Зад. Ако $\dim V = n \Rightarrow V \cong F^n$

Теорема за ИМ на КМЛП

Нека U и V са КМЛП над F. Тогава

$$U \cong V \Leftrightarrow \dim U = \dim V$$

Д-во. $(\Rightarrow)$ $U \cong V \xRightarrow{\text{сл}} \left(e_1, \dots, e_n \text{ - базис } U \Leftrightarrow \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \text{ базис на } V \right)$

$\Rightarrow \dim U = \dim V$

$(\Leftarrow)$ Нека $\dim U = \dim V = n$

$e_1, \dots, e_n$ - базис на U; $f_1, \dots, f_n$ - базис на V

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \exists!\, \varphi \in Hom(U, V) : \forall i = 1 \to n \quad \varphi(e_i) = f_i \\ \exists!\, \psi \in Hom(V, U) : \forall i = 1 \to n \quad \psi(f_i) = e_i \end{array} \right.$$

$\forall i = 1, \to n \qquad (\varphi \circ \psi)(f_i) = \varphi(\psi(f_i)) = \varphi(e_i) = f_i$

$$(\psi \circ \varphi)(e_i) = \ldots = e_i$$

Но $id_U(e_i) = e_i$; $id_V(f_i) = f_i$

От осн. теор. за ЛИ $\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ $\varphi \circ \psi = id_V$ и $\psi \circ \varphi = id_U$

$\Rightarrow$ φ е обратимо $(\varphi^{-1} = \psi)$ $\Rightarrow$ φ - биекция

$\xrightarrow{\text{т е ЛИ}}$ φ е ИМ

<u>Тв</u> $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(V,W) \Rightarrow \psi\circ\varphi \in \mathrm{Hom}(U,W)$

<u>Д-во</u> 1) $u_1, u_2 \in U$

$$(\psi\circ\varphi)(u_1+u_2) = \psi(\varphi(u_1+u_2)) \underset{\text{ЛИ}}{\overset{\varphi}{=}} \psi(\varphi(u_1)+\varphi(u_2)) \underset{\text{ЛИ}}{\overset{\psi}{=}}$$

$$= \psi(\varphi(u_1)) + \psi(\varphi(u_2)) = (\psi\circ\varphi)(u_1) + (\psi\circ\varphi)(u_2)$$

2) $u \in U$, $\lambda \in F$ Аналог.

$$(\psi\circ\varphi)(\lambda u) = \lambda[(\psi\circ\varphi)(u)]$$

<u>Зад:</u> Тв. използване (*) в д-во на теор.

Действие с ЛО

Опр. 1) $\varphi \in Hom(U,V)$, $\lambda \in F$

$\forall u \in U \quad (\lambda\varphi)(u) := \lambda \cdot \varphi(u) \quad (\lambda\varphi : U \to V)$

2) $\varphi, \psi \in Hom(U,V)$

$\forall u \in U \quad (\varphi+\psi)(u) := \varphi(u)+\psi(u) \quad (\varphi+\psi : U \to V)$

3) $\varphi \in Hom(U,V)$, $\psi \in Hom(V,W)$

$\forall u \in U \quad (\psi\circ\varphi)(u) := \psi(\varphi(u)) \quad (\psi\circ\varphi : U \to W)$

ТВ $\lambda\varphi,\ \varphi+\psi \in Hom(U,V)$

Зам. Все знаем, что $\psi\circ\varphi \in Hom(U,W)$

Зад **са** **ЛИ**
$$\begin{cases} \lambda\varphi \text{ – произв. на ЛИ } \varphi \text{ със скалара } \lambda \\ \varphi+\psi \text{ – сума на ЛИ } \varphi \text{ и } \psi \\ \psi\circ\varphi \text{ – произведение на ЛИ } \psi \text{ и } \varphi \end{cases}$$

