Семестриално контролно по "Дискретни структури" за КН, 1-ви поток, 21. 11. 2015 г.

Име: __________________________________, ФН:______, Група:________

| Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Общо |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| получени точки | | | | | | | |
| максимум точки | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 120 |

**Задача 1.** Докажете, че $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{3n+1}>1$ за всяко цяло $n \geq 1$.

**Задача 2.** Разглеждаме релации, дефинирани над множеството на целите положителни числа. Известно е, че $n$-местните релации ($n \geq 3$) често могат да се представят като конюнкция (сечение) на бинарни релации. Пример:

$$\text{числата } x,\ y \text{ и } z \text{ са наредени в нарастващ ред} \quad \Leftrightarrow \quad (x<y) \wedge (y<z).$$

Обаче не винаги има такова представяне. Докажете, че не съществува бинарна релация $R$, за която да е в сила представянето

$$x^y \text{ дели } z \quad \Leftrightarrow \quad xRy \wedge yRz.$$

**Задача 3.** Студентска конференция по висша математика се провежда в три секции — алгебра, геометрия и математически анализ. На конференцията присъстват общо 450 студенти от първи до четвърти курс, от различни университети. Измежду всеки осем студенти има поне двама от един и същ университет. Докажете, че в някоя от секциите на конференцията присъстват поне шестима студенти от един и същи курс на един и същ университет.

*Упътване:* Използвайте принципа на Дирихле.

**Задача 4.** Десет приятели искат да играят на футбол.
а) По колко начина могат да се разделят на два отбора по пет души?
б) Колко стават вариантите, ако всеки отбор си избира вратар и капитан?

*Забележка:* Пресметнете отговорите докрай.

**Задача 5.** Нека $A=\{p,\ q,\ r,\ s,\ t\}$, $B=\{x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w\}$, $C=A\cup B$. Намерете броя на релациите на строга линейна наредба в $C$, такива, че $a<b$ за $\forall a\in A$ и $\forall b\in B$.

*Забележка:* Изчислете отговора докрай.

**Задача 6.** Постройте биекция между контурите на кръг и трапец,
ако контурите и вътрешните области на двете фигури нямат обща точка.

# РЕШЕНИЯ

**Задача 1** се решава с принципа на математическата индукция.

*База:* $n = 1$. Трябва да проверим неравенството $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} > 1$, тоест $\dfrac{13}{12} > 1$, което е очевидно вярно.

*Индуктивна стъпка:* Нека неравенството е изпълнено при $n = k$ за някое $k \geq 1$, т.е. нека $\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k+2} + \dfrac{1}{k+3} + \cdots + \dfrac{1}{3k+1} > 1$. Ще докажем, че в такъв случай неравенството важи и при $n = k+1$, т.е. $\dfrac{1}{k+2} + \dfrac{1}{k+3} + \dfrac{1}{k+4} + \cdots + \dfrac{1}{3k+1} + \dfrac{1}{3k+2} + \dfrac{1}{3k+3} + \dfrac{1}{3k+4} > 1.$ За целта е достатъчно да установим, че разликата на левите страни е неотрицателна: $\dfrac{1}{3k+2} + \dfrac{1}{3k+3} + \dfrac{1}{3k+4} - \dfrac{1}{k+1} > 0$. Това неравенство може да се провери чрез преобразуване в поредица от равносилни неравенства:

$$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} > \frac{1}{k+1} - \frac{1}{3k+3} \iff \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} > \frac{3}{3k+3} - \frac{1}{3k+3} \iff$$

$$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} > \frac{2}{3k+3} \iff (3k+3)(3k+4) + (3k+3)(3k+2) > 2(3k+2)(3k+4) \iff$$

$$(3k+3)\Big[(3k+4) + (3k+2)\Big] > 2(3k+2)(3k+4) \iff (3k+3)(6k+6) > 2(3k+2)(3k+4) \iff$$

$$(3k+3)(3k+3) > (3k+2)(3k+4) \iff 9k^2 + 18k + 9 > 9k^2 + 18k + 8 \iff 9 > 8\,,$$

което е безспорно.

