Класификация на еднаквостите в равнината

Нека е дадена ОКС $K = Oxy$ в E_2

Една афинна трансформация ψ е еднаквост, ако матрицата ѝ е ортогонална.

Аналитичното представяне е:

$$\psi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon.\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon.\cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

където $M(x,y) \xrightarrow{\psi} M'(x',y')$

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon.\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon.\cos\theta \end{pmatrix}$ е ортогонална 2×2 матрица

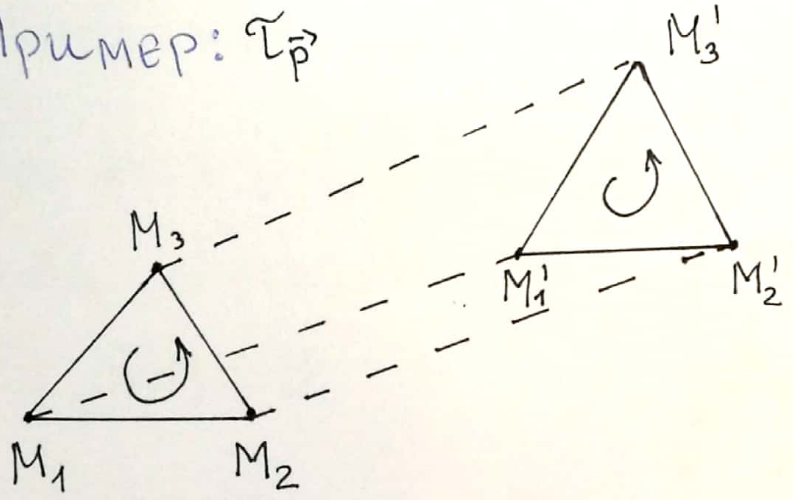
Ако т. $O(0,0) \xrightarrow{\psi}$ т. O', то $O'(a,b)$

$\det A = \varepsilon = \pm 1$

Опр. 1: При $\varepsilon = 1$ ψ е движение, т. е. ψ запазва ориентацията в равнината.

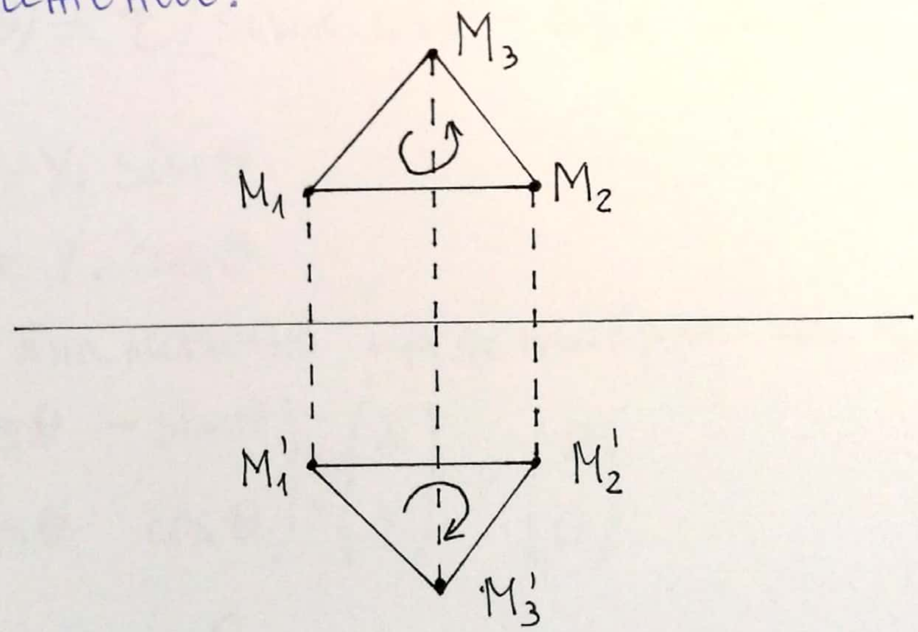
Движения в равнината са: идентитет, ротация, транслация

Пример: $\tau_{\vec{p}}$



Опр. 2: При $\varepsilon = -1$ ψ е отражение, ψ променя ориентацията в равнината. Отражения са: осева симетрия и плъзгащо отражение.

