Векторни пространства

Едно множество V се нарича **векторно (линейно) пространство**, когато в него са определение двете линейни операции **събиране** и **умножение с число**. За всеки два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е определена тяхната сума $\vec{a}+\vec{b}$ и за всеки вектор $\vec{a}$ и всяко число λ е определено произведението $\lambda\vec{a}$.

Свойства

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (комутативност)

2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (асоциативност)

3) Нулев вектор $\vec{0}$ такъв, че $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

4) Противоположен вектор $-\vec{a}$, за който $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

5) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

6) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

7) $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

8) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$

Пример. Линейно пространство е множеството на всичките еднотипни $(m \times n)$ матрици. Тук нулевият елемент е нулевата матрица.

Пример. Линейното пространство на геометричните вектори, за което ще стане дума по нататък.

Линейна комбинация

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n$$

където (λ_k) са числа.

Определение. Векторите $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_n$ се наричат **линейно независими** (образуват линейно независима система), ако равенството

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

е възможно, единствено когато

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Векторите $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_n$ се наричат **линейно зависими**, когато не са линейно независими.

Твърдение. Системата вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_n$ е линейно зависима тогава и само тогава, когато някой от векторите може да се изрази като линейна комбинация на останалите.

Определение. Казва се, че линейното пространство V е **крайномерно** и има размерност $\dim V = n \geq 1$ когато могат да се намерят някакви n на брой линейно независими вектори и всяка система от $n + 1$ на брой вектори е линейно зависима.

Твърдение. Нека в линейното пространство V могат да се намерят n на брой вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, …, $\vec{e}_n$ такива, че всеки друг вектор може да се представи като тяхна линейна комбинация. Тогава $\dim V \leq n$. Ако освен това $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ са линейно независими, то $\dim V = n$.

Пример. Линейното пространство на еднотипните $(m \times n)$ матрици е крайномерно и има размерност $m \cdot n$.

Нека $\dim V = n \geq 1$. Тогава по определение може да се намери поне една система от n на брой линейно независими вектори.

Определение. Всяка система от n на брой линейно независими вектори във векторно пространство V с размерност $\dim V = n$ се нарича **базис** във V.

Теорема. Нека векторите $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, …, $\vec{e}_n$ образуват базис във V. Тогава всеки вектор $\vec{a} \in V$ може да се представи при това по единствен начин като линейна комбинация

(1) $$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \cdots + a_n\vec{e}_n$$

Векторът $\vec{a}$ се идентифицира еднозначно чрез своите числа (λ_k) в линейната комбинация (1), които се наричат още **координати** на вектора $\vec{a}$ в дадения базис. Пишем

$$\vec{a}(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ или } \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Непосредствено се проверява, че линейните операции събиране и умножение със скалар могат да бъдат извършени върху координатите на участващите вектори. Ако

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$
$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \cdots + a_n\vec{e}_n$$

и

$$\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$
$$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \cdots + b_n\vec{e}_n$$

то

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + \cdots + (a_n + b_n)\vec{e}_n$$

и

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$$
$$\vec{a} = (\lambda a_1)\vec{e}_1 + (\lambda a_2)\vec{e}_2 + \cdots + (\lambda a_n)\vec{e}_n$$

Твърдение. Нека векторите $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, …, $\vec{e}_n$ образуват базис във V и

$$\vec{a}_k(a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}), 1 \leq k \leq m \leq n$$

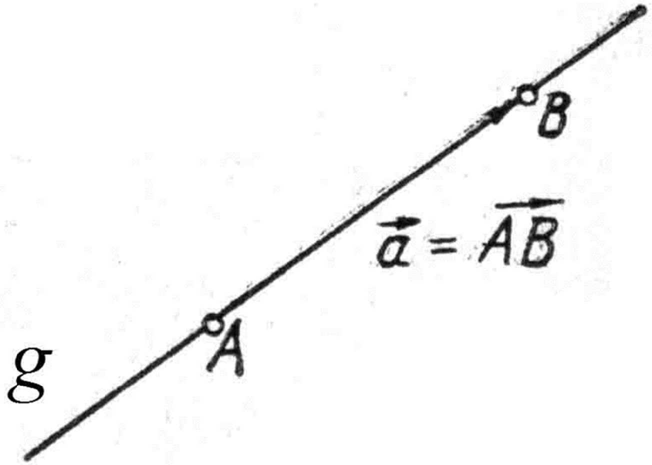
са някакви вектори, зададени чрез техните координати в този базис и да разгледаме матрицата от техните координати

$$A = (a_{ij})$$

Тогава векторите $(\vec{a}_k)$ са линейно независими тогава и само тогава, когато $r(A) = m$.