**Задача 2.** Да допуснем противното: че съществува бинарна релация $R$, за която

$$x^y \text{ дели } z \quad \Leftrightarrow \quad xRy \wedge yRz.$$

Заместваме $x = 1$. Тъй като $1^y = 1$ дели $z$, то $1Ry \wedge yRz$, откъдето следва, че $yRz$ за всички цели положителни числа $y$ и $z$. Тогава $xRy$ за всички цели положителни $x$ и $y$. Ето защо $xRy \wedge yRz$, следователно $x^y$ дели $z$ за всички цели положителни числа $x$, $y$ и $z$. Но това не е вярно: например $2^3 = 8$ не дели 7. Полученото противоречие води до извода, че направеното допускане е неправилно. Тоест търсената бинарна релация не съществува.

**Задача 3.** Прилагаме принципа на Дирихле два пъти.

Първи път: щом измежду всеки осем студенти има поне двама от един и същ университет, то следва, че на конференцията са представени най-много седем университета.

Втори път: считаме наредените тройки $<$*секция, университет, курс*$>$ за “чекмеджета”. Според правилото за умножение броят на тези тройки е не по-голям от $3\,.\,7\,.\,4 = 84$. Да поставим всеки студент в съответното му “чекмедже”. Тъй като $450 : 84 = 5$ и остатък 30, то ще се намери “чекмедже” с поне шестима студенти. Те са от един и същ университет, от един и същи курс и докладват в една и съща секция.

**Задача 4.**

а) Това подусловие допуска разнообразни решения. Например посочваме един от играчите по произволен начин и го оставяме да си избере четирима съотборници; това може да стане по $C_9^4 = 126$ начина. Друг подход: ние избираме петима играчи за единия отбор, за което разполагаме с $C_{10}^5 = 252$ възможности. Обаче всяка комбинация и нейното допълнение, например $\left\{1, 2, 3, 4, 5\right\}$ и $\left\{6, 7, 8, 9, 10\right\}$, задават едно и също разпределение на играчите по отбори. Затова броят на възможните разпределения по отбори е половината от броя на комбинациите 5 от 10, т.е. $252 : 2 = 126$.

**Отговор:** Играчите могат да се разпределят на отбори по 126 начина.

б) Всяка от наредените двойки <*вратар, капитан*> представлява вариация без повторение на два елемента от пет (играчите от един отбор). Броят на тези вариации е $V_5^2 = 20$, тоест всеки отбор може да избере вратар и капитан по 20 различни начина. За двата отбора общо начините са $20 . 20 = 400$. Тези 400 начина съответстват на едно разпределение на играчите по отбори. От всичките 126 разпределения се получават $126 . 400 = 50400$ варианта.

**Отговор:** Има 50400 варианта играчите да се разпределят на два отбора и всеки отбор да си избере вратар и капитан.

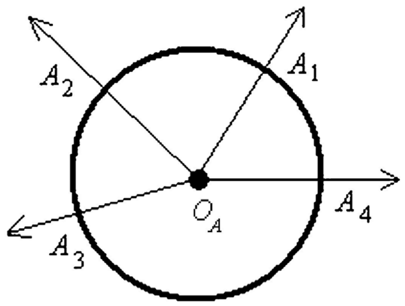
*Забележка:* В условието на задачата се подразбира, че вратарят и капитанът са двама различни играчи, затова вариациите са без повторение. Ако се допуска възможността вратарят да е капитан, тогава вариациите ще бъдат със повторение и броят им ще бъде $\widetilde{V}_5^2 = 25$. За двата отбора вариантите ще бъдат $25 . 25 = 625$, а за всички разпределения на играчите по отбори ще има $126 . 625 = 78750$ възможности. При новото тълкуване този отговор също може да се приеме за верен.

