8.2 Слаб закон за големите числа (СЗГЧ)

Нека сл.в. $X_1, X_2, \dots$ са произволни с крайни математически очаквания. Тогава резултата от Теорема 7.3 може да се представи по следния начин:

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{E}X_i) \xrightarrow{p} 1, \quad n \to \infty. \tag{8.2.1}$$

Определение 8.4 *Ако (8.2.1) е изпълнено, ще казваме, че редицата $\{X_n\}_{n\geq 1}$ удовлетворява слаб закон за големите числа (СЗГЧ).*

Ако сл.в. $X_1, X_2, \dots, X_n$ са еднакво разпределени, то (8.2.1) придобива вида:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu = \mathbf{E}X_1, \quad n \to \infty.$$

Теорема 8.2 *(Теорема на Марков) Ако*

$$\frac{1}{n}\mathbf{D}(\sum_{i=1}^{n} X_i) \to 0, n \to \infty, \tag{8.2.2}$$

то е в сила СЗГЧ, т.е. изпълнено е (8.2.1).

Доказателство: От неравенството на Чебишев знаем, че за всяко $\varepsilon > 0$ е в сила:

$$\mathbf{P}(\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbf{E}X_k)\Big| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E}(\sum X_k - \mathbf{E}(\sum X_k))^2}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\mathbf{D}(\sum X_k)}{n^2\varepsilon^2} \to 0.$$

□

Следствие 8.1 *(Теорема на Чебишев) Нека сл.в. $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими и дисперсиите им са ограничени, т.е. $\mathbf{D}X_i < C$. Тогава е в сила СЗГЧ.*

Доказателство: Директно се проверява (8.2.2).

Следствие 8.2 *Нека сл.в. $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими и еднакво разпределени (н.е.р.) и дисперсията им $\mathbf{D}X_1 < \infty$. Тогава е в сила СЗГЧ.*

Теорема 8.3 *(Теорема на Хинчин) Нека сл.в. $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими и еднакво разпределени (н.е.р.) с $\mathbf{E}X_1 = \mu < \infty$. Тогава е в сила СЗГЧ.*

8.3 Усилен закон за големите числа (УСГЧ)

Определение 8.5 *Ако сходимостта в (8.2.1) е почти сигурно, ще казваме, че редицата* $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ *удовлетворява усилен закон за големите числа (УЗГЧ).*

Теорема 8.4 *Нека* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *са независими случайни величини, за които*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{D}X_n}{n^2} < \infty.$$

Тогава е в сила УЗГЧ.