Абсолютна и условна сходимост.

Определение. *Даден ред* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *се нарича* **абсолютно сходящ**, *ако редът от абсолютните стойности на членовете му*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

е сходящ.

Теорема 3. *Всеки абсолютно сходящ ред е сходящ.*

Доказателство. Ще използваме критерия на Коши за сходимост (теорема 1). Абсолютната сходимост на дадения ред означава, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува номер ν , така че при всяко естествено $n > \nu$ и всяко естествено $p > 0$ да имаме

$$\sum_{k=n+1}^{p} |a_k| < \varepsilon.$$

От друга страна, от неравенството на триъгълника имаме

$$\left| \sum_{k=n+1}^{p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{p} |a_k| < \varepsilon,$$

което доказва сходимостта на дадения ред. ■

Обратното твърдение не е вярно; съществуват редове, които са сходящи, но не абсолютно сходящи. Такива редове се наричат **условно сходящи**.

Редове с алтернативно сменящи се знаци на членовете.

В тази точка ще разгледаме такива редове, за които знаците на съответните членове се менят алтернативно. По-точно, ако $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ е редица от положителни числа, ние разглеждаме реда

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n.$$

За такива редове е в сила следният

Критерий на Лайбниц. *Да предположим, че редицата от положителни числа* $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ *е монотонно намаляваща и клони към нула. Тогава редът* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *е сходящ.*

Доказателство. Ще разгледаме поотделно частичните суми с четни и нечетни номера. Ще докажем, че четните суми монотонно растат, а нечетните суми монотонно намаляват. Наистина,

$$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n},$$

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq S_{2n-1}$$

поради монотонното намаляване на редицата $\{a_n\}$. От друга страна,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \geq 0.$$

С други думи, имаме неравенствата

$$S_2 \leq S_4 \leq \ldots \leq S_{2n} \leq \ldots \leq S_{2n+1} \leq S_{2n-1} \leq \ldots \leq S_3 \leq S_1.$$

Поотделно четните и нечетните частични суми образуват монотонни и ограничени редици. Следователно тези редици са сходящи и можем да положим

$$S' = \lim S_{2n+1} \, , \, S'' = \lim S_{2n}.$$

Тъй като $a_n \to 0$, то $\lim (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$, т.е. $S' = S''$. Оттук лесно се вижда, че редицата от частичните суми S_n е сходяща, т.е. редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ е сходящ. ∎

Забележка. От доказателството се вижда, че за сумата S на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ се изпълнява неравенството $S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$. Тъй като $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}$, то оттук следва, че $S - S_{2n} \leq a_{2n+1}$ и $S_{2n+1} - S \leq a_{2n+1}$. Ако разгледаме n-тият остатък на реда $R_n = S - S_n$, във всички случаи получаваме оценката

$$|R_n| \leq a_{n+1},$$

което ни дава скоростта на сходимост на дадения ред.

Допълнения:

От изложеното по горе е ясно, че е от съществена необходимост да имаме някакво ДУ за монотонно клонене към нула на една числова редица.

1. ДУ по „Раабе-Дюамел“. *Нека е дадена редица с положителни членове* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Ако редицата* $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ *е сходяща и клони към числото* $L > 0$. *Тогава редицата* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *е монотонно намаляваща и клоняща към 0.*

Доказателство. Монотонността следва непосредствено от това, че $R_n > 0$ за всички n след някое фиксирано n_0. Тогава понеже редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отдолу от 0, тя е сходяща. Имаме две възможности за нейната граница $A = \lim_{n\to\infty} a_n$: Първа възможност $A = 0$, тогава твърдението е доказано и втора възможност $A > 0$. Ще отхвърлим втората. За целта избираме такова естествено число r, че $rL > 1$ и прилагаме граничната форма на критерия на Раале-Дюамел за реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^r$. Границата на формата на Раабе-Дюамел за него е равна на rL, която по условие е по-голяма от 1 и имаме, сходимост. От НУ на Коши за реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^r$ следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^r = 0$ и от там $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Като комбинираме последното с критериите на Лайбниц и Раабе-Дюамел получаваме следното полезно твърдение.

2. Гранична форма "РДЛ". *Нека е даден реда с положителни членове* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *и редицата* $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ *е сходяща и клони към числото* L. *Тогава при* $L > 1$ *редът е асолютно сходящ, а при* $L \in (0, 1)$ *и* $L = 1 - 0$ *редът е условно сходящ.*