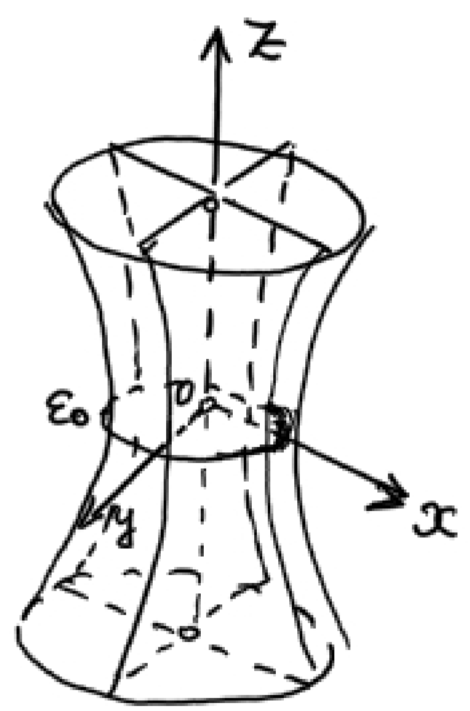
26. Прост хиперболоид. Хиперболичен параболоид. 1.

Прост хиперболоид.

Спрямо подходящо избрана ортонормирана координатна система всеки прост хиперболоид има уравнение



$$X_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$a \geq b > 0, \; c > 0.$

Равнините $z = h$ пресичат X_1 в елипси с полуоси $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$. Когато $|h| \longrightarrow \infty$ тези полуоси монотонно растат съответно от a и b до $+\infty$.

Координатната равнина Oxy пресича X_1 в най-малката елипса ε_0

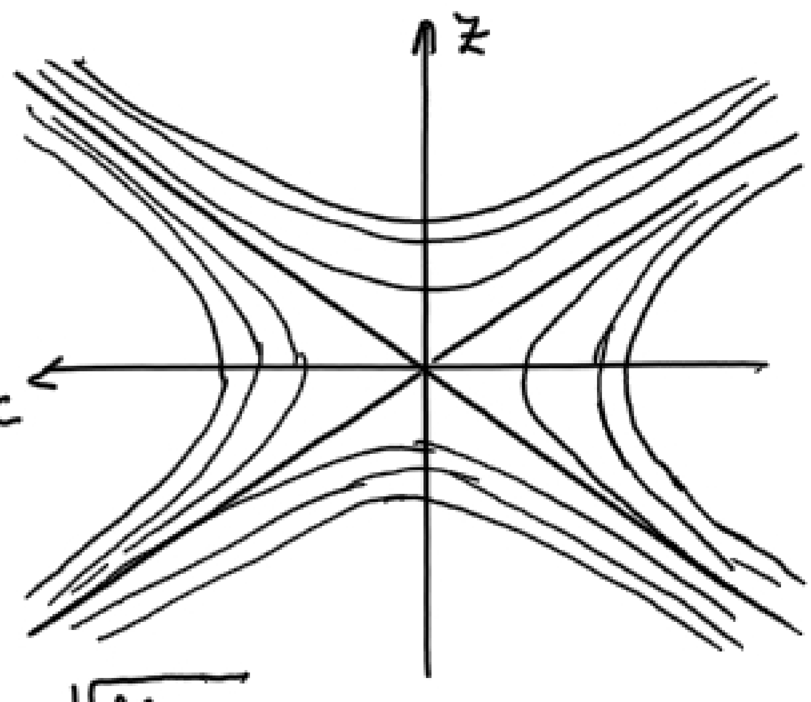
$$\varepsilon_0 : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases},$$ която се нарича гърло на хиперболоида.

Равнините $y=h$ при $|h|<b$ пре- 2.
сичат χ_1 в хиперболи с уравнения

$$\chi'_h \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{h^2}{b^2}, \\ y = h \end{cases}$$

с полуоси $a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{b^2}}$, $c\sqrt{1-\dfrac{h^2}{b^2}}$, които монотонно намаляват до нула, когато h расте от нула до b. Хиперболите χ_h са с реална ос Ox и имагинерна ос Oz.

