Писмен изпит по Аналитична геометрия
I курс, Информатика
24.01.2022 г.

Вариант 2

1 зад. Даден е тетраедър $OABC$. Нека точката A_1е медицентър на ΔOBC, точката B_1 е медицентър на ΔOAC, точката C_1 е медицентър на ΔOAB и точката O_1 е медицентър на ΔABC. Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

a) (4 т.) Да се изразят векторите $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ чрез векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;
b) (6 т.) Да се докаже, че правите BB_1 и CC_1се пресичат в една точка M и $BM: MB_1$= $CM: MC_1$ =3:1
c) (2 т.) Да се докаже, че точките O, M, O_1 са колинеарни.

2 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, за които $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.
Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{a} \times \vec{b}$.

a) (6 т.) Да се докаже, че съществува тетраедър *OABC;*
b) (2 т.) Да се намери обема на тетраедъра *OABC*.

3 зад. Спрямо ОКС *К* = *Oxyz* в пространството са дадени правите

$$a: \begin{cases} x = 4 + p \\ y = 4 + 2p\,, \\ z = -1 - 2p \end{cases} p \in \mathbb{R} \ \text{ и } b: \begin{cases} 2x + y + 2z - 1 = 0 \\ 2x - y + 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

a) (6 т.)Да се намери разстоянието между правите a и b;
b) (4 т.) Нека P е пресечната точка на правата a и равнината $\gamma: x + 2y - 2z - 23 = 0$, а Q е пресечната точка на правата b с равнината $\pi: 3x - 2y - 2z + 14 = 0$. Ако точката $R(2,4,-1)$, да се намери лицето на ΔPQR.

4 зад. (10 т.) В разширена евклидова равнина E_2^* е дадена кривата от втора степен

$$k: -4x^2 + 10xy - 5y^2 - 6yt + 7t^2 = 0$$

и точката $P(6, 5, 2)$, която е външна за нея. Да се намерят общи уравнения на допирателните към кривата k, които минават през точката P.