Домашно № 3 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, I поток, зимен семестър на 2015/2016 уч. г. в СУ, ФМИ

Домашните работи се предават на съответния асистент по време на упражненията през седмицата 04 – 06 януари 2016 г. (тринадесетата седмица от семестъра).

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	*20*	*8*	*10*	*10*	*5*	*8×2*	*69*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно!*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. За всяка редица изведете формула за общия член и пресметнете a_{2015} и a_{2016}:

а) $a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 3, \quad a_{n+3} = 16\,a_{n+2} - 85\,a_{n+1} + 150\,a_n$ за $\forall n \geq 1$; **(3 точки)**

б) $a_0 = -35, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2n^2.5^n + 30.3^n - 12.5^n$ за $\forall n \geq 0$; **(4 точки)**

в) $a_1 = 9, \quad a_{n+1} = n^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k$ за $\forall n \geq 1$; **(5 точки)**

г) $a_1 = 52, \quad a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n^2+n}$ за $\forall n \geq 1$; **(3 точки)**

д) $a_1 = 1, \quad a_2 = 7, \quad a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}^2}{a_n}$ за $\forall n \geq 1$; **(3 точки)**

е) $a_1 = 87, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n}$ за $\forall n \geq 1$. **(2 точки)**

Задача 2. Докажете, че числото $\left(4+\sqrt{7}\right)^{2015} + \left(4-\sqrt{7}\right)^{2015}$ е цяло, и намерете цифрата на единиците му.

Упътване: Представете това число като член на редица, зададена рекурентно.

Задача 3. По колко начина числата 1, 2, 3, ... , n могат да се наредят в редица така, че всеки член (без първия) да се различава с единица от някое от числата вляво от него?

Упътване: Намерете (с доказателство) кои числа могат да стоят на последното място в редицата. Въз основа на това съставете рекурентно уравнение и го решете.

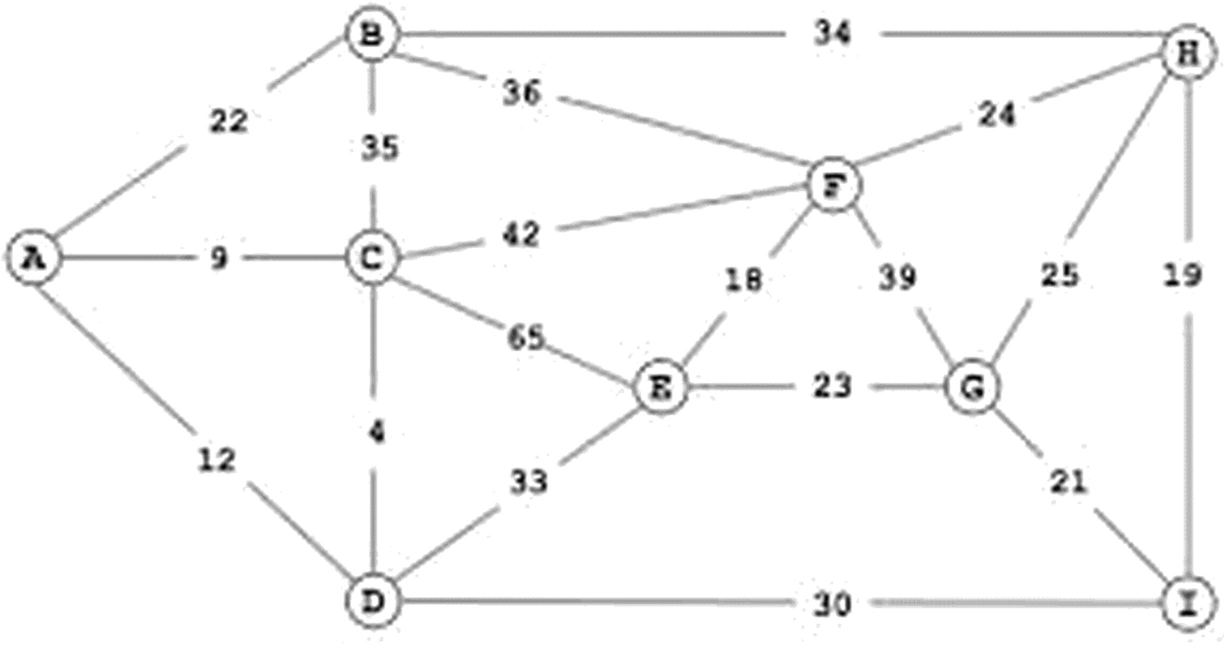
Задача 4. Нека т. O е центърът на правилния шестоъгълник $ABCDEF$ със страна 1. Освен страните на шестоъгълника са начертани още и отсечките, свързващи т. O с всеки от върховете. Така се получават общо дванайсет отсечки с дължина 1. Пресметнете броя на маршрутите с дължина 2015, всеки от които започва и завършва в т. O.

Упътване: Означете с a_n броя на маршрутите с дължина n, с начало и край точката O, а с b_n — броя на маршрутите с дължина n, с начало т. A и с край т. O. Съставете система от две линейни рекурентни уравнения и изключете b-тата.

Задача 5. Свързан планарен граф (без примки) има n върха и f области. Всички области имат по три ребра (включително външната, неограничената област). Докажете, че $f = 2n - 4$.

