8. Графи, пътища, цикли (съответства на тема 11 от конспекта).

Съдържание: Крайни мултиграфи и графи - ориентирани и неориентирани. Пътища и цикли в графи. Теорема за броя на маршрутите със зададена дължина в крайни ориентирани мултиграфи.

Заб. Всички множества са крайни, освен ако не е изрично казано друго!

Деф: Неориентиран граф:

Граф е наредената двойка $G = (V, E)$, където $V \neq \emptyset$. V е м-во, чиито елементи наричаме върхове; E е м-во, чиито елементи наричаме ребра, като: $E \subseteq \{x \mid x \subseteq V \ \& \ |x| = 2\}$.

Заб. От дефиницията става ясно, че понятието граф е нещо теоретико множествено и няма общо с геометрията (въпреки това можем с картинки да изобразяваме графи.

Заб. Когато кажем само "граф" разбираме "неориентиран граф".

Заб. Множествата са крайни! Графите са крайни обекти!

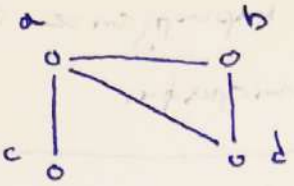
Заб. При тази дефиниция няма ребро от връх до себе си и м-у два върха не може да има повече от едно ребро.

Конвенция

1. Въпреки че ребрата са двуелементни м-ва, т.е. $e_1 = \{u, v\}$, има конвенция да ги записваме с кръгли скоби: $e_1 = (u, v)$.
2. В контекста на графи $n = |V|$ (бр. на върховете), $m = |E|$ (бр. на ребрата), освен ако не е казано друго.
3. Ако имаме граф G_1, с $V(G_1)$ и $E(G_1)$ означаваме съответно м-вата от върховете и ребрата на G_1.

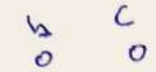
Пр: за граф: $G=(V,E)$, $V=\{a,b,c,d\}$, $E=\{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,d\}\}$.

Картинка:



Пр: $G=(V,E)$, $V=\{a,b,c\}$, $E=\varnothing$

Картинка:



Деф: неориентиран мултиграф: това е наредената тройка $G=(V,E,f_G)$, където $V\neq\varnothing$ е м-вото от върховете, E - м-вото от ребрата, $V\cap E=\varnothing$ и $f_G: E\to\{x\subseteq V \mid |x|=2\}$ е свързващата функция.

Заб. Тук между два върха может да имаме повече от едно ребро.
Ребрата записваме така: $f_G(e_1)=\{u,v\}$

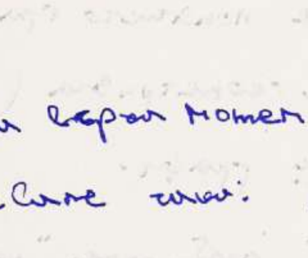
Пр: $G=(\{a,b,c\},\{e_1\dots e_6\},f_G)$

$f_G(e_1)=f_G(e_2)=f_G(e_3)=\{a,b\}$

$f_G(e_4)=\{a,c\}$

$f_G(e_5)=f_G(e_6)=\{b,c\}$

Картинка:



Деф: неориентиран мултиграф с примки:
Същото като горното, но $f_G: E\to\{x\subseteq V \mid |x|=2 \vee \underline{|x|=1}\}$

с това допълнение

Заб. Когато кажем "мултиграф" разбираме "неориентиран мултиграф с примки".

Деф: <u>Ориентиран граф</u>: това е наредената двойка $G=(V,E)$, където $V \neq \emptyset$, чиито елементи наричаме върхове, E - м-во, чиито ел. нар. ребра, като: $E \subseteq (V \times V) \setminus \{(u,u) \mid u \in V\}$

Заб. Тук вече ребрата са наредени двойки.

Заб. В тази деф. не позволяваме примки.

Деф: <u>Ориентиран граф с възможни примки</u>: единствената разлика е $E \subseteq (V \times V)$.

Заб. Тези вид графи съответстват на релациите над декартов квадрат.

Деф: <u>Ориентиран мултиграф</u>: това е наредената тройка $G=(V,E,f_G)$, където $V \neq \emptyset$ - върхове, E - ребра, като $V \cap E = \emptyset$ и $f_G : E \to V \times V$ е свързващата ф-я.

