Развиване на функции в степенен ред

1. Нека функцията $f(x)$ притежава производни от произволен ред. Степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$ се нарича **ред на Тейлор за функцията** $f(x)$. При $a=0$ редът се нарича ред на Маклорен.

Ако редът $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$ е сходящ и неговата сума е равна на $f(x)$, казваме, че функцията може да се развие в ред на Тейлор.

Да припомним, че съществува число R, такова че за всяко $|x-a|<R$ степенния ред $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$ е сходящ и за всяко $|x-a|>R$ редът е разходящ. Числото R се нарича **радиус на сходимост.** (R може да бъде и ∞). В точките $a-R$ и $a+R$ редът може да бъде сходящ или разходящ. Множеството от всички точки, в които редът е сходящ се нарича **интервал (област) на сходимост.**

2. Редовете, получени чрез диференциране или чрез интегриране имат същия радиус на сходимост като дадения ред, т.е.

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots \\
&\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-a)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots \\
&\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = C + a_0(x+a) + a_1\frac{(x-a)^2}{2} + a_2\frac{(x-a)^3}{3} +
\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{сходящи при } |x-a|<R \\ \text{разходящи при } |x-a|>R\end{array}$$

и

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-a)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots$$

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = C + a_0(x+a) + a_1\frac{(x-a)^2}{2} + a_2\frac{(x-a)^3}{3} +$$

Теорема на Абел. Сумата на реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ е непрекъсната функция в областта на сходимост.

3. Основни суми на степенни редове.

а) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots$ радиус на сходимост $R=1$

б) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots. = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ сходящ за всяко x

в) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

г) $(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ радиус на сходимост $R=1$

Забележка. Първият ред се получава от третия при $\alpha=-1$. Направете съответните пресмятания.

4. Други основни степенни редове.

д) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-....=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, сходящ за всяко x

е) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$, радиус на сходимост $R=1$

ж) $\operatorname{arctg} x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$, радиус на сходимост $R=1$

з)* $\arcsin x=x+\dfrac{1}{2.3}x^3+\dfrac{1.3}{2.4.5}x^5+\dfrac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$, радиус на сходимост $R=1$.

Втората група отделихме, защото следват непосредствено от а), б) и г). Тяхното извеждане е типичен начин за намиране на развития на функции и за това ще ги покажем.

д) Съгласно теоремата за диференциране редът

$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-....=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ е диференцуема за всяко x и

$\cos x=(\sin x)'=(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-....)'=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-....$ за всяко x.

е) Производната $\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{1-(-x)}$ на функцията $\ln(1+x)$ е сума на геометрична прогресия с частно равно на $(-x)$. Съгласно а)

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+...=1-x+x^2-x^3+...$$

Радиусът на сходимост е 1. Тогава при $-1<x<1$ можем да интегрираме почленно:

$$\ln(1+x)=\int\frac{1}{1+x}dx=\int(1-x+x^2-x^3+...)dx=$$

$$=\int 1dx-\int xdx+\int x^2dx-...=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+C.$$

(Да припомним, че съгласно основната теорема на интегралното смятане, ако производните на две функции са равни в **интервал,** то в този интервал функциите се различават с константа.)

За да определим константата C да дадем на x стойност 0:

$\ln(1+0)=0-\dfrac{0^2}{2}+\dfrac{0^3}{3}-\dfrac{0^4}{4}+...+C\Rightarrow 0=C$ или

$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-....$ при $-1<x<1$.

При $x=1$ редът $1-\dfrac{1^2}{2}+\dfrac{1^3}{3}-...$ е сходящ по критерия на Лайбниц и следователно $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-...$ е непрекъсната функция в $-1<x\le 1$ по теоремата на Абел. И тъй като $\ln(x+1)$ е непрекъсната функция в същия интервал, то

$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-...$ при $-1<x\le 1$. Така получихме равенството

$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

ж) Производната $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$ на функцията $\operatorname{arctg} x$ е сума на геометрична прогресия с частно равно на $(-x^2)$. Съгласно а)

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + \dots = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Радиусът на сходимост е 1. Тогава при $-1 < x < 1$ можем да интегрираме почленно:

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) dx =$$

$$= \int 1 dx - \int x^2 dx + \int x^4 dx - \dots = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + C.$$

За да определим константата C да дадем на x стойност 0:

$\operatorname{arctg} 0 = 0 + 0 + 0 + \dots + C \Rightarrow 0 = C$ или

$\operatorname{arctg} x == x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ при $-1 < x < 1$.

