Упражнение №8

Теорема на Кнастер-Тарски

Основни сведения от теорията

Тази теорема е позната и като теорема на *Кнастер-Тарски-Клини* или *теорема за неподвижната точка.*

За всеки оператор $\Gamma\colon\ \mathcal{F}_k \longrightarrow\ \mathcal{F}_k$, с $\Gamma^n(f)$ ще означаваме функцията, която се дефинира с индукция по n както следва:

$$\begin{aligned}&\Gamma^0(f) = f;\\&\Gamma^{n+1}(f) = \Gamma(\Gamma^n(f)).\end{aligned}$$

С други думи, $\Gamma^n(f)\ =\ \underbrace{\Gamma(\dots\Gamma}_{n \text{ пъти}}(f)\dots).$

Теорема на Кнастер-Тарски. Нека $\Gamma\colon\ \mathcal{F}_k \longrightarrow\ \mathcal{F}_k$ е непрекъснат (компактен) оператор. Тогава Γ притежава най-малка неподвижна точка f_Γ, която се конструира по следния начин:

$$f_\Gamma\ =\ \bigcup_n \Gamma^n(\emptyset^{(k)}).$$

Теоремата на Кнастер-Тарски не само твърди, че всеки непрекъснат оператор има най-малка неподвижна точка, но дава и *начин* за нейното конструиране.

Функцията $\Gamma^n(\emptyset^{(k)})$ ще наричаме *n-та апроксимация* на f_Γ и ще означаваме с f_n. По определение

$$f_{n+1} =\ \Gamma^{n+1}(\emptyset^{(k)}) = \Gamma(\Gamma^n(\emptyset^{(k)})) = \Gamma(f_n),$$

следователно редицата $f_0, f_1, f_2, \dots$ от последователните апроксимации на f_Γ удовлетворява рекурентната схема

$$\left|\begin{aligned}&f_0 = \emptyset^{(k)}\\&f_{n+1} = \Gamma(f_n).\end{aligned}\right. \tag{1}$$

Теоремата на Кнастер-Тарски ни дава, че границата на тази редица е най-малката неподвижнна точка на оператора Γ, с други думи:

$$f_\Gamma = \bigcup_n f_n. \tag{2}$$

Да напомним, че ако f е точната горна граница на монотонно растящата редица $\{f_n\}_n$, то f се дефинира посредством еквивалентността: за всяко $\bar{x}$ и y

$$f(\bar{x}) \simeq y \iff \exists n\ f_n(\bar{x}) \simeq y. \tag{3}$$

В задачите на тази тема ще приемаме наготово, че операторите са компактни, и следователно горната теорема може да се прилага към тях.

Задача 0.1. Нека $\Gamma\colon\ \mathcal{F}_k \longrightarrow\ \mathcal{F}_k$ е компактен оператор. За редицата $f_0, f_1, f_2, \dots$ от апроксимациите на f_Γ, дефинирана чрез (1), да се докаже, че:

а) тя е монотонна, т.е. $f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq \dots$

б) ако за някое n е вярно, че $f_n = f_{n+1}$, то тогава

$$f_n = f_{n+1} = f_{n+2} = \dots$$

Разбира се, в този случай ще имаме, че границата на редицата $\{f_n\}_n$ ще е f_n, с други думи f_Γ ще е f_n.

Решение. **а)** С индукция относно n ще покажем, че за всяко естествено n

$$f_n \subseteq f_{n+1}.$$

При $n = 0$ по определение $f_0 = \emptyset^{(k)}$ и значи $f_0 \subseteq f_1$.
Да приемем, че за някое $n \in \mathbb{N}$ $f_n \subseteq f_{n+1}$. Но операторът Γ е компактен, което значи и монотонен. Прилагаме го почленно към двете страни на неравенството и получаваме

$$\Gamma(f_n) \subseteq \Gamma(f_{n+1}),$$

или все едно $f_{n+1} \subseteq f_{n+2}$, с което индукцията е приключена.