Геометрични вектори

Тук предполагаме, че читателят е запознат с някои основни геометрични понятия. Различаваме геометрични вектори върху права, вектори върху равнина и вектори в пространството. И в трите случая даден вектор $\vec{a}$ се представя от **насочена отсечка** $\overrightarrow{AB}$ с начало точката A и край в точката B (фигура 1). Пишем $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.



Фигура 1.

При нулевият вектор $\vec{0}$, началната и крайната точка съвпадат. Една насочена отсечка $\vec{a}$ притежава следните геометрични характеристики.

1) Дължина (модул на вектор), която се бележи с $|\vec{a}|$. Дължината е относително понятие. Ако имаме еталон (мащаб) – вектор $\vec{e}$ с дължина $|\vec{e}| = 1$, то можем да изразим дължината на всеки друг вектор като пропорция от дължината на $\vec{e}$. Всеки два вектора могат да бъдат сравнявани по дължина. Нулевият вектор и само той има нулева дължина.

2) **Направление и посока**. За всеки ненулев вектор $\vec{a}$, съществува единствена права g, върху която лежи $\vec{a}$. Тази права се нарича **директриса** и задава направлението на $\vec{a}$. Едно направлението, определено от правата g, задава две посоки, първата съвпада с посоката на вектора $\vec{a}$, а втората посока е противоположна на $\vec{a}$. Нулевият вектор няма определено направление и посока.

Две насочени отсечки, които могат да се получат една от друга с помощта на успоредно пренасяне, по нататък ще разглеждаме като представители на **един и същ (свободен) вектор**.

Ос се нарича права, върху която е избран мащаб за дължина и едната от двете нейни посоки е определена като положителна. По този начин за всеки вектор $\overrightarrow{AB}$ върху дадена ос g се определя **алгебрична мярка**, равна на неговата дължина в съответствие с мащаба, когато $\overrightarrow{AB}$ и g са еднопосочни и равна на неговата дължина със знак минус, когато $\overrightarrow{AB}$ и g имат противоположни посоки.

Линейни операции

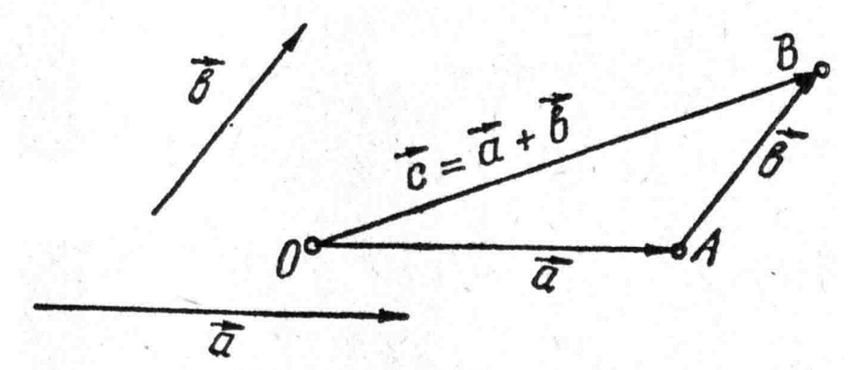
1) Умножение с число λ. Ако $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$ то полагаме $\lambda\vec{a} = \vec{0}$. Нека сега $\lambda \neq 0$ или $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогава $\lambda\vec{a}$ е вектор с дължина

