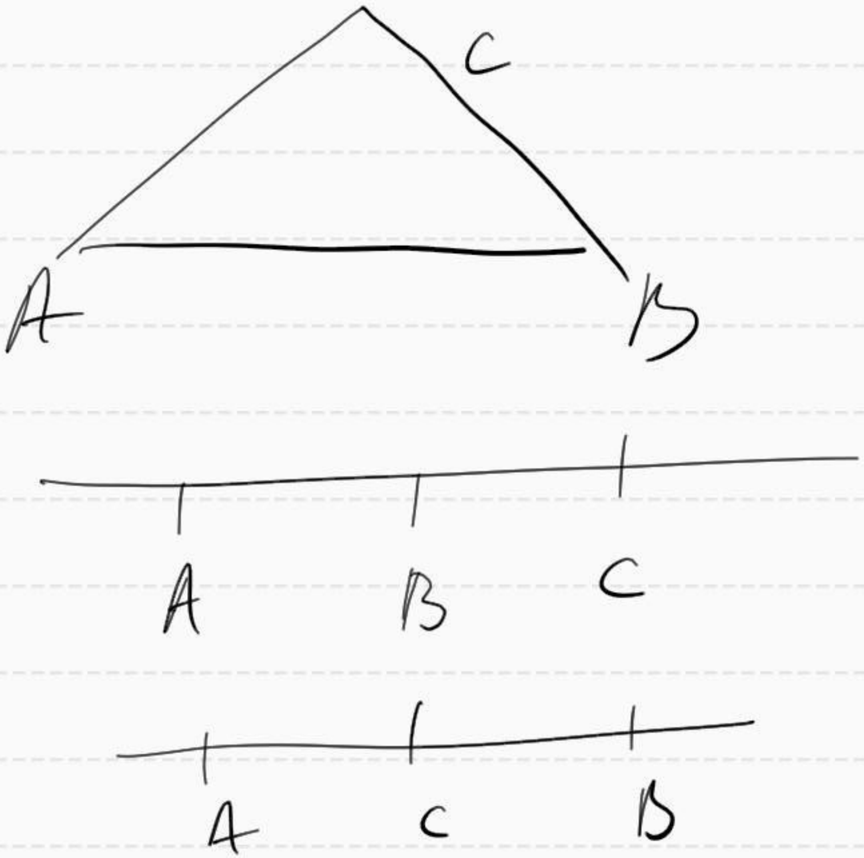


$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

$$\|\vec{AC}\| < \|\vec{AB}\| + \|\vec{BC}\|$$

$$\|\vec{AC}\| = \|\vec{AB}\| + \|\vec{BC}\|$$

$<$

$\leq$,

„$=$" $\Leftrightarrow$ ...

Ортогонално допълнение

Опр. $U < V$ (ЛП), $U^{\perp} = \{ v \in V \mid \forall u \in U, (u,v) = 0 \}$

— ортог. доп. на U

<u>Зад.</u> 1) $e_1, \dots, e_k$ - базис на U $(U = \ell(e_1, \dots, e_k))$

$\forall u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$

$$\boxed{v \in V \quad (\forall u \in U \quad v \perp u) \Leftrightarrow (\forall i = 1, \dots, k \quad v \perp e_i)}$$

$U^{\perp} = \{ v \in V \mid \forall i = 1, \dots, k \ (v, e_i) = 0 \}$

2) $e_1, \dots, e_k$ - базис на U; $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ - базис V

$\xrightarrow[+\text{норм.}]{\text{Г.-Ш.}}$ $f_1, \dots, f_k$ - ОНБ U; $f_1, \dots, f_n$ - ОНБ на V

$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \in V$; $v \perp f_i \Leftrightarrow \lambda_i = 0$

$v \in U^{\perp} \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, k \quad v \perp f_i \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, k \quad \lambda_i = 0$

$\Leftrightarrow v \in \ell(f_{k+1}, \dots, f_n)$

$f_1, \dots, f_n$ — ОНБ

$U = \ell(f_1, \dots, f_k) \rightarrow U^{\perp} = \ell(f_{k+1}, \dots, f_n)$; $U \oplus U^{\perp} = V$

<u>Тв.</u> V – КМЛП, $U < V \Rightarrow U \oplus U^{\perp} = V$

<u>Сл.</u> V – КМЛП $\Rightarrow (U^{\perp})^{\perp} = U$

<u>Забл.</u> $x \in V$; $\varphi_x : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_x(v) = (x, v)$

– φ_x – ЛИ , $\varphi_x \in V^*$, сюрект.

