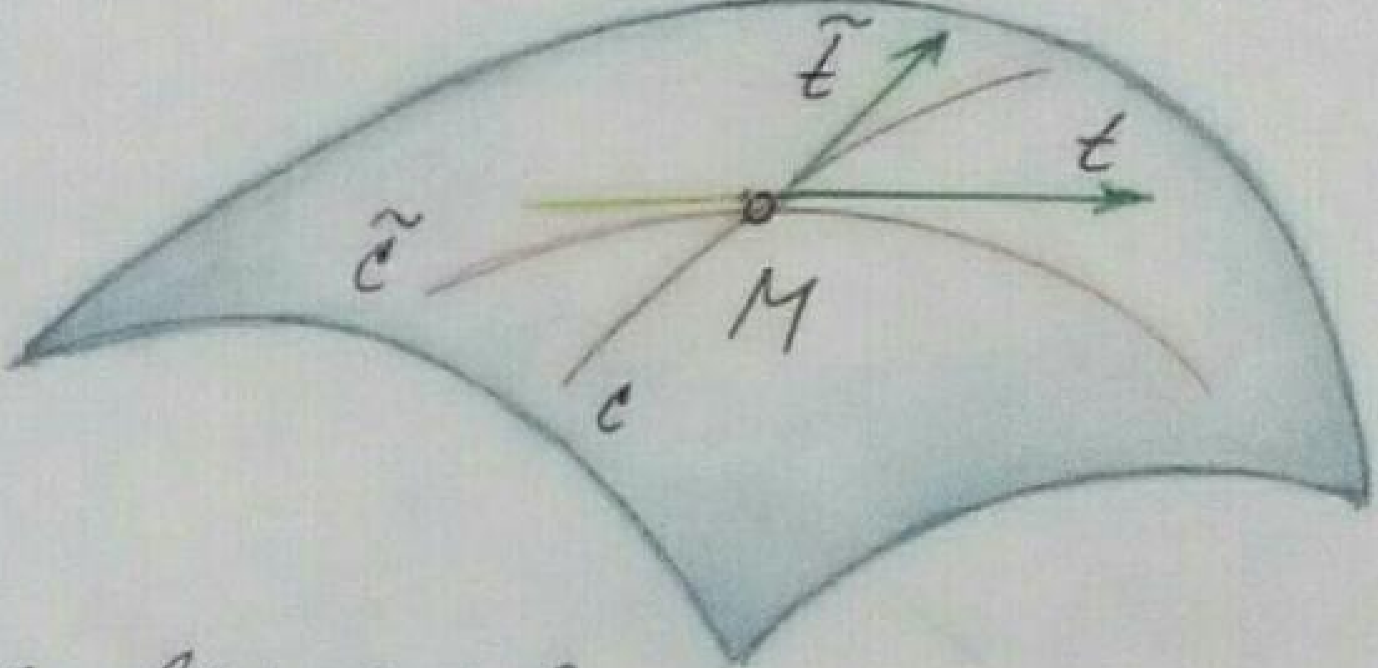
1

Направления в повърхнини и ъглите между тях

Нека $\mathcal{F}$ е гладка повърхнина $\mathcal{F} : r = r(u, v)$



За линейния елемент имаме

$$ds = \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}\,, \quad (1)$$

като E, F, G имат една и съща стойност за фиксирана точка M независимо по коя линия т. M' клони към M по $\mathcal{F}$.

Да фиксираме крива c през т. M. Тогава u и v стават функции на един параметър и в т. M отношението $\frac{du}{dv}$ е напълно определена величина. Тази величина характеризира посоката на кривата c в т. M, с други думи - посоката на допирателната към c в т. M. За всички линии в т. M от $\mathcal{F}$ по това направление $\frac{du}{dv}$ има една и съща стойност.

Обратно, ако за две линии от $\mathcal{F}$ през M отношението $\frac{du}{dv}$ има една и съща стойност, то тези линии имат едно и също направление, т.е. обща допирателна.

Имаме, че направлението на c в т. M се определя от $t = \frac{dr}{ds}$. От (1) =>

$$t = \frac{r_u du + r_v dv}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}} \quad (1a)$$

Тъй като векторите r_u, r_v - допирателните в т. M към параметричните линии са точно определени, то направлението на зависи изцяло от отношението $\frac{du}{dv}$

Нека в M са зададени две различни направления и диференциалите им са означени съответно с du, dv и $\delta u, \delta v$. =>

$$t_1 = \frac{r_u \delta u + r_v \delta v}{\sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}} \quad (1б)$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{(r_u du + r_v dv)(r_u \delta u + r_v \delta v)}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}\sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}} =$$

$$\cos\varphi = \frac{E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}\sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}} \quad (2)$$

$(\varphi = \sphericalangle t, t_1)$

Положителната посока на u-линиите получаваме за $du=1$, $dv=0$, а за положителната посока на v-линиите – при $\delta u=0$, $\delta v=1$. $\overset{(2)}{\Rightarrow}$

