Лекция № 9: Операционна семантика

Лекция 9

3.3 Операционна семантика на програмите от езика REC

3.3.1 Правила за извод на опростявания

Да напомним, че записът

$$\tau(X_1, \dots, X_n, F_1, \dots, F_k)$$

означаваше, че τ е терм с обектови променливи, които са сред $X_1, \dots, X_n$, и функционални променливи измежду $F_1, \dots, F_k$. Тук ще ни интересуват един специален вид термове, в които не участват обектови променливи. Такива термове ще наричаме *функционални термове* и ще отбелязваме с $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots$.

Примери: $5, \quad F_1(5), \quad 5\ op\ F_1(5),$
$\texttt{if}\ 5\ op\ 10\ \texttt{then}\ F_1(5)\ \texttt{else}\ F_1(F_2(10))$

Определение 3.6. *Опростяване* ще наричаме синтактичен израз от вида

$$\mu \ \rightarrow \ c,$$

където μ е *функционален терм,* а c е *константа.*

Мъглявата (засега) идея, която стои зад израза $\mu \ \rightarrow \ c$ е, че термът *μ се опростява (или се редуцира)* до константата c. Разбира се, това опростяване е спрямо фиксирана рекурсивна програма. Всъщност рекурсивните дефиниции от тялото на програмата ще определят правилата за опростяване.

Преди да дадем строгите дефиниции, да обясним с пример защо се интересуваме от функционалните термове и опростяванията. Да разгледаме рекурсивната програма за функцията $x!$, написана на езика REC:

$$R: \quad F(X) \quad \texttt{where}$$
$$F(X) \ = \ \texttt{if}\ X == 0 \ \ \texttt{then} \ \ 1 \ \ \texttt{else} \ \ X.F(X-1)$$

Когато искаме да видим какво пресмята тази програма да речем при $X = 3$, тръгваме от *функционалния терм* $F(3)$ и се опитваме чрез поредица от преобразования да достигнем до резултат, който е число. Преобразованията, които правим, изглеждат така:

$$F(3) \ \rightarrow \ 3.F(2) \ \rightarrow \ 3.2.F(1) \ \rightarrow \ 3.2.1.F(0) \ \rightarrow \ 6.$$

Можем да си представяме, че сме *опростили* функционалния терм $F(3)$ до константата 6 на базата на дефиницията на функционалната променлива F на програмата R. В такъв случай ще казваме, че от *R сме извели* опростяването $F(3) \ \rightarrow \ 6$.

Ако τ е терм, чийто обектови променливи са сред $X_1, \dots, X_n$, а $\rho_1, \dots, \rho_n$ са произволни термове, ще пишем

$$\tau[X_1/\rho_1, \ \dots \ , X_n/\rho_n],$$

за да означим терма, който се получава, когато в τ *едновременно* се заместят променливите $X_1, \dots, X_n$ с термовете $\rho_1, \dots, \rho_n$ съответно. Изразът $\tau[X_1/\rho_1, \ \dots \ , X_n/\rho_n]$ понякога ще съкращаваме до $\tau[\bar{X}/\bar{\rho}]$.

Формалната дефиниция е с индукция по построението на терма τ:

Определение 3.7. Нека τ е терм с обектови променливи измежду $X_1, \dots, X_n$, а $\rho_1, \dots, \rho_n$ са произволни термове. Тогава

1) ако $\tau = c$, то $\tau[X_1/\rho_1, \ \dots \ , X_n/\rho_n] = c$;

2) ако $\tau = X_i$, то $\tau[X_1/\rho_1, \ \dots \ , X_n/\rho_n] = \rho_i$;

3) ако $\tau = (\tau_1 \ op \ \tau_2)$, то

$$\tau[\bar{X}/\bar{\rho}] \ = \ (\tau_1[\bar{X}/\bar{\rho}] \ op \ \tau_2[\bar{X}/\bar{\rho}]);$$

4) ако $\tau = \textbf{if} \ \tau_1 \ \textbf{then} \ \tau_2 \ \textbf{else} \ \tau_3$, то

$$\tau[\bar{X}/\bar{\rho}] \ = \ \textbf{if} \ \tau_1[\bar{X}/\bar{\rho}] \ \ \textbf{then} \ \tau_2[\bar{X}/\bar{\rho}] \ \ \textbf{else} \ \tau_3[\bar{X}/\bar{\rho}];$$

5) ако $\tau = F_i(\tau_1, \dots, \tau_m)$, то

$$\tau[\bar{X}/\bar{\rho}] \ = \ F_i(\tau_1[\bar{X}/\bar{\rho}], \dots, \tau_m[\bar{X}/\bar{\rho}]).$$

Да разгледаме няколко примера.