При $|h|>b$ равнинните сечения са хиперболи



$$\chi''_h : \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{h^2}{b^2} - 1, \\ y = h. \end{cases}$$

с полуоси $c\sqrt{\dfrac{h^2}{b^2}-1}$, $a\sqrt{\dfrac{h^2}{b^2}-1}$, които монотонно растат от нула до $+\infty$ при $|h| \to \infty$. В този случай, хиперболите са с реална ос Oz и имагинерна ос Ox.

При $|h| = b$, т.е. $h = \pm b$, равнината 3 $y = b$ пресича хиперболоида в разпадаща се крива от втора степен

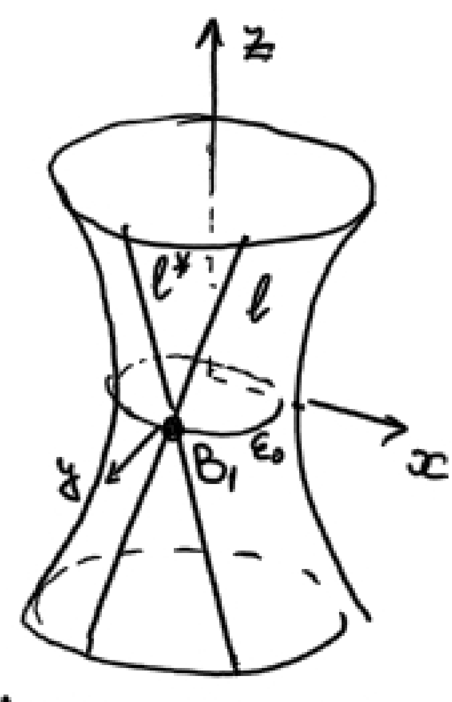
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = b, \end{cases}$$

която се състои от двете реални пресичащи се прави

$$l: \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = b. \end{cases} \quad \text{и} \quad l^* \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = b. \end{cases},$$

колинеарни съответно с векторите $\vec{l}\,(a, 0, -c)$ и $\vec{l}^*(a, 0, c)$.

Правите l и l^* се пресичат във върха $B_1(0, b, 0)$ на гърловата елипса ε_0 на хиперболоида.



Не е трудно да се провери, че равнината $y = b$ е допирателната равнина към хиперболоида в B_1.

Имаме $f_1(x,y,z)=\frac{1}{a^2}x$, $f_2(x,y,z)=\frac{1}{b^2}y$,

$$f_3(x,y,z)=-\frac{1}{c^2}z,\ f_4(x,y,z)=-1$$

$\Rightarrow f_1(B_1)=0$, $f_2(B_1)=\frac{1}{b}$ и $f_3(B_1)=0 \Rightarrow$

За допирателната равнина в B_1 имаме

$$0.(x-0)+\frac{1}{b}(y-b)+0.(z-0)=0,\text{ т.е}$$

е с уравнение $\quad y-b=0.$

Също така, равнината $y=-b$ е допирателната равнина към хиперболоида във върха $B_2(0,-b,0)$ на $\mathcal{E}_0$ и пресича X_1 в двойка, пресичащи се в B_2 реални прави.

Аналогично равнините $x=h$, при $|h|\neq a$ пресичат X_1 в хиперболи с реална ос Oy при $|h|<a$ и с реална ос Oz при $|h|>a$; при $|h|=a$ - в двойка реални, пресичащи се във връх на $\mathcal{E}_0$ - $A_1(a,0,0)$ или $A_2(-a,0,0)$. Равнините $x=a$ и $x=-a$ са допирателните към X_1 равнини съответно в A_1 и A_2.

От вида на $f_i(x,y,z)$, $i=1,2,3,4$ следва, че простият хиперболоид е централна повърхнина – има краен център, който не е от повърхнината. Това е центърът на гърловата елипса – $O(0,0,0)$. Също така, X_1 няма особени точки.

