$e = [e_i \mid i \in I]$ – базис $\iff$ $\left|\begin{array}{l}\text{ЛН} \\ \text{пораждащо множ.}\end{array}\right.$

Деф. Пораждащо множ. $\iff \ell(\{e_i \mid i \in I\}) = V$

$\iff \forall v \in V \;\; \exists i_1, \ldots, i_k \in I$ и $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F : v = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_{i_j}$

Тв $e = [e_i \mid i \in I]$ – ЛН; $v \in V$, $v = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i = \sum_{i \in I} \mu_i e_i$

(сумите реално са крайни: само краен брой коеф. в ЛК са $\neq 0$)

Тогава $\implies \forall i \in I \;\; \lambda_i = \mu_i$

Д-во

$I_1 = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\} \subseteq I$ –(крайно)

$I_2 = \{i \in I \mid \mu_i \neq 0\} \subseteq I$ (крайно)

$$v = \sum_{i \in I_1} \lambda_i e_i = \sum_{i \in I_2} \mu_i e_i$$

$I_3 = I_1 \cup I_2 \subseteq I$ (крайно)

$$v = \sum_{i \in I_3} \lambda_i e_i = \sum_{i \in I_3} \mu_i e_i \longrightarrow \sum_{i \in I_3} (\lambda_i - \mu_i) e_i = \vartheta$$

$\xrightarrow{\text{ЛН}}$ $\forall i \in I_3 \quad \lambda_i - \mu_i = 0$, т.е. $\lambda_i = \mu_i$

$i \in I \setminus I_3 \quad \lambda_i = \mu_i = 0$

$\Big\}$ $\forall i \in I$ $\lambda_i = \mu_i$

Сл. e - ЛН система $\quad U = \ell(e) \leq V$

$\Rightarrow \forall u \in U \quad \exists! \lambda_i : u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$

Д-во От $u = \ell(e) \Rightarrow \exists \lambda_i$

Сл. e - базис на $V \Rightarrow \forall v \in V \; \exists! \lambda_i : v = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i e_i$

Заб. Всеки вектор от пространството се представя по единствен начин като ЛК на векторите от базиса

Опр. 1) V е крайнопородено ЛП (КПЛП), ако

$\exists X \subseteq V : |X| < \infty$ (крайно) и $V = \ell(X)$

2) V е крайномерно ЛП (КМЛП), ако

има краен базис

Тв V е КМЛП $\iff$ V е КПЛП $\quad (V \neq \{0\})$

Заб. $V = \{0\}$ няма базис

Д-во $(\Rightarrow)$ очевидно

$(\Leftarrow)$ $a = [a_1, \dots, a_n]$; $V = \ell(a_1, \dots, a_n)$

Ако $a_1, \dots, a_n$ – ЛН $\Rightarrow$ $\underline{a}$ е базис $\rightarrow$ V е КМЛП

Ако $a_1, \dots, a_n$ – ЛЗ $\Rightarrow$ единия от тях е ЛК на останалите

Б.о.о. a_n е ЛК на $a_1, \dots, a_{n-1}$

Тогава $\ell(a_1, \dots, a_n) = \ell(a_1, \dots, a_{n-1})$

защото $\{a_1,\dots,a_n\} \subseteq \ell(a_1,\dots,a_{n-1})$ и $\{a_1,\dots,a_{n-1}\} \subseteq \ell(a_1,\dots,a_n)$

$\Rightarrow V = \ell(a_1,\dots,a_{n-1})$, т.е. $a_1,\dots,a_{n-1}$ – пораждащо множество

След най-много $n-1$ стъпки ще получим пораждащо множ. на V, което е ЛН, т.е. базис и той ще е от краен брой вектори $\Rightarrow V$ КОЛП

<u>Сл.</u> $\forall a_1,\dots,a_n \in V$ $\ell(a_1,\dots,a_n)$ има (краен) базис

<u>Пр.</u> 1) F^2; $(1,0), (0,1)$ – базис

$$(\lambda,\mu) = \lambda(1,0) + \mu(1,0)$$

21) $F_{m\times n}$

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c|c} O & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} & O \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline O & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & O \end{array}\right) & \begin{matrix} \\ i \\ \\ \end{matrix} \\ \quad j & \end{array}$$

