Локални екстремуми

За функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ точка x_0 е локален максимум, ако f е дефинирана в околност на x_0 и за някое $\varepsilon > 0$,
$f(x_0) \geq f(x)$ за всяко $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$
Казано по-друг начин в някоя околност на x_0, f не достига по-голяма стойност от x_0. Аналогично дефинираме и локален минимум.
Ако f е диференцируема в x_0 и x_0 е локален максимум, то $f'(x_0) = 0$, т.е необходимо условие за максимум е анулиране на производната.

Ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, то x_0 е локален максимум.
Ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то x_0 е локален минимум.
Тези понятия се пренасят за функции на повече променливи. За простота ще разглеждаме най-вече функции на 2 променливи.

<u>Деф.</u> $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ има локален максимум в точката (x_0, y_0), ако f е дефинирана в околност (т.е. в кръг с център (x_0, y_0)) на (x_0, y_0) и за някое $\varepsilon > 0$, $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ за всеки (x, y), т.че $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varepsilon$. (т.е. за всички точки (x, y) на разстояние по-малко от ε от (x_0, y_0)).

~~Ако (x_0, y_0) е локален екстремум на f, то x_0 е~~ ло
Аналогично дефинираме локален минимум с разликата $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$
Локален максимум и локален минимум наричаме локален екстремум.

Ако (x_0, y_0) е локален екстремум, то $\varphi(x) = f(x, y_0)$ има локален екстремум в точката x_0. Аналогично $\psi(x) = f(x_0, y)$ има локален екстремум в точката y_0. От необходимото условие за екстремум на функция на една променлива, получаваме:
<u>Тв.</u> Нека $f(x,y)$ притежава първи частни производни в (x_0, y_0)
Необходимо условие (x_0, y_0) да е локален екстремум е ~~$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$~~
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Иначе казано, кандидатите за локален екстремум са измежду решенията на системата $\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$.

Пр. $f(x,y) = x^2+y^2$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$. $\Rightarrow$ Единствен кандидат за екстремум е точката $(0,0)$.

От друга страна, за произволни $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$.

$\Rightarrow (0,0)$ е дори глобален минимум.

Пр. $g(x,y) = x^3+y^3$. $\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2$. Единствен кандидат отново е точката $(0,0)$. Но $g(x,0) = x^3$ приема както по-големи стойности от $0 = g(0,0)$, така и по-малки стойности от 0, когато x се мени в произволна околност на 0. $\Rightarrow (0,0)$ не е екстремум.

Достатъчно условие за екстремум ни дава следното твърдение: (аналог на твърдението за втората производна, тук роля играят всички частни производни от втори ред на функцията)

Тв. Нека $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ притежава втори частни производни и $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Нека още

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix}.$$

Ако $\Delta > 0$ и $f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$, (x_0,y_0) е локален минимум за f.

Ако $\Delta > 0$ и $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$, (x_0,y_0) е локален максимум за f.

Ако $\Delta < 0$, (x_0,y_0) не е екстремум за f.

Ако $\Delta = 0$, (x_0,y_0) може и да е, може и да не е екстремум.

Пр. За $f(x,y) = x^2+y^2$, намираме $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = f''_{yx} = 0$, $f''_{yy} = 2$.

Тогава $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ и $f''_{xx} = 2 > 0 \Rightarrow (0,0)$ – лок. минимум.

Зад. Изследвайте за локални екстремуми функциите:

а) $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$ б) $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

в) $f(x,y,z) = xy+yz+zx$ г) $f(x,y) = x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^2y + 12xy$

д) $f(x,y) = x^4+y^4-(x-y)^2$ е) $f(x,y) = x^2y^3(6-x-y)$.

Решение: а) f притежава първи частни производни във всяка точка от $\mathbb{R}^2$. По необходимото условие, екстремумите са измежду решенията (x,y) на системата $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$.

$f'_x(x,y) = 3x^2-3y$, $f'_y(x,y) = 3y^2-3x$.

Тогава $\begin{cases} 3x^2-3y=0 \\ 3y^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y \\ y^2=x \end{cases} \xrightarrow[\text{наобратно}]{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2=y \\ y^4=x^2=y \end{cases}$

Така получихме уравнение само за y: $y^4=y$, т.е. $y(y^3-1)=0$.

При $y=0$ от $x=y^2 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ едно решение е $(0,0)$

при $y=1$ от $x=y^2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$ друго решение е $(1,1)$.

Всички останали точки не са локални екстремуми на f.

