25. Повърхнини от втора степен, несъдържащи реални прави

Реален елипсоид

Спрямо подходящо избрана ортонормирана координатна система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ всеки елипсоид има уравнение от вида

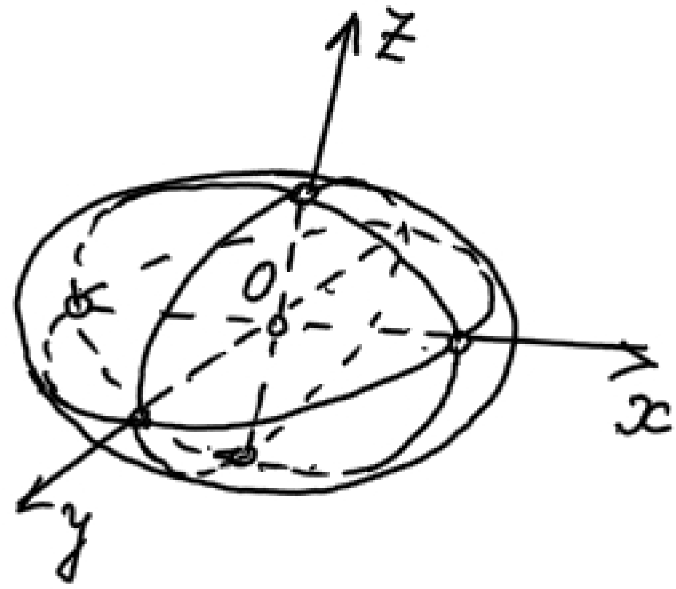
$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \geq b \geq c > 0$.

Ако $a = b = c$, то елипсоидът е сфера с радиус a; при $a = b$, или $a = c$, или $b = c$, елипсоидът е ротационен. В общия случай $a > b > c$; a се нарича голяма, b - средна, c - малка полуос на $\mathcal{E}$.

Координатните равнини са равнини на симетрия на $\mathcal{E}$. При $a \neq b \neq c \neq a$ те са единствените му равнини на симетрия. Сеченията на $\mathcal{E}$ с координатните равнини се наричат главни сечения. Представляват елипси с уравнения

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$



$$\mathcal{E}_2 : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Координатните оси Ox, Oy, Oz пресичат $\mathcal{E}$ съответно в $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$, $B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$, $C_1(0,0,c)$, $C_2(0,0,-c)$ и се наричат върхове на елипсоида.

Равнините $z = h$ за $h \in (-c, c)$ пресичат $\mathcal{E}$ в елипси с уравнения

$$\mathcal{E}_h : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

с полуоси

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\ ,\quad b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\ .$$

Равнините $z=\pm c$ се допират до $\mathcal{E}$ съответно във върховете му C_1 и C_2.

Равнините $z=h$ за $|h|>c$ не пресичат елипсоида.

Аналогично, равнините $x=h$, пресичат $\mathcal{E}$ точно тогава, когато $h\in(-a,a)$. В този случай сеченията са елипси с полуоси

$$b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\ ,\quad c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\ .$$

Също така, равнините $y=h$ пресичат $\mathcal{E}$ точно тогава, когато $h\in(-b,b)$. Сега сеченията са елипси с полуоси

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\ ,\quad c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\ .$$

Следователно точки от $\mathcal{E}$ се получават за $|x|\le a$, $|y|\le b$, $|z|\le c$, т.е елипсоидът се съдържа изцяло в правоъгълния паралелепипед с център центъра на $\mathcal{E}$ - $O(0,0,0)$ и ръбове, успоредни на Ox, Oy, Oz съответно с дължини $2a, 2b, 2c$; стените на паралелепипеда се допират до върховете на елипсоида. Следователно $\mathcal{E}$ не съдържа реални прави. Равнинните му сечения са елипси *, в специални случаи се получават окръжности.

