24. Главни направления. Метрични канонични уравнения на кривите от втора степен

В тази тема изследваме метричните свойства на кривите от втора степен, т.е. свойствата, които са инвариантни относно метричните трансформации (ортогоналните трансформации).

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ е ортонормирана координатна система в равнината и k е крива от втора степен с уравнение спрямо K

$$k : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

като поне един от коефициентите a_{11}, a_{12}, a_{22} е различен от нула.

След най-много две смени на координатната система можем да получим уравнение на k, което

1) Не съдържа член с xy, т.е. $a'_{12} = 0$.

2.) Или липсват членове с x и y от първа степен или с x или y и свободен член.

<u>I-ва смяна</u>. От $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ преминаваме към ортонормирана координатна система $K' = O\vec{e_1}'\vec{e_2}'$, където $\vec{e_1}' \perp \vec{e_2}'$ и $|\vec{e_i}'| = 1$, $i = 1, 2$. Нека спрямо K векторите $\vec{e_1}'$ и $\vec{e_2}'$ да са с координати съответно

$$\vec{e_1}'(\alpha_1, \beta_1) \quad и \quad \vec{e_2}'(\alpha_2, \beta_2)$$

Следователно $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$ и $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0$.

Ако $M_K(x, y)$ и $M_{K'}(x', y')$, то $\begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' \end{cases}$

следователно спрямо K' кривата k е с уравнение

$$f(x', y') = a'_{11} x'^2 + 2a'_{12} x'y' + a'_{22} y'^2 + 2a'_{13} x' + 2a'_{23} y' + a_{33} = 0$$

Избираме K', така че $a'_{12} = 0$.

Имаме

$$a'_{12} = a_{11}\alpha_1\alpha_2 + a_{22}\beta_1\beta_2 + a_{12}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$

$$= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1).\alpha_2 + (a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_1)\beta_2$$

Следователно $a'_{12} = 0$ точно тогава, когато $\exists s \neq 0$ такова, че (векторът с координати

$((a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1), (a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_1)$ е колинеарен с $\vec{e_1}$)

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1 = s\alpha_1 \\ a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_1 = s\beta_1 \end{array} \right.$$

точно тогава, когато α_1 и β_1 са решения на линейната хомогенна система

$$(1)\ \left|\begin{array}{l} (a_{11}-s)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{12}\cdot\alpha + (a_{22}-s)\beta = 0 \end{array}\right.,$$

която има ненулево решение точно тогава, когато детерминантата ѝ $\delta(s)$ е равна на нула.

$$(2)\quad \delta(s) = \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-s \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогично α_2, β_2 е решение на системата (1).
Пресмятайки $\delta(s)$ получаваме

$$(2^*)\quad \delta(s) = s^2 - (a_{11}+a_{22})s + a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Кое да е от уравненията (2), (2^*) се нарича характеристично уравнение на кривата k.
За дискриминантата му имаме

$$D = (a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geqq 0.$$

Имаме $D=0 \iff a_{11}=a_{22}$ и $a_{12}=0 \Rightarrow$ характеристичното уравнение (2*) има кратен корен s, $s = a_{11} = a_{22} \neq 0$. Следователно спрямо K, k има уравнение

$$a_{11}x^2 + a_{11}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{2a_{13}}{a_{11}}x + y^2 + 2\frac{a_{23}}{a_{11}}y + \frac{a_{33}}{a_{11}} = 0 \to \pm\frac{a_{13}^2}{a_{11}^2} \pm\frac{a_{23}^2}{a_{11}^2}$$

$$\Rightarrow k: \left(x+\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + \left(y+\frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^2 + \frac{a_{33}.a_{11} - a_{13}^2 - a_{23}^2}{a_{11}^2} = 0$$

Ако $\frac{a_{33}a_{11} - a_{13}^2 - a_{23}^2}{a_{11}^2} < 0$, то k е реална окръжност с център $Z_0\left(-\frac{a_{13}}{a_{11}}, -\frac{a_{23}}{a_{11}}\right)$ и радиус r, $r^2 = -\frac{a_{33}a_{11} - a_{13}^2 - a_{23}}{a_{11}^2}$

