Огъване на повърхнини

Гъвкава неразтеглива нишка може да се наложи върху произволна крива, докато за гъвкава неразтеглива лента това не е възможно. Равнинен лист може да се наложи на цилиндър, но не и на кълбо без да се смачка или скъса.

Ясно е, че „наложимост" или „неналожимост" не зависи от материала, от който е направена лентата или тялото, т.е. наложимостта е изцяло геометрично взаимно свойство на двойката повърхнини. Така че за да се изследва е необходимо да се даде геометрична дефиниция на понятието „наложимост".

При процеса на налагане на лента (неразтеглива) от дадена повърхнина, която има първоначално положение S_1 след изменението приема форма S_2. При това коя да е материална линия през цялото време запазва дължината си.

Да разгледаме множеството от повърхнини S_λ, където λ се мени в интервал $1 \leq t \leq 2$, като на всяко λ съответства повърхнина S_λ - т.е. това множество е еднопараметрична семейство повърхнини.

На една от повърхнините от семейството, да кажем S_1 фиксираме точка M_1 и я поставяме в еднозначно съответствие с т. M_λ

от S_λ. Множеството от точки M_λ $(1 \le \lambda \le 2)$ образува линия L_λ (геометричен образ на линията, по която се движи материалната точка от лентата)

На първо място предполагаме, че всяка S_λ е непрекъсната и има допирателна равнина във всяка точка им, то е общото, има навсякъде нормала. Освен така, единичната векторна функция, колинеарна с нормалата е непрекъсната и диференцируема...

Освен това трябва да поискаме изменението на самата S_t и допирателните ѝ равнини при изменението на параметъра λ да протича непрекъснато.

Нека M_λ е произволна точка от S_λ, $M_{\lambda+\Delta\lambda}$ - съответната ѝ точка от $S_{\lambda+\Delta\lambda}$, α_λ - допирателната равнина в M_λ и $\alpha_{\lambda+\Delta\lambda}$ - допирателната равнина в $M_{\lambda+\Delta\lambda}$. Тогава при $\Delta\lambda \to 0$ границата на т. $M_{\lambda+\Delta\lambda}$ трябва да е M_λ, а α_λ да е границата на $\alpha_{\lambda+\Delta\lambda}$.

За да характеризираме деформацията на неразтеглива лента трябва да отчетем, че при тази деформация дължината на всяка материална линия остава непроменена.

Дефиниция 1. Две повърхнини S_1 и S_2 се наричат изометрични, ако между точките им може да се установи такова съответствие, при което съответните им линии да имат равна дължина.

Дефиниция 2. Две повърхнини S_1 и S_2 се наричат огъваеми (или наложими) една на друга, ако може да се построи семейство повърхнини, съдържащо S_1 и S_2, в което всички повърхнини са изометрични с S_1 (и следователно една с друга).

Повърхнините, които са наложими една на друга по дефиниция са изометрични. Обратно - две изометрични повърхнини не са задължително наложими една на друга.
— ръкавичката на лявата ръка е изометрична с повърхнината на дясната ръка, но не се надява на дясната ръка.
Ако, обаче обърнем ръкавичката наопъки, то може да я наденем на дясната ръка. Но при обръщането непременно ще се появи поне една гънка (по някоя линия) и по тахава линия ще се наруши гладкостта - допирателната равнина няма да се изменя непрекъснато.
Забележително е, че разгледаният случай

на огледално симетрични повърхнини е по същество единственият случай, когато от изометричността на повърхнини не следва налагаемостта им една на друга. В сила е следната

<u>Теорема 1</u> Ако повърхнината S_1 е изометрична с повърхнината S_2, но не се огъва на нея, то тя се огъва на огледалния образ на S_2.

С известни уговорки - разглеждаме достатъчно малки парченца от повърхнините. Също така може да се окаже, че върху повърхнината има „патологични" точки - в тяхна околност не може да се осъществи огъване, но такива повърхнини не се разглеждат.

В сила е и

<u>Теорема 2</u> Ако две повърхнини S_1 и S_2 имат една и съща първа основна форма, то те са изометрични.

Нека S_1 е отнесена към някаква система криволинейни координати u и v, а S_2 - към криволинейни координати, за които запазваме същите криволинейни координати макар координатните линии на едната повърхнина може и да не са конгруентни с координатните линии на другата повърхнина. По условие и за двете повърхнини първата основна форма има вида

$$E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2,$$

където E, F, G са дадени функции на u, v.

