Линейни изображения и оператори. Матрица на изображения

Люба Конова

Ноември 2020

1 Теория:

1. Дефиниция за линейно изображение: Нека $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}'$ са линейни пространства и ϕ е изображение от $\mathbb{V}$ към $\mathbb{V}'$. Ще казваме, че ϕ е линейно, ако ϕ

2. Примери за линейно изображение:

3. Какво е изоморфизъм на линейни пространства?

4. Основна теорема за изоморфизми

5. Как влияе едно изображение на дадено линейно пространство?

6. Какво е матрица на изображението?

7. Какво става, ако сменим базиса?

8. Има ли изоморфни пространства над различни полета?

2 Задачи:

Задача 1: Нека $\mathbb{V} = \mathbb{M}_2(\mathbb{F})$ и A и B са фиксирани матрици от $\mathbb{V}$. Да се докаже, че изображението ϕ е линеен оператор, където:
a) $\phi(X) = X^t$
b) $\phi(X) = AXB$
c) $\phi(X) = AX + XB$
При n=2 да се напише матрицата на ϕ в базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, където $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 2: Нека $\mathbb{V} = \mathbb{M}_2(\mathbb{F})$. Дадени са изображенията:
a)

$$\phi(X) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.X + X.\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

б)

$$\psi(X) = X.\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

, където $X \in \mathbb{V}$. Да се провери дали ϕ и ψ са линейни оператори във $\mathbb{V}$ и когато са такива, да се напишат матриците им в базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$.

Задача 3. Нека $\mathbb{V} = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ и $\phi(X)$ е изображение от $\mathbb{V}$ във $\mathbb{V}$, зададено по правилото $\phi(X) = XA$ за $X \in V$.
а) Да се докаже, че $\phi(X)$ е линеен оператор;
б) Да се провери, че матрицата ϕ в базиса $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ е равна на

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Задача 4: Докажете, че $Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, където $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$ са линейни пространства е само по себе си линейно пространство.