13.12. Конични сечения

I прав кръгов конус : S

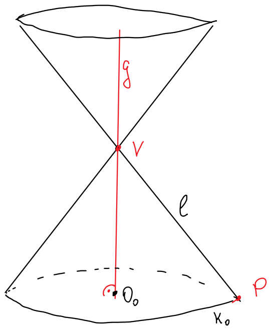
* $k_0(O_0; R_0)$ – управителна крива, окръжност

* $g \begin{cases} \ni т.O_0 \\ \boxed{\perp k_0} \end{cases}$ – ос на коничната повърхнина

* т. V – връх на S

* $\ell \begin{cases} \ni V \\ \ni P \text{– произволна от } k_0 \end{cases}$

↳ образувателна на S

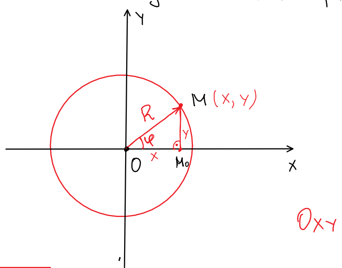


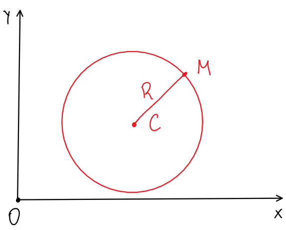
II Конични сечения : сечения на S с равнина $\alpha \not\ni V$

1) $\alpha_1 \perp g$

$S \cap \alpha_1 = k(O; R)$ – окръжност

Аналитично задаване на окръжност спрямо ОКС $K = Oxy$





$\boxed{k(O;R)}$ е ГМ на всички точки $M(x,y)$ от равнината, за които $\boxed{|OM| = R}$

$M \in k \iff |\vec{OM}| = R$

т. $O(0,0)$, т. $M(x,y) \Rightarrow \vec{OM}(x,y)$

$|\vec{OM}|^2 = x^2 + y^2 = R^2$

$M \in k(O;R) \iff x^2 + y^2 = R^2$

централно уравнение на окръжност

$k(C;R)$ т. $C(p,q)$

$M(x,y) \in k \iff |\vec{CM}| = R$

$\vec{CM}(x-p, y-q)$

$\boxed{(x-p)^2 + (y-q)^2 = R^2}$

параметрични уравнения на $k(O;R)$

$\measuredangle\varphi = \measuredangle(Ox^+; \vec{OM})$

От $\triangle OMM_0$ – правоъгълен

$\boxed{\begin{cases} x = R.\cos\varphi \\ y = R.\sin\varphi \end{cases}}$, $R = const.$, $R > 0$

$\varphi \in [0; 2\pi)$

$x = x(\varphi)$

$y = y(\varphi)$

Ако $R \neq const.$, $R \in [0; 5]$

$\varphi \in [0; 2\pi)$

$\begin{cases} x(R,\varphi) = R.\cos\varphi \\ y(R,\varphi) = R.\sin\varphi \end{cases}$ → кръг с ц-р т. O и радиус 5

Параметрични уравнения

$k: \begin{cases} x = p + R.\cos\varphi \\ y = q + R.\sin\varphi \end{cases}$

$\varphi \in [0; 2\pi)$

---

2) $\alpha_2 \cancel{\perp} g$, α_2 пресича всички образувателни на S

$S \cap \alpha_2 = \mathcal{E}$

$M(x,y)$ (декартови) $\in \mathcal{E} \iff \boxed{\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ Oxy

метрично канонично уравнение на елипса

Параметрични уравнения на $\mathcal{E}$:

$\mathcal{E}: \begin{cases} x = a.\cos\varphi \\ y = b.\sin\varphi \end{cases}$ $a > 0$, $b > 0$ const.