Тв Ако U и V ЛП над F, то $Hom(U,V)$ е ЛП над F

Д-во Вече знаем, че $\forall \varphi,\psi \in Hom(U,V)$ и $\forall \lambda \in F$ $\lambda\varphi, \varphi+\psi \in Hom(U,V)$. Остава да док. св.-та

1) асоциативност

$\varphi, \psi, \theta \in Hom(U,V)$. Нека $u \in U$

$$[(\varphi+\psi)+\theta](u) = (\varphi+\psi)(u)+\theta(u) = [\varphi(u)+\psi(u)]+\theta(u)$$
$$[\varphi+(\psi+\theta)](u) = \varphi(u)+(\psi+\theta)(u) = \varphi(u)+[\psi(u)+\theta(u)]$$

$\varphi(u), \psi(u), \theta(u) \in V$ и асоц. на „+" във V

$\Rightarrow [(\varphi+\psi)+\theta](u) = [\varphi+(\psi+\theta)](u)$

$\overset{\forall u}{\Longrightarrow} (\varphi+\psi)+\theta = \varphi+(\psi+\theta)$

2) Аксиом. комутативност – $\forall \varphi, \psi \in Hom(U,V)$

$\varphi+\psi = \psi+\varphi$

3) $\mathbf{0}: U \to V$; $\mathbf{0} \in Hom(U,V)$ $(\mathbf{0} = 0.\varphi)$

$u \longmapsto 0_V$; $\forall \varphi \in Hom(U,V)$ $\underline{\varphi+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\varphi = \varphi}$ (горе!)

4) $\forall \varphi \in Hom(U,V)$; $\forall u \in U$ $(-\varphi)(u) := -\varphi(u)$

$(-\varphi) \in Hom(U,V)$ $(-\varphi = (-1).\varphi)$ и

$\underline{\varphi+(-\varphi) = (-\varphi)+\varphi = \mathbf{0}}$ (горе!)

Аналог. се проверяват

5) $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(U,V) \quad 1.\varphi = \varphi$

6) $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(U,V), \ \forall \lambda, \mu \in F$

$(\lambda + \mu)\varphi = (\lambda\varphi) + (\mu\varphi)$

7) $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}(U,V) \ \forall \lambda, \mu \in F$

$(\lambda\mu)\varphi = \lambda(\mu\varphi)$

8) $\forall \varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(U,V) \ \forall \lambda \in F$

$\lambda(\varphi + \psi) = (\lambda\varphi) + (\lambda\psi)$

избираме $u \in U$ и проверяваме, че ЛС(u) = ДС(u)

Зад. Нека $\dim U = n$, $\dim V = m$ и

$e_1, \dots, e_n$ – базис на U; $f_1, \dots, f_m$ – базис на V

$\forall i = 1, \dots, n$, $\forall j = 1, \dots, m$ $\exists!\, \mathcal{E}_{ij} \in \mathrm{Hom}(U, V)$:

$$\mathcal{E}_{ij}(e_k) = \delta_{ik} f_j \qquad \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \text{ символ на Кронекер} \right)$$

$$\mathcal{E}_{ij} \left| \begin{array}{l} e_1 \to 0 \\ \vdots \\ e_{i-1} \to 0 \\ e_i \to f_j \\ e_{i+1} \to 0 \\ \vdots \\ e_n \to 0 \end{array} \right.$$

ТВ $\{\varepsilon_{ij} \mid i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m\}$ базис на $Hom(U,V)$

(U, V - КМЛП над F; $\dim U = n$, $\dim V = m$)

Сл. $\dim Hom(U,V) = mn$

Д-во $\varphi \in Hom(U,V)$

$\exists a_{ij} \in F$: за $i=1,\dots,n$ $\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j$

$u \in U$ $\exists \lambda_i \in F : u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

$$\varphi(e_i) = \sum_j a_{ji} f_j = \sum_j a_{ji} [\varepsilon_{ij}(e_i)] = \left(\sum_i a_{ji} \varepsilon_{ij}\right)(e_i) =$$

$$= \left[\sum_{k} \left(\sum_{j} a_{jk}\, \varepsilon_{kj}\right)\right](e_i) \qquad \left(k \neq i \quad \varepsilon_{kj}(e_i) = 0\right)$$