Примери. 1) Нека $\tau = F_1(X_1, \ F_1(X_1, X_2))$, $\rho_1 = F_2(X_2)$ и $\rho_2 = 5$. Тогава

$$\tau[X_1/F_2(X_2), \ X_2/5)] \ = \ F_1(F_2(X_2), \ F_1(F_2(X_2), \ 5)).$$

2) Нека $\tau(X_1, X_2) \ = \ X_1 \ + \ X_2$. Да заместим синтактично променливите X_1 и X_2 с *константите* 5 и 10, съответно:

$$\tau[X_1/5, \ X_2/10] \ = \ 5 + 10.$$

Нека обърнем внимание, че резултатът от горното заместване е *синтактичният израз* $5 + 10$. Не го бъркайте със *семантичното понятие* стойност на терм. В случая за стойността на терма τ при $X_1 = 5$ и $X_2 = 10$ ще бъде

$$\tau(5, 10) \ = \ 5 + 10 = 15.$$

Ясно е, че ако в $\tau(X_1, \dots, X_n, F_1, \dots, F_k)$ заместим променливите $X_1, \dots, X_n$ с функционалните термове $\mu_1, \dots, \mu_n$, резултатът от заместването

$$\tau[X_1/\mu_1,\ \dots\ , X_n/\mu_n]$$

отново ще е функционален терм. Доказателство на това наблюдение е със съвсем рутинна индукция по построението на терма τ, затова ще го пропуснем.

Сега да фиксираме произволна програма R от нашия език REC:

$$\begin{array}{l} \tau_0(X_1, \dots, X_n, F_1, \dots, F_k) \qquad \texttt{where} \\ F_1(X_1, \dots, X_{m_1}) = \tau_1(X_1, \dots, X_{m_1}, F_1, \dots, F_k) \\ \vdots \\ F_i(X_1, \dots, X_{m_i}) = \tau_i(X_1, \dots, X_{m_i}, F_1, \dots, F_k) \\ \vdots \\ F_k(X_1, \dots, X_{m_k}) = \tau_k(X_1, \dots, X_{m_k}, F_1, \dots, F_k) \end{array}$$

Определение 3.8. *Правила за синтактичен извод по стойност* от програмата R:

(0) $\quad c \ \to\ c \quad$ за всяка константа $c \in \mathbb{N}$.

(Четем: "c се опростява до c".)

(1) $\quad$ Ако $\ \mu_1 \ \to\ c_1,\ \mu_2 \ \to\ c_2 \ $ и $\ c_1\ op\ c_2 = c$,
$\quad$ то $\ \mu_1\ op\ \mu_2 \ \to\ c$.

(Ако μ_1 се опростява до c_1, μ_2 се опростява до c_2 и освен това $c_1\ op\ c_2 = c$, то $\mu_1\ op\ \mu_2$ се опростява до c.)

($2_{\mathtt{t}}$) $\quad$ Ако $\ \mu_1 \ \to\ c_1,\ c_1 > 0 \ $ и $\ \mu_2 \ \to\ c$,
$\quad$ то $\ \textbf{if}\ \mu_1\ \textbf{then}\ \mu_2\ \textbf{else}\ \mu_3 \ \to\ c$.

($2_{\mathtt{f}}$) $\quad$ Ако $\ \mu_1 \ \to\ 0 \ $ и $\ \mu_3 \ \to\ c$,
$\quad$ то $\ \textbf{if}\ \mu_1\ \textbf{then}\ \mu_2\ \textbf{else}\ \mu_3 \ \to\ c$.

(3_V) $\quad$ За всяко $1 \le i \le k$:
$\quad$ ако $\ \mu_1 \to c_1,\ \dots\ , \mu_{m_i} \to c_{m_i} \ $ и $\ \tau_i[X_1/c_1, \dots, X_{m_i}/c_{m_i}] \to c$,
$\quad$ то $\ F_i(\mu_1, \dots, \mu_{m_i}) \ \to\ c$.