б) Нека за някое n е изпълнено $f_n = f_{n+1}$. С индукция относно $m \geq n$ ще покажем, че

$$f_n = f_m \ \text{ за всяко } \ m \geq n.$$

Случаят $m = n$ е ясен, а приемайки, че

$$f_n \ = \ f_m$$

за някое $m \geq n$, след почленно прилагане на Γ ще имаме

$$\Gamma(f_n) \ = \ \Gamma(f_m),$$

или все едно, $f_{n+1} \ = \ f_{m+1}$. Но ние имаме $f_n = f_{n+1}$, откъдето веднага $f_n = f_{m+1}$, с което индуктивната стъпка е проведена.

Ако n е първото естествено число със свойството $f_n = f_{n+1}$, редицата $\{fn\}_n$ ще изглежда така:

$$f_0 \overset{\text{деф}}{=} \ \emptyset^{(k)} \subset \ f_1 \ \cdots \subset f_n = \ f_{n+1} \ = f_{n+2} \dots$$

В този случай се казва, че рекурсията "се затваря" на стъпка n. Разбира се, тогава $\bigcup_n f_n$ ще е тази функция f_n. $\square$

Задачи върху теоремата на Кнастер-Тарски

При оператора от следващата задача рекурсията се затваря още на стъпка $n = 1$.

Задача 0.2. С теоремата на Кнастер-Тарски да се намери най-малката неподвижна точка на оператора Γ, дефиниран като:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ f(x-1, f(x,y)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Означаваме с f_n функцията $\Gamma^n(\emptyset^{(2)})$. Искаме да намерим *явния вид* на всяка f_n, а оттам — и на самата f_Γ.

Ще използваме, че редицата $\{f_n\}_n$ удовлетворява рекурентната схема

$$\begin{aligned} &f_0 = \emptyset^{(2)} \\ &f_{n+1} = \Gamma(f_n). \end{aligned}$$

Така за първата апроксимация f_1 на f_Γ ще имаме:

$$f_1(x,y) \simeq \Gamma(\emptyset^{(2)})(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \emptyset^{(2)}(x-1, \emptyset^{(2)}(x,y)), & \text{ако } x > 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \neg !, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

За следващата апроксимация f_2 получаваме:

$$f_2(x,y) \simeq \Gamma(f_1)(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ f_1(x-1, \underbrace{f_1(x,y)}_{\neg !}\,), & \text{ако } x > 0 \end{cases} \overset{\text{деф } f_1}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \neg !, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Оказа се, че двете апроксимации f_1 и f_2 съвпадат. Но тогава, съгласно *Задача* 0.1, всички следващи апроксимации ще са равни на f_1, т.е. редицата от последователните приближения на f_Γ изглежда така:

$$f_0 \overset{\text{деф}}{=} \emptyset^{(2)} \subset f_1 = f_2 = f_3 \ldots.$$

Ясно е, че границата на тази редица е f_1, и значи $f_\Gamma = f_1$. $\square$

Задача 0.3. Като се използва теоремата на Кнастер-Тарски, да се намери най-малката неподвижна точка на всеки от операторите:
а)

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2.f(x-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Ще намерим *явния вид* на последователните приближения на f_Γ. По определение $f_0 = \emptyset^{(1)}$. За функцията f_1 ще имаме:

$$f_1(x) \overset{(1)}{\simeq} \Gamma(\emptyset^{(1)})(x) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2.\emptyset^{(1)}(x-1), & \text{ако } x > 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ \neg!, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

За следващата апроксимация f_2 можем да запишем:

$$f_2(x) \overset{(1)}{\simeq} \Gamma(f_1)(x) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2.f_1(x-1), & \text{ако } x > 0 \end{cases} \overset{\text{деф } f_1}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2.1, & \text{ако } x = 1 \\ \neg!, & \text{ако } x > 1. \end{cases}$$

Понеже очакваме f_Γ да е функцията $\lambda x.2^x$, а отделно за всяко n имаме, че $f_n \subseteq f_\Gamma$, решаваме да представим $f_2(x)$ като 2^x в точките, в които тя е дефинирана, т.е. при $x = 0$ и 1. Тях ще запишем общо като $x < \mathbf{2}$, за да съгласуваме с индекса на f_2. Така за f_2 ще имаме:

$$f_2(x) \simeq \begin{cases} 2^x, & \text{ако } x < 2 \\ \neg!, & \text{ако } x \geq 2, \end{cases}$$

