Екстремуми

Да припомним дефинициите и теоремите за екстремуми на функции на една променлива.

1. Казваме, че точката x_0 е вътрешна за множеството *D*, ако съществува отворен интервал *U*, такъв че $x_0 \in U \subset D$. (Такива са точките *B, C, D, E* и *F* на чертежа).

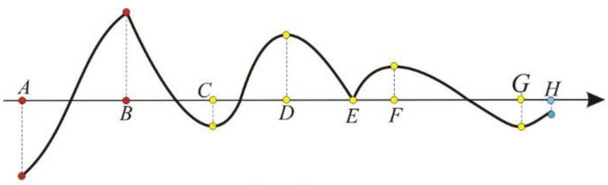
2. Казваме, че в функцията $f(x)$ имаме **най-голяма стойност** в т. $x_0 \in D$, ако за всяко $x \in D$ е изпълнено $f(x) \le f(x_0)$.

Това отбелязваме така $\max\limits_{x \in D} f(x) = f(x_0)$

Казваме, че в $x_0 \in D$ имаме най-малка стойност, ако за всяко $x \in D$ е изпълнено $f(x) \ge f(x_0)$. Това отбелязваме така $\min\limits_{x \in D} f(x) = f(x_0)$

На фиг. 1 $\max\limits_{x \in D} f(x) = f(B)$ и $\min\limits_{x \in D} f(x) = f(A)$.

3. Казваме, че в точката x_0 имаме **локален максимум,** ако точката x_0 **е вътрешна за множеството *D*** и ако има околност $U \subset D$ на x_0, такова че за всяко $x \in U$ е изпълнено $f(x) \le f(x_0)$.



Фиг. 1

Аналогична е дефиницията на локален минимум.

Общо локалните максимуми и локалните минимуми се наричат локални екстремуми.

На фиг. 1 локални максимуми има в точките *B, D* и *F,* локални минимуми има в точките *C, E* и *G.* В точките *A* и *H* **няма локални екстремуми.**

Функции на две променливи

1. Казваме, че точката $P(x_0; y_0)$ е вътрешна за множеството *D,* ако съществува отворен кръг *U,* такъв че $P(x_0; y_0) \in U \subset D$.

2. Казваме, че в $P(x_0; y_0) \in D$ имаме **най-голяма стойност**, ако за всяка точка $(x; y) \in D$ е изпълнено $f(x; y) \le f(x_0; y_0)$.

Това отбелязваме така $\max\limits_{x \in D} f(x; y) = f(x_0; y_0)$

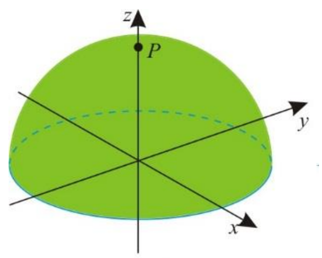
Казваме, че в $P(x_0; y_0) \in D$ имаме най-малка стойност, ако за всяка точка $(x; y) \in D$ е изпълнено $f(x; y) \ge f(x_0; y_0)$.

Това отбелязваме така $\min\limits_{x \in D} f(x; y) = f(x_0; y_0)$.

3. Казваме, че в точката $P(x_0; y_0)$ имаме **локален максимум,** ако точката $P(x_0; y_0)$ **е вътрешна за множеството *D*** и ако има отворено множество U, $P(x_0; y_0) \in U \subset D$, такова че за всяка точка $P(x; y) \in U$ е изпълнено $f(x; y) \le f(x_0; y_0)$.

Казваме, че в точката $P(x_0;y_0)$ имаме **локален минимум,** ако точката $P(x_0;y_0)$ **вътрешна за множеството D** и ако има отворено множество U, $P(x_0;y_0)\in U\subset D$, такова че за всяка точка $P(x;y)\in U$ е изпълнено $f(x;y)\geq f(x_0;y_0)$.

Общо локалните максимуми и локалните минимуми се наричат локални екстремуми.

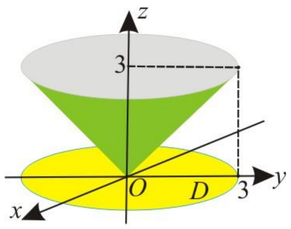


Фиг. 2

На фиг. 2 е изобразена функцията $f(x;y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Дефиниционното множество на функцията е затвореният кръг $D:x^2+y^2\leq 1$. Точката $(0;0)$ е вътрешна за D и за всяка точка $(x;y)\in D$ е в сила $f(x;y)=\sqrt{1-x^2-y^2}\leq 1\leq f(0;0)$. Следователно в $(0;0)$ функцията $f(x;y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ има и най-голяма стойност и локален максимум.

