Най-голяма и най-малка стойност

Да припомним някои важни дефиниции и теореми

1. **Дефиниция.** Казваме, че множеството $A \subset \mathbb{R}^2$ **е ограничено**, ако **съществува** отворен кръг *U*, съдържащ всички точки на *A*.

Отрицание: Едно множество $A \subset \mathbb{R}^2$ **не е ограничено**, ако **за всеки** кръг U, съществува точка $P_U \in A$ и $P_U \notin U$.

Казваме, че точката $P(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$ е **вътрешна** за множеството $A \subset \mathbb{R}^2$, ако **съществува** кръг U с център P, който се съдържа в A

Казваме, че точката $P(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$ е **външна** за множеството $A \subset \mathbb{R}^2$, ако **съществува** кръг U с център P, който няма общи точки с A

Казваме, че точката $P(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$ е **контурна** за множеството $A \subset \mathbb{R}^2$, ако **във всеки** кръг *U* с център *P*, който има общи точки с *A* и точки, които не принадлежат на *A*

Множеството *V* се нарича **отворено,** ако всичките му точки са вътрешни.

Множеството *F* се нарича **затворено,** ако съдържа всичките си контурни точки.

Множеството *K* се нарича **компактно,** ако е **затворено и ограничено.**

2. Казваме, че в $P(x_0; y_0) \in D$ имаме **най-голяма стойност**, ако за всяка точка $(x; y) \in D$ е изпълнено $f(x; y) \leq f(x_0; y_0)$.

Това отбелязваме така $\max\limits_{x \in D} f(x; y) = f(x_0; y_0)$

Казваме, че в $P(x_0; y_0) \in D$ имаме най-малка стойност, ако за всяка точка $(x; y) \in D$ е изпълнено $f(x; y) \geq f(x_0; y_0)$.

Това отбелязваме така $\min\limits_{x \in D} f(x; y) = f(x_0; y_0)$.

3. Теорема на Вайерщрас

Ако функцията $f(x; y)$ е **непрекъсната в компактно** множество *K*, тя има най-голяма и най-малка стойност в *K*.

4. Схема за търсене на най-голяма и най-малка стойност на непрекъсната функция

*** На една променлива в интервал**

– намиране на критичните точки: точки, в които няма производни, точки, в които производната се анулира;

– сравняване на функционалните стойности в критичните точки и в краищата на интервала.

*** На две променливи**

– Доказване, че има най-голяма или най-голяма стойност в множеството D – обикновено прилагаме теоремата на Вайерщрас.

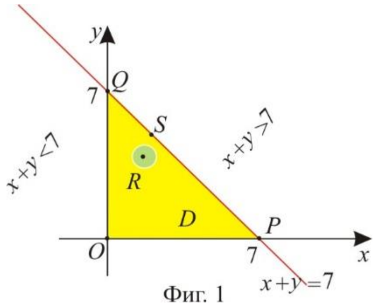
– Намираме стационарните точки на функцията, които **са вътрешни за множеството *D***, в което търсим най-голяма и най-малка стойност.

Не изследваме дали в тези точки има локални екстремуми и какви са тези екстремуми. Само съставяме списък на стационарните точки.

– Изследваме поведението на контура на D – това е задача, за търсене на екстремуми на функция на една променлива.

– Пресмятаме и сравняваме функционалните стойности на функцията в намерените точки. От всичките намерени функционални стойности най-голямата е най-голямата стойност на функцията в D, а най - малката – най-малката стойност на функцията в D.

Задача 1. Намерете, най-голямата и най-малката стойност на функцията $z(x;y)=xy^2(8-x-y)$ в множеството D: $x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 7$.



Фиг. 1

Решение. Функцията $z(x;y)=xy^2(8-x-y)$ е непрекъсната навсякъде като полином на две променливи.

Множеството D, в което търсим най-голяма стойност е ограничено и затворено – триъгълника OPQ. Съгласно теоремата на Вайерщрас $z(x;y)=xy^2(8-x-y)$ има най-голяма и най-малка стойност в D.

