Криволинейни интеграли от първи род

Досега ползвахме понятието крива интуитивно. Сега ще дефинираме:

Деф. Параметрична крива в равнината наричаме множество от вида

$$\Gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ a \le t \le b \end{cases}$$ за някакви функции φ, ψ.

Пр. 1. Графика на всяка функция на един аргумент е параметрична крива с параметризация: $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ a \le t \le b. \end{cases}$

Пр. 2. Окръжността не е графика на функция, но е параметрична крива: $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$

Определен интеграл ($\int_a^b f(x)dx$) е интеграл върху параметрична крива $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ a \le t \le b \end{cases}$.

Може да разглеждаме интеграл от функция дефинирана върху произволна (гладка) параметрична крива.

Деф. Гладка параметрична крива наричаме параметрична крива $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ a \le t \le b \end{cases}$, за която функциите φ и ψ имат непрекъснати първи производни и за всяко $t \in [a;b]$, $(\varphi'(t), \psi'(t)) \neq (0,0)$ (т.е. производните на φ и ψ не се нулират едновременно).

Нека Γ е гладка параметрична крива, $f: \Gamma \to \mathbb{R}$ е функция. Криволинеен интеграл от първи род на функцията f върху кривата Γ, обобщава идеята за определен интеграл.

Бележим с $\int_\Gamma f\,dl$, l подсказва, че интегралът е криволинеен от първи род.

Строгата дефиниция минава през разбиване на Γ и Риманови суми. За нас е важно как се смята такъв интеграл. Той се свежда към познатия вече определен интеграл.

Тв. Г – гладка крива, $\Gamma: \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ a\le t\le b \end{cases}$, $f:\Gamma\to\mathbb{R}$, f - непрекъсната.

Тогава $$\int_\Gamma f(x,y)\,dl = \int_a^b \underbrace{f(\varphi(t),\psi(t))}_{f}\cdot\underbrace{\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}}_{dl}\,dt.$$

Свойства:
1) $\int_\Gamma(\alpha.f(x,y)+\beta.g(x,y))\,dl = \alpha.\int_\Gamma f\,dl+\beta.\int g\,dl$ - линейност.
2) $\int_\Gamma f\,dl$ не зависи от конкретната параметризация на Г
3) $\int_\Gamma f\,dl$ не зависи от посоката на обхождане на Г.
4) Ако $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\emptyset$, $\int_\Gamma f\,dl=\int_{\Gamma_1} f\,dl+\int_{\Gamma_2} f\,dl$.

Бел. Дължина на крива Г наричаме $\int_\Gamma 1\,dl = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$.

За $\Gamma: \begin{cases} x=t \\ y=f(t) \\ a\le t\le b \end{cases}$, получаваме познатата формула за дължина на графика на функция $L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$.

Зад 1. Намерете $\int_\Gamma (x^2+y^2)^n\,dl$, $\Gamma: \begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$, $r>0$

Реш. Параметризацията е дадена. Заместваме във формулата:

$(x^2+y^2)^n = ((r\cos t)^2+(r\sin t)^2)^n=(r^2)^n=r^{2n}$

$\varphi(t)=r\cos t$, $\varphi'(t)=-r\sin t$, $(\varphi'(t))^2=r^2\sin^2 t$

$\psi(t)=r\sin t$, $\psi'(t)=r\cos t$, $(\psi'(t))^2=r^2\cos^2 t$.

$\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}=\sqrt{r^2}=r$.

$$\int_\Gamma (x^2+y^2)^n\,dl=\int_0^{2\pi}(r^{2n}).r\,dt=r^{2n+1}.\int_0^{2\pi}1\,dt=2\pi r^{2n+1}.$$

Зад.2. Пресметнете $\int_\Gamma \frac{dl}{x-y}$, $\Gamma: \begin{cases} y=\frac{1}{2}x-2 \\ 0\le x\le 4 \end{cases}$.

Реш. $x-y=x-(\frac{1}{2}x-2)=\frac{1}{2}x+2>0$ за $x\in[0;4]$.

$\Rightarrow$ Върху Г, $x-y\neq 0$ и $\frac{1}{x-y}$ има смисъл.

По-нататък, параметризацията подсказва, че това е графика на функция, т.че $\Gamma: \left| \begin{array}{l} x = t \\ y = \frac{1}{2}t - 2 \\ 0 \le t \le 4 \end{array} \right.$, $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = \frac{1}{2}t - 2$.

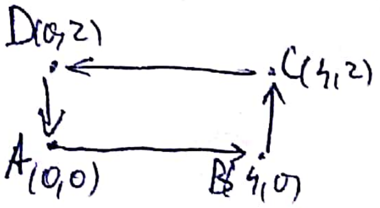
$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

$$\int_\Gamma \frac{dl}{x-y} = \int_0^4 \frac{1}{t - (\frac{1}{2}t - 2)} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}\, dt = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^4 \frac{dt}{\frac{1}{2}t + 2} = \sqrt{5} \cdot \int_0^4 \frac{dt}{t+4} =$$

$$= \sqrt{5} \cdot \ln(t+4)\Big|_0^4 = \sqrt{5}(\ln 8 - \ln 4) = \sqrt{5} \ln \frac{8}{4} = \sqrt{5} \cdot \ln 2.$$

Нататък вместо $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2$ ще пишем $(x'(t))^2 + (y'(t))^2$.