Пример: σ_g

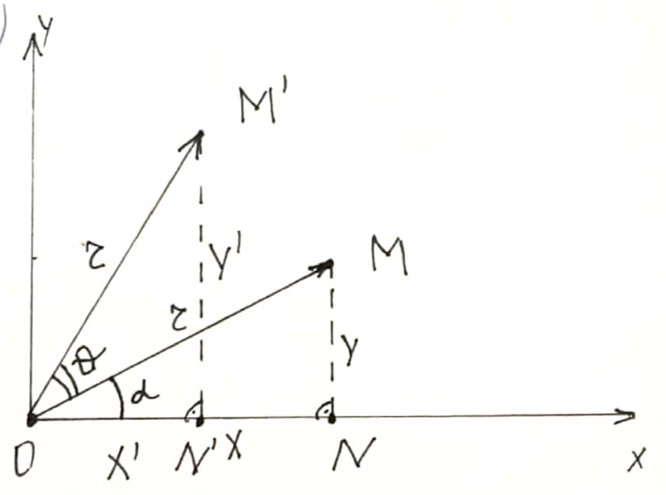


I Движения

1) $\psi = id$ - идентитет : $id(M) = M$ за $\forall M \in E_2$

$$id: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Ротация $\psi = \rho_O(\theta)$



Нека $M(x,y) \xrightarrow{\psi} M'(x',y')$

Тогава $|\vec{OM}| = |\vec{OM'}| = r$

$\sphericalangle(\vec{OM}, \vec{OM'}) = \theta$

От $\triangle OMN$:

$$\begin{cases} x = r.\cos\alpha \\ y = r.\sin\alpha \end{cases}$$

От $\triangle OM'N'$

$$\begin{cases} x' = r.\cos(\alpha+\theta) = r.[\cos\alpha.\cos\theta - \sin\alpha.\sin\theta] \\ y' = r.\sin(\alpha+\theta) = r.[\sin\alpha.\cos\theta + \cos\alpha.\sin\theta] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x.\cos\theta - y.\sin\theta \\ y' = x.\sin\theta + y.\cos\theta \end{cases}$$

Окончателно: Аналитично представяне на $\rho_O(\theta)$

$$\rho_O(\theta): \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Неподвижни точки: т. O
Неподвижни прави: няма

Важно: При $\theta = 180° = \pi$ $\rho_O(\pi)$ е <u>централна симетрия</u> с център O. Тогава всяка права през т. O е неподвижна.

3. Транслация: $\psi = \tau_{\vec{p}}$

Нека $M(x,y) \xrightarrow{\psi} M'(x',y')$

$$M \xrightarrow{\vec{p}} M'$$

Тогава $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$

Нека $\overrightarrow{MM'}(x'-x, y'-y)$, а $\vec{p}(a, b) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'-x = a \\ y'-y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \end{cases}$$

Окончателно:

$$\tau_{\vec{p}}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Неподвижни точки: Няма

Неподвижни прави: Всички успоредни на $\vec{p}$.

