19. Хомогенни координати. Безкрайни елементи.

Нека $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ е афинна координатна система в равнина α. Тогава всяка права g в α има спрямо K уравнение

$$g: ax + by + c = 0 \ , \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

Следователно наредената ненулева тройка реални числа $[a, b, c]$ определя еднозначно правата. Наричаме я тройка хомогенни координати на правата g.

Ясно е, че всяка права има безброй много тройки хомогенни координати, като две тройки $[a_1, b_1, c_1]$ и $[a_2, b_2, c_2]$ са хомогенни координати на една и съща права точно тогава, когато съществува реално число λ, $\lambda \neq 0$, такова че

$$a_2 = \lambda a_1 \ , \ b_2 = \lambda b_1 \ \text{ и } \ c_2 = \lambda c_1 \qquad , \ a_i^2 + b_i^2 \neq 0 \ , \ i = 1, 2.$$

Нека M_0 е произволна точка в α. Тогава M_0 се определя еднозначно от кои да е две пресичащи се в нея различни прави. Ако $M_0(x_0, y_0)$ и $g[a, b, c]$ е произволна права от този сноп, то е изпълнено

$$a x_0 + b y_0 + c.1 = 0.$$

Наредената тройка реални числа $(x_0, y_0, 1)$ се нарича тройка хомогенни координати на точката M_0.

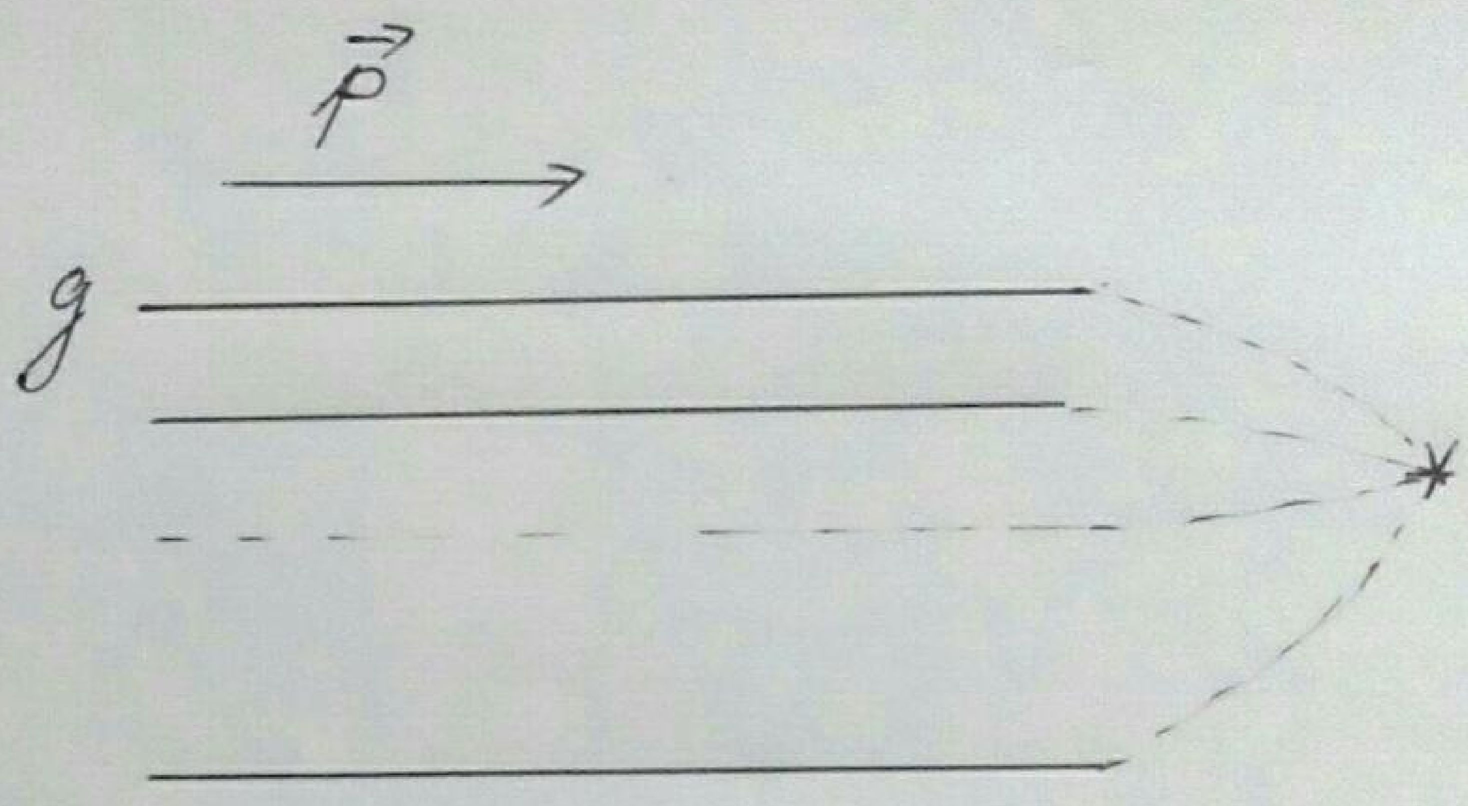
Също така, координатите на M_0 удовлетворяват всяко уравнение на g. Тогава имаме (за всяко $\lambda, \lambda \neq 0$.)