$A = (a_{ij}) \in F_{m\times n}$

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot E_{ij}$$

E_{ij} – матрични единици

$[E_{ij} \mid i = 1 \to m;\ j = 1 \to n]$ – базис на $F_{m\times n}$

$\left(E_{ij}((k,l)) = \begin{cases} 1 & k = i,\ l = j \\ 0 & \text{в ост. сл.} \end{cases} \right.$ – като изобр. $\Big)$

3) $F[x]$ $\quad e = [e_i = x^i \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}]$ - базис

$f \in F[x]$ $\quad f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i e_i$

не е КМЛП - безкрайномерно

4) $F^{n+1}[x] = \{f \in F[x] \mid \deg f \leq n\}$

$e = \{e_i = x^i \mid i = 0, 1, \dots, n\}$

Зад. $F[x] \cong$ финитните редици

$e_i = (\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0}, \dots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ i}}{1}, 0, \dots\dots), i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ - базис на финитните редици но не е базис на ∀ редица $- F^{\mathbb{N}}$

$(1, 1, \ldots, 1, \ldots) \notin \ell\{e_i \mid i = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$

$\quad\quad = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ \lambda_1 \ldots \lambda_n \in F\}$

<u>Зад.</u> 1/ $e_1 \ldots e_n$ - базис $\Rightarrow$ $\underset{=f_1}{e_2}, \underset{=f_2}{e_1}, \underset{=f_3}{e_3} \ldots \underset{=f_n}{e_n}$ - базис

$= [e_i \mid i = 1 \ldots n]$ $\quad\quad$ $\Vert\ [f_i \mid i = 1 \ldots n]$

$v = \sum \lambda_i e_i$ $\quad\quad$ $v = \sum \mu_i f_i$

$v = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ $\quad\quad$ $\mu_1 = \lambda_2, \mu_2 = \lambda_1, \mu_3 = \lambda_3, \ldots, \mu_n = \lambda_n$

2) $e_1 \ldots e_n$ - базис $\Rightarrow$ $e_1+e_2, e_2, e_3 \ldots e_n$ - базис
(Защо? Помислете!)

<u>Т6.</u> Всеки два базиса в КМЛП имат равен брой вектори

<u>Д-во</u> $a = [a_1 \ldots a_n]$, $b = [b_1 \ldots b_m]$ - 2 базиса

$a_1 \ldots a_n \in \ell(b_1 \ldots b_m)$ и $b_1 \ldots b_m \in \ell(a_1 \ldots a_n)$

Ако $n > m \xRightarrow{ОПЛА} a_1 \ldots a_n$ - ЛЗ $\uparrow\downarrow$ $\Rightarrow$ $n \le m$ } $n = m$

Аналог. $m \le n$

Опр. Нека V е КМЛП (КПЛП). Броят на векторите в който и да е (всеки) базис на V се нарича размерност на V и се бележи с $\dim_F V$ ($\dim V$)

Заб. 1) Ако $e_1, \dots, e_n$ е базис на V, то $\dim V = n$

2) Ако V е безкрайномерно, то $\dim V = \infty$

3) Смятаме, че $\dim\{0\} = 0$ ($\{0\}$ няма базис)

Т6 V е КМЛП (КПЛП). Тогава $\dim V = n$

$\iff$ 1) $\exists\, n$ ЛН вектора във V

2) $\forall\, n+1$ вектора са ЛЗ

(⇒) Нека $e_1, \dots, e_n$ – базис на V

$\Rightarrow$ $e_1, \dots, e_n$ са ЛН (т.е. $\exists\, n$ ЛН)

Ако $a_1, \dots, a_{n+1} \in V = \ell(e_1, \dots, e_n) \xRightarrow[n+1>n]{\text{ОЛЛЗ}} a_1, \dots, a_{n+1}$ – ЛЗ

(⇐) Нека $e_1, \dots, e_n$ са ЛН (от 1))

$v \in V \xRightarrow{2)} v, e_1, \dots, e_n$ са ЛЗ $\Rightarrow v \in \ell(e_1, \dots, e_n)$

(Тв. от упраж.: $e_1, \dots, e_n$ – ЛН, $v \notin \ell(e_1, \dots, e_n) \Rightarrow v, e_1, \dots, e_n$ – ЛН)

$\Rightarrow$ $V = \ell(e_1, \dots, e_n) \Rightarrow e_1, \dots, e_n$ – пораждащо мн-во

