Функции на повече променливи. Граници, непрекъснатост.

Изучавайки функции на една реална променлива, разгледахме въпросите за ~~граници~~ граници, непрекъснатост, диференцируемост, търсене на локални екстремуми и интегриране. Постепенно ще въведем тези понятия за функции на повече променливи. ~~[illegible]~~ Няма съществена разлика между случая на 2 променливи и случая на много променливи. Затова най-често примерите ни ще са двуаргументни функции $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Един начин за визуализация на функция е нейната графика. В случая на едноаргументна функция $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ това е множеството от точки $\{(x, g(x)) \mid x\in\mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ – в равнина.

В случая на двуаргументна функция, графиката е $Gr(f) = \{(x,y, f(x,y)) \mid x,y\in\mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ – подмножество на $\mathbb{R}^3$, т.е. не можем да рисуваме на лист, но можем да си го представяме като повърхнина в тримерното пространство.

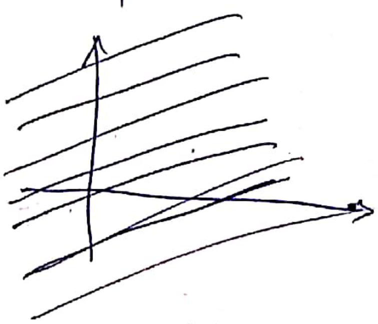
Пр. Графиката на $f(x,y) = 3x-5y+11$ е равнината $3x-5y-z+11=0$.

Друг начин за визуализация на функция е т.нар. линии на ниво. $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. В $\mathbb{R}^2$ свързваме точките, за които f дава една и съща стойност.

Пр. $3x-5y+11$ има линия на ниво отговаряща на всяко реално c.

$3x-5y+11 = c \iff y = \frac{3x+11-c}{5} = \frac{3}{5}x + \frac{11-c}{5}$ – линейна функция.

За различни c-та получаваме успоредни прави.



Всички те са успоредни на $y = \frac{3}{5}x$

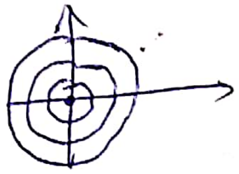
Всъщност линиите на ниво запълват цялата равнина. Чертаем само някои от тях.

Пр. $f(x,y) = x^2+y^2$.

Линия на ниво за $c\in\mathbb{R}$ е множеството $x^2+y^2=c$.

За $c<0$, то е празно. За $c\geq 0$, това е окръжност с радиус $\sqrt{c}$.

Линиите на ниво са концентрични окръжности с общ център - началото на координатната система.



Линиите на ниво се използват също така в географските карти, за да се обозначи релефа. Надморската височина е функция на две променливи: географската дължина и географската ширина.

Сега преминаваме към основните понятия - граница и непрекъснатост на функция. Да си припомним как изглеждат те за $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

В курса по ДИС 1, разгледахме две дефиниции на граница:

Коши: $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$, ако $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Хайне: $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$, ако за всяка редица $\{x_n\}$, $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$ и $x_n \neq a$ следва че $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} l$.

В дефиницията на Коши, $|x-a|$ е разстоянието между аргументите, а $|f(x) - l|$ е разстоянието между стойността на f и l.

За да пренесем тази дефиниция в $\mathbb{R}^n$, трябва да въведем разстояние в $\mathbb{R}^n$. Разстоянието още се нарича метрика.

<u>Деф.</u> $\rho: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е метрика, ако за всеки $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

- $\rho(x, y) \geq 0$ с равенство само за $x = y$.
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ - симетричност
- $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ - неравенство на триъгълника.

Стандартна метрика позната от курса по алгебра е Евклидовата:

$\rho((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$.

Тя далеч не е единствената метрика в $\mathbb{R}^n$. Но дори и да разглеждаме други метрики, получаваме еквивалентни дефиниции за граница и непрекъснатост.

