ЛЕКЦИЯ 4

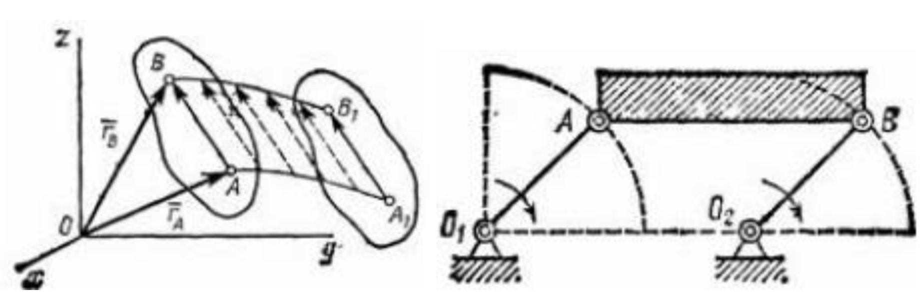
Геометрия на движението

Съдържание

1. Постъпателно движение на твърдо тяло.

- дефиниция: движение, при което всяка права, минаваща през две точки от тялото, остава успоредна на себе си по време на движението

- точките от постъпателно движещо се тяло са произволни криволинейни траектории, едни и същи за всички точки. Във всеки момент от време точките имат еднакви скорости и ускорения.



фиг.1

Нека A и B са точки от тялото и имат някакво положение в момент t и положение A_1 и B_1 в момент $t+\Delta t$.

От определението на тялото като абсолютно твърдо: отсечките AB и A_1B_1 имат равни дължини.

От определението за постъпателно движение: $AB \| A_1B_1$

$\Rightarrow ABA_1B_1$ е успоредник $\Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$

Нека M и O' са точки от тялото, а O - произволна неподвижна точка

Радиус-векторът на M относно O е

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{o'} + \mathbf{r}' \quad , \tag{1}$$

където $\mathbf{r}'$ е радиус-векторът на M относно O', а $\mathbf{r}_{o'}$ - радиус-векторът на O' относно O.

Траекторията на M се получава от траекторията на O' в резултат на преместване на вектор $\mathbf{r}'$, който е постоянен по големина и посока.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_{o'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_o \tag{2}$$

Скоростите на всички точки от постъпателно движещо се тяло във всеки момент от време са равни по големина и посока

Аналогично

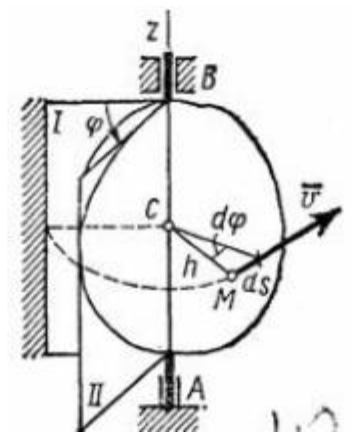
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}_{o'}}{dt} \Rightarrow \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_{o'} \tag{3}$$

Ускоренията на всички точки от постъпателно движещо се тяло във всеки момент от време са равни по големина и посока.

- *Постъпателното движение на твърдо тяло е напълно определено, ако е известно движението на една произволна негова точка.*

2. Въртене на тяло около неподвижна ос.

- движение, при което две точки от тялото остават неподвижни.
- ос на въртене – правата през неподвижните точки.



фиг.2

- нека за определеност ос на въртене е оста Oz
- неподвижна равнина I и свързана с тялото (подвижна) равнина II минават през оста Oz
- линейният ъгъл φ на двустенния ъгъл между равнините напълно определя положението на тялото

- уравнение на движението на тялото

$$\varphi = f(t) \tag{4}$$

3. Ъглова скорост и ъглово ускорение.

