$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

$\underline{2} \times \underline{2}$ $\quad$ $\underline{2} \times \underline{2}$ $\quad$ 2×2

$c_{11} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 19$

$c \quad = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 22$

c

$$\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} \cdot \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 21 & 24 & 7 \\ 47 & 54 & 21 \end{bmatrix}}$$

$$C_{11} = 1\cdot 5 + 2\cdot 8 = 21$$

$$C_{12} = 1\cdot 6 + 2\cdot 9 = 24$$

$$C_{13} = 1\cdot 7 + 2\cdot 0 = 7$$

$$C_{21} = 3\cdot 5 + 4\cdot 8 = 47$$

Своиства

1) $\lambda(A\cdot B) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

2) $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$

3) $(A\cdot B)C = A\cdot(B\cdot C)$

4) $(AB)^T = B^T A^T$

5) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

6) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Деф $A \in M_n(\mathbb{F})$ и $\exists A^{-1} \in M_n(\mathbb{F})$

$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$, то A е обратима и

A^{-1} е нейната обратна

Деф $A \in M_n(\mathbb{F})$ е особена, ако $\det A = 0$

Тв $A \in M_n(\mathbb{F})$

A е обратима $\Leftrightarrow$ A е неособена

Наблюдения

1) Нямаме комутативност

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$$

2) Възможно е произведението на две ненулеви матрици да даде нулевата

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Задачи

① Извършете действията

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2 \times \underline{3} \qquad 3 \times 4 \qquad 2 \times 4$$

② A^n, $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} & -\underline{2\sin\alpha\cos\alpha} \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$$

индукция: $n=1$ ясно (по усл.)

ИП. Нека $\underline{k \geq 1}$, за което $A^k = \begin{bmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{bmatrix}$

ИС: $k \to k+1$

$$A^{k+1} = A\underbrace{A^k}_{} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \underline{\begin{bmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\cos\alpha\cos k\alpha - \sin\alpha\sin k\alpha} & -\underline{\sin k\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos k\alpha} \\ \underline{\sin\alpha\cos k\alpha + \cos\alpha\sin k\alpha} & -\underline{\sin\alpha\sin k\alpha + \cos\alpha\cos k\alpha} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\alpha & -\sin(k+1)\alpha \\ \sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \left[A^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix} \right] \square$$