$\varphi \in [0; 2\pi)$

Параметрични уравнения на $\mathcal{E}$:

$$\boxed{\mathcal{E}: \begin{cases} x = a.\cos\varphi \\ y = b.\sin\varphi \end{cases}}$$ $a>0,\ b>0$ const. $\varphi \in [0; 2\pi)$

$\mathcal{E}$ с център т. $O(0,0)$

---

3) $\alpha_3 \parallel$ две от образувателните на S

$S \cap \alpha_3 = \chi$ (хип) – хипербола

$M(x,y) \in \chi \iff \boxed{\chi: x^2}$

метрично канонично уравн. на χ

Параметрични уравнения на χ

$ch\, q = \cosh q = \dfrac{e^q + e^{-q}}{2}$, $sh\, q = \sinh q = \dfrac{e^q - e^{-q}}{2}$

$e \approx 2{,}71$

$(ch\, q)' = sh\, q$, $(sh\, q)' = ch\, q$, $(ch\, q)^2 - (sh\, q)^2 = 1$ → хипербола

$(\cos q)^2 + (\sin q)^2 = 1$ → окръжност → елипса

$$\boxed{\chi: \begin{cases} x(q) = a.ch\, q \\ y(q) = b.sh\, q \end{cases}} \Rightarrow (ch\, q)^2 - (sh\, q)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

---

4) $\alpha_4 \parallel$ на една образувателна на S

$S \cap \alpha_4 = \pi$ – парабола

$\pi_1: y^2 = 2p.x$ $\quad \pi_2: x^2 = 2p.y$ $\quad Oxy$

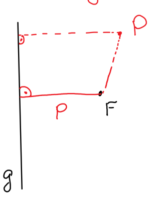
$$\pi_1: \begin{cases} x = \dfrac{q^2}{2p} \\ y = q \end{cases}, \quad p>0, \text{const}, \ q \in \mathbb{R}$$

III Конични сечения с фокус и директриса

т.F – фокус, g – директриса, $F \notin g$

$|\delta(F,g)| = p$

Търсим ГМ на всички т.P от равнината, за които:



$$\boxed{\frac{|PF|}{|\delta(P,g)|} = e = \text{const.}}$$
↓ ексцентрицитет

1сл. Ако $e < 1$, $e \in (0;1)$ => ГМТ е елипса $\mathcal{E}$,

2сл. Ако $e = 1$ => ГМ е парабола;

3сл. Ако $e > 1$ => ГМ е хипербола

IV Елипса ОКС $K = Oxy$

$\mathcal{E}: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$a>0,\ b>0$

1) Симетрии

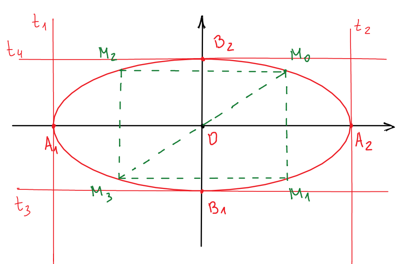
$M_0(x_0,y_0) \in \mathcal{E} \Rightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$

$M_1(x_0,-y_0) \in \mathcal{E}$, $M_0 \xrightarrow{S_{Ox}} M_1 \in \mathcal{E}$

$\mathcal{E}$ е симетрична отн. Ox

$M_2(-x_0,y_0) \in \mathcal{E}$, $M_0 \xrightarrow{S_{Oy}} M_2 \in \mathcal{E}$

$\mathcal{E}$ е симетрична отн. Oy



Ox и Oy са единствените оси на симетрия на $\mathcal{E}$, т.O е единствения център

$M_2(-x_0,y_0)\in\mathcal{E}$, $M_0 \xrightarrow{\sigma_{O_y}} M_2\in\mathcal{E}$

$\mathcal{E}$ е симетрична отн. O_y

$M_3(-x_0,-y_0)\in\mathcal{E}$, $M_0 \xrightarrow{\sigma_0} M_3$

$\mathcal{E}$ е симетрична отн. т. O

ос на симетрия на $\mathcal{E}$, т. O е единствения център на симетрия за $\mathcal{E}$.