Остават само тези два кандидата: $(0,0)$ и $(1,1)$.

За всяка от тях прилагаме достатъчното условие.

~~Когато има~~ Първо пресмятаме вторите производни:

$f''_{xx}(x,y) = 6x$; $f''_{xy}(x,y) = -3 = f''_{yx}(x,y)$ и $f''_{yy}(x,y) = 6y$.

Когато има повече от един кандидат е добре първо да се пресметне детерминантата $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$ като функция на x и y и чак после да се замести с конкретните стойности.

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy-9 = 9(4xy-1).$$

Така при $x=y=0$, $\Delta(0,0) = -9<0 \Rightarrow$ няма екстремум в $(0,0)$.

при $x=y=1$, $\Delta(1,1) = 9.3>0$ и $f''_{xx}(1,1) = 6>0$.

$\Rightarrow$ В $(1,1)$ f има локален минимум.

Така f има единствен локален екстремум и той е минимум и се достига в точката $(1,1)$.

б) f е дефинирана за $xy \neq 0$. Тъй като за да бъде (x_0, y_0) екстремум първо условие е f да е дефинирана в (x_0, y_0), то търсените точки са с ненулеви координати. Още, ако $xy \neq 0$, то f притежава частни производни в (x, y). Кандидати за екстремуми търсим от системата:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y-\frac{50}{x^2}=0 \\ x-\frac{20}{y^2}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=\frac{50}{x^2} \\ x=\frac{20}{y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2y=50 \\ xy^2=20 \end{cases}.$$

Ако умножим двете равенства, получаваме:

$1000 = 50.20 = x^2y.xy^2 = x^3y^3 = (xy)^3 \Rightarrow (xy)^3 = 10^3 \Rightarrow xy = 10.$

Тогава $x = \frac{x^2y}{xy} = \frac{50}{10} = 5$ и $y = \frac{xy}{x} = \frac{10}{5} = 2$.

Единствено решение на системата е $(5,2)$.

За да проверим дали наистина е екстремум, пресмятаме вторите производни: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = +\frac{100}{x^3}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{40}{y^3}$.

$$\Delta f(x,y) = \begin{vmatrix} 100/x^3 & 1 \\ 1 & 40/y^3 \end{vmatrix} = \frac{100}{x^3}\cdot\frac{40}{y^3} - 1 = \frac{4000}{(xy)^3} - 1$$

В частност, $\Delta(5,2) = \frac{4000}{1000} - 1 = 3 > 0$ и $f''_{xx}(5,2) = \frac{100}{5^3} > 0$.

$\Rightarrow f$ има локален минимум в $(5,2)$.

в) Необходимото условие за екстремум на функция на повече променливи изисква равенство на всички първи частни производни на 0.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y+z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x+z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = x+y = 0 \end{cases}$$

Събирайки трите уравнения, имаме

$0 = x+y+x+z+y+z = 2(x+y+z) \Rightarrow x+y+z=0$

и $x = (x+y+z)-(y+z) = 0$, а оттам и $y=0$, $z=0$.

Единствен кандидат $(0,0,0)$.

Директно съобразяваме, че $f(x,x,x) = 3x^2 > 0$ за $x \neq 0$.

$f(x,x,-x) = x^2 - x^2 - x^2 = -x^2 < 0$ за $x \neq 0$.

$\Rightarrow$ За точки произволно близко до $(0,0,0)$ f приема както положителни, така и отрицателни стойности $\Rightarrow (0,0,0)$ не е екстремум.

$\Rightarrow f$ няма локални екстремуми.

г) В този, както и в следващите примери частни производни има във всяка точка. За това директно решаваме системата от първите частни производни:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 - 2y^2 - 12xy + 12y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y - 4xy - 6x^2 + 12x = 0 \end{cases}$$

Разлагаме всяко от уравненията:

$$2xy^2 - 2y^2 - 12xy + 12y = y(2xy - 2y - 12x + 12) = 2y(xy - y - 6x + 6) =$$
$$= 2y(y(x-1) - 6(x-1)) = 2y(x-1)(y-6) = 2y(y-6)(x-1).$$

$$2x^2y - 4xy - 6x^2 + 12x = 2x(xy - 2y - 3x + 6) = 2x(y(x-2) - 3(x-2))$$
$$= 2x(x-2)(y-3).$$

Така $\begin{cases} 2y(y-6)(x-1) = 0 \\ 2x(x-2)(y-3) = 0. \end{cases}$

От първото $x=1$ или $y=0$ или $y=6$.
От второто $x=0$ или $x=2$ или $y=3$. Разглеждаме случаи по първото уравнение:

1сл) $x=1$. Тогава от второто, $y=3 \Rightarrow (1,3)$ – кандидат.
2сл) $y=0$. От второто $x=0$ или $x=2 \Rightarrow (0,0)$ и $(2,0)$ – кандидати.
3сл) $y=6$. Отново $x=0$ или $x=2 \Rightarrow (0,6)$ и $(2,6)$ – кандидати.