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

За перпендикулярност на две направления имаме условието

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0$$

или

$$(E\,du + F\,dv)\delta u + (F\,du + G\,dv)\delta v = 0 \quad (3)$$

Пример 1. Линейният елемент на равнина, отнесена спрямо декартова координатна система с координатен ъгъл ω има вида

$$ds^2 = dx^2 + 2\cos\omega\, dx\,dy + dy^2$$

Тук

$$E = G = 1;\ F = \cos\omega.$$

За ъгъл φ между $\frac{dx}{dy}$ и $\frac{\delta x}{\delta y}$ имаме

$$\cos\varphi = \frac{dx\,\delta x + \cos\omega(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + dy\,\delta y}{\sqrt{dx^2 + 2\cos\omega\,dx\,dy + dy^2}\sqrt{\delta x^2 + 2\cos\omega\,\delta x\,\delta y + \delta y^2}} \quad (4)$$

Условието за перпендикулярност е

$$dx\,\delta x + \cos\omega(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + dy\,\delta y = 0$$

В частност за правоъгълна к. с-ма ($\omega = 90$)
имаме
$$dx\,\delta x + dy\,\delta y = 0$$
Ако k и k_1 са ъгловите коефициенти на допирателните към две равнинни линии през т. M, то
$$k = \frac{dy}{dx}, \quad k_1 = \frac{\delta y}{\delta x},$$
условието за перпендикулярност приема вида
$$k k_1 + \cos\omega (k + k_1) + 1 = 0$$
а (4) става
$$\cos\varphi = \frac{k k_1 + \cos\omega (k + k_1) + 1}{\sqrt{k^2 + 2\cos\omega . k + 1}\ \sqrt{k_1^2 + 2\cos\omega\, k_1 + 1}}.$$

За равнина и трите коефициента на първата основна форма са постоянни. Ето защо горните формули са верни и в случая, когато заменим диференциалите с крайни нараствания или, което е същото, с коефициентите на направленията на съответните прави. Като резултат ще получим известните основни формули от аналитичната геометрия

Пример 2. Да се намерят ортогоналните траектории на праволинейните образуващи на допирателен рой прави.

Аналитично допирателен рой се задава с

$r = r(u, v)$ $\qquad r = r(v) + ut(v)$,

u, v - същите като при извеждането, v - естествен за линията, t - единичният вектор по допирателна.

$\Rightarrow$

$$dr = \left(t + u\frac{dt}{dv}\right)dv + t\,du$$

От формулите на Френе

$$dr = (t + u\varkappa n)dv + t\,du.$$

$$\Rightarrow ds^2 = dr^2 = (t + u\varkappa n)^2 dv^2 + 2t(t + \varkappa n)du\,dv + du^2$$

$$ds^2 = (1 + u^2\varkappa^2)dv^2 + 2du\,dv + du^2,$$

т.е.

$$E = 1, \; F = 1, \; G = 1 + u^2\varkappa^2, \; W = |u|\varkappa$$

$(\varkappa = \varkappa(v))$

забележка: $\Rightarrow E = 1$ - както при ротационна - за параметър u е приета дължината на дъгата на u-линиите!

От условието за ортогоналност на две направления за допирателния рой имаме

$$(du + dv)\delta u + [du + (1 + (u^2\varkappa^2)dv]\delta v = 0 \quad (5)$$

Направлението на образуващите задаваме като положим $\delta u = 1$, $\delta v = 0$.

Тогава (5) добива вида

$$du + dv = 0 \qquad (6)$$

По ортогоналната траектория на образуващите, т.е. по линията, пресичаща всички образуващи под прав ъгъл, координатите u, v са функции на един параметър. Диференциалите им са свързани с (.6). Следователно самите координати u, v са свързани с

$$u + v = \lambda_0 , \qquad (7)$$

където λ_0 е постоянна величина. Като меним стойността на λ_0 ще получаваме различни ортогонални траектории на образуващите

Уравнението (7) изразява следния геометричен факт: дължината на отсечка от праволинейна образуваща от допирната точка до ортогоналната траектория намалява точно с толкова, с колкото нараства дъгата на съответна линия. С други думи, ортогоналната траектория на допирателните на линия **c** е еволвентата на тази линия.

Scanned by TapScanner

Пример 3 Локсодрома - линията, пресичаща мередианите на сфера под постоянен ъгъл - в корабоплаването корабите се движат по локсодроми за да държат един и същ курс.