– $\varphi_x = \varphi_y \Leftrightarrow \forall v \in V \quad (x, v) = (y, v) \Leftrightarrow x = y$

$(\forall v \in V \quad (x-y, v) = 0 \ ; \ v = x - y)$

- $\Phi : V \to V^*$, $\quad x \longmapsto \varphi_x$ $\quad \Big| \ (\Phi(x))(y) = \varphi_x(y) = (x, y)$

— ЛИ; $\varphi_{x+y} = \varphi_x + \varphi_y$; $\varphi_{\lambda x} = \lambda \varphi_x$

— инект. $\Rightarrow V \cong \mathrm{Im}(\Phi) < V^*$

— V - КМЛП $\Rightarrow \dim V = \dim V^* \Rightarrow \Phi$ - изом

— $e_1, \dots, e_n$ - ОН базис на $V \Rightarrow f_1 = \Phi(e_1), \dots, f_n = \Phi(e_n)$ дуална б. на V^*

Зад. $\varphi : U \to V$ изом. U - ЕП

$(v_1, v_2) := (\varphi^{-1}(v_1), \varphi^{-1}(v_2))$ - СП в V

$\Rightarrow U \overset{ЕП}{\cong} V$

$$\delta_{ij} = (e_i, e_j) = \varphi_{e_i}(e_j) = \big(\underbrace{\phi(e_i)}_{\in V^*}\big)(e_j)$$

$\Rightarrow \phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)$ – д.б. на $e_1 \ldots e_n$ (ОНБ) на V

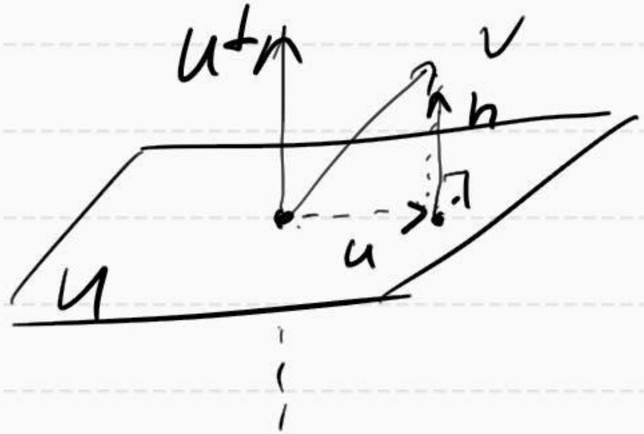
– $U = \ell(e_1 \ldots e_k) \Rightarrow U^0 = \ell(\phi(e_{k+1}) \ldots \phi(e_n))$

$\Rightarrow U^0 \cong U^\perp = \ell(e_{k+1}, \ldots, e_n)$

<u>Опр.</u> $U < V$ (КМЛП); $\forall v \in V \ \exists!\, u \in U,\ h \in U^\perp : v = u + h$

u – проекция на $\underline{v}$ в/у U

h – перпендикуляр от v към U



Док. 1) $e_1, \dots, e_k$ - б. на U; $u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$; $v \in V$; $v = u + \underset{U^\perp}{\overset{\shortparallel}{h}}$

$v - u = h \in U^\perp \iff (v-u, e_i) = 0 \quad \forall i = 1,\dots,k$

$\iff \quad \forall i = 1,\dots,k \quad (v, e_i) = (u, e_i)$

$$\left|\begin{array}{l}
\lambda_1 (e_1, e_1) + \lambda_2 (e_1, e_2) + \dots + \lambda_k (e_1, e_k) = (e_1, v) \\
\lambda_2 (e_2, e_1) + \lambda_2 (e_2, e_2) + \dots + \lambda_k (e_2, e_k) = (e_2, v) \\
\lambda_1 (e_k, e_1) + \lambda_2 (e_k, e_2) + \dots + \lambda_k (e_k, e_k) = (e_k, v)
\end{array}\right.$$

Сист. — от k уравн. с k неизв. и матр. $((e_i, e_j))$

Если $\boxed{\det((e_i, e_j)) \neq 0}$ $\xRightarrow{\text{Крамер}}$ сист. имеет единственное реш.

