V - ЕП ; $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$

$\forall u, v \in V \quad (\varphi(u), \varphi(v)) = (u, v)$ - φ - ОО

$\Updownarrow$

$\forall v \in V \quad (\varphi(v), \varphi(v)) = (v, v) \Leftrightarrow \|\varphi(v)\| = \|v\|$

φ - ОО $\Leftrightarrow$ матр. ѝ е ОМ $\Leftrightarrow$ ОНБ $\to$ ОНБ

φ - ОО $\Rightarrow$ СС са ± 1 ; $V_\lambda := \{ v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v \}$

$V_1 \perp V_{-1}$

φ - ОО ; U - φ-инв. подпр. $\Rightarrow U^\perp$ - също е φ-инв.

$\varphi|_U , \varphi|_{U^\perp}$ - ОО

1-ОО $\Rightarrow$ ЗОНБ: $A = \begin{pmatrix} \Theta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Theta_k \end{pmatrix}$ $\quad \Theta_i = (\pm 1)$, $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

• $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$, V - ЛП над $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ φ има едномерно или двумерно инв. подпр.

f_φ - ХП на φ; λ_0 - корен

- $\lambda_0 \in \mathbb{R}$; $\varphi(g) = \lambda_0 g$ $\to$ $\ell(g)$ - φ-инв.; 1-мерно
- $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; $\lambda_0 = a + ib$, $b \neq 0$

$e_1, \dots, e_n$ - базис $\to$ A - мат. на φ $\to$ $\varphi_A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n)$

$\varphi_A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$; $\varphi_A \xrightarrow[\text{б. на } \mathbb{C}^n]{\text{съотв.}} A$; $f_{\varphi_A} = f_\varphi$

$g:\ \underline{\varphi_A(g) = \lambda_0 g}$ СВ $(\neq 0)$; $g \in \mathbb{C}^n$; $g = u + iv$; $u, v \in \mathbb{R}^n$

$Au = \varphi_A(u) = au - bv$; $g_1 = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$, $g_2 = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$

$Av = \varphi_A(v) = bu + av$

$\varphi(g_1) = a g_1 - b g_2$ $\rightarrow$ $\ell(g_1, g_2)$ – 2 мерно

$\varphi(g_2) = b g_1 + a g_2$ φ - инв.

Остава да го модифицираме за φ-ОО

φ-ОО $\Rightarrow (g_1, g_1) = (\varphi(g_1), \varphi(g_1)) = a^2 (g_1, g_1) + b^2 (g_2, g_2) - 2ab(g_1, g_2)$

$(g_2, g_2) = b^2 (g_1, g_1) + a^2 (g_2, g_2) + 2ab (g_1, g_2)$

$(g_1, g_2) = ab(g_1, g_1) - ab(g_2, g_2) + (a^2 - b^2)(g_1, g_2)$

$(1)+(2)$ $\quad (a^2+b^2-1)\left(\underbrace{\|g_1\|^2+\|g_2\|^2}_{\geq 0;\ =0 \to g_1=g_2=0 \Rightarrow u=v=0 \Rightarrow g=0 \text{ ↯}}\right)=0$

$\Rightarrow a^2+b^2-1=0$

$a^2+b^2=1 \longrightarrow |\lambda_0|=1 \quad (\lambda_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$

$(1)-(2)$ $\quad (g_1,g_1)-(g_2,g_2)=(a^2-b^2)\left[(g_1,g_1)-(g_2,g_2)\right]-$

$-4ab(g_1,g_2)$

$(a^2-b^2-1)\left[(g_1,g_1)-(g_2,g_2)\right]-4ab\,(g_1,g_2)=0$

$ab\left[\underbrace{(g_1,g_1)-(g_2,g_2)}_{x_1}\right]+(a^2-b^2-1)\underbrace{(g_1,g_2)}_{X_2}=0$

$(g_1, g_1) - (g_2, g_2)$, (g_1, g_2) са реш. на хомог. сист.:

$$\begin{cases} (a^2-b^2-1)x_1 - 4ab\,x_2 = 0 \\ ab\,x_1 + (a^2-b^2-1)x_2 = 0 \end{cases}$$

с детерм. $\Delta = \begin{vmatrix} a^2-b^2-1 & -4ab \\ ab & a^2-b^2-1 \end{vmatrix} = (a^2-b^2-1)^2 + 4(ab)^2 \geq 0$

$= 0 \iff a^2-b^2-1 = 0 = ab \iff \underbrace{a=0,\ b^2=-1}_{\text{невъзм.}}$ или $\underbrace{b=0,\ a^2=1}_{\uparrow \perp\ b\neq 0}$

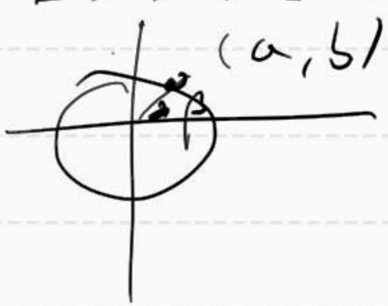
$\Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \Delta \neq 0 \Rightarrow$ хомог. сист. (по ф-ла на Крамер) има единствено реш. $-$ $(0,0)$