Във всяка точка $(x_0;y_0)$ от окръжността $K:{x_0}^2+{y_0}^2=1$ и за всяка $(x;y)\in D$ е изпълнено $0=f(x_0;y_0)\leq\sqrt{1-x^2-y^2}$. Следователно във всяка точка от K има най-малка стойност, но точките от K са контурни и следователно в тях **няма локални екстремуми.**

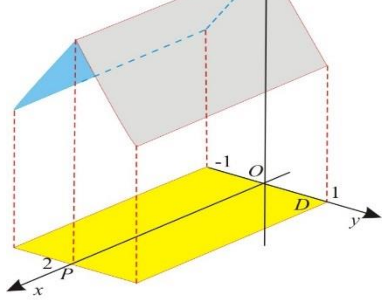


Фиг. 3

На фиг. 3 е изобразена функцията $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$, разглеждана в затворения кръг $D:x^2+y^2\leq 9$. Точката $(0;0)$ е вътрешна за D и за всяка точка $(x;y)\in D$ е в сила $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}\geq f(0;0)=0$.

Следователно в $(0;0)$ функцията $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$ има и най-малка стойност, и локален минимум.

В всяка точка $(x_0;y_0)$ от окръжността $K:{x_0}^2+{y_0}^2=9$ и за всяка $(x;y)\in D$ е изпълнено $f(x_0;y_0)=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=3\geq\sqrt{x^2+y^2}$. Следователно във всяка точка от K има най-голяма стойност, но точките от K са контурни и следователно в тях **няма локални екстремуми.**



Фиг. 4

На фиг. 4 е изобразена функцията $f(x;y)=3-0.|x|-|y|=3-|y|$, разглеждана в правоъгълника $D:\begin{cases}0\leq x\leq 2\\ -1\leq y\leq 1\end{cases}$.

В всяка точка $(x_0;y_0)$ от отсечката $PO:0\leq x_0\leq 2, y=0$ и за всяка $(x;y)\in D$ е изпълнено $f(x;y)=3-|y|\leq f(x_0;y_0)=3$. Следователно във всяка точка от OP има най-голяма стойност.

Точките, за които $0<x_0<2, y=0$ са вътрешни точки на D и следователно в всяка от тях има локален максимум. Точките O и P са контурни и следователно в тях **няма локални екстремуми.**

Теореми за намиране на локални екстремуми

Всички теорема са за вътрешни точки на множеството, в което разглеждаме функцията

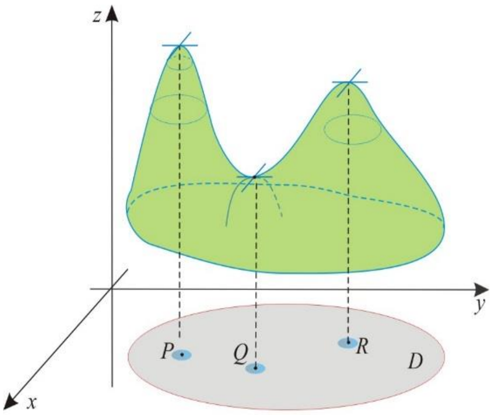
Теорема 1. (Необходимо условие) Ако функцията $f(x;y)$ има локален екстремум в точката $(x_0;y_0)$ и съществуват частните производни $f_x'(x_0;y_0)$ и $f_y'(x_0;y_0)$, то $f_x'(x_0;y_0)=0$ и $f_y'(x_0;y_0)=0$.

Точките, в които $\left| \begin{array}{l} f_x'(x_0;y_0)=0 \\ f_y'(x_0;y_0)=0 \end{array} \right.$ се наричат стационарни точки.

Да отбележим, че геометрично $f_x'(x_0;y_0)=0$ означава, че през точката $(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$ има права успоредна на оста Ox, допираща се до повърхнината (фиг. 5)

Нека $\Delta(x_0;y_0)=\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0;y_0) & f''_{xy}(x_0;y_0) \\ f''_{xy}(x_0;y_0) & f''_{yy}(x_0;y_0) \end{vmatrix}=f''_{xx}(x_0;y_0)f''_{yy}(x_0;y_0)-[f''_{xy}(x_0;y_0)]^2$.

Теорема 2. (Достатъчно условие). Нека функцията $f(x;y)$ притежава непрекъснати производни до втори ред включително във стационарната точка $(x_0;y_0)$.



