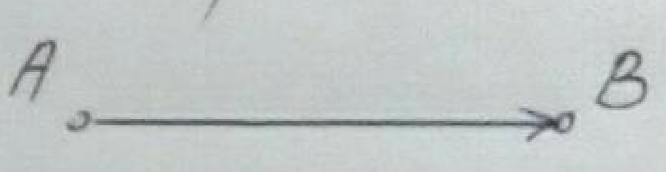
# 1. Векторно пространство. Афинни операции с вектори

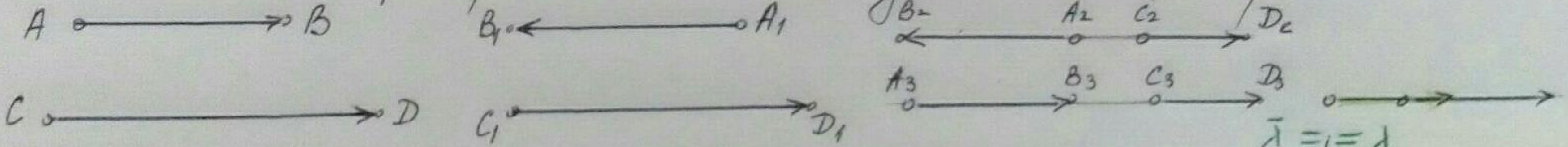
Насочена отсечка $\overrightarrow{AB}$ наричаме наредената двойка точки $A, B$, т.е. точката $A$ е обявена за първа (начало), а точката $B$ за втора (край).




Дължина на $\overrightarrow{AB}$ – дължината на отсечката $(AB)$. Означаваме $|\overrightarrow{AB}|$

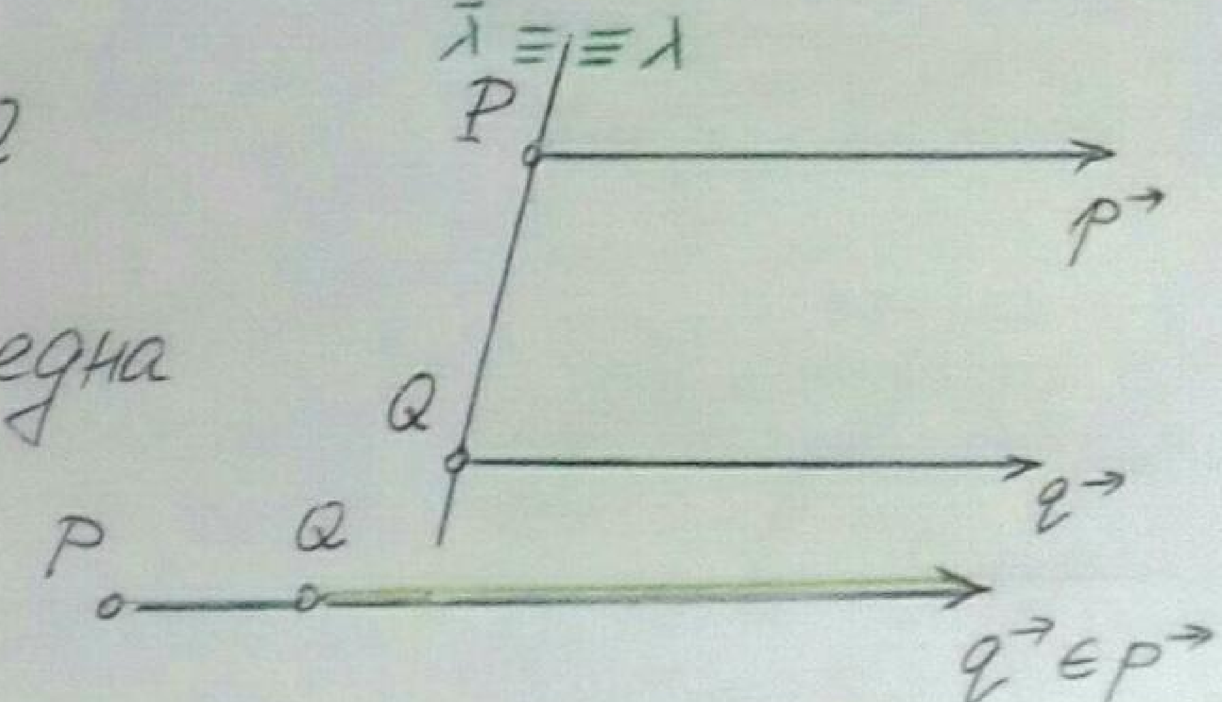
Насочена отсечка, за която $A \equiv B$ наричаме нулева насочена отсечка. Дефинираме дължината на $\overrightarrow{AA}$ да е $|\overrightarrow{AA}| = 0$.

