# Упражнение №12:

## Индуктивен принцип на Скот за доказване на свойства на $D_V(R)$

### Принципът за Скот за ОС с носител $\mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m$

Тъй като ще разглеждаме основно програми с две функционални променливи, ще формулираме този принцип за ОС, които се отнасят за този тип програми, т.е. чийто домейни са от вида $\mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m$ за някои $k \geq 1, m \geq 1$.

**Индуктивен принцип на Скот за ОС** $(\mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m,\ \subseteq,\ (\emptyset^{(k)}, \emptyset^{(m)}))$**.** Нека $\mathbf{\Gamma}: \ \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m \ \longrightarrow \ \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m$ е непрекъснат оператор, а $P$ е свойство в $\mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m$, за което са изпълнени условията:

1) $P((\emptyset^{(k)}, \emptyset^{(m)})$;

2) за всяка двойка $(f, g) \in \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m$ е вярно, че

$$P(f, g) \implies P(\mathbf{\Gamma}(f, g));$$

3) $P$ е непрекъснато свойство.

Тогава е вярно $P(f^*, g^*)$, където $(f^*, g^*)$ е най-малката неподвижна точка на оператора $\mathbf{\Gamma}$.

В конкретните задачи операторът $\mathbf{\Gamma}$ ще е от вида

$$\mathbf{\Gamma} = \Gamma \times \Delta,$$

където

$$\Gamma: \ \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m \ \longrightarrow \ \mathcal{F}_k \quad \text{и} \quad \Delta: \ \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m \ \longrightarrow \ \mathcal{F}_m,$$

са термалните оператори, определени от дадената рекурсивна програма $R$ (за чиято денотационната семантика $D_V(R)$ ще искаме да доказваме някакво свойство). Тъй като тези оператори са непрекъснати, то и $\mathbf{\Gamma}$ ще е непрекъснат.

Понеже

$$\mathbf{\Gamma}(f, g) \ = \ (\ \Gamma(f, g),\ \Delta(f, g)\ ),$$

условието 2) от принципа на Скот можем да се препишем по следния начин:

2) За всяка двойка $(f, g) \in \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m$ е вярно, че

$$P(f, g) \implies P(\Gamma(f, g), \Delta(f, g)).$$

В типичния случай свойството $P(f, g)$ ще се разпада на отделни свойства, отнасящи се поотделно до $f$ и до $g$, т.е. $P$ ще е от вида

$$P(f, g) \iff P_1(f) \ \& \ P_2(g).$$

В голяма част от задачите $P(f, g)$ ще се разпада до отделни свойства, отнасящи се поотделно до $f$ и до $g$, като $P$ ще е тяхната конюнкция, т.е. ще изглежда така:

$$P(f, g) \iff P_1(f) \ \& \ P_2(g).$$

За свойствата от този вид да съобразим, че:

**Задача 1.** Ако $P_1$ и $P_2$ са непрекъснати (като свойства в $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{F}_m$), то в областта на Скот

$$(\mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m, \ \subseteq, \ (\emptyset^{(k)}, \emptyset^{(m)}))$$

ще е непрекъснато свойството $P(f, g) \stackrel{\text{деф}}{\iff} P_1(f) \ \& \ P_2(g)$.

**Решение.** Нека редицата $\{(f_n, g_n)\}_n$ е монотонно растяща в $\mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_m$. Тогава $\{f_n\}_n$ ще е монотонно растяща в $\mathcal{F}_k$, а $\{g_n\}_n$ — монотонно растяща в $\mathcal{F}_m$.

Да приемем, че $\forall n P(f_n, g_n)$. Оттук $\forall n P_1(f_n)$ и $\forall n P_2(g_n)$. Но $P_1$ и $P_2$ са непрекъснати свойства и следователно ще са в сила $P_1(f)$ и $P_2(g)$, където $f = \bigcup_n f_n$, а $g = \bigcup_n g_n$. Тогава ще е вярно и

$$P(f, g) \stackrel{\text{деф}}{\iff} P_1(f) \ \& \ P_2(g).$$

Но $(f, g)$ се явява точна горна граница на редицата $\{(f_n, g_n)\}_n$, и значи свойството $P$ е непрекъснато. $\square$

Да се върнем отново на програмата от първата задача на миналото упражнение. Целта ни е да видим как работи индуктивния принцип на Скот за тази вече добре позната ни програма.