* * *

II Отражения

1. Осева симетрия $\psi = \sigma_g$

Примери:

Ако $g \equiv Ox$, то $M(x,y) \xrightarrow{\sigma_{Ox}} M_1(x,-y)$

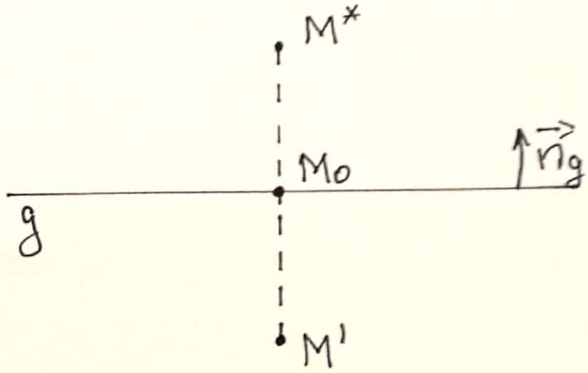
$$\sigma_{Ox}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ако $g \equiv Oy$, то $M(x,y) \xrightarrow{\sigma_{Oy}} M_2(-x,y)$

$$\sigma_{Oy}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Основна задача: Нека $g: A.x + B.y + C = 0$.

Да се определи аналитичното представяне на σ_g.



Нека $M^*(x^*, y^*) \xrightarrow{\sigma_g} M'(x', y')$

$M^*M' \parallel \vec{n}_g(A, B)$

1) Записваме координатни параметрични уравнения на правата $M^*M' \begin{cases} \ni M^*(x^*, y^*) \\ \parallel \vec{n}_g(A, B) \end{cases}$

$$M^*M' \begin{cases} x = x^* + s.A \\ y = y^* + s.B \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

2) Намираме $M_0 = M^*M' \cap g$

$$\begin{vmatrix} x = x^* + s.A \\ y = y^* + s.B \\ A.x + B.y + C = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow s_0 = -\frac{A.x^* + B.y^* + C}{A^2 + B^2}$$

Координатите на M_0 са:

$$\begin{cases} x_0 = x^* + s_0.A \\ y_0 = y^* + s_0.B \end{cases}$$

3) Точката M_0 е средата на отсечката M^*M'

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_0 = \dfrac{x^* + x'}{2} \\ y_0 = \dfrac{y^* + y'}{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x' = 2.x_0 - x^* \\ y' = 2.y_0 - y^* \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} X' = 2.(X^* + S_0.A) - X^* \\ Y' = 2.(Y^* + S_0.B) - Y^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X' = X^* + 2.S_0.A \\ Y' = Y^* + 2.S_0.B \end{cases}$$

$$\begin{cases} X' = X^* - 2.A.\dfrac{A.X^* + B.Y^* + C}{A^2 + B^2} \\ Y' = Y^* - 2.B.\dfrac{A.X^* + B.Y^* + C}{A^2 + B^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$X' = \frac{1}{A^2+B^2} \cdot \left[(B^2 - A^2).X^* - 2A.B.Y^* - 2A.C \right]$$

$$Y' = \frac{1}{A^2+B^2} \cdot \left[-2AB.X^* + (A^2 - B^2).Y^* - 2.BC \right]$$

Окончателно:

$$\sigma_g : \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \frac{1}{A^2+B^2} \cdot \begin{pmatrix} B^2 - A^2 & -2AB \\ -2AB & A^2 - B^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \frac{1}{A^2+B^2} \cdot \begin{pmatrix} -2AC \\ -2BC \end{pmatrix}$$

Неподвижни точки: $\forall$ т. $M \in g$

Неподвижни прави: g, $\forall\, b \perp g$

* * *

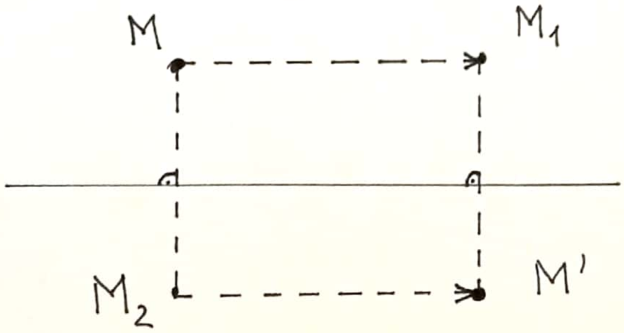
Въпрос: Кога σ_g има стълб от свободни елементи и кога този стълб е $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

