2. За задачата на ЛО

$$(L)\quad \left|\begin{array}{l} \max\ z_L(x) = 2x_1 - 7x_2 - 3x_3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ \quad x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

а) напишете съответната канонична задача (K);

б) намерете множеството от оптимални решения и оптималната стойност на целевата ф-ия на задачите (K) и (L), като използвате таблична форма на симплекс метода.

Решение: а) $x_3 = x_3^+ - x_3^-$

$$(K)\quad \left|\begin{array}{l} \min\ z_K(x) = -2x_1 + 7x_2 + 3x_3^+ - 3x_3^- \\ x_1 + x_2 \qquad - x_4 = 2 \\ \quad x_2 \qquad + x_5 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3^+ + x_3^- = 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3^+ \geq 0,\ x_3^- \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0 \end{array}\right.$$

б) (K) има частичен базис x_5, x_3^-. Добавяме изкуствена променлива x_6 и пишем М-задача

$$(M)\quad \left|\begin{array}{l} \min\ z_M(x) = -2x_1 + 7x_2 + 3x_3^+ - 3x_3^- + \boxed{M.x_6} \\ x_1 + x_2 \qquad - x_4 \quad + \boxed{x_6} = 2 \\ \quad x_2 \qquad + x_5 \qquad = 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3^+ + x_3^- \qquad = 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3^+ \geq 0,\ x_3^- \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0\ \boxed{x_6 \geq 0} \end{array}\right.$$

която е в базисен вид спрямо началния

базис $\{x_6, x_5, x_3^-\}$

④

	X_B	C_B	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
			-2	7	3	-3	0	0	M	
	x_6	M	1	①	0	0	-1	0	1	2
	x_5	0	0	1	0	0	0	1	0	4
	x_3^-	-3	1	-2	-1	1	0	0	0	3
	$\bar{C}$		$-M+1$	$-M+1$	0	0	M	0	0	$9-2M$
X_M^*	x_2	7	①	1	0	0	-1	0	1	2
	x_5	0	-1	0	0	0	1	1	-1	2
	x_3^-	-3	3	0	-1	1	-2	0	2	7
			0	0	0	0	1	0	$M-1$	7
X_M^{**}	x_1	-2	1	1	0	0	-1	0	1	2
	x_5	0	0	1	0	0	0	1	0	4
	x_3^-	-3	0	-3	-1	1	1	0	-1	1
			0	0	0	0	1	0	$M-1$	7

1ва СТ

$\min\left\{\frac{2}{①}, \frac{4}{1}\right\} = 2$

x_2 влиза

x_6 излиза

2ра СТ

∀ относ. оценки са ≥ 0 => оптимално бдр на (M)

$\min\left\{\frac{2}{①}, \frac{7}{3}\right\} = 2$

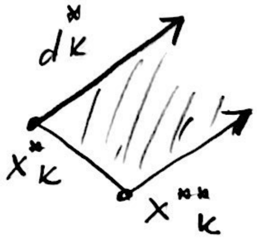
3та СТ

друго оптим. бдр на (M)

$$\overset{x_1\ x_2\ x_3^+\ x_3^-\ x_4\ x_5\ x_6}{x^*_M\ (0,2,0,7,0,2,0)}$$

$x^{**}_M(2,0,0,1,0,4,0)$

$d^*_M\ (0,0,1,1,0,0,0)$ $\qquad z^*_M = z(x^*_M) = -7$



$$=> \overset{x_1\ x_2\ x_3^+\ x_3^-\ x_4\ x_5}{x^*_K\ (0,2,0,7,0,2)}$$

$x^{**}_K\ (2,0,0,1,0,4)$ $\qquad z^*_K = z(x^*_K) = -7$

$d^*_K\ (0,0,1,1,0,0)$

∀ реш. на (K) $\quad \lambda x^*_K + (1-\lambda)x^*_K + td^*_K$ за $\lambda \in [0,1]$ и $t \geq 0$

$$=> \overset{x_1\ x_2\ x_3}{x^*_L\ (0,2,-7)}$$

$x^{**}_L\ (2,0,-1)$ $\qquad z^*_L = z(x^*_L) = 7$

$d^*_L\ (0,0,0)$ -> няма неогр. ръб от реш.

∀ реш на (L) са $\lambda x^*_L + (1-\lambda)x^{**}_\lambda$ за $\lambda \in [0,1]$, или

$(2-2\lambda, 2\lambda, -1-6\lambda)$ за $\lambda \in [0,1]$.

М-во от решения на (L) е отсечка.

2. За задачата (L):

в) напишете двойнствената задача (DL);

г) като използвате СТ от подточка б), посочете едно оптимално решение на (DL) и посочете оптималната стойност на целевата ѝ функция.

Решение:

в) $(L) \rightarrow (L) \left| \begin{array}{l} \max\ 2x_1 - 7x_2 - 3x_3 \\ -x_1 - x_2 \leq -2 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$

$$(DL) \left| \begin{array}{l} \min\ -2\pi_1 + 4\pi_2 + 3\pi_3 \\ -\pi_1 + \pi_3 \geq 2 \\ -\pi_1 + \pi_2 - 2\pi_3 \geq -7 \\ -\pi_3 = -3 \\ \pi_1 \geq 0,\ \pi_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

г) Двойнствената на (K) е:

$$(DK) \left| \begin{array}{l} \max\ 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ y_1 + y_3 \leq -2 \\ y_1 + y_2 - 2y_3 \leq 7 \\ -y_3 \leq 3 \\ y_3 \leq -3 \\ -y_1 \leq 0 \\ y_2 \leq 0 \end{array} \right. \Rightarrow (DK) \left| \begin{array}{l} \max\ 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ y_1 + y_3 \leq -2 \\ y_1 + y_2 - 2y_3 \leq 7 \\ y_3 = -3 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ Връзката м/у променливите на (DL) и (DK) е

$$(\#) \quad (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (y_1, -y_2, -y_3)$$

От последната СТ за решение на (DK) имаме:

$$y^* = c_B^T B^{-1} = [-2, 0, -3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [-2+3, 0, -3] = [1, 0, -3]$$

От връзката (#) имаме за решение на (DL)

$$\pi^* = [1, 0, 3].$$

Оптим. ст-т на цел. ф-ия на (DL) е:

$$-2.1 + 3.3 = -2 + 9 = 7.$$

Това се очаква, защото знаем, че $z_L^* = 7$.