$\Rightarrow \|g_1\|^2 = (g_1, g_1) = (g_2, g_2) = \|g_2\|^2$; $(g_1, g_2) = 0 \to g_1 \perp g_2$

б.о.о. $\|g_1\| = \|g_2\| = 1 \to g_1, g_2$ – ОН

матр. огр. $\varphi|_{\ell(g_1,g_2)}$ в (ОНБ) g_1, g_2 $e \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$
вли $\ell(g_1,g_2)$
$\det = a^2+b^2=1$

$a^2+b^2=1 \to \exists \alpha : a=\cos\alpha,\ b=-\sin\alpha$



α – р-р сдвига $\to$ матр. $e \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Д-во по т.: инд. по dim V

$U = \ell(g)$ ← нормиров. или $U = \ell(g_1, g_2)$; $\dim U^\perp = n-1, n-2$

инд. предп. $\varphi|_{U^\perp}$ имеет матр. от искомого вида; $\varphi|_U$ – станд.
$\Rightarrow$ за φ – станд.

Бзи $n = 1$, $n = 2$

$\downarrow$ а число

ХП. има реални корени (± 1)

$$\longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{-E}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Сл. (от разсъжд.) $\forall \lambda$ – ХК на ОО $\Rightarrow |\lambda| = 1$

$(\lambda \in \mathbb{R} \to \lambda = \pm 1;\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \lambda = a + ib,\ a^2 + b^2 = 1)$

Сл. $\forall$ ОМ е подобна на $\begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_k \end{pmatrix}$ за

$$D_i = (\pm 1),\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Симетричен оператор (СО)

V - ЕП

Опр. 1) $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$ (ЕП) е СО, ако

$\forall u, v \in V \quad (\varphi(u), v) = (u, \varphi(v))$

2) $A \in M_n(\mathbb{R})$ е симетрична матрица (СМ), ако

$A^t = A \quad (\forall i,j \quad a_{ij} = a_{ji})$

Св-ва 1) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = A\} \leq M_n(\mathbb{R})$

($\forall A, B$ - СМ и $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda A + \mu B$ е СМ)

2) A - СМ и A - обратима ($\exists A^{-1}$) $\Rightarrow A^{-1}$ е СМ

$$\left(AA^{-1} = E \xrightarrow{(t)} (A^{-1})^t A^t = E \to (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \right.$$

$$\left. \text{Ако } A^t = A \to A^{-1} \right)$$

3) (Заб.) A, B - СМ $\not\Rightarrow AB$ - СМ

4) A, B - СМ, $(AB = BA \Leftrightarrow AB$ - СМ$)$

$$\left((AB)^t = B^t A^t = \underline{BA = AB} \right)$$

---

5) $e_1, \dots, e_n$ - ОНБ; $\boxed{\varphi - \text{СО}}$; $A = M_e^e(\varphi)$

$$\left.\begin{aligned} (\varphi(e_i), e_j) &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, e_j\right) = a_{ji} \\ (e_i, \varphi(e_j)) &= \left(e_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k\right) = a_{ij} \end{aligned}\right\} A^t = A$$

Тв. $e_1, \dots, e_n$ – ОНБ; $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$, $A = M_e^e(\varphi)$.

Тогава φ е СО $\Leftrightarrow$ A – СМ

Д-во ($\Rightarrow$) ō Б/

($\Leftarrow$) A – сим. $\Rightarrow$ $\forall i,j$ $(\varphi(e_i), e_j) = (e_i, \varphi(e_j))$

Аналог., както при ОО, $\forall u, v \in V$

$$(\varphi(u), v) = (u, \varphi(v))$$

Тв. ХК на СМ са реални

Сл. $\forall$ ХК на СО е СС (реално число)

Д-во λ_0 – ХК на СМ A $\to$ $\det(A-\lambda_0 E)=0$

($\in \mathbb{C}$; ХП е с реални коеф.)

$\Rightarrow$ хомог. сист. с матр. $A-\lambda_0 E$ ще има ненулево реш.

($r(A-\lambda_0 E)<n$, $\leq n-1$ $\to$ ст. на $A-\lambda_0 E$ – ЛЗ $\Rightarrow$ ЛК)