**Задача 2.** Нека $R$ е следната програма:

$F(X, 1)$ `where`
$F(X, Y) \ = \ $ `if` $X == 0$ `then` $Y$ `else` $F(X-1, G(X, Y))$
$G(X, Y) \ = \ $ `if` $X == 0$ `then` $0$ `else` $G(X-1, Y) + Y$

**а)** Докажете, че за $D_V(R)$ е изпълнено условието:

$$\forall x (!D_V(R)(x) \implies D_V(R)(x) \ = \ x!).$$

**б)** Докажете, че $D_V(R)$ е тотална функция.

Твърдението от подточка **а)** е типично условие от тип *частична коректност*, а твърдението от подточка **б)** е типично условие *за завършване*. Двете заедно ще ни дадат, че $R$ е *тотално коректна* относно входно условие

$$I(x) \iff x \in \mathbb{N}$$

и изходно условие

$$O(x,y) \iff y \;=\; x!.$$

Разбира се, от тях отново получаваме, че $D_V(R) = \lambda x.x!$.

**Решение.** **а)** Да означим с $\Gamma$ и $\Delta$ операторите:

$$\Gamma(f,g)(x,y) \;\simeq\; \begin{cases} y, & \text{ако } \; x = 0 \\ f(x-1, g(x,y)), & \text{ако } \; x > 0 \end{cases}$$

$$\Delta(f,g)(x,y) \;\simeq\; \begin{cases} 0, & \text{ако } \; x = 0 \\ g(x-1,y) + y, & \text{ако } \; x > 0. \end{cases}$$

Нека $f_{\mathbf{\Gamma}} \;=\; (f^*, g^*)$ е най-малката неподвижна точка на оператора $\mathbf{\Gamma} = \Gamma \times \Delta$. Тогава по дефиниция

$$D_V(R)(x) \;\simeq\; f^*(x,1),$$

Имаме да доказваме свойство на $D_V(R)$, което ще рече — на $f^*$. Звучи примамливо да вземем $P$ да е свойството от условието на задачата, преписано за едноместната функция $f(x,1)$, с други думи, да положим

$$P(f,g) \iff \forall x (!f(x,1) \implies f(x,1) = x!).$$

Но така ще имаме проблем при прехода

$$P(f,g) \implies P(\Gamma(f,g),\ \Delta(f,g)),$$

защото горното свойство $P$ ни дава информация за стойностите на $f$ само в точките от вида $(x,1)$. Затова, знаейки коя всъщност е функцията $f^*$ (да, желателно е да я знаем отнапред $\ddot\smile$), решаваме да вземем по-общото свойство

$$P(f,g) \stackrel{\text{деф}}{\iff} \forall x \forall y (!f(x,y) \implies f(x,y) = x!.y).$$

Това свойство най-вероятно също няма да е достатъчно, защото когато трябва да го показваме за $\mathbf{\Gamma}(f,g)$, ще се намеси и функцията $g$, а за нея не е казано нищо в свойството $P$. Така се налага извода, че в дефиницията на $P$ ще трябва да участва и $g$.

Ясно е, че условието за $g$, което трябва да добавим, трябва да съдържа информация за функцията $g^*$ (втората компонента на $f_{\mathbf{\Gamma}}$), при това, отново записана в условен вид, за да може да мине през първото условие от принципа на Скот.

Удобно е да разделим $P$ на две части $P_1$ и $P_2$, които се отнасят поотделно до $f$ и $g$. От разсъжденията, които направихме, е ясно, че $P_1$ и $P_2$ трябва да следните:

$$P_1(f) \stackrel{\text{деф}}{\iff} \forall x \forall y(!f(x,y) \implies f(x,y) = x!y) \quad \text{и}$$

$$P_2(g) \stackrel{\text{деф}}{\iff} \forall x \forall y(!g(x,y) \implies g(x,y) = xy).$$

Сега вече полагаме

$$P(f,g) \stackrel{\text{деф}}{\iff} P_1(f) \ \& \ P_2(g).$$

Свойствата $P_1$ и $P_2$ са от тип "частична коректност" и следователно са непрекъснати, откъдето и тяхната конюнкция ще е непрекъснато свойство, съгласно *Задача* 1.3 Освен това, очевидно $P_1(\emptyset^{(2)})$ и $P_2(\emptyset^{(2)})$ са верни, с други думи, вярно е $P(\emptyset^{(2)}, \emptyset^{(2)})$. Следователно остана да проверим само импликацията

$$P(f,g) \implies P(\Gamma(f,g),\ \Delta(f,g)),$$

която се явява *индуктивния преход* при този тип индукция.