Отново $x = \pm 1$ редът $1 - \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5} - \dots$ е сходящ по критерия на Лайбниц и следователно $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ е непрекъсната функция в $-1 \le x \le 1$ по теоремата на Абел. И тъй като $\operatorname{arctg} x$ е непрекъсната функция в същия интервал, то

$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ при $-1 \le x \le 1$. Така получихме равенството

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

е) Производната $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ може да се представи така

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 + (-x^2))^{-\frac{1}{2}}.$$

Тази функция може да се развие в Маклоренов ред в по формула г):

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+(-x^2))^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}(-x^2) + \binom{-\frac{1}{2}}{2}(-x^2)^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3}(-x^2)^3 + \dots + \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n + \dots$$

Радиусът на сходимост е 1. Тогава при $-1 < x < 1$ можем да интегрираме почленно:

$$\arcsin x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int (1 - \binom{-\frac{1}{2}}{1} x^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{2} x^4 - \binom{-\frac{1}{2}}{3} x^6 + \dots (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n} + \dots) dx =$$

$$= x - \int \binom{-\frac{1}{2}}{1} x^2 dx + \int \binom{-\frac{1}{2}}{2} x^4 dx - \int \binom{-\frac{1}{2}}{3} x^6 dx + \dots. + (-1)^n \int \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n} dx + \dots + C =$$

$$= x - \binom{-\frac{1}{2}}{1} \frac{x^3}{3} + \binom{-\frac{1}{2}}{2} \frac{x^5}{5} - \binom{-\frac{1}{2}}{3} \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots + C$$

За да определим константата C да дадем на x стойност 0:

$\arcsin 0 = 0+0+0+...+C \Rightarrow 0 = C$ или

$$\arcsin x = x - \binom{-\frac{1}{2}}{1}\frac{x^3}{3} + \binom{-\frac{1}{2}}{2}\frac{x^5}{5} - ..+(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Да пресметнем коефициента $(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}$:

$(-1)^0\binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1$ и при $n \neq 0$

$$(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \frac{\overbrace{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)...(-\frac{1}{2}-n+1)}^{n \text{ множителя}}}{n(n-1)(n-2)...2.1} =$$

$$= (-1)^n \frac{(-1)^n(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)...(\frac{1}{2}+n-1)}{n(n-1)(n-2)...2.1} = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Така окончателно получихме

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + ... + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}.$$

Да изследваме реда при $x = \pm 1$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!(2n+3)} \cdot \frac{(2n)!!(2n+1)}{(2n-1)!!} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6} \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

Тъй като $\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6} < 1$, критерия на Даламбер не дава резултат.

А от $n(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1} - 1) = \frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{6}{4} > 1$ и критерия на Раабе и Дюамел редът $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$ е сходящ.

Тогава по теоремата на Абел

$\arcsin x = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + ... + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$ при $-1 \le x \le 1$. Така при $x = 1$ имаме

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin 1 = 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5} + ... + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}.$$

Задача 1. Да се развие в степенен ред функцията

а) $f(x) = \frac{3x+4}{x^2+x-6}$ около точката 0 (ред на Маклорен)

б) $f(x) = \frac{3x+4}{x^2+x-6}$ около точката $-\frac{1}{2}$.

Решение. а) За да използваме основно развитие а) (геометрична прогресия) ще разложим на елементарни дроби:

$$\frac{3x+4}{x^2+x-6}=\frac{3x+4}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3} \quad \Rightarrow \quad 3x+4=A(x+3)+B(x-2)$$

$$\begin{cases} x=-3 \quad \Rightarrow \quad -5=-5B \quad \Rightarrow \quad B=1 \\ x=2 \quad \Rightarrow \quad 10=5A \quad \Rightarrow \quad A=2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{3x+4}{x^2+x-6}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+3}.$$

От $\frac{2}{x+3}=-\frac{1}{1-(-\frac{x}{3})}$ се вижда, че това е сума на геометрична прогресия с частно $-\frac{x}{3}$ или $\frac{2}{x-2}=-\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2^n})x^n$.

Редът е сходящ при $\left|\frac{x}{2}\right|<1$ или $|x|<2$ и разходящ при $|x|>2$. Радиусът на сходимост е равен на 2.

От $\frac{2}{x-2}=-\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$ се вижда, че това е сума на геометрична прогресия с частно $\frac{x}{2}$ или $\frac{1}{x+3}=\frac{1}{1-(-\frac{x}{3})}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{3})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}x^n$.

Редът е сходящ при $\left|\frac{x}{3}\right|<1$ или $|x|<3$ и разходящ при $|x|>2$. Радиусът на сходимост е равен на 3.

