$\underline{V} = F^n$; $\underline{e_1 \ldots e_n}$ – станд. базис на F^n $(e_i = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0))$

$f_1 \ldots f_n$ – дуалния б. на $e_1 \ldots e_n$ (базис на V^*)

$g_1 \ldots g_n$ – дуалния б. на $f_1 \ldots f_n$ (базис на V^{**})

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \; ; \quad \theta(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \quad \left(\left(\theta(v) \right) (v^*) = v^*(v) \right)$$

$$f_i : V \longrightarrow F \; ; \quad f_i(e_j) = \delta_{ij}$$

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i \right)}_{\in V^*} \underbrace{(x_1 \ldots x_n)}_{\in V = F^n} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$

$(x_1 \ldots x_n) = \sum x_i e_i$

$U \leq V$. Нека $e_1, \dots, e_k$ базис на U $(k \leq n)$

$$U^0 = \{v^* \in V^* \mid \forall u \in U \quad v^*(u) = 0\} =$$

$$= \{v^* \in V^* \mid \forall i = 1, \dots, k \quad v^*(e_i) = 0\} =$$

$$= \{v^* = \sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j \mid \forall i = 1, \dots, k \quad \underset{\substack{\| \\ \mu_i}}{v^*(e_i)} = 0\} =$$

$$= \{\sum_{j=k+1}^{n} \mu_j f_j\}$$

Аналог. за $U^* \leq V^*$; базис $f_1 \ldots f_k$ на U^*
($k \leq n$)

$$U^*_0 = \{v \in V \mid \forall u^* \in U^* \quad u^*(v) = 0\} =$$
$$= \left\{ \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i \right\}$$

<u>Тв.</u> 1/ $U \leq V \Rightarrow (U^0)_0 = U$

2/ $U^* \leq V^* \Rightarrow (U^*_0)^0 = U^*$

3) $U \leq V \Rightarrow (U^0)^0 \cong U$; $\theta(U) = U^{00}$

Зад. „Отъждествяване" V с V^{**}, т.е.

$\sum \lambda_i e_i$ с $\sum \lambda_i g_i$

Зад. От $(U^0)_0 = U \Rightarrow \forall$ ЛПП е реш. на подходяща (с уравн. от U^0) хомог. система

Зад. V, V^*; $\exists V' : (V')^* = V$, $(V')^* \cong V^*$

$$\begin{matrix} V & V^* \\ \downarrow & \downarrow \\ f & g \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} V^* \\ \downarrow \\ v^* : V' \longrightarrow F \\ v' \longmapsto v^*(v') \end{matrix}$$

$V' = \sum \lambda_i e_i$; $e_i \updownarrow g_i$

Симетрична група

<u>Деф.</u> $(G, \circ)$ е група

– $\circ$ – бинарна операция

– $\circ$ е асоциативна; с (неутрален) единичен и обратими ел.

<u>Деф.</u> X – множество.

$$S(X) = \{ \sigma : X \to X \mid \sigma \text{ – биекция} \}$$

$\sigma, \tau \in S(X)$; $\forall x \in X$ $\quad (\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x))$

$\circ$ – асоц.; $\mathrm{id}_X : X \to X$, $x \mapsto x$ – единичен; σ^{-1} – обратен

$S(X)$ – симетр. гр. на X

$X = \{1, \ldots, n\}$ $\quad S_n := S(X)$ – симетр. гр. от ред n

$\sigma \in S_n \iff \sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ – пермутация

(S_n – група от перм.)

$\sigma \to i_1, \ldots, i_n$ (перм.)

$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \mid \sigma$

Зоб. $|S_n| = n!$

Опр. 1) $i \in \{1, \dots, n\}$ е фиксирана т. за $\sigma \in S_n$, ако

$\sigma(i) = i$

2) $\sigma, \tau \in S_n$ са независими перм., ако

$\forall i = 1, \dots, n \quad \sigma(i) = i$ или $\tau(i) = i$

(т. е. i е неподв. т. или за σ, или за τ, или за σ и τ)