Връзката между ширината и дължината на локсодрома може да се намери с помощта на първата основна форма на сфера с радиус a

$$E=a^2,\ F=0,\ G=a^2\cos u$$

=> за ъгъла φ между две направления имаме

$$\cos\varphi=\frac{du\,\delta u+\cos^2 u\,dv\,\delta v}{\sqrt{du^2+\cos^2 u\,dv^2}\sqrt{\delta u^2+\cos^2 u\,\delta v^2}}.$$

Направлението на мередиана се задава с $\delta u=1$, $\delta v=0$. За направлението на локсодрома $\frac{du}{dv}$ имаме

$$\cos\varphi=\frac{du}{\sqrt{du^2+\cos^2 u\,dv^2}},$$

където φ е постоянна величина. Разделяйки променливите получаваме

$$\frac{du}{\cos u}=\pm dv\,\mathrm{ctg}\,\varphi. \qquad (8)$$

Знаците „+" и „-" съответстват на двете възможни посоки на движение - на запад и на изток. През всяка точка от сферата минават две локсодроми - една дясна и една лява. Ако изберем знак „+"

ще получим уравнението на едно от двете семейства локсодроми 8

$$\ln \frac{tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u_0}{2}\right)} = v\, ctg\varphi,$$

където u_0 е ширината на първия меридиан.

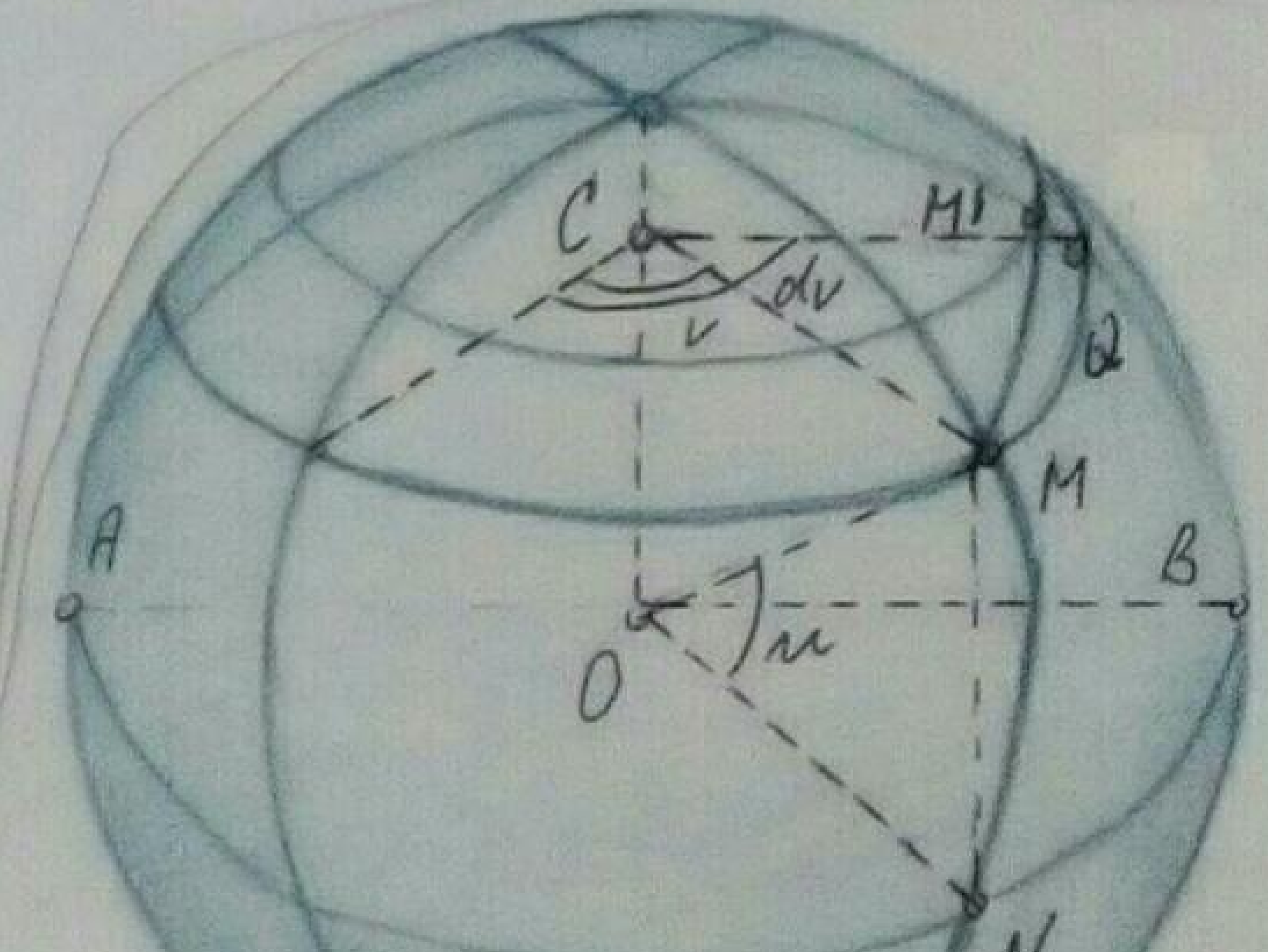
Иначе диференциалното уравнение (8) може лесно да се получи с геометрични съображения по следния начин.

В триъгълника MQM' полагаме

$M'Q \approx a\,du$; $MQ \approx a\cos u\, dv$, $\measuredangle MM'Q \approx \varphi$;

следователно

$$ctg\varphi \approx \frac{M'Q}{MQ} \approx \frac{du}{\cos u\, dv}.$$



Scanned by TapScanner