До 16:30 решаване и 15 мин предаване

Нечетният вариант

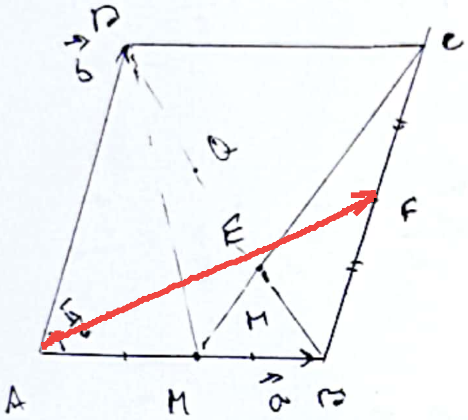
Вариант 1

Зад. 1 Дадени $\vec{a}, \vec{b}$ и $|\vec{a}| = 3$ $|\vec{b}| = 4$ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$

ABCD - усп $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, т. M ср. на (AB)

т. F ср. на (BC)

нека т. E т.че $\vec{ME} = \frac{1}{3}\vec{MC} \Rightarrow 3\vec{ME} = \vec{MC}$



а) док. че A, E, F - колинеарни

Реш.: $\vec{AF} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AB})$

$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ $\vec{AB} = \vec{a}$

$\vec{AF} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{a}) = \boxed{\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}}$

$\vec{EF} = \frac{1}{2}(\vec{EC} + \vec{EB})$ ✓

$\cancel{\vec{EC} = \frac{1}{3}(= \vec{MC} - \vec{ME} = -\frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB}) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}$

$\vec{EC} = \vec{MC} - \vec{ME}$; $\vec{MC} = -\frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB}) = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{BC})$

$\cancel{\vec{ME}} = \vec{ME} = \frac{1}{3}\vec{MC} = \frac{1}{6}(\vec{AC} + \vec{BC})$

$\vec{EC} = \frac{3}{6}(\vec{AC} + \vec{BC}) - \frac{1}{6}(\vec{AC} + \vec{BC}) = \frac{1}{3}(\vec{AC} + \vec{BC}) = \boxed{\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{b})}$

$\cancel{\vec{EB} = \frac{1}{3}(}$ $\cancel{\vec{EM} = \frac{1}{2}(\vec{EA}}$

$\cancel{\vec{EB}}$ $\vec{EB} = \vec{EM} + \vec{MB} = -\frac{1}{6}(\vec{AC} + \vec{BC}) + \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{6}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{b}) =$

$= \frac{3}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \boxed{\frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b})}$

$\vec{EF} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b}) + \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} \Rightarrow$

(1)

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow \vec{AF} = 3 . \vec{EF}$

$\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = 3\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}\right)$

$\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ $\Rightarrow$ т. A, E, F са колинеарни

Зад. 3 $|\vec{a}| = 2$ $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 2\pi$

~~S)~~ ~~Зад.1~~ ~~$S_{\triangle EFC} = ?$~~

~~$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$~~

Зад.1

б) т. P медицентър на $\triangle AED$

$\vec{AP} = ?$

Нека т. Q - среда на (DE).

$\vec{AQ} = \frac{1}{2}(\vec{AE} + \vec{AD})$; $\vec{AF} = \vec{AE} + \vec{EF}$, $\vec{AE} = \vec{AF} - \vec{EF}$

$\vec{AE} = \frac{3}{3}\vec{a} + \frac{3}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} = \boxed{\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{6}\vec{b}}$

$\vec{AQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{6}\vec{b} + \frac{6}{6}\vec{b}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}\right)}$

~~От $\vec{AQ}$ медиана~~ => От $\vec{AQ}$ медиана и т. P медицентър =>

$\Rightarrow \vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AQ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}\right) = \boxed{\frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}}$

$\vec{AP} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}$

в) Зад.1 $S_{\triangle EFC} = \frac{1}{2}\left|(\vec{CE} \times \vec{CF})\right| = \frac{1}{2}\left|(\vec{EC} \times \vec{FC})\right|$

$\vec{EC} \times \vec{FC} = \left(\frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b})\right) \times \left(\frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{6}(\vec{a} + 2\vec{b}) \times \vec{b} =$

$= \frac{1}{6}\left((\vec{a} \times \vec{b}) + \underbrace{(2\vec{b}) \times \vec{b}}_{=\vec{0}}\right) = \boxed{\frac{1}{6}(\vec{a} \times \vec{b})}$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\frac{\pi}{6} = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{6}$

$\boxed{S_{\triangle EFC} = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{6}\cdot(\vec{a} \times \vec{b})\right| = \frac{1}{2}}$