Зад. 3. Намерете $\int_\Gamma xy\, dl$, където Γ е следният контур:



Реш. Представяме Γ като обединение на 4 отсечки.

Γ_1 отсечката от $A(0,0)$ до $B(4,0)$, $\Gamma_1 = AB$

Γ_2 - отсечката BC,

Γ_3 - отсечката CD,

Γ_4 - отсечката DA.

От свойствата $\int_\Gamma xy\,dl = \int_{\Gamma_1} xy\,dl + \int_{\Gamma_2} xy\,dl + \int_{\Gamma_3} xy\,dl + \int_{\Gamma_4} xy\,dl$.

Тъй като не зависи стойността от посоката на обхождане, ще интегрираме по AD и DC вместо DA и CD.

За разлика от предните задачи, тук няма параметризация готова, затова трябва да я изчислим

$AB: \left| \begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \\ 0 \le t \le 4 \end{array} \right.$, $BC: \left| \begin{array}{l} x = 4 \\ y = t \\ 0 \le t \le 2 \end{array} \right.$ $DC: \left| \begin{array}{l} x = t \\ y = 2 \\ 0 \le t \le 4 \end{array} \right.$, $AD: \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = t \\ 0 \le t \le 2. \end{array} \right.$

$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{1+0} = 1$ за всяка от 4-те параметризации.

$$\int_\Gamma xy\,dl=\int_{AB} xy\,dl+\int_{BC} xy\,dl+\int_{DC} xy\,dl+\int_{AD} xy\,dl \text{ – заместване}$$

$$=\underbrace{\int_0^4 t.0.1\,dt}_{0}+\int_0^2 4.t.1\,dt+\int_0^4 t.2.1\,dt+\underbrace{\int_0^2 0.t.1\,dt}_{0}=$$

$$=4.\int_0^2 t\,dt+2\int_0^4 t\,dt=2t^2\Big|_0^2+t^2\Big|_0^4=2.2^2+4^2=\underline{24}.$$

Зад. 4. $\int_\Gamma \left(x^{4/3}+y^{4/3}\right)dl$, $\Gamma:\ \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$, $a>0$.

Реш. Параметризиране Γ: $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{a}\right)^{2/3}=1$.

Ако $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}=\cos^2\varphi$, то $\left(\frac{y}{a}\right)^{2/3}=1-\cos^2\varphi=\sin^2\varphi$.

Така, получаваме $\Gamma:\ \begin{cases}\frac{x}{a}=(\cos^2\varphi)^{3/2}=\cos^3\varphi\\ \frac{y}{a}=\sin^3\varphi\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$

Всъщност това е обобщена полярна смяна: $\begin{cases}x=a\cos^3\varphi\\ y=a\sin^3\varphi\\ 0\le\varphi\le2\pi\end{cases}$.

$(x'(\varphi))^2=\left(a.3\cos^2\varphi(-\sin\varphi)\right)^2=9a^2\sin^2\varphi\cos^4\varphi.$

$(y'(\varphi))^2=\left(a.3\sin^2\varphi\cos\varphi\right)^2=9a^2\sin^4\varphi\cos^2\varphi.$

$\Rightarrow \sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2}=\sqrt{9a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}=3a|\sin\varphi\cos\varphi|.$

$$\int_\Gamma\left(x^{4/3}+y^{4/3}\right)dl=\int_0^{2\pi}\left(a^{4/3}\cos^4\varphi+a^{4/3}\sin^4\varphi\right).3a|\sin\varphi\cos\varphi|\,d\varphi=$$

$$=3a^{7/3}\int_0^{2\pi}(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)|\sin\varphi\cos\varphi|\,d\varphi=3a^{7/3}\left(\int_0^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}+\int_{\pi}^{3\pi/2}+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\right).$$

$\sin\varphi\cos\varphi$ си мени знака в $\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$.

За $\int_{\pi/2}^{\pi}\dots d\varphi$ правим смяна $u=\varphi-\frac{\pi}{2}$, $du=d\varphi$.

$\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi \Rightarrow 0\le u\le\frac{\pi}{2}$.

$\cos^4\varphi+\sin^4\varphi=\cos^4u+\sin^4u$ и $|\cos\varphi.\sin\varphi|=|\cos u.\sin u|$.

$$\Rightarrow\int_{\pi/2}^{\pi}\dots d\varphi=\int_0^{\pi/2}(\cos^4u+\sin^4u)|\cos u\sin u|\,du=\int_0^{\pi/2}(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)|\cos\varphi\sin\varphi|\,d\varphi$$

преименуваме u на φ.

Аналогично с линейни смени виждаме, че интегралите във всеки от четирите интервала са равни.