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$$

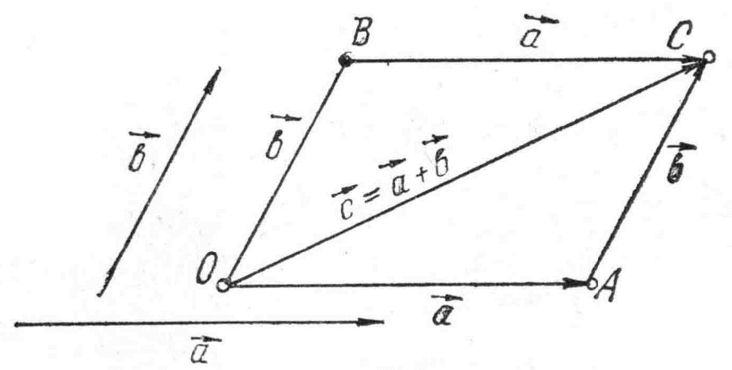
който има направление като вектора $\vec{a}$ и посока, която съвпада с тази на $\vec{a}$, когато $\lambda > 0$, и посока противоположна на тази на $\vec{a}$, когато $\lambda < 0$.

2) Събиране. Сборът $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ двата вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е векторът, който се получава, когато приложим $\vec{b}$ в крайната точка на $\vec{a}$ (фигура 2)

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{AB}, \vec{c} = \overrightarrow{OB}$$



Фигура 2.



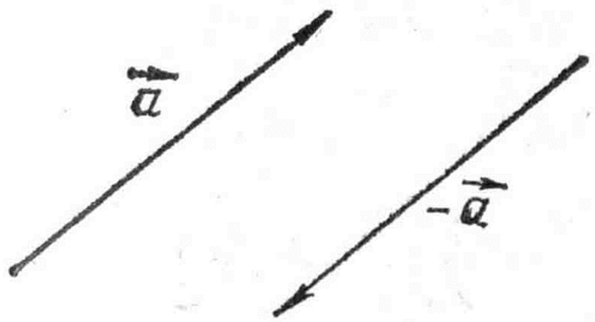
Фигура 3.

Събирането може да бъде извършено по **правилото на успоредника** (фигура 3), при което двата вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ се прилагат в една и съща точка O, след което триъгълникът ΔOAB се допълва до успоредник $OABC$. Тук сборът $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ се явява векторът, който представлява диагонала $\overrightarrow{OC}$.

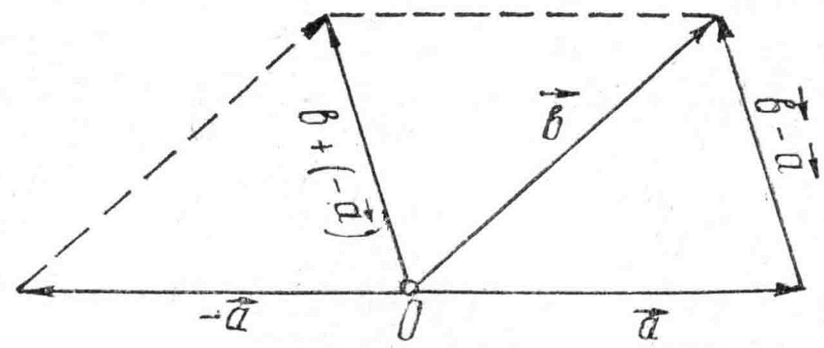
Разликата $\vec{b} - \vec{a}$ може да се разгледа като сбора на $\vec{b}$ с $-\vec{a}$

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$$

и отново да се определи по правилото на успоредника (фигура 4 и фигура 5).

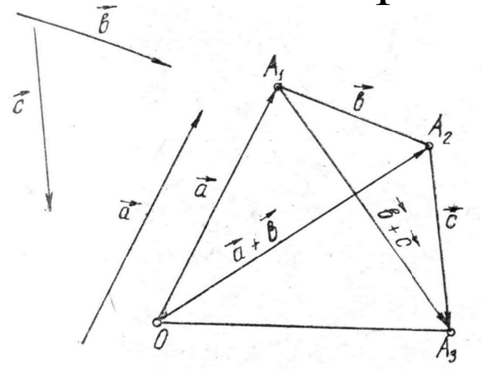


Фигура 4.

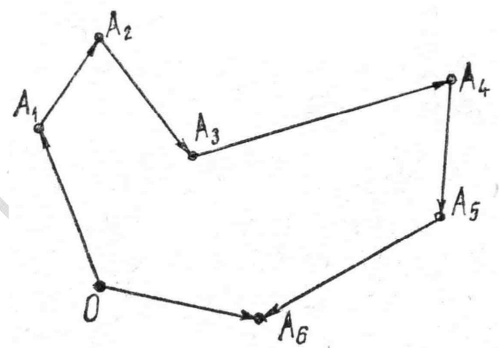


Фигура 5.