Допирателната равнина в точка $G\in X_1$, $G(x_1,y_1,z_1)$ е с уравнение

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)-\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

$$\Longrightarrow \frac{x_0}{a^2}\cdot x+\frac{y_0}{b^2}\cdot y-\frac{z_0}{c^2}\cdot z-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)=0$$

или

$$f_1(G)x+f_2(G)y+f_3(G)\cdot z+f_4(G)=0.$$

Нека δ е произволна равнина. Тогава δ пресича поне една от координатните равнини Oxz, Oyz. Следователно сечението на δ с X_1 съдържа реални точки. Видът му зависи от това, колко от асимпто- $\mathcal{B}$.

тичните направления на X_1 са в δ.

За асимптотичен за хиперболоида вектор $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ имаме

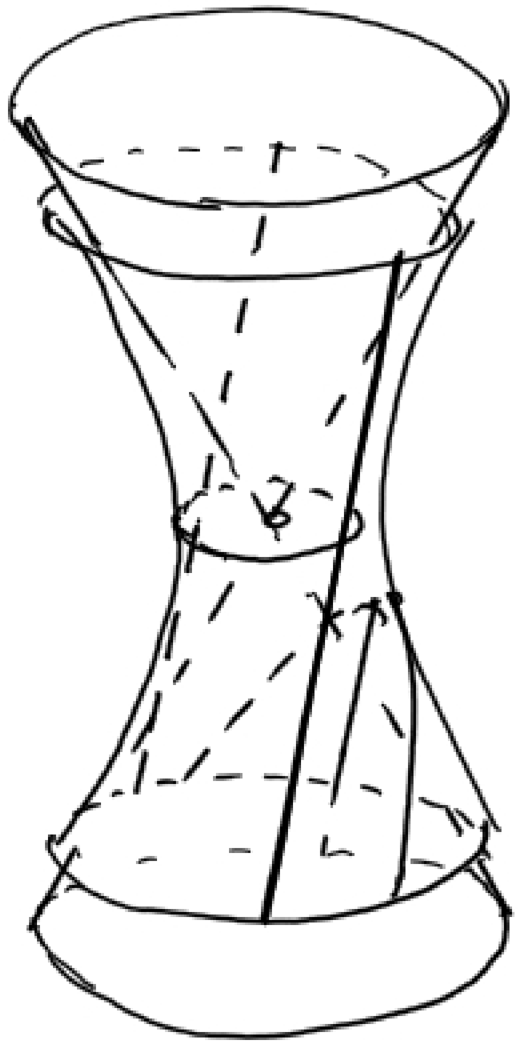
$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} = 0.$$

Следователно асимптотичните направления са направленията на конуса

$$K_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Образуващите на K_1 са асимптоти на X_2. K_1 - асимптотичен конус за хиперболоида. За разлика от асимптотичния конус на двойния хиперболоид, тук K_1 е „вътре" в простия хиперболоид

Нека δ_0 е произволна равнина, $\delta_0 \ni O$, $\delta \parallel \delta_0$.



Тогава

1. Ако δ_0 не съдържа образуващи на K_1 равнината δ пресича X_1 в елипса.

2. Ако δ_0 съдържа една образуваща на K_1, то δ пресича X_1 в парабола или в двойка успоредни прави или в двойка съвпадащи прави.

3. Ако δ_0 съдържа две образуващи на асимптотичния конус K_1, то равнината δ пресича простия хиперболоид X_1 в хипербола или в двойка пресичащи се прави.

Простият хиперболоид има две системи образуващи $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$.