Зад. 2 ОКС

$A(-1, 0, 4)$

$B(1, 1, 6)$

$C(2, 0, 7)$

а) $P_{\triangle ABC} = ?$

$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

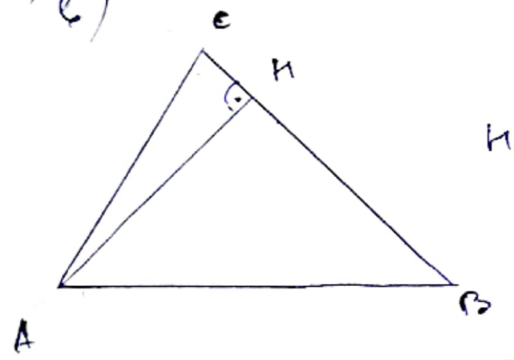
$|\vec{BC}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$|\vec{AC}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{2\cdot 9} = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow P_{\triangle ABC} = 3 + \sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

4т

б)



$H \in BC \Rightarrow \exists!\, \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \vec{BC} = \vec{BH}$

$AH \perp BC \Rightarrow \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$

но $\vec{AH} = \vec{AB} + \vec{BH} = \vec{AB} + \lambda \vec{BC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{AH} \cdot \vec{BC} = (\vec{AB} + \lambda \vec{BC}) . \vec{BC}$

$\vec{AB}(2, 1, 2)$ .. $(\vec{AB} + \lambda \vec{BC})(2+\lambda, 1-\lambda, 2+\lambda)$

$\vec{BC}(1, -1, 1)$

$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$\vec{AH} . \vec{BC} = (2+\lambda).1 + (1-\lambda).(-1) + (2+\lambda).1 =$

$= 2 + \lambda + \lambda - 1 + 2 + \lambda = 3\lambda + 3$

но $AH \perp BC \Rightarrow 3\lambda + 3 = 0$

$3\lambda = -3$

$\lambda = -1$

$\boxed{\vec{AH}(1, 2, 1)}$

4.1

4т

5.) <u>Зад. 2</u>

$(AB)^2 + (BC)^2 - (AC)^2 = 9 + 3 - 18 = -6 < 0 \Rightarrow \triangle ABC$ - тъпоъгълен

$\vec{BA}(-2, -1, -2)$

$\vec{BC}(1, -1, 1)$

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -2 + 1 - 2 = -3$

$\cos\sphericalangle(\vec{BA}, \vec{BC}) = \dfrac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} < 0 \Rightarrow \triangle ABC$ - тъпоъгълен

4 т

Зад 3 $\quad |\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = \sqrt{2}, \quad \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3\pi}{4}$

$\vec{OA} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{OB} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} + \lambda \vec{a}, \quad \vec{OC} = \vec{a} \times \vec{b} + (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}$

а) $\lambda = ?$ т.че $\vec{OA} \nparallel \vec{OB}$

$\vec{OA} \parallel \vec{OB} \Leftrightarrow \vec{OA} \times \vec{OB} = \vec{0}$

$\vec{OA} \times \vec{OB} = (\vec{a} + \vec{b}) \times \left((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} + \lambda \vec{a} \right) =$

$= (\vec{a} + \vec{b}) \times \left(\vec{b}(\vec{a}.\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}.\vec{a}) + \lambda \vec{a} \right) =$ $\quad \vec{a} \times \vec{b} \quad\quad -\lambda \vec{a} \times \vec{b}$

$= \vec{a} \times \vec{b}.(\vec{a}^2) - \underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{\vec{0}}(\vec{b}.\vec{a}) + \lambda \underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{\vec{0}} - \vec{b} \times \vec{a}(\vec{b}.\vec{a}) + \vec{b} \times \vec{a} \lambda =$

$= \vec{a} \times \vec{b} \left(|\vec{a}|^2 + \vec{a}.\vec{b} - \lambda \right)$ $\quad \vec{a} \nparallel \vec{b} \Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) - \lambda = 0$

$\boxed{\lambda = 4 - 2 = 2}$ ✓ $\quad 4т$

б) $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ са ЛНЗ $\Leftrightarrow$ смесеното им произведение не е нула!

$(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) = (\vec{OA} \times \vec{OB}).\vec{OC} =$

$= \left[(\vec{a} + \vec{b}) \times \left((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} - \vec{a} \right) \right] . \left(\vec{a} \times \vec{b} + (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b} \right) =$

$= \left[\vec{a} \times \vec{b} (4 - \overset{1}{2} - 1) \right] . \left(\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b}(\vec{a}\vec{b}) - \vec{a}(\vec{b}^2) \right) =$

$= (\vec{a} \times \vec{b})^2 + \underbrace{(\vec{a}\vec{b}\vec{b})}_{0}(\vec{a}\vec{b}) - \underbrace{(\vec{a}\vec{b}\vec{a})}_{0}(\vec{b}^2) = \boxed{(\vec{a} \times \vec{b})^2} =$

$\begin{array}{c|cc|} & \vec{a} & \vec{b} \\ \vec{a} & \vec{a}^2 & \vec{a}\vec{b} \\ \vec{b} & \vec{a}\vec{b} & \vec{b}^2 \end{array} = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b} \quad (ab)^2 \quad = 4.2 - \cancel{2}.2.\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) =$

$= 8 + 4 = 12$

$8т$

$\boxed{V_{тетр} = \frac{1}{6}.12 = 2}$

6

Scanned with CamScanner

Index of comments

1.1 AF =AB+BF =a+1/2 b

4.1 Търсят се координатите на точката H.