Пример. Уравнение на окръжност с център $Z_0(2,-1)$ и радиус 3 спрямо K е

$$k: (x-2)^2+(y+1)^2=9$$

$$k: x^2+y^2-4x+2y-4=0. \quad (\text{проверка } f(Z_0)=-9)$$

Спрямо $K^*=Z_0\vec{e}_1\vec{e}_2$ k има уравнение

$$k: x^2+y^2=9.$$

Ако $D>0$ характеристичното уравнение (2^*) има два различни реални корена s_1 и s_2, на които като решения на (1) съответстват $\vec{e}_1{}'(\alpha_1, \beta_1)$ и $\vec{e}_2{}'(\alpha_2, \beta_2)$ (решенията са точност до коефициент на пропорционалност, $\vec{e}_1{}'$ и $\vec{e}_2{}'$ получаваме след като нормираме получените вектори)

За проверка – за тези решения са изпълнени равенствата

$$\begin{array}{lll} \times\alpha_2 & a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1 = s_1\alpha_1 & \text{и} \quad a_{11}\alpha_2 + a_{12}\beta_2 = s_2\alpha_2 \times(-\alpha_1) \\ \times\beta_2 & a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_1 = s_1\beta_1 & \quad\quad a_{12}\alpha_2 + a_{22}\beta_2 = s_2\beta_2\,(-\beta_1) \end{array}$$

Умножаваме първото по α_2, третото по $(-\alpha_1)$, второто – по β_2 и четвъртото – по $(-\beta_1)$. След като ги съберем получаваме

$$0 = (s_1 - s_2)(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2).$$

От $s_1 \neq s_2 \Rightarrow \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0 \Rightarrow \vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}' = 0 \Rightarrow \vec{e}_1{}' \perp \vec{e}_2{}'$

Следователно съществуват два единични вектора $\vec{e}_1{}'$ и $\vec{e}_2{}'$ такива, че спрямо ортонормираната координатна система $K' = O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ кривата k има уравнение, в което $a_{12}' = 0$. Векторите (по точно направленията които задават) $\vec{e}_1{}'$ и $\vec{e}_2{}'$ се наричат главни направления на k.

За коефициентите в уравнението на k спрямо K' получаваме

$$a_{11}' = a_{11}\alpha_1^2 + 2a_{12}\alpha_1\beta_1 + a_{22}\beta_1^2 = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1)\alpha_1 + (a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_1)\beta_2$$

$$= s_1\alpha_1^2 + s_1\beta_1^2 = s_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2) = s_1.$$

Аналогично, $a_{22}' = a_{11}\alpha_2^2 + 2a_{12}\alpha_2\beta_2 + a_{22}\beta_2^2 = \dots = s_2$

$a_{13}' = a_{13}\alpha_1 + a_{23}\beta_1$ и $a_{23}' = a_{13}\alpha_1 + a_{23}\beta_2$

Следователно спрямо K' кривата k има уравнение

$$k: s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + 2a'_{13} x' + 2a'_{23} y' + a_{33} = 0.$$

Възможни са следните случаи

I. k има краен център $Z_0(x_0, y_0)$, а това е точно тогава, когато $\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$.

Тогава при смяна $K' = O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}' \longrightarrow K'' = Z_0\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$,

т.е. $\left| \begin{array}{l} x' = X + x_0 \\ y' = Y + y_0 \end{array} \right.$ получаваме централно уравнение на k:

$$k: s_1 X^2 + s_2 Y^2 + A_{33} = 0,$$

където $A_{33} = f(x_0, y_0)$.

II. Нека k е нецентрална крива $\Longleftrightarrow \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$
$\Longrightarrow$ $s_1 \cdot s_2 = 0$ и без ограничение на общността можем да изберем $s_1 = 0$. Следователно $s_2 \neq 0$ $(s_2 = a'_{22})$ и уравнението на k е

$$k:\ s_2 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0.$$

Нека N_0 е точка с координати спрямо $K' - N_0(a, b)$ и сменим K' с K'', където $K'' = N_0\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$, т.е. транслираме K' в K'':
$$\begin{cases} x' = X + a \\ y' = Y + b \end{cases}$$

Тогава спрямо K'' кривата k има уравнение

$$k:\ s_2 Y^2 + 2a'_{13}X + 2(s_2 b + a'_{23})Y + (2a'_{13}a + 2a'_{23}b + s_2 b^2 + a_{33}) = 0$$

Тъй като $s_2 \neq 0$ можем да определим $b = -\frac{a'_{23}}{s_2}$, т.е. да „изчистим" коефициента пред Y.

