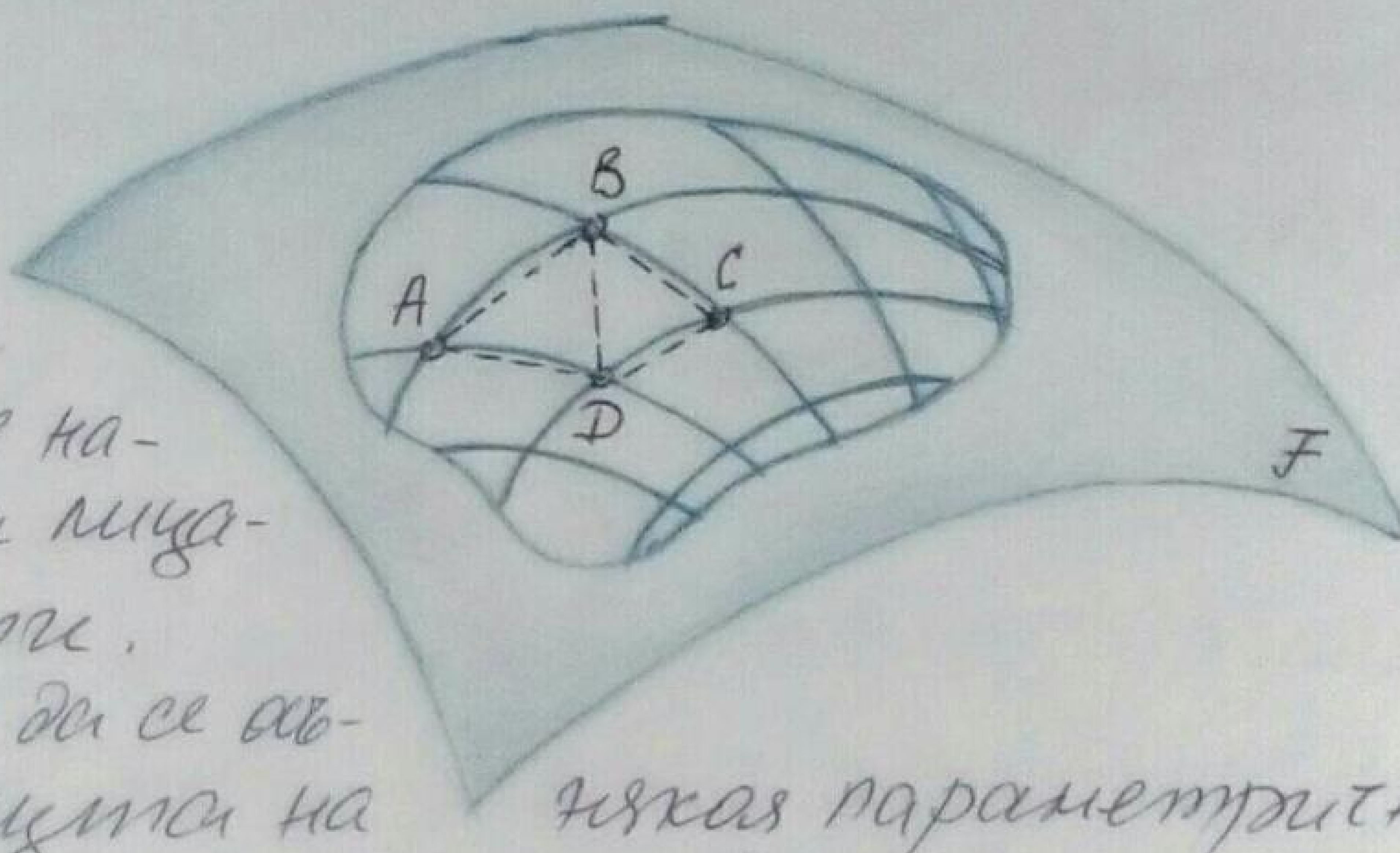
## Лице на повърхнина

Понятието за лице на повърхнина, както и понятието за дължина на крива линия идва от практиката. Естествено е първоначално да се доверим на нагледните ни представи, да получим от тях формула за лицето на повърхнина и едва след това да разгледаме въпроса за дефиниция на понятието „лице на повърхнина".

