$F^X = \{ f : X \to F \}$ $\quad (f+g)(x) := f(x) + g(x)$

$\quad (\lambda f)(x) := \lambda . f(x)$

$F^{\mathbb{N}}$ — редиците с ел. от F

<u>Опр.</u> Нека U и V са ЛП над поле F.

Изобр. $\varphi : U \to V$ се нарича линейно изобр. (ЛИ), ако:

1) $\forall u_1, u_2 \in U \quad \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$

2) $\forall \lambda \in F$ и $\forall u \in U \quad \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$

Ако φ е инективно — мономорфизъм

сюрективно — епиморфизъм

биективно — <u>изоморфизъм</u>

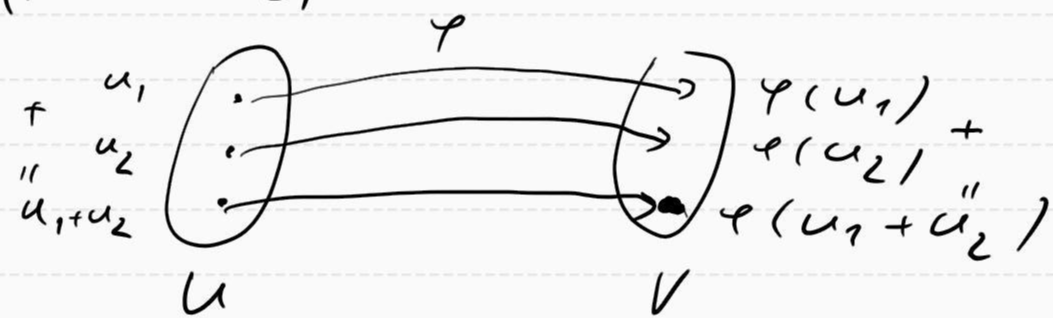
Зад. $\varphi: U \to V$ е ЛИ $\iff \forall \lambda, \mu \in F$ и $\forall u_1, u_2 \in U$

$$\varphi(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda \varphi(u_1) + \mu \varphi(u_2)$$

$\iff \forall \lambda \in F$ и $\forall u_1, u_2 \in U$

$$\varphi(\lambda u_1 + u_2) = \lambda \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$$

Зад.



Зад. Ако $\varphi: U \to V$ е ИЗМ, то за нас U и V са неразличими от гледна т. на ЛА

<u>Тв</u>: Нека $\varphi : U \to V$ – <u>биекция</u> и U е ЛП над F. Тогава V е ЛП над F с опер.:

$$\forall v_1, v_2 \in V \quad v_1 + v_2 := \varphi\left(\varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2)\right)$$

$$\forall \lambda \in F, \forall v \in V \quad \lambda v := \varphi\left(\lambda . \varphi^{-1}(v)\right)$$

<u>Зад</u>. Ясно е, че <u>ако V е ЛП</u> над F с тези опер, то φ е ИМ

- $u_1, u_2 \in U$ $\quad \underbrace{\varphi(u_1)}_{''v_1}+\underbrace{\varphi(u_2)}_{''v_2} = \varphi(\overbrace{u_1+u_2}^{\varphi^{-1}(v_1)+\varphi^{-1}(v_2)})$?

  $v_1 = \varphi(u_1)$, $v_2 = \varphi(u_2)$; $u_1 = \varphi^{-1}(v_1)$, $u_2 = \varphi^{-1}(v_2)$

- $\lambda \in F$, $u \in U$; $v = \varphi(u)$, $u = \varphi^{-1}(v)$

  $\lambda \varphi(u) = \lambda v = \varphi(\lambda \varphi^{-1}(v)) = \varphi(\lambda u)$

Д-во на Т6. Конкр. комутативност:

$v_1, v_2 \in V$ $\qquad$? $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.

$u_1 = \varphi^{-1}(v_1)$, $u_2 = \varphi^{-1}(v_2)$; $v_1 = \varphi(u_1)$, $v_2 = \varphi(u_2)$

$$v_1 + v_2 = \varphi(\varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2)) = \varphi(\underline{u_1 + u_2})$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$v_2 + v_1 = \varphi(\varphi^{-1}(v_2) + \varphi^{-1}(v_1)) = \varphi(u_2 + u_1)$$

и т.н.

„изоморфно"

Заб. $\varphi : U \to V$ ИМ тогава $U \cong V$

Заб. $F^{\mathbb{N}} \cong \{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid a_n \in F \}$

Пр. $F^{\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}} \cong F_{m\times n}$

$$a \in F^{\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}} \longleftrightarrow A=(a_{ij})$$

$$a: \{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\} \to F$$

$$(i,j) \longmapsto a((i,j)) = a_{ij}$$

биекция - ясно

$$(a+b)((i,j)) = a((i,j)) + b((i,j))$$

$c=a+b \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad C = A+B$

$$(\lambda a)((i,j)) = \lambda \cdot a((i,j))$$

$d=\lambda a \qquad d_{ij} = \lambda a_{ij} \qquad D = \lambda A$

φ е ЛИ

[illegible]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \quad a : \{1,2\} \times \{1,2\} \longrightarrow F$$

$$\begin{aligned} (1,1) &\longmapsto 1 \\ (1,2) &\longmapsto 2 \\ (2,1) &\longmapsto 3 \\ (2,2) &\longmapsto 4 \end{aligned}$$

Опр. Нека V е ЛП над F. $U \subseteq V$ се нарича лин. подпространство на V $(U \leq V)$ (ЛПП), ако U е ЛП над F относно операциите на V

Тв. $U \leq V \iff \begin{cases} 0)\ U \subseteq V \\ \forall u_1, u_2 \in U \quad u_1 + u_2 \in U \\ \forall \lambda \in F,\ \forall u \in U \quad \lambda u \in U \end{cases}$