2. Плъзгащо отражение:

$$\psi = \sigma_g \circ \tau_{\vec{p}} = \tau_{\vec{p}} \circ \sigma_g \iff g \parallel \vec{p}$$

$$M \xrightarrow{\tau_{\vec{p}}} M_1 \xrightarrow{\sigma_g} M'$$

$$M \xrightarrow{\sigma_g} M_2 \xrightarrow{\tau_{\vec{p}}} M'$$



Аналитично представяне:

1) Ако $g \equiv Ox$, то $\psi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A\sigma_g} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tau_{\vec{p}}}$

2) Ако g е произволна, т.е.

$g: A.x + B.y + C = 0$,

от $\vec{p} \parallel g \Rightarrow \vec{p}(\lambda.(-B), \lambda.A)$. $\lambda = ?$

Нека $|\vec{p}| = d \Rightarrow d^2 = \lambda^2.B^2 + \lambda^2.A^2$

$$\lambda^2 = \frac{d^2}{A^2+B^2} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{d}{\sqrt{A^2+B^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \frac{\pm d}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot (-B, A)$$

$$\psi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{A^2+B^2} \cdot \begin{pmatrix} B^2-A^2 & -2AB \\ -2AB & A^2-B^2 \end{pmatrix}}_{\text{от } \sigma_g} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{1}{A^2+B^2} \cdot \begin{pmatrix} -2AC \\ -2BC \end{pmatrix}}_{\text{от } \sigma_g} \underbrace{\pm \frac{d}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}}_{\text{от } \tau_{\vec{p}}}$$

Неподв. точки: Няма ; Неподв. прави: g

<u>Основна задача</u>: Да се докаже, че

$\psi = \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2}$ може да се представи като:

1) $\psi = id$, ако $g_1 \equiv g_2$;

2) $\psi = \rho_O(\theta)$, като: $g_1 \cap g_2 = т.O$, $\theta = 2.\varphi$
$\varphi = \sphericalangle(g_1, g_2)$

3) $\psi = \tau_{\vec{p}}$, ако $g_1 \parallel g_2$, като $\vec{p} \begin{cases} \perp g_1 \\ |\vec{p}| = 2.d(g_1, g_2) \\ \text{посока от } g_2 \text{ към } g_1 \end{cases}$

Доказателство:

2) Нека $g_1 \equiv O_x$, а $g_2 \ni т. O(0,0)$

Тогава: $M(x,y) \xrightarrow{\sigma_{g_2}} M_1(x_1, y_1) \xrightarrow{\sigma_{g_1}} M'(x', y')$

$$\sigma_{g_2}: \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{A^2+B^2} \cdot \begin{pmatrix} B^2-A^2 & -2AB \\ -2AB & A^2-B^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

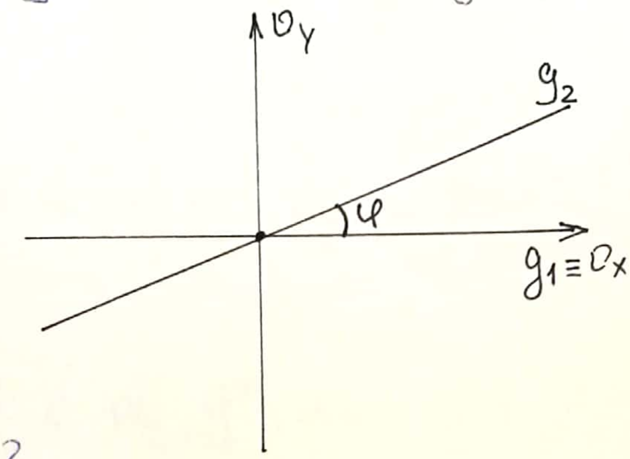
$$\sigma_{g_1}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\psi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{A^2+B^2} \cdot \begin{pmatrix} B^2-A^2 & -2AB \\ 2AB & B^2-A^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Полагаме $\dfrac{B^2-A^2}{A^2+B^2} = \cos\theta$ и $\dfrac{2AB}{A^2+B^2} = \sin\theta$

Защо е коректно това полагане?