Да намерим лицето на област (M) от повърхнина F.




Можем да разбием (M) на части. Търсеното лице се намира като сума на лицата на тези части. Разбиването може да се осъществи с помощта на някаква параметрична мрежа. (M) се разбива на криволинейни „успоредници" и прилежащи към границата четириъгълници.

За да оценим лицето на ABCD построяваме праволинейните триъгълници ABD и BCD. При все по-„ситно" разбиване равнините им безкрайно малко се отличават от допирателната равнина в т. D. Лицето на всеки от тези триъгълници е еквивалентно на величината $\frac{1}{2} W du dv$, където $W = \sqrt{EG - F^2}$

Заб. 1 В предишната тема видяхме, че лицето $\sigma$ на $\Delta BCD$ е еквивалентно на $\frac{1}{2} W du dv$ в случая, когато $u$ и $v$ зависят от един параметър. Доказателството остава същото и в случая, когато $u$ и $v$ са независими променливи. И в този случай $\sigma \simeq \frac{1}{2} W du dv$ може да се разбира както в смисъла, че $\lim \frac{\sigma}{\frac{1}{2} W du dv} = 1$, така и в смисъла, че безкрайно малката величина $\sigma - \frac{1}{2} W du dv$ е от по-висок порядък спрямо $du dv$, когато $du$ и $dv$ клонят към нула.!

Така лицето на правоъгълните триъгълници ABD и BCD е еквивалентно на $W du dv$. Ако се доверим на това нагледно представяне, то може да считаме, че лицето на ABCD е еквивалентно на $W du dv$.

Величината $W du dv$ се нарича <u>равнинен елемент</u> на $F$ и се означава с $\delta F$. Лицето $S$ на цялата област $(M)$ е еквивалентно на сумата на величините $\delta = W du dv$, пресметнати за всички четириъгълници, лежащи в $(M)$. Тази сума има за граница интеграла $\iint W du dv$, разпространен на множеството от стойности на $u$ и $v$, съответстващи на областта $(M)$. Затова

$$S = \iint\limits_{(M)} W du dv = \iint\limits_{(M)} \sqrt{EG - F^2}\, du dv . \quad (1)$$

Пример 1. Ако отнесем равнината спрямо декартова коорд. с-ма (като в пример 1 от предната тема), $(u = x,\ v = y)$ то равнинният елемент $\delta S$ ще е

$$\delta S = W du dv = \sin\omega\, dx dy$$

В този пример $\delta S$ е точно лицето на успоредника $ABCD$. Лицето $S$ на област $(M)$ е

$$S = \sin\omega \iint\limits_{(M)} dx dy .$$

Пример 2. За сферата, отнесена към географски координати – $u$ – ширина, $v$ – дължина имаме

$$\delta S = a^2 \cos u\, du dv ,$$

$$S = \iint\limits_{(M)} \cos u\, du dv .$$

Да намерим лицето на сферичен двуъгълник с ъгъл $v_0$ при върха.

Сферичен двуъгълник - фигурата, образувана от две полуокръжности, излизащи от диаметрално противоположни точки.

За една от страните на двуъгълника приемаме $v = v_0$, другата има уравнение $v = v_0$. Областта $(M)$ се определя с неравенствата

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq +\frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq v \leq v_0$$

От по-горе

$$S = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} du \cos u \int_0^{v_0} dv = 2 v_0 a^2 .$$

Как могат да се обосноват математически получените резултати, така че да се съгласуват с практиката? - Като дадем предварително дефиниция на лице на повърхнина.