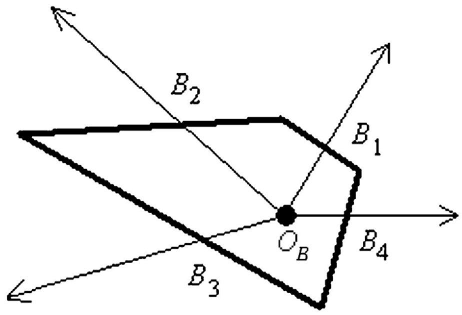
**Задача 5.** Всяка релация на строга линейна наредба представлява едно възможно подреждане на елементите на множеството $C = A \cup B$ в редица. По същество търсим броя на всички редици от елементи на $C$, в които редици елементите на $A$ предхождат елементите на $B$. Тоест елементите на $A$ заемат първите пет места, а елементите на $B$ — последните шест места. Всяко разместване на елементите на $A$ по местата им е пермутация на пет елемента. Броят на тези пермутации е $P_5 = 5! = 120$. Аналогично, всяко разместване на елементите на $B$ по местата им е пермутация на 6 елемента. Броят на тези пермутации е $P_6 = 6! = 720$. По правилото за умножение получаваме $120 . 720 = 86400$ за броя на възможните релации.

**Отговор:** Има 86400 релации на строга линейна наредба в $C$,
такива, че $a < b$ за $\forall a \in A$ и $\forall b \in B$.

**Задача 6.** Има два начина за решаването на тази задача. И двата използват едно и също свойство на изпъкналите фигури: лъч, чието начало е вътрешна точка за дадена изпъкнала фигура, пресича контура на фигурата точно веднъж.

**Първи начин:** Избираме две точки: $O_A$ — вътрешна за кръга; $O_B$ — вътрешна за трапеца. На всяка точка $A$ от контура на кръга съпоставяме мярката на ъгъла, който лъчът $O_AA^{\rightarrow}$ сключва с посоката хоризонтално надясно (ъгълът се мери от посоката "хоризонтално надясно" към лъча $O_AA^{\rightarrow}$ обратно на движението на часовниковата стрелка). Така дефинираното изображение от контура на кръга към интервала $\left[0\,;\,2\pi\right)$ е биекция; това твърдение следва от цитираното свойство на изпъкналите фигури.




Аналогично, ако $\varphi \in \left[0\,;\,2\pi\right)$, то съществува единствен лъч с начало точката $O_B$, който сключва ъгъл $\varphi$ с посоката "хоризонтално надясно" (ъгълът се мери, както бе обяснено по-горе). Този лъч пресича контура на трапеца в единствена точка $B$. По такъв начин е дефинирано изображение от интервала $\left[0\,;\,2\pi\right)$ към контура на трапеца; то също представлява биекция, понеже и трапецът е изпъкнала фигура.

Композицията на двете биекции е биекция от контура на кръга към контура на трапеца. Ако точките $B$ и $A$ са съответно образ и първообраз при тази биекция, то лъчите $O_AA^{\rightarrow}$ и $O_BB^{\rightarrow}$ са еднопосочни, понеже сключват един и същ ъгъл $\varphi$ с посоката "хоризонтално надясно". Това наблюдение ни позволява да дефинираме биекцията между двата контура по-кратко (без композиция): за всяка точка $A$ от контура на кръга единственият лъч с начало т. $O_B$, който е еднопосочен с лъча $O_AA^{\rightarrow}$, пресича контура на трапеца в единствена точка $B$, която по определение е образът на точката $A$. Обратно, за всяка точка $B$ от контура на трапеца единственият лъч с начало т. $O_A$, който е еднопосочен с лъча $O_BB^{\rightarrow}$, пресича контура на кръга в единствена точка $A$, която е първообразът на $B$. Твърденията за единственост на пресечните точки следват от цитираното свойство на изпъкналите фигури. От това, че всяка точка $A$ има единствен образ $B$, следва, че изображението е коректно дефинирано. От това, че всяка точка $B$ има единствен първообраз $A$, следва, че изображението е биекция.

**Втори начин:** Извършваме транслация на едната фигура така, че вътрешните области на фигурите да получат някаква обща точка $O$. На всяка точка $A$ от контура на кръга съпоставяме единствената точка $B$, в която лъчът $OA^{\rightarrow}$ пресича контура на трапеца. Това изображение е биекция, защото всяка точка $B$ от контура на трапеца има единствен първообраз — онази точка $A$, в която лъчът $OB^{\rightarrow}$ пресича контура на кръга.