Да обърнем внимание на асоциативността на операцията събиране, която е доказана илюстративно на (фигура 6).



Фигура 6.



Фигура 7.

На фигура 7 е показано събиране на повече от два вектора.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в равнината или в пространството се наричат **колинеарни (успоредни)**, когато са линейно зависими, т.е. когато могат да се намерят две числа λ и μ, поне едното от които различно от нула такива, че

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$$

По този начин нулевият вектор е колинеарен с всеки друг вектор. Тук е по-интересен случаят когато и двата вектора са ненулеви. Нека за определеност $\mu \neq 0$. Тогава имаме

$$\vec{b} = -\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\vec{a}$$

което означава, че векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имат едно и също направление (успоредни директриси), откъдето и произлиза терминът "колинеарни".

Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в пространството се наричат **компланарни**, когато са линейно зависими, т.е. когато могат да се намерят три числа λ, μ и ν, поне едното от които различно от нула такива, че

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$$

По този начин нулевият вектор е компланарен с всеки друг вектор и освен това, ако кои да е два от векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са колинеарни, то те са компланарни. И тук е по-интересен случаят когато и трите вектора са ненулеви. Нека за определеност $\nu \neq 0$. Тогава имаме

$$\vec{c} = -\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)\vec{a} - \left(\frac{\mu}{\nu}\right)\vec{b}$$

което означава, че векторът $\vec{c}$ лежи в равнина, определена от векторите$\vec{a}$ и $\vec{b}$, откъдето и произлиза терминът "компланарни".

Определение. Базис в равнината се наричат всеки два линейно независими (неколинеарни) вектори $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Базис в пространството се наричат всеки три линейно независими (некомпланарни) вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

Теорема. Нека векторите $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ образуват базис в равнината. Тогава всеки вектор $\vec{a}$ от тази равнина може да се представи при това по единствен начин като линейна комбинация на базисните

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$$

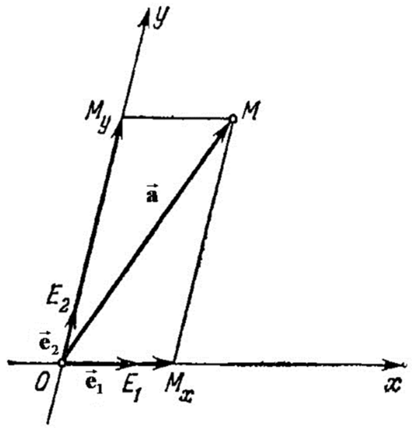
Числата a_1 и a_2 се наричат **координати** на вектора $\vec{a}$ в базиса.

Нека векторите $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ образуват базис в пространството. Тогава всеки вектор $\vec{a}$ от пространството може да се представи при това по единствен начин като линейна комбинация на базисните

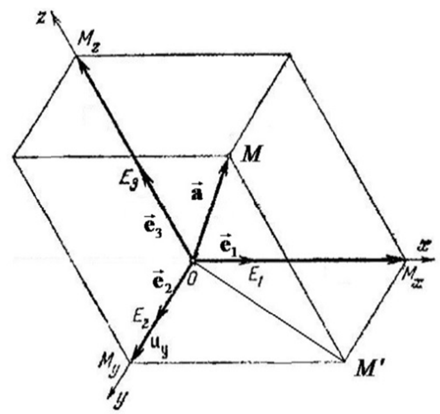
$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

Числата a_1, a_2 и a_3 се наричат **координати** на вектора $\vec{a}$ в зададения базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Доказателство. Нека $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ образуват базис в равнината. Да приложим трите вектора $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ и $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ в една и съща точка O и да допълним конструкцията до успоредник, както е показано на фигура 8, при което числовите оси по директрисите на $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ да означим съответно с O_x и O_y. Тогава



Фигура 8.



Фигура 9.