Задача 6. За посочения по-долу граф:
а) намерете кликовото число;
б) намерете върховото хроматично число;
в) намерете ребровото хроматично число;
г) постройте минимално покриващо дърво по алгоритъма на Крускал;
д) постройте минимално покриващо дърво по алгоритъма на Прим—Ярник от върха A;
е) постройте дървото на най-късите пътища от върха A до всички други върхове
   с помощта на алгоритъма на Дейкстра;
ж) постройте хамилтонов цикъл или докажете, че такъв не съществува;
з) постройте ойлерова верига или докажете, че такава не съществува.

Забележка: В подточките "г", "д" и "е" начертайте полученото дърво (само крайния резултат), а за междинните стъпки опишете само реда на включване на ребрата в дървото (не е нужно да правите чертеж за всяка междинна стъпка).



РЕШЕНИЯ

Задача 1.

а) Това линейно-рекурентно уравнение е хомогенно. Решава се с характеристично уравнение: $\lambda^{n+3} = 16\,\lambda^{n+2} - 85\,\lambda^{n+1} + 150\,\lambda^{n}$. Интересува ни само случаят $\lambda \neq 0$, затова делим на λ^{n}: $\lambda^{3} = 16\,\lambda^{2} - 85\,\lambda + 150$, т.е. $\lambda^{3} - 16\,\lambda^{2} + 85\,\lambda - 150 = 0$. По схемата на Хорнер намираме $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 6$. Следователно $a_n = C_1 \,.\, 5^n + C_2 \,.\, n \,.\, 5^n + C_3 \,.\, 6^n$. Заместваме n с 1, 2 и 3 и от началните условия $(a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 3)$ съставяме системата

$$\left|\begin{array}{rcl} 5\,C_1 + 5\,C_2 + 6\,C_3 & = & 2 \\ 25\,C_1 + 50\,C_2 + 36\,C_3 & = & 4 \\ 125\,C_1 + 375\,C_2 + 216\,C_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

Тази система има единствено решение: $C_1 = -\dfrac{36}{25}$, $C_2 = -\dfrac{19}{25}$, $C_3 = \dfrac{13}{6}$. Ето защо $a_n = -\dfrac{36}{25} \cdot 5^n - \dfrac{19}{25} \cdot n \cdot 5^n + \dfrac{13}{6} \cdot 6^n = 13 \,.\, 6^{n-1} - (19\,n + 36)\,.\, 5^{n-2}$ е общият член,

$a_{2015} = 13 \,.\, 6^{2014} - 38321 \,.\, 5^{2013} \approx 2{,}04438 \,.\, 10^{1568}$,

$a_{2016} = 13 \,.\, 6^{2015} - 38340 \,.\, 5^{2014} \approx 1{,}22663 \,.\, 10^{1569}$.

Забележка: При пресмятане на толкова големи числа обикновено се интересуваме само от порядъка (т.е. броя на цифрите) и от първите няколко цифри. Как се получават те? Неопитният изчислител разчита на груба сила, въоръжава се с мощен софтуер и се надява, че компютърът ще се справи сам. Обаче тези надежди не се сбъдват. Ако например поискаме от Microsoft Excel да пресметне 6^{2014}, резултатът ще бъде съобщение за грешка: “ #NUM!”, т.е. получава се твърде голямо число, с което програмата не може да се справи. В този миг неопитният изчислител или се отказва, или започва да търси по-добър софтуер. А задачата се решава много лесно с помощта на десетични логаритми:

$\lg\left(13 \,.\, 6^{2014}\right) = \lg 13 + 2014 \,.\, \lg 6 \approx 1568{,}310562$;

$\lg\left(38321 \,.\, 5^{2013}\right) = \lg 38321 + 2013 \,.\, \lg 5 \approx 1411{,}610056$;

тези сметки са по силите не само на всеки софтуер, но дори на всеки научен калкулатор. Получените резултати означават, че:

— умаляемото $13 \,.\, 6^{2014} \approx 10^{1568{,}310562}$ е цяло положително число с 1569 цифри;

— умалителят $38321 \,.\, 5^{2013} \approx 10^{1411{,}610056}$ е цяло положително число с 1412 цифри.

Тъй като $1569 - 1412 = 157$, то първите 157 цифри на разликата не зависят от умалителя, т.е. разликата и умаляемото съвпадат в първите си 157 цифри (последната от тях може да се различава с една единица в двете числа; останалите 156 цифри може да се различават само в един случай: ако в умаляемото последните няколко цифри са нули, то в разликата съответните им цифри ще бъдат деветки). Тоест можем да пренебрегнем умалителя:

$a_{2015} \approx 10^{1568{,}310562} - 10^{1411{,}610056} \approx 10^{1568{,}310562}$. Това число е голямо дори за компютър, но трудността се преодолява с малък трик: отделяме цялата от дробната част на показателя.

$a_{2015} \approx 10^{1568{,}310562} = 10^{0{,}310562} \,.\, 10^{1568} \approx 2{,}04438 \,.\, 10^{1568}$.

Степента с малкия показател може да се пресметне даже и с калкулатор.