---

2) Върхове и върхови допирателни : $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\mathcal{E}\cap O_y = ?$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ x=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $y^2=b^2$, $y_{1,2}=\pm b$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}\cap O_y=\{B_1,B_2\}$: $B_1(0,-b)$ връх $\quad B_2(0,b)$ връх

$t_1\begin{cases}\ni B_1(0,-b)\\ \parallel O_x\end{cases}$ $\Rightarrow$ $t_1: y=-b$ $\to$ върхова допирателна в т. B_1

$t_2\begin{cases}\ni B_2(0,b)\\ \parallel O_x\end{cases}$ $\Rightarrow$ $t_2: y=b$ $\to$ върх. доп. в т. B_2

$\mathcal{E}\cap O_x=?$ $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_{1,2}=\pm a$

$\mathcal{E}\cap O_x=\{A_1, A_2\}$ $\quad A_1(-a,0)\quad A_2(a,0)$

$t_3\begin{cases}\ni A_1\\ \parallel O_y\end{cases}$ $\Rightarrow$ $t_3: x=-a$

$t_4\begin{cases}\ni A_2\\ \parallel O_y\end{cases}$ $\Rightarrow$ $t_4: x=a$

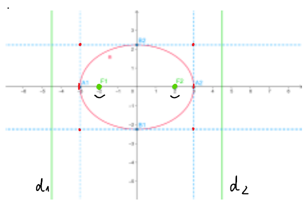
---

3) Интервали за координатите x и y на точка $M\in\mathcal{E}$ $\Rightarrow$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\quad /.b^2$

$y^2=\frac{b^2}{a^2}\cdot(a^2-x^2)$ $\Rightarrow$ $y_{1,2}=\pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$



$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

$a^2-x^2\geq 0$

$x^2-a^2\leq 0$ $\Rightarrow$ $(x-a)(x+a)\leq 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{x\in[-a;a]}$

$x_{1,2}=\pm\frac{a}{b}\cdot\sqrt{b^2-y^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{y\in[-b;b]}$

Голяма и малка ос на $\mathcal{E}$

1сл. $a>b$

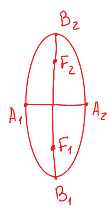
$A_1A_2=2a$ – голяма ос на $\mathcal{E}$

$B_1B_2=2b$ – малка ос на $\mathcal{E}$

2сл. $a<b$

$A_1A_2=2a$ – малка ос

$B_1B_2=2b$ – голяма ос



Фокусите F_1 и F_2 на $\mathcal{E}$ лежат на голямата ос.

---

4) Фокуси и директриси на $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

1сл. $a>b$

$F_1,F_2\in A_1A_1\subset O_x$

$c^2=a^2-b^2$, $c>0$

$F_1(-c,0)$ $d_1: x=-\frac{a^2}{c}$	$F_2(c,0)$ $d_2: x=\frac{a^2}{c}$

2сл. $a<b$

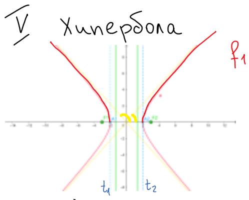
$F_1, F_2\in B_1B_1\subset O_y$

$c^2=b^2-a^2$, $c>0$

$F_1(0,-c)$ $d_1: y=-\frac{b^2}{c}$	$F_2(0,c)$ $d_2: y=\frac{b^2}{c}$

$F_1(-c,0)$ $d_1: x=-\frac{a^2}{c}$	$F_2(c,0)$ $d_2: x=\frac{a^2}{c}$	$F_1(0,-c)$ $d_1: y=-\frac{b^2}{c}$	$F_2(0,c)$ $d_2: y=\frac{b^2}{c}$

V Хипербола



$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

$\chi: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

1) Симетрии: O_x, O_y, т. O

2) Върхове и върхови допирателни

1сл. $\chi_1: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\chi_1 \cap O_x=\{A_1, A_2\}$

$A_1(-a,0) \Rightarrow t_1: x=-a$

$A_2(a,0) \Rightarrow t_2: x=a$

$\boxed{O_x \text{ е реална ос на } \chi_1}$

O_y е имагинерна ос на χ_1

$\chi_1 \cap O_y=\emptyset$

2сл. $\chi_2: \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$

$\chi_2 \cap O_x=\emptyset \Rightarrow O_x$ е имагинерна ос

$\chi_2 \cap O_y=\{B_1, B_2\}$

$B_1(0,-b) \Rightarrow t_3: y=-b$

$B_2(0,b) \Rightarrow t_4: y=b$

$\boxed{O_y \text{ е реалната ос на } \chi_2}$

Фокусите F_1 и F_2 на χ лежат на нейната реална ос.

