Rightarrow V_n = 2\cdot V_{n-1}\int_0^1\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1}dx$. Полагаме $x=\cos t$,

$x\in[0;1] \Rightarrow t$ се мени от $\frac{\pi}{2}$ до 0.

$dx = -\sin t\,dt$

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t$

(в интервала $[0;\pi/2]$, $\sin t \ge 0$).

$$V_n = 2V_{n-1}\int_{\pi/2}^{0}(\sin t)^{n-1}(-\sin t)\,dt =$$

$$= 2V_{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt = 2V_{n-1}\cdot J_n,$$

където J_n беше дефинирано и пресметнато в задача 5.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
J_n	$\pi/2$	1	$\pi/4$	$2/3$	$3\pi/16$	$8/15$	$5\pi/32$	$16/35$	$\frac{35\pi}{256}$	

$\left(J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}\right.$, с начални условия $J_0 = \pi/2$, $\left.J_1 = 1\right)$.

Тогава от $V_1 = 2$ и $V_n = 2V_{n-1} J_n$ можем да намерим V_n поне за първите няколко стойности на n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
V_n	2	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\pi^2/2$	$8\pi^2/15$	$\pi^3/6$	$16\pi^3/105$	$\pi^4/24$

$V_2 = 2.V_1.J_2 = 2.2.\frac{\pi}{4} = \pi$

$V_3 = 2.V_2.J_3 = 2.\pi.\frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}$ } съгласуват се с бележката от началото

и т.н...

Забелязваме, че $V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}$ за $k = 1, 2, 3, 4$.

Можем да докажем по индукция с рекурентната формула.

База имаме за $k = 4$. Нека $V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}$

$$V_{2(k+1)} = V_{2k+2} = 2V_{2k+1}\cdot J_{2k+2} = 2.(2\underbrace{V_{2k}}_{\text{и. п.}}\cdot J_{2k+1})\cdot\underbrace{J_{2k+2}}_{\text{от зад. 5}} =$$

$$= 4.\frac{\pi^k}{k!}\cdot\underbrace{\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}}_{J_{2k+1}}\cdot\underbrace{\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}}_{J_{2k+2}} = \frac{4\pi^k}{k!}\cdot\frac{\pi}{2.(2k+2)} = \frac{\pi^{k+1}}{(k+1)!}\ \checkmark$$

Тогава $V_{2k+1} = 2V_{2k}\cdot J_{2k+1} = 2.\frac{\pi^k}{k!}\cdot\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \frac{\pi^k.2^{k+1}}{(2k+1)!!}$,

съгласно $\frac{(2k)!!}{k!} = \frac{2.1.2.2\dots 2.k}{1.2\dots k} = 2^k$.

Окончателно

$$V_n(R) = \begin{cases} V_{2k}(R) = R^{2k}.V_{2k}(1) = \frac{\pi^k}{k!}.R^{2k}, & k \in \mathbb{N} \\ V_{2k+1}(R) = R^{2k+1}.V_{2k+1}(1) = \frac{\pi^k.2^{k+1}}{(2k+1)!!}.R^{2k+1}, & k = 0, 1, \dots \end{cases}$$