2) $e_1, \dots, e_k$ — ОНБ на U $\longrightarrow$ $\lambda_i = (v, e_i)$ $\longrightarrow$ знаем u $\Downarrow$ знаем h

($e_1, \dots, e_k$ — б. на U $\xrightarrow[\text{+ норм.}]{\text{Г.-Ш.}}$ $f_1, \dots, f_k$ — ОНБ на U)

Тв. $U < V$, $v \in V$, $v = u + h$, $u \in U$, $h \in U^\perp$. Тогда
$(h = v - u)$

$\forall u' \in U$ $\|h\| = \|v - u\| \leq \|v - u'\|$; „=" $\Leftrightarrow u = u'$

Д-во $\|v - u'\|^2 = (v - u', v - u') = (h + (\underbrace{u - u'}_{\in U}), h + (u - u')) \underset{h \perp u - u'}{=}$

$(h, h) + (u - u', u - u') = \|h\|^2 + \underline{\|u - u'\|^2} \geq \|h\|^2$ | „=" $\Leftrightarrow u = u'$

Детерминанти на Грам

Опр. V - ЕП ; $a_1, \ldots, a_k \in V$

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \cdots & (a_1,a_k) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \cdots & (a_2,a_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_k,a_1) & (a_k,a_2) & \cdots & (a_k,a_k) \end{vmatrix}$$

детерминанта на Грам

Зад. $\Gamma(e_1, \ldots, e_k)$ ~~е~~ дет. на матр. на сист. За резултат виж перпендикуляр и проекция

Тв. Ако $a_1 \ldots a_k$ са ЛЗ, то $\Gamma(a_1 \ldots a_k) = 0$

$a_1 \ldots a_k$ – ЛН. $\xrightarrow[\text{+ норм.}]{\text{Г.Ш.}}$ $e_1 \ldots e_k$ – ОНБ на $l(a_1 \ldots a_k)$
(=) базис на $l(a_1 \ldots a_k)$) $\qquad = l(e_1 \ldots e_k)$

За $i = 1 \ldots k$ $\quad a_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ji} e_j$; $\Lambda = (\lambda_{ij})$ – матр. на прехода от $\underline{\underline{e}} \to \underline{\underline{a}}$

$i, p = 1 \ldots k$

$$(a_i, a_p) = \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_{ji} e_j, \sum_{q=1}^{k} \lambda_{qp} e_q\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ji} \lambda_{jp} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (\Lambda^t)_{ij} (\Lambda)_{jp}$$

$A = ((a_i, a_j))$ $\Rightarrow$ $A = \Lambda^t \Lambda \Rightarrow \Gamma(a_1 \ldots a_k) = \det A =$
матрица на Грам

$= (\det \Lambda)^2 \geq 0 \overset{\neq 0}{\Rightarrow} > 0$

Зад. $a_1 \dots a_k$ - ЛН $\xrightarrow{\text{Г.Ш.}}$ $e_1 \dots e_k$ - ОН

$a_1 \dots a_k$; $e_1 \dots e_k$ - бази на $\ell(a_1 \dots a_k) = \ell(e_1 \dots e_k)$

$A = T_e^a$ - матр. на прехода от $e \to a$

Тогава $\Gamma(a_1 \dots a_k) = (\det A)^2$

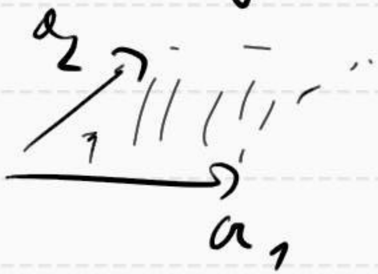
Тв. $a_1 \dots a_k$ - ЛН $\Rightarrow \Gamma(a_1 \dots a_k) > 0$