<u>Jod.</u> 1/ $\sum_{i} a_i \cdot \delta_{ij} = a_j$

2/ $\sum_{i} \left(\sum_{j} a_{ij}\right) = \sum_{j} \left(\sum_{i} a_{ij}\right) = \sum_{i,j} a_{ij}$

3) $\lambda \sum_{i} a_i = \sum_{i} (\lambda a_i)$

$$\left(\sum_{k,j} a_{jk}\, \varepsilon_{kj}\right)(e_i) = \sum_{k,j} \left[a_{jk} \left(\varepsilon_{kj}(e_i)\right)\right] = \sum_{\underline{k},j} a_{j\underline{k}}\, \delta_{i\underline{k}}\, f_j =$$

$$= \sum_{j} a_{ji} f_j = \varphi(e_i) -$$

$$\Rightarrow \forall i \quad \underbrace{\varphi}_{\text{ЛИ}}(e_i) = \Big(\underbrace{\sum_{k,j} a_{jk}\, \varepsilon_{kj}}_{\text{ЛК на ЛИ} \to \text{ЛИ}}\Big) e_i \quad \xRightarrow{e_1 - e_n \text{ - базис}}$$

$$\Rightarrow \varphi = \sum_{k,j} a_{jk}\varepsilon_{kj} \in \ell\,(\varepsilon_{kj} \mid k = 1 \to n,\ j = 1 \to m)$$

т.е. пораждащо мн-во.

Нека за $a_{ij} \in F$ $\quad \sum_{i,j} a_{ij}\varepsilon_{ji} = 0$

$k = 1 \to n$

$$\theta_V = \theta(e_k) = \Big(\sum_{i,j} a_{ij}\varepsilon_{ji}\Big)(e_k) = \sum_{i,j} a_{ij}\,\delta_{jk} f_i = \sum_i a_{ik} f_i$$

$$\frac{f_1 - f_m}{\text{базис}} \quad a_{1k} = a_{2k} = \dots = a_{mk} = 0 \xRightarrow{\forall k} \forall i,j \ a_{ij} = 0$$

$\Rightarrow$ $[\varepsilon_{ij} \mid i = 1 \ldots n;\ j = 1 \ldots m]$ - ЛН ~~пор.~~ множ., базис

Зад. Ако $\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j$ за $i = 1 \ldots n$, то

$$\varphi = \sum_{i,j} a_{ji} \varepsilon_{ij}$$

$[a_{ji} \mid j = 1 \ldots m;\ i = 1 \ldots n]$ са коорд. на φ в базиса $[\varepsilon_{ij} \mid i = 1 \ldots n;\ j = 1 \ldots m]$

Опр. $\varphi \in Hom(U,V)$ и $e_1, \dots, e_n$ - базис на U, а $f_1, \dots, f_m$ базис на V и за $i = 1, \dots, n$ $\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j$

$A = (a_{ij}) \in F_{m \times n}$ - матр. на ЛИ φ относно базисите $e_1, \dots, e_n$ на U и $f_1, \dots, f_m$ на V

Заб. Коорд. на образи на e_i ($\varphi(e_i)$) относно $f_1, \dots, f_m$ са в $i^{ти}$ ст. на матр., т.е. пишем коорд. на образите на базисните вектори <u>по стълбове</u>

Зад. Ясно е, че A зависи от базисите

Означение: $A = M_e^f(\varphi)$

Зад. ? $M_e^f(\mathcal{E}_{ij})$ $\qquad \mathcal{E}_{ij}(e_k) = \delta_{ik} f_j = \begin{cases} f_j & k=i \\ 0 & k\neq i \end{cases}$