Да вземем върху S_1 произволна крива

$$u = f(q) \quad , \quad v = \varphi(q);$$

за дължината на дъгата $\overset{\frown}{A_1B_1}$ от тази крива имаме

$$\int_{q_{A_1}}^{q_{B_1}} \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \int_{q_{A_1}}^{q_{B_1}} \sqrt{E(f'(q))^2 + 2F f'(q)\varphi'(q) + G(\varphi'(q))^2}\, dq,$$

където E, F, G сега са функции на t – $E = E(f(q), \varphi(q))$

За съответна на $M_1(u_1, v_1)$ от S_1 вземаме точката $M_2(u_2, v_2)$ от S_2, чиито координати са същите като едноименните координати на т. M_1, т.е.

$$u_2 = u_1 \quad , \quad v_2 = v_1$$

Тогава дъгата $\overset{\frown}{A_2B_2}$ от S_2, определена от уравнението

$$u = f(q) \quad , \quad v = \varphi(q),$$

чиито краища A_2, B_2 съответстват на $q = q_A$, $q = q_B$ ще съответства на дъгата $\overset{\frown}{A_1B_1}$ от S_1. Дължината на $\overset{\frown}{A_2B_2}$ се задава със същия интеграл. Следователно съответните дъги от S_1 и S_2 са с равни дължини, т.е. S_1 и S_2 са изометрични

Теорема 3. Ако повърхнините S_1 и S_2 са изометрични, то при подходящ избор на криволинейните координати те имат една и съща първа основна форма.

Също така не е трудно да се докаже следната

Теорема 4. Ако S_1 и S_2 са изометрични, то след подходящо избрани изрази на u и v чрез нови параметри u', v' може първата основна форма на S_2 да добие същия вида на тази на S_1.

Обратно, ако можем да изразим u и v чрез u', v' така че първата основна форма на S_2 да добие вида на тази на S_1, то е ясно, че S_1 и S_2 са изометрични. Ето защо въпросът за изометричността на две повърхнини може да се сведе до въпроса: съществуват ли функции $u = \varphi(u', v')$, $v = \chi(u', v')$, които привеждат формата на S_1 в тази на S_2

т.е. ако
$$dS_1^2 = E_1(u,v)du^2 + 2F_1(u,v)dudv + G_1(u,v)dv^2$$
$$dS_2^2 = E_2(u,v)du^2 + 2F_1(u,v)dudv + G_2(u,v)dv^2,$$

то

$$dS_2^2 = E_1(u',v^2)du'^2 + 2F_1(u',v')du'dv' + G_1(u',v')dv'^2.$$

Пример За хеликоида - S_1

S_1: $x = u\cos u$; $y = u\sin v$; $z = av$

първата основна форма е

$$ds^2 = du^2 + (a^2+u^2)dv^2$$

За катеноида - S_2 със следните параметрични уравнения

S_2: $x = \sqrt{a^2+u^2}\cos v$; $y = \sqrt{a^2+u^2}\sin v$; $z = a\,arsh\frac{u}{a}$

също получаваме

$$ds^2 = du^2 + (a^2+u^2)dv^2.$$

Следователно, съгласно Теорема 2, хеликоидът със стъпка $2\pi a$ е изометричен на катеноид с радиус на гърлото, равен на a т.е. окръжността на гърловия кръг е с дължина $2\pi a$. Тъй като повърхнината, огледално симетрична на повърхнината на катеноида е конгруентна със самия катеноид (това е в сила за ротационните повърхнини, то от Теорема 1 хеликоида може да се огъне на катеноид и, обратно катеноидът се огъва на хеликоид

Да отнесем катеноида към нови координати (както разгледахме при ротационните повърхнини) – за координати на M – дължината v и разстоянието r до оста, $r=MN$

$$ds^2=\{1+(f'(r))^2\}dr^2+r^2dv^2,$$

където $f(r)$ е функция, изразяваща разстоянието на M до началния паралел, т.е $z=f(r)$ е уравнение на меридиана

$\Rightarrow$

$$f(r)=a\,\mathrm{arch}\frac{r}{a}, \quad f'(r)=\frac{a}{\sqrt{r^2-a^2}}$$

така че

$$ds^2=\frac{r^2dr^2}{r^2-a^2}+r^2dv^2,$$

или за да съгласуваме с означенията в теорема 3 сменяме буквата r с u $\Rightarrow$

$$ds^2=\frac{u^2du^2}{u^2-a^2}+u^2dv^2, \quad (*)$$

което е различно от вида на формата на хеликоида

$$ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2$$

Ако във формата $(*)$ сменим променливите

$$u=\sqrt{u'^2-a^2}, \quad v=v',$$

то

$$ds^2=\frac{u'^2du'^2}{u'^2-a^2}+u'^2dv^2 .$$