което ни подсказва, че f_n може би ще е ето тази функция:

$$f_n(x) \simeq \begin{cases} 2^x, & \text{ако } x < n \\ \neg!, & \text{ако } x \geq n. \end{cases}$$

Ще използваме индукция относно n, за докажем, че това е така. Базовият случай $n = 0$ е ясен. Да предположим, че f_n има горния вид. Тогава за f_{n+1} ще имаме последователно:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) \ &\overset{(1)}{\simeq}\ \Gamma(f_n)(x) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2.f_n(x-1), & \text{ако } x > 0 \end{cases} \\ &\overset{\text{и.х. } f_n}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2.2^{x-1}, & \text{ако } x > 0\ \&\ x-1 < n \\ \neg!, & \text{ако } x - 1 \geq n \end{cases} \simeq \begin{cases} 2^x, & \text{ако } \ x < n+1 \\ \neg!, & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned}$$

което потвърждава нашата хипотеза за f_{n+1}. Сега остана да намерим границата $\bigcup_n f_n$ на редицата $f_0, f_1, \dots, f_n \dots$.

Интуитивно е ясно, че тази редица трябва да клони към 2^x, защото f_n е рестрикцията на 2^x върху множеството $\{0, 1, \dots, n-1\}$, но да го докажем все пак.

Наистина, да означим с f точната горна граница на редицата $\{f_n\}_n$. По определение

$$f(x) \simeq y \iff \exists n\ f_n(x) \simeq y.$$

Да фиксираме произволно x и да изберем $n = x + 1$. Понеже $Dom(f_n) = \{0, \dots, n-1\}$, то $x \in Dom(f_n)$. Но там, където е дефинирана, f_n се държи като 2^x; в частност, за нашето x ще имаме, че $f_n(x) = 2^x$. Тогава и $f(x)$ ще е 2^x. Но x беше произволно, следователно за всяко x, $f(x) = 2^x$, или все едно, $f_\Gamma(x) = 2^x$, съгласно (2).

$\square$

б)

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.f(x-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Отново искаме да намерим *явния вид* на всяка функция от редицата от апроксимации $f_0, f_1, \dots$, чиято граница се явява f_Γ.

Започваме с първата апроксимация f_1:

$$f_1(x) \simeq \Gamma(\emptyset^{(1)})(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.\emptyset^{(1)}(x-1), & \text{ако } x > 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ \neg!, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

За следващата апроксимация f_2 ще имаме:

$$f_2(x) \simeq \Gamma(f_1)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.f_1(x-1), & \text{иначе} \end{cases} \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 1.1, & \text{ако } x = 1 \\ \neg!, & \text{ако } x > 1. \end{cases}$$

Функцията f_2 можем да препишем още като

$$f_2(x) \simeq \begin{cases} x!, & \text{ако } x < 2 \\ \neg!, & \text{иначе,} \end{cases}$$

което ни дава идея какъв би могъл да е общият вид на f_n:

$$f_n(x) \simeq \begin{cases} x!, & \text{ако } x < n \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ще използваме индукция относно $n \in \mathbb{N}$, за да се убедим, че това е така.

На практика вече проверихме случаите $n = 0, 1$ и 2. Да предположим сега, че f_n има горния вид. Тогава за f_{n+1} ще имаме последователно:

$$f_{n+1}(x) \;\simeq\; \Gamma(f_n)(x) \;\simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.f_n(x-1), & \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{\text{и.х. } f_n}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x.(x-1)!, & \text{ако } x > 0 \;\&\; x-1<n \\ \neg!, & \text{ако } x-1 \geq n \end{cases} \simeq \begin{cases} x!, & \text{ако } x<n+1 \\ \neg!, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и значи индукционната хипотеза се потвърждава и за $n+1$. Остана да съобразим, че границата на редицата $\{f_n\}_n$ е функцията $x!$, което се показва с разсъждения, подобни на тези от предишния пример.

