Редове на Фурие

1. Нека функцията $f(x)$ е периодична функция с период 2π . Нека $f(x)$ е интегруема в $[-\pi;\pi]$. Да разгледаме числата

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \text{ и } b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \qquad n=0,1,2,\dots .$$

Ред от вида

$$\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+(a_3\cos 3x+b_3\sin 3x)+\dots$$

се нарича **ред на Фурие на функцията** $f(x)$**.**

2. Функцията $f(x)$ се нарича **частично непрекъсната в** $[a;b]$, ако тя е непрекъсната във всяка точка от интервала **с изключение на краен брой точки** и в точките на прекъсване има лява и дясна граница.

Функцията $f(x)$ се нарича **частично гладка,** ако $f(x)$ и $f'(x)$ са частично непрекъснати.

3. **Теорема на Дирихле.** Ако функцията $f(x)$ е дефинирана и периодична с период 2π и частично гладка в $[-\pi;\pi]$, то редът на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ и в точките, в които $f(x)$ е непрекъсната, е в сила равенството:

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+(a_3\cos 3x+b_3\sin 3x)+\dots .$$

Ако в точката x_0 функцията е прекъсната, е в сила

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)+\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)\right)=\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos x_0+b_1\sin x_0)+(a_2\cos 2x_0+b_2\sin 2x_0)+\dots$$

4. (Равенство на Парсевал). Ако функцията $f^2(x)$ е интегруема в интервала $[-\pi;\pi]$ и $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ и $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$, $n=0,1,2,\dots$. е в сила:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx .$$

5. Ще припомним някои прости задачи, които се използват при развиване на функции в редове на Фурие.

*Ако $f(x)$ е дефинирана в $\mathbb{R}$, периодична с период ω и интегруема във всеки краен и затворен интервал са в села равенствата:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a+\omega}^{b+\omega} f(x)dx \qquad \text{и} \qquad \int_0^{\omega} f(x)dx=\int_a^{a+\omega} f(x)dx .$$

В интеграла $\int_a^b f(x)dx$ ще направим смяната $t=x+\omega$:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a+\omega}^{b+\omega} f(t-\omega)dt=\int_{a+\omega}^{b+\omega} f(t)dt=\int_{a+\omega}^{b+\omega} f(x)dx .$$

От това равенство следва $\int_0^a f(x)dx=\int_{\omega}^{a+\omega} f(x)dx$ и

$$\int_0^{\omega} f(x)dx = \int_0^{a} f(x)dx + \int_a^{a+\omega} f(x)dx + \int_{a+\omega}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int_a^{a+\omega} f(x)dx + \int_0^{a} f(x)dx - \int_a^{a+\omega} f(x)dx = \int_a^{a+\omega} f(x)dx .$$

** Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и интегруема в $[-a;a]$

– ако функцията е четна

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^{a} f(x)dx \quad \text{и} \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^{a} f(x)dx$$

– ако функцията е нечетна

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_0^{a} f(x)dx \quad \text{и} \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 .$$

*** Нека n и m са естествени числа. Тогава

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \text{ при } n \neq m \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0 \text{ при } n \neq m \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0 .$$

– $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos(n-m)x - \cos(n+m)x}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-m} \sin(n-m)x - \frac{1}{n+m} \sin(n+m)x \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 ;$$

– $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos(n-m)x + \cos(n+m)x}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{n-m} \sin(n-m)x + \frac{1}{n+m} \sin(n+m)x \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 ;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = 2\int_0^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_0^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \pi - \sin 2nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi ;$$

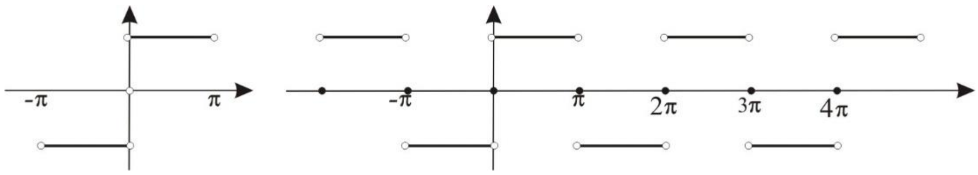
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = 2\int_0^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_0^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \pi + \sin 2nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

– Функцията $\sin nx \cos mx$ е нечетна и следователно $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0$.

