ЛЕКЦИЯ 2

Геометрия на движението

Съдържание

1. Вектор ъглова скорост.

- Векторна функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ на скаларен аргумент t.

- представяне

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}\,,$$

  $\mathbf{i}\,,\ \mathbf{j}\,,\ \mathbf{k}$ - единични вектори по координатните оси на Декартова система

- общ случай: $\mathbf{e_1}\,,\ \mathbf{e}_2\,,\ \mathbf{e_3}$ - единични вектори по координатните оси на дясно ориентирана координатна система, които са функции на времето, т.е. могат да изменят направлението си с времето.

- производна на векторна функция

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e_1} + x(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + \dot{y}(t)\mathbf{e_2} + y(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + \dot{z}(t)\mathbf{e_3} + z(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$$

Или записано по друг начин - производните на единичните вектори са отзад.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e_1} + \dot{y}(t)\mathbf{e_2} + \dot{z}(t)\mathbf{e_3} + x(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + y(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + z(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$$

- при постоянна големина векторът и производната му са перпендикулярни (от дефиницията за производна на вектор следва, че ако и посоката му е постоянна, то производната му е нула)

$$\mathbf{e_1} \perp \frac{d\mathbf{e_1}}{dt} \quad \text{или} \quad \mathbf{e_1} \perp \dot{\mathbf{e}}_1,$$

т.е. $\dot{\mathbf{e}}_1$ лежи в равнина, успоредна на определената от другите два единични вектора, като той се изразява чрез тях с някакви коефициенти.

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = a'\mathbf{e_2} + a''\mathbf{e_3}$$

Аналогично за производните на останалите два вектора може да се напише

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = b'\mathbf{e}_3 + b''\mathbf{e}_1 \quad , \quad \dot{\mathbf{e}}_3 = c'\mathbf{e}_1 + c''\mathbf{e}_2$$

- определяне на константите (коефициентите в разложението) – след съответните скаларни произведения с единични вектори. Например след умножаване на двете страни на $\dot{\mathbf{e}}_1 = a'\mathbf{e_2} + a''\mathbf{e_3}$ скаларно с $\mathbf{e_2}$ се определя a'; след умножаване на двете страни на $\dot{\mathbf{e}}_1 = a'\mathbf{e_2} + a''\mathbf{e_3}$ скаларно с $\mathbf{e}_3$ се определя a'' и т.н. Окончателно всички коефициенти в разложенията (координати на разлаганите вектори) се определят като

$$\begin{array}{llll}
a' = \dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2, & a'' = \dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3 & \Rightarrow & \dot{\mathbf{e}}_1 = \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2 + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3 \\
b' = \dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3, & b'' = \dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1 & \Rightarrow & \dot{\mathbf{e}}_2 = \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3 + \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1 \\
c' = \dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1, & c'' = \dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2 & \Rightarrow & \dot{\mathbf{e}}_3 = \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1 + \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2
\end{array}$$

- ***ще се покаже,че съществува единствен вектор***

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e_1} + \omega_2\mathbf{e_2} + \omega_3\mathbf{e_3}$$

за който са в сила равенствата

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e_1} = \dot{\mathbf{e}}_1, \qquad \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{e}}_2, \qquad \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_3 = \dot{\mathbf{e}}_3$$

Доказателство:

За всеки десен ортонормиран базис са в сила тъждествата:

$$\mathbf{e_1}\times\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3,\quad \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1\qquad \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2$$

От една страна скаларното произведение на различни вектори от такъв базис е нула, а от друга след диференцирането му като произведение се получава (за пълнота по-долу са дадени и трите тъждества):

$$0=\frac{d}{dt}\mathbf{e_1}\mathbf{e_2}=\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1}\mathbf{e_2}+\mathbf{e_1}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{2}\quad\Rightarrow\quad \dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1}\mathbf{e_2}=-\mathbf{e_1}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{2}=-\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1$$

$$0=\frac{d}{dt}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3=\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_2\dot{\mathbf{e}}_3\quad\Rightarrow\quad \dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_2\dot{\mathbf{e}}_3=-\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2$$

$$0=\frac{d}{dt}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1=\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3\dot{\mathbf{e}}_1\quad\Rightarrow\quad \dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1=-\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3$$