$$(\lambda a)x_0 + (\lambda b)y_0 + (\lambda c.1) = 0 \Rightarrow a(\lambda x_0) + b(\lambda y_0) + c(\lambda 1) = 0$$

Следователно всяка точка $M_0(x_0, y_0)$ има безброй много тройки хомогенни координати $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda)$, $\lambda \neq 0$, като тройката (x, y, t), $t \neq 0$ е тройка хомогенни координати на точката $M_0(x_0, y_0)$ точно тогава, когато

$$x_0 = \frac{x}{t} \text{ и } y_0 = \frac{y}{t}.$$

Нека $g[a, b, c]$
е произволна права и $\vec{p}$ е
ненулев вектор колинеарен с g,
$\vec{p} \parallel g$, $\vec{p}(p_1, p_2)$. Тогава $\vec{p}$
е колинеарен с всяка права,
успоредна на g - точно тогава,
когато е изпълнено $a.p_1 + b.p_2 = 0$ => ще имаме



$$a.p_1 + bp_2 + c.0 = 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

За произволен вектор $\vec{q}$, $\vec{q}(q_1, q_2)$, колинеарен с правата g
имаме $\vec{q} = \lambda \vec{p}$ =>

$$a(\lambda p_1) + b(\lambda p_2) + c.0 = 0.$$

Следователно наредените тройки реални числа $(\lambda p_1, \lambda p_2, 0)$,
$\lambda \neq 0$ удовлетворяват така наречените хомогенни
уравнения $ax + by + c.t = 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}.$

на всички прави от снопа, успоредни на g прави.

Релацията „колинеарност на вектори" е релация на еквивалентност, тъй като са изпълнени:

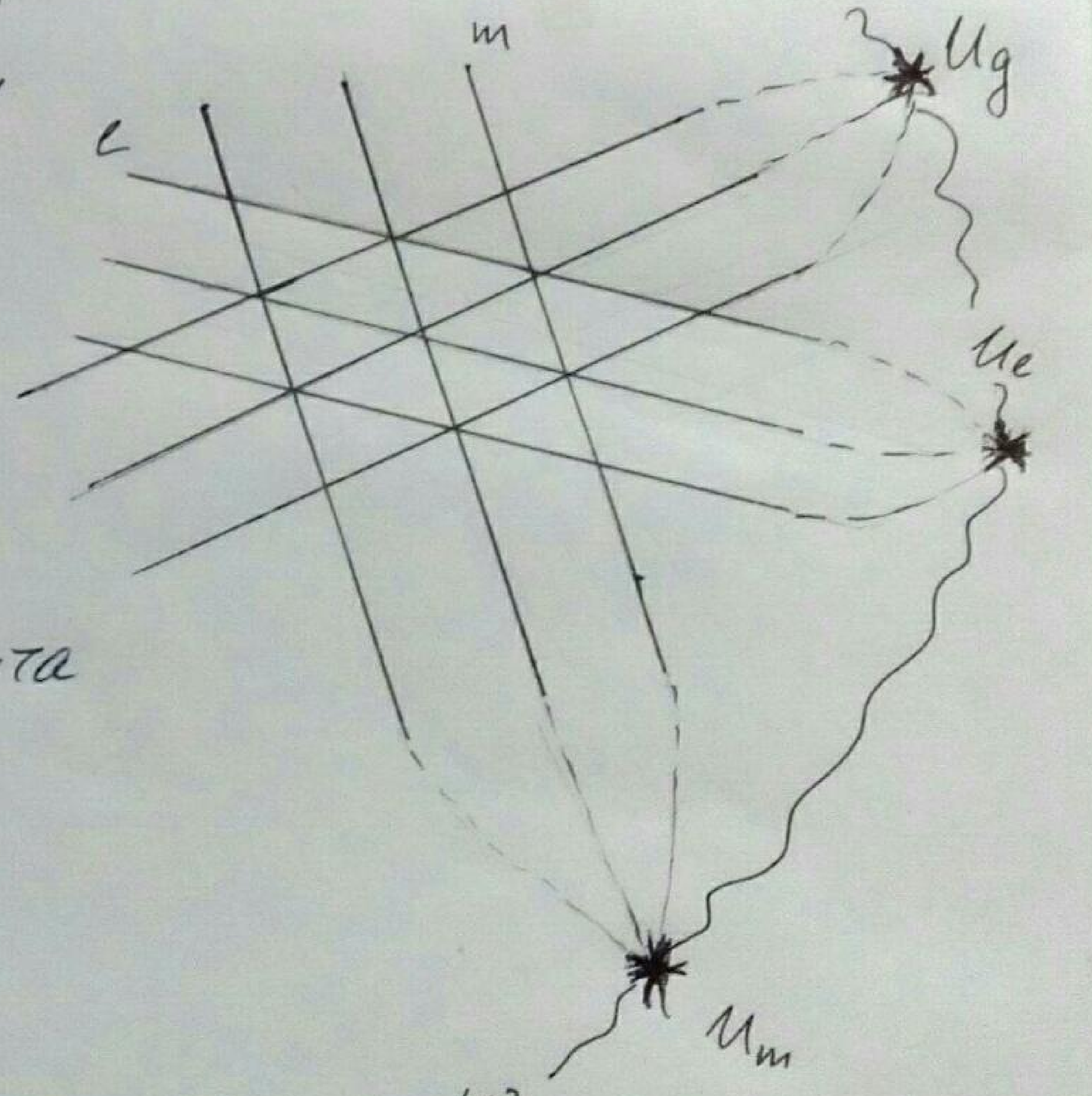
1. $\vec{p} \parallel \vec{p}$,
2. $\vec{p} \parallel \vec{q} \Rightarrow \vec{q} \parallel \vec{p}$,
3. $\vec{p} \parallel \vec{q}, \vec{q} \parallel \vec{r} \Rightarrow \vec{p} \parallel \vec{r}$.

