Лекция №1: Основни понятия

1.1 Специфично за частичните функции

Ще разглеждаме функции в множеството на естествените числа

$$\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\},$$

които са *частични*. Това означава, че в някои точки те могат да не са дефинирани, т.е. да нямат стойност. Като цяло, такива ще са функциите, които ще изучаваме в този курс. Това ще са функции, които се пресмятат – най-общо казано – с някаква програма. И тъй като програмите, както е известно, невинаги завършват, то и функциите, които те пресмятат, в общия случай трябва да са частични.

Ще пишем $f : \mathbb{N}^n \longrightarrow\!\!\!\!\!\circ\;\; \mathbb{N}$, за да означим, че f е частична функция на n аргумента в $\mathbb{N}$. Съвкупността от всички такива функции ще отбелязваме с $\mathcal{F}_n$, с други думи

$$\mathcal{F}_n = \{f \mid f : \mathbb{N}^n \longrightarrow\!\!\!\!\!\circ\;\; \mathbb{N}\}.$$

По-надолу ще предполагаме, че f е произволна n-местна частична функция. Ако тя е дефинирана в точката $(x_1, \dots, x_n)$, това ще отбелязваме така:

$$!f(x_1, \dots, x_n),$$

а ако не е дефинирана — ще пишем съответно $\neg!f(x_1, \dots, x_n)$.

Множеството от всички точки, в които f е дефинирана, ще наричаме *дефиниционно множество (домейн)* на f и ще означаваме с $Dom(f)$, или формално:

$$Dom(f) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid !f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Ако $Dom(f) = \mathbb{N}^n$, ще казваме, че f е *тотална (навсякъде дефинирана)*. Разбира се, всяка тотална функция може да се разглежда и като частична, т.е. тя също е от множеството $\mathcal{F}_n = \{f \mid f : \mathbb{N}^n \longrightarrow\!\!\!\!\!\circ\;\; \mathbb{N}\}$. Когато казваме *функция*, изобщо казано, ще имаме предвид частична функция. Ако е важно, че функцията е тотална, това ще бъде отбелязвано експлицитно, в случай че не се подразбира от контекста.

По-нататък n-торките $(x_1, \dots, x_n)$ понякога ще съкращаваме до $\bar{x}$.

1.1.1 Условно равенство

Когато пишем знак за равенство между изрази, в които участват частични функции, е необходимо да уточним какво ще разбираме в случаите, когато някоя от двете страни (или и двете) не са дефинирани. За тази цел ще използваме нов символ $\simeq$, който ще наричаме *условно равенство*. Това равенство се дефинира по следния начин:

Определение 1.1. Нека $\alpha(\bar{x})$ и $\beta(\bar{x})$ са изрази, в които участват частични функции. Тогава

$$\begin{aligned}\alpha(\bar{x}) \simeq \beta(\bar{x}) \quad \stackrel{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad & !\alpha(\bar{x}) \ \& \ !\beta(\bar{x}) \ \& \ \alpha(\bar{x}) = \beta(\bar{x}) \\ & \vee \ \neg!\alpha(\bar{x}) \ \& \ \neg!\beta(\bar{x}).\end{aligned}$$

С други думи, условното равенство има стойност *истина* или когато и двете му страни са дефинирани и имат една и съща стойност, или когато и двете му страни не са дефинирани. В останалите случаи то е *лъжа*. В частност, $f(\bar{x}) \simeq y$ ще е вярно точно когато f е дефинирана в $\bar{x}$ и нейната стойност е y.

Графиката G_f на частичната функция f въвеждаме по обичайния начин:

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, y) \mid f(x_1, \dots, x_n) \simeq y\}.$$

Определение 1.2. За две n-местни частични функции f и g ще казваме, че са *равни* (и ще пишем $f = g$), ако $f(\bar{x}) \simeq g(\bar{x})$ за всяко $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$.

Ясно е, че ако $f = g$, то $Dom(f) = Dom(g)$ и $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$ за всяко $\bar{x} \in Dom(f)$. Да разпишем по-подробно условието за равенство на две функции:

$$\begin{aligned} f = g &\iff \forall x_1 \dots \forall x_n \ f(x_1, \dots, x_n) \simeq g(x_1, \dots, x_n) \\ &\iff \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y \ (f(x_1, \dots, x_n) \simeq y \iff g(x_1, \dots, x_n) \simeq y) \\ &\iff \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y \ ((x_1, \dots, x_n, y) \in G_f \iff (x_1, \dots, x_n, y) \in G_g) \\ &\iff G_f = G_g. \end{aligned}$$

Излезе (без да е изненадващо), че две частични функции са равни точно тогава, когато имат едни и същи графики.