Наистина, да вземем произволни $(f,g) \in \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2$ и да приемем, че за тях е вярно $P$, т.е. верни са $P_1(f)$ и $P_2(g)$ (*индуктивна хипотеза*).

Трябва да покажем, че е вярно и $P(\Gamma(f,g), \Delta(f,g))$, или все едно — $P_1(\Gamma(f,g))$ и $P_2(\Delta(f,g))$.

Да започнем с $P_1(\Gamma(f,g))$:

$$\forall x \forall y(!\Gamma(f,g)(x,y) \implies \Gamma(f,g)(x,y) = x!y).$$

Наистина, да изберем някакви $x, y \in \mathbb{N}$ и да приемем, че $!\Gamma(f,g)(x,y)$. Разглеждаме поотделно двата случая от определението на $\Gamma$:

**1 сл.** $x = 0$. В този случай $\Gamma(f,g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{=} y = \ x!y$.

**2 сл.** $x > 0$. Тук $\Gamma(f,g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(x-1, g(x,y))$.

Понеже $!\Gamma(f,g)(x,y)$, то в частност $!g(x,y)$, и тогава от индуктивната хипотеза $P_2(g)$ получаваме, че $g(x,y) = xy$. Следователно

$$\Gamma(f,g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(x-1, g(x,y)) \stackrel{\text{и.х. } P_2(g)}{\simeq} \underbrace{f(x-1, xy)}_{\text{е дефинирано}} \stackrel{\text{и.х. } P_1(f)}{=} (x-1)!(xy) \ = \ x!y.$$

С това приключихме проверката на $P_1(\Gamma(f,g))$.
Насочваме се към второто условие $P_2(\Delta(f,g))$, което изглежда така:

$$\forall x \forall y(!\Delta(f,g)(x,y) \implies \Delta(f,g)(x,y) = xy).$$

Вземаме произволни $x, y \in \mathbb{N}$ и приемаме, че $\Delta(f,g)(x,y)$ е дефинирано. Отново разглеждаме двата случая от определението на $\Delta$:

**1 сл.** $x = 0$. В този случай $\Delta(f,g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{=} 0 = xy$.

**2 сл.** $x > 0$. Тогава $\Delta(f,g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} g(x-1,y) + y$.

Понеже $!\Delta(f,g)(x,y)$, то значи $!g(x-1,y)$ и следователно можем да приложим индуктивната хипотеза $P_2(g)$. Така получаваме

$$\Delta(f,g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} g(x-1,y) + y \stackrel{\text{и.х. } P_2(g)}{=} (x-1)y + y = xy.$$

Така проверихме и $P_2(\Delta(f,g))$, и значи общо можем да твърдим, че е в сила $P(\Gamma(f,g), \Delta(f,g))$. Това означава, че индукционният преход е завършен, т.е. условието 2) от правилото на Скот е доказано. Както казахме по-горе, другите две условия също са налице, което ни дава основание да твърдим, че свойството $P$ е вярно за най-малката неподвижна точка $(f^*, g^*)$ на оператора $\mathbf{\Gamma}$. В частност, вярно е $P_1(f^*)$:

$$\forall x \forall y (!f^*(x,y) \implies f^*(x,y) = x!y).$$

Оттук при $y = 1$ ще имаме

$$\forall x (!f^*(x,1) \implies f^*(x,1) = x!).$$

Вече коментирахме, че $D_V(R)(x) \simeq f^*(x,1)$, т.е. условието по-горе означава точно

$$\forall x (!D_V(R)(x) \implies D_V(R)(x) = x!),$$

което и трябваше да покажем.

