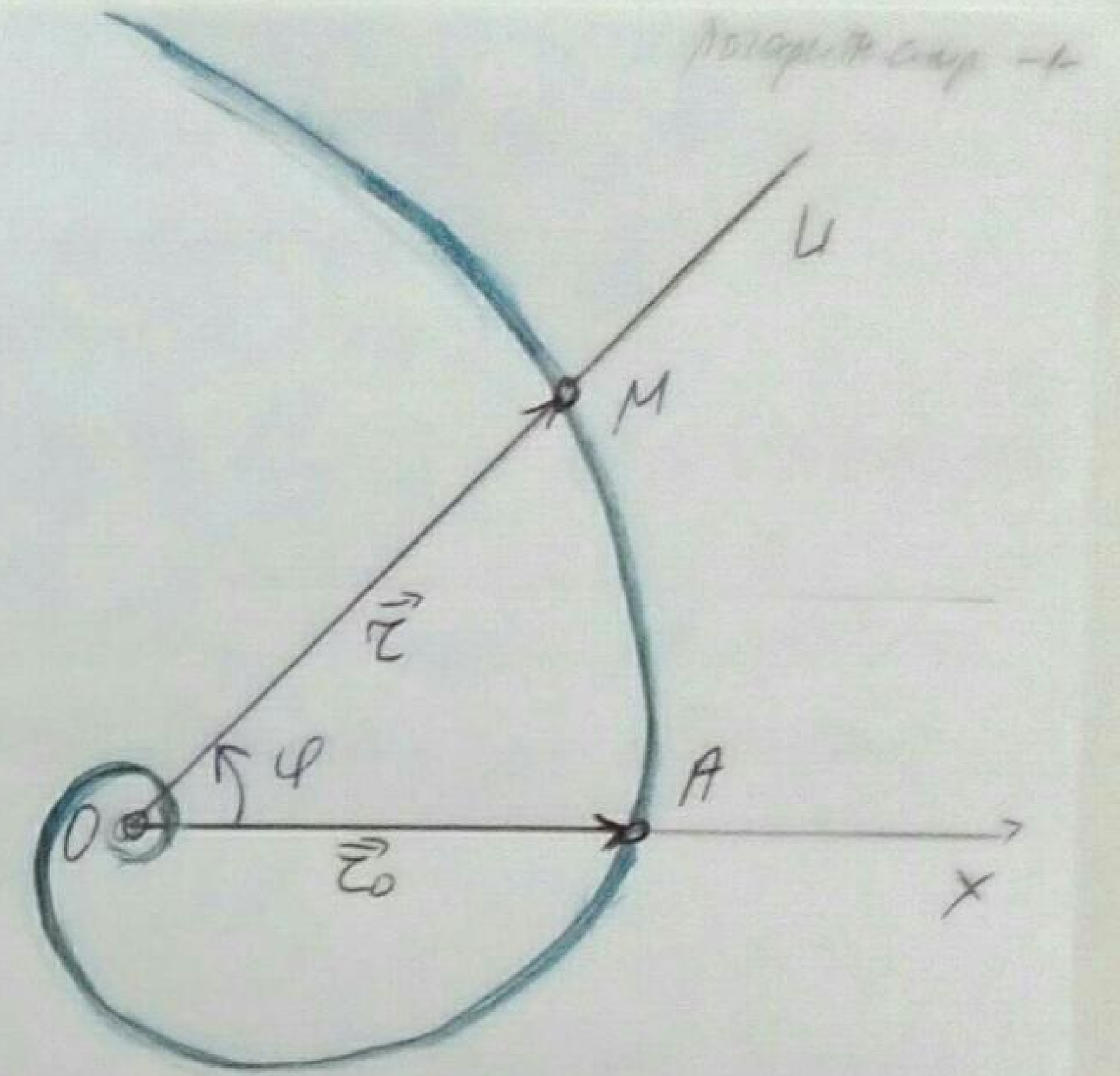
Логаритмична спирала:

В равнина права OL се върти около т. O с постоянна ъглова скорост ω. Т-ка M се движи по OL със скорост, пропорционална на разстоянието $|OM|$.