Заб. Тук се позволяват примки.

<u>Пътища и цикли</u>

Деф: <u>Път в неориентиран граф</u>: Нека $G=(V,E)$ е граф. <u>Път</u> в G наричаме

(1) всяка непразна алтернираща редица от върхове и ребра за някое $t \geq 0$:

$p = (u_{i_0}, e_{k_0}, u_{i_1}, e_{k_1}, \dots, e_{k_{t-1}}, u_{i_t})$, $u_{i_s} \in V$, $s \in \{0 \dots t\}$,

$e_{k_s} \in E$, $e_{k_s} = (u_{i_s}, u_{i_{s+1}})$; $s \in \{0 \dots t-1\}$

- u_{i_0} и u_{i_t} - краища на пътя. Останалите върхове са вътрешни.
- казваме, че p е път м-у u_{i_0} и u_{i_t}.
- дължината на пътя е броят на ребрата в него. Бележим с $|p|$. В случая $|p| = t-1$.

! - ако няма повтаряне на върхове или ребра в пътя, казваме, че p е <u>прост път</u>.

Заб. Ако кажем само "път" разбираме "прост път".

Заб. От деф. следва, че всеки връх е път с дължина 0, но "път" без върхове не е път.

Заб. Ако в графа има поне едно ребро очевидно има безброй много непрости пътища. Простите обаче са краен брой, защото графът е краен обект.

Деф: Цикъл (в неориентиран граф): Нека $G=(V,E)$ е граф и p е прост или непрост път в него: $p = (u_{i_0}, e_{k_0}, \dots, e_{k_{t-1}}, u_{i_t})$.

- Казваме, че p е цикъл, ако $u_{i_0} = u_{i_t}$.
- Казваме, че p е прост цикъл, ако p е цикъл с поне едно ребро и всички елементи от p, освен $u_{i_0} = u_{i_t}$, не се повтарят.

Заб. Като кажем "цикъл" разбираме "прост цикъл".

Заб. Допуска се непрост цикъл без ребра, но всеки прост цикъл има поне 3 ребра! (ако графът е без примки); картинка: 

Деф: Ацикличен граф - граф, в който няма прости цикли.

Деф: Ориентиран път (в ориентиран мултиграф): единствената разлика с деф. 1 е изискването за реброто: $f_G(e_{k_s}) = (u_{i_s}, u_{i_{s+1}})$. Вместо $e_{k_s} = (u_{i_s}, u_{i_{s+1}})$; всичко друго е еднакво.

Заб. При ориентирания път напълно естествено можем да "преминаваме" от a към b, само ако $a \circ\!\!\longrightarrow\!\!\circ\, b$, посоката на реброто го позволява.

Деф. Ориентиран цикъл (в ориентиран мултиграф):

Нека p е ориентиран път в G, където

$$p = (u_{i_0}, e_{k_0}, \dots, e_{k_{t-1}}, u_{i_t})$$

- Казваме, че p е ориентиран цикъл, ако $u_{i_0} = u_{i_t}$.
- Казваме, че p е прост ориентиран цикъл, ако p е ориентиран цикъл с поне едно ребро и всички елементи на p са уникални освен $u_{i_0} = u_{i_t}$.

Зб. Напълно аналогично на деф. за цикъл.

Матрица на съседство: квадратна матрица $n \times n$ от естествени числа.

В клетката $a_{i,j}$ е броят на ребрата м-у върховете i и j.

Зб. При ~~мултиграфите~~ ориентираните графи вобще казано $a_{i,j} \neq a_{j,i}$.

Пр:

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	1	0	0
3	0	3	0	0
4	0	0	0	0

T. Теорема за броя на маршрутите със зададена дължина в крайни ориентирани мултиграфи.

За всеки ориентиран мултиграф G и за всяко $k \geq 0$ е вярно, че $M^k[i,j]$ е броят на ориентираните пътища с дължина k от i до j в G, където M е матрицата на съседство на G.

(M^k - M на k-та степен; $M^k[i,j]$ - клетка i,j от M^k).

Да се напише доказателството...