Да отбележим, че клаузата (0) всъщност е *аксиома*, а клаузите (1), ($2_{\mathtt{t}}$), ($2_{\mathtt{f}}$) и (3_V) са *правила*. Можем да считаме, че аксиомите също са правила, само че с 0 на брой предпоставки.

Определение 3.9. *Правила за синтактичен извод по име* от програмата R:

(0) $\quad c \;\to\; c \quad$ за всяка константа $c \in \mathbb{N}$.

(1) $\quad$ Ако $\;\mu_1 \;\to\; c_1,\; \mu_2 \;\to\; c_2\;$ и $\;c_1 \; op \; c_2 = c$,
то $\;\mu_1 \; op \; \mu_2 \;\to\; c$.

($2_{\mathbf{t}}$) $\quad$ Ако $\;\mu_1 \;\to\; c_1,\; c_1 > 0\;$ и $\;\mu_2 \;\to\; c$,
то $\;\textbf{if } \mu_1 \textbf{ then } \mu_2 \textbf{ else } \mu_3 \;\to\; c$.

($2_{\mathbf{f}}$) $\quad$ Ако $\;\mu_1 \;\to\; 0\;$ и $\;\mu_3 \;\to\; c$,
то $\;\textbf{if } \mu_1 \textbf{ then } \mu_2 \textbf{ else } \mu_3 \;\to\; c$.

(3_N) $\quad$ За всяко $1 \leq i \leq k$: $\quad$ ако $\tau_i[X_1/\mu_1, \ldots, X_{m_i}/\mu_{m_i}] \to c$,
то $\;F_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i}) \;\to\; c$.

Правилата $(0), (1), (2_{\mathbf{t}})$ и $(2_{\mathbf{f}})$ са общи за двете системи за извод. Освен това те са едни и същи за всяка програма. Последните правила (3_V) и (3_N) вече зависят от конкретната програма R. При тях е и разликата между двете системи за извод. Правило (3_V) изисква параметрите да имат *стойности*, преди да бъдат подадени на съответната подпрограма, докато при правило (3_N) подаваме директно техните *имена* — термовете $\mu_1, \ldots, \mu_{m_i}$.

Горните правила могат да се запишат и по следния по-прегледен начин:

$$\frac{}{c \;\to\; c} \quad (0)$$

$$\frac{\mu_1 \;\to\; c_1, \quad \mu_2 \;\to\; c_2, \quad c_1 \; op \; c_2 = c}{\mu_1 \; op \; \mu_2 \;\to\; c} \quad (1)$$

$$\frac{\mu_1 \;\to\; c_1, \quad c_1 > 0, \quad \mu_2 \;\to\; c}{\textbf{if } \mu_1 \textbf{ then } \mu_2 \textbf{ else } \mu_3 \;\to\; c} \quad (2_{\mathbf{t}})$$

$$\frac{\mu_1 \;\to\; 0, \quad \mu_3 \;\to\; c}{\textbf{if } \mu_1 \textbf{ then } \mu_2 \textbf{ else } \mu_3 \;\to\; c} \quad (2_{\mathbf{f}})$$

$$\frac{\mu_1 \to c_1, \quad \ldots \quad, \mu_{m_i} \to c_{m_i}, \quad \tau_i[X_1/c_1, \ldots, X_{m_i}/c_{m_i}] \to c}{F_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i}) \;\to\; c} \quad (3_V)$$

$$\frac{\tau_i[X_1/\mu_1, \ldots, X_{m_i}/\mu_{m_i}] \to c}{F_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i}) \;\to\; c} \quad (3_N)$$

Пример. Ако $\mu_1 \;\to\; 5$ и $\mu_2 \;\to\; 10$, то понеже $5 + 10 = 15$, можем да твърдим на базата на правило (1), че $\mu_1 + \mu_2 \;\to\; 15$. Схематично:

$$\frac{\mu_1 \to 5, \quad \mu_2 \to 10, \quad 5 + 10 = 15}{\mu_1 + \mu_2 \;\to\; 15} \quad (1)$$

3.3.2 Как дефинираме $O_V(R)$ и $O_N(R)$?

Вече сме в състояние да дефинираме функциите $O_V(R)$ и $O_N(R)$ — *операционната семантика по стойност и по име* на програмата R. За целта въвеждаме няколко последни синтактични понятия.