- определение за ъглова скорост на тялото ω

$$\omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad , \tag{5}$$

където φ_1 и φ_2 са стойности на ъгъла φ в моментите t_1 и t_2

- мерни единици: $[s^{-1}]$ или [rpm] – обороти в минута
- връзка $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$, където n - брой обороти в минута

- ъглова скорост в даден момент

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = f'(t) \tag{6}$$

- определение за средно и моментно ъглово ускорение

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad , \quad \varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{7}$$

- случай на равнопроменливо въртене (постоянно ъглово ускорение)

$d\omega = \varepsilon\, dt \quad \Rightarrow \quad \omega = \varepsilon\, t + \omega_0$; ω_0 - стойност при $t = 0$ (8)

От $d\varphi = \omega\, dt \quad \Rightarrow \quad \varphi = \dfrac{\varepsilon\, t^2}{2} + \omega_0\, t + \varphi_0$; φ_0 - стойност при $t = 0$ (9)

- при φ_0 =0 след изразяване на времето от (8) и заместване в (9):

$$t = (\omega - \omega_0)/\varepsilon\,, \qquad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\varepsilon}{2}\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\varepsilon^2} + \omega_0 \frac{(\omega - \omega_0)}{\varepsilon}\,,$$

$$\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon} \tag{10}$$

4. Скорост и ускорение на точки на твърдо тяло, въртящо се около неподвижна ос.

- Траектория на точка от твърдо тяло, въртящо се около ос – окръжност с радиус разстоянието h от точката до оста; отчитане – чрез дъга.

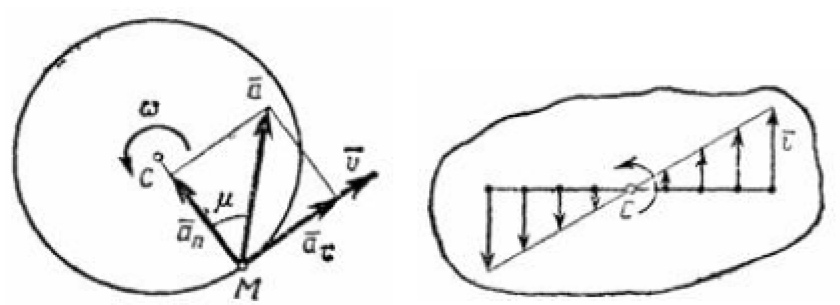
$$\sigma = h\varphi \ , \ \varphi \text{ - ъгъл на завъртане}$$

Тогава

$$v = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d}{dt}(h\varphi) = h\frac{d\varphi}{dt} = h\omega \qquad - \qquad \textit{линейна скорост}$$

- *Разпределение на скоростите в тялото*: пропорционални на разстоянието до оста на въртене и перпендикулярни на равнината, минаваща през оста на въртене и съответната точка.

- Сравнение с движението по окръжност и общите изрази за проекциите на ускорението по допирателната към траекторията и по главната нормала.



фиг.3

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d}{dt}(h\omega) = \varepsilon\, h, \qquad w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 h^2}{h} = \omega^2 h \ , \tag{11}$$

където с ε е означено ъгловото ускорение но тялото.

- В (11) са приети следните термини: тангенциално ускорение и нормално ускорение (въртеливо и центростремително или въртеливо и осестремително в разглеждания случай).

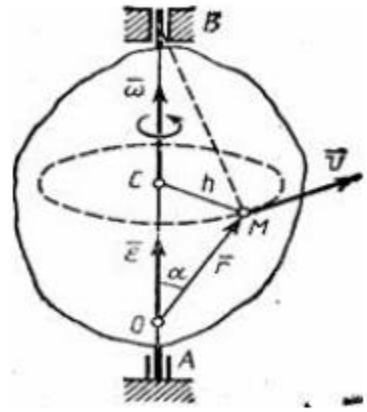
- Аналогични изрази за големината на ускорението и ъгъла между големините на центростремителното и пълното ускорение

$$w = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \ , \quad tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \tag{12}$$

- частни случаи

- равномерно въртене: $\varepsilon = 0$
- минимална или максимална ъглова скорост: $w_\tau = 0$
- минимална или максимална стойност на ъгъла: $w_n = 0$

5. Векторни изрази за скоростите и ускоренията на точки на твърдо тяло, въртящо се около неподвижна ос.