Нека $(\xi_1 \ldots \xi_n) \neq (0, \ldots, 0)$ реш. $(\xi_i \in \mathbb{C},\ \lambda_0 \in \mathbb{C})$

$$\xi = (\xi_1 \ldots \xi_n)^t \ ; \quad (A-\lambda_0 E)\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to A\xi = \lambda_0 \xi$$

$$\left| \begin{array}{ll} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n = \lambda_0 \xi_1 & \big| \cdot \bar{\xi}_1 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n = \lambda_0 \xi_2 & \big| \cdot \bar{\xi}_2 \\ \ldots & \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n = \lambda_0 \xi_n & \big| \cdot \bar{\xi}_n \end{array} \right. \qquad +$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j \cdot \overline{\xi_i}}_{a} = \lambda_0 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\xi_i}}_{b} \quad ; \quad \lambda_0 b = a$$

$$- \quad b = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2}_{\in \mathbb{R}} \geq 0 \, , \neq 0 \quad ; \text{ i.e. } \underset{b \in \mathbb{R}}{b > 0} \, , \underline{b \neq 0}$$

$$- \quad \overline{a} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\overline{a_{ij}}}_{\in \mathbb{R}\, = a_{ij} = a_{ji}} \overline{\xi_j} \xi_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \xi_i \cdot \overline{\xi_j} \underset{i \leftrightarrow j}{=} a$$

$$\Rightarrow a \in \mathbb{R}$$

$$- \quad \lambda_0 = \frac{a}{b} \quad ; \quad \overline{\lambda_0} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}} = \frac{a}{b} = \lambda_0 \Rightarrow \lambda_0 \in \mathbb{R}$$

Тв φ - СО; $\varphi(u)=\lambda u$, $\varphi(v)=\mu v$; $\lambda \neq \mu$, $u \neq \theta$, $v \neq \theta$ (u, v - СВ съотв. на $\neq$ СС). Тогава $u \perp v$

Д-во $(\varphi(u), v) = (u, \varphi(v))$

$$\lambda(u,v) = (\lambda u, v) = (u, \mu v) = \mu(u,v)$$

$$\underbrace{(\lambda-\mu)}_{\neq 0}(u,v) = 0 \to (u,v) = 0$$

Основна теорема за СО: Нека φ е СО в ЕП V. Тогава $\exists$ ОНБ, в който матр. на φ е диагонална ($\Leftrightarrow \exists$ ОНБ от собствени в-ри)

Сл. Всяка СМ A е подобна на диагонална D и $\exists$ ОМ U: $A = UDU^t$

Зад. $\forall$ ОМ A $\exists$ клетъчнодиагонална D и ортог. U:

$$A = UDU^t$$

Д-во Сл. $\underset{\text{СМ}}{A} \to \varphi_A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ – СО; $g_1 \dots g_n$ – ОНБ от СВ

$e \xrightarrow{U} g$ матр. φ_A в g $U^{-1}AU$

$e_1, \dots, e_n$ - стонд. б. на $\mathbb{R}^n$ - ОНБ; U - ОМ (ОНБ → ОНБ)

$\Rightarrow U^{-1} = U^t$

<u>Тв.</u> φ - СО; g - СВ съот. на СС λ. Тогава

$$V = \ell(g) \oplus (\ell(g))^{\perp} \quad \text{и}$$

$\ell(g)$ и $(\ell(g))^{\perp}$ са φ-инв.

<u>Д-во</u> Тр. да док. само, че $(\ell(g))^{\perp}$ е φ-инв.

Следва от !, за $U = \ell(g)$

<u>Тв</u> φ - СО, U - φ-инв. $\Rightarrow U^{\perp}$ също е φ-инв.

<u>Д-во</u> $v \in U^{\perp} \Rightarrow \forall u \in U \quad (u, v) = 0$

$u \in U \qquad (u, \varphi(v)) = (\underbrace{\varphi(u)}_{\in U}, v) = 0 \Rightarrow \varphi(v) \in U^\perp$

<u>Д-во на осн. теор.</u> Инд. по dim V

$n = 1$ — ясно

Нека тв. е вярно за n. Ще го док. за $n+1$

$\boxed{\underline{\text{Зад.}}}$ φ — СО; U - φ-инв. $\Rightarrow \varphi|_U$ — СО

φ — СО $\rightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}$ - СС $\Rightarrow \exists g$ - СВ : $\left| \begin{array}{l} \varphi(g) = \lambda_1 g \\ g \neq 0 \end{array} \right.$

$g_1 := \frac{1}{\|g\|} g \; ; \; \varphi(g_1) = \lambda_1 g_1 \, , \, \|g_1\| = 1$

$\dim(\ell(g_1))^\perp = (n+1) - 1 = n \xrightarrow[\text{предп.}]{\text{инд.}}$

$\exists\ g_2, \dots, g_{n+1}$ — ОНБ на $(\ell(g_1))^{\perp}$ от СВ, т.е.

$\varphi\big|_{(\ell(g_1))^{\perp}}(g_i) = \lambda_i g_i$ за $i = 2, \dots, n+1$

СО в $(\ell(g_1))^{\perp}$ (φ-инв.)

$\Rightarrow \varphi(g_i) = \lambda_i g_i$ за $i = 2, \dots, n+1$

$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n+1 \quad \varphi(g_i) = \lambda_i g_i$

$g_1, \underbrace{g_2, \dots, g_{n+1}}_{\text{ОН}},$ — ОНБ от СВ.

$\|g_1\| = 1, \ \forall i = 2, \dots, n+1 \ \ g_1 \perp g_i$