Отново си мислим фиксирана произволна програма R от езика REC:

$$
\begin{aligned}
&\tau_0(X_1, \ldots, X_n, F_1, \ldots, F_k) \qquad \texttt{where} \\
&F_1(X_1, \ldots, X_{m_1}) = \tau_1(X_1, \ldots, X_{m_1}, F_1, \ldots, F_k) \\
&\vdots \\
&F_i(X_1, \ldots, X_{m_i}) = \tau_i(X_1, \ldots, X_{m_i}, F_1, \ldots, F_k) \\
&\vdots \\
&F_k(X_1, \ldots, X_{m_k}) = \tau_k(X_1, \ldots, X_{m_k}, F_1, \ldots, F_k)
\end{aligned}
$$

Извод по стойност от програмата R ще наричаме редицата от опростявания

$$\mu_1 \ \rightarrow \ c_1, \quad \mu_2 \ \rightarrow \ c_2, \ \ldots \ , \mu_l \ \rightarrow \ c_l,$$

където всяко опростяване $\mu_i \ \rightarrow \ c_i$ е или аксиома, или се получава от *предишни* опростявания $\mu_j \rightarrow c_j$, $j < i$, на базата на някое от правилата $(1), (2_{\mathbf{t}}), (2_{\mathbf{f}})$ и (3_V).

Дължината l на тази редица ще наричаме *дължина на извода.* Ясно е, че ако дължината на извода е 1, то $\mu_1 \ \rightarrow \ c_1$ е аксиома и следователно $\mu_1 = c_1$.

Определение 3.10. Ще казваме, че от *от R се извежда по стойност* опростяването $\mu \ \rightarrow \ c$ и ще пишем

$$R \ \vdash_V \ \mu \ \rightarrow \ c,$$

ако съществува извод по стойност $\mu_1 \rightarrow c_1, \ \ldots \ , \mu_l \rightarrow c_l$, чийто последен член $\mu_l \rightarrow c_l$ е точно опростяването $\mu \rightarrow c$.

Аналогично въвеждаме и *извод по име* от R: това отново е редица от опростявания

$$\mu_1 \ \rightarrow \ c_1, \quad \mu_2 \ \rightarrow \ c_2, \ \ldots \ , \mu_l \ \rightarrow \ c_l,$$

където всяко $\mu_i \rightarrow c_i$ е или аксиома, или се получава от *предишни* опростявания $\mu_j \rightarrow c_j$, $j < i$, на базата на някое от правилата $(1), (2_{\mathbf{t}}), (2_{\mathbf{f}})$ и (3_N).

Определение 3.11. Ще казваме, че от *от R се извежда по име* опростяването $\mu \;\to\; c$ и ще пишем

$$R \vdash_N \; \mu \;\to\; c,$$

ако съществува извод по име $\mu_1 \;\to\; c_1, \;\ldots\;, \mu_l \;\to\; c_l$, чийто последен член е опростяването $\mu \;\to\; c$.

Определение 3.12. *Операционна семантика по стойност* на програмата R е функцията $O_V(R)\colon\; \mathbb{N}^n \multimap \mathbb{N}$, която се дефинира с еквивалентността:

$$O_V(R)(c_1,\ldots,c_n) \simeq d \iff R \vdash_V \; \tau_0[X_1/c_1, \;\ldots\;, X_n/c_n] \;\to\; d \qquad (3.7)$$

за всички $c_1,\ldots,c_n, d \in \mathbb{N}$.

Аналогично определяме и другата операционна семантика на R:

Определение 3.13. *Операционна семантика по име* на програмата R е функцията $O_N(R)\colon\; \mathbb{N}^n \multimap \mathbb{N}$, която се дефинира с еквивалентността:

$$O_N(R)(c_1,\ldots,c_n) \simeq d \iff R \vdash_N \; \tau_0[X_1/c_1, \;\ldots\;, X_n/c_n] \;\to\; d$$

за всички $c_1,\ldots,c_n, d \in \mathbb{N}$.

Да обърнем специално внимание, че в горните определения $c_1,\ldots,c_n$ и d имат различен смисъл. Вляво те означават *числа*, а вдясно — *константи*, които участват в синтактично заместване. Разбира се, от контекста е съвсем ясно в какъв смисъл се употребяват те.