Нека $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ е израз, в който участват променливите $x_1, \dots, x_n$, и нека сме избрали някаква част от тях — да кажем $x_1, \dots, x_k$. Тогава с

$$\lambda x_1, \dots, x_k \,.\, \alpha(x_1, \dots, x_n)$$

ще означаваме функцията g на променливите $x_1, \dots, x_k$,, която при фиксирани $x_{k+1}, \dots, x_n$ се дефинира по следния начин:

$$g(x_1, \dots, x_k) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} \alpha(x_1, \dots, x_n)$$

за всяко $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$.

Примери: $\lambda x \,.\, x$ е функцията *идентитет*, $\lambda x \,.\, 0$ е едноместната константна функция, която има стойност 0, $\lambda x, y \,.\, x + y$ е функцията събиране, докато $\lambda x \,.\, x + y$ е линейната функция f, която при фиксирано y се дефинира като $f(x) = x + y$.

1.1.2 Релацията включване

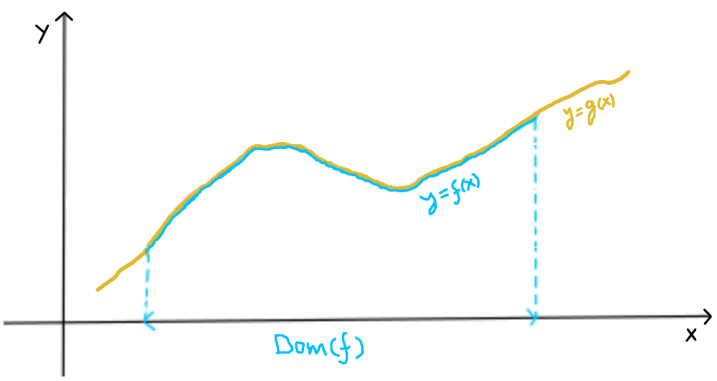
Тук ще въведем една релация между частични функции, която няма аналог при тоталните функции. Релацията е *включване* $(\subseteq)$ и смисълът ѝ е, че ако $f \subseteq g$, то "g знае повече от f" или "g носи повече информация от f". Ето точното определение:

Определение 1.3. Нека $f, g \in \mathcal{F}_n$. Тогава

$$f \subseteq g \stackrel{\text{деф}}{\iff} \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y \; (f(x_1, \dots, x_n) \simeq y \implies g(x_1, \dots, x_n) \simeq y).$$

Ако $f \subseteq g$, ще казваме още, че f е *подфункция* на g или обратно — че g е *продължение* на f. Преразказано, една функция се продължава от друга, ако там, където първата е дефинирана (т.е. има някаква стойност), там и втората е дефинирана и има същата стойност.

Ето как изглеждат графиките на две функции f и g, такива че $f \subseteq g$:



Разбира се, тъй като функциите f и g са дискретни, то графиките им би трябвало да са дискретни множества. Ние, обаче, за по-нагледно навсякъде в курса ще ги чертаем като непрекъснати.

От определението на релацията $\subseteq$ се вижда, че

$$f \subseteq g \iff G_f \subseteq G_g,$$

което обяснява защо използваме същия символ $\subseteq$ както при включване между множества.

Да отбележим и още един очевиден факт, който ще използваме често:

$$f \subseteq g \implies Dom(f) \subseteq Dom(g).$$

Ако f е тотална и $f \subseteq g$, то очевидно $f = g$, т.е. върху тоталните функции релацията включване съвпада с релацията равенство.

Когато задаваме някаква функция f и искаме да кажем, че в т. $(x_1, \dots, x_n)$ тя няма стойност, това ще записваме и така: $f(x_1, \dots, x_n) \simeq \neg!$.

Ето един пример за две функции f и g, такива че f е подфункция на g:

Пример 1.1. Да дефинираме функциите f и g по следния начин:

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & \text{ако } y > 0 \\ \neg!, & \text{ако } y = 0, \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & \text{ако } y > 0 \\ 0, & \text{ако } y = 0. \end{cases}$$

Ясно е, че в точките, в които е дефинирана, f има същата стойност като g, с други думи, $f \subseteq g$.

Релацията *строго включване* ($\subset$) се дефинира от $\subseteq$ по обичайния начин:

$$f \subset g \overset{\text{деф}}{\iff} f \subseteq g \;\&\; f \neq g.$$

За функциите f и g от *Пример* 1.1 от по-горе всъщност имаме $f \subset g$.