3) Фокуси и директриси на χ

1сл. $\chi_1: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$c^2=a^2+b^2$

$F_1, F_2 \in O_x$

$F_1(-c,0)$ $\quad$ $F_2(c,0)$

$d_1: x=-\frac{a^2}{c}$ $\quad$ $d_2: x=\frac{a^2}{c}$

2сл. $\chi_2: \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$

$c^2=a^2+b^2$

$F_2, F_1 \in O_y$

$F_1(0,-c)$ $\quad$ $F_2(0,c)$

$d_1: y=-\frac{b^2}{c}$ $\quad$ $d_2: y=\frac{b^2}{c}$

4) Интервали за x и y на $M \in \chi: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
(Упр.)

5) Асимптоти на χ

χ има 2 наклонени асимптоти

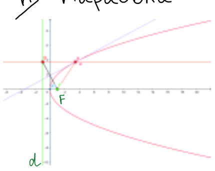
$g: y=k.x+n$ е наклонена асимптота

$\chi_1: \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1 \Rightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}\cdot(x^2-a^2)$

$y_{1,2}=f_{1,2}(x)=\pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{x^2-a^2} \quad x\in(-\infty,-a]\cup[a;+\infty)$

$$\left.\begin{aligned} k&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x}=\ldots=+\frac{b}{a} \\ n&=\lim_{x\to\pm\infty}(f_1(x)-k.x)=\ldots=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} g_1&: y=\frac{b}{a}\cdot x \\ g_2&: y=-\frac{b}{a}\cdot x \end{aligned}$$

VI Парабола



$\Pi_1: y^2=2.p.x$

$p=d(F,d)$

O_x – ос на симетрия

т. O – връх на Π_1

O_y – върхова допирателна

$F(\frac{p}{2}, 0)$, $d: x=-\frac{p}{2}$

$\Pi_2: x^2=2p.y$

Ос на симетрия

Връх

Върхова допирателна

$F(\quad), \ d:$

Консултация

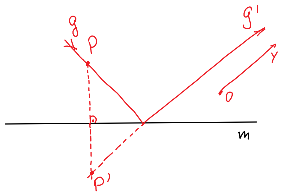
1) $A\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 1.2 Не $\qquad A_1(3,-3) \neq A\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$\vec{a}\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 1.2 Да $\qquad \vec{a}_1(3,-3) \uparrow\uparrow \vec{a}$

2)

7 зад. Спрямо ОКС K = Oxy са дадени точките $P(-5, 4)$ и $S(-3, -1)$,
и правата m: $x + y - 3 = 0$.
а) Светлинен лъч минава през точката P и след отразяването си от правата m става успореден на ординатната ос. Намерете уравненията на правите g и g', съдържащи падащия и отразения лъчи;
б) Намерете координатите на върховете на триъгълник ABC, за който точката S е център на описаната окръжност, а падащият и отразения лъчи съдържат две от страните му.

Screen clipping taken: 16.12.2021 г. 15:13



$g' \parallel O_y \Rightarrow g': x = const.$

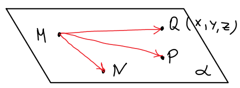
$P \xrightarrow{\sigma_m} P' \Rightarrow g' \ni P'(-1, 8) \Rightarrow g': x = -1$

3)

1 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през точките M, N и P, ако:

α: $M(-1, 0, 1), N(0, -1, 1), P(2, 3, 3)$.

Screen clipping taken: 16.12.2021 г. 15:19



$Q(x, y, z)$ - произволна от α

I $\quad M, N, P, Q$ - компланарни $\Leftrightarrow$

$$\alpha: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

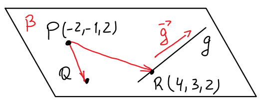
II

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{MQ}(x+1,\ y,\ z-1) \\ \overrightarrow{MN}(+1,\ -1,\ 0) \\ \overrightarrow{MP}(3,\ 3,\ 2) \end{array}\right\} \text{компланарни} \qquad \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

4) 2 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през точката P и правата g, ако:

$$P(-2, -1, 2), \quad g\begin{cases} x = 4 + s \\ y = 3 + s, s \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + s \end{cases}$$