Ще отбележим, че редицата $(x_1^m, x_2^m, \ldots, x_n^m) \xrightarrow[m \to \infty]{} (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ тогава и само тогава когато $x_1^m \xrightarrow[m \to \infty]{} x_1^0, \ldots, x_n^m \xrightarrow[m]{} x_n^0$.

Иначе казано, граница на редица от вектори получаваме като пресметнем границата на всяка координата.

Сега вече ще дефинираме граница и непрекъснатост за $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

<u>Коши</u>: $f(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow[(x_1,\dots,x_n)\to(x_1^0,\dots,x_n^0)]{} l$, ако

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ 0 < \sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\dots+(x_n-x_n^0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_1,\dots,x_n) - l| < \varepsilon.$

<u>Хайне</u>: $f(x_1,\dots,x_n) \to l$ при $(x_1,\dots,x_n) \to (x_1^0,\dots,x_n^0)$, ако

за всяка редица $(x_1^m,\dots,x_n^m) \xrightarrow[m\to\infty]{} (x_1^0,\dots,x_n^0)$, $(x_1^m,\dots,x_n^m) \neq (x_1^0,\dots,x_n^0)$ е в сила че $f(x_1^m,\dots,x_n^m) \xrightarrow[m\to\infty]{} l$.

Разлика има само в частта касаеща аргументите, защото резултатът на f е отново число (както в $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

<u>Дефиницията на Хайне</u> е удобна, за да се докаже, че l <u>не</u> е граница на $f(x_1,\dots,x_n)$: <u>Достатъчно</u> е да се намери една конкретна редица, за която не е в сила заключението.

<u>Деф.</u> $f(x_1,\dots,x_n)$ е непрекъсната в $(x_1^0,\dots,x_n^0)$, ако е дефинирана в околност на $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ и $\lim\limits_{(x_1,\dots,x_n)\to(x_1^0,\dots,x_n^0)} f(x_1,\dots,x_n) = f(x_1^0,\dots,x_n^0)$.

Теоремите за граница на сума, произведение и композиция остават в сила. Оттам получаваме, че сума, произведение и композиция на непрекъснати функции е непрекъсната функция.

<u>Зад. 1.</u> Намерете границите а) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x+y)}{(x+y)^2}$ б) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{e^{xy-1}-1}{x^2y^2-1}$.

<u>Реш.</u> а) Ще сведем към граници на функция на един аргумент.

Да забележим, че $\dfrac{1-\cos(x+y)}{(x+y)^2}$ е функция на $x+y$.

Така при $(x,y)\to(0,0) \Rightarrow x\to 0$ и $y \to 0$, т.е. $x+y \to 0$.

Полагаме $x+y=t$.

Получаваме $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} \underset{\text{Лопитал}}{=} \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2}$.

б) Тук $xy \to 1$, $xy-1 \to 0$. Полагаме $t = xy-1$, $t \xrightarrow[(x,y)\to(1,1)]{} 0$

$$\frac{e^{xy-1}-1}{x^2y^2-1} = \frac{e^{t}-1}{(xy-1)(xy+1)} = \frac{e^{t}-1}{t(xy-1+2)} = \frac{e^{t}-1}{t(t+2)}.$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^{xy-1}-1}{x^2y^2-1} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{t}-1}{t(t+2)} = \frac{1}{2}\cdot \lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t} = \frac{1}{2}.$$

И в двата примера сведохме до познатата граница от ДИС 1.

Зад. 2. Непрекъснати ли са в $(0,0)$ функциите

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases} \quad \Bigg| \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Реш. При $(x,y)\neq(0,0)$ f, g и h са частно на полиноми, като знаменателят не е 0. Те са непрекъснати във всяка точка различна от $(0,0)$.

За f разглеждаме редицата от точки $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$.

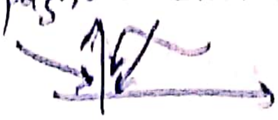
Но $f(x_n,y_n) = \dfrac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n^2}{2} = \frac{1}{2} \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Не е изпълнена дефиницията на Хайне $\Rightarrow$ f не е непрекъсната в $(0,0)$.

