ЧЕСТИТА НОВА ГОДИНА!

Пожелавам на всички здраве, късмет и много успехи!

Криви от II степен

E_2^*, хомогенни координати

$$k: F(\underset{1}{x}, \underset{2}{y}, \underset{3}{t}) = a_{11} \cdot \underset{11}{x^2} + 2a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2a_{13} \cdot x \cdot t + 2a_{23} \cdot y \cdot t + a_{33} \cdot t^2 = 0$$

$\exists\, a_{ij} \neq 0$

Примери:

1) $k_1: x^2 + y^2 = 4 \cdot t^2$

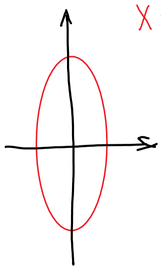
окръжност

$X = \frac{x}{t}, \; Y = \frac{y}{t}$

$k_1: X^2 + Y^2 = 4$

2) $k_2: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = t^2$

елипса



$k_2: \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1$

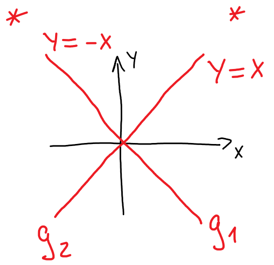
3) $k_3: x^2 - y^2 = t^2$

хипербола

$k_3: X^2 - Y^2 = 1$

4) $k_4: x^2 - y^2 = 0$

$(x-y) \cdot (x+y) = 0$



k_4 е изродена

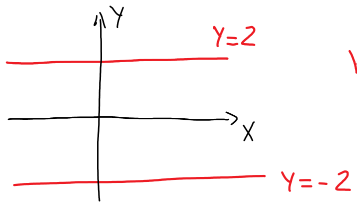
$k_4 = g_1 \cup g_2$

k_4 се разпада на 2 прави g_1 и g_2

5) $k_5: y^2 - 4t^2 = 0$

$(y-2t) \cdot (y+2t) = 0$

$y = 2t \quad y = -2t$



$k_5 = g_3 \cup g_4 \quad g_3: Y = 2$

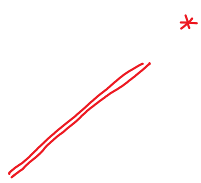
$g_4: Y = -2$

6) $k_6: x^2 - 2xy + y^2 = 0$

$(x-y)^2 = 0$

$k_6 = g_5 \cup g_5$

$g_5: x - y = 0$



Класификация на кривите от II степен по брой

безкрайни точки

безкрайни точки

$k: F(\underset{1}{x},\underset{2}{y},\underset{3}{t}) = a_{11}.\underset{11}{x^2} + 2a_{12}.x.y + a_{22}.y^2 + 2a_{13}.x.t + 2a_{23}.y.t + a_{33}.t^2 = 0$

$\omega:\ t = 0$

$$k \cap \omega = ?$$

$\left|\begin{array}{l} F(x,y,t)=0 \\ t=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} a_{11}.x^2 + 2a_{12}.xy + a_{22}.y^2 = 0 \ (*) \\ t=0 \end{array}\right.$

$$D = k^2 - a.c = a_{12}^2 - a_{11}.a_{22}$$

I сл. $D<0$, $(*)$ н.р.к. $\Rightarrow$ k не съдържа безкр. точки $\{x^2+y^2=0\}$
k е от елиптичен тип.

II сл. $D=0$, $(*)$ има само 1 решение $\Rightarrow$ k съдържа само 1 безкр. точка
k е от параболичен тип.

$\{x^2-t^2=0\}$
$||$

III сл. $D>0$, $(*)$ има 2 различни реални корена $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ k съдържа 2 разл. безкрайни точки
k е от хиперболичен тип.

Класификация на кривите от II степен по брой
особени точки

$k: F(\underset{1}{x},\underset{2}{y},\underset{3}{t}) = a_{11}.\underset{11}{x^2} + \overset{-2}{2a_{12}}.x.y + a_{22}.y^2 + 2a_{13}.x.t + 2a_{23}.y.t + a_{33}.t^2 = 0$

$F_1(x,y,t) = \frac{1}{2}.\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2}.(2a_{11}.x + 2a_{12}.y + 2a_{13}.t) = a_{11}.x + a_{12}.y + a_{13}.t$

$F_2(x,y,t) = \frac{1}{2}.\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2}.(2a_{12}.x + 2a_{22}.y + 2a_{23}.t) = a_{12}.x + a_{22}.y + a_{23}.t$