Тогава $\int_0^{2\pi}\dots d\varphi = 3a^{7/3}\cdot 4\cdot\int_0^{\pi/2}\dots d\varphi =$

$=12a^{7/3}\int_0^{\pi/2}(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi=$

$=12a^{7/3}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^5\varphi\,d\sin\varphi+\int_0^{\pi/2}\cos^5\varphi\,d(-\cos\varphi)\right)=$

$=12a^{7/3}\left(\frac{\sin^6\varphi}{6}\Big|_0^{\pi/2}-\frac{\cos^6\varphi}{6}\Big|_0^{\pi/2}\right)=12a^{7/3}\left(\frac{1}{6}-0-\left(0-\frac{1}{6}\right)\right)=$

$=12a^{7/3}\cdot\frac{2}{6}=\underline{4a^{7/3}}.$

<u>Зад.5.</u> $\int_\Gamma\sqrt{y}\,dl$, $\Gamma:\begin{cases}x=r(t-\sin t)\\ y=r(1-\cos t)\\ 0\le t\le 2\pi.\end{cases}$

<u>Реш.</u> $(x'(t))^2+(y'(t))^2=(r(1-\cos t))^2+(r(\sin t))^2=$

$=r^2(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)=r^2(2-2\cos t)=4r^2\cdot\frac{1-\cos t}{2}=$

$=4r^2\cdot\sin^2\frac{t}{2}=\left(2r\sin\frac{t}{2}\right)^2 \Rightarrow dl=\sqrt{\left(2r\sin\frac{t}{2}\right)^2}\,dt=\left|2r\sin\frac{t}{2}\right|\cdot dt.$

$\sqrt{y}=\sqrt{r(1-\cos t)}=\sqrt{2r}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}=\sqrt{2r}\cdot\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}=\sqrt{2r}\cdot\left|\sin\frac{t}{2}\right|.$

Тъй като $0\le t\le 2\pi$, то $0\le t/2\le\pi$. В този интервал, синусът е положителен $\Rightarrow\left|\sin\frac{t}{2}\right|=\sin\frac{t}{2}$.

$\int_\Gamma\sqrt{y}\,dl=\int_0^{2\pi}\sqrt{2r}\sin\frac{t}{2}\cdot 2r\sin\frac{t}{2}\,dt=2r\sqrt{2r}\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\,dt=$

$=2r\sqrt{2r}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos t}{2}\,dt=2r\sqrt{2r}\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=2r\sqrt{2r}\cdot\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}=$

$=\pi\cdot 2r\sqrt{2r}$

Тук ползвахме формулата $\frac{1-\cos t}{2}=\sin^2\frac{t}{2}$ във всяка от двете посоки. При $x'(t)^2+y'(t)^2$ искаме да представим като точен квадрат, за да можем да коренуваме.

При решаване на интеграла, $\int\sin^2 t/2\,dt$ не е табличен, докато $\int\frac{1-\cos t}{2}\,dt$ е сума от таблични.

Зад.6. $\int_\Gamma xy\,dl$, Γ е елипса в първи квадрант: $\left|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a,b>0 \right.$
$x,y\ge 0$.

Реш. Параметризираме с обобщени полярни координати:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \iff \begin{cases} x=a\cos t\\ y=b\sin t\\ 0\le t\le 2\pi\end{cases}$. От $x,y\ge 0 \Rightarrow 0\le t\le \pi/2$.

$$dl=\sqrt{a^2(-\sin t)^2+b^2\cos^2 t} = \sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}.$$

$$\int_\Gamma xy\,dl = \int_0^{\pi/2} a\cos t\cdot b\sin t\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= ab\int_0^{\pi/2}\sin t\,\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t+b^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,d\sin t = \frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t}\,d\sin^2 t$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{ab}{2(a^2-b^2)}\int_0^{\pi/2}\left[(a^2-b^2)\sin^2 t+b^2\right]^{1/2} d\left((a^2-b^2)\sin^2 t+b^2\right) =$$

$$= \frac{ab}{\cancel{2}(a^2-b^2)}\cdot\left((a^2-b^2)\sin^2 t+b^2\right)^{3/2}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{ab}{3(a-b)(a+b)}\cdot\left((a^2)^{3/2}-(b^2)^{3/2}\right) =$$

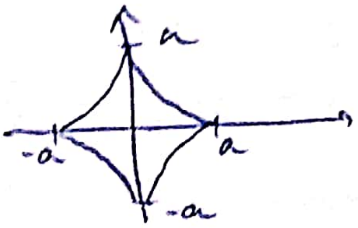
$$= \frac{ab\cancel{(a-b)}(a^2+ab+b^2)}{3\cancel{(a-b)}(a+b)} = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

Равенството (*) е в сила за $a\ne b$. При $a=b$, отдясно няма смисъл.
Така за $a=b$, пресмятаме отделно:

$$\int_\Gamma xy\,dl = ab\int_0^{\pi/2}\sin t\,\sqrt{a^2}\,d\sin t = a^2b\cdot\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^2b}{2} = \frac{a^3}{2} = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$$

$\Rightarrow$ Намерената формула важи и за $a=b$.

Кривата $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ от зад.5 се нарича астроида и изглежда така:



С формулата $L=\int_\Gamma 1\,dl$ и параметризацията от зад.5, може да се намери дължината на кривата. Оставяме за размисъл.