Заб. подвижни т.$^{(i)}$ — не е неподвижна $(\sigma(i) \neq i)$

σ и τ - незав. $\Leftrightarrow$ множ-ата от подв.-т. не се пресичат

Зад. σ, τ -

$$\{1,\dots,n\} = \{i \mid \sigma(i)=\tau(i)=i\} \cup \{i \mid \sigma(i)=i \neq \tau(i)\} \cup$$
$$\cup \{i \mid \tau(i)=i \neq \sigma(i)\} \cup \{i \mid \sigma(i)\neq i \neq \tau(i)\}$$

($4^{\text{те}}$ множ. са непресичащи се; ако σ и τ са независ., то $4^{\text{то}}$ множ. е празно)

Тв. σ, τ - незав. $\Rightarrow$ $\sigma\tau = \tau\sigma$

Д-во $i \in \Omega = \{1, 2, \dots, n\}$

- ($1^{\text{во}}$ множ.) $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)) = \sigma(i) = i$

$$(\tau\sigma)(i) = \dots = i$$

– (2 множ.) $\quad (\tau\sigma)(i) = \tau(i)$

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)) \overset{?}{=} \tau(i)$$

• $\tau(i)=i$ или $i \in$ 2 множ. $\Rightarrow \tau(i) \neq i \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau(i) \in$ 2 множ. $\Rightarrow \sigma(\tau(i)) = \tau(i)$

– (3 множ.) – аналог.

Опр. Цикъл $\sigma = (i_1\, i_2 \dots i_k)$ е пермутация:

$$\sigma(i_1)=i_2,\ \sigma(i_2)=i_3,\ \dots,\ \sigma(i_{k-1})=i_k,\ \sigma(i_k)=i_1$$

и $\forall j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ $\sigma(j)=j$

Зад. Подв. му т. са точно $i_1, i_2, \dots, i_k$

Заб. $(i_1 \dots i_k)$ и $(j_1 \dots j_s)$ са независими цикли

$\Leftrightarrow \{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_s\} = \emptyset$

Тв/Сл. Независимите цикли комутират

Заб. $(i_1 i_2 \dots i_k) = (i_2 \dots i_k i_1)$

Заб. $(i_1 \dots i_k)$, k – дължина на цикъла

Пр.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 3 & 6 & 9 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \overbrace{(1\,2)(3\,7\,9\,8\,4\,5)}^{\text{независими}}(6)$$

Заб. Циклите с дължина 1 са идентитети — —
все ги пишем

$$[(12)\circ(379845)](\underset{\text{аргумент}}{1}) = (12)\big((379845)(\underset{\text{арг.}}{1})\big) =$$

$$= (12)(1) = 2$$

$\sigma \in S_n$, $i \in \Omega$

i, $\sigma(i)$, $\sigma^2(i) = \sigma(\sigma(i))$, $\sigma^3(i)$, ____ (∞ редица с ел. $1, 2, \dots, n$)

$= \sigma^0(i)$

• $\exists\, m \overset{>}{\cancel{<}} n : \sigma^m(i) = \sigma^n(i)$ $\quad \sigma^{-n}$ $\Rightarrow \sigma^{\overbrace{m-n}^{\neq 0}}(i) = \sigma^0(i) = id(i) = i$

<u>Деф.</u> $(G, \circ)$ група; $g \in G$

$$n \in \mathbb{Z} \qquad g^n := \begin{cases} \underbrace{g \cdots g}_{n}, & n > 0 \\ e, & n = 0 \\ \overbrace{g^{-1} \cdots g^{-1}}^{|n|}, & n < 0 \end{cases}$$

Св-ва: $g^m \cdot g^n = g^{m+n}$; $(g^m)^n = g^{mn}$

- $\Rightarrow \exists\, k > 0$ min със свойство $\sigma^k(i) = i$
  $(\{k > 0 \mid \sigma^k(i) = i\} \neq \emptyset)$

- $i, \sigma(i), \sigma^2(i), \ldots, \sigma^{k-1}(i)$ са различни
  (Ако $\sigma^m(i) = \sigma^n(i)$ за $0 \le m < n < k$, то
  $\sigma^{n-m}(i) = i$ и $0 < n-m < k$ ↯)

Опр. $O(i) = O_\sigma(i) = \{i, \sigma(i), \ldots, \sigma^{k-1}(i)\}$

орбита на i под действието на σ