Намираме вътрешните стационарни точки:

$$\left|\begin{array}{l} z'_x(x;y)=0 \\ z'_y(x;y)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} y^2[(8-x-y)-x]=0 \\ x[2y(8-x-y)-y^2]=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} y^2(8-2x-y)=0 \\ xy(16-2x-3y)=0 \end{array}\right. .$$

Точките, за които $x=0$ или $y=0$ са контурни и не ни интересуват сега. Решаваме системата $\left|\begin{array}{l} 8-2x-y=0 \\ 16-2x-3y=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 8-2x-y=0 \\ 8-2y=0 \end{array}\right. \Rightarrow y=4, x=2$.

Така намерената точка $R(2;4)$ е вътрешна $(2+4<7)$.

Разглеждаме функцията по контура.

По отсечката $OP:\begin{cases} 0\leq x\leq 7 \\ y=0 \end{cases}$ имаме $f(x)=x.0^2(8-x-0)=0$.

По отсечката $OQ:\begin{cases} 0\leq y\leq 7 \\ x=0 \end{cases}$ имаме $g(y)=0.y^2(8-0-y)=0$.

По отсечката $PQ:\begin{cases} 0\leq x\leq 7 \\ y=7-x \end{cases}$ имаме $h(x)=x(7-x)^2.1$. За да намерим най-голямата и най-малката стойност на тази функция намираме производната:

$$h'(x)=(7-x)^2-2x(7-x)=(7-x)(7-3x)=0.$$

Така намираме точките по контура, в които може да има най-голяма и най-малката стойност: отсечките OP и OQ и точката $S(\frac{7}{3};\frac{14}{3})$ (производната се анулира при $x=\frac{7}{3}$).

И така най-голямата и най-малката стойност е между стойностите в намерените точки:

$$z(2;4)=2.4^2(8-2-4)=64;$$

$$z(0;y)=z(x;0)=0$$

$$S(\frac{7}{3};\frac{14}{3})=\frac{7}{3}.\left(\frac{14}{3}\right)^2(8-\frac{7}{3}-\frac{14}{3})=\frac{7.7^2.4}{27}=\frac{28}{27}.49=49+\frac{49}{27}<51$$

Най-малката стойност е 0, най-голямата стойност е 64.

Задача 2. Намерете, най-голямата и най-малката стойност на функцията $z(x;y)=ye^x\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Решение. Дефиниционното множество D на функцията е затвореният кръг $D\colon 1-x^2-y^2\geq 0$. Функцията е непрекъсната в това компактно множество. Съгласно теоремата на Вайерщрас $z(x;y)=ye^x\sqrt{1-x^2-y^2}$ има най-голяма и най-малка стойност множеството D.

Намираме вътрешните стационарните точки:

$$\left|\begin{array}{l} z'_x(x;y)=0 \\ z'_y(x;y)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} z'_x(x;y)=y\left(e^x\sqrt{1-x^2-y^2}-e^x\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)=0 \\ z'_y(x;y)=e^x\left(\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} y(1-x^2-y^2-x)=0 \\ 1-x^2-y^2-y^2=0 \end{array}\right. .$$

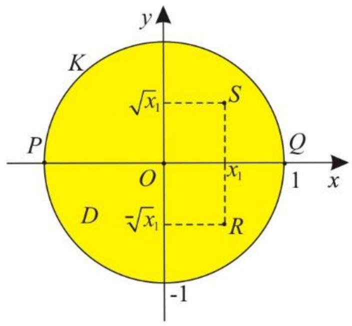
Оттук

$$\left|\begin{array}{l} y(1-x^2-y^2-x)=0 \\ 1-x^2-y^2-y^2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} y=0 \\ 1-x^2-y^2-y=0 \end{array}\right. \Rightarrow (-1;0),(1;0)-\text{ тези}$$

