ЛЕКЦИЯ 6

Геометрия на движението

Съдържание

1. Поле на ускоренията на равнинна фигура.

- *ускорението – производна по времето от скоростта:*

  $\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v_0}}{dt} + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \frac{d\mathbf{v_0}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \qquad (1)$$

- означения

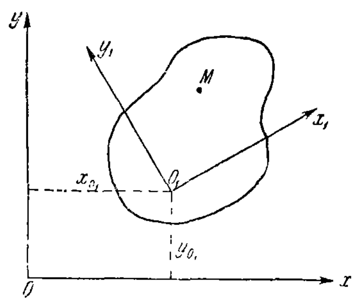
  - постъпателно ускорение: $\mathbf{w}_0 = \dfrac{d\mathbf{v}_0}{dt}$
  - въртеливо ускорение: $\mathbf{w}^{(B)} = \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}'$
  - центростремително ускорение: $\mathbf{w}^{(C)} = \boldsymbol{\omega} \times \dfrac{d\mathbf{r}'}{dt}$

но $\dfrac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$, $\quad \mathbf{w}^{(C)} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = (\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{r}')\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}' = -\omega^2 \mathbf{r}'$

- *ускорението на произволна точка при равнинно движение е векторна сума на постъпателното ускорение (на полюса), въртеливото ускорение (около полюса) и центростремителното ускорение (към полюса)*

Или

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}^{(B)} + \mathbf{w}^{(C)} \quad = \quad \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' - \omega^2 \mathbf{r}' \qquad (2)$$



фиг.1

- проекции на ускорението в неподвижната координатна система

от $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, т.е. координатите на $\mathbf{r}'$ са $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(x - x_0, y - y_0)$

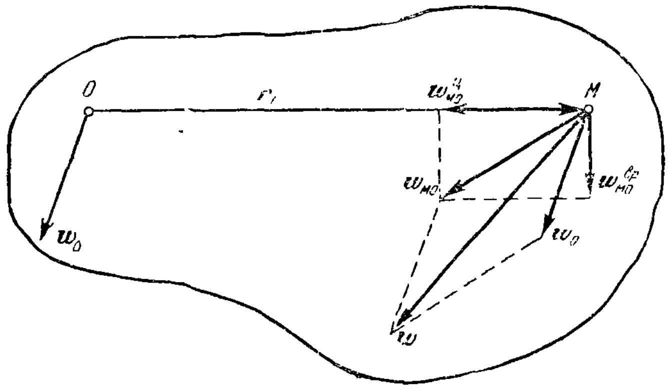
$$\begin{aligned} w_x &= \ddot{x}_0 - \ddot{\varphi}(y - y_0) - \dot{\varphi}^2 (x - x_0) \\ w_y &= \ddot{y}_0 + \ddot{\varphi}(x - x_0) - \dot{\varphi}^2 (y - y_0) \end{aligned} \qquad (3)$$

- проекции на ускорението в подвижната координатна система

$$\begin{aligned} w_{x'} &= w_{0x'} - \ddot{\varphi}\, y' - \dot{\varphi}^2 x' \\ w_{y'} &= w_{0y'} + \ddot{\varphi}\, x' - \dot{\varphi}^2 y' \end{aligned} \qquad (4)$$

- при зададено движение – координатите на полюса и ъгъла на въртене като известни функции на времето, величините в десните страни на (3) и (4) могат да се определят.

- означения: (фиг.2)



фиг.2

- ускорения на точки О и М: $\mathbf{w}_O$ и $\mathbf{w}_M$
- геометрична сума на векторите на въртеливото и центростремителното ускорение на точка М, когато за полюс е избрана точка О: $\mathbf{w}_{OM}$

$$\mathbf{w}_{OM} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{OM} - \omega^2 \mathbf{r}_{OM}, \qquad (5)$$

където:

$$\mathbf{w}^{(B)}{}_{OM} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{OM}, \qquad \left|\mathbf{w}^{(B)}{}_{OM}\right| = \varepsilon\, r_{OM}$$

$$\mathbf{w}^{(C)}{}_{OM} = -\omega^2 \mathbf{r}_{OM}, \qquad \left|\mathbf{w}^{(C)}{}_{OM}\right| = \omega^2 r_{OM}$$

