26т. => 4 25

Име Майкъл Презиме Захариев Фамилия Зарков

Ф.Н. 45655 Група 2 Асистент

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ГЕОМЕТРИЯ

III курс, Информатика

02.09.2024 г.

Вариант А

1 зад. В разширеното евклидово пространство E_3^*, в хомогенни координати са дадени точката $M(1,1,3,1)$ и правата a: $\begin{cases} x - z = 0 \\ x - y - t = 0 \end{cases}$.

a) (4т.) Да се намерят уравнения на правата b, която минава през точката M и е успоредна на правата a;

b) (4т.) Да се намери уравнение на равнината β, която минава през успоредните прави a и b;

c) (6т.) Да се намери аналитично представяне на ортогонално проектиране ψ на E_3^* върху равнината β.

2 зад. (8т.) Спрямо ОКС $K = Oxy$ в равнината е дадена ортогоналната трансформация

$$\varphi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Определете вида на изображението φ. Намерете образа на правата $g: 3x + y + 2 = 0$ под действие на φ.

3 зад. (8т.) Спрямо ОКС $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ да се намери аналитично представяне на осева симетрия ψ относно правата g, определена от точките $A(4, 3, 1)$ и $B(0, 0, 1)$.

4 зад. Спрямо ОКС $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ в E_3 е дадена крива линия γ с уравнения:

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = \ln q \\ x^2 = q^2, \ q > 0. \\ x^3 = 2q \end{cases}$$

a) (6т.) Да се намерят скаларните и векторните инварианти на γ;

b) (2т.) Да се докаже, че γ е обща винтова линия и да се намерят уравнения на цилиндричната повърхнина, върху която лежи кривата;

c) (4т.) Да се намерят уравненията на оскулачната равнина и допирателната в точката $P(0, 1, 2)$ от кривата γ.

...ева, Мойка Зарова, ФН: 45655

Зад. 1

а) $b: \begin{vmatrix} \ni M \\ \parallel a \end{vmatrix}$, $U_a(1, 1, 1, 0)$, $b: \begin{vmatrix} \ni M \\ \ni U_a \end{vmatrix}$

$b: \begin{vmatrix} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = 3.\lambda + \mu \\ t = \lambda \end{vmatrix}$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$

4т

б) $\beta: \begin{vmatrix} \ni a \\ \ni b \end{vmatrix}$, $N(2, 1, 2, 1) \ni a$, $\beta: \begin{vmatrix} \ni M \\ \ni N \\ \ni U_a \end{vmatrix}$, $\beta: Ax + By + Cz + Dt = 0$

$\begin{vmatrix} A + B + 3C + D = 0 \\ 2A + B + 2C + D = 0 \\ A + B + C = 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} D = -2C \\ 2A + B + 2C - 2C = 0, \; B = -2A \\ A - 2A + C = 0, \; A = C \end{vmatrix}$

за $C = 1$, $\beta[1, -2, 1, -2]$. – 4т

с) В E_3 $\vec{n}(1, -2, 1) \perp \beta$. Знам $S(1, -2, 1, 0)$ - център на орт. пр. φ.

Нека $M \neq S$; $M': \begin{vmatrix} \ni MS \\ \ni \beta \end{vmatrix}$; $M': \begin{vmatrix} x' = \lambda.x + \mu \\ y' = \lambda.y - 2\mu \\ z' = \lambda.z + \mu \\ t' = \lambda.t \\ x' - 2y' + z' - 2t' = 0 \end{vmatrix}$

$\lambda.x + \mu - 2\lambda.y + 4\mu + \lambda.z + \mu - 2\lambda.t = 0$

$\lambda.(x - 2y + z - 2t) + 6\mu = 0$

$\lambda = 6$, $\mu = -x + 2y - z + 2t$

6т.