по правилото на успоредника следва, че

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$$

за някои числа a_1 и a_2. Аналогично

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

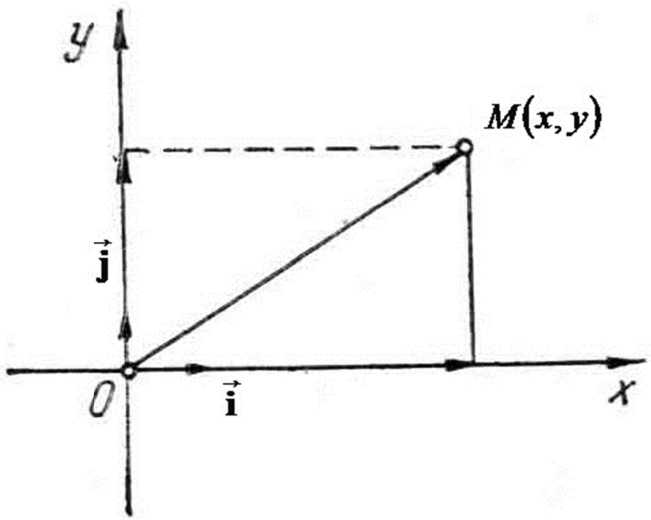
Сега вече лесно можем да установим, че всеки три вектора в равнината са линейно зависими и всеки четири вектора в пространството са линейно зависими. Равнината е линейно пространство с размерност 2, а пространството е линейно пространство с размерност 3.

Координатна система $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ **в равнината** се получава, когато имаме налице някакъв базис $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ и фиксираме една точка O за **начало** на координатната система. Базисът позволява да адресираме по единствен начин векторите в равнината, посредством техните координати. Координатната система позволява да адресираме всяка точки M в равнината чрез координатите на нейния **радиус вектор** $\overrightarrow{OM}$. По същия начин **координатна система** $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ **в пространството** се получава, когато имаме налице някакъв базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и фиксираме една точка O за начало на координатната система. Базисът позволява да адресираме по единствен начин векторите в пространството, посредством техните координати. Координатната система позволява да адресираме всяка точка M в пространството чрез координатите на нейния **радиус вектор** $\overrightarrow{OM}$.

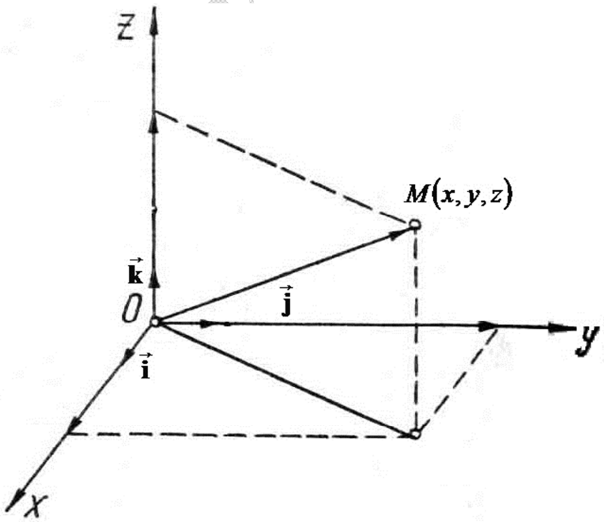
Ако е зададена една координатна система, то правите през началото O, успоредни на базисните вектори се наричат **координатни оси**. Координатните оси са оси, за които мащабът е посоката се задават от съответните базисни вектори. Всеки две координатни оси на афинната координатна система $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ в пространството образуват съответната **координатна равнина**.

Ако базисните вектори сключват помежду си прави ъгли, то базисът се нарича **ортогонален**, а когато базисът е ортогонален и базисните вектори имат единична дължина, то базисът се нарича **ортонормиран**. Ако базисът е ортонормиран, то съответната афинна координатна система се нарича **декартова (правоъгълна)**. В декартова координатна система координатните оси могат да бъдат разглеждани като **числови** оси.

По нататък в геометричните изследвания ще разглеждаме като правило само декартови координатни системи с базисни вектори, означени с $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$ със съответни числови оси O_x и O_y за случай на равнина (фигура 10) и $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ със съответни числови оси O_x, O_y и O_z за случай на пространство (фигура 11).



Фигура 10.



Фигура 11.