Две ненулеви насочени отсечки наричаме колинеарни, ако лежат или на успоредни или на една и съща права.

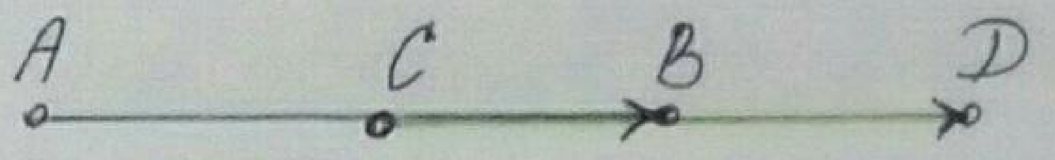


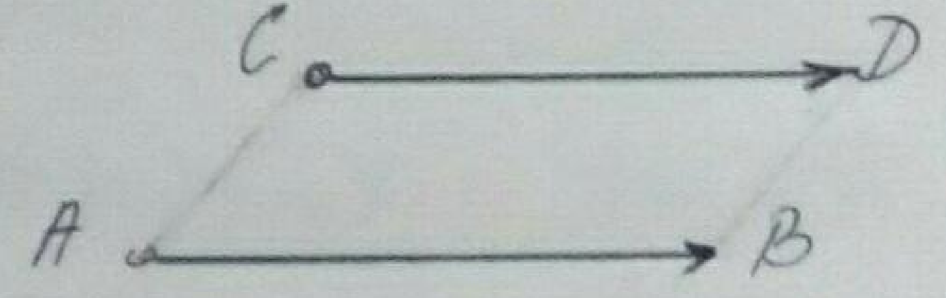

Лъчите $p^{\to}$ и $q^{\to}$ с начала съответно $P$ и $Q$ на наричаме еднопосочни, ако:

- или лежат на успоредни прави и са в една полуравнина спрямо правата $PQ$
- или единият лъч съдържа другия

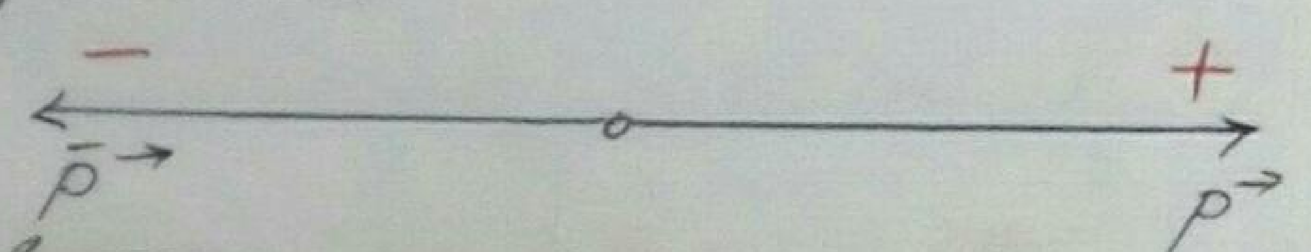


Две ненулеви насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ наричаме **равни**, ако имат равни дължини - $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ и лъчите $AB^{\rightarrow}$ и $CD^{\rightarrow}$ са еднопосочни. По дефиниция всеки две нулеви насочени отсечки са равни.



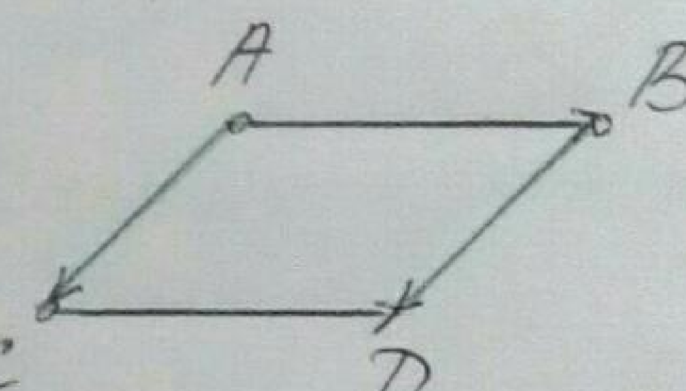

**Ос** наричаме права, за която с помощта на кой да е два противоположни лъча от нея едната посока е избрана за положителна „+", а другата за отрицателна.