Аналитично описание на $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$.
Записване уравнението на $\mathcal{X}_1$ във вида

$$\mathcal{X}_1 : \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

За $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus (0,0)$ задаване правата $l_{\lambda,\mu}$

$$(\mathrm{I}) \quad l_{\lambda,\mu} : \begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right). \end{cases}$$

$l_{\lambda,\mu}$ е определена като пресечница на две равнини. Имаме

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\lambda}{a} & -\frac{\mu}{b} & \frac{\lambda}{c} \\ \frac{\mu}{a} & \frac{\lambda}{b} & -\frac{\mu}{c} \end{pmatrix} = 2,$$

защото

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{a} & -\frac{\mu}{b} \\ \frac{\mu}{a} & \frac{\lambda}{b} \end{vmatrix} = \frac{1}{ab} \begin{vmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{ab}(\lambda^2+\mu^2) \neq 0$$

Ясно е, че всяка точка от $l_{\lambda,\mu}$ удовлетворява уравнението на X_1, т.е. е образуваща на хиперболоида. Когато λ и μ се менят, $l_{\lambda,\mu}$ описва фамилия от прави Z; в частност, при $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ получаваме правата l,

$$l: \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \\ 1 + \frac{y}{b} = 0. \end{cases}$$

Също така, за $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus (0,0)$ получаваме фамилия G от прави

$$(\mathrm{II}) \quad g_{\lambda^*,\mu^*}: \begin{cases} \lambda^*\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \mu^*\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \mu^*\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda^*\left(1 + \frac{y}{b}\right), \end{cases}$$

които са образуващи на X_1. За $\lambda^* = 0$ и $\mu^* \neq 0$ получаваме правата g,

$$g: \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \\ 1 - \frac{y}{b} = 0 \end{cases}$$

Нека $\mathcal{F}_\ell$ е системата образуващи, породена от ℓ. Втората равнина на g_{λ^*,μ^*} съдържа ℓ (за $\lambda^*=1, \mu^*=1$). Следователно за всеки $\lambda^*, \mu^*, (\lambda^*, \mu^*) \neq (0,0)$ правата g_{λ^*,μ^*} от фамилията G е в една равнина с правата ℓ, откъдето имаме $G \subseteq \mathcal{F}_\ell$. Обратно, произволна права m от $\mathcal{F}_\ell$ лежи в равнина δ от снопа равнини с ос ℓ. Следователно $\exists (\lambda_1^*, \mu_1^*) \neq (0,0)$, за които уравнението на δ е от вида

$$\delta: \lambda_1^* \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \mu_1^* \left(1 - \frac{y}{b} \right).$$

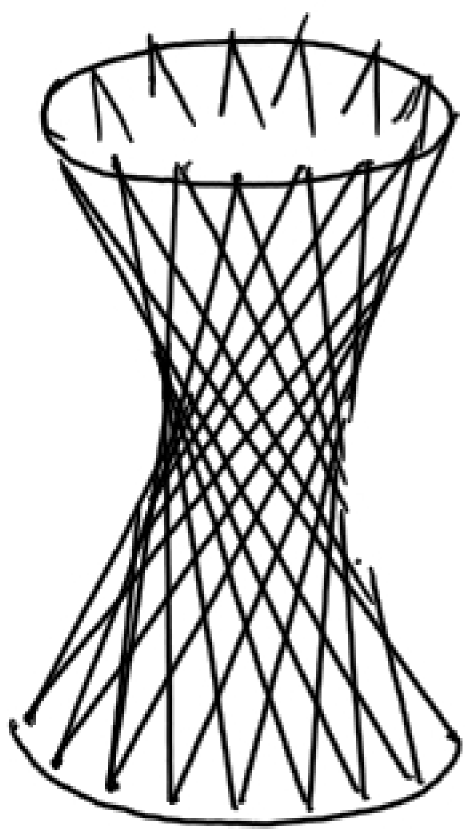
За тези (λ_1^*, μ_1^*) се получава права g_1 от фамилията G. Тъй като δ не съдържа други прави от X_1 освен ℓ и g_1

- никои три прави на X_1 не лежат в една равнина, то $m \equiv g_1$, т.е. $m \in G$ $\Rightarrow \mathcal{F}_\ell \subseteq G \Rightarrow \mathcal{F}_\ell \equiv G$. Аналогично се установява, че $\mathcal{F}_g \equiv \mathcal{L}$.