точки са контурни

и

$$\left|\begin{array}{l} 1-x^2-y^2-x=0 \\ 1-x^2-y^2-y^2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x-y^2=0 \\ 1-x^2-2x=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1=-1+\sqrt{2} \\ y=\pm\sqrt{x_1}=\pm\sqrt{-1+\sqrt{2}} \end{array}\right. .$$



Фиг. 2

Получихме две решения на системата: $S(x_1;y_1)$ и $R(x_2;y_2)$. И за двете точки е в сила $0<1-x_1^2-(\pm\sqrt{x_1})^2=x_1=\sqrt{2}-1<1$, т. е. и двете са вътрешни за D. Точките са стационарни точки за функцията.

Навсякъде по контура $K\colon 1-x^2-y^2=0$ функцията има стойност 0,

$$z(S)=z(x_1;\sqrt{x_1})=\sqrt{x_1}e^{x_1}\sqrt{1-x_1^2-y_1^2}=\sqrt{x_1}e^{x_1}\sqrt{x_1}=x_1e^{x_1}>0$$

$$z(R)=z(x_1;-\sqrt{x_1})=-\sqrt{x_1}e^{x_1}\sqrt{1-x_1^2-y_1^2}=-\sqrt{x_1}e^{x_1}\sqrt{x_1}=-x_1e^{x_1}<0.$$

Най-малката стойност на функцията е $z(R)=-x_1e^{x_1}\,0$, най-голямата стойност на функцията $z(S)=x_1e^{x_1}$.

Задача 3. Намерете, най-голямата и най-малката стойност на функцията $z(x;y)=(x-1)\sqrt[3]{y^2-x}$ в множеството $D\colon\begin{cases} x\leq 4 \\ y^2\leq x \end{cases}$.

Решение. Функцията е непрекъсната навсякъде. Множеството D е изобразено на фиг. 3. То е компактно – затворено (определено е с нестроги неравенства) и ограничено (съдържа се например в кръга $x^2+y^2\leq 20$).

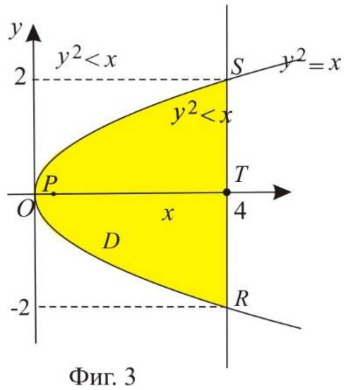
Намираме вътрешните стационарните точки:

$$\left|\begin{array}{l} z'_x(x;y)=0 \\ z'_y(x;y)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} z'_x(x;y)=\sqrt[3]{y^2-x}+\dfrac{-(x-1)}{3\sqrt[3]{(y^2-x)^2}}=\dfrac{3(y^2-x)-x+1}{3\sqrt[3]{(y^2-x)^2}}=0 \\ z'_y(x;y)=(x-1)\dfrac{2y}{3\sqrt[3]{(y^2-x)^2}}=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 3y^2-4x+1=0 \\ (x-1)y=0 \end{array}\right. .$$

$\begin{vmatrix} x=1 \\ 3y^2-4x+1=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x=1 \\ 3y^2-3=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x=1 \\ y^2=1 \end{vmatrix}$ – тъй като $y^2=x$ решенията на тази система принадлежат на контура на D.

$\begin{vmatrix} y=0 \\ 3y^2-4x+1=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \quad y=0, x=\frac{1}{4}$.

Точка $P(\frac{1}{4};0)$ е вътрешна за D стационарна точка .



Фиг. 3

Изследваме по контура.

По отсечката $RS:\begin{cases} x=4 \\ -2\le y\le 2 \end{cases}$ имаме

$f(y)=(4-1)\sqrt[3]{y^2-4}=3\sqrt[3]{y^2-4}$.

Производната $f'(y)=3\frac{2y}{3\sqrt[3]{(y^2-2)^2}}$ се анулира при $y=0$. Точките, които разглеждаме са $R(4;-2)$, $T(4;0)$ и $S(4;2)$.