Фиг. 5

– Ако $\Delta(x_0;y_0)>0$ и $f''_{xx}(x_0;y_0)<0$, то в точката $(x_0;y_0)$ има локален максимум

– Ако $\Delta(x_0;y_0)>0$ и $f''_{xx}(x_0;y_0)>0$, то в точката $(x_0;y_0)$ има локален минимум

– Ако $\Delta(x_0;y_0)<0$, то в точката $(x_0;y_0)$ няма локален екстремум. Такава точка се нарича седловинна точка. (Точката Q на фиг. 5 .)

При търсене на **локални екстремуми обикновено** следваме схемата:

– Намираме стационарните точки

– Пресмятаме стойностите на

$$\Delta(x_0;y_0)=\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0;y_0) & f''_{xy}(x_0;y_0) \\ f''_{xy}(x_0;y_0) & f''_{yy}(x_0;y_0) \end{vmatrix}=f''_{xx}(x_0;y_0)f''_{yy}(x_0;y_0)-[f''_{xy}(x_0;y_0)]^2$$

в стационарните точки.

– Прилагаме достатъчното условие

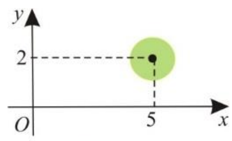
Задача 1. Да се изследва за локални екстремуми функцията $z(x;y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$

Решение. Дефиниционното множество се състои от точките, за които $x\neq 0$ и $y\neq 0$ – всички точки от равнината Oxy, без точките от осите Ox и Oy.

Намираме стационарните точки:

$$\begin{vmatrix} z'_x(x;y) = y - \dfrac{50}{x^2} = 0 \\ z'_y(x;y) = x - \dfrac{20}{y^2} = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} yx^2 = 50 \\ xy^2 = 20 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{2} \\ xy^2 = 20 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x = \dfrac{5}{2}y \\ \dfrac{5}{2}y^3 = 20 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x = \dfrac{5}{2}y \\ y^3 = 8 \end{vmatrix} \Rightarrow \quad y = 2; x = 5.$$



Фиг. 6

Точката $(5;2)$ е вътрешна за D. Следователно е стационарна точка на $z(x;y)$.

Пресмятаме вторите производни в точката $(5;2)$:

$$\begin{vmatrix} z''_{xx}(x;y) = \dfrac{100}{x^3} \quad \Rightarrow \quad z''_{xx}(5;2) = \dfrac{100}{125} = \dfrac{4}{5} \\ z''_{xy}(x;y) = 1 \quad \Rightarrow \quad z''_{xy}(5;2) = 1 \\ z''_{yy}(x;y) = \dfrac{40}{y^3} \quad \Rightarrow \quad z''_{yy}(5;2) = \dfrac{40}{8} = 5 \end{vmatrix}$$

Пресмятаме $\Delta(5;2)$:

$$\Delta(5;2) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(5;2) & f''_{xy}(5;2) \\ f''_{xy}(5;2) & f''_{yy}(5;2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \dfrac{4}{5}.5 - 1 = 3 > 0.$$

И тъй като $z''_{xx}(5;2) = \dfrac{4}{5} > 0$ в точката $(5;2)$ функцията $z(x;y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$ има локален минимум.

Задача 2. Да се изследва за локални екстремуми функцията $z(x;y) = e^x(1 - x^2 - 16y^2)$.

Решение. Функцията е дефинирана във всяка точка от $\mathbb{R}^2$.

Намираме стационарните точки:

$$\begin{vmatrix} z'_x(x;y) = 0 \\ z'_y(x;y) = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} e^x(1 - x^2 - 16y^2) - e^x.2x = e^x(1 - x^2 - 16y^2 - 2x) \\ e^x.(-32y) = 0 \end{vmatrix}$$

Множителят e^x е по-голям от 0. Решаваме системата:

$$\begin{vmatrix} 1 - x^2 - 16y^2 - 2x = 0 \\ -32y = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 - x^2 - 2x = 0 \\ y = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x = -1 \pm \sqrt{2} \\ y = 0 \end{vmatrix}$$

Така намерихме две стационарни точки $P:(x_1;0) = (-1-\sqrt{2};0)$ и $Q:(x_2;0) = (-1+\sqrt{2};0)$.