$\square$

И в двата примера по-горе наблюдавахме, че n-тата апроксимация на f_Γ е с дефиниционна област множеството $\{0, \dots, n-1\}$. Това беше, защото рекурсията при тях беше примитивна, т.е. $\Gamma(f)(x)$ се дефинираше чрез $f(x-1)$. В следващата задача, обаче, $Dom(f_n)$ ще е по-голямо множество.

Задача 0.4. С теоремата на Кнастер-Тарски да се намери най-малката неподвижна точка на оператора

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ (f(\frac{x}{2}))^2, & \text{ако } x > 0 \text{ е четно} \\ 2(f(\frac{x-1}{2}))^2, & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

Решение. Ще действаме по схемата от предишната задача: най-напред ще намерим явния вид на всяка от апроксимациите $f_0, f_1, \dots$, а после ще намерим границата на тази редица, която съгласно (2) е точно f_Γ.

По дефиниция $f_0 = \emptyset^{(1)}$, а за f_1 получаваме последователно:

$$f_1(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \Gamma(f_0)(x) \stackrel{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ f_0^2(\frac{x}{2}), & \text{ако } x > 0 \text{ е четно} \\ 2f_0^2(\frac{x-1}{2}), & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases} \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ \neg!, & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Като имаме предвид явния вид на f_1, за f_2 получаваме:

$$f_2(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \Gamma(f_1)(x) \stackrel{\text{деф }\Gamma}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ f_1^2(\frac{x}{2}), & \text{ако } x > 0 \text{ е четно} \\ 2f_1^2(\frac{x-1}{2}), & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases} \stackrel{\text{деф } f_1}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2.1^2, & \text{ако } x = 1 \\ \neg!, & \text{ако } x > 1. \end{cases}$$

Отново можем да препишем f_2 във вида

$$f_2(x) \simeq \begin{cases} 2^x, & \text{ако } x < 2 \\ \neg!, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и тя изглежда абсолютно като функцията f_2 от *Задача* 0.3 а). Да не се подвеждаме, обаче; следваща апроксимация f_3 вече изглежда по-различно:

$$f_3(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \Gamma(f_2)(x) \stackrel{\text{деф }\Gamma}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ f_2^2(\frac{x}{2}), & \text{ако } x > 0 \text{ е четно} \\ 2f_2^2(\frac{x-1}{2}), & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases} \stackrel{\text{деф } f_2}{\simeq} \begin{cases} 2^x, & \text{ако } \mathbf{x < 4} \\ \neg!, & \text{иначе,} \end{cases}$$

Хипотезата ни за $f_n, n \geq 1$, е такава:

$$f_n(x) \simeq \begin{cases} 2^x, & \text{ако } x < 2^{n-1} \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вече наблюдавахме, че при $n = 1, 2, 3$, f_n имаше този вид. Приемаме, че и за произволно n това е така и пресмятаме внимателно f_{n+1}:

$$f_{n+1}(x) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \Gamma(f_n)(x) \stackrel{\text{деф }\Gamma}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ f_n^2(\frac{x}{2}), & \text{ако } x > 0 \text{ е четно} \\ 2f_n^2(\frac{x-1}{2}), & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

$$\stackrel{\text{и.х. } f_n}{\simeq} \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ (2^{\frac{x}{2}})^2, & \text{ако } x > 0 \text{ е четно } \& \ \frac{x}{2} < 2^{n-1} \\ 2(2^{\frac{x-1}{2}})^2, & \text{ако } x \text{ е нечетно } \& \ \frac{x-1}{2} < 2^{n-1} \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ 2^x, & \text{ако } x > 0 \text{ е четно } \& \ x < 2^n \\ 2^x, & \text{ако } x \text{ е нечетно } \& \ x - 1 < 2^n \end{cases} \simeq \begin{cases} 2^x, & \text{ако } x < 2^n \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

За последото равенство по-горе използвахме, че при нечетно x:

$$x - 1 < 2^n \iff x \leq 2^n \iff x < 2^n.$$

Сега с разсъждения, съвсем подобни на тези от *Задача* 0.3 а) показваме, че и тази редица $\{f_n\}_n$ има граница 2^x.