Ще отбележим, че $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right) =$
$= \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 = \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$, т.е. повторни граници има, но не и едновременна граница $(x,y)\to(0,0)$.

Повторните граници изразяват клонене по осите:

Едновременна граница изразява клонене по всички начини.



За g разглеждаме $|g(x,y)-g(0,0)|$ за $(x,y)\neq(0,0)$.

$|g(x,y)-g(0,0)| = |g(x,y)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|$.

Показваме, че $\frac{|xy|}{|x^2+y^2|} = \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x|^2-2|xy|+|y|^2 \geq 0$.

Тогава $|g(x,y)| \leq |x|\cdot\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}|x| \leq |x|$.

Да приложим дефиницията на Коши: Нека $\varepsilon>0$

Нека $\delta=\varepsilon$. Тогава $\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon \Rightarrow |x|=\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$

В такъв случай, $|g(x,y)-g(0,0)| = |x|\cdot\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq |x| < \varepsilon$.

Така по $\varepsilon>0$ посочихме $\delta=\varepsilon$: $\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow |g(x,y)-g(0,0)|<\varepsilon$.

По дефиницията на Коши g е непрекъсната в $(0,0)$.

Да разгледаме $y=x\lambda$, т.е. клоним към $(0,0)$ по правата $y=x\lambda$. $(\lambda\in\mathbb{R})$

$h(x,x\lambda) = \frac{x^3\cdot x\lambda}{x^4+x^2\lambda^2} = \frac{x^2\lambda}{x^2+\lambda^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = h(0,0)$

По всяка права $y=x\lambda$ границата е 0.

Въпреки това, по параболата $y=x^2$, границата не е $(0,0)$.

Да разгледаме $(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$.

$h(x_n,y_n) = \dfrac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^4}{2} = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

Отново по Хайне, h не е непрекъсната в $(0,0)$.

Разгледаните примери показват, че граници в повече измерения се смятат трудно и често най-добрата стратегия е да се опитаме да налучкаме редици за да приложим Хайне (несъществуване на граница) или да сведем към функция на една променлива.

Подробно, ако намерим $\left.\begin{array}{l}(x_1^k,\dots,x_n^k)\to(x_1^0,\dots,x_n^0)\\(y_1^k,\dots,y_n^k)\to(x_1^0,\dots,x_n^0)\end{array}\right\}$ две редици, т.че

$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_1^k,\dots,x_n^k) \neq \lim\limits_{k\to\infty} f(y_1^k,\dots,y_n^k)$ то $\nexists \lim\limits_{(x_1,\dots,x_n)\to(x_1^0,\dots,x_n^0)} f(x_1,\dots,x_n)$.

Когато имаме функция на повече променливи лесно получаваме функция на по-малко променливи като фиксираме стойностите на някои променливи.

Пр. $f(x,y)$. Фиксираме $y=y_0$. Получаваме $f(x,y_0)$ – зависи само от x, т.е. функция на една променлива $\varphi(x)=f(x,y_0)$.

Функции на една променлива можем да изследваме за диференцируемост. Можем да образуваме $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} =$
$= \frac{f(x+h,y_0)-f(x,y_0)}{h}$.

Деф. Ако $\exists \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}$, това число се нарича частна производна на f по x в точката (x_0,y_0). Бележим с $f'_x(x_0,y_0)$ или $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$.

(Кривите ∂-та подсказват, че функцията е на много променливи)

Всъщност частна производна на f по x можем да търсим във всяка точка (x,y), където е дефинирана f.

Така частната производна е отново функция на два аргумента. $f'_x(x,y) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$.

Аналогично дефинираме $f'_y(x,y) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$.

Като функции на две променливи f'_x и f'_y може да си имат също частни производни по x и по y.

Тях бележим съответно: $(f'_x)'_x$, $(f'_x)'_y$, $(f'_y)'_x$, $(f'_y)'_y$.

($(f'_x)'_y$ означава, че първо търсим частна производна по x, после по y).

Съкратено ще пишем: f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}.