По дъгата на параболата $RS:\begin{cases} x=y^2 \\ -2\le y\le 2 \end{cases}$ имаме $g(y)=(y^2-1)\sqrt[3]{y^2-y^2}=0$.

Екстремалните стойности са измежду числата:

$z(P)=(\frac{1}{4}-1)\sqrt[3]{0^2-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$,

$z(x;y^2)=0$ по частта от параболата

и $z(T)=z(4;0)=(4-1)\sqrt[3]{0^2-4}=-3\sqrt[3]{4}$.

Най-голямата стойност на функцията е $z(P)=\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$,

а най-малката стойност на функцията е $z(T)=-3\sqrt[3]{4}$.

Задача 4. Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $z(x;y)=(2x^2+2y^2)e^{1-x^2-y^2}$.

Решение. Функцията е непрекъсната навсякъде в равнината.

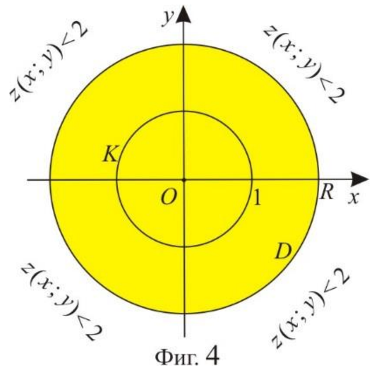
Очевидно $z(x;y)\ge 0=z(0;0)$ и следователно функцията има **най-малка** стойност 0 в точката $(0;0)$.

Но от теоремата на Вайерщрас **не следва,** че функцията има най-голяма стойност – дефиниционното множеството ѝ не е компактно (не е ограничено).

За да докажем, че функцията има най-голяма стойност, ще искаме да намерим компактна област, за която сме сигурни, че в нея **има** стойности, по-големи **от всички** функционални стойности вън от нея. Такива точки ще бъдат евентуално стационарни точки, затова първо да видим дали има стационарни точки:

$$\begin{vmatrix} z'_x(x;y)=0 \\ z'_y(x;y)=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} z'_x(x;y)=4xe^{1-x^2-y^2}+(2x^2+2y^2)e^{1-x^2-y^2}.2(-x)=4x(x^2+y^2-1)e^{1-x^2-y^2}=0 \\ z'_y(x;y)=4ye^{1-x^2-y^2}+(2x^2+2y^2)e^{1-x^2-y^2}.2(-y|=4y(x^2+y^2-1)e^{1-x^2-y^2}=0 \end{vmatrix}.$$

Решенията на тази система са точката $(0;0)$ и всички точки от единичната окръжност $K: x^2+y^2=1$. Стойността на функцията по K е $z(x;y)=2e^o=2$.



Фиг. 4

Да положим $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}, \rho>0, 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ $\quad (x^2+y^2=\rho^2)$.

Имаме $\quad z(x;y)=2\rho^2 e^{1-\rho^2}=2e\dfrac{\rho^2}{e^{\rho^2}}\underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow}0$ (показателната функция расте по-бързо степенната).

Тогава можем да изберем число $R>1$, такова че при $\rho\geq R$ да бъде изпълнено за всички точки извън кръга $D': x^2+y^2<R^2$ неравенството $z(x;y)=2\rho^2 e^{1-\rho^2}<1$ (стойност по-малка от стойността в стационарните точки).

Съгласно теоремата на Вайерщрас в кръга $D: x^2+y^2\leq R^2$ функцията има най-голяма стойност.

Стационарните точки, вътрешни за D, са точките от окръжността K и стойността по K е $z(x;y)=2e^o=2$ и тъй като по контура на D стойността на $z(x;y)\leq 1$, то най-голямата стойност на функцията е 2.

Задача 5. Да се докаже, че функцията $z(x;y)=\ln(x+1)+\ln(y+1)-\dfrac{1}{4}\sqrt{2x^2+2y^2}$ в има най-голяма стойност множеството $D: x\geq 0; y\geq 0$ и да се намери тази стойност.