Screen clipping taken:
16.12.2021 г. 15:25



$Q(x, y, z)$

$\beta \ni P(-2,-1,2)$

$\beta \ni R(4,3,2)$ за $s=0$

$\beta \parallel \vec{g}(1,1,1)$

I н. $\quad \overrightarrow{PQ}(x+2,\ y+\cancel{2}1,\ z-2) \parallel \beta$

$\overrightarrow{PR}(6,\ 4,\ 0) \parallel \beta$ $(3,2,0)$

$\vec{g}(1,\ 1,\ 1) \parallel \beta$

$$\beta: \begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z-2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$2.(x+2) + 3.(z-2) - 2.(z-2) - 3.(y+1) = 2x+4+z-2-3y-3 = 0$

$\beta: 2x - 3y + z - 1 = 0$

$\overrightarrow{PR} \parallel \beta \quad 2.6 - 3.4 + 1.0 = 0$ Да!

$\vec{g} \parallel \beta \quad 2.1 - 3.1 + 1.1 = 0$ Да!

$P \ni \beta \quad 2.(-2) - 3.(-1) + 2 - 1 = 0$ Да

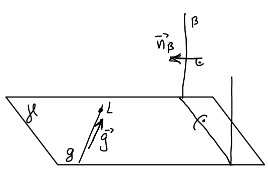
$P(-2,-1,2)$

5)

5 зад. Да се намери общо уравнение на равнина, която минава през правата g и е перпендикулярна на равнината β, ако:

$$g\begin{cases} x = 4 + 1s \\ y = 3 + 1s, s \in \mathbb{R}, \\ z = 2 + 1s \end{cases} \quad \beta: 1x + 1y - 2z + 2 = 0.$$

Screen clipping taken: 16.12.2021 г. 15:37



$\gamma \parallel \vec{n}_\beta(1, 1, -2)$

$\gamma \parallel \vec{g}(1, 1, 1)$

$\gamma \ni L(4, 3, 2) \quad s=0$

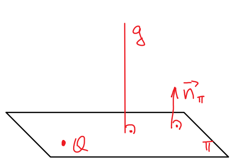
$Q(x, y, z)$ - произволна $\Big\}\ \overrightarrow{QL}(x-4, y-3, z-2)$

$$\gamma: \begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z-2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

---

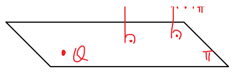
6) $g\begin{cases} x = 1 + 1.p \\ y = 2 - 2p \\ z = 1 + 3p \end{cases}$, т. $Q(2, 3, 4) \notin g$

Да се намери равнина $\pi \begin{cases} \ni Q \\ \perp g \end{cases}$



$\pi \perp g \Rightarrow \vec{n}_\pi \parallel g \Rightarrow \vec{n}_\pi(1, -2, 3)$

Да се намери равнина $\pi \begin{cases} \ni Q \\ \perp g \end{cases}$



$\pi \perp g \Rightarrow \vec{n}_\pi \parallel g \Rightarrow \vec{n}_\pi(\underset{A}{1}, -\underset{B}{2}, \underset{C}{3})$

$\pi: A.x + B.y + C.z + D = 0$

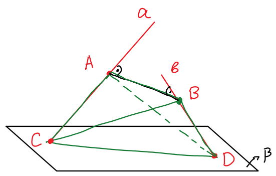
$\pi: 1.x - 2.y + 3.z + D = 0$

$Q(2,3,4) \Rightarrow 2 - 6 + 12 + D = 0 \qquad D = -8$

7)

11 зад. Дадени са кръстосаните прави: $a\begin{cases} x = 1 + 1s \\ y = 0 + 1s \\ z = 0 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$, $b\begin{cases} x = 0 - 1p \\ y = 1 - 1p \\ z = 2 + 2p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$ и равнината $\beta: x + y - 1 = 0$. Нека точките $A \in a$ и $B \in b$ са краищата на оста-отсечка на правите a и b, а точките C и D са прободните точки съответно на правите a и b с равнината β. Да се намери обемът на тетраедъра $ABCD$.

Screen clipping taken: 16.12.2021 г. 15:49



$V_{ABCD} = \frac{1}{6} . |(\vec{AB}\ \vec{AC}\ \vec{AD})|$

смесено произведение