Тв. $a_1 \dots a_k \in V \Rightarrow \Gamma(a_1 \dots a_k) \geq 0$

$\Gamma(a_1 \dots a_k) = 0 \iff a_1 \dots a_k$ - ЛЗ

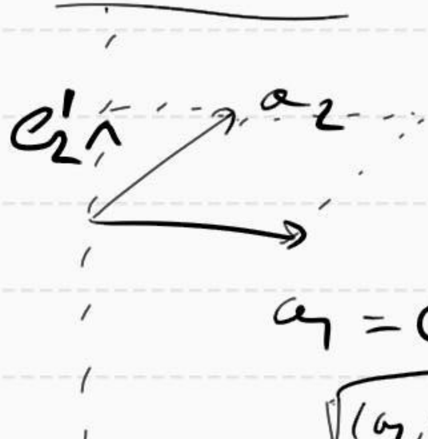
Зад. Знаем, че $\left| \begin{array}{l} a_1 \dots a_k \text{ - ЛЗ} \Rightarrow \Gamma = 0 \\ a_1 \dots a_k \text{ - ЛН} \Rightarrow \Gamma > 0 \end{array} \right.$

Зоб. $\det \Lambda$ — орієнтований об'єм на паралелепіпеді опт. в/у вект. $a_1 \dots a_k$ ($\le k$ мірн)



a_1, a_2, a_3 — станд. паралелепіпед

$$\det \Lambda = \pm \sqrt{\Gamma(a_1 \dots a_k)}$$

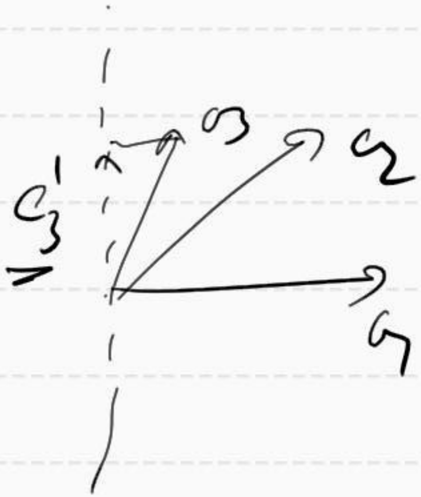


$S_{уст} = \|e_1'\| \cdot \|e_2'\|$; $e_1 = \dfrac{e_1'}{\|e_1'\|}$, $e_2 = \dfrac{e_2'}{\|e_2'\|}$

$a_1 = \dfrac{e_1'}{\sqrt{(a_1,a_1)}}$ $\quad e_2' = a_2 - \dfrac{(a_2,a_1)}{(a_1,a_1)} a_1$; $e_1' = a_1$

$$S = \|a_1\| \cdot \sqrt{(a_2,a_2) + \left(\frac{(a_2,a_1)}{(a_1,a_1)}\right)^2 (a_1,a_1) - 2\,\frac{(a_2,a_1)}{(a_1,a_1)}(a_1,a_2)} =$$

$$= \sqrt{\Gamma(a_1,a_2)}$$



$$V_{a_1a_2a_3} = S_{a_1a_2} \cdot \|e_3'\|$$

$$a_3 = u + \underline{h}\ ; \quad u \in \ell(a_1, a_2)$$
$$h = e_3'$$

u – реш. сист. с дет. $\Gamma(a_1, a_2) \to h$

<u>Зад.</u> $\mathbb{R}^3$ $\quad \Gamma(a,b,c) = \underbrace{(a,b,c)^2}_{\text{смес. произв.}}$; $\underline{V_{abc} = \pm(a,b,c)}$

$$(a,b,c) = (a \times b, c)$$

<u>Сл.</u> (Н-во по Коши-Буняковски)

$\forall u, v \in V\ (ЕП) \Rightarrow |(u,v)| \le \|u\| \cdot \|v\|$

"=" $\Leftrightarrow$ u и v са ЛЗ $\Leftrightarrow$ $\underline{u}$ и $\underline{v}$ – колинеарни