Глава 5

Трансформации на сл.в.

5.1 Теорема за смяна на променливите

Теорема 5.1 *Нека $U : A \longrightarrow B$ е взаимноеднозначно съответствие, $A, B \in R^n$ са отворени множества и $V = U^{-1}$. Нека функцията $V(x)$ притежава непрекъснати производни в B. Нека X е сл.в. със стойности в A с плътност $f_X(x)$ за $x \in A$.*

Тогава сл.в. $Y = U(X)$ има плътност $f_Y(y)$, която се задава по формулата:

$$f_Y(x) = |J(V)(x)| f_X(V(x)) \quad \text{за} \quad x \in B, \tag{5.1.1}$$

където с $J(V)(x)$ сме означили якобианът на трансформацията V, т.е. детерминантата на матрицата:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial V_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial V_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial V_n}{\partial x_1} & \frac{\partial V_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial V_n}{\partial x_n} \end{array} \right\}.$$

Тази теорема няма да я доказваме, т.к. е следствие от стандартните теореми на анализа за смяна на променливите под знака на интеграла.

5.2 Многомерно нормално разпределение

Плътността на стандартното нормално разпределение $N(0, I)$ в R^n има вида:

$$\varphi(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-x_i^2/2} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-||\vec{x}||^2/2},$$

където $\vec{x} \in R^n$.

Нека сл.в. $\xi \in N(0, I)$. Ще разгледаме линейната трансформация $\eta = A\xi + b$. Тук A е неизродена $n \times n$ матрица, а $b \in R^n$. Тъй като $U : y = Ax + b$ множествата $x \in A = R^n$ и $y \in B = R^n$.

Тогава плътността на η ще се изчисли по формула (5.1.1):

$$f_\eta(y) = |J(V)| f_\xi(V(y)) = \frac{|A^{-1}|}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}(y-b)'(AA')^{-1}(y-b)}.$$

Като означим матрицата $C = AA'$, получаваме стандартния вид на многомерното нормално разпределение $N(b, C)$ с параметри $\mathbf{E}\eta = b$ и $cov(\eta) = C$:

$$\varphi(y, b, C) = \frac{1}{|C|^{1/2}(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}(y-b)'C^{-1}(y-b)}. \tag{5.2.2}$$

Да проверим тези равенства за параметрите:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\eta &= A\mathbf{E}\xi + b = b, \\ cov(\eta) &= \mathbf{E}(\eta - b)(\eta - b)' = A(\mathbf{E}\xi\xi')A' = AA'. \end{aligned}$$

5.3 Конволюция на плътности

Ще приложим формулата (5.1.1) към следната задача:

Теорема 5.2 *Нека са дадени две независими сл.в. ξ и η с положителни плътности на разпределение. Тогава са изпълнени следните формули:*

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x-y) f_\eta(y) dy \tag{5.3.3}$$

$$\text{Ако} \quad \xi, \eta > 0, \text{то } f_{\xi\eta}(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{y} f_\xi(x/y) f_\eta(y) dy \tag{5.3.4}$$

$$\text{Ако} \quad \xi, \eta > 0, \text{то } f_{\xi/\eta}(x) = \int_{0}^{\infty} y f_\xi(xy) f_\eta(y) dy \tag{5.3.5}$$

Доказателство: Да докажем формула (5.3.3). Разглеждаме двумерната сл.в. (ξ, η). Тя има плътност $f(x, y) = f_\xi(y) f_\eta(y)$, т.к. двете сл.в. са независими.

Нека разгледаме сега трансформациите:

$$U = \begin{cases} u = & x + y, \\ v = & y \end{cases} \quad \text{и} \quad V = U^{-1} = \begin{cases} x = & u - v, \\ y = & v \end{cases}$$

Първо определяме множествата $(x, y) \in A = (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ и $(u, v) \in B = (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$.

Да приложим формула (5.1.1). Тъй като якобианът на V е равен на 1, получаваме за двумерната плътност на $U(\{\xi, \eta\})$ формулата:

$$f(u, v) = f_\xi(u - v) f_\eta(v).$$

За да получим плътността на първата сл.в. $\xi + \eta$, трябва да интегрираме по втората променлива v. Формули (5.3.4) и (5.3.5) се доказват аналогично. $\square$

5.4 Трансформация на променливи

Да напомним формулата (4.3.9) за смяна на променливи:

Нека X е случайна величина с плътност $f_X(x)$, а $Y = g(X)$, където g е строго монотонна и диференцируема функция. Плътността на Y тогава е

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|.$$

5.5 Приложение за намиране на моменти на сл. в.

5.5.1 Гама разпределение

Да напомним дефиницията на Гама функция:

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0. \tag{5.5.6}$$

Функцията зададена чрез (5.5.6) има следните свойства:

1. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$,
2. $\Gamma(n) = (n-1)!$,
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

От дефиниция (5.5.6) следва, че $f(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{\Gamma(\alpha)}, \quad 0 < t < \infty$ е плътност на разпределение на някаква сл. в. T (т.к. интегралът от нея е 1).