Забележете експоненциалната скорост, с която расте броят на елементите на $Dom(f_n)$. Това, разбира се, е в тясна връзка с логаритмичната сложност на бързия алгоритъм за степенуване, тъй като $Dom(f_n)$ на практика дава тези входове, за които рекурсивната програма, определена от оператора, спира за $\leq n$ рекурсивни обръщения. □

Задача 0.5. (Писмен изпит, 26/08/2018, спец. И и КН)
Да разгледаме следния компактен оператор $\Gamma : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2$, където:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ f(x, y+1) + 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

а) Намерете най-малката неподвижна точка на оператора Γ.

б) Докажете, че Γ има единствена неподвижна точка.

Решение. Задачата е формулирана в две подточки най-вече за хора, които ще използват теоремата на Кнастер-Тарски.

I начин. Можем да я решим само със знания от училищната математика, като при това докажем и двете неща — че Γ има единствена неподвижна точка и тя е функцията … Наистина, нека f е неподвижна точка на Γ, с други думи, за f е изпълнено:

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ f(x, y+1) + 1, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4}$$

Не е трудно да забележим, че при $x \geq y$ f връща разликата $x - y$. Ще го докажем с индукция относно $k = x - y$. Да означим

$$P(k) \overset{\text{деф}}{\iff} \forall x \forall y (x \geq y \;\&\; x - y = k \implies f(x,y) \simeq x - y).$$

Ако $k = 0$, т.е. $x = y$, от избора на f веднага получаваме $f(x,y) \overset{(4)}{\simeq} 0 = x - y$ и значи $P(0)$ е в сила.

Да приемем, че за някое k е вярно $P(k)$.

Сега да вземем произволни x, y, за които $x - y = k + 1$. Тогава

$$f(x,y) \overset{(4)}{\simeq} f(\underbrace{x, y+1}_{x-(y+1)=k}) + 1 \overset{\text{и.х.}}{=} x - (y+1) + 1 = x - y,$$

с което показахме, че и $P(k+1)$ е изпълнено. Дотук показахме, че за всеки две числа x, y, такива че $x \geq y$, е изпълнено $f(x,y) = x - y$.

Сега ще покажем, че при $x < y$, $f(x,y)$ не е дефинирана. Наистина, да допуснем, че $f(x,y) \simeq k$ за някои x, y, такива че $x < y$. От избора на f имаме:

$$f(x,y) \overset{(4)}{\simeq} f(x,y+1)+1 \overset{(4)}{\simeq} \dots \overset{(4)}{\simeq} f(x,y+n)+\underbrace{1+\dots+1}_{n \text{ пъти}} \simeq f(x,y+n)+n$$

и това е за всяко n. В частност, при $n = k+1$ ще имаме

$$k \simeq f(x,y) \simeq \underbrace{f(x, y+k+1)}_{\geq 0} + k + 1.$$

Ясно е, че $f(x, y+k+1)$ трябва да има стойност, която, разбира се, е неотрицателна. Но тогава горното равенство очевидно не може да е в сила — противоречие, което показва, че $\neg! f(x,y)$ при $x < y$.

Да обобщим: получихме, че *произволната* неподвижна точка f на Γ трябва да изглежда по следния начин:

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} x - y, & \text{ако } x \geq y \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{5}$$

Следователно Γ има единствена неподвижна точка и това е тази функция f.

II начин. Функцията f_Γ можем да намерим и със стандартната техника от теоремата на Кнастер-Тарски. Тръгвайки от $f_0 = \emptyset^{(2)}$, за f_1 ще имаме:

$$f_1(x,y) \overset{\text{деф}}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ f_0(x, y+1) + 1, & \text{иначе} \end{cases} \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ \neg!, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Сега за апроксимацията f_2 получаваме:

$$f_2(x,y) \overset{\text{деф}}{\simeq} \Gamma(f_1)(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ f_1(x, y+1) + 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\overset{\text{деф } f_1}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ 0+1, & \text{ако } x+1 = y \\ \neg!, & \text{в останалите случаи} \end{cases} \qquad \simeq \begin{cases} x-y, & \text{ако } 0 \leq x-y < 2 \\ \neg!, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