Следователно, под действието на тази релация множеството от ненулевите вектори се разбива на непресичащи се класове на еквивалентност. Всеки такъв клас наричаме безкрайна точка U_p. Ако $\vec{p}(p_1, p_2)$ спрямо K, то на U_p придаваме хомогенни координати $U_p(p_1, p_2, 0)$. Обратно, всяка наредена тройка $(p_1, p_2, 0) \neq (0,0,0)$ придава координати на точно една безкрайна точка. Две ненулеви наредени тройки $(p_1, p_2, 0)$ и $(q_1, q_2, 0)$ са координати на една и съща безкрайна точка тогава, когато съществува $\lambda \neq 0$, такова че $q_1 = \lambda p_1$ и $q_2 = \lambda p_2$.

Също така, релацията успоредност на прави определя **разбиване** на множеството от прави в равнината, т.е. множеството от прави се разбива на непресичащи се класове на еквивалентност като всяка права попада в точно един такъв клас. Така се е уместно всеки такъв клас да наречем безкрайна точка, инцидентна с всяка права от съответния сноп. Всъщност всяка безкрайна точка „поема“ направлението, зададено от дадена права.

Множеството от всички безкрайни точки наричаме безкрайната права на равнината α и бележим с ω_α или просто с ω.

Множеството от всички крайни и **безкрайни** точки, крайни прави и безкрайната права се нарича разширена равнина.



19.6.

Така, по естествен начин, безкрайната точка на права $g[a,b,c]$ придобива хомогенни координати $U_g(-b,a,0)$ – координатите ѝ удовлетворяват хомогенното уравнение на g : $g: ax+by+ct=0$. – $a.(-b)+b.a+c.0=0$.

Хомогенните координати на коя да е безкрайна точка $U(p_1,p_2,0)$ удовлетворяват линейното уравнение

$$0.p_1+0.p_2+\rho.0=0.$$

Следователно безкрайната права ω на равнината α може да се опише с уравнението

$$\omega: t=0$$

и на ω придаваме хомогенни координати

$$\omega[0,0,\rho], \ \forall \rho\neq 0.$$

! Да отбележим, че нулевата тройка $(0,0,0)$ не придава хомогенни координати нито на точка, нито на права в разширената равнина.

Параметрични уравнения на права в разширената равнина.