$F_3(x,y,t) = \frac{1}{2}.\frac{\partial F}{\partial t} = a_{13}.x + a_{23}.y + a_{33}.t$

$F_3(x,y,t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial r}{\partial t} = a_{13}.x + a_{23}.y + a_{33}.t$

Опр. 1: Точка $M_0(x_0, y_0, t_0)$ наричаме особена точка за k, ако

$$\left| \begin{array}{l} F_1(M_0) = a_{11}.x_0 + a_{12}.y_0 + a_{13}.t_0 = 0 \\ F_2(M_0) = a_{12}\,x_0 + a_{22}.y_0 + a_{23}.t_0 = 0 \\ F_3(M_0) = a_{13}.x_0 + a_{23}.y_0 + a_{33}.t_0 = 0\,. \end{array} \right. \quad (*) \text{ ХСЛУ}$$

$\det A$, $A = \{a_{ij}\}_{3\times 3}$

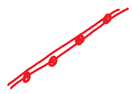
I сл. $\boxed{\det A \neq 0}$ => (*) има ! решение $(0,0,0)$ -> не е точка

k не съдържа особени точки (неизродена, не се разпада)

II сл. $\boxed{\det A = 0,\ r(A) = 2}$ => (*) има безбр. много решения с точност до 1 параметър => $(k.x_0, k.y_0, k.t_0)$ -> M_0

k съдържа точно 1 особена точка M_0, разпада се на 2 разл. прави.

III сл. $\det A = 0$, $r(A) = 1$ => всяка точка от k е особена точка

$k = g \cup g$ 

Опр. 2: Крива от II степен, която съдържа особена точка (1 или безброй), се нарича изродена, разпада се на 2 прави линии.

$2a_{12}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

$a_{11}=1, \ a_{12}=\frac{1}{2}, \ a_{22}=-2, \ a_{13}=0, \ a_{23}=-\frac{3}{2}, \ a_{33}=-1$

1) $D = a_{12}^2 - a_{11}.a_{22} = \frac{1}{4} - 1.(-2) = \frac{9}{4} > 0 \Rightarrow$ k_2 е от хиперболичен тип

2) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{vmatrix} = \overset{4}{2} - \left[\frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right] = \frac{8-9+1}{4} = 0 \Rightarrow$ k_2 е изродена

Извод k_2 се разпада се на 2 разл. пресичащи се прави.

в) $k_3: x^2 - 2xy + y^2 - 4xt - 6yt + 3t^2 = 0$ (Упр.)

г) $k_4: x^2 - 4xy + 4y^2 - 3xt + 6yt - 4t^2 = 0$ (Упр.)

Полярност спрямо крива от II степен

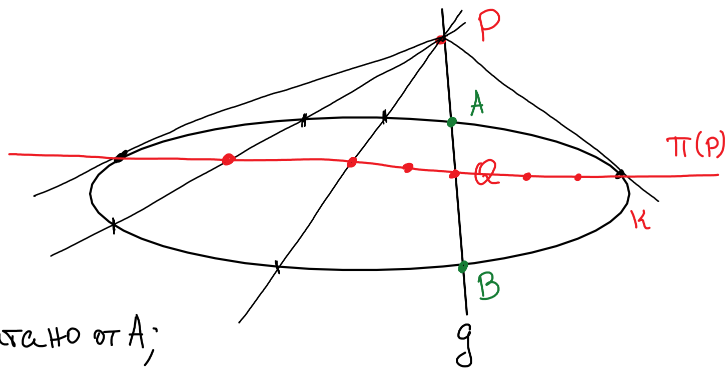
E_2^*, хомогенни координати

k - неизродена ($\det A \neq 0$)

I Геометрична интерпретация

P - външна за k

$g \ni P$, $g \cap k = \{A, B\}$



$$\boxed{\frac{AP}{BP} = \lambda}$$

т. P дели външно AB в отнош. λ, считано от A;

т. Q - вътр. за AB : $\boxed{\frac{AQ}{BQ} = \lambda}$

т. P и т. Q се наричат полярно спрегнати спрямо k.

т. P и т. Q се наричат полярно спрегнати спрямо k.

Геометричното място от всички т. Q, спрегнати на т. P спр. k, е права линия $\pi(P)$ – поляра на т. P спр. k.

P – полюс на $\pi(P)$ спр. k.

Ако т. P е външна за k, то $\pi(P)$ е секуща за k;

Ако т. $P \in k$, то $\pi(P)$ е допирателната към k в т. P;

Ако т. P е вътрешна за k, то $\pi(P)$ няма общи точки с k.