фиг.4

- вектор на ъгловата скорост : $\boldsymbol{\omega}$, където $\omega = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$; посока – по оста на въртене

$$\text{От} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (13)$$

- псевдовектори: посоката им се изменя на противоположна в зависимост от записването им в лява или дясна координатна система

- проекции на скоростта в Декартова система (формули на Ойлер)
  Нека $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$ е радиус-вектор на точка от тялото, а $(\omega_x , \omega_y , \omega_z)$ са компонентите на ъгловата скорост на тялото. Тогава от (13) за компонентите на скоростта на точката следва:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y , \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z , \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x$$

- вектор на ускорението ($\boldsymbol{\varepsilon}$ - ъгловото ускорение но тялото):

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} \tag{14}$$

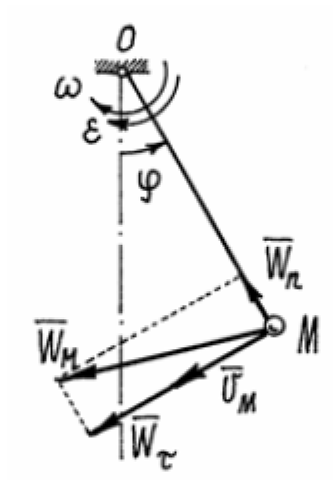
Или
$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} \tag{15}$$

- въртеливо и центростремително ускорение

$$\mathbf{w}^{\tau} = \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{w}^{n} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$$

Примери:

1. Махало ОМ с дължина $l = 1$ m се люлее във вертикална равнина, като ъгълът на колебание се изменя по закона $\varphi = 0.5\sin 2t$.



фиг.5

ъглова скорост: $\omega = \dot{\varphi} = \cos 2t$

ъглово ускорение: $\varepsilon = \ddot{\varphi} = -2\sin 2t$

при $t = 1$s : $\varphi = 0.5\sin 2 = 0.45\ rad \approx 26^{o}$,

$\omega = \dot{\varphi} = \cos 2 = -0.42\ s^{-1}$

$\varepsilon = \ddot{\varphi} = -2\sin 2 = -1.82\ \ s^{-2}$

скорост на точка М: $v_M = l\,\omega = 1.0.42 = 0.42\ ms^{-1}$

нормално ускорение: $w_n = l\,\omega^2 = 1.0.42^2 = 0.176\ ms^{-2}$

тангенциално ускорение: $w_\tau = l\,\varepsilon = 1.1.82 = 1.82\ ms^{-2}$

големина на пълното ускорение : $w_M = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = 1.828\ ms^{-2}$

Два типа задачи при движение на твърдо тяло, въртящо се около неподвижна ос.

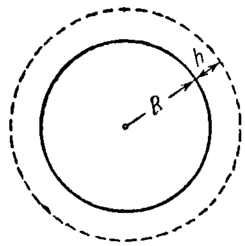
I. Дадено е уравнението на движение. Да се определи ъгловата скорост, ъгловото ускорение, скоростта и ускорението на произволна точка от твърдото тяло.

1. Избор на координатна система, в която една от осите съвпада с оста на въртене.
2. Съставяне на уравнението на движение – зависимост на ъгъла на завъртане от времето.
3. Диференциране по времето на ъгъла на завъртане – определяне на проекцията на ъгловата скорост на оста на въртене.
4. Определяне на втората призводна на ъгъла на завъртане - определяне на проекцията на ъгловото ускорение на оста на въртене.
5. Чрез проекцията на ъгловата скорост на оста на въртене – изчислява се линейната скорост и нормалното ускорение на точка от тялото.
6. Чрез проекцията на ъгловото ускорение на оста на въртене – изчислява се тангенциалното ускорение на точка от тялото.
7. Чрез тангенциалното и нормалното ускорение - изчислява се пълното ускорение по големина и посока на точка от тялото.

II. Дадено е ъгловото ускорение или ъгловата скорост на твърдото тяло. Да се определи уравнението на движение, скоростта и ускорението на точка от твърдото тяло.