Нека да направим трансформацията $X = \beta T$, $T = \frac{X}{\beta}$, тогава, прилагайки (4.3.9), получаваме че:

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} |\frac{1}{\beta}| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}},$$

ще бъде плътността на Гама-разпределена сл. в. $\Gamma(\alpha, \beta)$ с параметри α за форма и β за мащаб.

Частни случаи Гама-разпределението са Хи-квадрат с p степени на свобода при $\alpha = p/2, \beta = 2$ и експоненциално при $\alpha = 1$.

Определяне на моментите:

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\beta}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\beta,$$

защото $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} dx = 1$ - плътност на $\Gamma(\alpha+1, \beta)$.

Аналогично

$$\mathbf{E}[X^2] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int\limits_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \frac{\Gamma(\alpha+2)\beta^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} = \alpha(\alpha+1)\beta,$$

откъдето

$\mathbf{D}X = \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - (\alpha\beta)^2 = \alpha\beta^2.$

Интересна е връзката между Гама разпределението и това на Поасон. Ако за дадено цяло α, $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ и $Y \sim Po(\frac{x}{\beta})$, то $P(X \le x) = P(Y \ge \alpha), \forall x$.

$$P(X \leq x) = \frac{1}{(\alpha-1)!\beta^{\alpha}} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}} dt = \frac{1}{(\alpha-1)!\beta^{\alpha}} (-\beta) \int_0^x t^{\alpha-1} de^{-\frac{t}{\beta}}$$

$$= \frac{1}{(\alpha-1)!\beta^{\alpha-1}} [-t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}}|_0^x + \int_0^x (\alpha-1) t^{\alpha-2} e^{-\frac{t}{\beta}} dt]$$

$$-\frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{(\alpha-1)!\beta^{\alpha-1}} + \frac{1}{(\alpha-2)!\beta^{\alpha-1}} \int_0^x t^{\alpha-2} e^{-\frac{t}{\beta}} dt = \frac{1}{(\alpha-2)!\beta^{\alpha-1}} \int_0^x t^{\alpha-2} e^{-\frac{t}{\beta}} dt - P(Y = \alpha - 1) = \ldots =$$

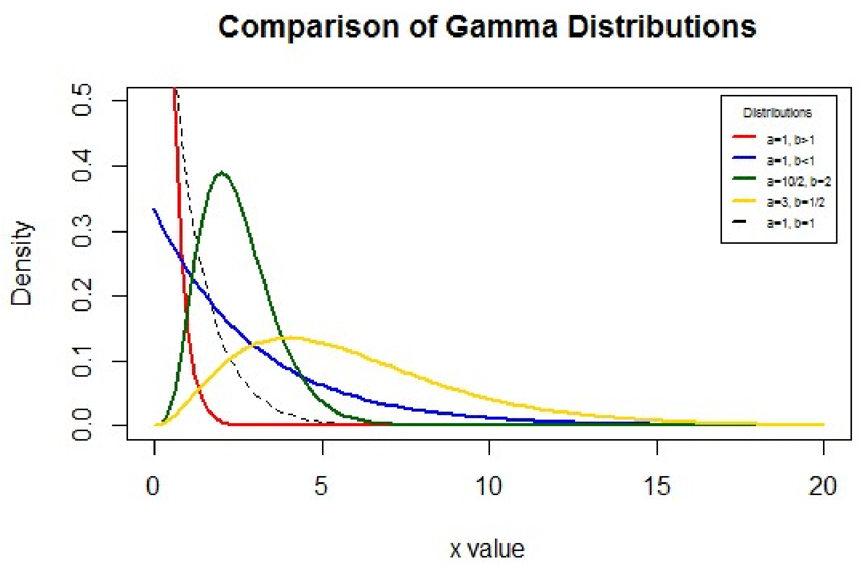
$$\frac{1}{0!\beta} \int_0^x t^0 e^{-\frac{t}{\beta}} dt - [p_{\alpha-1} + \ldots + p_1] = -\frac{\beta e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta}|_0^x - [p_{\alpha-1} + \ldots + p_1] = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}} - [p_{\alpha-1} + \ldots + p_1] =$$

$$1 - [p_{\alpha-1} + \ldots + p_1 + p_0] = P(Y \geq \alpha)$$

Това семейство е популярно в статистиката, защото е тясно свързано с нормалното. При стойности на α кратни на $1/2$ е известно като Хи-квадрат разпределение и описва разпределението на сума от квадрати на центрирани независими еднакво нормално разпределени сл.в.

