Тогава (за $\sigma \in S_n$) $\exists\, j_1, \dots, j_s \in \Omega$:

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{s} O(j_k) \quad (\text{за } k \neq l \;\; O(j_k) \cap O(j_l) = \emptyset)$$

$$O(j_k) = \{\underbrace{j_k, \sigma(j_k), \sigma^2(j_k), \dots, \sigma^{m-1}(j_k),}_{\text{разл.}}\} \mid m = \min: \sigma^m(j_k) = j_k$$

Това е разбиване на Ω $\iff$ рел. на екв.

$$i \sim j \iff \exists k: j = \sigma^k(i)$$

($\iff$ i и j са в една орбита)

$$[i] = O(i)$$

Тв. Нека $\bigcup_{j=1}^{k} O(i_j)$ е разбиване породено от $\sigma \in S_n$, $O(i_j) = \{i_j, \sigma(i_j), \dots, \sigma^{n_j-1}(i_j)\}$

и $\sigma_j := (i_j\ \sigma(i_j) \dots \sigma^{n_j-1}(i_j))$ (цикъл с дълж. n_j)

Тогава $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k$

Заб. 1) за $k \neq l$ σ_k и σ_l са независими.

В частност, $\sigma_k \sigma_l = \sigma_l \sigma_k$

Д-во $i \in \Omega$. Трябва да проверим, че

$$\sigma(i) = (\sigma_1 \dots \sigma_k)(i)$$

$\exists\, i_0 \in \{1, \dots, k\} : i \in O(i_0)$.

Ясно е, че $\sigma(i) \in O(i_0)$. Тогава

$\forall j \neq i_0 \quad \sigma_j(i) = i$ и $\sigma_j(\underline{\sigma(i)}) = \underline{\sigma(i)}$

Тогава $(\sigma_1 \dots \sigma_{i_0} \dots \sigma_k)(i) = (\sigma_1 \dots \sigma_{i_0})(i) =$

$$= (\sigma_1 \dots \sigma_{i_0-1})(\sigma_{i_0}(i)) = (\sigma_1 \dots \sigma_{i_0-1})(\sigma(i)) = \sigma(i)$$

<u>Зад.</u> 1/ Покажете, че σ се представя като произведение на независими цикли

2) Може да се док., че това е представяне е единствено с точност до реда на циклите (комутират)

3) Обикновено циклите с дължина 1 не ги пишем — те са <u>id</u>

<u>Опр.</u> Цикъл с дължина 2 се нарича транспозиция.

Заб. 1) $(i\,j) = (j\,i)$; $(i\,j)^{-1} = (i\,j)$

2) $(i_1 i_2 \ldots i_k) = (i_1 i_k)(i_1 i_{k-1}) \ldots (i_1 i_2)$, т.е.

$\forall$ цикъл е произв. на транспозиции

Тв. Всяка перм. е произв. на трансп.

Заб. Трансп. в заб 2) не са независими

Пр. $(13)(12)(13) = (23)$ — представянето не е

единствено ... броят е различен

Опр. $i_1 i_2 \dots i_k$ - перм. (т.е. $\sigma \in S_n : \sigma(j) = i_j$)

Казваме, че i_k и i_l образуват инверсия, ако

$(i_k - i_l)(k-l) < 0$ $\quad ((\sigma(k)-\sigma(l))(k-l) < 0)$

Зад. $k < l \to i_k > i_l$ $\qquad i_1 \dots \overset{\bullet}{i_k} \overset{>}{\dots} \overset{\bullet}{i_l} \dots i_n$

$k > l \to i_k < i_l$ $\qquad i_1 \dots i_l \dots i_k \dots i_n$

Пр. 6 4 1 5 2 3

5 3 0 2 0 0

Общо 10 инверсии $= [641523]$

Опр. С $[i_1 \dots i_k]$ означ. бр. на инверсиите

$(\sigma \in S_n \to [\sigma])$

Опр. $\sigma \in S_n$

$\operatorname{sign} \sigma := (-1)^{[\sigma]}$ — знак на перм. σ

σ е четна, ако $\operatorname{sign} \sigma = 1$ ($\Leftrightarrow [\sigma]$ - четно)

σ е нечетна, ако $\operatorname{sign} \sigma = -1$ ($\Leftrightarrow [\sigma]$ - неч.)