Когато трябва да означим дадена точка M чрез нейните координати пишем $M(x, y)$ или $M(x, y, z)$ съответно за случая на равнина и пространство.

Декартовата координатна система в равнината O_{xy} се нарича **положително ориентирана**, когато по-краткият път на завъртане на първата числова ос O_x до сливане с втората ос O_y е в посока, **обратна на**

движението на часовниковата стрелка, както е в случая, изобразен на фигура 10. В противен случай координатната система Oxy се нарича **отрицателно ориентирана**. Очевидно ако координатната система O_{xy} е положително ориентирана, то системата O_{yx} е отрицателно ориентирана. Декартовата координатна система в пространството O_{xyz} се нарича **положително ориентирана**, когато координатната система O_{xy} в съответната координатна равнина е положително ориентирана, "погледнато от върха" на третата ос O_z, както е в случая, изобразен на фигура 11. В противен случай координатната система O_{xyz} се нарича **отрицателно ориентирана**.

Аналогични означени за координатните оси както и аналогични определения за ориентация могат да бъдат въведени и за произволна афинна координатната система.

Скаларно векторно и смесено произведение

Скаларното произведение на геометричните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се определя като число, равно на произведението от техните дължини и косинуса от ъгъла между тях

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi\,, 0 \le \varphi \le \pi \tag{2}$$

Непосредствено от определението на скаларно произведение чрез формулата (2), произтичат следните основни свойства.

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$

2) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b} = \vec{a}_1\vec{b} + \vec{a}_2\vec{b}$

3) $\lambda(\vec{a}\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\lambda\vec{b})$

4) $\vec{a}\vec{a} \ge 0$ и $\vec{a}\vec{a} = 0$, единствено когато $\vec{a} = \vec{0}$.

Два ненулеви геометрични вектора се наричат **ортогонални**, когато сключват прав ъгъл. По определение нулевият вектор е ортогонален на всеки друг.

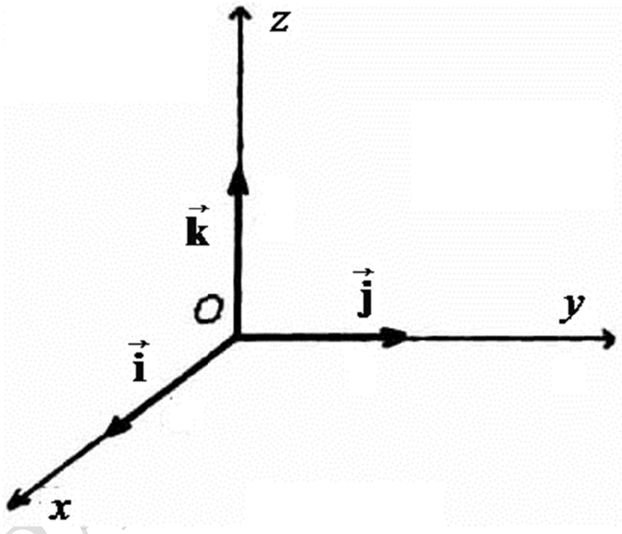
5) $\vec{a}\vec{b} = 0$ тогава и само тогава, когато $\vec{a} \perp \vec{b}$

6) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}}$

По нататък навсякъде ще предполагаме O_{xyz} с ортонормиран базис от единичните вектори $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$. По определение

$$|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = |\vec{k}| = 1, \vec{\imath} \perp \vec{\jmath}, \vec{\imath} \perp \vec{k}, \vec{\jmath} \perp \vec{k}$$

(фигура 11)



Фигура 11.

Да разгледаме векторите

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$$
$$\vec{b}(b_1, b_2, b_3) = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}$$

Съгласно формулата (2)

$$\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0, \vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$$

следователно

(3) $$\vec{a}\vec{b} = \left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\right)\left(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\right) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Пример. За векторите $\vec{a}(1, -2,3)$ и $\vec{b}(2,3,1)$ имаме

$$\vec{a}\vec{b} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 1 = -1$$

Дължина на вектор

Съгласно (3), за дължината на вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ намираме

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Да разгледаме точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ са зададени чрез техните координати. Тогава за дължината на вектора

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

получаваме

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ъгъл между вектори

Ако $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ са два ненулеви вектора, то за ъгъла φ между тях получаваме формулата