Такава дефиниция може да се формулира по различни начини, като при това е необходимо от нея да следва, че лицето на ABCD е еквивалентно на сумата на лицата на равнинните триъгълници ABD и BCD. Също така, от дефиницията да може да се изведе, че при какво да е разделяне на (M) на части лицето на (M) е сума на лицата на частите. Това свойство, което накратко се нарича адитивност и също е в основата на техниката при измерване на лице, използвахме при извеждането на формулата (1)

Да дадем следната дефиниция:

„Лице на областта (M) се нарича числото

$$\iint\limits_{(M)} W\,du\,dv.$$

Трябва да покажем, че величината $\iint\limits_{(M)} W\,du\,dv$ не зависи от избора на криволинейните координати.

Нека $u$ и $v$ са координатите на $M$ в една система, а $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ - в друга. Ясно е, че $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ са функции на $u$ и $v$ и обратно.

Най-общо $\tilde{W}^2 = \tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2$ не е равна на $W^2$

За връзката между $\tilde{W}$ и $W$ получаваме.. Имаме

$$W = \sqrt{(r_u \times r_v)^2}$$

$$\tilde{W} = \sqrt{(r_{\tilde{u}} \times r_{\tilde{v}})^2}$$

За векторното произведение $r_{\tilde{u}} \times r_{\tilde{v}}$ имаме

$$r_{\tilde{u}} \times r_{\tilde{v}} = \left(r_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + r_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right) \times \left(r_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + r_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}\right)$$

$\Rightarrow$ ( $r_u \times r_u = r_v \times r_v = \vec{0}$ , $r_u \times r_v = -r_v \times r_u$ )

$$r_{\tilde{u}} \times r_{\tilde{v}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} - \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}\right)(r_u \times r_v).$$

Изразът в скобите е детерминантата на Якоби $\frac{D(u,v)}{D(\tilde{u},\tilde{v})}$. $\Rightarrow$

$$\tilde{W} = \left|\frac{D(u,v)}{D(\tilde{u},\tilde{v})}\right| W$$

Спрямо координатите $(\tilde{u},\tilde{v})$ имаме

$$\iint\limits_{(M)} \tilde{w}\, d\tilde{u}\, d\tilde{v} = \iint\limits_{(M)} w \left| \frac{D(u,v)}{D(\tilde{u},\tilde{v})} \right| d\tilde{u}\, d\tilde{v}$$

От друга страна съгласно формулата за смяна на променливите в кратен интеграл имаме

$$\iint\limits_{(M)} w\, du\, dv = \iint\limits_{(M)} w \left| \frac{D(u,v)}{D(\tilde{u},\tilde{v})} \right| d\tilde{u}\, d\tilde{v}.$$

$$\Rightarrow \quad \iint\limits_{(M)} \tilde{w}\, d\tilde{u}\, d\tilde{v} = \iint\limits_{(M)} w\, du\, dv,$$

което трябваше да проверим, така се определянето на лицето като числото $\iint\limits_{(M)} w\, du\, dv$ логически е напълно оправдано и като формула не се нуждае от доказателство

Еквивалентността на лицето на криволинейния успоредник $ABCD$ и сумата на лицата на триъгълниците $DBC$ и $DCA$ се доказва както следва

Нека $W_D$ е стойността на $W$ в т. $D$ и $\eta$ е разликата

$$\eta = W(u,v) - W_D$$

за произволна точка от областта $ABCD$.

Пред вид равномерната непрекъснатост на $W(u,v)$, $|\varepsilon|=\eta$, $|\varepsilon| \to 0$ при неограничено „свиване" на координатната мрежа.

За лицето на ABCD по дефиниция имаме

$$S_{ABCD} = \iint\limits_{(M)} (W_N + \eta)\,du\,dv = \iint\limits_{(M)} W_N\,du\,dv + \iint\limits_{(M)} \eta\,du\,dv$$

Нека $\Delta u, \Delta v$ са нарастванията на координатите на страните DC и DA. Изнасяме $W_N$ извън интеграла (първото събираемо) и получаваме че е $W_N \int\limits_u^{u+\Delta u} du \int\limits_v^{v+\Delta v} dv = W_N \Delta u \Delta v$ $\Rightarrow$

$$S_{ABCD} = W_N \Delta u \Delta v + \iint\limits_{(M)} \eta\,du\,dv$$

Първото събираемо вдясно е еквивалентно на сумата на равнинните триъгълници DCB и DCA, а второто събираемо по абсолютна стойност не надминава $\varepsilon \Delta u \Delta v$ е от по-висок порядък относно произведението.