Задача 1. Разложете в ред на Фурие, функцията

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{при } 0 < x < \pi \end{cases} .$$

Решение. Да продължим тази функция като периодична функция с период 2π с помощта на равенството $f(x+2\pi)=f(x)$ и $f(k\pi)=0$, $k\in\mathbb{Z}$. Така получената функция е частично гладка в $[-\pi;\pi]$ – производната и е равна на 0, навсякъде с изключение на три точки $-\pi$, 0 и π. Следователно можем да приложим теоремата на Дирихле.



Ще пресметнем коефициентите a_n и b_n.

– $a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx=0$ при $n=0,1,2,\ldots$, защото функцията $f(x)\cos nx$ е **нечетна**, а интервала е симетричен;

– $b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx$ при $n\in\mathbb{N}$, защото функцията $f(x)\sin nx$ е **четна,** а интервалът е симетричен. Оттук $n\in\mathbb{N}$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin nx dx=\frac{2}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi}\sin nx dnx=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n}(\cos n\pi-\cos 0)=\frac{2}{\pi n}[1-(-1)^n]=\begin{cases}\frac{4}{\pi(2k+1)} & \text{при } n=2k+1\\ 0 & \text{при } n=2k\end{cases}.$$

Така получихме, че

$$\operatorname{sgn} x=\frac{4}{\pi}\sin x+\frac{4}{3\pi}\sin 3x+\frac{4}{5\pi}\sin 5x+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)}\sin(2k+1).$$

Тъй като функцията $\operatorname{sgn}^2 x=1$ е интегруема, то е в сила равенството на Парсевал:

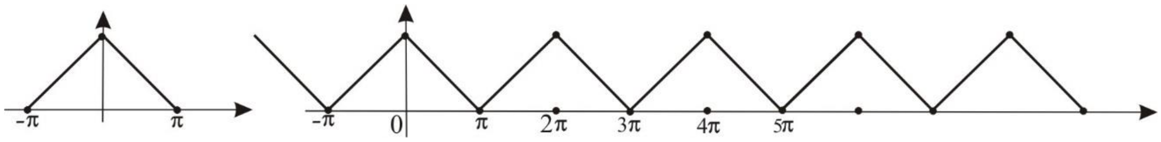
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}^2 x dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi(2k+1)}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{2\pi}{\pi}=\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Задача 2. Разложете в ред на Фурие, функцията

$$f(x)=\begin{cases}\pi+x & \text{при } -\pi\le x<0\\ \pi-x & \text{при } 0\le x\le\pi\end{cases}.$$

Решение. Да продължим тази функция като периодична функция с период 2π с помощта на равенството $f(x+2\pi)=f(x)$.

Така получената функция е частично гладка в $[-\pi;\pi]$ – производната и е равна на 1 при $-\pi<x<0$ и – 1 при $0<x<\pi$, навсякъде с изключение на три точки $-\pi$, 0 и π. Следователно можем да приложим теоремата на Дирихле.



Ще пресметнем коефициентите a_n и b_n.

– $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nxdx$ при $n=0,1,2,\dots$, защото функцията $f(x)\cos nx$ е четна, а интервала е симетричен.

При $n=0$ имаме

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos 0xdx=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)d(\pi-x)==-\frac{1}{\pi}(\pi-x)^2\Big|_0^{\pi}=\pi$$

При $n\in\mathbb{N}$:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nxdx=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)d\sin nx= \qquad \text{(интегр. по части)}$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left((\pi-x)\sin nx\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(-\cos nx\Big|_0^{\pi})=\frac{2}{n^2\pi}(1-(-1)^n)=\begin{cases}\dfrac{4}{(2k+1)^2\pi} & \text{при } n=2k+1\\ 0 & \text{при } n=2k+1\end{cases}.$$

– $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=0$ при $n\in\mathbb{N}$, защото функцията $f(x)\sin nx$ е нечетна, а интервалът е симетричен.