Да приемем, че за произволно n, f_n изглежда по подобен начин:

$$f_n(x,y) \simeq \begin{cases} x-y, & \text{ако } 0 \leq x-y < n \\ \neg!, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

Базата на индукцията я имаме, така че пристъпваме директно към проверката за f_{n+1}:

$$f_{n+1}(x,y) \overset{\text{деф}}{\simeq} \Gamma(f_n)(x,y) \overset{\text{деф } \Gamma}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ f_n(x,y+1)+1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\overset{\text{и.х. } f_n}{\simeq} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ x-(y+1)+1, & \text{ако } x \neq y \ \&\ 0 \leq x-(y+1) < n \\ \neg!, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} x-y, & \text{ако } 0 \leq x-y < n+1 \\ \neg!, & \text{в останалите случаи,} \end{cases}$$

което потвърждава индуктивното ни предположение. Катоизползваме дефиницията 3 за точна горна граница, показваме, че границата на редицата $f_0, f_1, \ldots$ е точно функцията, дефинирана с равенството (5).

Остана да покажем, че операторът Γ има единствена неподвижна точка. Можем да разсъждаваме така: да приемем, че f и g са неподвижни точки на Γ, т.е.

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ f(x,y+1)+1, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \text{и}$$

$$g(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ g(x,y+1)+1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

С индукция относно $k = x - y$ показваме, че за всички x, y, такива че $x \geq y$,

$$f(x,y) \simeq g(x,y).$$

Наистина, при $k = 0$ имаме $x = y$ и тогава $f(x, y) = 0 = g(x, y)$. Да приемем, че

$$\forall x \forall y (x \geq y \ \& \ x - y = k \implies f(x, y) \simeq g(x, y)).$$

Тогава за $k + 1$ ще имаме

$$f(x, y) \simeq f(x, y + 1) + 1 \overset{\text{и.х.}}{\simeq} g(x, y + 1) + 1 \simeq g(x, y).$$

Когато $x < y$, разсъждавайки както при начин I по-горе, се убеждаваме, че $\neg ! f(x, y)$ и $\neg ! g(x, y)$. Така за всяко x, y ще е изпълнено $f(x, y) \simeq g(x, y)$, и следователно $f = g$.

$\square$

Задача 0.6. (Писмен изпит, 01/07/2018, спец. И и КН)
Да разгледаме следния компактен оператор $\Gamma \colon \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$:

$$\Gamma(f)(x, y) \simeq \begin{cases} 7, & \text{ако } f(x, y) \simeq y \\ f(x + 1, f(x, y)), & \text{ако } f(x, y) < y \\ f(f(x + 1, y), y), & \text{ако } f(x, y) > y \\ \neg !, & \text{ако } \neg ! f(x, y). \end{cases}$$

а) Намерете най-малката неподвижна точка на оператора Γ.

б) Ако Γ има други неподвижни точки, то посочете поне една.

Решение. Тази задача изглежда ужасно, но всъщност е съвсем тривиална. За подточка **а)** прилагаме рутинно процедурата от теоремата на Кнастер-Тарски: тръгвайки от $f_0 = \emptyset^{(2)}$, за f_1 ще имаме:

$$f_1(x, y) \simeq \ \Gamma(f_0)(x, y) \simeq \begin{cases} 7, & \text{ако } f_0(x, y) \simeq y \\ f_0(x + 1, f_0(x, y)), & \text{ако } f_0(x, y) < y \\ f_0(f_0(x + 1, y), y), & \text{ако } f_0(x, y) > y \\ \neg !, & \text{ако } \neg ! f_0(x, y). \end{cases}$$

И тук ни очаква изненада — f_1 също е $\emptyset^{(2)}$! Но това автоматично означава, че за всяко n, f_n ще е $\emptyset^{(2)}$, и тогава $f_\Gamma = \bigcup_n f_n$ също ще е $\emptyset^{(2)}$.
За подточка **б)** отново не се налага да се замисляме много. Лесно се вижда, че друга неподвижна точка на този оператор е функцията $\lambda x, y.7$. Дали Γ има и други неподвижни точки? $\square$