Линейни системи

Люба Конова

Октомври 2021

1 Основни понятия

Система линейни уравнения: Системи от вида:

$$\left| \begin{array}{c} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + ... + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + ... + a_{2n}.x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + ... + a_{mn}.x_n = b_m \end{array} \right.$$

Видове СЛУ:

- Несъвместима СЛУ- без нито едно решение над полето F.
- Съвместима и определена- съществува точно едно решение на системата.
- Съвместима и неопределена- съществуват повече от едно решения на системата. Появява се нуждата от параметризиране.

Определение за матрица: Ако F е поле, $m, n \in \mathbb{N}$, то правоъгълните таблици

$$A_{m.n}(F) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ & & ... & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

с елементи $a_{ij} \in F$ се наричат матрици. Всяка система линейни уравнения задава еднозначно матрица и обратно.

Елементарни преобразувания:

1. $R_{ij}(p)$- Умножение на j-ти с число $p \in F$ и прибавяне към i-ти ред;
2. $K_j(q)$- Умножаване на j-ти ред с число q;
3. R_{ij}- Размяна на i-ти и j-ти ред;

2 Задачи:

Задача 1: Решете СЛУ и определете вида ѝ:

$$\left|\begin{array}{cccl} x_1 & +x_2 & +2.x_3 & = 8 \\ -x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 3x_1 & -7x_2 & +4x_3 & = 10 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{cccl} -x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 3x_1 & +6x_2 & -3x_3 & = -2 \\ 6x_1 & +6x_2 & +3x_3 & = 5 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{cccl} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 4 \\ x_1 & & +x_3 & = 2 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 7 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{cccl} x_1 & & -x_3 & = 2 \\ 2x_1 & +5x_2 & & = 7 \\ 3x_1 & +5x_2 & -x_3 & = 9 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccccl} 2x_1 & +3x_2 & -5x_3 & +x_4 & = 2 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +3x_4 & = 8 \\ 6x_1 & +9x_2 & -7x_3 & +7x_4 & = 18 \\ 4x_1 & +6x_2 & -12x_3 & +x_4 & = 1 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccccl} x_1 & -7x_2 & & +2x_4 & = -11 \\ -x_1 & +11x_2 & +2x_3 & -4x_4 & = 31 \\ 2x_1 & -12x_2 & -5x_3 & -x_4 & = -26 \\ 3x_1 & -17x_2 & -x_3 & +3x_4 & = -15 \end{array}\right.$$

Задача 2: Решете СЛУ, определена матрично, в зависимост от параметрите λ и μ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & -8 & \lambda \\ 3+\mu & 4 & 0 & -19 & 2\lambda-4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -9 & -2 & -7 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & -5 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 6 & -1 & \lambda \\ 15 & -(8-\mu) & 12 & -3 & 4\lambda-5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1+\mu & -35 & -8 & -7 & 3-\lambda \\ -2 & 7 & 1 & 2 & \lambda \\ -2 & 9 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

Задача 3: Нека

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & -11 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & \lambda + 7 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ \mu - 5 & \mu - 2 \end{pmatrix}$$

са квадратни матрици от ред 2 над полето на рационалните числа $\mathbb{Q}$. Да се определи за кои стойности на параметрите λ и μ матрицата A може да се представи:

a) по единствен начин като линейна комбинация на $A_1,\ A_2$ и A_3.

b) по повече от един начин като линейна комбинация на матриците $A_1,\ A_2$ и A_3. Да се намерят две различни такива представяния.