Тема 15 Формулирайте и док. теоремата за характеризация на елемента на най-добро приближение в хилбертово пространство

деф: Хилбертово пространство: H е хилбертово, ако е въведено скаларно произведение $\forall f \forall g \in H$:

① $(f,f) \geq 0$, като $(f,f)=0 \leftrightarrow f=0$ норма: $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$

② $(f,g) = (g,f)$

③ $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f,h) + \beta(g,h)$

деф: Нека $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ са ЛНЗ от H и $\Omega_n = \{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k : \alpha_k \in \mathbb{R}, k=\overline{0,n}\}$

Нека $f \in H$ $E_n(f) = \inf_{\varphi \in \Omega_n} \|f-\varphi\|$ - най-добро приближение на f с елемент от Ω_n

Ако $\varphi^* \in \Omega_n$: $\|f-\varphi^*\| = E_n(f)$ $\rightarrow \varphi^*$ е елемент на най-добро приближение за f с ел о

- H е строго нормирано, то за $\forall f \in H$ $\exists!$ ел на НДП от Ω_n

ТЕОРЕМА: Нека $g \in H$ - непрекъснато. Означаваме с φ^* елемента на НДП от Ω_n за f

$\leftrightarrow$ $(f-\varphi^*, \varphi) = 0$ $\forall \varphi \in \Omega_n$ (1)

(Необходимост): φ^* е елемент на НДП от Ω_n за f е изп (1)

1) Ако $\varphi = \vec{0}$, то (1) е изпълнено.

2) Ако $\varphi \neq \vec{0}$, тогава $\|f-\varphi^*\|^2 \leq \|f-(\varphi^*+\lambda\varphi)\|^2$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, то

$g(\lambda) \geq g(0)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow g'(0) = 0$ / функ. има min

$g(\lambda) = (f-\varphi^*-\lambda\varphi, f-\varphi^*-\lambda\varphi) = (f-\varphi^*, f-\varphi^*) - 2\lambda(f-\varphi^*, \varphi) + \lambda^2(\varphi,\varphi)$

$g' = -2(f-\varphi^*, \varphi) + 2\lambda(\varphi,\varphi)$, при $\lambda = 0$

$g'(0) = 0 = -2(f-\varphi^*, \varphi)$, $\Rightarrow$ $\square$

(Достатъчност) Нека $\varphi^* \in \Omega_n$ удовлетворява (1). Ще док $\varphi^* \in \Omega_n$ е ел. на НДП за f

$\|f-\varphi\|^2 = \|f-\varphi^*+\varphi^*-\varphi\|^2 = \|f-\varphi^*\|^2 + \|\varphi^*-\varphi\|^2 \geq \|f-\varphi^*\|^2$

т.е $\|f-\varphi\| \geq \|f-\varphi^*\|$

Тема 17: Изведете елементарна квадратурна формула на трапеца и оценка на грешката при подходящи предположения за подинтегрална функция

Нека $n=1$, $x_0=a$, $x_1=b$

$$L_n(f,x)=f(a)+f[a,b](x-a)$$

$$\rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_1(f,x)dx = (b-a)f(a)+f[a,b]\int_a^b (x-a)dx =$$

$$= (b-a)f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{(b-a)^2}{2}$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[2f(a)+f(b)-f(a)\right]$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] =: Q_{TP}(f)}$$

Оценка на грешката:

$$R_{TP}(f) = I(f)-Q_{TP}(f) = \int_a^b f[a,b,x](x-a)(x-b)dx$$

От Тh за средните стойности:

Ако f,g - непр. в $[a,b]$ и $g(x)$ не си смена знака в $[a,b]$, то $\exists\, \eta\in[a,b]$: $\int_a^b f(x).g(x)dx = f(\eta)\int_a^b g(x)dx$

Да предположим, че $f\in C^2[a,b] \Rightarrow f[a,b,x]$ е непр. в $[a,b]$ $\rightarrow$

$g(x)=(x-a)(x-b)\leq 0 \quad \forall x\in[a,b]$

$$\underset{\text{за ср. стойности}}{\overset{\text{Th.}}{=}} f[a,b,\eta]\int_a^b (x-a)(x-b)dx = \frac{f''(\xi)}{2!}\int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

пол: $x=a+(b-a)t$ $t\in[0,1]$
$x-a=(b-a)t$
$x-b=(b-a)(t-1)$
$dx=(b-a)dt$

$$= \frac{f''(\xi)}{2!}(b-a)^3\int_0^1 t(t-1)dt = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$$

=16

Тема 17: Формулирайте и докажете квадратурната формула на Гаус.

Теорема: Нека са дадени интервал (a,b), тегло $\mu(x)$, n-бр. възли, тогава $\exists!$ квадратурна формула от вида (1) $\int_a^b \mu(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$, с АСТ $= 2n-1$, възлите са нулите на полином от степен n $=$ ортогонален на п-мите от степен $\le n-1$ в (a,b) с тегло $\mu(x)$

Док.

($\exists$) Нека $w(x) = x^n + \dots \in \Pi_n$

$w(x) \perp \Pi_{n-1}$ в (a,b) с тегло $\mu(x)$, знаем, че $w(x)$ има n нули $x_1 \dots x_n$

Нека (1) е инт. кв. ф-ла в тези възли, т.е (1) е точна за $\forall f \in \Pi_{n-1}$, коеф. се дават (2) $A_k = \int_a^b \mu(x) l_{n,n-1} dx$ $\quad k=\overline{1,n}$

Остава да док., че (1) е точна за $\forall f \in \Pi_{2n-1}$

Разделяме $f \in \Pi_{n-1}$ на $w(x)$ с остатък

(3) $f(x) = w(x)\cdot q(x) + r(x)$ $\quad r \in \Pi_{n-1}$, $q \in \Pi_{n-1}$

имаме: $\underbrace{\int_a^b \mu(x)w(x)\cdot q(x)dx}_{\overset{\parallel}{0}} + \int_a^b \mu(x)r(x)\,dx = \int_a^b f(x)\mu(x)dx$

$w(x) \perp q(x)$

$\Rightarrow \int_a^b \mu(x)f(x)dx = \int_a^b \mu(x)r(x)dx$ // Прилагаме (1)

$\sum_{k=1}^{n} A_k r(x_k) \underset{\text{от (3)}}{=} \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \Rightarrow$ (1) е точна

$r(x_k) = f(x_k)$

$w(x_k) = 0$

(!) Нека кв ф-ла (1) има алг. степен на точност (АСТ) $= 2n-1$. Ще покажем, че полиномът $w(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n)$ е ортогонален на всеки полином от Π_{n-1}

тоест $w \perp q$ $\forall q \in \Pi_{n-1}$

имаме: $\int_a^b \mu(x)\underbrace{w(x)q(x)}_{\in \Pi_{n-1}}dx \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} A_k \underbrace{w(x_k)}_{\overset{\parallel}{0}} q(x_k) = 0$

възлите $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ са еднозначно определени като нули на $w(x)$ с тегло $\mu(x)$ в (a,b). Коеф. $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ също са еднозначно определени от (2) $\forall f \in \Pi_{2n-1}$

$\Rightarrow \forall f \in \Pi_{n-1}$, т.е (1) е интерпол.