Заб. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$

$$\sigma \circ (k\,l) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & \dots & l & \dots & n \\ i_1 & \dots & \underline{i_l} & \dots & \underline{i_k} & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

За определеност $k < l$

$$\underbrace{(\operatorname{Ker}\varphi^*)_0}_{\subseteq V} = \operatorname{Im}\varphi$$

$\varphi : U \to V$

$\varphi^* : V^* \to U^*$

$\operatorname{Ker}\varphi^* < V^*$

$(\operatorname{Ker}\varphi^*)_0 < V$

$V \longrightarrow V^*$

$\overset{\vee}{U} \longrightarrow U^0 = \{v^* \in V^* \mid \forall u \in U \quad v^*(u) = 0\}$

$(U^*)_0 \longleftarrow U^*$

$(U^*)_0 = \{v \in V \mid \forall u^* \in U^* \quad u^*(v) = 0\}$

$\operatorname{Im}\varphi \subseteq (\operatorname{Ker}\varphi^*)_0$

$v \in (\operatorname{Ker}\varphi^*)_0 \iff \forall v^* \in \operatorname{Ker}\varphi^* \quad v^*(v) = 0$

$\iff \forall v^* : \varphi^*(v^*) = 0 \quad v^*(v) = 0$

$\iff \forall v^* : v^* \circ \varphi = 0 \longrightarrow v^*(v) = 0$

$v \in \operatorname{Im}\varphi$

$\exists u : v = \varphi(u)$

$v^* : v^* \circ \varphi = 0$

$v^*(\varphi(u)) = 0$

Нека $\sigma(p) = k$ и $\sigma(q) = l = i_q$
$\overset{\shortparallel}{i_p}$

$$(k\ l) \circ \sigma = \begin{pmatrix} \dots & k & \dots & l & \dots \\ \dots & l & \dots & k & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & p & \dots & q & \dots \\ \dots & k & \dots & l & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dots & p & \dots & q & \dots \\ \dots & \underset{\overset{\shortparallel}{i_q}}{l} & \dots & \underset{\overset{\shortparallel}{i_p}}{k} & \dots \end{pmatrix}$$

<u>Тв.</u> 1) $\operatorname{sign}[\sigma \circ (k\ k+1)] = -\operatorname{sign}\sigma$

2) $\operatorname{sign}[\sigma \circ (k\ l)] = -\operatorname{sign}\sigma$

3) $\tau_1 \dots \tau_k$ – транспоз. $\Rightarrow$ $\operatorname{sign}[\sigma \circ (\tau_1 \dots \tau_k)] = (-1)^k \operatorname{sign}\sigma$

4) $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ – транспоз. $\Rightarrow$ $\operatorname{sign}\sigma = (-1)^k$

5) $\sigma, \tau \in S_n \quad \operatorname{sign}(\sigma\tau) = \operatorname{sign}\sigma \circ \operatorname{sign}\tau$

6) $\tau_1 \dots \tau_k = \rho_1 \dots \rho_s$ (τ_i, ρ_i — транспоз.) $\Rightarrow$ k и s со

с одинаковой чётност.

<u>Д-во</u> $\sigma \circ (k\ \ k+1) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k-1 & k & k+1 & k+2 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_{k-1} & \underline{i_{k+1}} & \underline{i_k} & i_{k+2} & \dots & i_n \end{pmatrix}$

Рассм. бр.-ем инв. с перест.

$$i_1 \dots i_{k-1} \quad i_k \quad i_{k+1} \quad i_{k+2} \dots i_n \qquad (1)$$

$i_1 \dots i_n$ и
$$i_1 \dots i_{k-1} \quad i_{k+1} \quad i_k \quad i_{k+2} \dots i_n \qquad (2)$$

$i_1, \dots, i_{k-1}$ — участвуют в равен. бр. инв. в (1) и (2)