$\Rightarrow$ $e_1, \dots, e_n$ – базис $\Rightarrow \dim V = n$

<u>Заб.</u> 1) $a_1, \dots, a_k$ - ЛН $\Rightarrow k \le \dim V$

($\dim V$ е max бр. ЛН в-ри във V)

2) Ако $\forall k$ в-ри са ЛЗ $\Rightarrow \dim V < k$

($\dim V$ е min число s, за което $\forall$ $s+1$ са ЛЗ)

3) $\dim V = n$; $e_1, \dots, e_n$ - ЛН $\Rightarrow e_1, \dots, e_n$ - базис

4) $\dim V = n$; $V = \ell(e_1, \dots, e_n) \Rightarrow e_1, \dots, e_n$ - базис

<u>Сл.</u> V е безкрайномерно $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ съществуват n ЛН вектора.

Д-во ($\Rightarrow$) Доп. противното: $\exists n \in \mathbb{N}$ $\forall \underline{n}$ в-ра са ЛЗ

$\Rightarrow \dim V \le k-1$ ↯

(Ако s е min: $\forall s$ са ЛЗ, то $\dim V = s-1$)

($\Leftarrow$) Доп. противното: V е КМЛП; $\dim V = n$

$\Rightarrow \forall n+1$ вектора са ЛЗ ↯

Тв. V - КМЛП; $U \le V$. Тогава U е КМЛП

и всеки базис на U може да се допълни до базис на V.

Сл. $$\frac{U \le V}{\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V} \Rightarrow \dim U \le \dim V.$$

Д-во U - КМЛП — ясно

($\dim V = n \rightarrow \forall\, n+1$ $\overbrace{\text{са } ЛЗ}^{\text{на } V}$ $\Rightarrow \forall\, n+1$ на U са ЛЗ
$\Rightarrow U$ не е безкрайномерно $\Rightarrow U$ е КМЛП)

Нека $\dim V = n$, $\dim U = k$. Тогава $k \leq n$

($\forall\, n+1$ на $V(U)$ са ЛЗ $\Rightarrow k < n+1 \Rightarrow k \leq n$)

Нека $e_1 \ldots e_k$ - базис на U

Ако $U = V \rightarrow e_1 \ldots e_k$ - базис V $(k = n)$

Ако $U \subsetneq V$, то $\exists\, e_{k+1} \in V \setminus \underbrace{\ell(e_1 \ldots e_k)}_{U}$

$\Rightarrow$ $e_1 \ldots e_k, e_{k+1}$ — ЛН $(k+1 \le \dim V)$

• Если $\ell(e_1 \ldots e_{k+1}) = V$, то $e_1 \ldots e_{k+1}$ — базис в V
$(\dim V = k+1)$

• Если $\ell(e_1 \ldots e_{k+1}) \neq V$, то $\exists\, e_{k+2} \in V \setminus \ell(e_1 \ldots e_{k+1})$

и $e_1 \ldots e_{k+1}, e_{k+2}$ — ЛН

и т.д. ... конечн число шагов (max $n-k$) $k+s<n$

иде смотрим до: $V = \ell(\underbrace{e_1 \ldots e_k, e_{k+1} \ldots e_{k+s}}_{ЛН})$

$\Rightarrow$ $e_1 \ldots e_k, e_{k+1} \ldots e_{k+s}$ — базис в V $(\dim V = k+s)$

<u>3.6</u> Търсене на базис (... за да намерим база)

1) Знаем, че $\underline{V = \ell(a_1 \ldots a_k)}$

$a_1 \ldots a_k$ – ЛН $\to$ базис

ЛЗ $\Rightarrow$ 1 е ЛК на останалите ...

махаме го

$\Rightarrow V = \ell$ (k-1 вектора) и т.н.

до получаване $V = \ell$ (ЛН) т. базис

2) (от последното т.)

$V \neq \{0\}$; $e_1 \neq 0$

$V = \ell(e_1)$ – e_1 – базис

$V \neq \ell(e_1) \to e_2 \in V \setminus \ell(e_1)$

- $V = \ell(e_1, e_2) \to e_1, e_2$ – базис
- $V \neq \ell(e_1, e_2) \to e_3 \in V \setminus \ell(e_1, e_2)$
- $V = \ell(e_1, e_2, e_3)$ – $e_1 e_2 e_3$ – базис
- $V \neq \ell(e_1, e_2, e_3) \to e_4 \in V \setminus \ell(e_1, e_2, e_3)$ и т.н.

(Предходното тв. за $U = \{0\}$)