б) И това е линейно-рекурентно уравнение, но този път нехомогенно. Записваме го във вида $\underbrace{a_{n+1} = 3a_n}_{} + \underbrace{\left(2n^2 - 12\right) . 5^n + 30n^0 . 3^n}_{}$ и анализираме двете части поотделно.

$$\lambda^{n+1} = 3\,\lambda^n$$
$$\lambda = 3 \qquad \Downarrow$$

$$\left\{ 3 \right\}_{\text{М}} \bigcup \left\{ 5 \ ; \ 5 \ ; \ 5 \ ; \ 3 \right\}_{\text{М}} = \left\{ 5 \ ; \ 5 \ ; \ 5 \ ; \ 3 \ ; \ 3 \right\}_{\text{М}}$$

$$a_n = C_1 . 5^n + C_2 . n . 5^n + C_3 . n^2 . 5^n + C_4 . 3^n + C_5 . n . 3^n$$

От началното условие $a_0 = -35$ с помощта на рекурентното уравнение пресмятаме следващите четири члена на редицата:

$a_1 = -87, \quad a_2 = -221, \quad a_3 = -493, \quad a_4 = 81.$

Във формулата с неопределените коефициенти заместваме $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$:

$$\left|\begin{array}{rcrcrcrcrcr} C_1 & & & & & + & C_4 & & & = & -35 \\ 5\,C_1 & + & 5\,C_2 & + & 5\,C_3 & + & 3\,C_4 & + & 3\,C_5 & = & -87 \\ 25\,C_1 & + & 50\,C_2 & + & 100\,C_3 & + & 9\,C_4 & + & 18\,C_5 & = & -221 \\ 125\,C_1 & + & 375\,C_2 & + & 1125\,C_3 & + & 27\,C_4 & + & 81\,C_5 & = & -493 \\ 625\,C_1 & + & 2500\,C_2 & + & 10000\,C_3 & + & 81\,C_4 & + & 324\,C_5 & = & 81 \end{array}\right.$$

Тази система от линейни уравнения има единствено решение:

$C_1 = 4, \quad C_2 = -5, \quad C_3 = 1, \quad C_4 = -39, \quad C_5 = 10,$

откъдето след заместване получаваме формулата за общия член на редицата:

$a_n = \left(n^2 - 5n + 4\right) \ . \ 5^n + (10n - 39) \ . \ 3^n$. Следователно

$a_{2015} = 4050154 \ . \ 5^{2015} + 20111 \ . \ 3^{2015} \approx 10^{1415,03203} + 10^{967,70276} \approx 10^{1415,03203}$, т.е.

$a_{2015} \approx 10^{0,03203} \ . \ 10^{1415} \approx 1,07654 \ . \ 10^{1415}$. Аналогично

$a_{2016} = 4054180 \ . \ 5^{2016} + 20121 \ . \ 3^{2016} \approx 10^{1415,73143} + 10^{966,18010} \approx 10^{1415,73143}$, т.е.

$a_{2016} \approx 10^{0,73143} \ . \ 10^{1415} \approx 5,38805 \ . \ 10^{1415}$.

д) Пресмятаме първите няколко члена на редицата:

$a_1 = 1, \quad a_2 = 7, \quad a_3 = 7^2, \quad a_4 = 7^3$ и т.н.

Налучкваме формулата $a_n = 7^{n-1}$ и я доказваме с индукция по n. Следователно

$a_{2015} = 7^{2014} \approx 10^{1702,02745} = 10^{0,02745} \ . \ 10^{1702} \approx 1,06525 \ . \ 10^{1702}$;

$a_{2016} = 7^{2015} \approx 10^{1702,87255} = 10^{0,87255} \ . \ 10^{1702} \approx 7,45677 \ . \ 10^{1702}$.

е) Да пресметнем първите няколко члена: $87 \ , \ \dfrac{86}{87} \ , \ -\dfrac{1}{86} \ , \ 87 \ , \ \dfrac{86}{87} \ , \ -\dfrac{1}{86} \ \cdots$

Редицата е периодична и най-малкият ѝ период има дължина 3.

Тъй като $2015 \equiv 2 \pmod 3$ и $2016 \equiv 3 \pmod 3$, то $a_{2015} = a_2 = \dfrac{86}{87}$,

$a_{2016} = a_3 = -\dfrac{1}{86}$.

в) Даденото рекурентно уравнение $a_{n+1} = n^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k$ е линейно, обаче е с променлива дължина на историята, затова не може да бъде решено чрез характеристично уравнение. Вместо това заменяме n със $n+1$: $a_{n+2} = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k$; от полученото уравнение вадим оригиналното уравнение и се получава уравнение с фиксирана дължина на историята:
$a_{n+2} - a_{n+1} = (n+1)^2 - n^2 + a_{n+1}$, т.е. $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2n + 1$, т.е.
$\underbrace{a_{n+2} = 2a_{n+1}} + \underbrace{(2n+1) \,.\, 1^n}$,

$\lambda^{n+2} = 2\lambda^{n+1}$

$\lambda = 2$

$$\{2\}_{\text{М}} \bigcup \{1 \;;\; 1\}_{\text{М}} = \{2 \;;\; 1 \;;\; 1\}_{\text{М}}$$

$a_n = C_1 \,.\, 2^n + C_2 + C_3 \,.\, n$

От началното условие $a_1 = 9$ с помощта на рекурентното уравнение пресмятаме следващите четири члена на редицата:
$a_2 = 10$, $a_3 = 23$, $a_4 = 51$, $a_5 = 109$.
Във формулата с неопределените коефициенти заместваме $n = 1,\ 2,\ 3$:

$$\left|\begin{array}{l} 2C_1 + C_2 + C_3 = 9 \\ 4C_1 + C_2 + 2C_3 = 10 \\ 8C_1 + C_2 + 3C_3 = 23 \end{array}\right.$$

Системата има единствено решение: $C_1 = 6$, $C_2 = 8$, $C_3 = -11$. След заместване получаваме формулата за общия член на редицата: $a_n = 6 \,.\, 2^n - 11n + 8$.

Проверката показва, че тази формула правилно дава стойностите на първите три члена на редицата (9, 10 и 23), обаче при четвъртия член резултатът е грешен: 60 вместо 51. Къде сбъркахме?