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \tag{4}$$

В частност векторите са ортогонални тогава и само тогава, когато

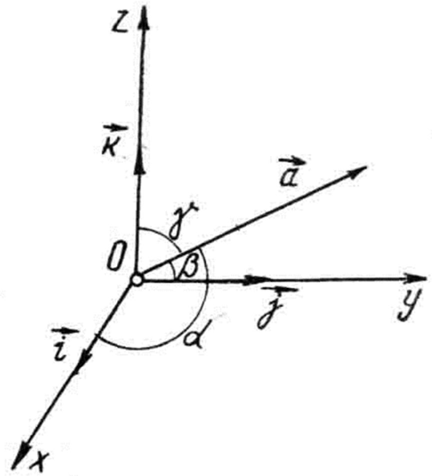
$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

Направляващи косинуси

Да разгледаме ненулевия вектор $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$. По определение базисните вектори имат следните координати

$$\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$$

Нека α, β и γ са ъглите, които сключва $\vec{a}$ със съответните базисни вектори (фигура 12)



Фигура 12

Тогава съгласно (4) намираме

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\vec{a}}{|\vec{a}||\vec{a}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{j}\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{k}\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

откъдето веднага може да се провери, че

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Единичен вектор

Нека $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ е ненулев вектор. Тогава векторът $\vec{n}$, който се получава от вектора $\vec{a}$, след като го разделим на неговата дължина $|\vec{a}|$, представлява вектор, който има посоката на $\vec{a}$ и има дължина $|\vec{n}| = 1$

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\vec{n} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\vec{i} + \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\vec{j} + \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\vec{k}$$

$$\vec{n} = \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\right)$$

Горните формули се променят по очевиден начин, когато разсъжденията се провеждат в равнината. За да получим техния равнинен еквивалент е достатъчно да отстраним излишните събираеми.

Векторно произведение

Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са два вектора в пространството. Тяхното векторно произведение $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ винаги се определя като вектор с дължина

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi \, , 0 \leq \varphi \leq \pi$$

където φ е ъгълът между тях. От това определение се вижда, че

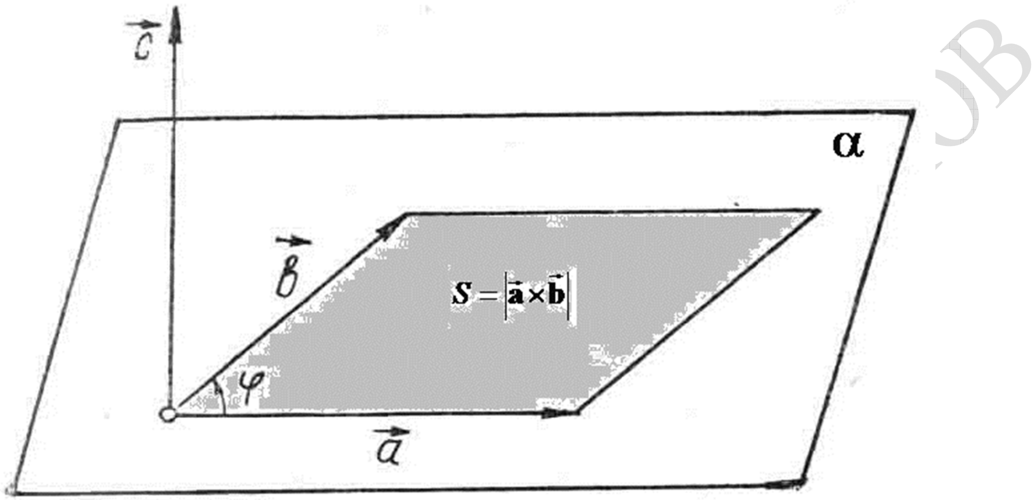
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

тогава и само тогава, когато $|\vec{a}| = 0$ или $|\vec{b}| = 0$ или $\sin \varphi = 0$, което означава, че $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са неколинеарни (всеки от тях е ненулев и не са успоредни). Тогава тяхното векторно произведение се определя като единственият вектор в пространството, който притежава следните свойства (фигура 13)

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi$

2) Векторът $\vec{c}$ е ортогонален на $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3) Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в този ред образуват **дясна тройка**



Фигура 13.