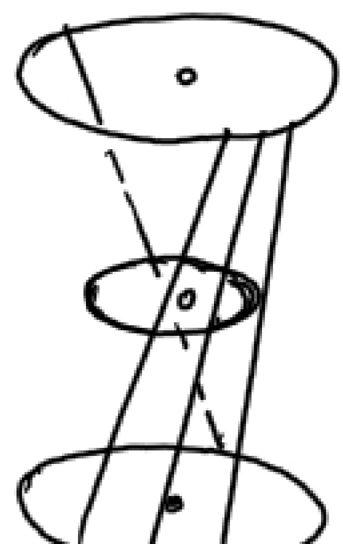
Аналитично системите $\mathcal{F}_g$ и $\mathcal{F}_\ell$ се задават съответно с (I) и (II). Лесно се проверява, че са в сила твърденията

1. През всяка точка на X_1 минава точно една образуваща от всяка система
2. Всеки две образуващи от една фамилия са кръстосани
3. Всяка образуваща пресича гърловата елипса на X_1.
4. Всеки две образуващи от различни фамилии се пресичат,
5. Никои три образуващи от една фамилия не са успоредни на една равнина.

Прави от $\mathfrak{F}_d$ и $\mathfrak{F}_e$



Механична интерпретация

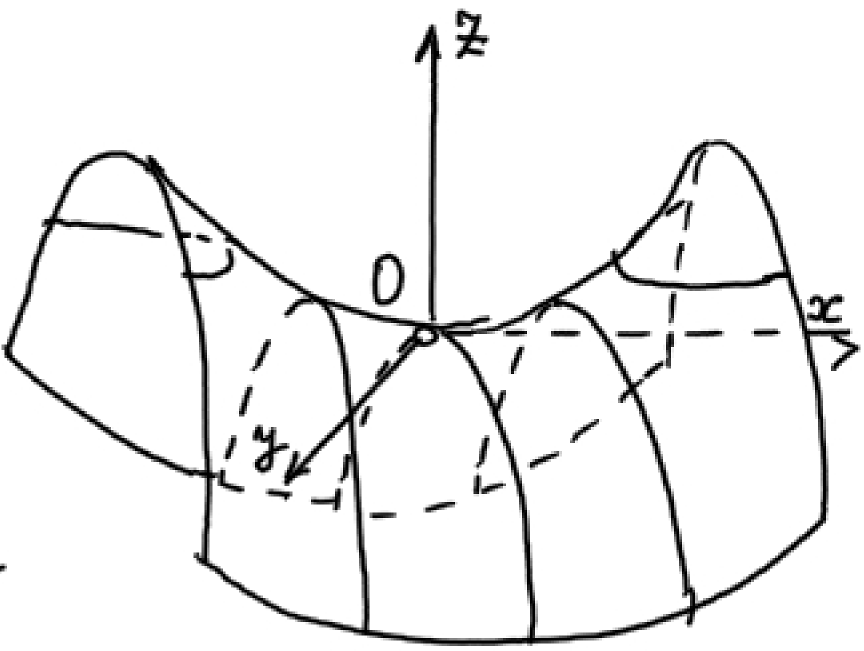


При $a = b$ получаваме ротационен прост хиперболоид.

Хиперболичен параболоид

Спрямо подходящо избрана ортонормирана координатна система всеки хиперболичен параболоид има уравнение

$$\mathcal{P}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad a \geq b > 0.$$



Равнините $z = h$ при $h < 0$ пресичат $\mathcal{P}$ в хиперболи с полуоси $\sqrt{-2b^2h}$ и $\sqrt{-2a^2h}$; при h растящ от $-\infty$ до нула полуосите намаляват от $+\infty$ до нула. Реалните оси на тези хиперболи са успоредни на Oy, а имагинерните – на Ox. При $h > 0$ пресичат $\mathcal{P}$ в хиперболи с полуоси $\sqrt{2a^2h}$ и $\sqrt{2b^2h}$, монотонно растящи заедно с h от нула до $+\infty$. В този случай реалните им оси са успоредни на Ox, а имагинерните – на Oy.