1. Интегриране на израза за проекцията на ъгловото ускорение на оста на въртене – определяне на проекцията на ъгловата скорост на оста на въртене; интеграционната константа се намира от дадените начални условия.
2. Интегриране на израза за проекцията на ъгловата скорост на оста на въртене - определяне на уравнението на движение на тялото; интеграционната константа се намира от дадените начални условия.
3. Чрез проекцията на ъгловата скорост на оста на въртене – изчислява се линейната скорост и нормалното ускорение на точка от тялото.
4. Чрез проекцията на ъгловото ускорение на оста на въртене – изчислява се тангенциалното ускорение на точка от тялото.
5. Чрез тангенциалното и нормалното ускорение - изчислява се пълното ускорение по големина и посока на точка от тялото.

2. Изкуствен спътник прави една обиколка на Земята за 1 ч 36 мин. Да се определи честотата му, скоростта и ускорението му, ако орбитата е кръгова, височината над земната повърхност е h=970 км, радиус на Земята – R=6370 км.



честота: 1 ч 36 мин = 96 мин, $n = 1/96$ [об/мин] или [rpm]

ъглова скорост: $\omega = \frac{1}{96}\frac{2\pi}{60}$ [сек$^{-1}$]= $\frac{\pi}{2880} = 0.00109$ [s^{-1}]

ъглова скорост на Земята: (за 24 ч – един оборот около оста си)

$n_1 = 1/24$ [об/час] $= \frac{1}{24.60} = \frac{1}{1440}$ [об/мин]; отношение на честотите: $\frac{n}{n_1} = \frac{24.60}{96} = 15$

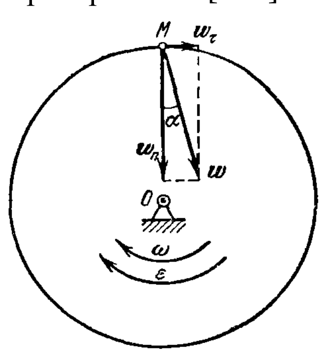
скорост на спътника: $v = (h+R)\omega = (970+6370)\frac{\pi}{2880} = 8$ [m/s]

тангенциално ускорение: <u>нула</u> (ъгловата скорост на Земята е постоянна)

нормално ускорение: (насочено към центъра на Земята)

$$w = w_n = (h+R)\omega^2 = (970+6370)\frac{\pi^2}{2880^2} = 0.00874\,[\text{km/s}^2] = 8.74[\text{m/s}^2]$$

3. При пускане на електромотор ъгловото му ускорение расте пропорционално на времето и след 6 [s] ъгловата му скорост стига 36π [s^{-1}]. Да се намери броят на оборотите за това време, скоростта и ускорението на точка M в третата секунда. Диаметър на ротора – 200 [mm].



По условие $\varepsilon_z = \dfrac{d\omega_z}{dt} = kt$; интегриране и отчитане на началните условия, както и стойността в шестата секунда: $\omega_z = k\dfrac{t^2}{2} + C$, т.е. $\omega_z = k\dfrac{t^2}{2}$ и $36\pi = k\dfrac{6^2}{2}$

Коефициентът на пропорционалност и ъгловата скорост в третата секунда:

$$k = 2\pi, \qquad \omega_z = \pi\, t^2, \qquad \omega_z = \pi\, 3^2 = 9\pi \;\; [\mathrm{s}^{-1}]$$

големината на линейната скорост на точката: $v = |v_\tau| = |\omega_z|\dfrac{d}{2} = 9\,\pi.10 = 90\,\pi$ [sm/s]

нормалното ускорение: $w_n = \omega^2\dfrac{d}{2} = 81\,\pi^2.10 = 810\,\pi^2$ [sm/s^2]