Ако приложим векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в една точка, то те определят единствена равнина α. Дължината на векторното произведение по определение е лицето на пространствения успоредник от равнината α, породен от $\vec{a}$ и $\vec{b}$, освен това векторът $\vec{c}$ е перпендикулярен на равнината α. Условията дотук определят точно два вектора, със зададена дължина и перпендикулярни на дадена равнина. Третото условие, векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в този ред да образуват дясна тройка, определя вече $\vec{c}$ еднозначно.

Векторното произведение притежава следните основни свойства, които лесно се проверяват непосредствено от дадените определения.

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

2) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$

3) $\lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right)$

4) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, единствено когато $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Да разгледаме векторите

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$$
$$\vec{b}(b_1, b_2, b_3) = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}$$

Съгласно определението

$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}, \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}, \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}, \vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$
$$\vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k}, \vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath}, \vec{k} \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$$

следователно

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}\right) \times \left(b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}\right)$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{\imath} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{\jmath} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

откъдето получаваме формулата

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

Пример. За векторно произведение на векторите $\vec{a}(1,-2,3)$ и $\vec{b}(2,3,1)$ имаме

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}\vec{i}+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=11\cdot\vec{i}+5\cdot\vec{j}+7\cdot\vec{k}$$

Лице на триъгълник

Нека е даден пространственият триъгълник $\Delta M_1M_2M_3$ с върхове точките $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$. Тогава неговото лице е половината от лицето на успоредника, определен от двата вектора

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

следователно

$$S_{\Delta M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}\right\|$$

откъдето за търсеното лице намираме

$$S_{\Delta M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & z_1 - z_2 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}$$

Да разгледаме сега равнинния триъгълник $\Delta M_1M_2M_3$ с върхове точките $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$, зададени чрез своите координати в декартовата координатна система O_{xy} с ортонормиран базис $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Тази равнина можем да разглеждаме като координатна равнина O_{xy} в пространствената декартова координатна система O_{xyz} с ортонормиран базис $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, при което върховете на триъгълника ще имат координати $M_1(x_1, y_1, 0)$, $M_2(x_2, y_2, 0)$ и $M_3(x_3, y_3, 0)$. Сега за лицето на триъгълника получаваме формулата

$$S_{\Delta M_1 M_2 M_3} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right|$$

Смесено произведение

Смесено произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ на трите пространствени вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се нарича числото

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$$

Да разгледаме векторите

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3), \vec{c}(c_1, c_2, c_3)$$

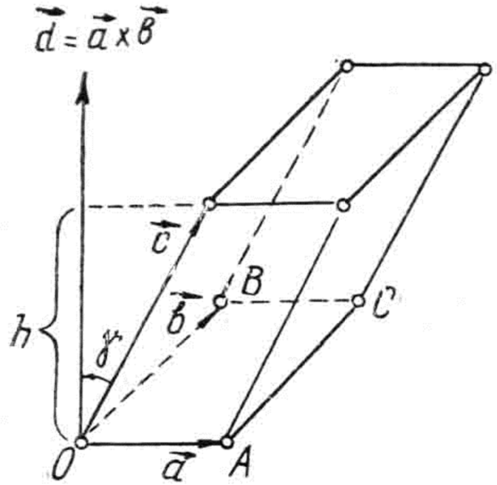
Съгласно правилата за намираме на скаларно и векторно произведение намираме

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Твърдение. Стойността на смесеното произведение $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ е нула тогава и само тогава, когато векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни (линейно зависими).

Геометрична интерпретация на смесено произведение

Да приложим $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в една точка O, както е показано на фигура 14



Фигура 14.

Тогава за обема на паралелепипеда, зададен от тези вектори е в сила формулата

$$V = \left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|$$

Обем на тетраедър

Да разгледаме тетраедъра с върхове

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3), M_4(x_4, y_4, z_4)$$

Неговият обем е една шеста част от обема на съответния паралелепипед, построен върху векторите

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$
$$\vec{c} = \overrightarrow{M_1M_4} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$$

Сега от формулата за обем на паралелепипед намираме

$$V_{M_1M_2M_3M_4} = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{matrix}\right\|$$