Операционните семантики, които въведохме, са от тип *"big step semantics"*. Характерното при тях е, че детайлите по извода не са уточнени и системата за извод е недетерминирана. Следователно че теоретично е възможно да бъдат изведени опростяванията

$$R \vdash_V \; \tau_0[X_1/c_1, \;\ldots\;, X_n/c_n] \;\to\; d \quad \text{и} \quad R \vdash_V \; \tau_0[X_1/c_1, \;\ldots\;, X_n/c_n] \;\to\; e,$$

като $d \neq e$, което означава, че $O_V(R)$ няма да е еднозначна функция. В следващия раздел ще покажем, че за всяка програма R

$$O_V(R) \subseteq D_V(R) \quad \text{и} \quad O_N(R) \subseteq D_N(R),$$

откъдето, в частност, ще следва, че $O_V(R)$ и $O_N(R)$ *са* еднозначни функции, тъй като $D_V(R)$ и $D_N(R)$ очевидно са такива.

3.3.3 Доказателство на включването $O_V(R) \subseteq O_N(R)$

Тук ще покажем включването $O_V(R) \subseteq O_N(R)$ или преразказано: *всичко, което се извежда по стойност, се извежда и по име.* Но първо да отбележим един очевиден факт, който формулираме като лема, на която ще се позоваваме многократно. Лемата ще изкажем за изводимостта *по име*.

Лема 3.1. Нека $R \vdash_N \mu \ \rightarrow \ c$ с дължина на извода l. Тогава:

0) Ако μ е константа, то $\mu = c$.

1) Ако μ е от вида $\mu_1 \ op \ \mu_2$, то съществуват константи c_1 и c_2, такива че *преди това* от R са били изведени по име опростяванията $\mu_1 \ \rightarrow \ c_1$ и $\mu_2 \ \rightarrow \ c_2$, и освен това $c_1 \ op \ c_2 = c$.
Тук под "*преди това*" имаме предвид, че *всяко* от тези две опростявания е имало дължина на извода, по-малка от l. Същата уговорка ще важи и за следващите подточки.

2) Ако μ е от вида **if** μ_1 **then** μ_2 **else** μ_3, то е вярно едно от двете:
— преди това от R са били изведени по име опростяванията $\mu_1 \ \rightarrow \ c_1$ за някое $c_1 > 0$ и $\mu_2 \ \rightarrow \ c$ или
— преди това от R са били изведени по име $\mu_1 \ \rightarrow \ 0$ и $\mu_3 \ \rightarrow \ c$.

3) Ако μ е от вида $F_i(\mu_1, ..., \mu_{m_i})$, то преди това от R е било изведено по име опростяването $\tau_i[X_1/\mu_1, \dots, X_{m_i}/\mu_{m_i}] \rightarrow c$.

Разбира се, такова твърдение е в сила и за изводимостта по стойност. Единствената разлика е в последния пункт 3), който изглежда така:

3) Ако μ е от вида $F_i(\mu_1, ..., \mu_{m_i})$, то за някои константи $c_1, \dots, c_{m_i}$ преди това от R са били изведени по стойност опростяванията
$\mu_1 \ \rightarrow \ c_1, \ \dots \ , \mu_{m_i} \ \rightarrow \ c_{m_i}$ и $\tau_i[X_1/\mu_1, \dots, X_{m_i}/\mu_{m_i}] \rightarrow c$.

Доказателство. Доказателството е съвсем очевидно от вида на правилата, но за да стане съвсем ясно, ще разгледаме първите два случая.

1) Ако μ е константа, то *единственият* начин да имаме $R \vdash_N \mu \ \rightarrow \ c$ е като сме използвали правилото (0) от *Дефиниция* 3.9, защото опростяванията $\mu \ \rightarrow \ c$, които стоят "под чертата" на останалите правила $(1), (2_{\mathbf{t}}), (2_{\mathbf{f}})$ и (3_N) се отнасят за термове μ, които очевидно не са константи. Но правилото (0) казва, че са изводими само опростявания от вида $c \ \rightarrow \ c$, и следователно $\mu = c$.

2) Ако μ е от вида $\mu_1 \ op \ \mu_2$, отново *единственият* начин от R да бъде изведено по име опростяването $\mu_1 \ op \ \mu_2 \ \rightarrow \ c$ е като се приложи правилото (1) от *Дефиниция* 3.9, защото само при него под чертата стои опростяване от този вид. Но правило (1) казва, че опростяването $\mu_1 \ op \ \mu_2 \ \rightarrow \ c$ може да бъде изведено само ако преди това са били изведени $\mu_1 \ \rightarrow \ c_1$ и $\mu_2 \ \rightarrow \ c_2$ за някои c_1 и c_2, такива че $c_1 \ op \ c_2 = c$. $\square$

Сега се насочваме към доказателството на едно спомагателно твърдение, известно като *Лема за симулацията*. Чрез тази лема в края на този раздел лесно ще изведем важното включване $O_V(R) \subseteq O_N(R)$.

