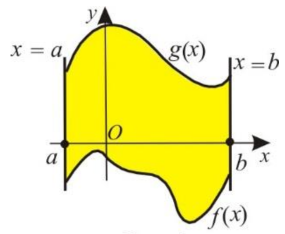
Двойни интеграли

1. Нека в интервала $[a;b]$ са дефинирани и непрекъснати функции $f(x)$ и $g(x)$. Множество, зададено с неравенствата

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ f(x) \le y \le g(x) \end{cases},$$

се нарича **криволинеен трапец при фиксирано *x***(фиг. 1).

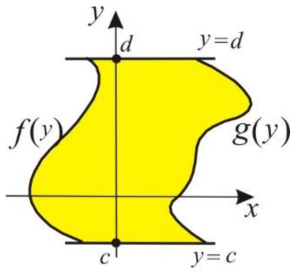


Фиг.1

Нека в интервала $[c;d]$ са дефинирани и непрекъснати функции $f(y)$ и $g(y)$. Множество, зададено с неравенствата

$$\begin{cases} c \le y \le d \\ f(y) \le x \le g(y) \end{cases},$$

се нарича **криволинеен трапец при фиксирано *y*** (фиг. 2).



Фиг. 2

2. Нека функцията $F(x;y)$ е дефинирана и непрекъсната в компактното множеството *D*.

Ако *D* е криволинейния трапец $D\begin{cases} a \le x \le b \\ f(x) \le y \le g(x) \end{cases}$ е в сила

$$\iint_D F(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)dy \right) dx .$$

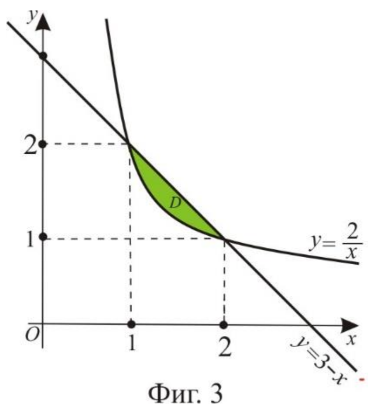
Ако *D* е криволинейния трапец $D\begin{cases} c \le y \le d \\ f(y) \le x \le g(y) \end{cases}$ е в сила

$$\iint_D F(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{f(y)}^{g(y)} F(x,y)dx \right) dy .$$

Задача 1. Да се пресметне $\iint_D xydxdy$, където *D* е множеството, заградено от хиперболата $xy = 2$ и правата $x + y = 3$.

Решение. За да намерим точките, в които се пресичат хиперболата и правата решаваме системата

$$\left| \begin{matrix} xy = 2 \\ x + y = 3 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} y = 3 - x \\ x(3-x) = 2 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} y = 3 - x \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} x_1 = 1, y_1 = 2 \\ x_2 = 2, y_2 = 1 \end{matrix} \right. .$$



Фиг. 3

Компактното множество *D* (фиг. 3) се представя като криволинеен трапец при фиксирано *x* така $D:\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ \frac{1}{x} \le y \le 3 - x \end{cases}$ и съгласно теоремата за пресмятане на интеграли:

_(При интегрирането на вътрешния интеграл x е константа)

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 x[(3-x)^2 - \frac{4}{x^2}]dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 9x - \frac{4}{x})dx =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 4\ln x)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}[(4 - 16 + 18 - 4\ln 2) - \frac{1}{4} + 2 - \frac{9}{2}] = \frac{13}{8} - 2\ln 2 .$$

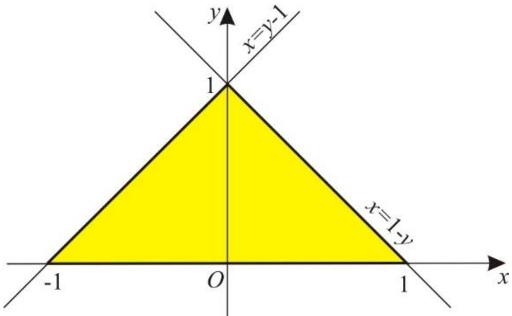
Задача 2. Да се пресметне $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, където D е триъгълникът, заграден от правите $x+y=1$, $y-x=1$ и $y\geq 0$. .

