2 тип, 2 задача

Да се докаже, че най-доброто равномерно приближение $E_n(f)$ с полиноми от Π_n за ф-ята $f(x) = \cos x$ в $[-1, 1]$ удовлетворява неравенството: $E_n(f) \le \dfrac{1}{2^n (n+1)!}$

Нека $P_n(x)$ е полиномът, който интерполира $f(x) = \cos x$ във възли нулите на $T_{n+1}(x)$ (чебишовите възли). T_{n+1} е полиномът на Чебишов от $\underline{n+1}$ степен.

Да означим възлите с $x_0, x_1, \dots, x_n$ ($n+1$ на брой).

За всяко $x \in [-1, 1]$ съществува $\xi \in [-1, 1]$, за която

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \frac{T_{n+1}(x)}{2^n}$$

Тогава

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - P_n(x)| \le \max_{\xi \in [-1,1]} \frac{\overbrace{|\cos^{(n+1)}(\xi)|}^{\le 1}}{(n+1)!} \cdot \max_{x \in [-1,1]} \frac{\overbrace{|T_{n+1}(x)|}^{= 1}}{2^n}$$

$$\le \frac{1}{2^n (n+1)!}$$

Тъй като най-доброто приближение е по-добро от всяко друго:

$$E_n(f) \le \| f - P_n \| \le \frac{1}{2^n (n+1)!}$$