$i_{k+2}, \dots, i_n$ ——//—— ——//—— ——//—— ——//——

Пробием са i_k и i_{k+1}

бр. на инв. на i_k (i_{k+1}) с $i_{k+2}, \dots, i_n$ е

еднакъв в (1) и (2)

Остава само i_k и i_{k+1}

Ако в (1) не са в инв., то (2) са и обратно

$$\Rightarrow [\sigma \circ (k\ k+1)] = \pm 1 + [\sigma]$$

$$\Rightarrow \operatorname{sign}[\sigma \circ (k\ k+1)] = (-1)^{\pm 1 + [\sigma]} = -(-1)^{[\sigma]} = -\operatorname{sign}\sigma$$

2) Нека $k < l$

$$(k\,l) = (k\;k+1)(k+1\;k+2)\cdots(l-1\;l)(l-2\;l-1)\cdots(k+1\;k)$$

$$= \underbrace{(k\;k+1)(k+1\;k+2)\cdots\cdots(l-2\;l-1)}_{l-k-1} \circ$$

$$\circ\;(l-1\;l)\;\circ\;\underbrace{(l-1\;l-2)\cdots\cdots(k+2\;k+1)\;(k+1\;k)}_{l-k-1}$$

Общо са $\quad 2(l-k-1)+1$

(като в 1)

$\sigma(k\,l) = \sigma$ [произв. на нечет. бр. „съседни" транспоз.]

$\Rightarrow \operatorname{sign}[\sigma(k\,l)] = -\operatorname{sign}\sigma$

3) по опр.

4) $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_k \Rightarrow id = \sigma (\tau_1 \ldots \tau_k)^{-1} = \sigma \tau_k^{-1} \ldots \tau_1^{-1} =$

$= \sigma \tau_k \ldots \tau_1$

$1 = \operatorname{sign} id = \operatorname{sign}(\sigma \tau_k \ldots \tau_1) \overset{3)}{=} (-1)^k \operatorname{sign} \sigma$

$\Rightarrow \operatorname{sign} \sigma = (-1)^k$

5) $\tau = \underbrace{\rho_1 \ldots \rho_s}_{\text{транспоз.}} \rightarrow \sigma \tau = \sigma \rho_1 \ldots \rho_s$

$\operatorname{sign} \sigma \tau = \operatorname{sign}(\sigma \rho_1 \ldots \rho_s) = (-1)^s \operatorname{sign} \sigma \overset{4}{=} \operatorname{sign} \tau \cdot \operatorname{sign} \sigma$

б) $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_k = s_1 \ldots s_s$ (τ_i, s_i - транспоз.)

$$\operatorname{sign} \sigma = (-1)^k = (-1)^s$$

<u>Зад.</u> Ако перм. се представи като произв. от транспозиции, четността на броя им е една и съща

<u>Зад.</u> $\operatorname{sign} \sigma = (-1)^{[\sigma]} = (-1)^k \quad (\sigma = \underbrace{\tau_1 \ldots \tau_k}_{\text{транспоз.}})$

Може да се каже, че σ може да се представи като произв. на $[\sigma]$ на брой транспоз.

Зад. 1) $\sigma\,\underbrace{(i_1 \ldots i_k)}\,\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2) \ldots \sigma(i_k))$

2) $\sigma(\tau_1 \ldots \tau_k)\sigma^{-1} = (\sigma\tau_1\sigma^{-1})(\sigma\tau_2\sigma^{-1})\ldots(\sigma\tau_k\sigma^{-1})$

3) $(ij)\underset{\substack{\downarrow\ \downarrow\ (ij) \\ i\ \ k}}{(jk)}(ij)^{-1} = (ij)(jk)(ij) \overset{1)}{=} (ik)$

(i, j, k – разл.)

Зад. Знаем може да се дефинира и действие

1) $g(x_1 \ldots x_n)$ – полином и $\sigma \in S_n$

$$(\sigma g)(x_1 \ldots x_n) = g(x_{\sigma(1)}, \ldots x_{\sigma(n)})$$

2) $f(x_1, \dots, x_n) = \prod\limits_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$

3) $\sigma f = \pm f$

4) $\operatorname{sign} \sigma = \dfrac{\sigma f}{f} = \pm 1$