Или след векторно умножавене на двете страни на
$\boldsymbol{\omega}=\omega_1\mathbf{e_1}+\omega_2\mathbf{e_2}+\omega_3\mathbf{e_3}$ отдясно с първия единичен вектор и използване на първата група тъждества се получава:

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e_1}=\omega_1\mathbf{e_1}\times\mathbf{e_1}+\omega_2\mathbf{e_2}\times\mathbf{e_1}+\omega_3\mathbf{e_3}\times\mathbf{e_1}=\omega_2(-\mathbf{e}_3)+\omega_3\mathbf{e}_2$$

Но $\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1}=\langle\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1}\mathbf{e_2}\rangle\mathbf{e_2}+\langle\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1}\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e_3}$ и ако $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e_1}=\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1}$ е вярно, то сравнението на съответните коефциенти пред единичните вектори в двете представяния води до

$$\omega_2=-\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3,\qquad \omega_3=\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2$$

Аналогично

$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_2=\omega_1\mathbf{e_1}\times\mathbf{e}_2+\omega_2\mathbf{e_2}\times\mathbf{e}_2+\omega_3\mathbf{e_3}\times\mathbf{e}_2=\omega_1\mathbf{e}_3+\omega_3(-\mathbf{e}_1)$ и сред сравнение с $\dot{\mathbf{e}}_2=\langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3+\langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1$ води до

$$\omega_1=\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3,\qquad \omega_3=-\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1$$

По същия начин се получава и

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_3=\omega_1\mathbf{e_1}\times\mathbf{e}_3+\omega_2\mathbf{e_2}\times\mathbf{e}_3+\omega_3\mathbf{e_3}\times\mathbf{e}_3=\omega_1(-\mathbf{e}_2)+\omega_2\mathbf{e}_1$$

но

$$\dot{\mathbf{e}}_3=\langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1+\langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2$$

Или $\omega_1 = -\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2$, $\omega_2 = \dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1$

На пръв поглед коефициентите пред единичните вектори в разложението $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$ се изразяват по различен начин, например $\omega_1 = \dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3$ и $\omega_1 = -\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2$, но това не е противоречие като се отчете тъждеството $\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3 = -\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2$; това е в сила и за останалите коефициенти.

Окончателно

$$\boldsymbol{\omega} = \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_1 + \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_2 + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_3$$

Проверка на $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_1 = \dot{\mathbf{e}}_1$:

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_1 = \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1 + \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1 + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 =$$

$$= \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle(-\mathbf{e}_3) + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2 = \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2 + \langle-\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_3 = \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2 + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3$$

Но в началото бе получено, че $\dot{\mathbf{e}}_1 = \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2 + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3$

или $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_1 = \dot{\mathbf{e}}_1$

Аналогично

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_2 = \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 + \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2 + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2 =$$

$$= \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3 + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle(-\mathbf{e}_1) = \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3 + \langle-\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_1 = \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3 + \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3 + \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1$$

или $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{e}}_2$;

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_3 = \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3 + \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3 =$$

$$= \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle(-\mathbf{e}_2) + \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1 = \langle-\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_2 + \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1 = \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2 + \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1$$

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1 + \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2$$

или $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_3 = \dot{\mathbf{e}}_3$

Нататък след елиминиране на производните на единичните вектори в израза за производната на даден вектор се стига до:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e_1} + \dot{y}(t)\mathbf{e_2} + \dot{z}(t)\mathbf{e_3} + x(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + y(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + z(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e_1} + \dot{y}(t)\mathbf{e_2} + \dot{z}(t)\mathbf{e_3} + x(t)\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e_1} + y(t)\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e_2} + z(t)\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e_3}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e_1} + \dot{y}(t)\mathbf{e_2} + \dot{z}(t)\mathbf{e_3} + \boldsymbol{\omega}\times(x(t)\mathbf{e_1} + y(t)\mathbf{e_2} + z(t)\mathbf{e_3})$$

- **Окончателно се получава**

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\,\mathbf{,}$$

където <u>*по дефиниция*</u> $\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ се нарича ***абсолютна производна*** **,** а $\frac{d^*\mathbf{r}}{dt}$ **-**

- ***релативна (относителна) производна***

- частни случаи: при $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ имаме $\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \frac{d^*\mathbf{r}}{dt}$
- а при $\frac{d^*\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{0}$ се получава $\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$

- матрично представяне на векторно произведение

Нека са дадени векторите $\boldsymbol{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ и $\mathbf{r}(r_1, r_2, r_3)$ заедно с координатите им.
Тогава координатите на вектора $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ се дават с матрицата-стълб, получена в резултат на умножение на следните матрици:

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

2. **Разлагане на ускорението по осите на естествения триедър**.