* Ясно е, че $\mathcal{E}$ няма реални асимптотични направления. За асимптотичен вектор $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ имаме

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Имагинерен елипсоид

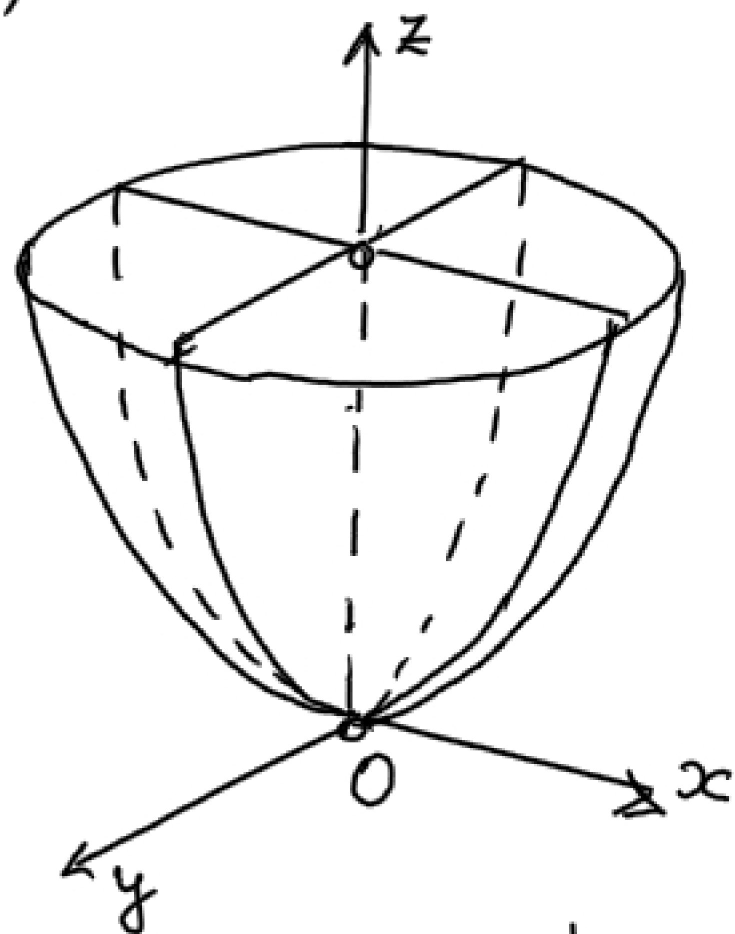
$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Няма реални точки. Равнинните сечения са имагинерни елипси.

Елиптичен параболоид

Спрямо подходящо избрана ортонормирана координатна система $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ всеки елиптичен параболоид има уравнение от вида

$$\Pi: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad a \geq b > 0.$$



При $a = b$ имаме ротационен елиптичен параболоид.

Координатните равнини Oxz и Oyz са равнини на симетрия за Π и са единствени при $a \neq b$.

Оста Oz пресича Π в една точка $O(0,0,0)$, която се нарича <u>връх</u> на елиптичния параболоид. Координатната равнина Oxy се допира до елиптичния параболоид във върха му O.

Имаме $f_1(x,y,z) = \frac{1}{a^2}x$, $f_2(x,y,z) = \frac{1}{b^2}y$

$$f_3(x,y,z) = -1 \quad (\text{и } f_4(x,y,z) = -1)$$

$\Rightarrow f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$ и $f_3(0) = -1 \Rightarrow$ за допирателната равнина в O имаме

$$0(x-0) + 0(y-0) - 1(z-0) = 0$$

$\Rightarrow$

$$z = 0.$$

Също така е ясно, че Π няма краен център.

Равнините $z = h$ при $h < 0$ не пресичат елиптичния параболоид, а при $h > 0$ го пресичат в елипси с полуоси

$$a\sqrt{2h} \ , \ b\sqrt{2h} \ .$$

Равнините $x = h$, $y = h$ пресичат Π в параболи с уравнения съответно

$$\begin{cases} y^2 = 2b^2 z - \frac{b^2 h^2}{a^2} \\ x = h \end{cases} ; \quad \begin{cases} x^2 = 2a^2 z - \frac{a^2 h^2}{b^2} \\ y = h \end{cases} .$$

Върховете им са с координати съответно $\left(h, 0, \frac{h^2}{2a^2}\right)$ и $\left(0, h, \frac{h^2}{2b^2}\right)$, а фокалните им параметри – съответно b^2 и a^2 – не зависят от h.

Имаме, че Π се намира изцяло в едно полупространство спрямо допирателната си във върха му равнина.