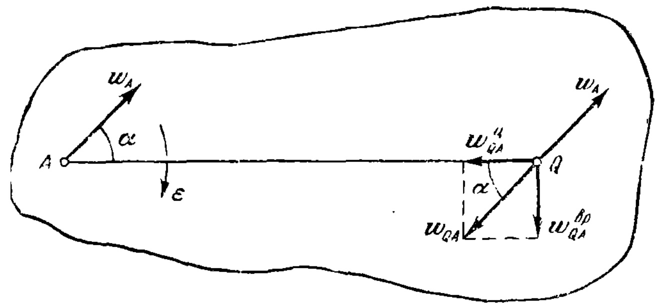
като двата вектора са перпендикулярни.

Или

$$\mathbf{w}_M = \mathbf{w}_O + \mathbf{w}_{OM} = \mathbf{w}_O + \mathbf{w}^{(B)}{}_{OM} + \mathbf{w}^{(C)}{}_{OM} \qquad (6)$$

$w_{OM} = r_{OM}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ - големина на вектора $\mathbf{w}_{OM}$

- моментен център на ускоренията
  - нека α е ъгълът между центростремителното ускорение на точка Q (полюс - А) и $\mathbf{w}_{QA}$ (фиг.3)



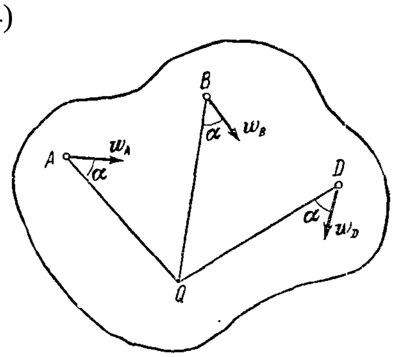
фиг.3

$$tg\alpha = \frac{w^{(B)}{}_{QA}}{w^{(C)}{}_{QA}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}\,, \quad w_{QA} = r_{QA}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

- дефиниране на отсечка QA , така че $QA = \dfrac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$
- при известен вектор на $\mathbf{w}_A$ от А на второто рамо на ъгъл α (първо рамо на ъгъла е направлението на $\mathbf{w}_A$) се нанася QA
- големините са $w_{QA} = r_{QA}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = w_A$
- избиране на ориентирания ъгъл (знак минус при ускорително и плюс при закъснително движение), така че $\mathbf{w}_{QA} = -\mathbf{w}_A$
- тогава $\mathbf{w}_Q = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{QA} = \mathbf{w}_A - \mathbf{w}_A = \mathbf{0}$

- съществува точка, чието ускорение е нула - *<u>моментен център на ускоренията;</u> за определянето му е достатъчно да бъде известно ускорението на една точка и ъгълът* α

- определяне на моментния център на ускоренията по известни ускорения на две точки (фиг.4)



фиг.4

- поле на ускоренията
  - нека Q е моментен център на ускоренията, избран за полюс
  - тогава ускорението на произволна точка B:

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_{QB} = \mathbf{w}^{(B)}{}_{QB} + \mathbf{w}^{(C)}{}_{QB} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{QB} - \omega^2 \mathbf{r}_{QB} \qquad (7)$$

- въртеливото ускорение е вектор, перпендикулярен на радиус-вектора на точката относно моментния център на ускоренията; посоката му съвпада с посоката на въртенето при ускорително въртене и е противоположна при закъснително

- центростремителното ускорение е вектор, насочен винаги към моментния център на ускоренията

- пълното ускорение на произволна точка е пропорционално на разстоянието от точката до моментния център на ускоренията и (за всички точки) сключва един и същи ъгъл с радиус-вектора на точката относно моментния център на ускоренията

- разлика между въртеливо ускорение $\mathbf{w}^{(B)}$ и тангенциално ускорение $\mathbf{w}_\tau$:

  - тангенциалното е по допирателната към траекторията на разглежданата точка и е перпендикулярно на радиус-вектора на точката относно моментния център на скоростите
  - докато въртеливото е перпендикулярно на радиус-вектора на точката относно моментния център на ускоренията

- разлика между центростремителното ускорение $\mathbf{w}^{(C)}$ и нормалното ускорение $\mathbf{w}_n$:
  - нормалното ускорение е по главната нормала към траекторията на разглежданата точка
  - центростремителното ускорение е по направление на радиус-вектора на точката относно моментния център на ускоренията

- радиус-вектор моментния център на ускоренията $\mathbf{r}_Q$ в неподвижната координатна система и $\mathbf{r}'_Q$ в подвижната координатна система

  $$\mathbf{w}_Q = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}'_Q - \omega^2\mathbf{r}'_Q = \mathbf{0} \qquad (8)$$

  след векторно умножение отляво с $\boldsymbol{\varepsilon}$:

  $$\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{w}_Q = \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon}\times(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}'_Q) - \omega^2(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}'_Q) = \mathbf{0}$$

  разкриване надвойното векторно произведение:

  $$\mathbf{0} = \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{w}_O + (\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r}'_Q)\boldsymbol{\varepsilon} - (\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{r}'_Q - \omega^2(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}'_Q)\,;$$

  отчитане на $(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r}'_Q) = 0$ при равнинно двежение;

  също $(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon^2$ и от (8): $(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}'_Q) = \omega^2\mathbf{r}'_Q - \mathbf{w}_O$,

  Тогава след заместване и преобразуване се получава

  $$\mathbf{0} = \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{w}_O - \varepsilon^2\,\mathbf{r}'_Q - \omega^2(\omega^2\mathbf{r}'_Q - \mathbf{w}_O),$$

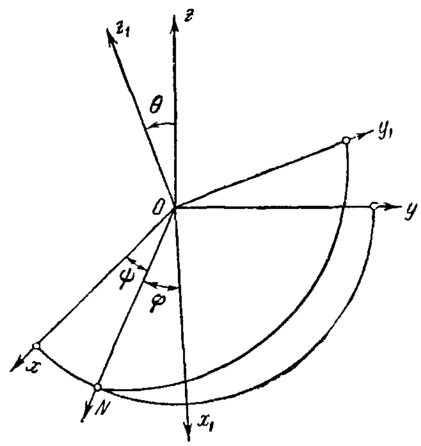
  $$\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{w}_O - (\varepsilon^2 + \omega^4)\mathbf{r}'_Q + \omega^2\mathbf{w}_O = \mathbf{0}$$

  или окончателно

  $$\mathbf{r}'_Q = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{w}_O + \omega^2\mathbf{w}_O}{\varepsilon^2 + \omega^4}, \qquad \mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_O + \mathbf{r}'_Q \qquad (9)$$

2. Въртене на тяло около неподвижна точка. Ойлерови ъгли.

- Ъгли на Ойлер (ψ, θ, φ) - параметри, еднозначно определящи положението на твърдо тяло с неподвижна точка
  - ъгъл на прецесия: ψ
  - ъгъл на нутация: θ
  - ъгъл на чисто въртене: φ



фиг.5

- разглеждат се две координатни системи с общо начало (фиг.5):
  - $Oxyz$: неподвижна координатна система
  - $Ox_1y_1z_1$: координатна система, фиксирана в тялото; подвижна
  - ON: пресечница на равнините Oxy и Ox_1y_1; *възлова линия*

- единични вектори по осите на координатни системи:
  - $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$: за неподвижна координатна система $Oxyz$
  - $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$: за подвижната координатна система $Ox_1y_1z_1$
  - $\mathbf{n}$: по възловата линия
    - $\mathbf{n_1}$: по ос ON_1, перпендикулярна на ON и лежаща в Oxy
    - $\mathbf{n}_1'$: по ос ON_1', перпендикулярна на ON и лежаща в Ox_1y_1

- последователност от три завъртания:
  - координатна система $Oxyz$ е завъртяна около оста Oz на ъгъл ψ, докато оста Ox съвпадне с оста ON
  - завъртане около ON на ъгъл θ, като оста Oz заеме положение Oz_1
  - завъртане около Oz_1 на ъгъл φ, докато оста ON съвпадне с оста Ox_1