**б)** Тук трябва да видим, че е тотална функцията $\lambda x.f^*(x,1)$, но всъщност отново се налага да покажем нещо по-общо, а именно, че е тотална двойката функции $(f^*, g^*)$, която е най-малка неподвижна точка на оператора $\mathbf{\Gamma}$. Всъщност в доказателството никъде няма да използваме, че $(f^*, g^*)$ е *най-малката* неподвижна точка на $\mathbf{\Gamma}$, или еквивалентно — че е *най-малкото решение на системата*

$$\left| \begin{array}{lcl} f & = & \Gamma(f,\ g) \\ g & = & \Delta(f,\ g). \end{array} \right.$$

Наистина, нека $(f,g) \in \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2$ е *произволно* решение на тази система. Това означава, че за тях е изпълнено:

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} y, & \text{ако} \quad x = 0 \\ f(x-1, g(x,y)), & \text{ако} \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{и}$$

$$g(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако} \quad x = 0 \\ g(x-1,y)+y, & \text{ако} \quad x > 0. \end{cases}$$

Ще покажем, че тези функции са тотални. Тук е подходящо да започнем от функцията $g$. С обичайна индукция по $x \in \mathbb{N}$ показваме, че $\forall x Q(x)$, където

$$Q(x) \stackrel{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \forall y \; !g(x,y).$$

Сега като знаем, че $g$ е тотална, с подобна индукция се убеждаваме, че и $f$ е тотална. Следователно можем да твърдим, че и $D_V(R)$ е тотална функция. $\square$

Следващата задача изглежда по-трудна, но всъщност е по-лесна от предишната задача, защото не се налага да допълваме свойството, което трябва да доказваме. Всичко, което ни трябва, е дадено в условието. Вижте сами:

**Задача 3.** Нека $R$ е следната програма над *целите* числа:

$F(X,Y).X + G(X,Y).Y$ `where`

$F(X,Y)$ = `if` $X == Y$ `then` $1$
`else if` $X > Y$ `then` $G(Y,X)$
`else` $F(X,Y–X)–G(X,Y–X)$

$G(X,Y)$ = `if` $X == Y$ `then` $0$
`else if` $X > Y$ `then` $F(Y,X)$
`else` $G(X,Y-X)$

Да се докаже, че за $D_V(R)$ е изпълнено:
**а)**

$$\forall x \in \mathbb{N} \; \forall y \in \mathbb{N} \; (!D_V(R)(x,y) \implies D_V(R)(x,y) \simeq \text{НОД}(x,y))$$

(тук отново предполагаме, че $\text{НОД}(0,0) = 0$).
**б)**

$$\forall x \in \mathbb{N}^+ \forall y \in \mathbb{N}^+ \; !D_V(R)(x,y).$$

**Забележка.** Да отбележим, че в подточка б) условието за завършване е за *положителни* $x$ и $y$, докато в подточка а) условието е за *всички естествени* числа $x$ и $y$. Истината е, че когато точно едното от двете $x$ и $y$ е $0$, програмата $R$ не завършва, т.е. $\neg !D_V(R)(x,y)$, но условието в подточка а) е вярно и за тези $x$ и $y$, защото то е от тип частична коректност.

**Решение.** **а)** Да означим с $\Gamma$ и $\Delta$ операторите, определени от дефинициите на $F$ и $G$:

$$\Gamma(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако} \quad x = y \\ g(y,x), & \text{ако} \quad x > y \\ f(x,y-x) - g(x,y-x)), & \text{ако} \quad x < y \end{cases}$$

$$\Delta(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако} \quad x = y \\ f(y,x), & \text{ако} \quad x > y \\ g(x, y-x), & \text{ако} \quad x < y. \end{cases}$$

Полагаме

$$\mathbf{\Gamma}(f,g) \stackrel{\text{деф}}{=} (\Gamma(f,g), \Delta(f,g))$$

и нека отново $(f^*, g^*)$ е най-малката неподвижна точка на $\mathbf{\Gamma}$. Чрез нея се определя функцията $D_V(R)$, която тук ще е следната:

$$D_V(R)(x,y) \simeq f^*(x,y).x + g^*(x,y).y.$$

Да заместим $D_V(R)$ в условието, което трябва да доказваме:

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ (\ \underbrace{!D_V(R)(x,y)}_{f^*(x,y).x+g^*(x,y).y} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{D_V(R)(x,y)}_{f^*(x,y).x+g^*(x,y).y} \ = \text{НОД}(x,y)\ ).$$

Така получаваме следното свойство $P(f,g)$:

$$P(f,g) \iff \forall x{\in}\mathbb{N}\forall y{\in}\mathbb{N}(!f(x,y) \& \,!g(x,y) \implies f(x,y).x{+}g(x,y).y = \text{НОД}(x,y)).$$

Засега нямаме представа дали с това свойство $P$ ще успеем да извършим индуктивния преход при $\mu$-индукцията на Скот, но не пречи да опитаме. Най-напред, $P$ е от тип "частична коректност" и следователно е непрекъснато. Освен това то е в сила за $(\emptyset^{(2)}, \emptyset^{(2)})$.