Вторите производни пресмятаме:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2 - 12y = 2y(y-6)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy - 4y - 12x + 12 = 4x(y-3) - 4(y-3) = 4(x-1)(y-3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 4x = 2x(x-2).$$

$$\Delta(x,y) = 2y(y-6).2x(x-2) - (4(x-1)(y-3))^2 = 4xy(x-2)(y-6) - 16(x-1)^2(y-3)^2.$$

Тук няма нужда да преобразуваме повече:

$\Delta(0,0) = -16.1^2.3^2 < 0$; $\Delta(2,0) = -16.1^2.3^2 < 0$
$\Delta(0,6) = -16.1^2.3^2 < 0$, $\Delta(2,6) = -16.1^2.3^2 < 0$ } В 4 от 5те кандидата няма екстремум.

Първото събираемо е 0 във всеки от случаите.

Остава единствено $(1,3)$:

$\Delta(1,3) = 4\cdot 1\cdot 3\cdot(-1)\cdot(-3) = 4\cdot 3^2 > 0 \Rightarrow$ има локален екстремум.

$f''_{xx}(1,3) = 2\cdot 3\cdot(-3) < 0 \rightarrow (1,3)$ е локален максимум.

д) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 + 2xy - y^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 2x + 2y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Събираме двете уравнения:

$0 = 4x^3 + 4y^3 \Rightarrow x^3 + y^3 = 0, \quad x^3 = -y^3 = (-y)^3.$

Две трети степени са равни, точно когато аргументите са равни $\Rightarrow x = -y$. Заместваме например в първото:

$0 = 4x^3 - 2x + 2y = 4x^3 - 2x - 2x = 4(x^3 - x) = 4x(x-1)(x+1).$

Всеки корен за x еднозначно определя стойността на y от $y = -x$.

$\Rightarrow$ Кандидати за екстремум са $(0,0)$, $(1,-1)$ и $(-1,1)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 2$.

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2-2 & 2 \\ 2 & 12y^2-2 \end{vmatrix} = (12x^2-2)(12y^2-2) - 4 =$$

$$= 144x^2y^2 - 24x^2 - 24y^2 + \cancel{4} - \cancel{4} = 24(6x^2y^2 - x^2 - y^2).$$

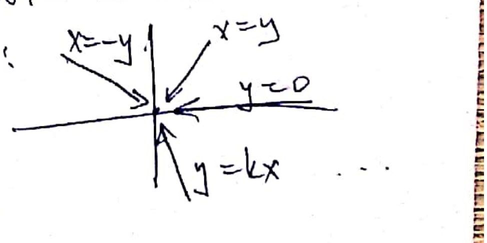
$\Delta(1,-1) = 24(6-1-1) > 0$, $f''_{xx}(1,-1) = 10 > 0 \rightarrow (1,-1)$ е лок. минимум.

Аналогично $(-1,1)$ е локален минимум.

$\Delta(0,0) = 0$, така че достатъчното условие не ни дава нищо за $(0,0)$.

За да покажем, че не е екстремум е достатъчно да намерим точки произволно близко до $(0,0)$, в които се достига както положителна, така и отрицателна стойност. За да докажем, че е екстремум, трябва да покажем, че $f(x,y) - f(0,0)$ има постоянен знак около $(0,0)$, например като сума от точни квадрати. Първото е винаги по-лесно.

Пробваме клонене към $(0,0)$ по различни начини:



В случая $f(x,x) = \underline{2x^4 \geq 0}$

$f(x,0) = x^4 - x^2 = -x^2(1-x^2) \underline{< 0}$ за $x \in (0,1)$.

$\rightarrow f$ приема както положителни, така и отрицателни стойности близо до $(0,0)$.

$\Rightarrow f$ няма екстремум в $(0,0)$.