Лема 3.2. (Лема за симулацията) Нека $\rho(Y_1, \dots, Y_n, F_1, \dots, F_k)$ е произволен терм. Нека още $\mu_1, ..., \mu_n$ са функционални термове, $c_1, \dots, c_n$ са константи и за тях е дадено, че

$$R \vdash_N \mu_1 \to c_1, \ \dots \ , R \vdash_N \mu_n \to c_n.$$

Тогава

$$R \vdash_N \rho[Y_1/c_1, \dots, Y_n/c_n] \to d \implies R \vdash_N \rho[Y_1/\mu_1, \dots, Y_n/\mu_n] \to d. \quad (3.8)$$

(без доказателство)

Доказателство. Нека $R \vdash_N \rho[Y_1/c_1, \dots, Y_n/c_n] \to d$. Ще разсъждаваме с пълна индукция по дължината l на извода на това опростяване, за да докажем, че $R \vdash_N \rho[Y_1/\mu_1, \dots, Y_n/\mu_n] \to d$.

Фиксираме произволно $l \geq 1$ и приемаме, че за всички изводи по име на опростявания от вида $\rho_0[Y_1/c_1, \dots, Y_n/c_n] \to d$ с дължина, по-малка от l, твърдението е вярно. Ще го докажем и за l. Разглеждаме различните възможности за терма ρ:

1) ρ е константата c. Тогава

$$\rho[Y_1/c_1, \dots, Y_n/c_n] = c \quad \text{и} \quad \rho[Y_1/\mu_1, \dots, Y_n/\mu_n] = c$$

и тогава импликацията (3.8) е очевидна.

2) ρ е обектовата променлива Y_i. Тогава $\rho[Y_1/c_1, \dots, Y_n/c_n] \stackrel{\text{деф}}{=} c_i$.
Ние имаме, че

$$R \vdash_N \underbrace{\rho[Y_1/c_1, \dots, Y_n/c_n]}_{c_i} \to d,$$

или все едно, $R \vdash_N c_i \to d$, и значи $c_i = d$. Но по условие $R \vdash_N \mu_i \to c_i$, откъдето веднага получаваме $R \vdash_N \mu_i \to d$. Но това е точно условието $R \vdash_N \underbrace{\rho[Y_1/\mu_1, \dots, Y_n/\mu_n]}_{\mu_i} \to d$, което искаме да покажем в този случай, защото $\rho[Y_1/\mu_1, \dots, Y_n/\mu_n] = \mu_i$.

3) ρ е от вида ρ_1 *op* ρ_2. Тогава

$$\rho[Y_1/c_1, \dots, Y_n/c_n] \stackrel{\text{деф}}{=} \rho_1[Y_1/c_1, \dots, Y_n/c_n] \ op \ \rho_2[Y_1/c_1, \dots, Y_n/c_n].$$

В този случай условието $R \vdash_N \rho[Y_1/c_1, \dots, Y_n/c_n] \to d$ се преписва така:

$$R \vdash_N \underbrace{\rho_1[Y_1/c_1, \dots, Y_n/c_n]}_{\nu_1} \ op \ \underbrace{\rho_2[Y_1/c_1, \dots, Y_n/c_n]}_{\nu_2} \to d.$$

Съгласно *Лема* 3.1, ще съществуват константи d_1 и d_2, такива че $d_1 \ op \ d_2 = d$ и

$$R \vdash_N \ \rho_1[Y_1/c_1, \ldots, Y_n/c_n] \ \rightarrow \ d_1 \quad \text{и} \quad R \vdash_N \ \rho_2[Y_1/c_1, \ldots, Y_n/c_n] \ \rightarrow \ d_2,$$

като тези изводи са с дължина, по-малка от l. Тогава съгласно индуктивната хипотеза:

$$R \vdash_N \ \rho_1[Y_1/\mu_1, \ldots, Y_n/\mu_n] \ \rightarrow \ d_1 \quad \text{и} \quad R \vdash_N \ \rho_2[Y_1/\mu_1, \ldots, Y_n/\mu_n] \ \rightarrow \ d_2.$$

Оттук, като вземем предвид и това, че $d_1 \ op \ d_2 = d$, прилагайки правилото (1) от от *Дефиниция* 3.9, достигаме до

$$R \vdash_N \ \rho_1[Y_1/\mu_1, \ldots, Y_n/\mu_n] \ op \ \rho_2[Y_1/\mu_1, \ldots, Y_n/\mu_n] \ \rightarrow \ d,$$

което в случая е точно $R \vdash_N \ \rho[Y_1/\mu_1, \ldots, Y_n/\mu_n] \ \rightarrow \ d$.