Също така единственото за елиптичния параболоид реално асимптотично направление е направлението на оста му Oz. За $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ – асимптотичен имаме

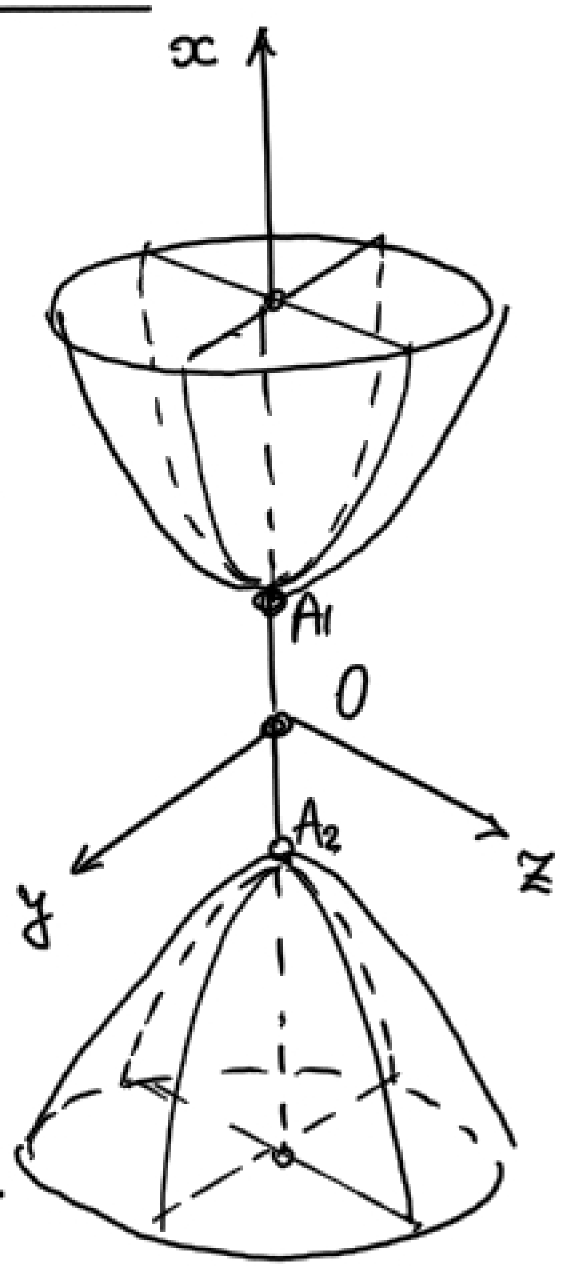
$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 0$$

$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0 \Rightarrow \gamma \neq 0$.

Следователно Π не съдържа прави и равнинните му сечения са само елипси, (когато равнината на сечението не е успоредна на Oz) и параболи, (когато равнината на сечението е успоредна на Oz, или минава по нея)

Също като елипсоида, елиптичният параболоид няма особени точки $\Rightarrow$ във всяка точка има определена допирателна равнина.

Двоен хиперболоид



Спрямо ОКС
$K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$
двойният хиперболоид има канонично уравнение

$$\chi_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$a > 0,\ b \geq c > 0.$

При $b = c$ имаме ротационен двоен хиперболоид.
Координатните равнини са равнини на симетрия като при $b \neq c$ са единствените му равнини на симетрия. Оста Ox пресича χ_2 в точките $A_1(a,0,0)$ и $A_2(-a,0,0)$, като се наричат върхове на хиперболоида. Координатните оси Oy и Oz не го пресичат в реални точки.
Уравнението на χ_2 записваме като

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

откъдето се вижда, че равнините $x = h$ при $|h| < a$ не пресичат хиперболоида, а при $|h| > a$ го пресичат в елипси с полуоси

$$b\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}\ , \quad c\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}\ .$$

Равнините $x = a$ и $x = -a$ се допират до X_2 съответно във върховете му $A_1(a,0,0)$ и $A_2(-a,0,0)$.

Имаме $f_1(x,y,z) = \frac{1}{a^2}x$, $f_2(x,y,z) = -\frac{1}{b^2}y$

$f_3(x,y,z) = -\frac{1}{c^2}z$, $(f_4(x,y,z) = -1$.

$f_1(A_1) = \frac{1}{a}$, $f_2(A_1) = 0$, $f_3(A_1) = 0 \Rightarrow$ за уравнението на допирателната равнина имаме

$$\frac{1}{a}(x-a) + 0.(y-0) + 0.(z-0) = 0,$$

т.е. $\qquad x - a = 0.$

Аналогично, за уравнението на допирателната равнина в A_2 получаваме: $x + a = 0$

Равнините $y=h$ и $z=h$ пресичат 10.
хиперболоида в хиперболи с полуоси
съответно

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}},\ c\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}} \quad \text{и} \quad a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},\ b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

От факта, че равнините $x=h$ за $-a<h<a$ не пресичат хиперболоида, за останалите стойности или го пресичат в елипси или се допират в негов връх следва, че хиперболоидът не съдържа (реални) прави. Тогава равнинните му сечения са неизродени криви от втора степен. Дотук непосредствено получихме, че има равнини, които пресичат хиперболоида в елипси и в хиперболи. Може ли равнина да пресича X_2 в парабола?