Окончателно, f има два локални минимума: $(1,-1)$ и $(-1,1)$.

e) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^3 \cdot 2x(6-x-y) + y^3 \cdot x^2 \cdot (-1) = y^3(2x(6-x-y) - x^2)$

$= xy^3(2(6-x-y)-x) = xy^3(12-3x-2y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2(3y^2(6-x-y) + y^3 \cdot (-1)) = x^2y^2(3(6-x-y)-y) =$

$= x^2y^2(18-3x-4y)$.

Ако $x=0$, то $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$.

Аналогично, ако $y=0$, то $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$.

Ако $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то $\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3x+2y=12 \\ 3x+4y=18 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array} \right.$

Така кандидати са всички точки от координатните оси, както и точката $(2;3)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^3(1\cdot(12-3x-2y) + x\cdot(-3)) = y^3(12-6x-2y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2(2y(18-3x-4y) + y^2\cdot(-4)) = x^2y(36-6x-12y)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = y^2(x^2(-3) + 2x(18-3x-4y)) = xy^2(36-9x-8y)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,3) = 3^3(12-6.2-2.3) = 3^3(-2.3) = -2.3^4 < 0$.

$\frac{\partial^2 f(2,3)}{\partial x \partial y} = 2.3^2(36-9.2-8.3) = 2.3^2(-6) = -2^2.3^3$

$\frac{\partial^2 f(2,3)}{\partial y^2} = 2^2.3(36-6.2-12.3) = 2^2.3(-6.2) = -2^4.3^2$

$\Delta = (-2.3^4)\cdot(-2^4 3^2) - (-2^2 3^3)^2 = 2^5.3^6 - 2^4.3^6 = 2^4.3^6 > 0$

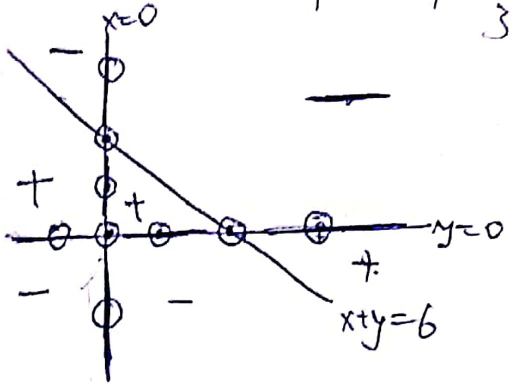
$\Rightarrow$ Екстремум и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2.3^4 < 0 \Rightarrow$ лок. максимум.

При $x=0$ или $y=0$ детерминантата Δ има нулев ред или стълб $\Rightarrow \Delta = 0$. $\Rightarrow$ Достатъчното условие не ни дава нищо.

Когато $x=0$ или $y=0$, $f(x,y)=0$. Интересува ни знака на f около координатните оси.

$f(x,y)=x^2y^3(6-x-y)=0$ за $x=0$ или $y=0$ или $x+y=6$.

Това са три прави в равнината. Знакът на $f(x,y)$ зависи от това в коя област на равнината попада (x,y) спрямо тези три прави.



В горната дясна област, $x>0$, $y>0$ и $6-x-y<0$. Там знакът на f е отрицателен.

Може да изберем конкретна точка от всяка област и да намерим знака.

Алтернативно, при преминаване на някоя от правите знакът се сменя или не в зависимост от четността на степента. Минавайки през $x=0$, знакът се запазва. Минавайки през другите две прави, знакът се сменя.

Осите се разпадат на краен брой случаи:

- $(0,0)$ → в първи квадрант f е положителна, в трети е отрицателна → не е екстремум
- $(0,6)$
- $(6,0)$
- Отсечката между $(0,0)$ и $(0,6)$
- Отсечката между $(0,0)$ и $(6,0)$
- ~~Отсечката между $(0,6)$ и $(6,0)$~~
- ~~Отсечката~~ от $(0,6)$ до $(0;+\infty)$
- Лъчът от $(6,0)$ до $(+\infty,0)$
- Лъчът от $(0;0)$ до $(0;-\infty)$
- Лъчът от $(0,0)$ до $(-\infty;0)$

Знаейки знаците на f лесно съобразяваме къде има екстремум и къде няма: лъчите $(0,0)$ до $(0,-\infty)$ и $(0;6)$ до $(0;+\infty)$ са локални максимуми (около тези точки стойности на f са отрицателни).

Отсечката от $(0,0)$ до $(0,6)$ без краищата съдържа локални минимуми.

Към тези добавяме и по-рано намерения лок. максимум $(2,3)$.