Тогава

$$f(x)=\frac{3x+4}{x^2+x-6}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2^n})x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}[-\frac{1}{2^n}+(-1)^n\frac{1}{3^n}]x^n.$$

Радиусът на сходимост R на този ред е по-малкия от двата радиуса, т.е. $R=2$.

б) За да сведем задачата до намиране на Маклоренов ред ще положим $t=x+\frac{1}{2}$:

$$\frac{3x+4}{x^2+x-6}=\frac{3(t-\frac{1}{2})+4}{(t-\frac{1}{2})^2+(t-\frac{1}{2})-6}=\frac{3t+\frac{5}{2}}{t^2-\frac{25}{4}}.$$

Преобразуваме тази функция, за да приложим формулата за сума на геометрична прогресия: $\varphi(t)=\frac{3t+\frac{5}{2}}{t^2-\frac{25}{4}}=-\frac{4}{25}(3t+\frac{5}{2}).\underbrace{\frac{1}{1-(\frac{2}{5}t)^2}}_{\text{сума на геом. прогресия}}$. Тогава

$$\varphi(t)=-\frac{4}{25}.(3t+\frac{5}{2}).\frac{1}{1-(\frac{2}{5}t)^2}=-\frac{4}{25}(3t+\frac{5}{2})\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{25}t^2)^n=-(3t+\frac{5}{2})\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{25})^{n+1}t^{2n}.$$

Този ред е сходящ при $\frac{4t^2}{25}<1\Leftrightarrow|t|<\frac{5}{2}$ и разходящ при $\frac{4t^2}{25}>1\Leftrightarrow|t|>\frac{5}{2}$. Така радиусът на сходимост е $R=\frac{5}{2}$.

Окончателно, като се върнем към променливата x, получаваме

$$f(x)=\frac{3x+4}{x^2+x-6}=-[3(x+\frac{1}{2})+\frac{5}{2}]\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{25})^{n+1}(x+\frac{1}{2})^{2n}=-(3x+4)\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{25})^{n+1}(x+\frac{1}{2})^{2n}.$$

Радиусът на сходимост е $R=\frac{5}{2}$.

Задача 2. (За самостоятелна работа). Да се развие в степенен ред функцията

а) $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ около точката 0 (ред на Маклорен)

б) $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ около точката 2.

Задача 3. Да се развие в Маклоренов ред

а) $f(x)=\ln[(1-x)(x+3)]$; б) $f(x)=\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}$

Решение.

а) Ще разгледаме производната на $f(x)=\ln[(1-x)(x+3)]=\ln(1-x)+\ln(x+3)$:

$$f'(x)=-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x+3}=-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{3}.\frac{1}{1+\frac{x}{3}}=-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{3}.\frac{1}{1-(-\frac{x}{3})}.$$

Съгласно формулата за сума на геометрична прогресия имаме

$$f'(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{3})^n=\sum_{n=0}^{\infty}[-1+(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}]x^n.$$

Тъй като радиусът на сходимост на първия ред е равен на 1, а на втория – 3 (защо?), то радиусът на редът, получен събиране на двата реда е по-малкото число, т.е. радиусът на сходимост на $\sum_{n=0}^{\infty}[-1+(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}]x^n$ е равен на 1.

Във интервала $-1<x<1$ можем да интегрираме почленно:

$$f(x)=C+\int f'(x)dx=C+\int(\sum_{n=0}^{\infty}[-1+(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}]x^n)dx=$$

$$=C+\sum_{n=0}^{\infty}\int[-1+(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}]x^n dx=C+\sum_{n=0}^{\infty}[-1+(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}]\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

При $x=0$ имаме $f(0)=\ln1+\ln3=C+\sum_{n=0}^{\infty}[-1+(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}]\frac{0^{n+1}}{n+1}=C-1+\frac{1}{3}$ или

$$\ln3=C-\frac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad C=\frac{2}{3}+\ln3.$$

Окончателно в $-1<x<1$ получаваме

$$\ln[(1-x)(x+3)]=\frac{2}{3}+\ln3+\sum_{n=0}^{\infty}[-1+(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}]\frac{x^{n+1}}{n+1}=\ln3+\sum_{n=1}^{\infty}[-1+(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}]\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

При $x=1$ редът е разходящ като сума на един сходящ и един разходящ ред.

При $x=-1$редът е сходящ като сума на два сходящи реда:

$\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{(-1)^n}{n+1}$ е сходящ по критерия на Лайбниц

$\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}]\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}(n+1)}$ е сходящ (мажорира се от геометрична прогресия).

Така по теоремата на Абел равенството

$$\ln[(1-x)(x+3)]=\frac{2}{3}+\ln3+\sum_{n=0}^{\infty}[-1+(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}]\frac{x^{n+1}}{n+1}=\ln3+\sum_{n=1}^{\infty}[-1+(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}]\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

е в сила $-1\le x<1$.