Сега се заемаме с проверката на второто изискване към $P$: за всички $(f,g) \in \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2$ да е изпълнено

$$P(f,g) \implies P(\Gamma(f,g),\ \Delta(f,g)).$$

Наистина, да вземем произволни $(f,g)$ от $\mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2$ и да приемем, че $P(f,g)$ е вярно (*индуктивна хипотеза*).

Трябва да покажем, че и $P(\Gamma(f,g), \Delta(f,g))$ е вярно. Да го разпишем най-напред:

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ (!\Gamma(f,g)(x,y)\ \&\ !\Delta(f,g)(x,y) \implies$$

$$\Gamma(f,g)(x,y).x + \Delta(f,g)(x,y).y = \text{НОД}(x,y)).$$

Наистина, да вземем произволни *естествени числа* $x, y \in \mathbb{N}$ и да приемем, че за тях $!\Gamma(f,g)(x,y)$ и $!\Delta(f,g)(x,y)$. Разглеждаме трите възможности за $x$ и $y$ от дефинициите на $\Gamma$ и $\Delta$ (които за късмет се оказват едни и същи):

**1 сл.** $x = y$. В този базов случай $\Gamma(f,g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{=} 1$, $\Delta(f,g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{=} 0$ и тогава

$$\Gamma(f,g)(x,y).x + \Delta(f,g)(x,y).y \ = x = \text{НОД}(x,y).$$

**2 сл.** $x > y$. Тук $\Gamma(f,g)(x,y) \overset{\text{деф}}{\simeq} g(y,x)$, а $\Delta(f,g)(x,y) \overset{\text{деф}}{\simeq} f(y,x)$,

Условията $!\Gamma(f,g)(x,y)$ и $!\Delta(f,g)(x,y)$ означават, че са дефинирани изразите $g(y,x)$ и $f(y,x)$. Тогава е изпълнена предпоставката в и.х. $P(f,g)$ и значи можем да запишем:

$$\Gamma(f,g)(x,y).x + \Delta(f,g)(x,y).y \;\simeq\; g(y,x).x + f(y,x).y$$

$$\simeq f(y,x).y + g(y,x).x \overset{\text{и.х. } P(f,g)}{\simeq} \text{НОД}(y,x) \;=\; \text{НОД}(x,y).$$

**3 сл.** $x < y$. По дефиниция

$$\Gamma(f,g)(x,y) \simeq f(x,y-x) - g(x,y-x), \quad \Delta(f,g)(x,y) \simeq g(x,y-x).$$

Да отбележим, че понеже $x < y$, то $y - x$ е естествено число. В този случай имаме, че със сигурност са дефинирани изразите $f(x,y-x)$ и $g(x,y-x)$. Следователно отново можем да приложим индуктивната хипотеза $P(f,g)$:

$$\Gamma(f,g)(x,y).x + \Delta(f,g)(x,y).y \simeq (f(x,y-x) - g(x,y-x)).x + g(x,y-x).y$$

$$\simeq f(x,y-x).x + g(x,y-x).(y-x) \overset{\text{и.х. } P(f,g)}{\simeq} \text{НОД}(x,y-x) = \text{НОД}(x,y).$$

Финално, нашето свойство $P$ удовлетворява трите изисквания на принципа на Скот, следователно то ще е изпълнено и за най-малката неподвижна точка $f_{\mathbf{\Gamma}} = (f^*, g^*)$:

$$\forall x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N}(!f^*(x,y) \,\&\, !g^*(x,y) \implies \underbrace{f^*(x,y).x + g^*(x,y).y}_{D_V(R)(x,y)} = \text{НОД}(x,y)).$$

Но вече видяхме, че това е еквивалентно точно на условието от задачата:

$$\forall x \in \mathbb{N}\; \forall y \in \mathbb{N}(!D_V(R)(x,y) \implies D_V(R)(x,y) \simeq \text{НОД}(x,y)).$$