Ползват се още означенията: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ означава, че търсим два пъти производна: първо по x, после по y.

Аналогично можем да въведем f'''_{xxx}, f'''_{xxy}, ...

Същите разсъждения можем да повторим за функция на повече от 2 аргумента – писането е по-досадно.

Пр $f(x,y) = x^y$, $x > 0$. Да се намерят f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx} и f''_{yy}.

Търсим частна производна като диференцираме по съответната променлива, а всички останали променливи мислим за константи.

$f'_x(x,y) = y \cdot x^{y-1}$

$f'_y(x,y) = \left(e^{y \cdot \ln x}\right)'_y = e^{y\cdot \ln x} \cdot \ln x = x^y \cdot \ln x.$

$f''_{xx} = (f'_x)'_x = \left(y\, x^{y-1}\right)'_x = y\cdot(y-1)\cdot x^{y-2}.$

$f''_{xy} = (f'_x)'_y = \left(y \cdot x^{y-1}\right)'_y = 1\cdot x^{y-1} + y \cdot \left(e^{(y-1)\ln x}\right)'_y =$

$= x^{y-1} + y \cdot e^{(y-1)\ln x} \cdot \ln x = x^{y-1} + y\cdot x^{y-1} \cdot \ln x = x^{y-1}(1+\ln x).$

$(f'_y)'_x = \left(x^y \ln x\right)'_x = y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = x^{y-1}(1+\ln x) = f''_{xy}.$

$f''_{yy} = \left(\ln x \cdot x^y\right)'_y = \ln x \cdot \left(x^y\right)'_y = \ln x \cdot f'_y = \ln x \cdot x^y \cdot \ln x = \ln^2 x \cdot x^y.$

Забелязахме, че $f''_{xy} = f''_{yx}$. Това не е случайно. В сила е:

Th Ако f''_{xy} и f''_{yx} са непрекъснати (в точка), то те са равни (в тази точка).

Зад. $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$. Докажете, че $u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0$ за $(x,y) \neq (0,0)$.

При $(x,y)\neq(0,0)$ функцията е непрекъсната.

Частните производни пресмятаме: (Аргументите често изпускаме, когато се подразбират).

$\cancel{u'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = 2\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}.$

$\cancel{u''_{xx} = 2\cdot\frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2} - x\cdot\frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = 2\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}}$

$$u'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

$$u''_{xx} = \frac{1.(x^2+y^2) - x.\,2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Поради симетрията, $u''_{yy} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow u''_{xx} + u''_{yy} = 0.$

Зад. ~~Функ~~ а) $f(x,y) = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$. Проверете, че $f''_{xx} + f''_{xy} = \frac{1}{x^2}$.

б) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{x-y}$. $\quad f'_x + f'_y = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

в) $u(x,y,z,t) = \dfrac{x-y}{x-t} + \dfrac{t-x}{y-z}$. $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0.$

Равенствата са в сила в дефиниционното множество за всяка от функциите.

Реш. Където функциите са дефинирани, намираме частните производни:

б) $$f'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{1.(x-y) - (x+y).1}{(x-y)^2} = \frac{1}{1+\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy+y^2}} \cdot \frac{x-y-x-y}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{2x^2+2y^2}{(x-y)^2}} \cdot \frac{(-2)y}{(x-y)^2} = \frac{\cancel{(x-y)^2}}{2(x^2+y^2)} \cdot \frac{(-2)y}{\cancel{(x-y)^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

$$f'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_y = \frac{\cancel{(x-y)^2}}{2(x^2+y^2)} \cdot \frac{1.(x-y) - (x+y).(-1)}{\cancel{(x-y)^2}} =$$

$$= \frac{x-y+x+y}{2(x^2+y^2)} = \frac{2x}{2(x^2+y^2)} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

$$\Rightarrow f'_x + f'_y = \frac{x-y}{x^2+y^2}.$$

a) $f'_x = \frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\frac{y-x}{xy}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{xy}{\cancel{x}-y} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{y}{-xy+x^2}$.