Изследваме асимптотичните направления на двойния хиперболоид

За асимптотичен за хиперболоида вектор $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ е изпълнено

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} = 0.$$

Следователно асимптотичните направления на X_2 са направленията на образуващите на конуса

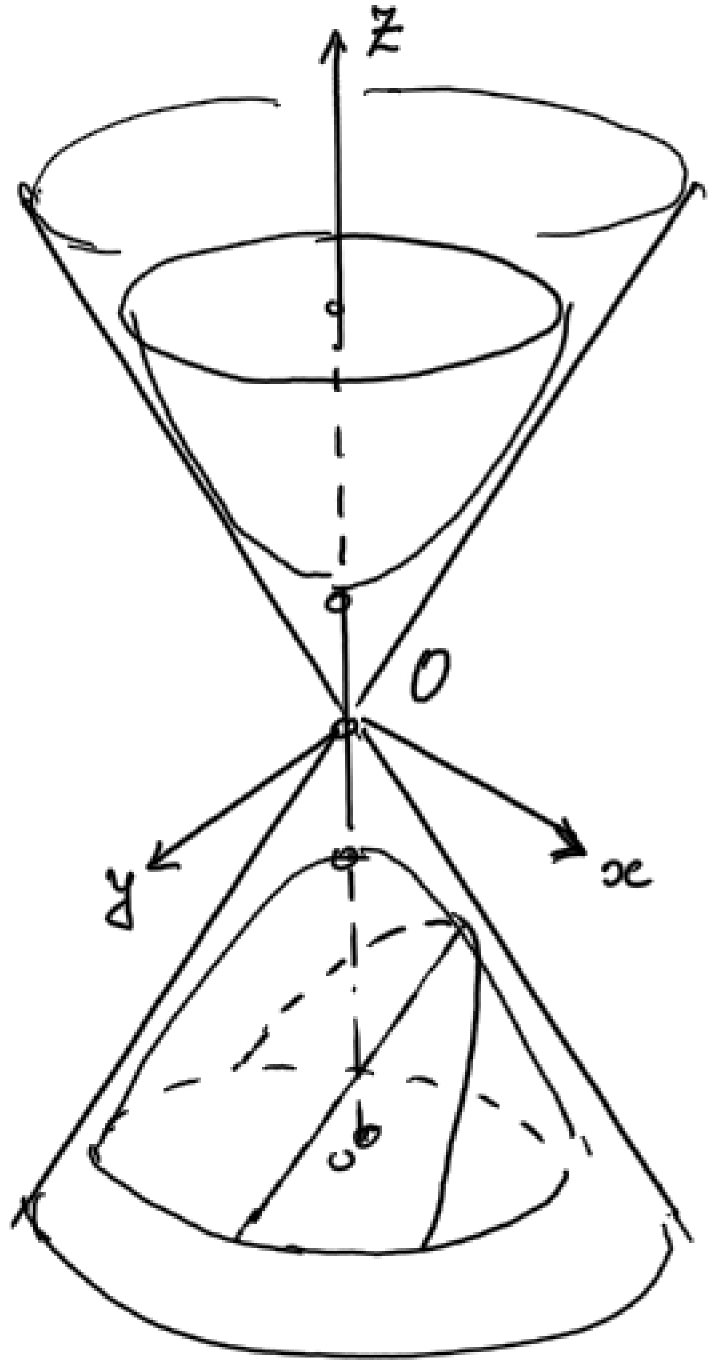
$$K : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Тогава всяка равнина, която е успоредна само на една от образуващите на конуса, пресича хиперболоида в парабола.

Ясно е, че равнина, успоредна на две образуващи на K пресича X_2 в хипербола, а ако не е успоредна на образуваща на K, пресича X_2 в хипербола.

Както елипсоида, така и двойният хиперболоид е централна повърхнина - има краен център $O(0,0,0)$.

Двоен хиперболоид
с ос Oz



може да се запише с уравнението

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Двойният хиперболоид е „вътре" в асимптотичния си конус.