Нека спрямо $K=O\vec{e_1}\vec{e_2}$ в равнината правата g е с хомогенни координати $g:[a,b,c]$ и в разширената равнина M_1 и M_2 са две различни точки от $g \Rightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{pmatrix} = 2$, където (x_1, y_1, t_1) и (x_2, y_2, t_2) са съответно хомогенните координати на точките M_1 и M_2. Тогава, ако $M(x,y,t)$ е произволна точка от правата g, то координатите на M се получават като ненулева линейна комбинация на координатите на M_1 и M_2. Това се формулира в следното

Твърдение. Точка M, с хомогенни координати $M(x,y,t)$ е инцидентна с правата $g=M_1M_2$, $M_i(x_i; y_i; t_i)$, $i=1,2$. $M_1 \neq M_2$ точно тогава, когато $x=\lambda x_1+\mu x_2$; $y_2=\lambda y_1+\mu y_2$, $t_2=\lambda t_1+\mu t_2$, $(\lambda,\mu)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus(0,0)$.

Доказателство. Нека $g=M_1M_2$, g е с хомогенни координати $g[a,b,c]$ и $M \in g$. Тогава системата

$$(1)\quad \left| \begin{array}{l} ax_1+by_1+ct_1=0 \\ ax_2+by_2+ct_2=0 \\ ax+by+ct=0 \end{array} \right.$$

има ненулево решение $[a,b,c]\neq[0,0,0]$, което е изпълнено точно тогава, когато детерминантата на тази линейна хомогенна система Δ е нула –

$$(2)\quad \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x & y & t \end{vmatrix} = 0$$

– точно тогава, когато някой ред (стълб) е линейно зависим от останалите – примерно третият ред е линейна комбинация на първи и втори ред, а именно

$$(3)\quad (x,y,t)=\lambda(x_1,y_1,t_1)+\mu(x_2,y_2,t_2),\ (\lambda,\mu)\neq(0,0).$$

Обратно, ако е изпълнено (3), то в (2) $\Delta=0$. Следователно линейната хомогенна система (1) има ненулево решение $[a,b,c]$ и всичките ѝ решения са от вида $[\nu a,\nu b,\nu c]$, $\nu\neq0$. □

Както се казва, това решение е единствено с точност до коефициент на пропорционалност, т.е. получаваме единствена права $g[a,b,c]$ през точките M_1 и M_2.

Така, правата g описваме с параметричните уравнения

$$g: \begin{cases} x = \lambda x_1 + \mu y_1 \\ y = \lambda x_2 + \mu y_2 \\ t = \lambda t_1 + \mu t_2 \end{cases} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus (0,0).$$

Накратко се записва $g: M = \lambda M_1 + \mu M_2$ $M_1 \neq M_2$

Както се вижда, в разширената равнина права се описва като двупараметрична съвкупност от точки, за разлика от описването на права в равнината като еднопараметрична съвкупност.

19.10.

Примери. 1. M - крайна точка, $M(\sqrt{3}, 1)$ - нехомогенните координати на M. Тогава хомогенните координати на M са $(\sqrt{3}, 1, 1)$, както и $(2\sqrt{3}, 2, 2)$, $(3, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ и т.н. ... $(\lambda\sqrt{3}, \lambda, \lambda)$, $\forall \lambda \neq 0$.
От хомогенните координати на дадена крайна точка еднозначно получаваме хомогенните ѝ координати.

$(2\sqrt{3}, 2, 2) \Rightarrow (\sqrt{3}, 1)$

$(3, \sqrt{3}, \sqrt{3}) \Rightarrow (\sqrt{3}, 1)$ ...

2. $g: 2x - y + 5 = 0 \Rightarrow g \parallel \vec{p}(1, 2) \Rightarrow U_g(1, 2, 0)$