Грешката е в това, че не взехме под внимание дефиниционното множество на n. Уравнението $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2n + 1$ не важи за a_1 и a_2 $(10 \neq 2 \,.\, 9 + 2 \,.\, 0 + 1)$, в което няма нищо чудно, понеже n не може да бъде 0. От $n \geq 1$ следва, че най-малкият индекс в това уравнение $n+1 \geq 2$, т.е. въпросното уравнение важи от втория член нататък. Също и всички негови следствия. По-конкретно, формулата $a_n = C_1 \,.\, 2^n + C_2 + C_3 \,.\, n$ е в сила за членовете след втория включително $(n \geq 2)$, но не и за първия член. Затова при съставянето на системата нямахме право да заместваме n със 1.

Правилно е да заместим $n = 2,\ 3,\ 4$:

$$\left|\begin{array}{l} 4C_1 + C_2 + 2C_3 = 10 \\ 8C_1 + C_2 + 3C_3 = 23 \\ 16C_1 + C_2 + 4C_3 = 51 \end{array}\right.$$

Решението на системата е $C_1 = 3{,}75$, $C_2 = -1$, $C_3 = -2$. Оттук получаваме формулата за общия член на редицата: $a_n = 3{,}75 \,.\, 2^n - 2n - 1 = 15 \,.\, 2^{n-2} - 2n - 1$.

Проверката показва, че тази формула правилно дава стойностите не само на втория, третия и четвъртия член на редицата (10, 23 и 51), но също и на петия член (109), който не беше използван при съставянето на системата. (Формулата не дава верен резултат за първия член, но това не е признак за грешка.)

И така, формулата за общия член на редицата гласи:

$$a_n = \begin{cases} 9 \quad \text{при} \quad n = 1\,; \\ 15\,.\,2^{n-2} - 2n - 1 \quad \text{при} \quad n \geq 2\,. \end{cases} \quad .$$

Следователно

$$a_{2015} = 15\ .\ 2^{2013} - 4031 \approx 10^{607{,}14947} \approx 10^{0{,}14947}\ .\ 10^{607} \approx 1{,}41082\ .\ 10^{607}\,;$$

$$a_{2016} = 15\ .\ 2^{2014} - 4033 \approx 10^{607{,}45050} \approx 10^{0{,}45050}\ .\ 10^{607} \approx 2{,}82165\ .\ 10^{607}\,.$$

г) Уравнението $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n^2+n}$ се решава чрез развиване:

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n-1)^2+(n-1)} = a_{n-2} + \frac{1}{(n-2)^2+(n-2)} + \frac{1}{(n-1)^2+(n-1)} = \cdots$$

$$a_n = a_1 + \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{3^2+3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2+(n-1)}\,, \quad \text{тоест}$$

$$a_n = 52 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2+k}\,.$$

За получената сума може да се изведе затворена формула.

$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\,. \qquad \text{Следователно}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\cdots} - \cancel{\cdots} + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}\,;$$

$$a_n = 52 + 1 - \frac{1}{n}\,, \quad \text{т.е.} \quad a_n = 53 - \frac{1}{n}\,;$$

$$a_{2015} = 53 - \frac{1}{2015} \approx 52{,}99950372\,, \qquad a_{2016} = 53 - \frac{1}{2016} \approx 52{,}99950397\,.$$

Задача 2. Разглеждаме редицата $a_n = \left(4+\sqrt{7}\right)^n + \left(4-\sqrt{7}\right)^n$, $n \geq 0$. Първите два члена са $a_0 = 2$, $a_1 = 8$. Чрез формулите на Виет съставяме квадратно уравнение с корени $4 \pm \sqrt{7}$, а именно: $\lambda^2 - 8\lambda + 9 = 0$, т.е. $\lambda^2 = 8\lambda - 9$. То е характеристично за рекурентното уравнение $a_{n+2} = 8a_{n+1} - 9a_n$. От това уравнение и от началните условия по индукция следва, че всички членове на редицата $\left(\text{в това число и } a_{2015}\right)$ са цели числа.

Нека b_n е последната цифра в десетичния запис на числото a_n. Тогава b_n е цяло число от 0 до 9 включително, като $b_0 = 2$, $b_1 = 8$, $b_{n+2} \equiv 8b_{n+1} - 9b_n \pmod{10}$ за $\forall n \geq 0$. Ясно е, че редицата $\left(b_n\right)$ ще бъде периодична, стига два от нейните членове да се повторят в същия ред. Това непременно ще се случи, тъй като за наредените двойки от десетични цифри има краен брой различни възможности (точно 100). Следователно редицата $\left(b_n\right)$ е периодична и периодът ѝ не надвхърля 100. Конкретната дължина на периода се намира чрез опитване.

b_n : **2**, **8**, 6, 6, 4, 8, 8, 2, 4, 4, 6, 2, **2**, **8** ...

Понеже $b_0 = b_{12} = 2$ и $b_1 = b_{13} = 8$, то редицата $\left(b_n\right)$ има период 12. Тъй като $2015 : 12 = 167$ и остатък 11, то търсената цифра е $b_{2015} = b_{11} = 2$.

Задача 3. Нека a_n е броят на редиците със свойството от условието на задачата. При $n = 1$ има една такава редица: (1). При $n = 2$ има две редици: (1, 2) и (2, 1). При $n = 3$ има четири редици: (1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 2, 1) и (2, 3, 1).

Тези данни навеждат на мисълта, че $a_n = 2^{n-1}$. Ще докажем това предположение.