$\Rightarrow i$-ти ст. е $\overbrace{0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1},0,\dots,0}^{\text{, коорд. на } f_j}$; а ост. ст. са нулеви

$\Rightarrow$ само ел. в j-и ред и i-и ст. е 1; ост. са 0

т.е. матр. е E_{ji}

Тв. $\mu_e^f : \mathrm{Hom}(U,V) \longrightarrow F_{m\times n}$ $\left(\begin{array}{l}\dim U = n \\ \dim V = m\end{array}\right)$

$\varphi \longmapsto \mu_e^f(\varphi)$

$e_1 \ldots e_n$ – б. на U

$f_1 \ldots f_m$ – б. на V

е ЛИ

Д-во 1) $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(U,V)$; $A = \mu_e^f(\varphi)$, $B = \mu_e^f(\psi)$

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j \qquad \psi(e_i) = \sum_{j=1}^{m} b_{ji} f_j$$

$$(\varphi+\psi)(e_i) = \sum_{j=1}^{m} (\underbrace{a_{ji} + b_{ji}}_{=:c_{ji}}) f_j \qquad \text{за } i = 1 \ldots n$$

$$\Rightarrow \mu_e^f(\varphi+\psi) = C = (c_{ij}) = A + B = \mu_e^f(\varphi) + \mu_e^f(\psi)$$

2) Ακονοι $\varphi \in Hom(U,V)$, $\lambda \in F$

$$M_e^f(\lambda\varphi) = \lambda M_e^f(\varphi)$$

3ωδ. $\{\mathcal{E}_{ij} \mid i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m\}$ βάση για $Hom(U,V)$ → $\dim Hom(U,V) = mn$

$\{E_{ij} \mid i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n\}$ βάση για $F_{m\times n}$ → $\dim F_{m\times n} = mn$

$$M_e^f(\mathcal{E}_{ij}) = E_{ji} \quad \Rightarrow \quad M_e^f \text{ ε ΙΜ}$$

3ωδ. $\Phi_e^f : F_{m\times n} \longrightarrow Hom(U,V)$ $\Big|$ $\Phi_e^f(E_{ij}) = \mathcal{E}_{ji}$

$$A = (a_{ij}) \longmapsto \sum_{i,j} a_{ji}\,\mathcal{E}_{ij}$$

∃! γραμμική ΓΑ

υπόδ. ρ.α. Θεωρ.

$$\Phi_e^f \circ \mu_e^f = id_{Hom(U,V)} \quad ; \quad \mu_e^f \circ \Phi_e^f = id_{F_{m\times n}}$$

$\Rightarrow \mu_e^f$ – биекция $\Rightarrow \mu_e^f$ е ИМ

$\left((\mu_e^f)^{-1} = \Phi_e^f \right)$

Нека $\varphi \in Hom(U,V)$, $\psi \in Hom(V,W)$; $\theta = \psi \circ \varphi$

$e_1, \dots, e_n$ – базис на U ; $f_1, \dots, f_m$ – базис на V

$g_1, \dots, g_s$ – базис на W ($\dim U = n$, $\dim V = m$, $\dim W = s$)

$$A = M_e^f(\varphi) \ , \ B = M_f^g(\psi) \ , \ C = M_e^g(\theta)$$

Знаем A и B, търсим C $(e_i \to f_j;\ \text{ост.} \to 0)$

Нека $\varphi_{ij} \in Hom(U,V) : \varphi_{ij}(e_k) = \delta_{ik} f_j$ $[\varphi_{ij}]$ базис $Hom(U,V)$

$\psi_{ij} \in Hom(V,W) : \psi_{ij}(f_k) = \delta_{ik} g_j$ ($[\psi_{ij}]$ - базис на $Hom(V,W)$)

$\theta_{ij} \in Hom(U,W) : \theta_{ij}(e_k) = \delta_{ik} g_j$ ($[\theta_{ij}]$ - базис на $Hom(U,W)$)