Нека $\overrightarrow{AB}$ е насочена отсечка и правата $g = AB$ е превърната в ос. **Алгебрична мярка** на насочената отсечка $AB^{\rightarrow}$ върху <u>оста</u> $g$ наричаме числото $\overline{AB} = \varepsilon|AB|$, $\varepsilon = \pm 1$, където $\varepsilon = 1$, ако посоката от A към B съвпада с положителната посока на $g$ и $\varepsilon = -1$ в противен случай.

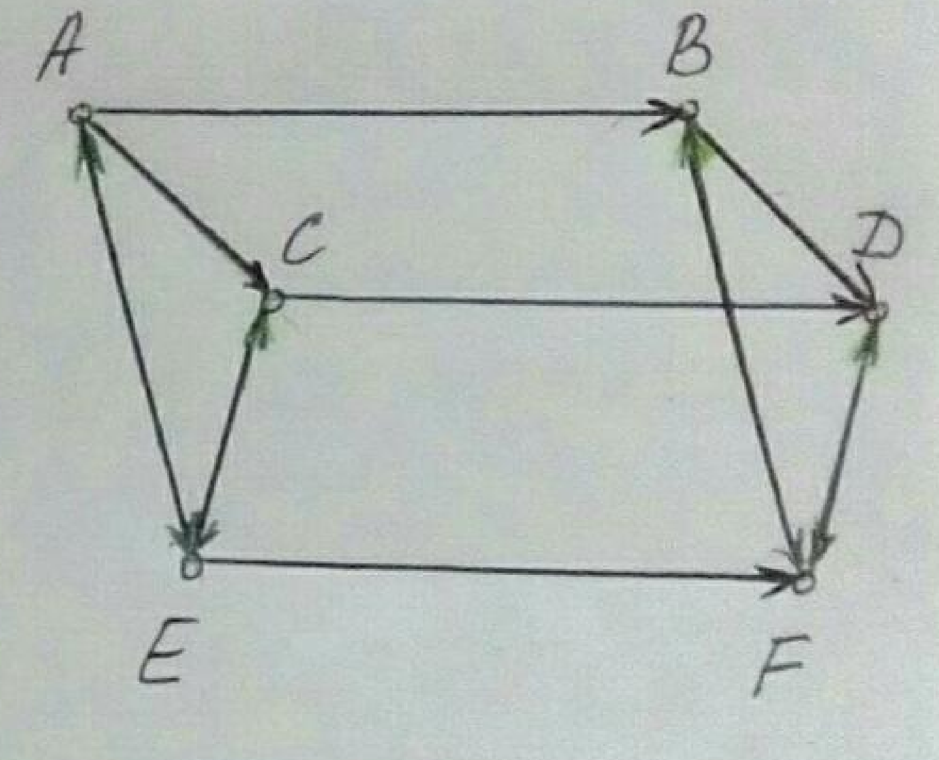
Лесно се проверява, че

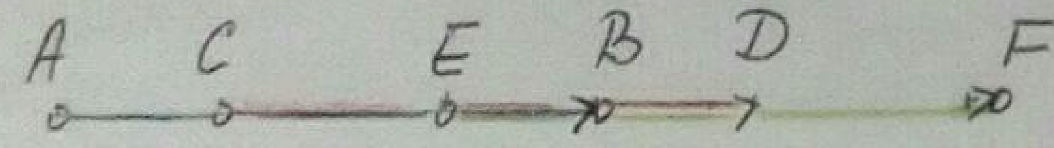
1. $\overline{AB} = -\overline{BA}$.
2. За кои да е три колинеарни точки $A, B, C$ е в сила
   $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 0$ – релация на Шал.
3. Ако насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са равни, то $\overline{AB} = \overline{CD}$
   и $\overline{AC} = \overline{BD}$.