Така получихме

$$f(x)=\begin{cases}\pi+x\\ \pi-x\end{cases}=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\cos x+\frac{4}{3^2\pi}\cos 3x+\frac{4}{5^2\pi}\cos 5x+\dots=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x.$$

Тъй като функцията е непрекъсната, то равенството е вярно за всяко *x*. Например при $x=0$ имаме

$$\pi=f(0)=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}+\frac{4}{3^2\pi}+\dots \quad\Rightarrow\quad \frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots$$

Тъй като функцията $f^2(x)$ е интегруема (тя е непрекъсната), то е в сила равенството на Парсевал:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx=\frac{1}{2}\pi^2+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)dx=\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} \quad\Rightarrow$$

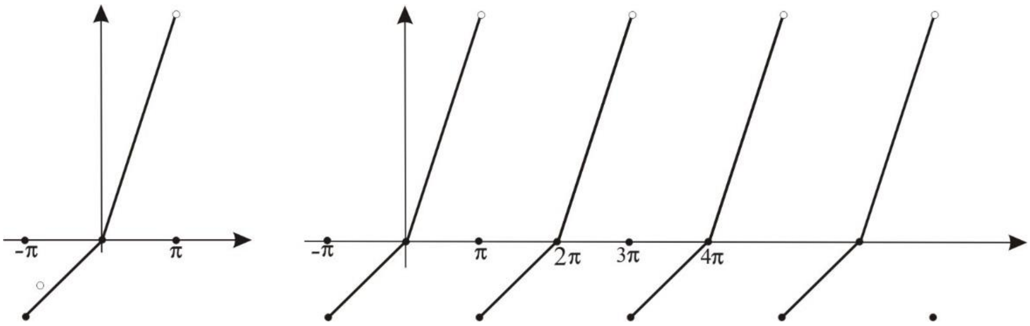
$$\Rightarrow\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2dx-\frac{\pi^2}{2}=\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} \quad\Rightarrow\quad -\frac{2}{3\pi}(\pi-x)^3\Big|_0^{\pi}-\frac{\pi^2}{2}=\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{2\pi^2}{3}-\frac{\pi^2}{2}=\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} \quad\Rightarrow\quad \frac{\pi^4}{96}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Да отбележим, че от направените разсъждения се вижда, **че редът на Фурие на четна функция съдържа само косинуси, а на нечетна – само синуси.**

Задача 3. Разложете в ред на Фурие, функцията $f(x)=|x|+2x$ в $[-\pi;\pi)$.

Да продължим функцията $f(x)=|x|+2x=\begin{cases}x & \text{при } -\pi\le x<0\\ 3x & \text{при } 0\le x<\pi\end{cases}$ като периодична функция с период 2π с помощта на равенството $f(x+2\pi)=f(x)$. Така получената функция е частично гладка в $[-\pi;\pi]$ – производната и е равна на 1 при $-\pi<x<0$ и 3 при



$0 < x < \pi$, навсякъде с изключение на три точки $-\pi$, 0 и π. Следователно можем да приложим теоремата на Дирихле.

Ще пресметнем коефициентите a_n и b_n.

$$- \; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 3x\cos nx dx =$$

($x\cos nx -$ нечетна функция)

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx + \frac{3}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx .$$

При $n = 0$ имаме

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos 0x dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x dx = \pi .$$

При $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dnx = \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi} x d\sin nx = \qquad \text{(интегр. по части)}$$

$$= \frac{2}{n\pi} x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1] .$$

$$-b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin ndx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 3x\sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin ndx + \frac{3}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx dx = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx dx =$$

($x\sin nx -$ четна функция)

$$= -\frac{4}{\pi n}\int_{0}^{n} xd\cos nx = -\frac{4x\cos nx}{\pi n}\Big|_0^{\pi} + \frac{4}{\pi n}\int_{0}^{\pi} \cos nx dx = \qquad \text{(интегр. по части)}$$

$$= -\frac{4(-1)^n}{n} + \frac{4}{\pi n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi} \quad = \quad \frac{4(-1)^{n+1}}{n} .$$

Така получихме

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1)\cos nx + \; \frac{4(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right] \text{ при } x \neq k\pi .$$

За да намерим $\dfrac{\lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} f(x) + \lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ x>\pi}} f(x)}{2}$ да пресметнем $f(x)$ в интервала $(0;2\pi)$:

В интервала $(0;\pi)$ функцията е $f(x)=2x+|x|=3x$.

В интервала $[\pi;3\pi)$ функцията е продължена с равенството $f(x)=f(x-2\pi)$ и $f(x)=f(x-2\pi)=2(x-2\pi)+|x-2\pi|=-2\pi+x$ при $\pi\le x<2\pi$. (вж. графиката)

Оттук $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}} 3x=3\pi$ и $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x>\pi}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x>\pi}}(-2\pi+x)=-\pi$.