- връзка между единичните вектори

  - при завъртане на ъгъл ψ около оста Oz

$$\mathbf{i} = \mathbf{n}\cos\psi - \mathbf{n_1}\sin\psi \qquad (10)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{n}\sin\psi + \mathbf{n_1}\cos\psi \qquad (11)$$

  - при завъртане на ъгъл φ около Oz_1

$$\mathbf{i}' = \mathbf{n}\cos\varphi + \mathbf{n}_1'\sin\varphi \tag{12}$$

$$\mathbf{j}' = -\mathbf{n}\sin\varphi + \mathbf{n}_1'\cos\varphi \tag{13}$$

- скаларни произведения на $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_1'$:

$$\mathbf{nn} = 1, \qquad \mathbf{nn}_1' = 0, \qquad \mathbf{nn}_1 = 0, \qquad \mathbf{n}_1\mathbf{n}_1' = \cos\theta \tag{14}$$

$$\mathbf{n}_1\mathbf{k}' = \cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \qquad \mathbf{nk}' = 0, \qquad \mathbf{kn}_1' = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

- косинуси на ъглите между единичните вектори на $Oxyz$ и $Ox_1y_1z_1$

$$\begin{aligned}\alpha_{11} = \mathbf{ii}' &= (\mathbf{n}\cos\psi - \mathbf{n}_1\sin\psi)\,(\mathbf{n}\cos\varphi + \mathbf{n}_1'\sin\varphi) = \\ &= \mathbf{nn}\cos\psi\cos\varphi + \mathbf{nn}_1'\cos\psi\sin\varphi - \mathbf{n}_1\mathbf{n}\sin\psi\cos\varphi - \mathbf{n}_1\mathbf{n}_1'\sin\psi\sin\varphi = \\ &= \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta\end{aligned}$$

$$\alpha_{11} = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\alpha_{21} = \mathbf{ij}' &= (\mathbf{n}\cos\psi - \mathbf{n}_1\sin\psi)\,(-\mathbf{n}\sin\varphi + \mathbf{n}_1'\cos\varphi) = \\ &= -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{31} = \mathbf{ik}' &= (\mathbf{n}\cos\psi - \mathbf{n}_1\sin\psi)\,\mathbf{k}' = -\mathbf{n}_1\mathbf{k}'\sin\psi = -\sin\psi\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = \\ &= \sin\psi\sin\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{12} = \mathbf{ji}' &= (\mathbf{n}\sin\psi + \mathbf{n}_1\cos\psi)\,(\mathbf{n}\cos\varphi + \mathbf{n}_1'\sin\varphi) = \\ &= \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{22} = \mathbf{jj}' &= (\mathbf{n}\sin\psi + \mathbf{n}_1\cos\psi)\,(-\mathbf{n}\sin\varphi + \mathbf{n}_1'\cos\varphi) = \\ &= -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{32} = \mathbf{jk}' &= (\mathbf{n}\sin\psi + \mathbf{n}_1\cos\psi)\,\mathbf{k}' = \mathbf{n}_1\mathbf{k}'\cos\psi = \cos\psi\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = \\ &= -\cos\psi\sin\theta\end{aligned}$$

$$\alpha_{13} = \mathbf{ki}' = \mathbf{k}\;(\mathbf{n}\cos\varphi + \mathbf{n}_1'\sin\varphi) = \mathbf{kn}_1'\sin\varphi = \sin\varphi\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\varphi\sin\theta$$

$$\alpha_{23} = \mathbf{kj}' = \mathbf{k}\;(-\mathbf{n}\sin\varphi + \mathbf{n}_1'\cos\varphi) = \mathbf{kn}_1'\cos\varphi = \cos\varphi\sin\theta$$

$\alpha_{33} = \mathbf{kk}' = \cos\theta$

- принципи на избор на система на Ойлерови ъгли:

  - избират се две *основни оси* съответно от неподвижната и подвижната координатна система $Oxyz$ и $Ox_1y_1z_1$ (в разглеждания случай Oz и Oz_1)

  - *основни равнини* : равнините, перпендикулярни на основните оси (в разглеждания случай Oxy и Ox_1y_1); пресечницата на основните равнини е линията на възлите

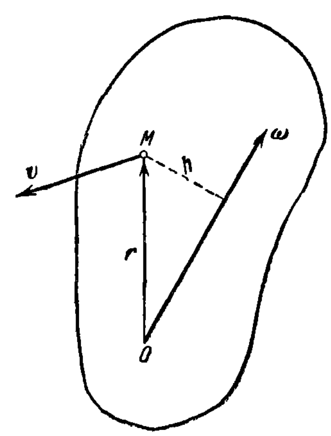
  - *отчетни оси*: оси в системите Oxy и Ox_1y_1, различни от основните оси

3. Поле на скоростите в твърдо тяло, въртящо се около неподвижна точка.

- теорема на Ойлер: *Всяко преместване на твърдо тяло, имащо неподвижна точка, може да се осъществи чрез завъртане около ос, която минава през тази точка*

- представяне на преместване чрез вектора на малкото завъртане (фиг.6)

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}$$



фиг.6

- две последователни малки завъртания могат да се представят с едно еквивалентно на тях завъртане, равно на векторната сума на двете завъртания

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2$$

- уравнение на движението : Ойлеровите ъгли – зададени функции на времето

$$\psi = f_1(t)\,,\ \theta = f_2(t)\,,\ \varphi = f_3(t) \qquad (15)$$

- нека Δt е интервал, за който се извършва преместването ; скоростта – граница на малкото преместване

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{\Delta t} \times \mathbf{r}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{\Delta t}\right) \times \mathbf{r} \qquad (16)$$

$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{\theta}}{\Delta t}$ - вектор на ъгловата скорост; посоката му съвпада с граничното положение на оста на завъртане за безкрайно малък интервал от време

или

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (17)$$

4. Моментна ос на въртене на твърдо тяло.

❖ <u>големината на вектора на ъгловата скорост не може да се разглежда като производна на някакъв ъгъл (както при въртене около неподвижна ос). Направлението на вектора се изменя с времето</u> – *моментна ос*

- моментна ос – геометрично място на точките, имащи в даден момент нулева скорост

- уравнение на моментната ос: $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$
    - векторите $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{r}$ са успоредни
    - имат общо начало: неподвижната точка

- в неподвижната координатна система

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}$$

- в подвижната координатна система

$$\frac{x'}{\omega_{x'}} = \frac{y'}{\omega_{y'}} = \frac{z'}{\omega_{z'}}$$

определяне на скоростта при дадено уравнение на движението

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega_1} + \boldsymbol{\omega_2} + \boldsymbol{\omega_3} \tag{18}$$

където:

$\boldsymbol{\omega_1}$ - ъглова скорост при завъртане около оста Oz (изменение на ψ)

$\boldsymbol{\omega_2}$ - ъглова скорост при завъртане около оста на възлите (изменение на θ)

$\boldsymbol{\omega_3}$ - ъглова скорост при завъртане около оста Oz_1 (изменение на φ)

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{k} + \dot{\theta}\mathbf{n} + \dot{\varphi}\mathbf{k}'$$

- проектиране (18) на неподвижните оси:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_y &= -\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_z &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned} \tag{19}$$

- проектиране (18) на подвижните оси:

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \omega_{y'} &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \omega_{z'} &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \tag{20}$$

- големина на моментната ъглова скорост:

$$\omega^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta \tag{21}$$

- Изразите (19) и (20), заедно с формулите за косинусите на ъглите между осите на неподвижната и подвижната координатни системи, описват *разпределението на скоростите в твърдо тяло с неподвижна точка*.

5. Аксоиди.