За a'_{13} имаме две възможности:

1) $a'_{13} \neq 0$. Тогава можем да анулираме свободния член като изберем $a = -\frac{1}{2a'_{13}}(2a_{23} \cdot b + s_2 b^2 + a_{33})$

и спрямо K'' кривата k има уравнение

$$k: s_2 Y^2 + 2a'_{13} X = 0.$$

2) $a'_{13} = 0$. В този случай a може да е произволно, но най удобно е да изберем $a = 0$. За уравнението на k получаваме $k: s_2 Y^2 + a''_{33} = 0$.

Следователно е в сила следната

<u>Теорема</u> За всяка крива от втора степен съществува ортонормирана координатна система, спрямо която уравнението ѝ е точно от един от следните видове:

I. $s_1 X^2 + s_2 Y^2 + c = 0$, като $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$.

II. $s_2 Y^2 + 2n X = 0$, като $s_2 \neq 0$, $n \neq 0$

III. $s_2 Y^2 + m = 0$, като $s_2 \neq 0$.

При изследването на тези уравнения получаваме

I.1. При $c \neq 0 \Rightarrow \dfrac{X^2}{-\frac{c}{s_1}} + \dfrac{Y^2}{-\frac{c}{s_2}} = 1$

Следователно:

1.1. При $s_1 s_2 < 0$, т.е. s_1 и s_2 с различни знаци горното уравнение е канонично уравнение на хипербола

1.2. При $s_1 s_2 > 0$, т.е. s_1 и s_2 са с един и същи знак, имаме две възможности,

ако 1.2.1 $-\frac{c}{s_1} > 0$ и $-\frac{c}{s_2} > 0$ уравнението е канонично уравнение на елипса,

ако 1.2.2. $-\frac{c}{s_1} < 0$ и $-\frac{c}{s_2} < 0$, то уравнението добива вида

$$\frac{x^2}{-a^2} + \frac{y^2}{-b^2} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 .$$

Кривата, която това уравнение задава се нарича имагинерна елипса. Върху нея няма реални точки.

I.2 При $c = 0$ $(c = a_{33})$ уравнението добива вида 14

$$s_1 X^2 + s_2 Y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$k: \; Y^2 = -\frac{s_1}{s_2} X^2 ,$$

I.2.1 когато $s_1 s_2 < 0$, то $k: Y^2 = a^2 X^2$,

$k: (Y - aX)(Y + aX) = 0$ и кривата

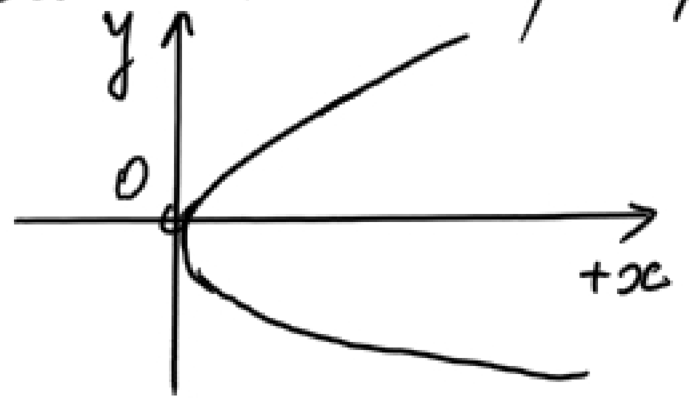
k е двойка пресичащи реални прави.

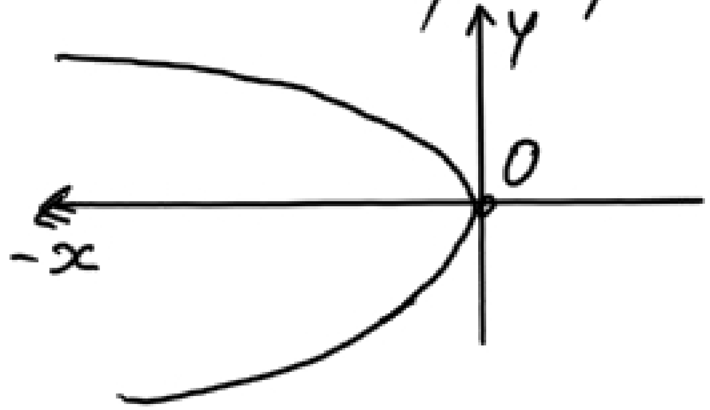
2.2. при $s_1 s_2 > 0$, то $k: Y^2 = -a^2 X^2$,

$k: (Y - iaX)(Y + iaX) = 0$ и кривата k

се разпада на двойка пресичащи се в реална точка комплексно спрегнати прави.