От наблюдението, че две функции са равни точно когато графиките им съвпадат, получаваме следната връзка между релациите $=$ и $\subseteq$:

$$\begin{aligned} f = g &\iff G_f = G_g \\ &\iff G_f \subseteq G_g \;\&\; G_g \subseteq G_f \\ &\iff f \subseteq g \;\&\; g \subseteq f. \end{aligned}$$

Излезе, че

$$f = g \iff f \subseteq g \;\&\; g \subseteq f.$$

От тази еквивалентност се вижда един начин да покажем, че две *частични* функции са равни — като проверим, че едната е подфункция на другата и обратно. Оказва се, че можем леко да отслабим това условие, като заменим включването $g \subseteq f$ с по-слабото $Dom(g) \subseteq Dom(f)$. Тази дребна наглед корекция в някои моменти ще ни спестява доста писане. Но първо да се убедим, че можем да направим това:

Твърдение 1.1. Нека f и g са n-местни функции. Тогава $f = g$ тогава и само тогава, когато са изпълнени условията:

1) $f \subseteq g$;

2) $Dom(g) \subseteq Dom(f)$.

Доказателство. Ако $f = g$, то $f \subseteq g$ и $g \subseteq f$ и от последното, в частност, следва и включването между домейните $Dom(g) \subseteq Dom(f)$.

Обратно, нека са верни 1) и 2). Трябва да покажем, че $f \subseteq g$ и $g \subseteq f$. Първото включване е точно условието 1). За да покажем, че и $g \subseteq f$, да приемем, че за произволни $\bar{x}, y$ $g(\bar{x}) \simeq y$. Тогава $\bar{x} \in Dom(g)$, а оттук съгласно 2) ще имаме и $\bar{x} \in Dom(f)$, и значи $f(\bar{x}) \simeq z$ за някое z. Сега от условието 1) получаваме, че и $g(\bar{x}) \simeq z$, откъдето $y = z$. И така, получихме, че за произволни $\bar{x}, y$:

$$g(\bar{x}) \simeq y \implies f(\bar{x}) \simeq y,$$

което съгласно дефиницията на релацията $\subseteq$ означава, че $g \subseteq f$. □

Да напомним, че една бинарна релация е *частична наредба*, ако е рефлексивна, транзитивна и антисиметрична. Релацията включване, която току-що въведохме, е точно такава:

Твърдение 1.2. За всяко $n \geq 1$ релацията $\subseteq$ е частична наредба в $\mathcal{F}_n$.

Доказателство. Следва от еквивалентността

$$f \subseteq g \iff G_f \subseteq G_g$$

и от факта, че теоретико-множествената релация включване е частична наредба. □

Да отбележим, че горната релация наистина е *частична*, т.е. не всеки две функции от $\mathcal{F}_n$ са свързани чрез нея. Такива са например константните функции $f_0 = \lambda x\,.\,0$ и $f_1 = \lambda x\,.\,1$.

Не се заблуждавайте: вярно е, че $f_0(x) \leq f_1(x)$ за всяко x, обаче не е вярно, че $f_0 \subseteq f_1$. ☺

Интуитивно, $f \subseteq g$ означава, че f е „по-малко информативна“ от g. Тогава „най-малко информативна“ ще е функцията, която не е дефинирана в нито една точка. Всъщност има безброй много такива функции, в зависимост от броя на аргументите им. За фиксирано $n \geq 1$ с $\emptyset^{(n)}$ ще означаваме n-местната функция, която не е дефинирана за нито една n-торка $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$ и тази функция ще наричаме *никъде недефинираната (празната) функция* на n аргумента. Ясно е, че за всяка $f \in \mathcal{F}_n$ е в сила включването

$$\emptyset^{(n)} \subseteq f,$$

с други думи, никъде недефинираната функция $\emptyset^{(n)}$ е най-малкият (относно $\subseteq$) елемент на $\mathcal{F}_n$.

1.1.3 Суперпозиция на функции

Ще завършим този раздел с дефиницията на операцията *суперпозиция* на частични функции.

Определение 1.4. Нека f е произволна n-местна функция, а $g_1, \dots, g_n$ са n на брой функции, всички на k аргумента. *Суперпозицията* на тези функции е k-местната функция h, която се дефинира по следния начин:

$$h(x_1, \dots, x_k) \simeq y \overset{\text{деф}}{\iff} \exists z_1 \dots \exists z_n \; (g_1(x_1, \dots, x_k) \simeq z_1 \;\&\; \dots \;\&\; g_n(x_1, \dots, x_k) \simeq z_n \;\&\; f(z_1, \dots, z_n) \simeq y) \tag{1.1}$$

за всяко $(x_1, \dots, x_k)$ от $\mathbb{N}^k$

Суперпозицията на f и $g_1, \dots, g_n$ ще означаваме с

$$f(g_1, \dots, g_n).$$

При $n = 1$ функцията $f(g)$ ще наричаме *композиция* на f и g и ще бележим с обичайното $f \circ g$.