Удобно е да въведем полярна коорд. с-ма за полюс – т. O, а за полярна ос – кой да е лъч през O – $\overrightarrow{OX}$. Върху този лъч фиксираме т-ка A, съответстваща на полярния ъгъл φ, $\varphi_0 = 0$, и нека $r_0 = |OA|$. За параметър е естествено да приемем времето – t, като го отчитаме от момента когато т. M премине през A. Сега от у-вието имаме $\varphi = \omega t$. (1) и $\frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{r}$ (2), където m е константа.

Ясно е, че ако $m = 0$, то логаритмичната спирала става окръжност. Когато $m > 0$, то M се отдалечава от O, а при $m < 0$ M се приближава към O. От (2) имаме $\frac{dr}{r} = m\,dt$ => интегрираме

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} = m \int_{0}^{t} dt, \Rightarrow$$

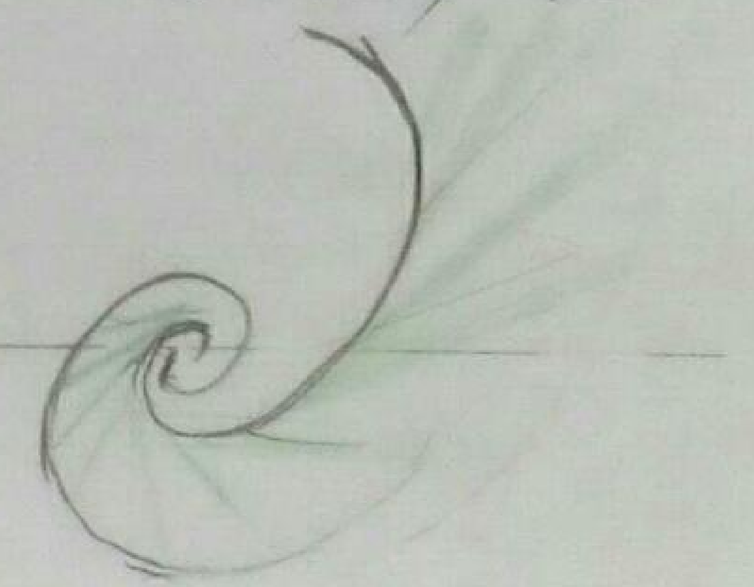
$\ln \frac{r}{r_0} = m t$ или $r = r_0 e^{mt}$ – изключваме t => и полагайки $\frac{m}{\omega} = k$ получаваме полярното у-ние на логаритмичната спирала

$\ln \frac{r}{r_0} = k\varphi$ или $r = r_0 e^{k\varphi}$ => при $k>0$ т. M се отдалечава неограничено от O пропорционално на φ. Когато ъгълът се намалява неограничено ($\varphi \to -\infty$), то r клони към нула. При $k<0$ – обратно имаме $\lim\limits_{\varphi\to\infty} r = 0$ и $\lim\limits_{\varphi\to-\infty} r = \infty$. ($\varphi = \omega t$)

Следователно логаритмичната спирала има безброй много намотки, както при отдалечаването си от полюса, така и при приближаването си към него.

Ако от полярна координатна с-ма преминем към ортонормирана к.с, то параметричните уравнения на логаритмичната спирала са