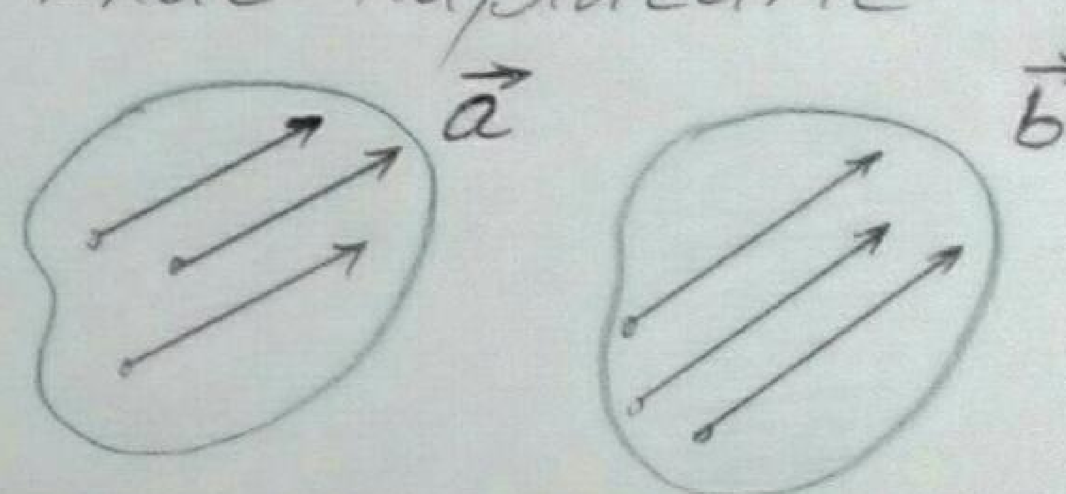

Релацията „равенство на насочени отсечки" е релация на еквивалентност, защото

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$
2. Ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.
3. Ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$



Под действието на тази релация множеството от ненулевите насочени отсечки се разбива на непресичащи се класове на еквивалентност. Всеки такъв клас наричаме свободен вектор. Означаваме с $\vec{a}, \vec{b}, \dots$



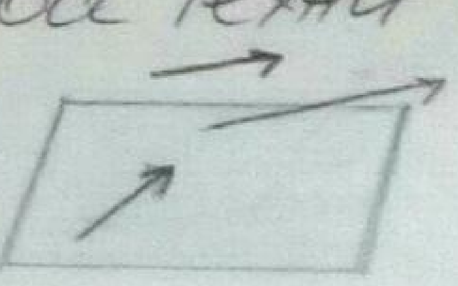

Нулевият вектор означаваме с $\vec{o}$ и считаме за колинеарен с кой да е вектор.

Всяка ненулева насочена отсечка попада в точно един клас и се нарича представител на вектора.

Ако $O$ е фиксирана точка, а $\vec{a}$ вектор, то $\exists!$ точка $A$, такава че насочената отсечка е представител на вектора $\vec{a}$.
Прието е вместо $\vec{AB} \in \vec{a}$ да се пише $\vec{AB} = \vec{a}$.

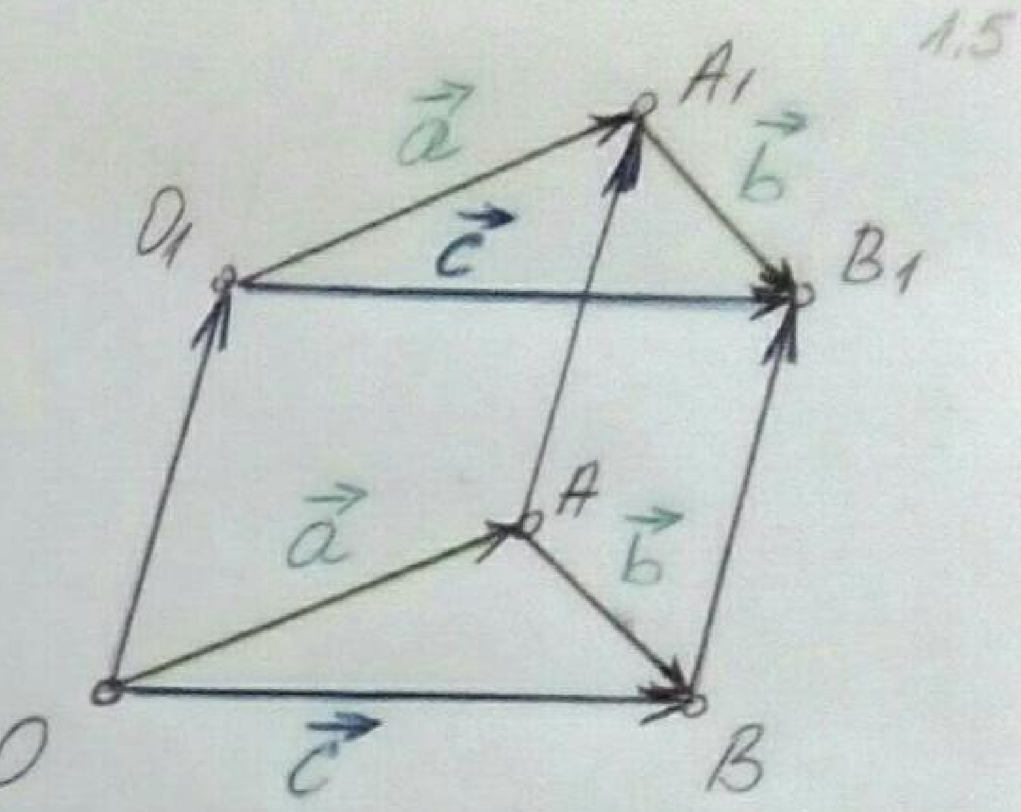
Нека $\vec{AB} = \vec{a}$. Тогава векторът с представител $\vec{BA}$ се нарича противоположен на $\vec{a}$ и се бележи с $-\vec{a}$.

Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се наричат колинеарни, ако кои да е два техни представители са колинеарни. Означаваме $\vec{a} \parallel \vec{b}$



Вектори, чиито представители са успоредни на една и съща равнина се наричат компланарни.

## Събиране на вектори




Сбор на два вектора $\vec a$ и $\vec b$ наричаме вектора $\vec c$, определен по следния начин:
Да фиксираме произволна точка $O$ и нека точките $A$ и $B$ са такива, че $\overrightarrow{OA} = \vec a$ и $\overrightarrow{AB} = \vec b$. Тогава $\vec c := \overrightarrow{OB}$

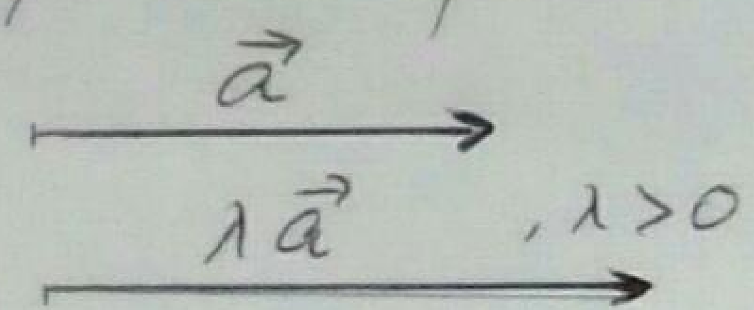
Коректност на дефиницията. Ще покажем, че определянето на вектора $\vec c$ не зависи от избора на точката $O$.

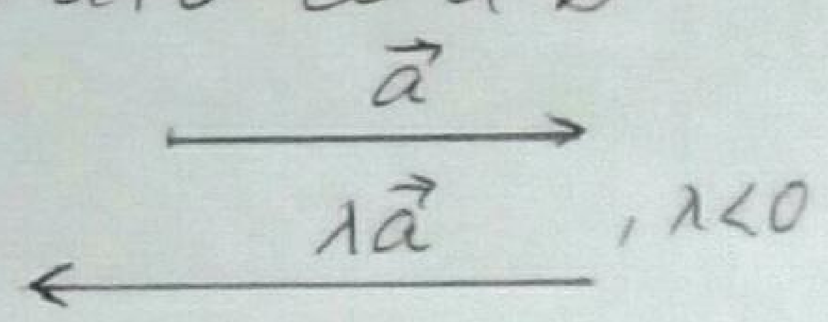
Нека $O_1 \neq O$, $A_1$ и $B_1$, такива че $\overrightarrow{OA_1} = a$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec b$

$\Rightarrow \overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} \Rightarrow \overrightarrow{O_1B_1} = \overrightarrow{OB}$.

## Умножение на вектор с число

Нека $\vec a$ е ненулев вектор, $\lambda$ - реално число ($\lambda \in \mathbb{R}$).
Произведението $\lambda \vec a$ е вектор $\vec b$ с дължина $|\vec b| = |\lambda||\vec a|$.
Ако $\lambda \neq 0$ $\vec b$ е ненулев вектор, колинеарен с $\vec a$ като $\vec a$ и $\vec b$ са еднопосочни $\Leftrightarrow \lambda > 0$




Ако $\vec a = \vec 0$, то $\vec b := \vec 0$.

Алгебрична мярка на вектор е алгебричната мярка на избран негов представител

От дефиницията на умножение на вектор с число имаме, че

$$\overline{\lambda \vec{a}} = \lambda \bar{a} \qquad (\overline{\vec{a}} \text{ записваме } \bar{a})$$