Нека L е първият (най-левият) член на редицата. Ако $L \neq 1$, то числото 2 се намира някъде вляво от 1. Ако $L \neq 2$, то числото 3 се намира някъде вляво от 2. И тъй нататък, докато стигнем до числото L, което е първият член на редицата.

Аналогично, ако $L \neq n$, то числото $n-1$ се намира някъде вляво от n. Ако $L \neq n-1$, то числото $n-2$ се намира някъде вляво от $n-1$. И тъй нататък, докато стигнем до числото L.

Значи всяко от числата $2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ ,\ n-3,\ n-2,\ n-1$ се намира вляво от 1 или от n. Следователно последното (най-дясното) число в редицата е или 1, или n.

Ако последното число е n, то останалите $n-1$ позиции могат да бъдат заети от числата $1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ n-1$ по a_{n-1} начина, като се спазва изискването от условието.

Ако последното число е 1, то останалите $n-1$ позиции могат да бъдат заети от числата $2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ ,\ n$ също по a_{n-1} начина, защото, ако извадим единица от всички тях, ще дойдем до предишния случай (изваждането на едно и също число от всички елементи на подредицата не променя техните разлики, значи не нарушава изискванията на задачата).

Следователно $a_n = a_{n-1} + a_{n-1}$, т.е. $a_n = 2a_{n-1}$. Оттук по индукция $a_n = 2^{n-1}$.

Задача 4. Ще използваме обозначенията от упътването.

Нека a_n е броят на маршрутите с дължина n, които започват и завършват в т. O. Ако първото ребро на такъв маршрут е OA, то останалите $n-1$ ребра образуват маршрут с дължина $n-1$ от т. A до т. O; броят на тези маршрути е равен на b_{n-1}. Ако първото ребро е OB, то останалите $n-1$ ребра образуват маршрут с дължина $n-1$ от т. B до т. O; поради симетрията между върховете на шестоъгълника броят на тези маршрути също е равен на b_{n-1}. Аналогично разсъждение важи за върховете C, D, E и F. От правилото за събиране следва, че $a_n = 6b_{n-1}$.

По същия начин намираме формула за b_n — броя на маршрутите с дължина n, които започват в т. A и завършват в т. O. Ако първото ребро на такъв маршрут е AO, то другите $n-1$ ребра образуват маршрут с дължина $n-1$ от т. O до т. O; броят на тези маршрути е равен на a_{n-1}. Ако първото ребро е AB, то другите $n-1$ ребра образуват маршрут с дължина $n-1$ от т. B до т. O; поради симетрията между върховете на шестоъгълника броят на тези маршрути е равен на b_{n-1}. Ако първото ребро е AF, то останалите $n-1$ ребра образуват маршрут с дължина $n-1$ от т. F до т. O; поради симетрията броят на тези маршрути също е b_{n-1}. От правилото за събиране получаваме уравнението $b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$.

Двете рекурентни уравнения образуват система:

$$\left|\begin{aligned} a_n &= 6b_{n-1} \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} \end{aligned}\right.$$

От първото уравнение изразяваме $b_{n-1} = \dfrac{1}{6}\,a_n$, следователно $b_n = \dfrac{1}{6}\,a_{n+1}$. Заместваме във второто уравнение и получаваме рекурентна зависимост, съдържаща само членовете на редицата, която ни интересува: $\dfrac{1}{6}\,a_{n+1} = a_{n-1} + \dfrac{2}{6}\,a_n$, тоест $a_{n+1} = 2a_n + 6a_{n-1}$. Характеристичното уравнение $\lambda^2 = 2\lambda + 6$ има корени $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{7}$. Следователно $a_n = C_1 \,.\, \left(1+\sqrt{7}\right)^n + C_2 \,.\, \left(1-\sqrt{7}\right)^n$.

Чрез непосредствено преброяване намираме $a_1 = 0$, $a_2 = 6$. Заместваме n с 1 и с 2 във формулата с неопределените коефициенти и получаваме система от две линейни уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} C_1 \, . \left(1+\sqrt{7}\right) \; + C_2 \, . \left(1-\sqrt{7}\right) \; = \; 0 \\ C_1 \, . \left(1+\sqrt{7}\right)^2 + C_2 \, . \left(1-\sqrt{7}\right)^2 \; = \; 6 \end{array} \right.$$

Решението на тази система е $C_1 = \dfrac{7-\sqrt{7}}{14}$, $C_2 = \dfrac{7+\sqrt{7}}{14}$. Следователно

$$a_n = \frac{7-\sqrt{7}}{14} \, . \left(1+\sqrt{7}\right)^n + \frac{7+\sqrt{7}}{14} \, . \left(1-\sqrt{7}\right)^n, \quad \text{т.е.}$$

$$a_n = \frac{\left(7-\sqrt{7}\right) . \left(1+\sqrt{7}\right)^n + \left(7+\sqrt{7}\right) . \left(1-\sqrt{7}\right)^n}{14} \, .$$