- единични вектори по осите на естествения триедър

  Означения:

  s - криволинейна абциса по траекторията на точка

  s = s(t) естествен закон на движение на точката

  диференциал на дъга $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$

  Но за $d\mathbf{r}\,(dx, dy, dz)$ големината му е $|d\mathbf{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$

  Или $ds = |d\mathbf{r}|$

  Определение: $\boldsymbol{\tau}$ - *единичен вектор по тангентата към траекторията в точка*

  $$\boldsymbol{\tau} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

  Ако $\Delta\boldsymbol{\tau}(t) = \boldsymbol{\tau}_2(t) - \boldsymbol{\tau}_1(t)$ е за две различни положения на точката (разликата е след пренасяне на началото на втория вектор $\boldsymbol{\tau}_2(t)$ в началото на първия, т.е. по правилото на успоредника), то

  $|\Delta\boldsymbol{\tau}| = 2|\boldsymbol{\tau}|\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$, където α - ъгъл между векторите.

  Тогава

  $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta s} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{2\sin(\alpha/2)}{(\alpha/2)} \frac{(\alpha/2)}{\Delta s} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{\Delta s} = \kappa$ - кривина на крива, а

  $\rho = \frac{1}{\kappa}$ се нарича радиус на кривината.

  Или

  $$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \qquad \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| = \kappa.$$

  Определение:

$\left(\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)\left|\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|^{-1} = \mathbf{n}$ - единичен вектор по главната нормала. Тогава

$\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \kappa\left(\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)\left|\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|^{-1} = \kappa\,\mathbf{n}$ или $\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \kappa\,\mathbf{n}$ (***формула на Френе)***

- единичен вектор по бинормалата

$\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$

- разлагане на скоростта по осите на естествения триедър

$\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \boldsymbol{\tau}\,\dot{s} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}$ - *скоростта има компонент само по тангентата*

- разлагане на ускорението по осите на естествения триедър

От

$\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \boldsymbol{\tau}\,\dot{s} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}$. Отчитайки $v^2 = \dot{s}^2$, се получава

$$\mathbf{w} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\boldsymbol{\tau}) = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}\left(\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}\right) = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}^2\kappa\,\mathbf{n} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}^2\frac{1}{\rho}\mathbf{n}$$

Или $\mathbf{w} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \dfrac{v^2}{\rho}\mathbf{n}$

В последния израз коефициентите пред единичните вектори се дефинират като:

тангенциално ускорение - $w_\tau = \ddot{s}$

нормално ускорение - $w_n = \dfrac{v^2}{\rho}$

Както за всеки вектор, големината на пълното ускорение се дава с помощта на координатите му във вида

$$|w| = \sqrt{\ddot{s}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}$$

Примери:

1. Точка се движи по окръжност с радиус r и с постоянно тангенциално ускорение w_τ. Да се определи в кой момент нормалното ускорение ще стане равно на тангенциалното, а също и дължината на изминатата дъга до този момент.

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} \Rightarrow v_\tau = w_\tau t + C$$; при начални условия $t = 0, \quad v_\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$

Нормалното ускорение е равно на $w_n = \frac{v^2}{r} = \frac{w_\tau^2}{r} t^2$

В момент t_1 нормалното ускорение ще стане равно на тангенциалното:

$$\frac{w_\tau^2}{r} t_1^2 = w_\tau \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{r}{w_\tau}}$$

Но $\quad v_\tau = \frac{ds}{dt} = w_\tau t \quad \Rightarrow \quad s = w_\tau \frac{t^2}{2} + C_1 \qquad t = 0, \quad s = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$

Дължината на изминатата дъга е $\quad s_1 = w_\tau \frac{t_1^2}{2} = \frac{w_\tau}{2} \frac{r}{w_\tau} = \frac{r}{2}$

2. Точка се движи съгласно уравнението $s = ae^{kt}$, като ъгълът между пълното и тангенциалното ускорение неизменно остава 60 градуса. Да се определи скоростта, нормалното и пълното ускорение и радиусът на кривината на траекторията като функция на изминатата дъга.