В т. π сумата на реда е равна на $\dfrac{\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}} f(x)+\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x>\pi}} f(x)}{2}=\dfrac{3\pi-\pi}{2}=\pi$. (От периодичността на функциите $\sin nx$ и $\cos nx$, а от там и на реда, следва че във всички точки $x=k\pi$ сумата на реда е равна π.)

Като преобразуваме равенството за т. π, получаваме

$$\frac{\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}} f(x)+\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x>\pi}} f(x)}{2}=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)\cos n\pi+\frac{4(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi\right]\quad\Rightarrow$$

$$\pi=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)(-1)^n\right]\quad\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]\right]\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^2}\quad\Rightarrow\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)^2}\ .$$

Задача 4. Разложете в ред на Фурие, функцията $f(x)=\sin cx$ в $(-\pi;\pi)$.

Решение. а) Ако $c=n_0\in N$, то

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin n_0x\,dx=0\ \text{ при } n\ne m,\qquad b_{n_0}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 n_0x\,dx=1\quad\text{и}$$

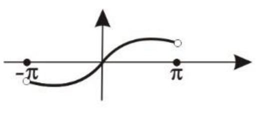
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin n_0x\cos mx\,dx=0\,.$$

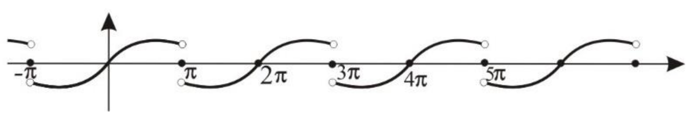
Така редът на Фурие съдържа само едно събираемо – самата функция $f(x)=\sin n_0x$.

Ако $c=-n_0\in N$, е ясно че редът на Фурие е $f(x)=-\sin n_0x$.

б) Нека c не е цяло число.

Да продължим функцията $f(x)=-\sin n_0x$ като периодична функция с период 2π с помощта на равенството $f(x+2\pi)=f(x)$. Така получената функция е частично гладка в $[-\pi;\pi]$ – производната ѝ $f'(x)=c\cos cx$ е непрекъсната навсякъде в $(-\pi;\pi)$.





Тъй като функцията $\sin cx\cos nx$ е нечетна, то $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin cx\cos nx\,dx=0$.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin cx\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\cos(c-n)x-\cos(c+n)x}{2}\right)dx=\quad(\sin cx\sin nx\text{ - четна})$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{c-n}\sin(c-n)x-\frac{1}{c+n}\sin(c+n)x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{c-n}\sin(c-n)\pi-\frac{1}{c+n}\sin(c+n)\pi\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{c-n}(\sin c\pi\cos n\pi-\cos c\pi\sin n\pi)-\frac{1}{c+n}(\sin c\pi\cos n\pi+\cos c\pi\sin n\pi)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{c-n}\sin c\pi-\frac{(-1)^n}{c+n}\sin c\pi\right)=(-1)^n\frac{\sin c\pi}{\pi}\left(\frac{1}{c-n}-\frac{1}{c+n}\right)=(-1)^n\frac{\sin c\pi}{\pi}.\frac{2n}{c^2-n^2}.$$

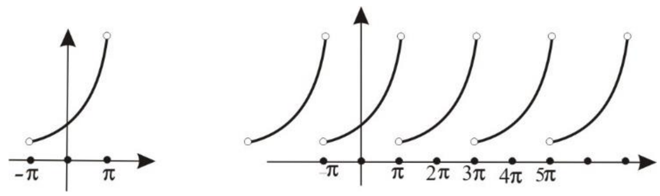
Така получихме $b_n=(-1)^{n-1}\frac{2}{\pi}\sin c\pi\frac{n}{n^2-c^2}$ и $\sin cx=\frac{2\sin c\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2-c^2}\sin nx$.

Задача 5. (За самостоятелна работа) Разложете в ред на Фурие, функцията $f(x)=\cos cx$ в $(-\pi;\pi)$.

Задача 6. Разложете в ред на Фурие, функцията

а) $f(x)=e^x$ в $(-\pi;\pi)$; б) $f(x)=e^x$ в $(0;2\pi)$.

Решение. а) Да продължим функцията $f(x)=e^x$ като периодична функция с период 2π с помощта на равенството $f(x+2\pi)=f(x)$. Така получената функция е частично гладка в $[-\pi;\pi]$ – производната ѝ е непрекъсната навсякъде с изключение на точките $-\pi$ и π.