**б)** Трябва да покажем, че

$$\forall x \in \mathbb{N}^+ \forall y \in \mathbb{N}^+ \; !D_V(R)(x,y)$$

или все едно

$$\forall x \in \mathbb{N}^+ \forall y \in \mathbb{N}^+ \; !f^*(x,y) \;\&\; g^*(x,y).$$

Всъщност истината е, че това условие е в сила за *всяка* неподвижна точка $(f,g)$ на оператора $\mathbf{\Gamma}$, с други думи, за коя да е двойка функции $(f,g)$, такива че:

$$f(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } \; x = y \\ g(y,x), & \text{ако } \; x > y \\ f(x,y-x) - g(x,y-x)), & \text{ако } \; x < y \end{cases}$$

$$g(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако} \quad x = y \\ f(y,x), & \text{ако} \quad x > y \\ g(x, y-x), & \text{ако} \quad x < y. \end{cases}$$

Да фиксираме една такава двойка $(f, g)$. С индукция по лексикографската наредба $\prec$ на $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ ще покажем, че

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \ \underbrace{!f(x,y) \ \& \ !g(x,y)}_{P(x,y)}.$$

Наистина, да вземем произволни $(x, y)$ и да приемем, че

$$\forall (x', y')_{(x',y') \prec (x,y)} \ P(x', y') \qquad \textit{(индуктивна хипотеза).}$$

Искаме да покажем, че и $P(x, y)$ е вярно. Разглеждаме трите случая за $(x, y)$ от определенията на $\Gamma$ и $\Delta$:

**1 сл.** $x = y$. Тогава $f(x, y) = 1$, а $g(x, y) = 0$ и очевидно $P(x, y)$ е вярно.

**2 сл.** $x > y$. Тук имаме

$$f(x,y) \simeq g(y,x) \quad \text{и} \quad g(x,y) \simeq f(y,x).$$

Но $(y, x) \prec (x, y)$ и твърдението следва от и.х. $P(y, x)$.

**3 сл.** $x < y$. И тук разсъжденията вървят леко — проведете ги. $\square$

Ето и още една стандартна задача на тази тема:

**Задача 4.** Дадена е следната програма $R$:

$F(X, Y, 1)$ `where`

$F(X, Y, Z)$ = `if` $X \leq 1$ `then` $Z$ `else` $F(X-1, Y, \ Z.G(X, Y))$

$G(X, Y)$ = `if` $Y == 0$ `then` $1$ `else` $X.G(X, Y-1)$

Да се докаже, че за $D_V(R)$ е изпълнено:

$$\forall x \forall y (!D_V(R)(x,y) \implies D_V(R)(x,y) \ \simeq \ (x!)^y).$$

**Решение.** Означаваме с

$$\Gamma : \mathcal{F}_3 \times \mathcal{F}_2 \longrightarrow \ \mathcal{F}_3 \quad \text{и} \quad \Delta : \mathcal{F}_3 \times \mathcal{F}_2 \longrightarrow \ \mathcal{F}_2$$

термалните оператори, които съответстват на дефинициите на $F$ и $G$:

$$\Gamma(f,g)(x,y,z) \simeq \begin{cases} z, & \text{ако } x \leq 1 \\ f(x-1, y, z.g(x,y)), & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\Delta(f,g)(x,y) \simeq \begin{cases} 1, & \text{ако } y = 0 \\ x.g(x, y-1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

и съответно полагаме

$$\mathbf{\Gamma}(f,g) \;=\; (\Gamma(f,g),\Delta(f,g)).$$

Разбира се, $\mathbf{\Gamma}$ вече е в подходящия формат

$$\mathbf{\Gamma}:\; \mathcal{F}_3\times\mathcal{F}_2 \;\longrightarrow\; \mathcal{F}_3\times\mathcal{F}_2,$$

за да говорим за негови неподвижни точки.

