Тема 2: Формулирайте и док. теоремата за оценка на грешката при интерполационната формула на Лагранж.

Оценка на грешката $= R_n(f;x) := f(x) - L_n(f;x)$

Теорема: Нека $[a,b]$ е даден краен интервал и $x_0, \dots, x_n$ са различни точки в него. Нека функцията $f(x)$ има непр. $(n+1)$-ва производна в $[a,b]$. Тогава за всяко $x \in [a,b]$ $\exists$ т. $\xi \in [a,b]$;

$$f(x) - L_n(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n)$$

$$\xi \in (\min\{x_0, \dots x_n, x\}; \max\{x_0, \dots, x_n, x\})$$

док:

1) Нека $F(t) := f(t) - L_n(f;t) - C(t-x_0)\dots(t-x_n)$

$F(t)$ се анулира в т. $x_0 \dots x_n$

$F(x_k) = f(x_k) - L_n(f;x_k) - C(x_k-x_0)\dots(x_k-x_n) = f(x_k) - f(x_k) = 0$

Нека F се анулира в т. x

$f(x) - L_n(f;x) - C(x-x_0)\dots(x-x_n) = 0$

$$C = \frac{R_n(f;x)}{(x-x_0)\dots(x-x_n)}$$

2) От друга страна $F(t)$ има $\underline{n+2}$ нули $\Rightarrow$ От Th. на Рол $\Rightarrow$ $F^{(n+1)}(t)$ има поне 1 нула в $(\min\{x, x_0 \dots, x_n\}; \max\{x, x_0, \dots, x_n\})$ - означаваме я с ξ

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - L_n^{(n+1)}(f;\xi) - C(n+1)! = f^{(n+1)}(\xi) - C(n+1)! = 0$$

$$C = \underset{\text{от } 2)}{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}} = \underset{\text{от } 1)}{\frac{R_n(f;x)}{(x-x_0)\dots(x-x_n)}} \Rightarrow R_n(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n)$$