Тема 14: (съответства на тема 17 от конспекта)

Съдържание: Булеви функции. Формула над м-во булеви функции. Булева ф-я съответна на дадена формула. Съществени и несъществени променливи. Булеви функции на една и две променливи. Свойства на функциите на една и две променливи.

Деф: Булева функция: Нека $B = \{0, 1\}$. Булева ф-я на n променливи $n \geq 1$ е всяка ф-я от вида $f: B^n \to B$. Двете булеви функции на нула променливи отъждествяваме с булевите константи 0 и 1.

- М-вото от всички булеви функции на n променливи бележим с F_2^n.
- М-вото от всички булеви функции бележим с $F_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_2^n$

Заб. Нека X, Y са крайни м-ва. Знаем, че броят на функциите от вида $f: X \to Y$ е $|Y|^{|X|}$. Значи броят на всички булеви функции на n променливи е 2^{2^n} (т.е $2^{(2^n)}$).

Представяне на булеви функции чрез булеви вектори (каноничното представяне)

Нека $f(x_1 \ldots x_n)$ е булева ф-я. Нека f има стойности:

подредени в лексикографски ред

$$
\begin{aligned}
f(0, \ldots, 0, 0) &= 1 \\
f(0, \ldots, 0, 1) &= 1 \\
f(0, \ldots, 1, 0) &= 0 \\
&\vdots \\
f(1, \ldots, 1, 1) &= 1
\end{aligned}
$$

→ конкретните функционални стойности не са важни.

Ако се разберем, че подреждаме лексикографски булевите в-ри от дефиниционното м-во B^n, забелязваме, че булевият вектор образуван от дясната страна на равенствата определя еднозначно булевата ф-я f. Този вектор е с дължина $2^n = |B^n|$.

Записване f така: $f = \boxed{110\dots1}$ – нарича се таблично представяне на f.

Лесно се вижда, че всеки вектор с дължина 2^n, $n \in \mathbb{N}$ определя еднозначно булева ф-я на n променливи. Ако дължината на булев вектор <u>НЕ Е</u> степен на двойката, то той не съответства на булева функция.

<u>Променливи</u>

Нека $f(x_1, \dots, x_n)$ е булева функция

- ако $x_i \neq x_j$ за $i \neq j$ (т.е., ако няма повтарящи се променливи), то f е ф-я на точно n променливи.
- ако има случай $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n)$ (някоя променлива се повтаря), то f е ф-я на $< n$ променливи
- променлива се нарича <u>фиктивна</u>, ако:

  $$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

  за всяка валуация на останалите променливи (още казваме несъществена променлива).
- променлива е <u>съществена</u>, ако не е фиктивна.

<u>Деф: Формули на булевите функции</u>

<u>Заб.</u> Формулата е чисто синтактично понятие и означава правилно построена дума над някаква азбука според зададени правила.

Нека имаме следните:

$\{x_0, x_1, \dots\}$ – изброимо безкрайно м-во от булеви променливи.

това е запетая

$\Sigma = \{f, x, 0, 1, \dots, 9, ,\}$ – азбука (, е от м-вото).

$\Sigma_d = \{0, 1, \dots, 9\}$ – азбука от десетичните цифри

$\tilde{\Sigma}_d$ – м-вото от низовете с букви от Σ_d, които са валидни записи на ~~десетични~~ числа в десетична бройна система

(Заб. 0017 не е валиден запис и $0017 \notin \tilde{\Sigma}_d$).

нека δ е десетичната позиционна бройна система, т.е ф-ята биекция:

$\delta : \tilde{\Sigma}_d \to \mathbb{N}$

нека t е следното изброяване на всички булеви функции, т.е биекцията:

$t : F_2 \to \mathbb{N}$:

- $\forall n \in \mathbb{N}$, ако $f \in F_2^n$ и $g \in F_2^{n+1}$, то $t(f) < t(g)$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, ако $f, g \in F_2^n$ и $f \neq g$, то $t(f) < t(g)$ т.с.т.к. каноничното представяне на f предхожда лексикографски това на g.

Заб. За повече детайли/обяснения за деф. на t вж. pdf-а "Задачи-~~за~~ булеви функции".

Всеки низ φ е формула на булева функция т.с.т.к. е в сила точно едно от двете:

1. База: $\varphi = x\alpha$, където $\alpha \in \tilde{\Sigma}_d$
2. Стъпка: $\varphi = f_\alpha(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, където $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ са формули на булеви функции, $\alpha \in \tilde{\Sigma}_d$ и $t^{-1}(\delta(\alpha))$ има точно n променливи.

Въвеждаме и ф-ята V, която ще наричаме дълбочина на формулата:

1. В базовия случай, $V(\varphi) := 0$
2. В стъпката $V(\varphi) := \max\{V(\varphi_1), \dots, V(\varphi_n)\} + 1$

Зад. Общо взето дефинирахме, че всяка променлива (на пр. x_{387}) е булева ф-ла и другите формули са от вида например $f_{333333}(x_3, x_8, x_{32}, x_{18}, x_{177})$ или пък $f_6(x_1, f_7(x_1, x_2))$.

Горе-долу интуитивно.

Семантика на булевите ф-ли: (булева ф-я съответна на дадена формула)

1. Семантиката на всяка ф-ла с ~~дължина~~ дълбочина 0, т.е. x_α е булевата променлива $x_{\delta(\alpha)}$.
2. Семантиката на всяка ф-ла с дълбочина 1, $f_\alpha(x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_n})$, $\beta_i \in \tilde{\Sigma}_d$ е булевата ф-я $f_j(x_{k_1}, x_{k_2} \dots x_{k_n})$, където $f_j = t^{-1}(\delta(\alpha))$ и x_{k_i} е булева променлива, чийто индекс k_i е $\delta(\beta_i)$.
3. -//- с дълбочина > 1, $\varphi = f_\alpha(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n)$ е композицията на семантиките на $\varphi_1 \dots \varphi_n$ на местата на съответно първата, ..., n-тата променлива на ф-ята f_j, където $f_j = t^{-1}(\delta(\alpha))$.

Зад. Очевидно (не бам очевидно, но нека и да е) семантиката на всяка ф-ла е еднозначна, но за всяка ф-я има безброй много ф-ли с семантика дадената ф-я.

Булевите функции на една променлива ($2^{2^1} = 4$ на брой са)

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

f_1 - константата 0

f_2 - идентитетът на x

f_3 - булевото отрицание на x

f_4 - константата 1

Булевите функции на две променливи ($2^{2^2} = 16$ на брой)

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

f_1 - константата 0

f_2 - $x \wedge y$ (конюнкция)

f_8 - $x \vee y$ (дизюнкция)

f_7 - $x \oplus y$ (сума по модул 2 или "изключващо или")

f_{10} - $x \leftrightarrow y$ (еквиваленция)

f_{14} - $x \rightarrow y$

f_{12} - $y \rightarrow x$

Свойства на функциите на две променливи

1. Комутативност: $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \oplus y = y \oplus x$

2. Асоциативност: $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

3. Дистрибутивност: $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

$$(x \oplus y) \wedge z = (x \wedge z) \oplus (y \wedge z)$$

4. Идемпотентност: $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$, $x \oplus x = 0$

5. С-ва на отрицанието: $x \wedge \bar{x} = 0$, $x \vee \bar{x} = 1$, $x \oplus \bar{x} = 1$, $\bar{\bar{x}} = x$

6. Закони на Де Морган: $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$, $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$