Решение. Намираме пресечните точки на трите двойки прави:

$$\begin{vmatrix} y-x=1 \\ x+y=1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y=x+1 \\ 2y=2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow x_1=1, y_1=1$$

$$\begin{vmatrix} y-x=1 \\ y=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \ x_2=-1, y_2=0 \quad \text{и}$$

$$\begin{vmatrix} y+x=1 \\ y=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \ x_3=1, y_3=0 .$$



Фиг. 4

Ако разглеждаме D като криволинеен трапец при фиксирано x, ще трябва да го разложим на два триъгълника:

$$D_1:\begin{cases} -1\leq x\leq 0 \\ 0\leq y\leq 1+x \end{cases} \text{ и } D_2:\begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ 0\leq y\leq 1-x \end{cases}$$

По-удобно е обаче да го разгледаме като криволинеен трапец при фиксиран y: $D:\begin{cases} 0\leq y\leq 1 \\ 1-y\leq x\leq y-1 \end{cases}$. Тогава

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{y-1}^{1-y}(x^2+y^2)dx\right)dy=\int\limits_0^1\left(\frac{(1-y)^3-(y-1)^3}{3}+2y^2(1-y)\right)dy=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_0^1(1-y)^3dy-2\int\limits_0^1 y^3dy+2\int\limits_0^1 y^2dy=-\frac{2}{3.4}(1-y)^4\Big|_0^1-\frac{2}{4}y^4\Big|_0^1+\frac{2}{3}y^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

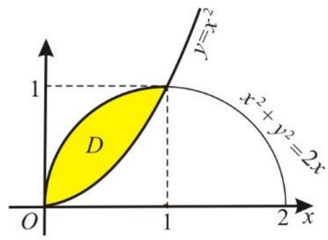
Задача 3. Да се пресметне интегралът $\iint\limits_D ye^{-x}dxdy$, където D се определя от неравенствата $y\geq x^2$ и $x^2+y^2\leq 2x$.

Решение. Намираме пресечните точки на двете криви

$$\begin{vmatrix} y=x^2 \\ x^2+y^2=2x \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y=x^2 \\ x^2+x^4=2x \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y=x^2 \\ x(x^3+x-2)=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y=x^2 \\ x(x-1)(x^2+x+2)=0 \end{vmatrix}.$$

Решенията на тази система са точките (0;0) и (1;1) .

Параболата $y=x^2$ разделя кръга $x^2+y^2=2x$ на две части, но от неравенството 2 y x следва, че трябва да вземем частта над графиката на параболата $y\geq x^2$. Представяме D като криволинеен трапец при фиксирано x:



Фиг. 5

$$D:\begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ x^2\leq y\leq\sqrt{2x-x^2} \end{cases}. \text{ Тогава}$$

$$\iint\limits_D ye^x dxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{x^2}^{\sqrt{2x-x^2}} ye^{-x}dy\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-x}(2x-x^2-x^4)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1(2x-x^2-x^4)de^{-x}=-\frac{1}{2}(2x-x^2-x^4)e^{-x}\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-x}(2-2x-4x^3)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1(2-2x-4x^3)de^{-x}=-\frac{1}{2}(2-2x-4x^3)e^{-x}\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-x}(-2-12x^2)dx=$$

$$=2e^{-1}+1+\frac{1}{2}\int_0^1(2+12x^2)de^{-x}=2e^{-1}+1+(1+6x^2)e^{-x}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{-x}.12xdx=$$

$$=2e^{-1}+1+7e^{-1}-1+12\int_0^1 xde^{-x}=9e^{-1}+12xe^{-x}\Big|_0^1-12\int_0^1 e^{-x}dx=$$

$$=21e^{-1}+12e^{-1}-12=\frac{33}{e}-12\,.$$

Задача 4. Да се пресметне $\iint_D |x+y|dxdy$, където D се определя от неравенствата

$$D:\begin{vmatrix} x\le -y^2 \\ y-x\le 2 \\ y\ge 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Първо намираме пресечните точки:

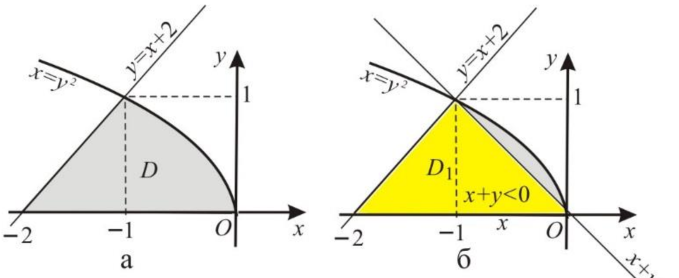
$$\begin{vmatrix} x=-y^2 \\ y-x=2 \\ y\ge 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x=-y^2 \\ y+y^2=2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x=y^2 \\ y_1=1 \end{vmatrix} \Rightarrow \quad x_1=-1, y_1=1\ .$$

$$\begin{vmatrix} x=-y^2 \\ y=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow x_2=0, y_2=0 \text{ и } \begin{vmatrix} y-x=2 \\ y=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow |x_3=-2, y_3=0\,.$$

Множеството D е изобразено на фиг. 6а. За да пресметнем интеграла обаче е добре да разделим това множество на две части – D_1, в която $x+y\le 0$ и D_2 – в която $x+y\ge 0$. За целта прекарваме правата с уравнение $x+y=0$. Ще представим двете области като криволинейни трапеци при фиксирано y:

$$D_1:\begin{cases} 0\le y\le 1 \\ y-2\le x\le -y \end{cases} \quad \text{и} \quad D_2:\begin{cases} 0\le y\le 1 \\ -y\le x\le -y^2 \end{cases}.$$

Тогава



Фиг. 6

$$\iint_D |x+y|dxdy=\iint_{D_1} -(x+y)dxdy+\iint_{D_2}(x+y)dxdy\,.$$

$$\iint_{D_1} -(x+y)dxdy=-\int_0^1\left(\int_{y-2}^{-y}(x+y)dx\right)dy=-\int_0^1\left(\int_{y-2}^{-y}(x+y)d(x+y)\right)dy=$$

(да припомним, че при интегриране на вътрешния интеграл y е константа)

$$=-\int_0^1 \frac{1}{2}(x+y)^2\Big|_{y-2}^{-y}dy=\frac{1}{2}\int_0^1(2y-2)^2dy=\frac{2}{3}(y-1)^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}\,.$$

$$\iint_{D_2}(x+y)dxdy=\int_0^1\left(\int_{-y}^{-y^2}(x+y)dx\right)dy=\int_0^1\left(\int_{-y}^{-y^2}(x+y)d(x+y)\right)dy=$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}(x+y)^2\Big|_{-y}^{-y^2}dy=\frac{1}{2}\int_0^1(-y^2+y)^2dy=\frac{1}{2}\int_0^1(y^4-2y^3+y^2)dy=$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-2.\frac{1}{4}+\frac{1}{3})=\frac{1}{2}.\frac{1}{30}=\frac{1}{60}.$$

Окончателно получаваме

$$\iint_D |x+y|dxdy=\iint_{D_1} -(x+y)dxdy+\iint_{D_2} (x+y)dxdy=\frac{2}{3}+\frac{1}{60}=\frac{41}{60}.$$

Задача 5. (За самостоятелна работа) Да се пресметне $\iint_D (x+y)dxdy$, където D се определя от неравенствата $D:\left|\begin{array}{l} x\le -y^2 \\ y-x\le 2 \\ y\ge 0 \end{array}\right.$.

Задача 6. (За самостоятелна работа) Да се пресметне $\iint_D (x+y)dxdy$, където D се определя от неравенствата $D:\left|\begin{array}{l} x\le y^2 \\ y+x\le 2 \\ y\ge 0, x\ge 0 \end{array}\right.$.

Задача 7. (За самостоятелна работа) Да се пресметне $\iint_D |\cos(x+y)|dxdy$, където D се определя от неравенствата $D:\left|\begin{array}{l} 0\le x\le \frac{\pi}{2} \\ 0\le y\le \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$.