Каква е връзката между θ и $\sphericalangle\varphi = \sphericalangle(g_1, g_2)$



$g_2: A.x + B.y = 0$

$g_2: y = -\frac{A}{B}.x$

$tg\varphi = -\frac{A}{B}$

$$\cos\theta = \frac{B^2 - A^2 / : B^2}{B^2 + A^2 / : B^2} = \frac{1 - tg^2\varphi}{1 + tg^2\varphi} = \cos 2\varphi.$$

* * *

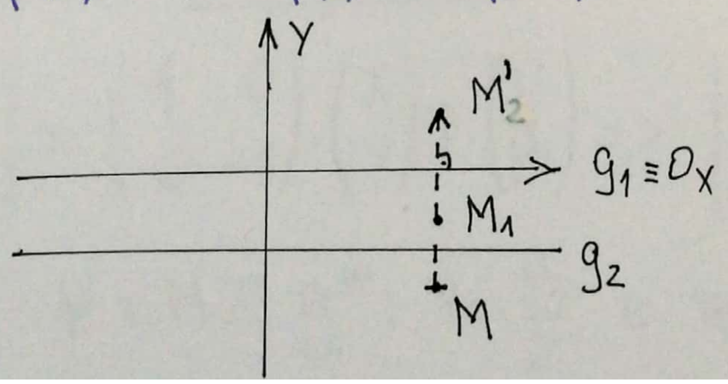
3) Нека $g_1 \equiv Ox$, $g_2 \parallel Ox \Rightarrow g_2: y + C = 0$
$\{A = 0, B = 1, C \neq 0\}$

$$M(x,y) \xrightarrow{\sigma_{g_2}} M_1(x_1, y_1) \xrightarrow{\sigma_{g_1}} M'(x', y')$$

$$\sigma_{g_2}: \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2C \end{pmatrix}}$$

$$\sigma_{g_1}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\psi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = E.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2C \end{pmatrix} \Rightarrow \tau_{\vec{p}} = \psi$$



$\vec{p}(0; 2C)$

$\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$

Основна задача: Да се докаже, че

$\psi = \tau_{\vec{p}} \circ \sigma_g$ може да се представи като:

1) ψ е плъзгащо отражение с ос g и в-р $\vec{p}$, ако $g \parallel \vec{p}$;

2) ψ е осева симетрия с ос g^*, ако $g \perp \vec{p}$;

3) ψ е плъзгащо отражение с ос g^* и в-р $\vec{p}^*$, ако $\vec{p} \nparallel g$ и $\vec{p} \not\perp g$.

Доказателство:

2) Нека $g \equiv Ox$, $\vec{p} \perp Ox \Rightarrow \vec{p}(0; p_2)$

$$M(x,y) \xrightarrow{\sigma_g} M_1(x_1, y_1) \xrightarrow{\tau_{\vec{p}}} M'(x', y')$$

$$\sigma_g : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\tau_{\vec{p}} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \psi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Определяме вида на ψ:

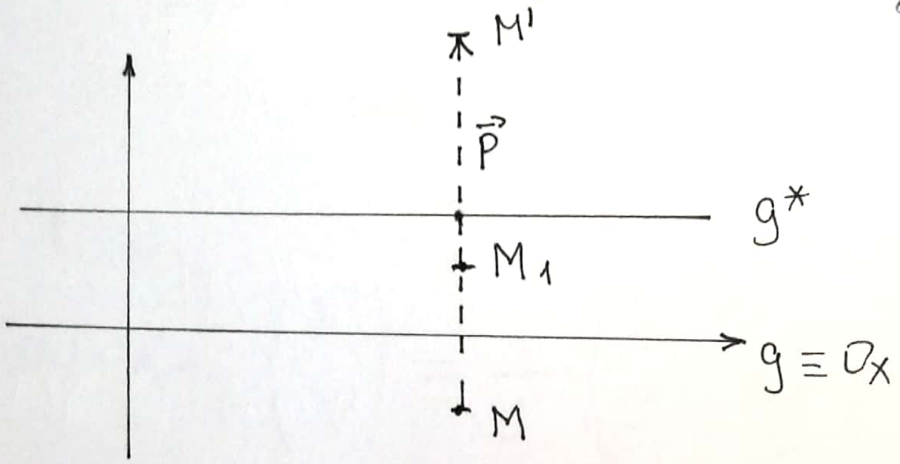
* $\det A_\psi = -1 \Rightarrow \psi$ е отражение

* Търсим <u>неподвижни</u> точки на ψ

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \end{pmatrix} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = x \\ y = -y + p_2 \Rightarrow y = \dfrac{p_2}{2} \end{array} \right.$$

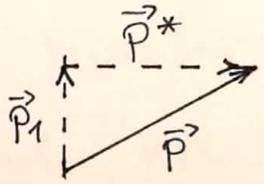
Извод: $\forall$ т. $M \in g^* : y = \dfrac{p_2}{2}$ е неподвижна $\Rightarrow$

ψ е осева симетрия с ос $g^*: \; y = \frac{p_2}{2}$

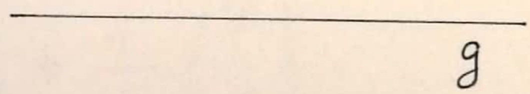


3) Нека $\vec{p} \nparallel g$ и $\vec{p} \not\perp g$, тогава $\exists!\, \vec{p}_1$ и $\vec{p}^*$:

$$\vec{p} = \vec{p}^* + \vec{p}_1 \; : \; \vec{p}^* \parallel g, \; \vec{p}_1 \perp g$$



$$\psi = \tau_{\vec{p}} \circ \sigma_g = \tau_{\vec{p}^*} \circ \underbrace{\tau_{\vec{p}_1} \circ \sigma_g}_{\sigma_{g^*}} =$$



$$= \tau_{\vec{p}^*} \circ \sigma_{g^*} \text{ като } \vec{p}^* \parallel g^*.$$

* * *

Извод: Всяка еднаквост в равнината може да се представи като композиция от най-много <u>три</u> осеви симетрии.

Допълнителни задачи

ОКС $K = Oxy$

1 зад.

а) $\varphi_1 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

1) Да се определи вида на φ_1;

2) Да се намери образът на правата $m: 3x + y + 4 = 0$ под действие на φ_1.

б) $\varphi_2 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

1) Вида на φ_2;

2) ?, образът на Ox под действие на φ_2.

2 зад.

$\varphi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$

1) Вида на φ;

2) ?, образът на правата $m: x - y - 2 = 0$ под действие на φ.

3 зад.

$g: x+y-5=0$, $\vec{p}(3,3)$

1) Да се намери аналитично представяне на $\varphi = \tau_{\vec{p}} \circ \sigma_g$;

2) Вярно ли е, че $\tau_{\vec{p}} \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \tau_{\vec{p}}$?

3) Намерете образът на правата $m: 3x-3y+6=0$ под действие на φ.

4 зад. $g_1: x+y-5=0$
$g_2: x+y=0$

1) Определете $\varphi_1 = \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2}$ и $\varphi_2 = \sigma_{g_2} \circ \sigma_{g_1}$

2) Ако $m: -x+y+5=0$, намерете $\varphi(m)=?$

5 зад.

$g_1: x+y-5=0$

$g_2 \equiv Oy: x=0$

Определете $\varphi_1 = \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2}$ и $\varphi_2 = \sigma_{g_2} \circ \sigma_{g_1}$