II $Y^2 = 2pX$ – в този случай имаме канонично уравнение на парабола ($p = -\frac{a_3'}{s_2}$) с ос x с врха към $+X$ при $p>0$ и към $-X$ при $p<0$.

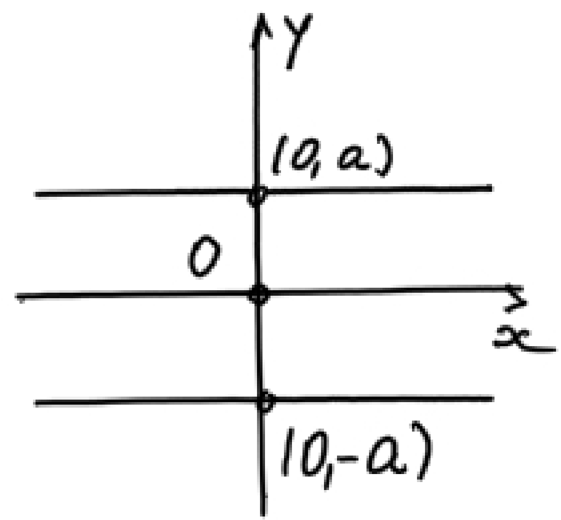




III. 1. При $m \neq 0$ кривата k е с уравнение

$$k: \; Y^2 = -\frac{m}{s_2}$$

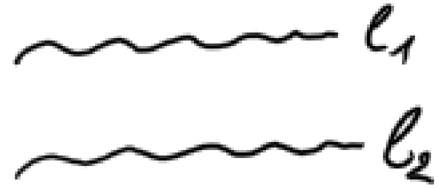
1.1. Ако $-\frac{m}{s_2} > 0$, то $Y^2 = a^2$, $a \in \mathbb{R}$ и k се разпада на двойка успоредни реални прави $k: (Y-a)(Y+a) = 0$ $(a>0)$



1.2. Ако $-\frac{m}{s_2} < 0$, то k е с уравнение

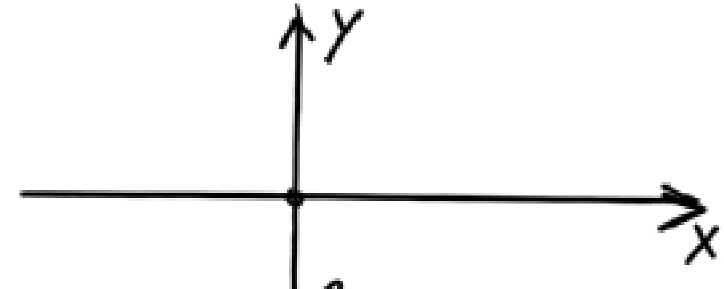
$$k: Y^2 = -a^2, \ a \in \mathbb{R}$$ и

се разпада на двойка успоредни комплексно спрегнати прави



$$k: (Y - ia)(Y + ia) = 0.$$

1.3. Ако $m = 0$, то



$$k: Y^2 = 0$$

се състои от двойка съвпадащи прави (реални).

При смяна на ортонормирана координатна система с ортонормирана видът на крива от втора степен не се променя.

Направените наблюдения обобщаваме в следната.

Теорема 2 Съществуват точно девет метрично нееквивалентни криви от втора степен. Това са кривите със следните канонични уравнения

1. $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ – елипса (реална елипса;

2. $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$ – имагинерна елипса;

3. $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ – хипербола;

4. $Y^2 = 2pX$, $p \neq 0$ – парабола;

5. $Y^2 = a^2X^2$, $a \neq 0$ – двойка реални пресичащи се прави;

6. $Y^2 = -a^2X^2$, $a \neq 0$ – двойка комплексно спрегнати пресичащи се в реална точка прави;

7. $Y^2 = a^2$, $a \neq 0$ – двойка реални успоредни прави;

8. $Y^2 = -a^2$, $a \neq 0$ – двойка комплексно спрегнати успоредни прави.

9. $Y^2 = 0$ – двойка съвпадащи прави. (двойна права).