От дефиницията на кратен интеграл непосредствено следва адитивното свойство на лицето.

Така получаваме, че дадената дефиниция на лице на повърхнина се съгласува с основните свойства при измерване на лице, които са известни от практиката. Сега, опирайки се на дефиницията лесно можем да докажем, че лицето на областта (М) е границата на сумата на триъгълниците DCB, DAB и останалите триъгълници, построени аналогично по върховете на сгъстяващата се мрежа.

Тези триъгълници образуват многостен, по-точно многостенна, (незатворена в общия случай повърхнина), вписан в областта (М). Тогава може да твърдим, че лицето на (М) е границата на лицето на многостена, вписан в областта, така че върховете му са върховете на сгъстяващата се координатна мрежа. Ето защо е естествено вместо аналитична, да се даде изцяло геометрична дефиниция на лицето на повърхнина като границата към която клони лицето на вписания многостен, (чиито страни са триъгълници) когато дължината на на най-голямата страна клони към нула.

При това, без допълнителни условия, повърхнината на някои многостени да се окаже толкова грапава, че лицата им да клонят към граница, различна от лицето на повърхнината и даже да растат неограничено.

Като такива допълнителни условия можем да приемем например страните на вписания многостен да сключват безкрайно малки ъгли с допирателните равнини или, вместо това, триъгълниците, служещи за страни на многостена да имат крайни ъгли.

Също така лице на повърхнина може да се дефинира по следния начин. Разбиваме областта $(M)$ на части $(M_1), (M_2), \dots, (M_i)$ например с помощта на мрежа от криви. Във всяка част $(M_i)$ вземаме точка $P_i$ и проектираме $(M_i)$ ортогонално в допирателната равнина към $F$ в точката $P_i$. Може да се докаже, че сумата на лицата на проекциите при свиване на разбиването клони към границата $\iint\limits_{(M)} W\,du\,dv$. По този начин може да се даде следната дефиниция: лице на областта $(M)$ наричаме границата, към която клони сумата на лицата на проекциите $(M_i)$ в допирателните равнини.

Накратко, ако $\sigma(B_i)$ е лицето на проекцията, то

$$S := \lim \sum_{(M_i)} \sigma(M_i)$$

при $\quad \sigma(M_i) \longrightarrow 0$

Нека $\mathcal{F}: r = r(u,v)$

Спрямо ОКС $K = P\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, $P\vec{e}_1\vec{e}_2$ – допирателната р-на в т. $P$

$$\mathcal{F}: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Ако $(M_i)$ е достатъчно малка част от $\mathcal{F}$, то тя се проектира еднозначно в допирателната равнина в $P$ $\Rightarrow u$ и $v$ можем да се разглеждат като криволинейни координати в равнината на проекцията на $(M_i)$

$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$

Имаме $\sigma(M_i) = \iint \left| \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right| du\,dv$, като

$\left| \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right| = |(r_u \times r_v)\vec{N}_P|$. Следователно $(|\vec{N}_P| = 1)$

$$S = \lim_{\sigma(M_i)\to 0} \sum \sigma(M_i) = \iint_D |r_u \times r_v|\, du\,dv.$$

От $(r_u \times r_v)^2 = r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2 = EG - F^2$. Следователно

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\,dv.$$

Ако $\mathcal{F}$ е зададена със $z = z(x,y)$, то

$E = 1 + z_x^2$; $F = z_x z_y$; $G = 1 + z_y^2$ $\Rightarrow$

$$S = \iint \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\,dy.$$