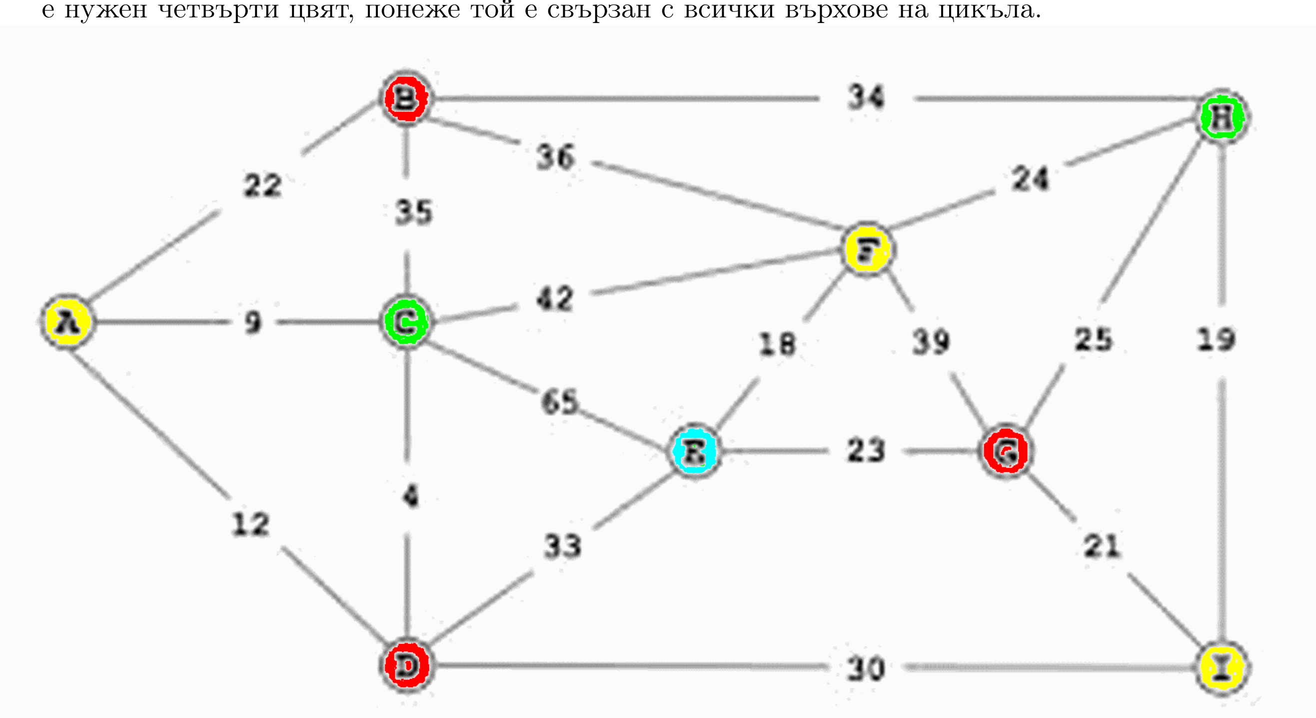
Броят на маршрутите с дължина 2015, започващи и завършващи в т. O, е равен на

$$a_{2015} = \frac{\left(7-\sqrt{7}\right) . \left(1+\sqrt{7}\right)^{2015} + \left(7+\sqrt{7}\right) . \left(1-\sqrt{7}\right)^{2015}}{14} \approx 3,11654 \, . \, 10^{1131} \, .$$

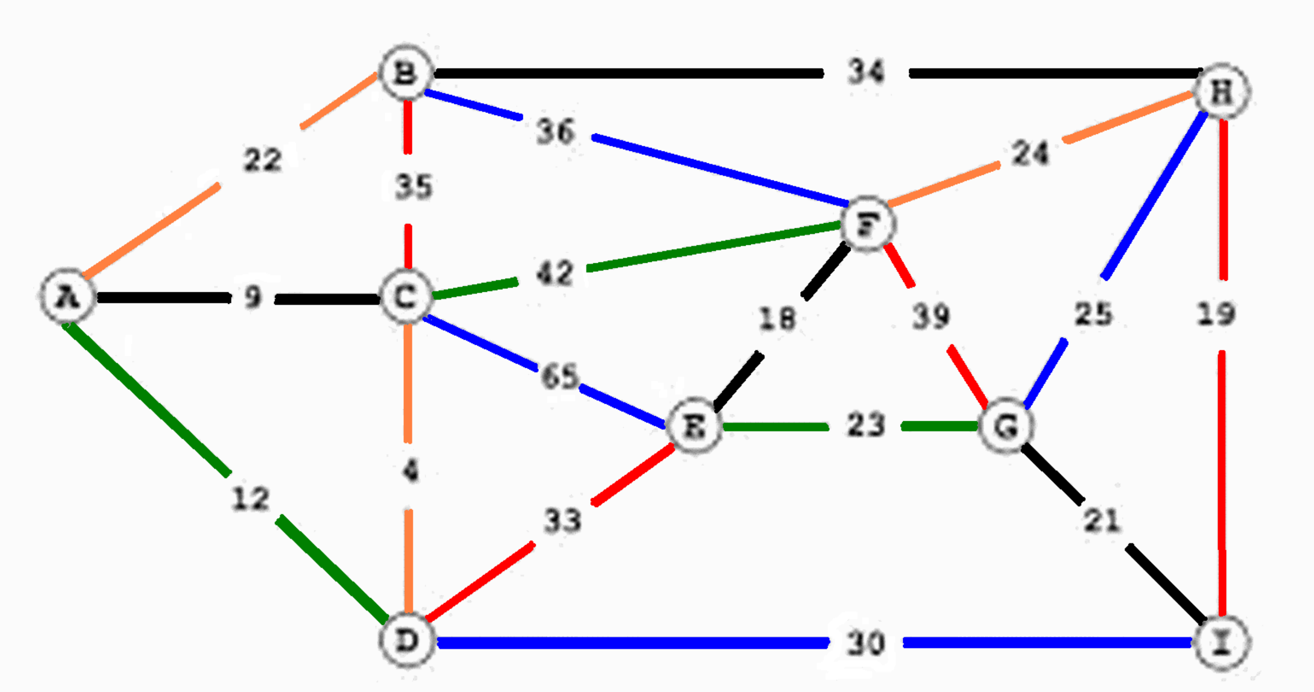
Задача 6.

