Функционални редове

1. Ред $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, чиито членове са функции, се нарича функционален ред.

Казваме, че редът е сходящ в множеството *D,* ако за всяко фиксирано $x \in D$, редицата $S_k(x) = \sum_{n=0}^{k} f_n(x)$ е сходяща и $\lim_{k\to\infty} S_k(x) = S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

Може да се случи всички членове на реда да са непрекъснати или диференцируеми, а функцията $S(x)$ да не е непрекъсната или диференцируема.

2. Ако редицата $S_k(x)$ е **равномерно сходяща в *D*,** казваме че редът е **равномерно сходящ в *D***.

3. **Критерий на Вайерщрас.** Ако съществува сходящ ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, такъв че *в D* $|f_n(x)| \le a_n$ за всяко *n* и за всяко $x \in D$, то редът е равномерно сходящ.

Да отбележим, че критерия на Вайерщрас установява абсолютна сходимост при всяко фиксирано *x*.

4. Да разгледаме ред от вида $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).v_n(x)$

Критерий на Дирихле. Ако

– съществува число *A*, такова че $\left|\sum_{n=0}^{k} u_n(x)\right| \le A$ за всяко *к* и за всяко $x \in D$

– редицата $v_n(x)$ е монотонна за всяко фиксирано *x*

– редицата $v_n(x)$ клони **равномерно** към 0.

то редът $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).v_n(x)$ е равномерно сходящ.

Критерий на Абел. Ако

– съществува число *A*, такова че $|u_n(x)| \le A$ за всяко *k* и $x \in D$

– редицата $u_n(x)$ е монотонна за всяко фиксирано $x \in D$

– редът $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ е равномерно сходящ,

то $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).v_n(x)$ е равномерно сходящ.

Задача 1. Да се изследват за равномерна сходимост редовете

а) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x^n)$ при $x \in [0;1]$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x^n)$ при $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$;

в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$, $x \in \mathbb{R}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$ при $0 \le x < \infty$.

Решение. а) Очевидно $S(0) = S(1) = 0$.

При $0 < x < 1$имаме сума на две геометрични прогресии

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n =$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} .$$

Редът $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x^n)$ е сходящ в $x\in[0;1]$ и $S(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1-x^2} & \text{при } 0\le x<1 \\ 0 & \text{при } x=1 \end{cases}$

Граничната функция не е непрекъсната и следователно редът не е равномерно сходящ.

б) Да разгледаме функцията $\varphi(x)=x^n(1-x^n)=x^n-x^{2n}$ в интервала $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Производната $\varphi'(x)=nx^{n-1}-2nx^{2n-1}=2nx^{n-1}(\frac{1}{2}-x^n)$ се анулира при $x_0=\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$.

Редицата $\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ клони към 1. Следователно съществува n_0, такова че при $n>n_0$, е изпълнено $\sqrt[n]{\frac{1}{2}}>\frac{1}{2}$.

Ще разгледаме редът $\sum_{n=k_0}^{\infty} x^n(1-x^n)$ (редът се различава от дадения ред по краен броя събираеми – без функциите с индекс по-малък от n_0). Ясно е, че ако той е равномерно сходящ, то и даденият ред ще бъде равномерно сходящ.

Тъй като производната $\varphi'(x)=2nx^{n-1}(\frac{1}{2}-x^n)>0$ при $0\le x\le\frac{1}{2}<\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$, то най-голямата стойност на $\varphi(x)=x^n(1-x^n)$ е $\varphi(\frac{1}{2})=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}}$ или

$$0\le x^n(1-x^{2n})\le\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}} \text{ за всяко } n>n_0 \text{ и всяко } x\in\left[0;\frac{1}{2}\right].$$

Редът $\sum_{n=k_0}^{\infty}(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}})$ е сходящ като сума на две геометрични прогресии с частно по-малко от 1.

Съгласно критерия на Вайерщрас редът е равномерно сходящ.

в) Имаме $\left|\frac{\sin nx}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}$ за всяко $n\in\mathbb{N}$ и всяко $x\in\mathbb{R}$.