Пресмятаме вторите частни производни:

$$\begin{vmatrix} z''_{xx}(x;y) = e^x(1 - x^2 - 16y^2 - 2x) - e^x(2x + 2) \\ z''_{xy}(x;y) = e^x.(-32y) \\ z''_{yy}(x;y) = -32e^x \end{vmatrix}.$$

В точката P имаме

$$\left| \begin{aligned} & z''_{xx}(x_1;0) = e^{x_1}(1 - x_1^2 - 2x_1) - e^{x_1}(2x_1 + 2) = -e^{x_1}.[2(-1-\sqrt{2}) + 2] = 2\sqrt{2}e^{x_1} \\ & z''_{xy}(x_1;0) = e^{x_1}.(-32.0) = 0 \\ & z''_{yy}(x_1;0) = -32e^{x_1} \end{aligned} \right. .$$

Тогава

$\Delta(x_1;0) = \begin{vmatrix} 2\sqrt{2}e^{x_1} & 0 \\ 0 & -32e^{x_1} \end{vmatrix} = 2\sqrt{2}e^{x_1}.(-32e^{x_1}) < 0$ – в точката $P(x_1;0)$ имаме седловинна точка.

В точката Q имаме

$$\left| \begin{aligned} & z''_{xx}(x_2;0) = e^{x_2}(1 - x_2^2 - 2x_2) - e^{x_2}(2x_2 + 2) = -e^{x_2}.[2(-1+\sqrt{2}) + 2] = -2\sqrt{2}e^{x_2} \\ & z''_{xy}(x_2;0) = e^{x_2}.(-32.0) = 0 \\ & z''_{yy}(x_2;0) = -32e^{x_2} \end{aligned} \right. .$$

Тогава

$\Delta(x_2;0) = \begin{vmatrix} -2\sqrt{2}e^{x_1} & 0 \\ 0 & -32e^{x_1} \end{vmatrix} = -2\sqrt{2}e^{x_2}.(-32e^{x_1}) > 0$ и $z''_{xx}(x_2;0) = -2\sqrt{2}e^{x_2} < 0$ – в точката $P(x_2;0)$ имаме локален максимум.

Задача 3. Да се изследва за локални екстремуми функцията

$z(x;y) = x^3 + \dfrac{3}{2}y^2 - 3xy - 6x$.

Решение. Намираме стационарните точки:

$$\left| \begin{aligned} & z'_x(x;y) = 0 \\ & z'_y(x;y) = 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} & 3x^2 - 3y - 6 = 0 \\ & 3y - 3x = 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} & 3x^2 - 3x - 6 = 0 \\ & y = x \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} & x_1 = 2, x_2 = -1 \\ & y = x \end{aligned} \right.$$

Имаме две стационарни точки $P(-1,-1)$ и $Q(2;2)$.

Пресмятаме вторите частни производни:

$$\left| \begin{aligned} & z''_{xx}(x;y) = 6x \\ & z_{xy}(x;y) = -3 \\ & z_{yy}(x;y) = 3 \end{aligned} \right. .$$

В точката $P(-1;-1)$ имаме

$$\left| \begin{aligned} & z''_{xx}(-1;-1) = 6.(-1) \\ & z_{xy}(-1;-1) = -3 \\ & z_{yy}(-1;-1) = 3 \end{aligned} \right.$$

Тогава $\Delta(-2;-2) = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -6.3 - (-3)^2 < 0$ – в точката $P(-1;-1)$ имаме седловинна точка.

В точката $P(2;2)$ имаме

$$\left| \begin{aligned} & z''_{xx}(2;2) = 12 \\ & z_{xy}(2;2) = -3 \\ & z_{yy}(2;2) = 3 \end{aligned} \right. .$$

Тогава $\Delta(2;2)=\begin{vmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=36-(-3)^2>0$ и $z''_{xx}(2;2)=12>0$ – в точката $P(1;1)$ имаме локален минимум.

Задача 4. Да се изследва за локални екстремуми функцията $z(x;y)=x^2y^3(2x+y+6)$.

Решение. Намираме стационарните точки:

$$\begin{vmatrix} z'_x(x;y)=0 \\ z'_y(x;y)=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} y^3[2x(2x+y+6)+2x^2]=0 \\ x^2[3y^2(2x+y+6)+y^3]=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} y^3x(6x+2y+12)=0 \\ x^2y^2(6x+4y+18)=0 \end{vmatrix}$$

Очевидно решения на тази система са всички точки $(x;y)$, за които $x=0$ или $y=0$.

Освен това решаваме и системата

$$\begin{vmatrix} 6x+2y+12=0 \\ 6x+4y+18=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 6x+2y+12=0 \\ 2y+6=0 \end{vmatrix} \Rightarrow y=-3, x=-1.$$

Така стационарни точки са точките $P(-1;-3)$ и точките от осите Ox и Oy.