Решение. Дефиниционното множества е $D: x\geq 0; y\geq 0$ – неограничено множество. Отново не може да се приложи теорема на Вайерщрас.

Отново търсим компактно множество, за което да знаем, че в него **има** точки, стойността на функцията в които, е по-голяма от стойностите **във всички** точки вън от него. Отново първо да намерим стационарните функцията

Намираме стационарните точки

$$\begin{vmatrix} z'_x(x;y)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4x}{4.2.\sqrt{2x^2+2y^2}}=\dfrac{2\sqrt{2x^2+2y^2}-x^2-x}{2(x+1)\sqrt{2x^2+2y^2}}=0 \\ z'_y(x;y)=\dfrac{1}{y+1}-\dfrac{4y}{8\sqrt{2x^2+2y^2}}=\dfrac{2\sqrt{2x^2+2y^2}-y^2-y}{2(y+1)\sqrt{2x^2+2y^2}}=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2\sqrt{2x^2+2y^2}-x^2-x=0 \\ 2\sqrt{2x^2+2y^2}-y^2-y=0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} y^2+y-x^2-x=0 \\ 2\sqrt{2x^2+2y^2}-y^2-y=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} (y-x)(x+y+1)=0 \\ 2\sqrt{2x^2+2y^2}-y^2-y=0 \end{vmatrix}.$$

Множителят $x+y+1$ не се анулира в D.

$$\begin{vmatrix} y-x=0 \\ 2\sqrt{2x^2+2y^2}-y^2-y=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x=y \\ 2\sqrt{4x^2}-x^2-x=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ -x^2+3x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1=0 \\ x_2=y_2=3 \end{cases}.$$

Пресмятаме стойностите на $z(x;y)$ в O и $P(3;3)$:

$$z(0;0)=\ln 1+\ln 1-\frac{1}{4}\sqrt{2.0^2+2.0^2}=0$$

$$z(3;3)=\ln(3+1)+\ln(3+1)-\frac{1}{4}\sqrt{2.3^2+2.3^2}=2\ln 4-\frac{1}{4}.2.3=4\ln 2-\frac{3}{2}=a>0\,.$$

Сега търсим кръг, в който да имаме най-голяма стойност.

Да положим $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}, \rho>0, 0<\varphi<\frac{\pi}{2} \qquad (x^2+y^2=\rho^2)$.

$$z(x;y)=\ln(\rho\cos\varphi+1)+\ln(\rho\sin\varphi+1)-\frac{\sqrt{2}}{4}\rho=\rho\left(\frac{\ln(\rho\cos\varphi+1)+\ln(\rho\sin\varphi+1)}{\rho}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Тъй като логаритмичната функция клони към $+\infty$ по-бавно от степенната функция, то $\lim\limits_{\rho\to\infty}\left(\frac{\ln(\rho\cos\varphi+1)+\ln(\rho\sin\varphi+1)}{\rho}\right)=0$. Оттук

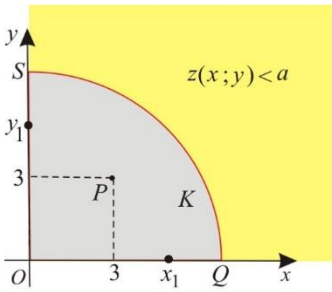
$$\lim_{\rho\to\infty}\rho\left(\frac{\ln(\rho\cos\varphi+1)+\ln(\rho\sin\varphi+1)}{\rho}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\infty(-\frac{\sqrt{2}}{4})=-\infty\,.$$

Следователно можем да изберем число $R>3\sqrt{2}$ (точката P да бъде вътрешна за кръга с радиус R), такова че ако $\rho\geq R$,

$$z(x;y)=\ln(\rho\cos\varphi+1)+\ln(\rho\sin\varphi+1)-\frac{3}{4}\rho<2\ln 4-\frac{3}{2}=a \text{ за}$$

всяка точка от първи квадрант извън кръга K с радиус R.

