3 задача, 1 тип.

Да се намери полинома на най-добро средноквадратично приближение от π_1 за ф-ята $f(x) = e^x$ в интервала $[-1, 1]$ при тегло $\mu(x) \equiv 1$.

Имаме най-добро приближение в хилб. п-во със скаларно произведение

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} \mu(x) f(x) g(x) dx = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx \quad (\mu(x) \equiv 1)$$

Нека $P = B.1 + Ax$ е търсеният полином

От условията за ортогоналност на $f - P$ с π_1,

т.е с 1 и с X получаваме:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} (e^x - (B + Ax)) 1 \, dx = 0 \\ \int_{-1}^{1} (e^x - (B + Ax)) x \, dx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\int_{-1}^{1} 1 \, dx\right) B + \left(\int_{-1}^{1} x dx\right) A = \int_{-1}^{1} e^x dx \\ \left(\int_{-1}^{1} x \, dx\right) B + \left(\int_{-1}^{1} x^2 dx\right) A = \int_{-1}^{1} e^x . x \, dx \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} 1 \, dx = 2, \quad \int_{-1}^{1} x \, dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}, \quad \int_{-1}^{1} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{1} = e - e^{-1}$$

Интегралът $\int_{-1}^{1} e^x . x \, dx$ пресмятаме с интегриране по части:

$$\int_{-1}^{1} e^x . x \, dx = \int_{-1}^{1} x \, de^x = x e^x \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x dx = e + e^{-1} - (e - e^{-1}) = 2e^{-1}$$

Получаваме лин. с-ма

$$\begin{cases} 2B = e - e^{-1} \Rightarrow B = \frac{e - e^{-1}}{2} \\ \frac{2}{3} A = 2e^{-1} \Rightarrow A = 3e^{-1} \end{cases} \Rightarrow \boxed{P = 3e^{-1} . x + \frac{e - e^{-1}}{2}}$$