От еквивалентността (1.1) следва в частност, че

$$!f(g_1, \dots, g_n)(\bar{x}) \iff !g_1(\bar{x}) \;\&\; \dots \& \; !g_n(\bar{x}) \;\&\; !f(g_1(\bar{x}), \dots, g_n(\bar{x})).$$

Ако приемем, че така разбираме дефинираността на $f(g_1, \dots, g_n)(\bar{x})$, определението за суперпозиция можем да запишем и по-кратко като:

$$f(g_1, \dots, g_n)(\bar{x}) \overset{\text{деф}}{\simeq} f(g_1(\bar{x}), \dots, g_n(\bar{x})).$$

Да обърнем внимание, че за да има стойност изразът $f(g_1(\bar{x}), \dots, g_n(\bar{x}))$, трябва всеки от изразите $g_1(\bar{x}), \dots, g_n(\bar{x})$ да има стойност, независимо че някои от тези стойности могат да не се използват за крайния резултат $f(g_1(\bar{x}), \dots, g_n(\bar{x}))$. Ето два примера:

Пример 1.2.

1) Нека $f = \lambda x, y \,.\, x$ (което означаваше: $f(x, y) = x$ за всяко x, y), нека още $g = \lambda x \,.\, x$, а $h = \emptyset^{(1)}$. Тогава

$$f(g, h)(x) \simeq f(g(x), h(x)) \simeq f(x, \neg!) \simeq \neg!,$$

въпреки че вторият аргумент на f е фиктивен и стойността на $f(x, y)$ не зависи от него.

2) Нека сега $f = \lambda x, y \;.\; x.y$, $g = \lambda x \,.\, 0$, а $h = \emptyset^{(1)}$ отново. Тогава

$$f(g,h)(x) \simeq f(g(x), h(x)) \simeq 0.\neg! \simeq \neg!.$$

От друга страна, когато единият множител е 0, има някаква логика да искаме резултатът от умножението също да бъде 0, без въобще да се пресмята другият множител. Във функционалното програмиране подобно явление е известно като *отложено пресмятане (lazy evaluation)*, т.е. пресмятането на изразите се отлага дотогава, докогато е възможно, а на функционалните променливи се подават *имената* на изразите (а не техните *стойности*).

Ето един съвсем прост пример за рекурсивна програма, при която двата основни начина за подаване на параметрите — по стойност и по име — водят до различен резултат:

Пример 1.3. Нека R е следната програма:

$F(X,\ Y)\ =\ \texttt{if}\quad X\ =\ 0\quad \texttt{then}\ 0\quad \texttt{else}\quad F(X-1,\ F(X,\ Y)\ )$

При извикването по стойност $F(5,\ 10)$ ще имаме:

$\underline{F}(5,\ 10)\ \longrightarrow\ F(4,\ \underline{F}(5,\ 10)\ )\ \longrightarrow\ F(4,\ F(4,\ \underline{F}(5,\ 10)\ )\ )\ \longrightarrow\ \dots$

което очевидно зацикля, докато при извикването по име ще стигнем до базовия случай $X = 0$ и съответно резултатът ще е 0:

$\underline{F}(5,\ 10)\ \longrightarrow\ \underline{F}(4,\ F(5,\ 10)\ )\ \longrightarrow\ \underline{F}(3,\ F(4,\ F(5,\ 10)\ )\ )\ \longrightarrow\ \dots\ \longrightarrow$

$\underline{F}(0,\ F(1,\dots\ F(4,\ F(5,\ 10)\ )\ \dots)\ )\ \longrightarrow\ 0.$

Ясно е, че с *call by value* R ще пресметне функцията

$$f_{CV}(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \neg!, & \text{ако } x > 0, \end{cases}$$

докато с *call by name* — функцията

$$f_{CN}(x,y) = 0 \quad \text{за всяко } x, y \in \mathbb{N}.$$

Излезе, че $f_{CV} \subseteq f_{CN}$, или другояче казано — всичко, което се извежда от R по стойност, се извежда и по име. По-нататък ще видим, че това наблюдение е в сила за *всяка* рекурсивна програма R.