$$v_\tau = \frac{ds}{dt} = ake^{kt} = ks, \qquad w_\tau = \dot{v}_\tau = ak^2 e^{kt} = k^2 s$$

По условие $\quad w\cos 60 = w_\tau \quad \Rightarrow \quad w = \frac{w_\tau}{\cos 60} = 2k^2 s$

Нормалното уксорение се намира чрез пълното и тангенциалното:

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \sqrt{3} k^2 s$$

За радиуса на кривината се получава: $\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{k^2 s^2}{\sqrt{3} k^2 s} = \frac{\sqrt{3}}{3} s = \frac{\sqrt{3}}{3} a e^{kt}$ и той расте неограничено. Траекторията на точката е разходяща спирала.

3. Радиус-векторът на движеща се точка има вида $\mathbf{r} = \cos(2t)\mathbf{e_1} - \sin(2t)\mathbf{e_2} + t\,\mathbf{e_3}$ в ортонормиран базис $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$. Да се определи векторът на скоростта на точката, когато базисът е неподвижен и също в случая, когато базисът се върти с постоянна ъглова скорост $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e_3}$. Да се намерят производната на големината на радиус-вектора и големината на производната на радиус-вектора и да се покаже, че те са различни.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \\ t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}\begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ -2\cos 2t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \omega = \omega\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\,; \quad \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix},$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ -2\cos 2t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ -2\cos 2t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ -\cos 2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

големина на вектора:

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{\cos^2 2t + \sin^2 2t + t^2} = \sqrt{1+t^2}$$

производна на големината на вектора:

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}| = \frac{d}{dt}\sqrt{1+t^2} = \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

големина на производната на вектора в случая на неподвижен базис:

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t + 1} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

големина на производната на вектора в случая на подвижен базис:

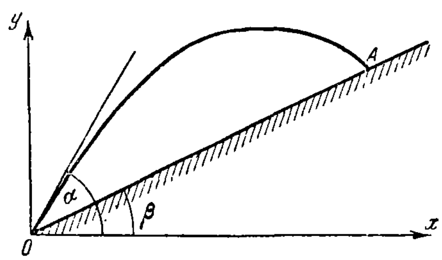
$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 2t + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

4. Точка е хвърлена вертикално нагоре. Уравнението на нейното движение при отсъствие на съпротивление има вид $x = v_0 t - gt^2/2$, където v_0 и g са постоянни коефициенти. Да се определи скоростта и ускорението на точката, максималната височина, до която тя ще се издигне, и времето за издигане до тази максимална височина.

Скорост: $\dot{x} = v = v_0 - gt$; ускорение: $\ddot{x} = w = -g$

Максимална височина: в момент T, в който скоростта стане равна на 0, т.е. $0 = v_0 - gT$ или $T = \dfrac{v_0}{g}$, а максималната височина - $h = v_0 \dfrac{v_0}{g} - \dfrac{g}{2}\dfrac{v_0^2}{g^2} = \dfrac{v_0^2}{2g}$.

5. Снаряд, намиращ се в подножието на възвишение, което е под ъгъл β към хоризонта, е изстрелян под ъгъл α към хоризонта. Уравненията на движението му са: $x = v_0 \cos\alpha\, t$, $y = v_0 \sin\alpha\, t - gt^2/2$. Какъв трябва да бъде ъгъл α, така че да се постигне максимална далекобойност?



Траекторията се намира чрез изключване на времето – изразяванего му от първото уравнение и заместване във второто: $y = tg\alpha\, x - \dfrac{g}{2v_0^2}\dfrac{x^2}{\cos^2\alpha}$

Правата ОА има уравнение $y = x tg\beta$ и в точка А снарядът ще има същата y-координата:

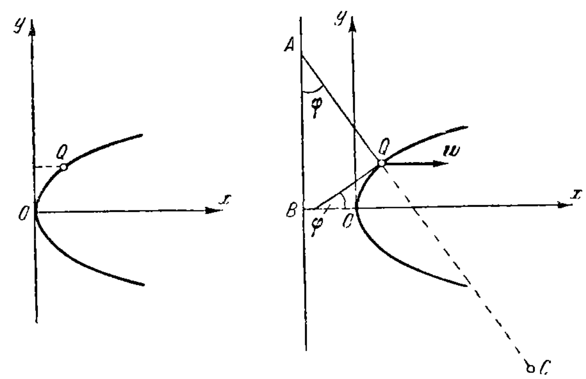
$x tg\beta = tg\alpha\, x - \dfrac{g}{2v_0^2}\dfrac{x^2}{\cos^2\alpha}$, т.е. $x = (tg\alpha - tg\,\beta)\dfrac{2v_0^2}{g}\cos^2\alpha = \dfrac{v_0^2}{g}(\sin 2\alpha - 2\cos^2\alpha\, tg\beta)$.