б) Ще разгледаме производната на $f(x)=\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}$:

$$f'(x)=x\operatorname{arctg} x+\frac{x^2+1}{2}.\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{2}=x\operatorname{arctg} x.$$

Ще използваме развитието на $\operatorname{arctg} x$ в степенен ред (вж. ж)). Тогава при $-1<x<1$ е в сила

$$f'(x)=x\operatorname{arctg} x=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}.$$

В интервала $-1<x<1$ можем да интегрираме и да приложим основната теорема на интегралното смятане

$$f(x)=\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}=C+\int f'(x)dx=$$

$$=C+\int(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1})dx=C+\sum_{n=0}^{\infty}\int[(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}]dx=C+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)}.$$

При $x=0$ имаме $f(0)=0=C+0 \quad \Rightarrow \quad C=0$

Така в $-1<x<1$ е в сила

$$f(x)=\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)}.$$

При $x=\pm 1$ редът $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)}$ е сходящ (защо?) следователно по теоремата на Абел равенството

$$f(x)=\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)}$$

е изпълнено при $-1\le x\le 1$.

Задача 4. (За самостоятелна работа) Да се развие в Маклоренов ред функцията

а) $f(x)=\ln\frac{4x+2}{3x^2+4x+1}$;

б) $f(x)=2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\ln\frac{(1-x)^2}{x^2+x+1}$.

Задача 5. Да се развие в степенен ред функцията $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$.

Решение. Намираме производната на функцията $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$ при $x\neq-\frac{1}{4}$

$$f'(x)=\frac{1}{1+(\frac{2-2x}{1+4x})^2}.\frac{(-2)(1+4x)-4(1-2x)}{(1+4x)^2}=\frac{-2}{1+4x^2} \text{ при } x\neq-\frac{1}{4}.$$

Функцията $\frac{-2}{1+4x^2}$ е сума на геометрична прогресия с частно $-4x^2$, т.е.

$$\frac{-2}{1+4x^2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-4x^2)^n=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{2n+1}x^{2n}$$ с радиус на сходимост равен на $\frac{1}{2}$.

Този ред можем да интегрираме в интервала $(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$. Тъй като функцията $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$ не е дефинирана в т. $-\frac{1}{4}$, то основната теорема на интегралното смятане може да се приложи само в интервала $(-\frac{1}{4};\frac{1}{2})$:

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}=\int f'(x)dx=C+\int\frac{-2}{1+4x^2}dx=$$

$$=C+\int(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{2n+1}x^{2n})dx=C+\sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^{n+1}2^{2n+1}x^{2n}dx=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}.$$

При $x=0$ имаме $f(0)=\operatorname{arctg}2=C$. Така

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}=\operatorname{arctg}2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1} \text{ при } (-\frac{1}{4};\frac{1}{2}).$$

При $x=\frac{1}{2}$ редът $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{2n+1}(\frac{1}{2})^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ е сходящ по критерия на Лайбниц и по теоремата Абел равенството

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}=\operatorname{arctg}2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1} \text{ е в сила при } (-\frac{1}{4};\frac{1}{2}].$$

От направените разглеждания е ясно, че в интервала $(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4})$ функциите $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$ и $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$ имат една и съща производна $\frac{-2}{1+4x^2}$ и според ОТИС се различават с константа (която може да бъде различна от константата в интервала $(-\frac{1}{4};\frac{1}{2})$ или в $(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4})$ имаме

$$\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}=C_1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}.$$

Съгласно теоремата на Абел

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}[C_1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}] \text{ или}$$

$$\operatorname{arctg}\frac{2+1}{1-2}=C_1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{2n+1}(-\frac{1}{2})^{2n+1} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \operatorname{arctg}(-3)=C_1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=C_1+\frac{\pi}{4}\quad\Rightarrow\quad C_1=-\operatorname{arctg}3-\frac{\pi}{4}.$$

(вж. Други основни степенни редове ж) $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$).

Получихме

$$\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}=-\operatorname{arctg}3-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1} \text{ при } [-\frac{1}{4};-\frac{1}{2}).$$

Задача 6. Да се развие в степенен ред функцията $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$.

Решение. Да разгледаме функцията

$$F(x)=\int\frac{dx}{(1-x)^2}=-\int\frac{d(1-x)}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}.$$

Това е сума на геометрична прогресия

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad \text{при } -1<x<1.$$

Този ред можем да диференцираме при $-1<x<1$:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=F'(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1} \quad \text{при } -1<x<1.$$