а) Тъй като графът е планарен, то кликовото му число не надхвърля 4. С непосредствена проверка се убеждаваме, че не съществуват четири върха, всеки два от които да са свързани с ребро. Затова пък съществуват три върха с това свойство (например A, B и C). Следователно кликовото число на графа е 3.

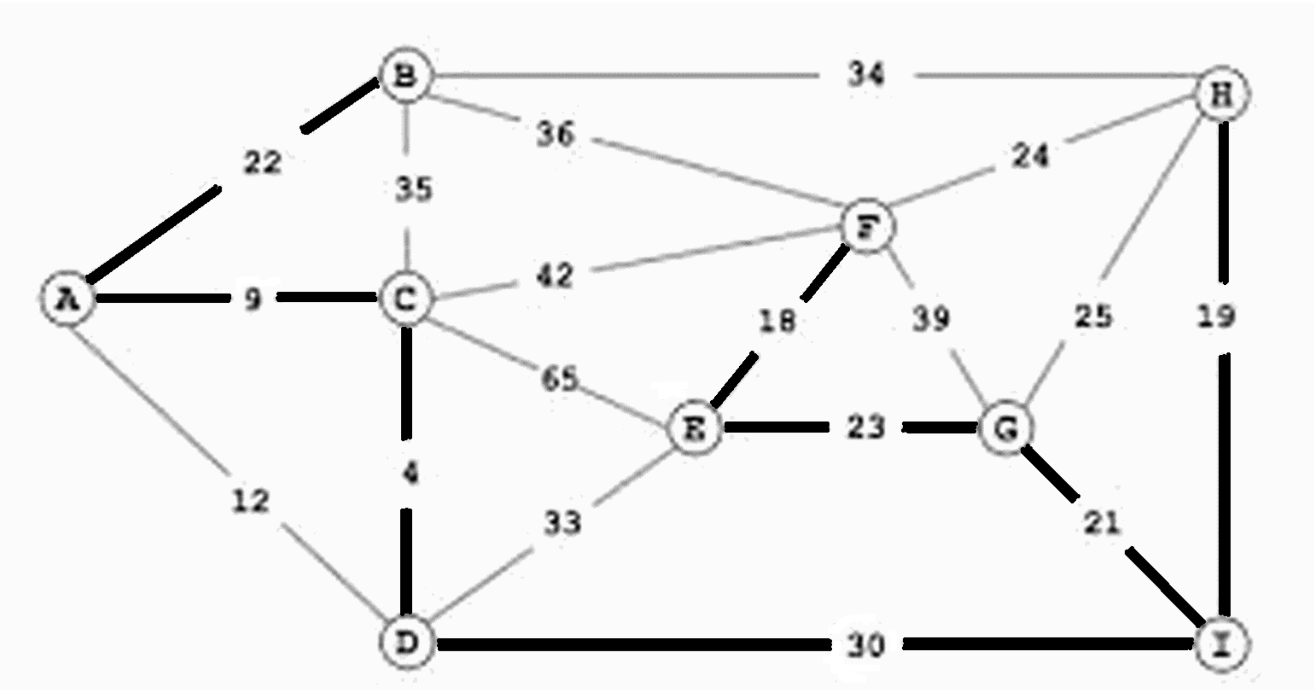
б) Върховото хроматично число е равно на 4. Едно оцветяване на върховете с четири цвята е показано тук. Три цвята не са достатъчни заради цикъла $BCEGHB$: той има нечетна дължина (5), следователно за неговите върхове са нужни най-малко три цвята; за върха F е нужен четвърти цвят, понеже той е свързан с всички върхове на цикъла.



в) Ребровото хроматично число е равно на 5. Едно оцветяване на ребрата с пет цвята е показано тук. Четири цвята не са достатъчни например заради върха F, който е от пета степен.



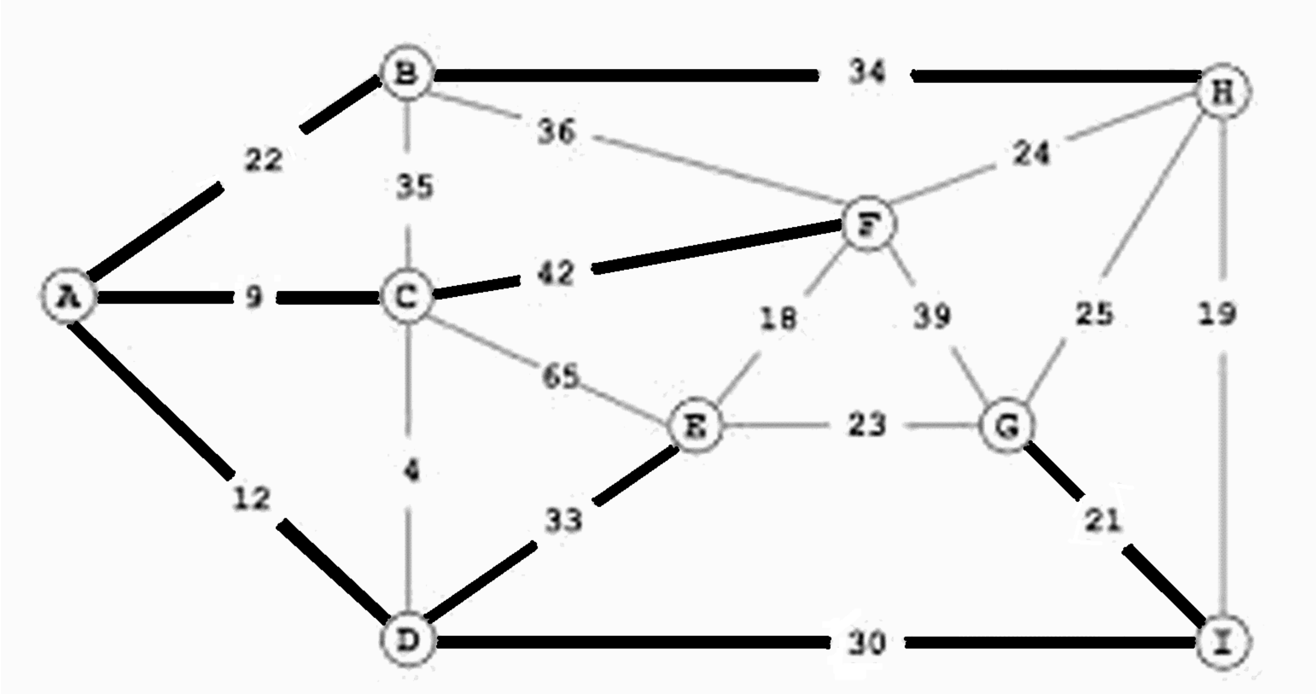
г, д) Минималното покриващо дърво има тегло 146:



Ред на включване на ребрата в покриващото дърво:
— г) CD, AC, EF, HI, GI, AB, EG, DI ;
— д) AC, CD, AB, DI, HI, GI, EG, EF .

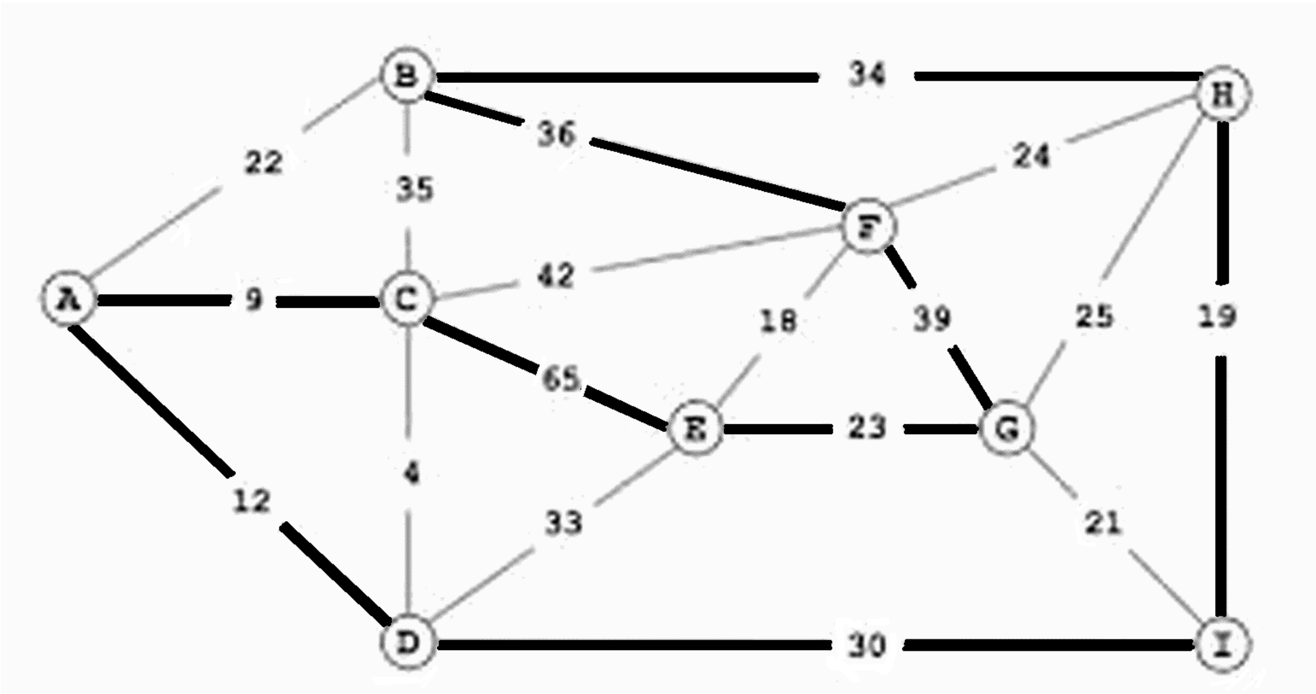
з) Ойлерова верига не съществува — нито отворена, нито затворена, — тъй като върховете от нечетна степен са повече от два: A, C, F и I.

е) Дървото на най-късите пътища от върха A до останалите върхове изглежда така:



Ред на включване на ребрата в дървото на най-късите пътища:
AC, AD, AB, DI, DE, CF, BH, GI.

ж) Съществува хамилтонов цикъл, например $ADIHBFGECA$.



Задача 5. Нека m е броят на ребрата на графа. По условие всяка област има три ребра. На пръв поглед всички ребра са $3f$ на брой. В действителност по този начин всяко ребро е броено два пъти, защото е общо за две области, така че $m = \dfrac{3f}{2}\cdot$ Заместваме във формулата на Ойлер за планарните графи: $n - m + f = 2$, следователно $n - \dfrac{3f}{2} + f = 2$, т.е. $n - \dfrac{f}{2} = 2$, откъдето $f = 2n - 4$.