Дуалности накратко

Йонко Йонков

10 януари 2021 г.

Определение 1: Дуално пространство

Нека $\mathbb{V}$ е линейно пространство над числовото поле $\mathbb{F}$. Дуално пространство на $\mathbb{V}$ ще наричаме множеството $\mathbf{Hom}(\mathbb{V},\mathbb{F})$. Означаваме го с $\mathbb{V}^*$ и е над същото поле $\mathbb{F}$

Както виждате, елементите на $\mathbb{V}^*$ са линейни изображения, които приемат вектор и връщат число. Те се наричат линейни функционали.

Твърдение 1: Размерност на дуалното пространство

Нека $\mathbb{V}$ е КМЛП. Тогава $\dim\mathbb{V}^* = \dim\mathbb{V}$

Доказателство. $\dim\mathbb{V}^* = \dim\mathbf{Hom}(\mathbb{V},\mathbb{F}) = \dim\mathbb{V}.\dim\mathbb{F} = \dim\mathbb{V}.1 = \dim\mathbb{V}$ □

Определение 2: Дуален базис

Нека $\mathbb{V}$ е КМЛП, $\dim\mathbb{V} = n$ и $e_1,\dots,e_n$ е произволен негов базис. Тогава $\exists! e^1,\dots,e^n \in \mathbb{V}^*$, дефинирани по следния начин $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$ $e^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$

Така векторите $e^1,\dots,e^n$ образуват базис на $\mathbb{V}^*$

Определение 3: Дуално изображение

Нека $\mathbb{U},\mathbb{W}$ са КМЛП над $\mathbb{F}$ и $\varphi \in \mathbf{Hom}(\mathbb{U},\mathbb{W})$. Тогава $\varphi^* \in Hom(\mathbb{W}^*,\mathbb{U}^*)$, дефинирано по следния начин: $\forall f \in \mathbb{W}^*$ $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ се нарича дуално изображение на φ

Твърдение 2: Матрица на дуално изображение

Нека $\mathbb{U},\mathbb{W}$ са КМЛП над $\mathbb{F}$, $\dim\mathbb{U} = n, \dim\mathbb{W} = m$ и $\varphi \in \mathbf{Hom}(\mathbb{U},\mathbb{W}), e_1,\dots,e_n$ и $f_1,\dots,f_m$ са базиси на $\mathbb{U}$ и $\mathbb{W}$ съответно. Нека $e^1,\dots,e^n$ и $f^1,\dots,f^m$ са съответнтие им дуални базиси. Тогава $M_e^f(\varphi) = (M_{e^*}^{f^*}(\varphi^*))^T$.

Доказателство. Доказателство ще намерите в записките от лекция 19 □

Твърдение 3: Сума на дуални изоражения

Нека $\mathbb{U},\mathbb{W}$ са ЛП над $\mathbb{F}$ и $\varphi,\psi \in \mathbf{Hom}(\mathbb{U},\mathbb{W})$. Тогава $(\varphi+\psi)^* = \varphi^* + \psi^*$

Доказателство. Доказателството е тривиално и се предоставя на читателя за упражнение. Ако се запънете много лекция 19 :) □

Твърдение 4: Умножение на дуално със скалар

Нека $\mathbb{U},\mathbb{W}$ са ЛП над $\mathbb{F}$ и $\varphi \in \mathbf{Hom}(\mathbb{U},\mathbb{W})$ и $\lambda \in \mathbb{F}$. Тогава $(\lambda\varphi)^* = \lambda\varphi^*$

Доказателство. Доказателството е тривиално и се предоставя на читателя за упражнение. Ако се запънете много лекция 19 :) □

Твърдение 5: Произведение на дуални изоражения

Нека $\mathbb{U},\mathbb{W},\mathbb{V}$ са ЛП над $\mathbb{F}$ и $\varphi \in \mathbf{Hom}(\mathbb{U},\mathbb{W})$ и $\psi \in \mathbf{Hom}(W,V)$. Тогава $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$

Доказателство. Доказателството е тривиално и се предоставя на читателя за упражнение. Ако се запънете много лекция 19 :) □

Определение 4: Анихилатор

Нека $\mathbb{V}$ е ЛП над $\mathbb{F}$ и $\mathbb{U} < \mathbb{V}$. Тогава анихилатор на $\mathbb{U}$ наричаме множеството $\mathbb{U}^0 = \{v^* \in \mathbb{V}^* | \forall u \in \mathbb{U} : v^*(u) = 0_F\}$.

Оказва се $\mathbb{U}^0 < \mathbb{V}^*$. Докажете :).

Твърдение 6: Сума на размерности на подпространство и анихилатора му

Нека $\mathbb{V}$ е КМЛП над $\mathbb{F}$ и $\mathbb{U} < \mathbb{V}$. Тогава $\mathbf{dim}\,\mathbb{U} + \mathbf{dim}\,\mathbb{U}^0 = \mathbf{dim}\,\mathbb{V}$.