За максимална дължина на ОА като функция на α: $\dfrac{dx}{d\alpha} = \dfrac{v_0^2}{g}(2\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha\, tg\beta) = 0$,

т.е. $\cot g\, 2\alpha = -tg\,\beta$ или $2\alpha = \pi/2 + \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{1}{2}(\pi/2 + \beta)$.

Или максимална далекобойност се постига при изстрелване под ъгъл, равен на половината от ъгъла между вертикалата (отрицателната полуос на y) и отсечката OA.

6. Точка Q се движи по парабола $y^2 = 2px$, като положението на проекцията ѝ върху ординатната ос „y“ се дава с израза $y = ct$. Да се определи скоростта и ускорението на точката, както и радиусът на кривината на параболата.



Диференциране по времето на двете страни на уравнението на параболата:

$$2y\dot{y} = 2p\dot{x} \quad \text{или} \quad yv_y = pv_x; \tag{1}$$

От друга страна по условие $y = ct \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = v_y = c$, т.е. след заместване в (1) на $v_y = c$ се стига до

$$v_x = \frac{yc}{p} \tag{2}$$

Или знаейки компонентите на скоростта, големината на скоростта е

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = c\sqrt{y^2 / p^2 + 1}\,, \tag{3}$$

Но по условие $y^2 = 2px$ и след заместване на y^2 в (3) се получава

$$v = c\sqrt{2x / p + 1}\,. \tag{4}$$

Проекциите на ускорението по координатните оси се намират чрез диференциране на съответните компоненти на скоростта, представени в (3) и $\dot{y} = v_y = c$, т.е.

$$w_x = \dot{v}_x = \frac{c}{p}\dot{y} = \frac{c^2}{p} = const\,,\ w_y = \dot{v}_y = 0\,. \tag{5}$$

Тогава големината на ускорението е $$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = |w_x| = \frac{c^2}{p}\,. \tag{6}$$

Ако ъгълът между допирателната към параболата в точка Q и оста x е означен с φ, то големината на нормалното ускорение в точка Q е

$$w_n = w|\cos(90 - \varphi)| = w|\sin\varphi|\,. \tag{7}$$

От общия израз за нормалното ускорение $w_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ се изразява радиусът на кривината

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{v^2}{w\,|\sin\varphi|} = \frac{v^2 p}{c^2|\sin\varphi|}, \qquad (8)$$

където последователно са заместени съответните представяния на нормалното ускорение от (7) и на пълното ускорение от (6).

Заествайки сега в (8) скоростта $v = c\sqrt{2x/p+1}$ от (4), след несложни преобразувания се стига до се крайния израз за радиуса на кривината:

$$\rho = \frac{2x+p}{|\sin\varphi|}\,. \qquad (9)$$

Нека директрисата на параболата (за която е известно от теорията, че е на разстояние p/2 от върха на параболата или все едно от началото на координатната система O) пресича в точка A нормалата в точката Q. Тогава QA може да се разглежда като хипотенуза в правоъгълен триъгълник с катет, равен на разстоянието от точка Q до директрисата, а това разстояние е сума от p/2 и x-координатата на Q, т.е. то е (p/2 + x). От фигурата се вижда, че ъгълът при върха A на триъгълника е също равен на вече въведения по-горе ъгъл φ (например като ъгли с взаимно перпердикулярни рамене). Тогава от така разгледания правоъгълен триъгълник се получава хипотенузата му QA чрез катета (p/2 + x) и ъгъла φ:

$$|QA| = \frac{2x+p}{2|\sin\varphi|} \qquad (10)$$

От израза (10) за QA, съпоставен с намерения радиус на кривината $\rho = \dfrac{2x+p}{|\sin\varphi|}$ от (9), се получава, че $\rho = |QC| = 2|QA|$, където C е центърът на кривината.