$f''_{xx} = (f'_x)'_x = \left(\frac{y}{-xy+x^2}\right)'_x = y \cdot \left(\frac{1}{-xy+x^2}\right)'_x = y \cdot \left(-\frac{1}{(-xy+x^2)^2}\right) \cdot (-xy+x^2)'_x =$

$= y \cdot \left(-\frac{1}{(xy-x^2)^2}\right) \cdot (-y+2x) = \frac{(-2x+y)y}{(x(y-x))^2} = \frac{-2xy+y^2}{x^2(y-x)^2}$.

$f''_{xy} = (f'_x)'_y = \left(\frac{y}{-xy+x^2}\right)'_y = \frac{1.(x^2-xy)-y.(-x)}{(x^2-xy)^2} = \frac{x^2 \cancel{-xy+xy}}{x^2(x-y)^2}$.

$f''_{xx} + f''_{xy} = \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2(x-y)^2} = \frac{(x-y)^2}{x^2(x-y)^2} = \frac{1}{x^2}$.

b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1.(x-t)-(x-y).1}{(x-t)^2} - 1 \cdot \frac{1}{y-z} = \frac{y-t}{(x-t)^2} - \frac{1}{y-z}$.

$\frac{\partial u}{\partial y} = -1 \cdot \frac{1}{x-t} + (t-x) \cdot \left(-\frac{1}{(y-z)^2}\right) = -\frac{1}{x-t} - \frac{t-x}{(y-z)^2}$.

$\frac{\partial u}{\partial z} = (t-x) \cdot \left(-\frac{1}{(y-z)^2}\right) \cdot (-1) = \frac{t-x}{(y-z)^2}$.

$\frac{\partial u}{\partial t} = (x-y) \cdot \frac{-1}{(x-t)^2}(-1) + 1 \cdot \frac{1}{y-z} = \frac{x-y}{(x-t)^2} + \frac{1}{y-z}$.

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{y-t}{(x-t)^2} - \cancel{\frac{1}{y-z}} - \frac{1}{x-t} - \cancel{\frac{t-x}{(y-z)^2}} + \cancel{\frac{t-x}{(y-z)^2}}$

$+ \frac{x-y}{(x-t)^2} + \cancel{\frac{1}{y-z}} = \frac{\cancel{y}-t+x\cancel{-y}}{(x-t)^2} - \frac{1}{x-t} = \frac{x-t}{(x-t)^2} - \frac{1}{x-t} = 0$.

Дом. За $u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ проверете, че при $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ е изпълнено $u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0$.

Зад. Нека $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има първа производна

а) $f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$. Докажете, че $y \cdot f'_x = x \cdot f'_y$

б) $f(x,y) = y \cdot \varphi(x^2-y^2)$. Докажете, че $y^2 f'_x + xy f'_y = x \cdot f$.

Реш. а) $f'_x = \left(\varphi(x^2+y^2)\right)'_x = \varphi'(x^2+y^2) \cdot 2x$

$f'_y = \varphi'(x^2+y^2) \cdot 2y$.

$\Rightarrow y \cdot f'_x = 2xy\,\varphi'(x^2+y^2) = x \cdot \varphi'(x^2+y^2) \cdot 2y = x \cdot f'_y$.

б) $f'_x(x,y) = y \cdot \left(\varphi(x^2-y^2)\right)'_x = y \cdot \varphi'(x^2-y^2) \cdot 2x$

$f'_y = 1 \cdot \varphi(x^2-y^2) + y \cdot \varphi'(x^2-y^2)(-2y)$.

Тогава $y^2 f'_x + xy f'_y = y^2\left(y\,\varphi'(x^2-y^2) \cdot 2x\right) +$

$+ xy\left(\varphi(x^2-y^2) - 2y^2\varphi'(x^2-y^2)\right) =$

$= 2xy^3\varphi'(x^2-y^2) + xy\,\varphi(x^2-y^2) - 2xy^3\varphi'(x^2-y^2)$

$= xy\,\varphi(x^2-y^2) = x \cdot f(x,y)$. ✓