Доказателство. Доказателство ще намерите в записките от лекция 20 :) □

Определение 5: Анулатор

Нека $\mathbb{V}$ е ЛП над $\mathbb{F}$, $\mathbb{U} < \mathbb{V}$, $\mathbf{dim}\,\mathbb{V} = n$, $\mathbf{dim}\,\mathbb{U} = k$ и $g_1, \ldots g_k$ е базис на $\mathbb{U}$. Анулатор на $\mathbb{U}$ ще наричаме множеството $U_0 = \{v \in \mathbb{V} | \forall i \in \{1, \ldots, k\} : g^i(v) = 0_F\}$

Твърдение 7: Важно равенство

Нека $\mathbb{U},\mathbb{W}$ са ЛП над $\mathbb{F}$ и $\varphi \in \mathbf{Hom}(\mathbb{U},\mathbb{W})$. Тогава $\mathbf{Ker}\,\varphi^* = (\mathbf{Im}\,\varphi)^0$

Доказателство. Лесно може да се провери, ако се знаят дефинциите :) □

Твърдение 8

Нека $\mathbb{U},\mathbb{W}$ са ЛП над $\mathbb{F}$ и $\varphi \in \mathbf{Hom}(\mathbb{U},\mathbb{W})$. Тогава $(\mathbf{Ker}\,\varphi^*)_0 = \mathbf{Im}\,\varphi$

Доказателство. Лесно може да се провери, ако се знаят дефинциите :) □

Твърдение 9: Ранговете на изображение и неговото дуално

Нека $\mathbb{U},\mathbb{W}$ са КМЛП над $\mathbb{F}$ и $\varphi \in \mathbf{Hom}(\mathbb{U},\mathbb{W})$. Тогава $\mathbf{r}(\varphi^*) = \mathbf{r}(\varphi)$

Твърдение 10: Първа теорема за ранг на матрици

Нека $A \in \mathbb{F}_{m \times n}$. Тогава $rr(A) = \mathbf{rc}(A)$, т.е $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(A^T)$

Доказателство. Лекция 20 ☐

Твърдение 11: Важно равенство

Нека $\mathbb{U},\mathbb{W}$ са КМЛП над $\mathbb{F}$ и $\varphi \in \mathbf{Hom}(\mathbb{U},\mathbb{W})$. Тогава $(\mathbf{Ker}\,\varphi)^0 = \mathbf{Im}\,\varphi^*$

Доказателство. Края на лекция 20 и началото на лекция 21 ☐

Твърдение 12

Нека $\mathbb{U},\mathbb{W}$ са КМЛП над $\mathbb{F}$ и $\varphi \in \mathbf{Hom}(\mathbb{U},\mathbb{W})$. Тогава $(\mathbf{Im}\,\varphi^*)_0 = \mathbf{Ker}\,\varphi$

Доказателство. Лекция 21 ☐

Определение 6: Дуално пространство на дуалното пространство

Нека $\mathbb{V}$ е ЛП над $\mathbb{F}$. Тогава дуалното пространство на дуалното пространство на $\mathbb{V}$ е множеството $\mathbb{V}^{**} = \mathbf{Hom}(\mathbb{V}^*,\mathbb{F})$

Реално няма нищо ново по този начин можем да си дефинираме $V^{***} = \mathbf{Hom}(\mathbb{V}^{**},\mathbb{F})$, $V^{****} = \mathbf{Hom}(\mathbb{V}^{***},\mathbb{F})$ и т.н. Ясно е че за крайномерно $\mathbb{V}$ от $\mathbf{dim}\,\mathbb{V}^* = \mathbf{dim}\,\mathbb{V}$, то аналогично $dim\mathbb{V}^{**} = \mathbf{dim}\,\mathbb{V}^* = \mathbf{dim}\,\mathbb{V}$ и знаем от теорема, че когато две пространства имат равни размерности, то можем да построим изоморфизъм между тях като пратим базис на едното в базис на другото. Красивото тук е че съществува изоморфизъм, между $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^{**}$, който не използва базис в себе си, наречен каноничен изоморфизъм.

Твърдение 13: Каноничен изоморфизъм между линейно и дуалното на дуалното му

Нека $\mathbb{V}$ е КМЛП над $\mathbb{F}$. Тогава изображението $\theta : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^* *$, дефинирано по следния начин: $\forall v \in \mathbb{V}\ (\theta(v))(v^*) = (v^*(v))$ е изоморфизъм

Доказателство. Лекция 21 ☐

Редакции и благодарности

10.01.2021 Оправена е дефиницията на дуално изображение. Благодаря на Марио Марков за откритата грешка