## <u>Свойства на събирането</u>

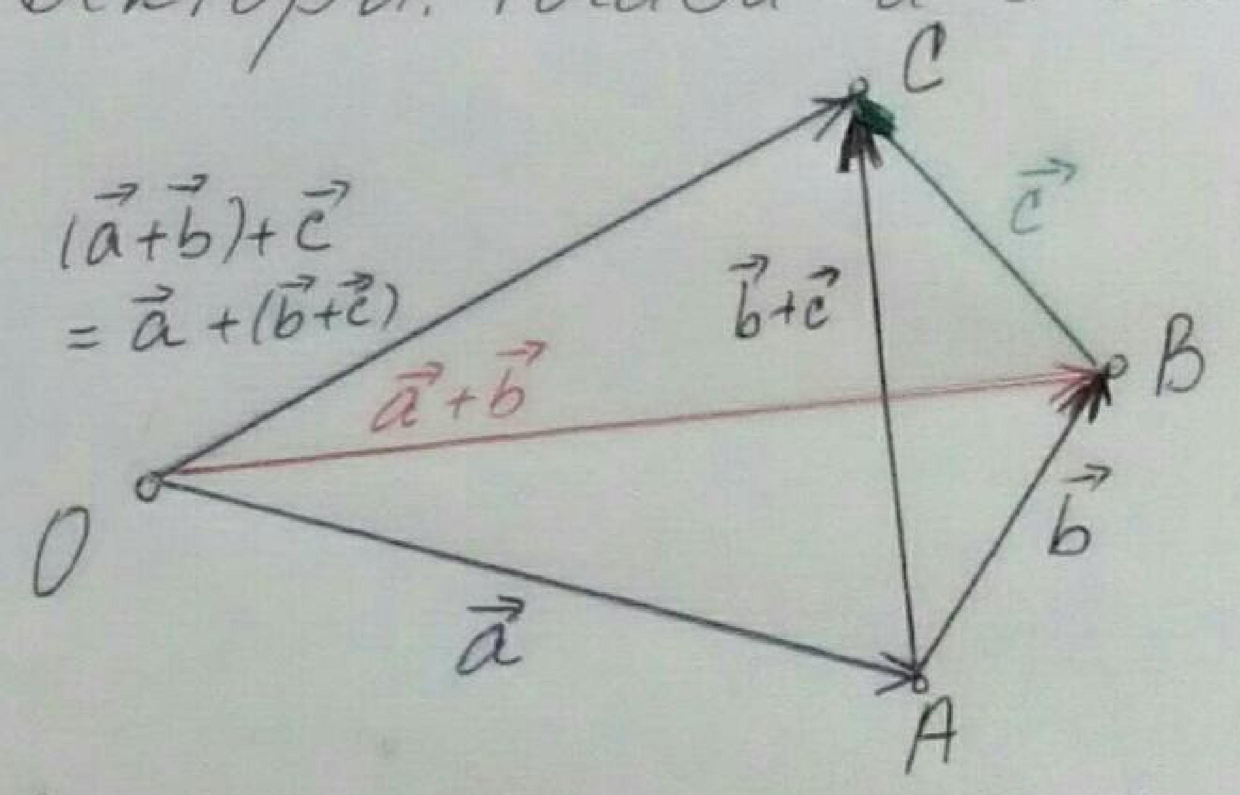
Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са произволни вектори. Тогава са в сила

1*. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

2*. $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

3*. $\vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$

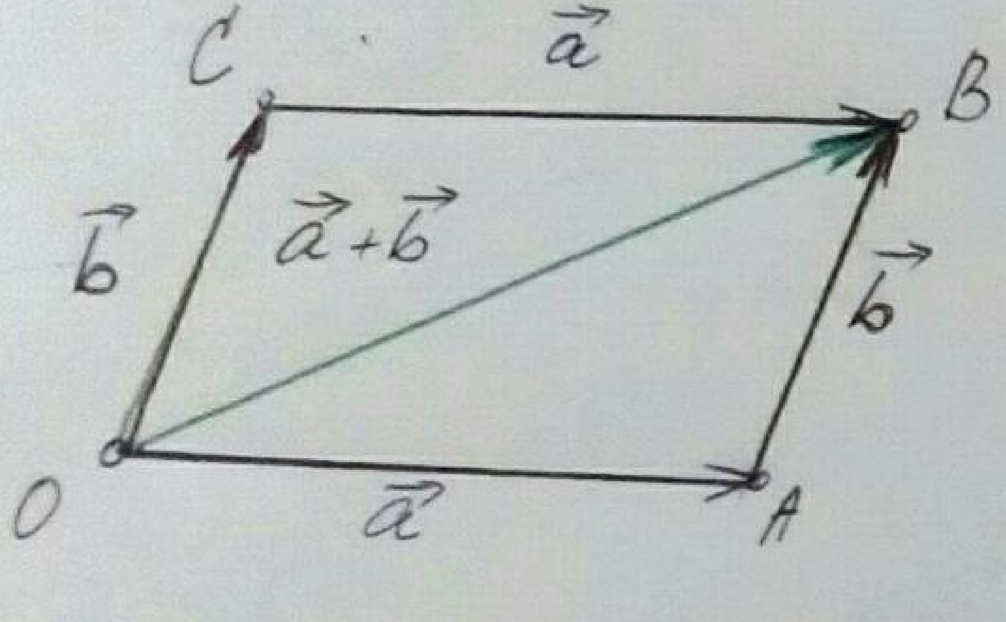
4*. $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$.