- подвижен аксоид – повърхността, образувана от моментната ос в подвижната координатна система, т.е. в самото тяло

- неподвижен аксоид – повърхността, образувана от моментната ос в неподвижната координатна система, т.е. в неподвижното пространство

- *моментната ос е обща права на двата аксоида – подвижния и неподвижния, във всеки момент*

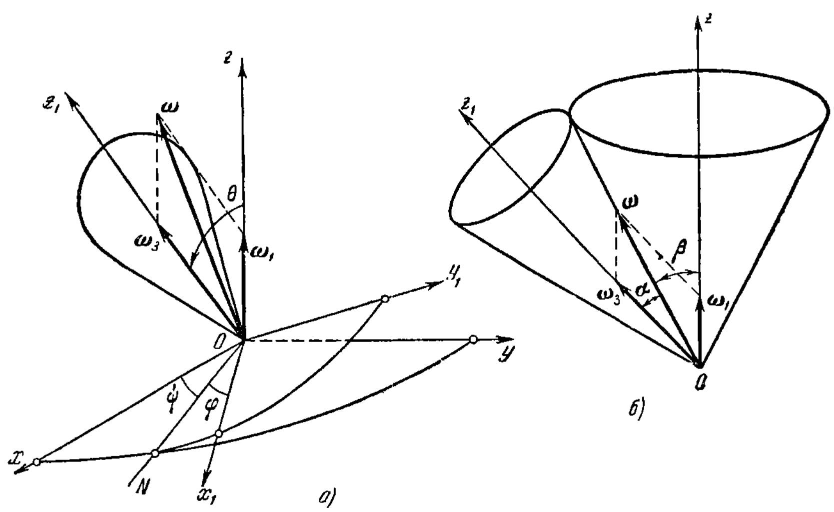
- сравнение с центроидите:

  двата аксоида са конични повърхнини с общ връх – неподвижната точка и тези конични повърхнини се допират в моментната ос

- *при движение на тяло с неподвижна точка подвижният аксоид се търкаля без хлъзгане по неподвижния аксоид*

6. Пример.

Твърдо тяло се върти около неподвижна точка съгласно уравненията $\psi = 2t$, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, $\varphi = 30t$ (фиг.7) . Да се определи моментната ъглова скорост на тялото и уравненията на аксоидите .



фиг.7

Производните на Ойлеровите ъгли са:

$$\dot{\psi} = 2\,,\ \dot{\theta} = 0\,, \dot{\varphi} = 30$$

Моментната ъглова скорост: $\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\,\mathbf{k} + \dot{\varphi}\mathbf{k}' = 2\mathbf{k} + 30\mathbf{k}'$

Проекциите върху неподвижните оси:

$$\omega_x = \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi = 30\sin 2t\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\omega_y = \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\psi = -30\cos 2t\sin\frac{\pi}{6} \qquad (*19)$$

$$\omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} = 30\cos\frac{\pi}{6} + 2$$

Проекциите върху подвижните оси:

$$\omega_{x'} = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi = 2\sin\frac{\pi}{6}\sin 30t$$

$$\omega_{y'} = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi = 2\sin\frac{\pi}{6}\cos 30t \qquad (*20)$$

$$\omega_{z'} = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = 2\cos\frac{\pi}{6} + 30$$

Моментната ъглова скорост:

$$\omega^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta = 4 + 900 + 2.30\sqrt{3}\,;$$

$$\omega \approx 31.8\ s^{-1}$$

Уравнение на моментната ос в неподвижната координатна система:

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \qquad \frac{x}{15\sin 2t} = \frac{y}{-15\cos 2t} = \frac{z}{28}$$

Уравнение на моментната ос в подвижната координатна система:

$$\frac{x'}{\omega_{x'}} = \frac{y'}{\omega_{y'}} = \frac{z'}{\omega_{z'}} \qquad \frac{x'}{\sin 30t} = \frac{y'}{\cos 30t} = \frac{z'}{31.8}$$

Уравненията на аксоидите се получават от уравненията на моментната ос чрез изключване на времето:

- уравнение на неподвижния аксоид: $x^2 + y^2 - \left(\frac{15z}{28}\right)^2 = 0$
- уравнение на подвижния аксоид: $x'^2 + y'^2 - \left(\frac{15z}{31.8}\right)^2 = 0$