Да означим с $(f^*,g^*)$ най-малката неподвижна точка на $\mathbf{\Gamma}$. Тогава по определение

$$D_V(R)(x,y) \;\simeq\; f^*(x,y,1).$$

Не е трудно да се ориентираме, че най-вероятно $f^*(x,y,z) = z.(x!)^y$, а $g^*(x,y)=x^y$. Това ни навежда на мисълта да изберем следните свойства $P_1$ и $P_2$:

$$P_1(f) \stackrel{\text{деф}}{\iff} \forall x\forall y\forall z(!f(x,y,z) \implies f(x,y,z) \;\simeq\; z.(x!)^y),$$

$$P_2(g) \stackrel{\text{деф}}{\iff} \forall x\forall y(!g(x,y) \implies g(x,y) \;\simeq\; x^y).$$

Понеже $P_1$ и $P_2$ са от тип частична коректност, те са непрекъснати. Съгласно *Задача 1,* непрекъсната ще е и тяхната конюнкция

$$P(f,g) \iff P_1(f) \;\&\; P_2(g).$$

Освен това $P(\emptyset^{(3)},\emptyset^{(2)})$ е тривиално вярно. Значи остана да покажем, че свойството $P$ се запазва при прехода $(f,g) \implies (\Gamma(f,g),\ \Delta(f,g))$.

Наистина, да приемем, че $P(f,g)$ е изпълнено за произволна двойка функции $(f,g)$. Трябва да покажем $P(\Gamma(f,g),\ \Delta(f,g))$, което ще рече да покажем $P_1(\Gamma(f,g))$ и $P_2(\Delta(f,g))$.

Да се заемем първо с $P_1(\Gamma(f,g))$, което разписано изглежда така:

$$\forall x\forall y\forall z(!\Gamma(f,g)(x,y,z) \implies \Gamma(f,g)(x,y,z)\simeq z.(x!)^y).$$

Наистина, да изберем *произволни* естествени $x,y$ и $z$ и да приемем, че $!\Gamma(f,g)(x,y,z)$. Разглеждаме поотделно двата случая от определението на $\Gamma$:

**1 сл.** $x\leq 1$. В този случай $\Gamma(f,g)(x,y,z) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} z = \; z.(x!)^y$.

**2 сл.** $x>1$. Тук $\Gamma(f,g)(x,y,z) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f(x-1,y,z.g(x,y))$.

Понеже $!\Gamma(f,g)(x,y,z)$, то в частност $!g(x,y)$ и съгласно и.х. $P_2(g)$ ще имаме, че $g(x,y)\simeq x^y$. Тогава

$$\Gamma(f,g)(x,y,z) \;\simeq\; f(x-1,y,z.\underbrace{g(x,y)}_{x^y}) \stackrel{\text{и.х. } P_1(f)}{\simeq} (z.x^y).[(x-1)!]^y \;=\; z.(x!)^y.$$

С това показахме $P_1(\Gamma(f,g))$. Второто условие $P_2(\Delta(f,g))$ изглежда така:

$$\forall x \forall y (!\Delta(f,g)(x,y) \implies \Delta(f,g)(x,y) \simeq x^y).$$

Отново избираме произволни $x, y \in \mathbb{N}$ и приемаме, че $!\Delta(f,g)(x,y)$. Пак разглеждаме поотделно двата случая от определението на $\Delta$:

**1 сл.** $y = 0$. В този случай $\Delta(f,g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} 1 = x^y$.

**2 сл.** $x > 0$. Тогава $\Delta(f,g)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} x.g(x,y-1)$.

Понеже $!\Delta(f,g)(x,y)$, то значи и $!g(x,y-1)$ и следователно можем да приложим индукционната хипотеза $P_2(g)$. Така получаваме

$$\Delta(f,g)(x,y) \ \simeq \ x.g(x,y-1) \stackrel{\text{и.х. } P_2(g)}{\simeq} x.x^{y-1} \ = \ x^y,$$

което приключва проверката на $P_2(\Delta(f,g))$. Значи общо можем да твърдим, че $P(\Gamma(f,g),\Delta(f,g))$ е вярно, т.е. изискването 2) от индуктивния принцип на Скот е изпълнено. Тогава свойството $P$ ще вярно за най-малката неподвижна точка $(f^*, g^*)$ на оператора $\mathbf{\Gamma}$. В частност, ще е вярно $P_1(f^*)$:

$$\forall x \forall y \forall z (!f^*(x,y,z) \implies f^*(x,y,z) \simeq \ z.(x!)^y).$$

Оттук при $z = 1$ ще имаме

$$\forall x \forall y (!f^*(x,y,1) \implies f^*(x,y,1) \simeq (x!)^y)$$

и значи за $D_V(R)(x,y) \stackrel{\text{деф}}{\simeq} f^*(x,y,1)$ ще е изпълнено

$$\forall x \forall y (!D_V(R)(x,y) \implies D_V(R)(x,y) \simeq (x!)^y).$$

□