$(0 \cdot u = \theta_V = \theta_U$; $(-1)u = -u$; равенствата в св-ва сами$)$

Пр. $F^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in F\} \cong \{(a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots) \mid a_i \in F\}$

$$\lneq \{\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \mid a_i \in F\} \cong F^{\mathbb{N}}$$

Пр. $F[x] = \{ \{a_i\}_{i=0}^{\infty} \mid \exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \forall i \geq n \;\; a_i = 0 \}$

* от известно място нататък са 0

— финитни редици

$+, \cdot \leftarrow$ от редиците

$$\underbrace{F[x]} \leq F^{\mathbb{N}}$$

$$\hat{a} = \{a_i\}_{i=0}^{\infty} \longrightarrow n: \max_i \{a_i \neq 0\}$$

$$(a_0, a_1, \ldots, \underbrace{a_n}_{\neq 0}, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$ — полином

Финитните редици ги интерпретираме като полиноми; $F[x]$ — полиномите на променлива x.

$\underline{n}$ – степен на $\underline{a}$; $\deg a$

$$F^{n+1}[x] := \{ a \in F[x] \mid \deg a \le n \}$$

$$\cong \quad (a_0, a_1, \ldots, \underbrace{a_n}_{\substack{=0 \\ \neq 0}}, 0, \ldots)$$

F^{n+1}

не знаем

Тв Следните твърдения са еквивалентни
(V е ЛП над F, $U \subseteq V$)

1) $U \le V$
2) $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \lambda_1 \ldots \lambda_k \in F, \forall u_1 \ldots u_k \quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k \in U$
3) $\forall u_1, u_2 \in U ; \forall \lambda, \mu \in F \quad \lambda u_1 + \mu u_2 \in U$
4) $\forall u_1, u_2 \in U$ и $\forall \lambda \in F \quad \lambda u_1 + u_2 \in U$
5) – $\forall u_1, u_2 \in U \quad u_1 + u_2 \in U$
 – $\forall u \in U, \forall \lambda \in F \quad \lambda u \in U$

Заб. $U \subseteq V$, $U \le V \Rightarrow U$ е ЛП
V е ЛП

Опр. V е ЛП над F; $X \subseteq V$

$$\ell(X) := \bigcap_{X \subseteq U \le V} U$$ — линейна обвивка на X

Казваме също, че X поражда $\ell(X)$

Ако $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, пишем $\ell(x_1, \dots, x_n)$

Св-ва 1) $\ell(X) \le V$; $X \subseteq \ell(X)$

2) $\ell(X)$ е минималното подпространство на V, което съдържа X

3) Ако $X \leq V$, то $\ell(X) = X$

4) $\ell(\ell(X)) = \ell(X)$

5) $X \subseteq Y \subseteq V \Rightarrow \ell(X) \leq \ell(Y)$

6) $X \subseteq Y \leq V \Rightarrow \ell(X) \leq Y$

Опр: 1) $\lambda_1 \dots \lambda_k \in F$; $v_1 \dots v_k \in V$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k \in V$$

се нарича линейна комбинация (ЛК) на $v_1 \dots v_k$ с коефициенти $\lambda_1 \dots \lambda_k$

2/ $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_k = \theta$ – тривиална ЛК на $v_1, \ldots, v_k$

Док. $\lambda u + \mu v = \theta$

- трив. ЛК. $(\lambda = \mu = 0)$
- нетрив. ЛК
  - $\lambda \neq 0 \rightarrow u = \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right) v$
  - $\mu \neq 0 \rightarrow v = \left(-\frac{\lambda}{\mu}\right) u$

3/ $v_1, \ldots, v_k$ са линейно зависими (ЛЗ), ако $\exists$ нетривиална ЛК, която дава θ, т.е. $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$:
$$\begin{cases} (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq (0, \ldots, 0) \\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \theta \end{cases}$$

4/ $v_1, \ldots, v_k$ са линейно независими (ЛН), от $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \theta$ следва, че $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$

<u>Тв</u> $\ell(X) = \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ x_1, \dots, x_n \in X;\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in F \right\}}_{T}$

<u>Заб.</u> $k = 0 \to \sum_{i=1}^{0}$ – невъзможна сума $\to$ считаме, че е θ

(Аналог. $\prod_{i=1}^{0} a_i = 1$ (приемаме, че))

<u>Д-во</u> $T \overset{?}{=} \ell(X) = \bigcap_{X \subseteq U \leq V} U \iff \subseteq$ и $\supseteq$

$\forall v \in T \Rightarrow v \underset{= \sum_{i}^{k} \lambda_i x_i}{\text{ е }}$ ЛК на вектори от $X \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\forall U \leq V : x_1, \dots, x_k \in U \Rightarrow v = \sum \lambda_i x_i \in U \right)$

$\Rightarrow T \subseteq \ell(X)$

2) ($\supseteq$) $T \subseteq V$ (сечението на ΛK над ел. от X е ΛK над ел. от X) (и пресеч. на сечения)

Ясно е, че $X \subseteq T$

Тогава T: $X \subseteq T \subseteq V$ (едно от „U"-тата е $\ell(X) = \bigcap\limits_{X \subseteq U \subseteq V} U$)

Ако U: $X \subseteq U \subseteq V$, то

$\forall\, \Lambda K$ над ел. от X е в U $\Rightarrow$

$\Rightarrow T \subseteq U$

$\Rightarrow T \subseteq \bigcap\limits_{X \subseteq U \subseteq V} U$ и T е едно от „U"-тата

$\bigcap U = T \cap \left(\bigcap U\right) \subseteq T$

$\Rightarrow T \subseteq \bigcap U \subseteq T \Rightarrow =$