Пресмятаме вторите частни производни:

$$\begin{vmatrix} z''_{xx}(x;y)=y^3[(6x+2y+12)+6x] \\ z_{xy}(x;y)=x[3y^2(6x+2y+12)+2y^3] \\ z_{yy}(x;y)=x^2[2y(6x+4y+18)+4y^2] \end{vmatrix}$$

В точката $P(-1;-3)$ имаме

$$\begin{vmatrix} z''_{xx}(-1;-3)=(-3)^3[[6(-1)+2(-3)+12]+6(-1)]=-27.(-6)=27.6 \\ z_{xy}(-1;-3)=(-1)[3(-3)^2(6(-1)+2(-3)+12)+2(-3)^3]=(-1).2(-27)=54 \\ z_{yy}(-1;-3))=x^2[2(-3)(6(-1)+4(-3)+18)+4(-3)^2]=(-1)^2.4.27=4.27 \end{vmatrix}$$

Тогава

$\Delta(-1;-3)=\begin{vmatrix} 27.6 & 54 \\ 54 & 4.27 \end{vmatrix}=27^2(6.4-4)>0$ и $z''_{xx}(-1;-3)=27.6>0$ – в точката $P(x_2;0)$ имаме локален минимум.

За точките по оста Oy имаме

$$\begin{vmatrix} z''_{xx}(0;y)=y^3[(6.0+2y+12)+6.0]=2y^4 \\ z_{xy}(0;y)=0.[2y^2(6x+2y+12)+y^3]=0 \\ z_{yy}(0;y)=0^2.[2y(6x+2y+12)+4y^2]=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta(0,y)=0.$$

За точките по оста Ox имаме

$$\begin{vmatrix} z''_{xx}(0;y)=y^3[(6.0+2y+12)+6.0]=2y^4 \\ z_{xy}(0;y)=0.[3y^2(6x+2y+12)+2y^3]=0 \\ z_{yy}(0;y)=0^2.[2y(6x+4y+18)+4y^2]=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta(0,y)=0$$

С теорема 2 не можем да определим дали има екстремум или няма. В тези точки ще направим допълнително изследване. На първо място във всички точки по осите функцията има стойност 0. Ако около някоя точка можем да построим околност, в която функцията има един знак, то в тази точка имаме локален екстремум. Ако във всяка околност на точката има функционални стойности с различни знаци, то в такава точка няма локален екстремум.

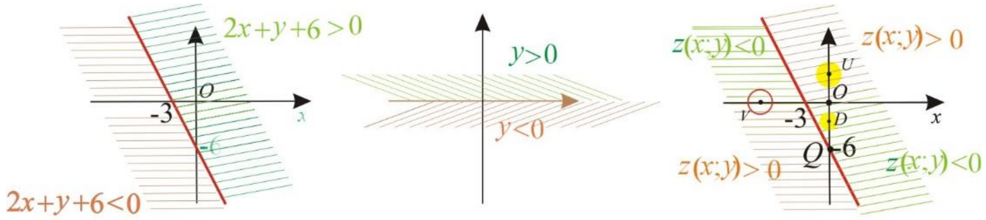
На първо място да отбележим, че всяка непрекъсната крива разделя равнината на две части $F(x;y)=0$, във всяка от които $F(x;y)$ има различни знаци.

На фиг. 7 а равнината е разделена на две части от правата с уравнение $2x+y+6=0$ – в кафявите $2x+y+6<0$, а в зелените – $2x+y+6>0$

На фиг. 7 б равнината е разделена на две части от правата с уравнение $y=0$.

На фиг. 7 в е разгледана функцията $z(x;y)=x^2y^3(2x+y+6)$ ($x^2>0$).

От чертежа можем да съобразим, че по оста Ox **няма екстремуми** – около всяка точка във всяка околност V има точки, в които $z(x;y)<0=z(0;0)$ (зелени точки) и точки, в които $z(x;y)>0=z(0;0)$ (кафяви точки). Същото се отнася и за точките O и Q.



а б в

Фиг.7

По оста Oy

– около точките с $y<-6$ и точките с $y>0$ може да се намери околност U, в която $z(x;y)>0=z(0;0)$ (кафяви точки). Следователно във всички тези точи има локален минимум.

– около точките с $-6<y<0$ може да се намери околност D, в която $z(x;y)<0=z(0;0)$ (зелени точки) Следователно във всички тези точки има локален максимум.

Задача 5. (За самостоятелна работа) Да се изследва за локални екстремуми функцията

а) $z(x;y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$;

б) $z(x;y)=x^2y^2-2xy^2-6x^2y+12xy$;

в) $z(x;y)=xy^2(4-x-y)$.