Редът $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ е сходящ (геометрична прогресия с частно $\frac{1}{2}$).

Съгласно критерия на Вайерщрас редът $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ е равномерно сходящ в $\mathbb{R}$.

г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$ при $0\le x<\infty$.

При фиксирано n функцията $f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{1+nx}}$ е намаляваща при $0\le x<\infty$ (функцията $\sqrt{1+nx}\ge 0$ е растяща при $x\ge 0$) и следователно

$$0\le f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{1+nx}}\le f_n(0)=1.$$

Тогава $\left|\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}\right|\le\frac{1}{2^{n-1}}$ за всяко $n\in\mathbb{N}$ и всяко $x\in[0;\infty)$.

Съгласно критерия на Вайерщрас редът $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$ е равномерно сходящ в $[0;\infty)$.

Задача 2. Да се изследва за равномерна сходимост реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$

а) в интервала $(0;\infty)$;

б) в интервала $[1;\infty)$.

Решение. Тази задача ще решим като използваме дефиницията на равномерно сходящ ред. За да намерим k–тата парциална сума ще разложим дробта $\frac{1}{[(t-1)x+1](tx+1)}$ (t е променлива, а x – константа):

$$\frac{x}{[(t-1)x+1](tx+1)}=\frac{A}{(t-1)x+1}-\frac{B}{tx+1} \quad\Rightarrow\quad x=A(tx+1)+B(tx-x+1).$$

При $t=-\frac{1}{x}$ имаме $x=B(-x)$ или $B=-1$.

При $t=\frac{x-1}{x}$ имаме $x=A[-(1-x)+1] \quad\Rightarrow\quad x=Ax \quad\Rightarrow\quad A=1$.

Така $\frac{x}{[(t-1)x+1](tx+1)}=\frac{1}{(t-1)x+1}-\frac{1}{tx+1}$.

Пресмятаме парциалната сума

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}=\frac{x}{[(1-1)x+1](1.x+1)}+\frac{x}{[(2-1)x+1](2x+1)}+...+\frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)}=$$

$$=\left(\frac{1}{(1-1)x+1}-\frac{1}{1.x+1}\right)+\left(\frac{1}{(2-1)x+1}-\frac{1}{2x+1}\right)+...+\left(\frac{1}{(k-1)x+1}-\frac{1}{kx+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}+...+\frac{1}{(k-1)x+1}-\frac{1}{kx+1}=1-\frac{1}{kx+1}=\frac{kx}{kx+1}.$$

При фиксирано $x\in(0;\infty)$ редицата $S_k(x)=\frac{kx}{kx+1}$ е сходяща и

$\lim_{k\to\infty}S_k(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{kx}{kx+1}=1$. Така за всяко $x\in(0;\infty)$ редът е сходящ и

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}=1$.

За да проверим, че дали е равномерно сходящ, трябва да разберем дали редицата $S_k(x)=\frac{kx}{kx+1}$ е равномерно сходяща.

Разглеждаме разликата $\left|S_k(x)-1\right|=\left|\frac{kx}{kx+1}-1\right|=\frac{1}{kx+1}$ фиксирано $k\in\mathbb{N}$.

Очевидно тази функция е намаляваща при $x\in(0;\infty)$ (функцията $kx+1$ е растяща, тъй като $k>0$). Тогава при фиксирано k

$\sup_{0<x<\infty}\left|S_k(x)-1\right|=\sup_{0<x<\infty}\frac{1}{kx+1}=\lim_{x\to0}\frac{1}{kx+1}=1$ и

$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{0<x<\infty}\left|S_k(x)-1\right|\right)=1$.

Следователно редицата $S_k(x)=\dfrac{kx}{kx+1}$ не е равномерно сходяща.

Това означава, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$ не е равномерно сходящ.

б) Ясно е, че както в а) се вижда, че редът е сходящ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}=1$ и $S_k(x)=\dfrac{kx}{kx+1}$. Тогава при фиксирано k

$$\sup_{1\le x<\infty}|S_k(x)-1|=\sup_{1\le x<\infty}\frac{1}{kx+1}=\max_{1\le x<\infty}\frac{1}{kx+1}=\frac{1}{k+1}$$

(Функция е намаляваща при $x\in[1;\infty)$).