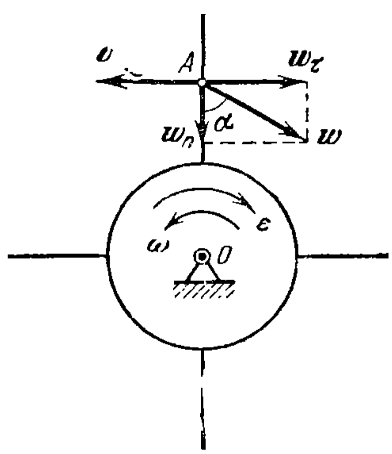
тангенциално ускорение: $w_\tau = \varepsilon_z\dfrac{d}{2} = 2\pi t\dfrac{d}{2} = 20\,\pi.3 = 60\,\pi$ [sm/s^2]

пълно ускорение: $w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = 30\pi\sqrt{729\pi^2 + 4}$ [sm/s^2]

ъгъл между пълното ускорение и радиуса:

$$tg\,\alpha = \frac{w_\tau}{w_n} = \frac{\varepsilon_z}{\omega^2} = \frac{2\pi t}{(\pi t^2)^2} = \frac{2}{\pi t^3} = \frac{2}{27\pi} = 0.0236$$

4. Вал с присъединени към него пластини се върти по закона $\varphi = a\ln(1 + \dfrac{\omega_0 t}{a})$, свързващ ъгъла на въртене на вала с времето; останалите коефициенти са постоянни. Да се намери ъгловата скорост и ъгловото ускорение на вала, скоростта и ускорението на точка A от пластинката, намираща се на разстояние R от оста на въртене.



ъглова скорост: $\omega_z = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{\omega_0}{1 + (\omega_0 / a)t}$

ъглово ускорение: $\varepsilon_z = \dfrac{d\omega_z}{dt} = -\dfrac{1}{a}\dfrac{\omega_0^2}{[1+(\omega_0/a)t]^2}$ или $\varepsilon_z = -\dfrac{\omega_z^2}{a}$

скорост на точката А: $v = R\omega = \dfrac{R\omega_0}{1+(\omega_0/a)t}$

нормално ускорение: $w_n = R\omega^2 = \dfrac{R\omega_0^2}{[1+(\omega_0/a)t]^2}$

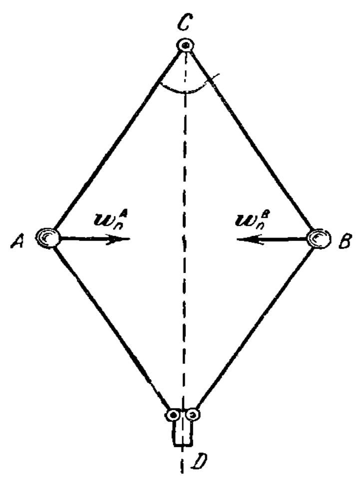
тангенциално ускорение: $w_\tau = R\varepsilon_z = -R\dfrac{\omega^2}{a} = -\dfrac{R}{a}\dfrac{\omega_0^2}{[1+(\omega_0/a)t]^2}$

пълно ускорение: $w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = R\dfrac{\omega^2}{a}\sqrt{1+a^2} = \dfrac{R}{a}\dfrac{\omega_0^2}{[1+(\omega_0/a)t]^2}\sqrt{1+a^2}$

ъгъл между пълното ускорение и радиуса, свързващ точката с оста на

въртене: $tg\,\alpha = \dfrac{\varepsilon_z}{\omega^2} = -\dfrac{1}{a}$

5.Регулатор се върти с постоянна ъглова скорост около вертикална ос. В даден момент ъгълът АСВ се е оказал 60 градуса, а ускорението на кълбата А и В – равни на 100g. Всички пръти AC, BC, AD, BD са с дължина l=10 см. Колко оборота в минута прави регулаторът (r – разстояние до оста на въртене).



ускорение на кълбата: $w_n = r\omega^2 = l\sin 30^0\omega^2$; но по условие $w_n = 100g$

тогава ъглова скорост е: $\omega = \sqrt{\dfrac{100g}{l \sin 30^0}} = \sqrt{\dfrac{100.980}{10.(0.5)}} = 140$ [s^{-1}]

изразяване на ъгловата скорост в обороти в минута:

$$n = \omega \frac{30}{\pi} = \frac{140.30}{3.14} = 1340\,[\text{rpm}]$$