Координатната равнина Oxy – $z=0$ пресича Φ в разпадаща се крива

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

която се състои от реалните пресичащи се прави

$$l: \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad l^*: \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Равнините $y=h$, за всяко h, пресичат Φ в параболите

$$\Pi_h^1: \begin{cases} x^2 = 2a^2 z + \frac{a^2 h^2}{b^2} \\ y = h. \end{cases}$$

Π_h^1 имат фокален параметър a^2, връх $(0, h, -\frac{h^2}{2b^2})$ и рогата ѝ са отворени към $+z$.

Равнините $x=h$, за всяко h, пресичат Φ в параболите

$$\Pi_h'' : \begin{cases} y^2 = -2b^2 z + \dfrac{b^2 h^2}{a^2} \\ x = h \end{cases}$$

с фокален параметър b^2, връх $(h, 0, \frac{h^2}{2a^2})$, но рогата ѝ са към $-z$.

Параболите Π_0' и Π_0'' (за $h=0$) се наричат върхови параболи; точката $O(0,0,0)$ се нарича връх или седловинна точка на хиперболичния параболоид.

Видовете равнинни сечения на параболоида $\mathcal{P}$ зависят от асимптотичните му направления.

Нека $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ е асимптотичен за $\mathcal{P}$. Тогава

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$\vec{u}$ е компланарен с коя да е от равнините

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

Тогава всяка равнина, която не е успоредна на пресечницата имоста Oz, пресича $\mathcal{P}$ или в хипербола или в двойка реални пресичащи се прави. Ако равнина е успоредна на Oz (т.е. съдържа точно едно асимптотично направление на $\mathcal{P}$), то тя пресича $\mathcal{P}$ или в парабола или в двойка съвпадащи прави; може да се докаже, че няма равнина, която да пресича параболоида в двойка успоредни прави.

Хиперболичният параболоид има две системи образуващи. Аналитичното им описание получаваме по същия начин, както при простия хиперболоид.

Уравнението на $\mathcal{P}$ записваме във вида

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z.$$

За $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus(0,0)$ задаваме правата $\ell_{\lambda,\mu}$, определена като пресечница на две равнини

$$(\underline{\mathrm{I}})\quad \ell_{\lambda,\mu}:\begin{cases}\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\mu.2z\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\lambda.\end{cases}$$

Всяка точка от $l_{\lambda,\mu}$ се съдържа в хиперболичния параболоид, т.е. е негова образуваща. Когато λ и μ се менят, $l_{\lambda,\mu}$ описва фамилия прави $\mathcal{L}$; при $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$, получаваме правата

$$l : \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Също така, за $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus (0,0)$ получаваме фамилия G от прави

$$(\underline{II}) \quad g_{\lambda^*,\mu^*} : \begin{cases} \lambda^*\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \mu^* \\ \mu^*\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \lambda^* . 2z, \end{cases}$$

които също са от параболоида.
За $\mu^* = 0$ получаваме правата

$$g : \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Нека $\mathcal{F}_l$ и $\mathcal{F}_g$ са системите образуващи на $\mathcal{P}$, породени съответно

от l и g. Тогава, както при X_1 получаваме, че $\mathcal{F}_g \equiv \mathcal{L}$ и $\mathcal{F}_l \equiv \mathcal{G}$, откъдето следва, че $\mathcal{F}_l$ и $\mathcal{F}_g$ се задават съответно с уравненията (I) и (II).
От тези уравнения лесно се получава, че са в сила твърденията

1. През всяка точка на $\mathcal{F}$ минава точно една образуваща от всяка система.
2. Всеки две образуващи от една фамилия са кръстосани.
3. Всяка права от едната система пресича правите от другата система.

Също така, от (I) непосредствено следва, че всяка права от фамилията $\mathcal{F}_g$ е успоредна на равнината

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

а от (II) - че всяка права от $\mathcal{F}_l$ е успоредна на равнината

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$