4) ρ е от вида **if** ρ_1 **then** ρ_2 **else** ρ_3. Този случай се разглежда аналогично на предишния.

5) ρ е от вида $F_i(\rho_1, \ldots, \rho_{m_i})$. В този случай от дефиницията за синтактично заместване имаме:

$$F_i(\rho_1, \ldots, \rho_{m_i})[Y_1/c_1, \ldots, Y_n/c_n] \ = \ F_i(\rho_1[Y_1/c_1, \ldots, Y_n/c_n], \ldots, \rho_{m_i}[Y_1/c_1, \ldots, Y_n/c_n]).$$

Нека за по-кратко терма вдясно съкратим до $F_i(\rho_1[\bar{Y}/\bar{c}], \ldots, \rho_{m_i}[\bar{Y}/\bar{c}])$. Тук имаме дадено, че

$$R \vdash_N \ F_i(\underbrace{\rho_1[\bar{Y}/\bar{c}]}_{\nu_1}, \ldots, \underbrace{\rho_{m_i}[\bar{Y}/\bar{c}]}_{\nu_{m_i}}) \ \rightarrow \ d.$$

Ако си представим за момент аргументите на F_i като някакви термове $\nu_1, \ldots, \nu_{m_i}$, то ще имаме

$$R \vdash_N \ F_i(\nu_1, \ldots, \nu_{m_i}) \ \rightarrow \ d.$$

Прилагайки отново *Лема* 3.1, можем да твърдим, че това е станало, защото *преди това* (т.е. за *по-малко* от l стъпки) е било изведено опростяването

$$R \vdash_N \ \tau_i[X_1/\nu_1, \ldots, X_{m_i}/\nu_{m_i}] \rightarrow d.$$

Но

$$\begin{aligned} \tau_i[X_1/\nu_1, \ldots, X_{m_i}/\nu_{m_i}] \ &= \ \tau_i[X_1/\rho_1[\bar{Y}/\bar{c}], \ldots, X_{m_i}/\rho_{m_i}[\bar{Y}/\bar{c}]] \\ &= \ \tau_i[X_1/\rho_1, \ldots, X_{m_i}/\rho_{m_i}][\bar{Y}/\bar{c}]. \end{aligned}$$

Значи всъщност имаме, че

$$R \vdash_N \ \tau_i[X_1/\rho_1, \dots, X_{m_i}/\rho_{m_i}][\bar{Y}/\bar{c}] \ \to \ d$$

и този извод е направен за по-малко от l стъпки. Тогава от индуктивната хипотеза получаваме

$$R \vdash_N \ \tau_i[X_1/\rho_1, \dots, X_{m_i}/\rho_{m_i}][\bar{Y}/\bar{\mu}] \ \to \ d,$$

или все едно,

$$R \vdash_N \ \tau_i[X_1/\underbrace{\rho_1[\bar{Y}/\bar{\mu}]}_{\mu_1^*}, \dots, X_{m_i}/\underbrace{\rho_{m_i}[\bar{Y}/\bar{\mu}]}_{\mu_{m_i}^*}] \ \to \ d.$$

Щом имаме горната изводимост, значи можем да приложим правилото (3_N) от от *Дефиниция* 3.9. Така получаваме

$$R \vdash_N \ F_i(\underbrace{\rho_1[\bar{Y}/\bar{\mu}]}_{\mu_1^*}, \dots, \underbrace{\rho_{m_i}[\bar{Y}/\bar{\mu}]}_{\mu_{m_i}^*}) \ \to \ d,$$

или все едно,

$$R \vdash_N \ F_i(\rho_1, \dots, \rho_{m_i})[\bar{Y}/\bar{\mu}] \ \to \ d.$$

Но $F_i(\rho_1, \dots, \rho_{m_i})$ беше нашето ρ, следователно

$$R \vdash_N \ \rho[\bar{Y}/\bar{\mu}] \ \to \ d.$$

□

Вече сме в състояние да докажем обещаното по-горе важно твърдение:

Теорема 3.1. За всяка рекурсивна програма R

$$O_V(R) \subseteq O_N(R).$$

(без доказателство)

Доказателство. Вземаме произволна програма R. Трябва да покажем, че за произволни $c_1, \dots, c_n, c$ е вярна импликацията:

$$R \vdash_V \ \tau_0[X_1/c_1, \ \dots \ , X_n/c_n] \ \to \ c \quad \Longrightarrow \quad R \vdash_N \ \tau_0[X_1/c_1, \ \dots \ , X_n/c_n] \ \to \ c.$$

Ясно е, че ще ни се наложи да покажем по-общата импликация

$$R \vdash_V \ \mu \ \to \ c \quad \Longrightarrow \quad R \vdash_N \ \mu \ \to \ c \tag{3.9}$$

за всеки функционален терм μ.

Отново разсъждаваме с пълна индукция по дължината l на извода по стойност на опростяването $\mu \ \to \ c$.

Приемаме, че за всички изводи с дължина, по-малка от l, е в сила условието (3.9) (и това е вярно за произволни опростявания $\mu \ \to \ c$).

Нека сега $R \vdash_V \ \mu \ \to \ c$ с дължина на извода l. Разглеждаме различните възможности за функционалния терм μ.

1) μ е константата d. Тогава $R \vdash_V \ \mu \ \rightarrow \ c$ ще означава $R \vdash_V \ d \ \rightarrow \ c$ и следователно $d = c$. Тогава очевидно $R \vdash_N \ d \ \rightarrow \ c$.

2) μ е обектова променлива. Този случай е невъзможен, защото μ е *функционален* терм.

3) μ е от вида $\mu_1 \ op \ \mu_2$. Тогава даденото ни $R \vdash_V \ \mu \ \rightarrow \ c$ означава

$$R \vdash_V \ \mu_1 \ op \ \mu_2 \ \rightarrow \ c.$$

Оттук по *Лема* 3.1 получаваме, че с дължина по-малка от l са били изведени

$$R \vdash_V \ \mu_1 \ \rightarrow \ c_1 \quad \text{и} \quad R \vdash_V \ \mu_2 \ \rightarrow \ c_2$$

за някои c_1 и c_2, такива че $c_1 \ op \ c_2 \ = c$. Сега по индукционната хипотеза ще имаме

$$R \vdash_N \ \mu_1 \ \rightarrow \ c_1 \quad \text{и} \quad R \vdash_N \ \mu_2 \ \rightarrow \ c_2,$$

което заедно с факта, че $c_1 \ op \ c_2 \ = c$ по правилото за извод (1) ни дава $R \vdash_N \ \mu \ \rightarrow \ c$.

4) μ е от вида **if** μ_1 **then** μ_2 **else** μ_3. Разсъждаваме начин, много подобен на горния.

5) μ е от вида $F_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i})$. Това е случаят, в който ще се възползваме от лемата за симулацията. Имаме, че

$$R \vdash_V \ F_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i}) \ \rightarrow \ c$$

за l стъпки. Това означава, че преди това за по-малко от l стъпки трябва да сме извели опростяванията от условията над чертата на правило (3_V)

$$R \vdash_V \mu_1 \rightarrow c_1, \ \ldots \ , R \vdash_V \mu_{m_i} \rightarrow c_{m_i} \quad \text{и} \quad R \vdash_V \tau_i[X_1/c_1, \ldots, X_{m_i}/c_{m_i}] \rightarrow c.$$

Прилагаме индуктивната хипотеза и получаваме

$$R \vdash_N \mu_1 \rightarrow c_1, \ \ldots \ , R \vdash_N \mu_{m_i} \rightarrow c_{m_i} \quad \text{и} \quad R \vdash_N \tau_i[X_1/c_1, \ldots, X_{m_i}/c_{m_i}] \rightarrow c.$$

Сега вече можем да приложим Лемата за симулацията. Така ще получим

$$R \vdash_N \tau_i[X_1/\mu_1, \ldots, X_{m_i}/\mu_{m_i}] \rightarrow c.$$

Прилагайки правилото за извод (3_N), получаваме окончателно

$$R \vdash_N F_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i}) \rightarrow c, \quad \text{т.е. } R \vdash_N \ \mu \ \rightarrow \ c.$$

□