Тогава $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sup\limits_{1<x<\infty}|S_k(x)-1|\right)=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k+1}=0$.

Следователно редицата $S_k(x)=\dfrac{kx}{kx+1}$ е равномерно сходяща в $[1;\infty)$.

Това означава, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$ е равномерно сходящ в $[1;\infty)$.

Задача 3. (За самостоятелна работа). Даден е редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2x}$.

а) Докажете, че при $x\neq 0$ редът е сходящ;
б) Докажете, че в $[1;\infty)$ редът е равномерно сходящ.

Задача 4. Даден е редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$.

а) Покажете, че за всяко x редът е **условно** сходящ.
б) Покажете, че редът е равномерно сходящ в $\mathbb{R}$.
Решение. а) Нека x е произволно фиксирано число.

Тогава редицата $\dfrac{1}{x^2+n}$ е очевидно монотонно намаляваща и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^2+n}=0$.

Съгласно критерия на Лайбниц редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$ е сходящ.

За членовете на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{x^2+n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^2+n}$ имаме

$$\frac{1}{x^2+n}=\frac{1}{n}\frac{1}{\frac{x^2}{n}+1}\sim\frac{1}{n}\ \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{x^2}{n}+1}=1\right).$$

Тогава редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{x^2+n}\right|$ е разходящ, защото хармоничният ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ е разходящ.

С това показахме, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$ е условно сходящ.

б) Тъй като $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{x^2+n}\right|$ е разходящ, критерия на Вайерщрас не може да се приложи. Ще използваме критерия на Дирихле.

Имаме $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \frac{1}{x^2+n}$ – $u_n(x) = (-1)^n$ и $v_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$.

– От $\sum_{n=1}^{k} u_n(x) = \sum_{n=1}^{k} (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{при } k \text{ нечетно} \\ 0 & \text{при } k \text{ четно} \end{cases}$, следва $\left|\sum_{n=1}^{k} u_n(x)\right| \le 1$

– При фиксирано x редицата $v_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$ е монотонно намаляваща и $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^2+n} = 0$;

– Имаме $\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+n} = \frac{1}{0+n}$ и $\lim_{n\to\infty}(\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{0+n} = 0$. Следователно редицата $v_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$ е равномерно сходяща.

Съгласно критерия на Дирихле редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ е равномерно сходящ.

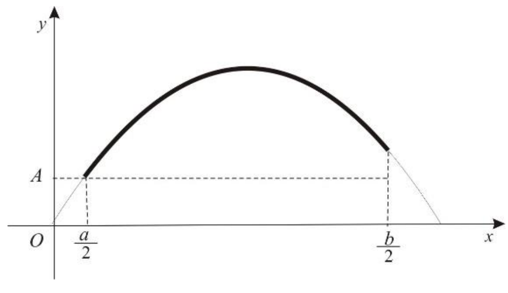
Задача 5. Нека $a < b$ са дадени числа от $(0;2\pi)$. Да се докаже, че в редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ е равномерно сходящ в $[a;b]$. (Самостоятелно разгледайте реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ в $[a;b]$).

Решение. Отново ще приложим критерия на Дирихле.

Редът е $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx . \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).v_n(x)$ – означихме $u_n(x) = \cos nx$ и $v_n(x) = \frac{1}{n}$.

Ще използваме тъждеството

$C_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \cos nx = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos kx = \frac{\sin \frac{kx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{(k+1)x}{2}$ (едно възможно доказателство вж. по-долу). Числата $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$ са в отворения интервала $(0;\pi)$. Следователно $\sin\frac{a}{2}$ и $\sin\frac{b}{2}$ са положителни. Нека A е по-малкото от тях. Тогава $\sin\frac{x}{2} \ge A > 0$ в интервала $[\frac{a}{2};\frac{b}{2}]$ (вж. графиката – по-дебелата линия е графиката на $\sin\frac{x}{2}$).



$$- \left|\sum_{n=1}^{k} u_n(x)\right| = \left|\sum_{n=1}^{k} \cos nx\right| = \left|\frac{\sin \frac{kx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{(k+1)x}{2}\right| \le \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \le \frac{1}{A}$$

– редицата $v_n(x) = \frac{1}{n}$ клони към 0

– редицата $v_n(x) = \frac{1}{n}$ не зависи от x следователно клони **равномерно** към 0.