<u>Доказателство</u>. 1*. Нека O е произволна фиксирана точка и точките A, B и C са такива, че $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$.
Следователно $\overrightarrow{OB} = \vec{a}+\vec{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}+\vec{c}$.
Имаме $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$ => изпълнено е 1*.

2*. За векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ има две възможности - или са колинеарни или не.

Нека $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ и $O$ - фиксирана точка, а $A, B$ и $C$ са такива точки, че $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$ и $\vec{OC} = \vec{b}$. Тогава от успоредника




$OABC$ имаме $\vec{CB} = \vec{OA}$ и $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$ както и $\vec{OB} = \vec{OC} + \vec{CB}$, откъдето следва, че $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

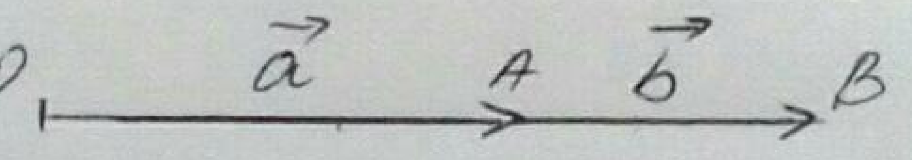
∴ За колинеарни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаме, че алгебричната мярка на сбора им е сбор от алгебричните им мерки

$$\overline{\vec{a} + \vec{b}} = \bar{a} + \bar{b}$$

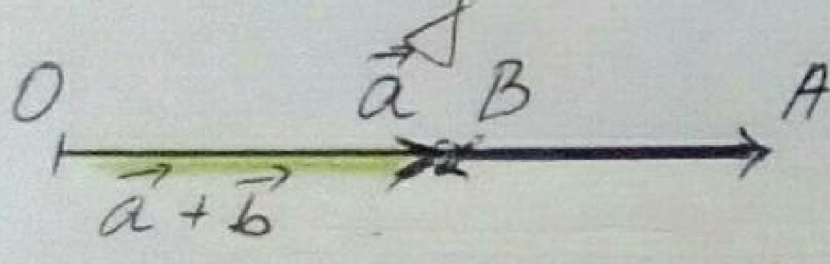
Нека $\vec{a} \parallel \vec{b}$ и $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$ $\Rightarrow \vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{OC} = \vec{b}$ и $\vec{CD} = \vec{a}$ $\Rightarrow \vec{OD} = \vec{b} + \vec{a}$.

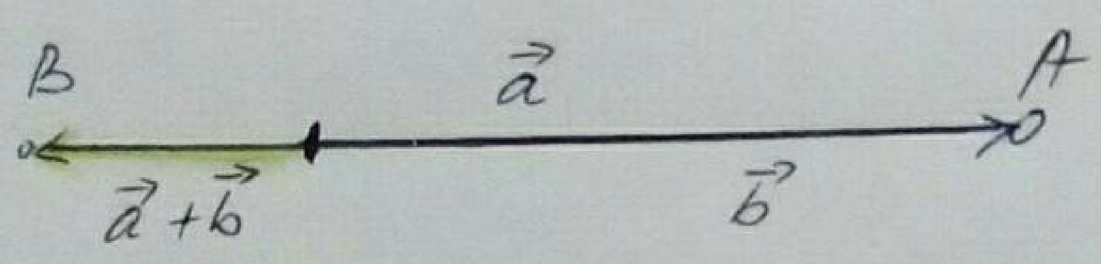
Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са еднопосочни, то $\vec{a} + \vec{b}$, както и $\vec{b} + \vec{a}$ са еднопосочни - както с $\vec{a}$, така и с $\vec{b}$. Също така, в този случай

$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$




Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са противопосочни, то векторите $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{b}+\vec{a}$ са еднопосочни или с $\vec{a}$ или с $\vec{b}$ в зависимост от това дали $|\vec{a}|>|\vec{b}|$ или $|\vec{a}|<|\vec{b}|$.




Така $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{b}+\vec{a}$ са еднопосочни при всеки случай и $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{b}+\vec{a}|$, следователно е изпълнено (**) и $\vec{OB}$ и $\vec{OD}$ - еднопосочни и $|\vec{OB}| = |\vec{OB}| \Rightarrow B \equiv D \Rightarrow$ $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$.

Верността на $3^*$ и $4^*$ следва непосредствено от дефиницията.