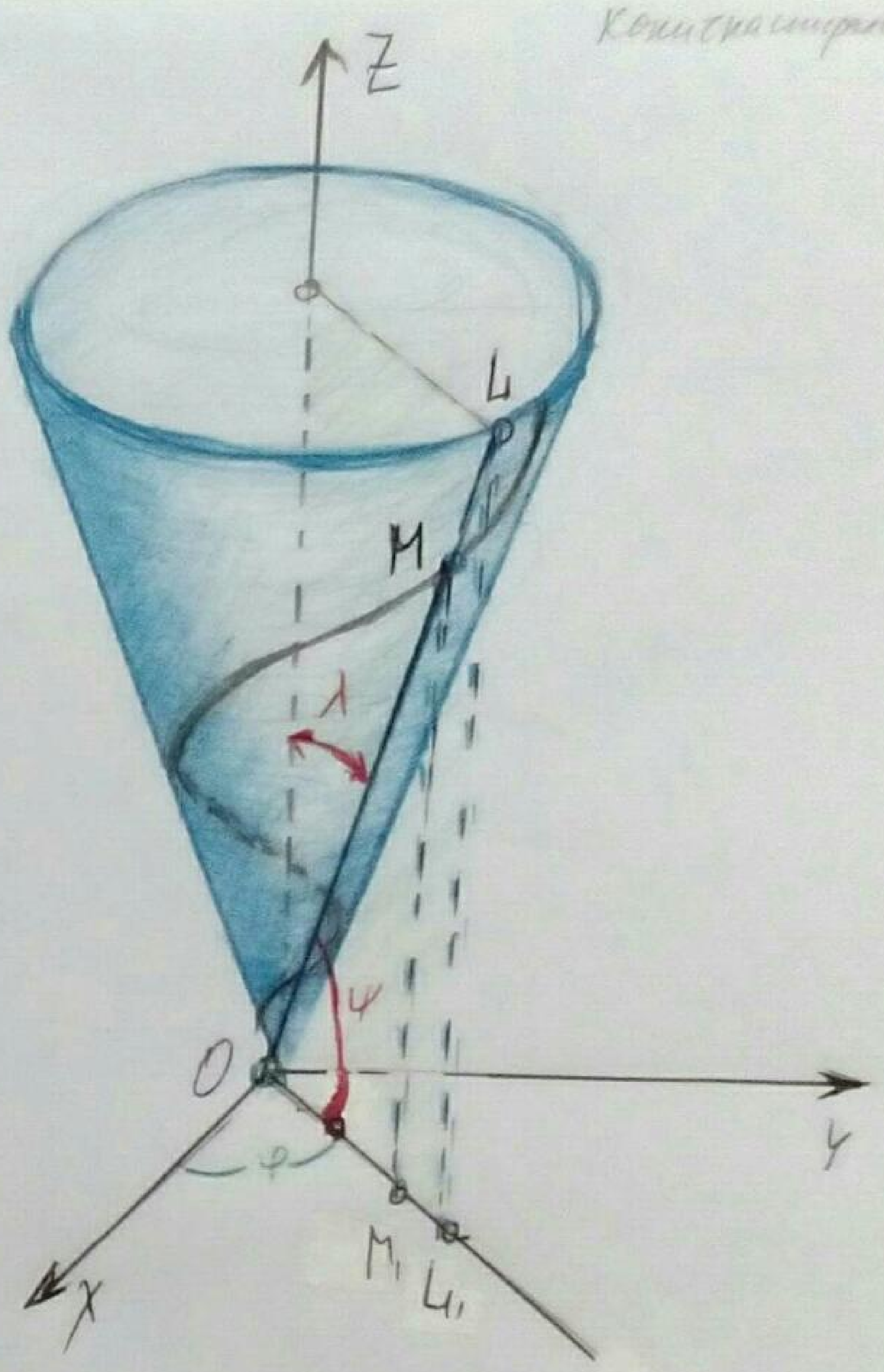
$$\begin{cases} x = r_0 e^{k\varphi}\cos\varphi \\ y = r_0 e^{k\varphi}\sin\varphi. \end{cases}$$



Интересен факт е, че еволютата, както и еволвентата на логаритмичната спирала е също логаритмична спирала – пресметнете.

Конична спирала: Права $\underline{\underline{a}}$ се върти около ос – OZ като описва конична повърхност с управителна крива - окръжност в коя да е равнина перпендикулярна на OZ. В същото време равнината на сечението OZL се се върти около OZ с постоянна ъглова скорост ω пропорционална на разстоянието OM. Получената при движението на т. M крива се нарича конична спирала.

Ясно е, че проекцията ѝ в OXY е логаритмична спирала.



Така че ... $\varphi = \omega t$, $\psi = \frac{\pi}{2} - \lambda$, $r = r_0 * e^{mt}$,

(където $m<0$ или $m>0$ е константа,
а r_0 – пак -> радиус вектора в началния момент.

Следователно спрямо ортон. коорд. с-ма конична спирала има параметрични уравнения - примерно

$$\begin{cases} x = r_0 \sin\lambda \cos\varphi \, e^{k\varphi} \\ y = r_0 \sin\lambda \sin\varphi \, e^{k\varphi} \\ z = r_0 \cos\lambda . e^{k\varphi} \end{cases}$$

Коничната спирала е пример за обща винтова линия.