Тъй като K е компактно, а $z(x;y)$ е непрекъсната, то съгласно теоремата на Вайерщрас, функцията има най-голяма стойност в K.



Фиг. 5

Изследваме $z(x;y)=\ln(x+1)+\ln(y+1)-\frac{1}{4}\sqrt{2x^2+2y^2}$ **по контура на** $\boldsymbol{K}$.

По дъгата QS стойността на функцията е по–малка от $a=2\ln 4-\frac{3}{2}$ (съгласно избора на радиуса OQ).

По отсечката $OQ:\begin{cases} 0\leq x\leq R \\ y=0 \end{cases}$ имаме

$$f(x)=z(x;0)=\ln(x+1)+\ln(0+1)-\frac{1}{4}\sqrt{2x^2+2.0^2}=\ln(x+1)-\frac{\sqrt{2}}{4}x$$

$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{\sqrt{2}}{4}=0 \quad\Rightarrow\quad x_1+1=2\sqrt{2}$. (Можем да смятаме, че сме избрали радиуса R толкова голям, така че тази точка да е в K)

$$z(x_1;0)=f(x_1)=\ln(x_1+1)-\frac{\sqrt{2}}{4}x_1=\ln(2\sqrt{2})-1+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{3}{2}\ln 2-1+\frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$

От съображения за симетрия по отсечката $OS:\begin{cases} 0\leq y\leq R \\ x=0 \end{cases}$ разглеждаме точката $(0;y_1)=(0;2\sqrt{2}-1)$ и стойността на $z(x;y)$ в нея

$$z(0;y_1)=f(x_1)=\ln(y_1+1)-\frac{\sqrt{2}}{4}y_1=\ln(2\sqrt{2})-1+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{3}{2}\ln 2-1+\frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$

Най-голямата стойност на функцията е най-голямото от числата

$z(0;0)=0$, $z(3;3)=4\ln 2-\frac{3}{2}$ и $z(x_1;0)=z(0;y_1)=\frac{3}{2}\ln 2-1+\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Сравняваме получените стойности

$z(3;3)=4\ln 2-\frac{3}{2}$ и $z(x_1;0)=z(0;y_1)=\frac{3}{2}\ln 2-1+\frac{\sqrt{2}}{4}$:

$$z(3;3)-z(x_1;0)=\left(4\ln 2-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}\ln 2-1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{5}{4}\ln 4-\frac{1}{2}-\frac{2}{4}>\frac{5}{4}-1>0$$

$$z(x_1;0)=\frac{3}{2}\ln 2-1+\frac{\sqrt{2}}{4}\geq\frac{3}{4}\ln 4-1+\frac{1}{4}\geq\frac{3}{4}-1+\frac{1}{4}=0$$

Използвахме, че $e<4\Leftrightarrow 1=\ln e<\ln 4$ и $1<\sqrt{2}<2$.

Най-голямата стойност е $z(3;3)=4\ln 2-\frac{3}{2}$.

Задача 6. **(**За самостоятелна работа) Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията

а) $z=e^x(y-\sqrt{2-x^2-y^2})$ в множеството, определено с неравенството $x^2+y^2\leq 2$

б) $z(x;y)=e^{-3x^2-3xy+y^2}(1-x^2-y^2)$ в множеството, определено с неравенството $x^2+y^2\leq 1$.

в) $z(x;y)=\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}-y}{2+x}$.

Задача 7. **(**За самостоятелна работа) Измежду точките на триъгълника, определен се неравенствата $x+y\leq 1, x\geq 0, y\geq 0$ да се намери онази точка, за която сборът от разстоянията до върховете е най-малък.

Задача 8. Да се докаже, че функцията $z(x;y)=\ln(x^3+1)+\ln(y^2+1)-\sqrt{x^6+y^2}$ има най-голяма стойност множеството $D: x\geq 0; y\geq 0$ и да се намери тази стойност.