Пресмятаме коефициентите

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x dx=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}.$$

При $n\in\mathbb{N}$:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx de^x=\frac{1}{\pi}e^x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\sin nx dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}[e^{\pi}\cos n\pi-e^{-\pi}\cos(-n\pi)]+nb_n=\frac{(-1)^n}{\pi}(e^{\pi}-e^{-\pi})+nb_n.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx de^x=\frac{1}{\pi}e^x\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cos nx dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}[e^{\pi}\sin n\pi-e^{-\pi}\sin n\pi)]-na_n=-na_n.$$

$$\left|\begin{array}{l}a_n=\frac{(-1)^n}{\pi}(e^{\pi}-e^{-\pi})+nb_n\\ b_n=-na_n\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left|\begin{array}{l}(1+n^2)a_n=\frac{(-1)^n}{\pi}(e^{\pi}-e^{-\pi})\\ b_n=-na_n\end{array}\right.\quad\Rightarrow$$

$$a_n=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}.\frac{(-1)^n}{n^2+1}\quad\text{и}\quad b_n=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}.\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}$$

Така при $x\neq(2k+1)\pi$ е в сила

$$e^x = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}\sin nx]\right).$$

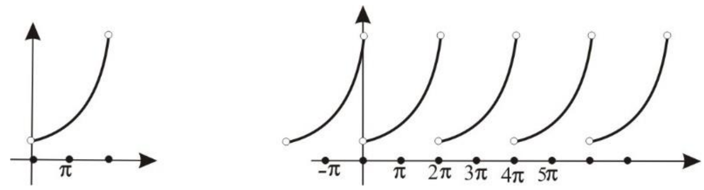
В точката $x=\pi$ сумата на реда е

$$\frac{\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}} f(x)+\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}} f(x)}{2}=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos n\pi+\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}\sin n\pi]\right) \quad\Rightarrow$$

$$\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{\pi}{2}\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}.$$

(От периодичността е ясно, че този пресмятания са в сила за всяка от точките $x=(2k+1)\pi$).

б) Да продължим функцията $f(x)=e^x$ като периодична функция с период 2π с помощта на равенството $f(x+2\pi)=f(x)$. Така получената функция е частично гладка в $[-\pi;\pi]$ – производната ѝ е непрекъсната навсякъде с изключение на точката 0.



Тъй като функцията $f(x)$ е периодична с период 2π, то

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nx dx$$

и $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx dx$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} e^x dx=\frac{e^{2\pi}-e^0}{\pi}=\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}.$$

При $n\in\mathbb{N}$:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} e^x\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\cos nx de^x=\frac{1}{\pi}e^x\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{0}^{2\pi} e^x\sin nx dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}[e^{\pi}\cos 2n\pi-e^{-\pi}\cos(n0)]+nb_n=\frac{1}{\pi}(e^{\pi}-e^{-\pi})+nb_n.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} e^x\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\sin nx de^x=\frac{1}{\pi}e^x\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos nx dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}[e^{\pi}\sin 2n\pi-e^{-\pi}\sin n0)]-na_n=-na_n.$$

$$\left|\begin{aligned}&a_n=\frac{1}{\pi}(e^{2\pi}-1)+nb_n\\&b_n=-na_n\end{aligned}\right. \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{aligned}&(1+n^2)a_n=\frac{1}{\pi}(e^{2\pi}-1)\\&b_n=-na_n\end{aligned}\right. \quad\Rightarrow$$

$$a_n=\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}.\frac{1}{n^2+1} \quad\text{и}\quad b_n=-\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}.\frac{n}{n^2+1}$$

Така при $x\neq 2k\pi$ е в сила

$$e^x = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n^2+1}\cos nx - \frac{n}{n^2+1}\sin nx]\right).$$

В точката $x=0$ сумата на реда е

$$\frac{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) + \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)}{2} = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n^2+1}\cos n0 - \frac{n}{n^2+1}\sin n0]\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{e^{2\pi}+1}{2} = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}.\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\pi}{2}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1} = \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}.$$

(От периодичността е ясно, че този пресмятания са в сила за всяка от точките $x = 2k\pi$).

Задача 7. (За самостоятелна работа) Разложете в ред на Фурие, функцията

а) $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ при $(-\pi;\pi)$; б) $f(x) = \sin^2 8x$ при $(-\pi;\pi)$;

в) $f(x) = |\sin x|$ при $(-\pi;\pi)$; г) $f(x) = x\sin x$ при $(-\pi;\pi)$.