## Свойства на умножението — $\vec{a}, \vec{b}$ – вектори, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$5^*.\ 1.\vec{a} = \vec{a}$

$6^*.\ (\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$7^*.\ \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\cdot\vec{a}$

$8^*.\ \lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

**Доказателство.** $5^*$ е изпълнено непосредствено от дефиницията.

$6^*$ $\overline{(\lambda+\mu)\vec{a}} = (\lambda+\mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$ – (използва се дистрибутивния закон за елементи на числово поле). Също така е ясно, че векторите $(\lambda+\mu)\vec{a}$ и $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ са колинеарни.

$7^*$. Аналогично на доказателството на твърдението в $6^*$ – векторите $\lambda(\mu\vec{a})$ и $(\lambda\mu)\vec{a}$ са колинеарни и с равни дължини. Дали са еднопосочни или противопосочни зависи от това дали $\lambda$ и $\mu$ са с един и същи знак – $\lambda\mu > 0$ или не – $\lambda\mu < 0$. Имаме

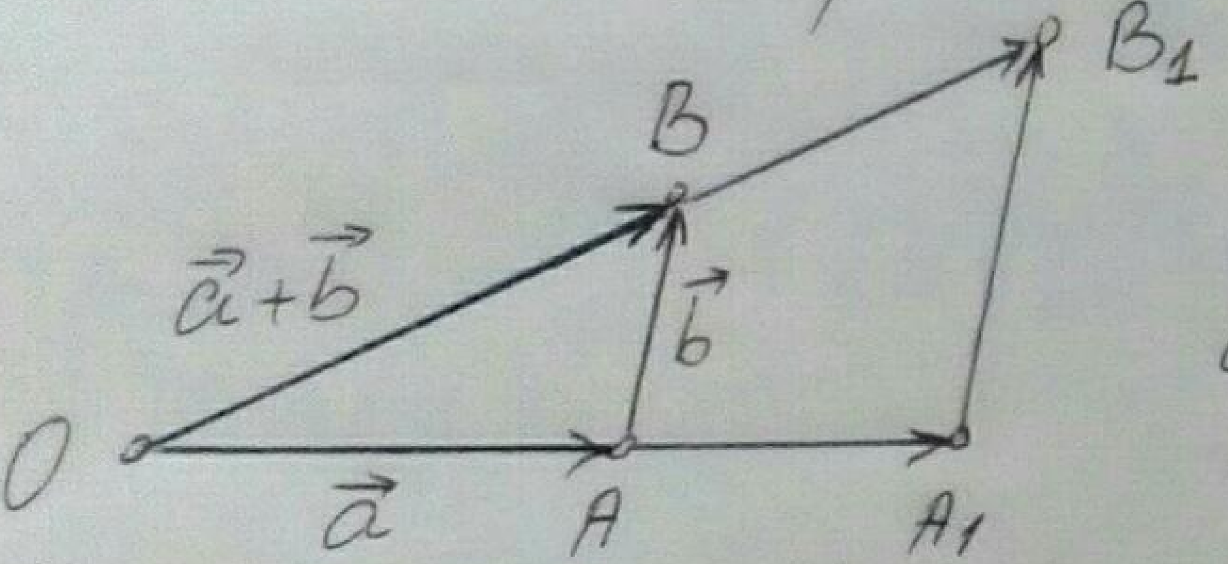
$\overline{\lambda(\mu\vec{a})} = \lambda(\overline{\mu\vec{a}}) = \lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a} = \overline{(\lambda\mu)\vec{a}}$

1.10

8*. В случая, когато векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни верността на твърдението отново се опира на предходните наблюдения

Имаме $\overline{\lambda(\vec{a}+\vec{b})} = \lambda(\overline{\vec{a}+\vec{b}}) = \lambda(\bar{a}+\bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b} = \overline{\lambda\vec{a}} + \lambda\vec{b}$.

Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са неколинеарни. Фиксираме т. $O$, а точките $A, B, A_1, B_1$ са, такива че $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OA_1} = \lambda\vec{a}$ и $B_1$ е точката от правата $OB$ като $A_1B_1 \parallel AB$ – $B_1 : \begin{cases} A_1B_1 \parallel AB \\ B_1 \in OB \end{cases}$




Тогава твърдението ще е доказано, ако докажем, че $\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\overrightarrow{AB}$ и че $\overrightarrow{OB_1} = \lambda(\vec{a}+\vec{b}_1)$. Това следва от теоремата на Талес, която ще разгледаме по-нататък.

Горният чертеж илюстрира случая, когато $\lambda > 0$, а долният – когато $\lambda < 0$