Параметърът α, който определя формата му, има смисъла на степени на свобода - колкото по-голям е, толкова по-неопределени са стойностите на сл.в. Гама - разпределението има винаги положителна асиметрия, но тя клони към нула при нарастване на α.

Вторият параметър β е мащабен – той не оказва влияние на ексцеса и асиметрията. При $\alpha \to \infty$ центрираното и нормирано Гама-разпределение клони към нормалното.



Фигура 5.5.1. Сравнение на плътности на Гама-разпределение.

Тези ефекти са визуализирани на Фиг. 5.5.1.

5.5.2 Бета разпределение

Да напомним дефиницията на Бета функция $B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$, $B(\alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Тогава $f(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$, $0 < x < 1, \alpha, \beta > 0$, е плътност на Бета-разпределена сл.в. $X \sim B(\alpha, \beta)$.

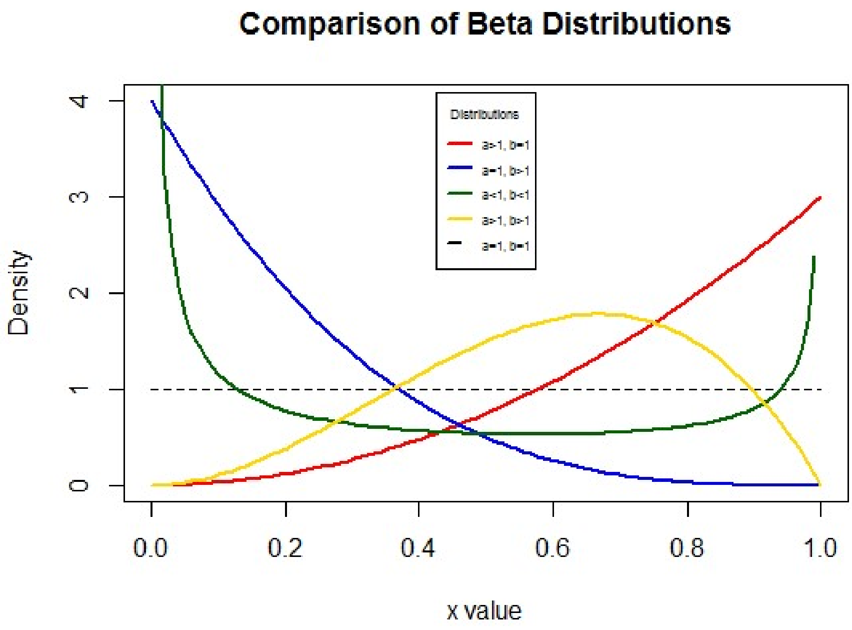
Определяне на моментите:

$$\mathbf{E}[X^n] = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int\limits_0^1 x^{(n+\alpha)-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{B(n+\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+n+\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\dots(\alpha+\beta+n-1)}$$

$n = 1: \quad \mathbf{E}X = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$,

$n = 2: \quad \mathbf{E}[X^2] = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$,

$$\mathbf{D}X = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$



Фигура 5.5.2. Сравнение на плътности на Бета-разпределение.

На Фиг. 5.5.2 са показани пет различни плътности от семейството на Бета-разпределенията. Вижда се, че те могат да имат различна по знак асиметрия. С нарастването на параметрите α и β, разпределението се изражда (дисперсията му клони към 0).

Ако скоростта на нарастване е еднаква и то е правилно нормирано, Бета разпределението също клони към нормалното.

Теорема 5.3 *Нека $\xi \in \Gamma(a, \lambda)$ и $\eta \in \Gamma(b, \lambda)$ са независими Гама - разпределени сл.в. Тогава*

1. *сл.в.* $\zeta = \xi + \eta \in \Gamma(a+b, \lambda)$*;*

2. *сл.в.* $\theta = \frac{\xi}{\xi+\eta} \in B(a,b)$*;*

3. *сл.в.* $\theta \perp\!\!\!\perp \zeta$*.*

Доказателство: Разпределението на двумерната сл.в. $\{\xi, \eta\}$ е

$$f(x,y) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \times \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} y^{b-1} e^{-\lambda y}, \quad 0 < x, y.$$

Да разгледаме трансформацията:

$$U = \begin{cases} u = & x+y, \\ v = & \frac{x}{x+y} \end{cases} \quad \text{и} \quad V = U^{-1} = \begin{cases} x = & uv, \\ y = & u*(1-v) \end{cases}$$

и приложим формула (5.1.1).

Първо определяме множествата $(x,y) \in A = (0,\infty) \times (0,\infty)$ и $(u,v) \in B = (0,\infty) \times (0,1)$.

Тъй като якобианът на V е равен на u, получаваме за двумерната плътност на $\{\zeta, \theta\}$ формулата:

$$f(u,v) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)} u^{a+b-1} e^{-\lambda u} \times \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} v^{a-1} (1-v)^{b-1},$$

откъдето следват всички твърдения на теоремата. $\square$