Следователно по критерия на Дирихле редът е равномерно сходящ.

* Ще припомним как се пресмятат сумите

$C_k(x)=\sum_{n=1}^{k}\cos nx=\cos x+\cos 2x+...+\cos kx$ и

$S_k(x)=\sum_{n=1}^{k}\sin nx=\sin x+\sin 2x+...+\sin kx$.

Разглеждаме сумата $\sum_{n=1}^{k}(\cos nx+i\sin nx)$:

$$C_k(x)+iS_k(x)=\sum_{n=1}^{k}\cos nx+i\sum_{n=1}^{k}\sin nx=\sum_{n=1}^{k}(\cos nx+i\sin nx)=\sum_{n=1}^{k}(\cos x+i\sin x)^n$$

Последното равенство следва от формулата на Моавр. Получената сума е геометрична прогресия с частно $\lambda=\cos x+i\sin x$, първи член $\lambda=\cos x+i\sin x$ и брой на членовете k или

$$C_k(x)+iS_k(x)=\lambda\frac{1-\lambda^k}{1-\lambda}=\frac{\cos x+i\sin x-(\cos x+i\sin x)^{k+1}}{1-(\cos x+i\sin x)}=$$

$$=\frac{\cos x+i\sin x-\cos(k+1)x-i\sin(k+1)x}{1-\cos x-i\sin x}=$$ (отново формулата на Моавр)

$$=\frac{\cos x-\cos(k+1)x+i\sin x-i\sin(k+1)x}{2\sin^2\frac{x}{2}-i2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{(k+2)x}{2}\sin\frac{kx}{2}-i2\sin\frac{kx}{2}\cos\frac{(k+2)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}(\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2})}=\frac{\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.\frac{\sin\frac{(k+2)x}{2}-i\cos\frac{(k+2)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}}=$$

$$==\frac{\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.\frac{(\sin\frac{(k+2)x}{2}-i\cos\frac{(k+2)x}{2})(\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2})}{(\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2})(\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2})}=$$

$$=\frac{\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}[\sin\frac{(k+2)x}{2}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{(k+2)x}{2}\cos\frac{x}{2}+i(\sin\frac{(k+2)x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(k+2)x}{2}\sin\frac{x}{2})]=$$

$$=\frac{\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}(\cos\frac{(k+1)x}{2}+i\sin\frac{(k+1)}{2}x)$$

Като вземем предвид, че две комплексни числа са равни, когато реалните им части и съответно имагинерните са равни, то

$$C_k(x)=\frac{\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{(k+1)x}{2} \quad \text{и} \quad S_k(x)=\frac{\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{(k+1)}{2}x\ .*$$

Задача 6. Да се докаже, че редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+x)}}$ е равномерно сходящ в $[0;\infty)$.

Решение. Ще използваме критерия на Абел

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+x)}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}.\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x).v_n(x)-\ u_n(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}\ \text{ и }\ v_n(x)=\frac{(-1)^n}{n}.$$

– $|u_n(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{x}{n}}} \leq 1$ за всяко $x \in [0;\infty)$

– Очевидно $\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{x}{n}}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{x}{n+1}}}$ при фиксирано, т.е. редицата $u_n(x)$ е монотонна

– Редът $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ е сходящ по критерия на Лайбниц. Но този ред не зависи от x и следователно е равномерно сходящ.

Съгласно критерия на Абел редът $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+x)}}$ е равномерно сходящ в $[0;\infty)$.

Задача 6. (за самостоятелна работа) Докажете като използвате критерия на Абел, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2}$ е равномерно сходящ в $[a;b]$.