1

$$\begin{cases} x' = 6.x - x + 2y - z + 2t \\ y' = 6.y - 2(-x + 2y - z + 2t), \\ z' = 6.z - x + 2y - z + 2t \\ t' = 6.t \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 5x + 2y - z + 2t \\ y' = 2x + 2y + 2z - 4t \\ z' = -x + 2y + 5z + 2t \\ t' = 6.t \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ – матрицата на } \psi.$$

Зад. 2

$$\varphi: \begin{cases} x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{2}{5} \\ y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} \end{cases} \text{ – нехомогенни координати}$$

$$\varphi: \begin{cases} x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}t \\ y' = 3/5x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5}t \\ t' = t \end{cases} \text{ – хомогенни}$$

Матр. на φ в хомогенни коорд: $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}$

$C^{-1} = C$, понеже $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$

$g \cdot C^{-1} = [3, 1, 2] \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot [15, 5, 10] = [3, 1, 2]$

$\Rightarrow \underline{\varphi(g) = g}$ – V 4т.

Какво изображение е φ?

$$g: \begin{cases} x = 4.\lambda \\ y = 3.\lambda \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow g \parallel Oxy, \ g \nparallel Oz, \ g \perp Oz \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow O(0,0,0) \xrightarrow{\psi} O'(0,0,2)$$

$$C(25,0,0) \xrightarrow{\psi} C'(x', y', z')$$

Нека $C_0(x_0, y_0, z_0)$: $\begin{cases} \vec{CC_0} \perp g \ (g \parallel \vec{s_1}(4,3,0)) \\ \in g \end{cases}$

Тогава $\vec{OC'} = \vec{OC_0} + \vec{CC_0}$.

$$\vec{OC_0}: \begin{cases} 4(x_0 - 25) + 3y_0 = 0 \\ x_0 = 4\lambda \\ y_0 = 3\lambda \\ z_0 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 16\lambda + 9\lambda = 100, \ \lambda = 4 \\ x_0 = 16 \\ y_0 = 12 \\ z_0 = 1 \end{cases}, \ \vec{OC_0}(4,3,1)$$

$$\vec{OC'} = (16, 12, 1) + (16 - 25, 12, 1) = (7, 24, 2)$$

$$C(25,0,0) \xrightarrow{\psi} C'(-17, 6, 2)$$

$\boxed{т. O}$ $\begin{cases} a_{14} = 0 \\ a_{24} = 0 \\ a_{34} = 2 \end{cases}$ $\boxed{т. B - неподвижна}$ $\begin{cases} 0 = a_{13} \\ 0 = a_{23} \\ 1 = a_{33} + 2, \ a_{33} = -1 \end{cases}$

$\boxed{т. A \ неподвижна}$

$$\begin{cases} 4.a_{11} + 3.a_{12} = 4 \\ 4.a_{21} + 3a_{22} = 3 \\ 4.a_{31} + 3a_{32} - 1 + 2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_{12} = \frac{4 - 4a_{11}}{3} \\ a_{22} = \frac{3 - 4a_{21}}{3} \\ a_{32} = \frac{4}{3} a_{31} \end{cases}$$

$\boxed{Дз}$

$\boxed{T.C.}$

$$\left|\begin{array}{l} 25a_{11} = -17 \quad , \quad a_{11} = -\frac{17}{25} \\ 25a_{21} = 6 \quad , \quad a_{21} = \frac{6}{25} \\ 25a_{31} + 2 = 2 \quad , \quad a_{31} = 0 \end{array}\right.$$

$$a_{12} = \frac{4 - 4 \cdot \frac{17}{25}}{3} = \frac{32}{75}$$

$$a_{22} = \frac{3 - 4 \cdot \frac{6}{25}}{3} = \frac{51}{75}$$

$$a_{32} = 4 \cdot 0 = 0$$

$$\psi: \vec{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{17}{25} & \frac{32}{75} & 0 \\ \frac{6}{25} & \frac{51}{75} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{T.C}$

$$\left|\begin{array}{l} 25 \cdot a_{11} = 7 \quad , \quad a_{11} = \frac{7}{25} \\ 25 \cdot a_{21} = 24 \quad , \quad a_{21} = \frac{24}{25} \\ a_{31} = 0 \quad , \quad a_{31} = 0 \end{array}\right.$$

$$a_{12} = \frac{4 - 4 \cdot \frac{7}{25}}{3} = \frac{72}{75} = \frac{24}{25}$$

$$a_{22} = \frac{3 - 4 \cdot \frac{24}{25}}{3} = \frac{7}{25}$$

$$a_{32} = 4 \cdot 0 = 0$$

$$\psi: \vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} & 0 \\ \frac{24}{25} & \frac{7}{25} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8_{Ti}