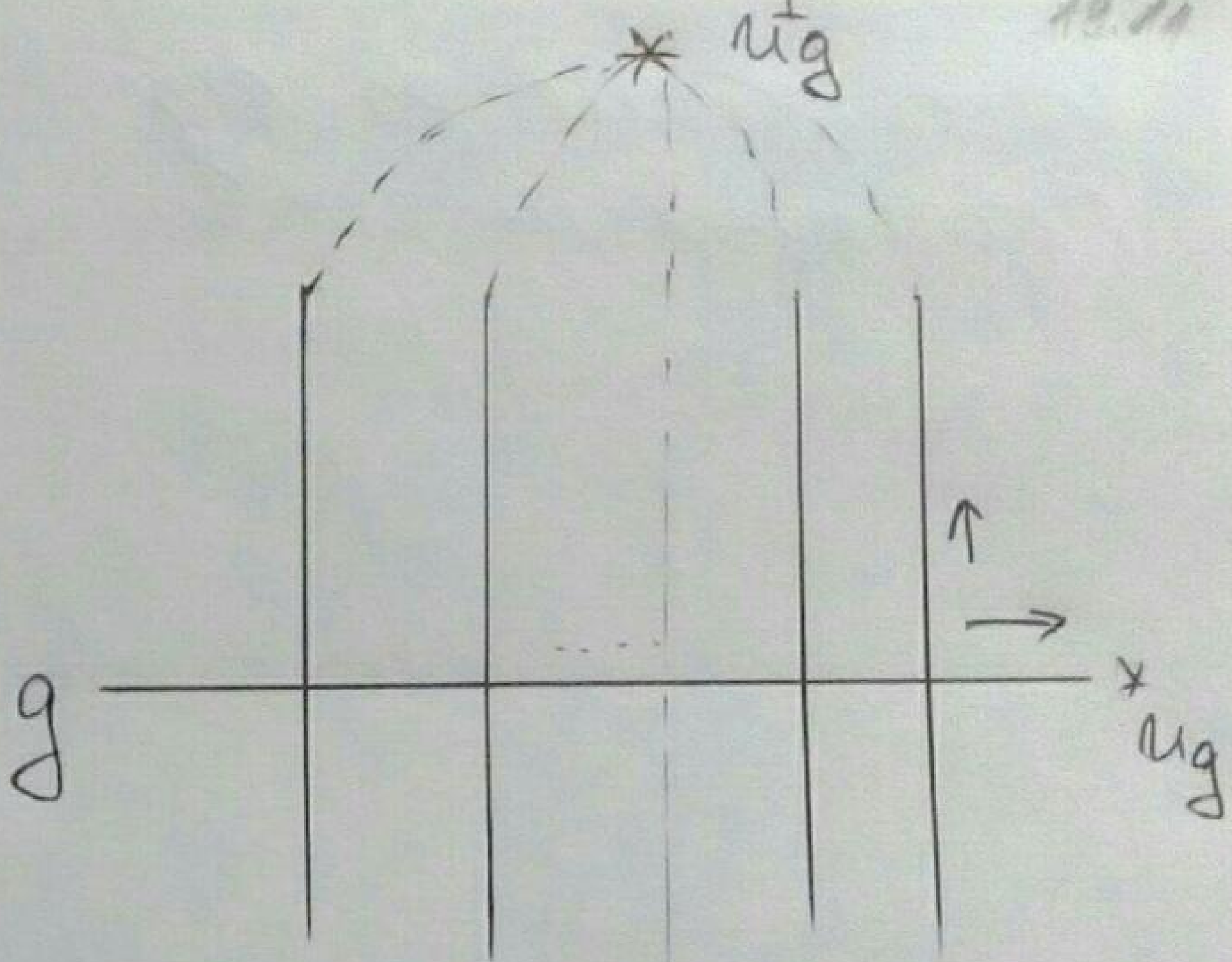
$l: \frac{3}{2}x + y - 2 = 0 \Rightarrow l \parallel \vec{q}(-1, \frac{3}{2}) \Rightarrow U_l(1, -\frac{3}{2}, 0)$ както и $U_l(2, -3, 0)$.

хомогенните уравнения на g и l са съответно: $g: 2x - y + 5t = 0$ и $l: \frac{3}{2}x + y - 2t = 0$ - или $l: 3x + 2y - 4t = 0$.

3. Ако $g: ax + by + ct = 0$, $a^2 + b^2 = 0$, то $U_g(-b, a, 0)$.
Тогава безкрайната точка $U_g^{\perp}(a, b, 0)$ поема ортогоналното

19.11

ортогоналното на u_d направление.
u_d е поела направлението на вектор, колинеарен с правата d – $\vec{p}_d(-b, a)$, а $u_d^{\perp}$ е безкрайната точка, зададена от снопа успоредни прави, перпендикулярни на d.



4. Уравнение на $d = M_1M_2$:

4.1. $M_1(1, 2, 2)$, $M_2(-1, 1, 3)$

$$d: \begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ t = 2\lambda + 3\mu \end{cases}$$

са параметричните уравнения на d в разширената равнина.

$\Rightarrow u_d: 2\lambda + 3\mu = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{2}{3}\lambda \Rightarrow u_d(\frac{5}{3}\lambda, \frac{4}{3}\lambda, 0)$

или $u_d(5, 4, 0)$.

От друга страна, в нехомогенни координати – $M_1(\frac{1}{2}, 1)$, $M_2(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
Тогава $\overrightarrow{M_2M_1}(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}) \Rightarrow u_{M_1M_2}(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, 0)$ или $u_{M_1M_2}(\frac{5}{6}, \frac{4}{6}, 0) \Rightarrow$

и $u_{M_1M_2}(5, 4, 0)$.