Редове на Фурие

Разглеждаме $C[-\pi;\pi]$ – множеството от непрекъснати функции, дефинирани в интервала $[-\pi;\pi]$.

Това множество е линейно пространство със скаларно произведение

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)dx.$$

Едно множество наричаме (алгебричен) базис, ако е линейно независимо и всеки елемент е крайна линейна комбинация на елементите на базиса (т.е. всички с изключение на краен брой коефициенти са 0).

За $C[-\pi,\pi]$ разглеждаме функциите $1=\cos(0\cdot x)$, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, ..., $\cos(nx)$, $\sin(nx)$, ...

Оказва се, че не всяка функция е крайна линейна комбинация на тези. Но всяка функция от $C[-\pi;\pi]$ може да се приближи колкото искаме добре с крайни линейни комбинации.

Също така всяка функция от $C[-\pi;\pi]$ е сума на безкрайна линейна комбинация на $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$. Ще казваме, че се развива в ред на Фурие.

Да си припомним как се определят ~~координати~~ на вектор спрямо фиксиран базис в крайномерно евклидово пространство.

Ако $e_1, \ldots, e_n$ – базис и v – вектор, търсим числа $v_1, \ldots, v_n$, т.че $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_n e_n$. Умножаваме скаларно по e_1:

$$\langle v, e_1 \rangle = v_1 \langle e_1, e_1 \rangle + v_2 \langle e_2, e_1 \rangle + \ldots + v_n \cdot \langle e_n, e_1 \rangle$$

– линейно уравнение за $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Ако умножим по e_2 – получаваме ново уравнение и т.н.

Умножавайки по e_i – получаваме система от n уравнения и n неизвестни $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Тази система има единствено решение.

Особено лесно бихме решили системата, ако $e_1, \ldots, e_n$ е ортогонална система, т.е. за всеки $i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$.

Тогава от $\langle v, e_i \rangle = v_1 \langle e_1, e_i \rangle + \dots + v_n \langle e_n, e_i \rangle$
в дясната страна остава единствено $v_i \langle e_i, e_i \rangle$
(всички други събираеми са 0).
и следователно, $v_i = \dfrac{\langle v, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}$.

Системата от функции $\cos 0x, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$ е ортогонална:
$$\langle \cos kx, \sin mx \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \sin mx \, dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0,\ m \in \mathbb{N}.$$
($\cos kx$ е четна функция, $\sin mx$ е нечетна $\Rightarrow$ произведението е нечетна функция.

Напомняме, че
- ако f е нечетна функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
- ако f е четна, то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

За $k, m \in \mathbb{N}$ скаларното произведение на два синуса е:
$$\langle \sin kx, \sin mx \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin mx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(m-k)x - \cos(m+k)x\right)dx$$

За $m, k \in \mathbb{N}$, $m+k \neq 0$.
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+k)x \, dx = \frac{1}{m+k}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+k)x \, d(m+k)x = \frac{1}{m+k}\sin(m+k)x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$
За $m \neq k$, $m-k \neq 0$ и аналогично $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-k)x \, dx = 0$.

$\Rightarrow$ При $m \neq k$ $\langle \sin kx, \sin mx \rangle = 0$.
При $m = k$, $\langle \sin kx, \sin mx \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2kx)\,dx =$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2kx)\,dx}_{0} = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi = 1.$$

Накрая остана да намерим произведението на $\cos kx$ и $\cos mx$, $k, m \in \{0, 1, 2, \dots\}$.
$$\cos kx \cos mx = \frac{1}{2}\left(\cos(k-m)x + \cos(k+m)x\right).$$
Ако $k \neq m$, то аналогично на $\sin kx \sin mx$ след интегриране, получаваме 0.

Ако $k=m>0$,

$\cos^2 kx = \frac{1+\cos 2kx}{2}$ и $\langle \cos kx, \cos kx\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 1$.

Накрая за $k=m=0$, $\langle 1, 1\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi = 2$.

Да обобщим: Скаларното произведение на всеки две различни функции от $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$ е 0.

Скаларния квадрат на функцията 1 е числото 2.

Скаларния квадрат на всяка друга функция е числото 1.

Нека $f(x) \in C[-\pi;\pi]$.

Ако $f(x) = A_0 + A_1\cos x + B_1 \sin x + A_2\cos 2x + B_2\sin 2x + \dots$, то за да намерим константите $A_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ умножаваме скаларно със съответната функция и аналогично на крайномерния случай намираме: ~~$A_0 = \frac{1}{\pi}\int f(x)\cdot 1\,dx$~~

$$A_0 = \frac{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot 1\,dx}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot 1\,dx} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\right)$$

$$A_1 = \frac{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos x\,dx}{\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cdot\cos x\,dx}_{=1}} = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos x\,dx$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin x\,dx$$ и изобщо

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos kx\,dx, \quad B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin kx\,dx.$$

Да означим
$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= \langle f, \cos kx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos kx\,dx \\ b_k &= \langle f, \sin kx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin kx\,dx \end{aligned}}$$

тогава $A_0 = \frac{1}{2}\cdot a_0$, $A_1 = a_1$, $B_1 = b_1, \dots$, $A_k = a_k$, $B_k = b_k, \dots$

Така получаваме, че развитието на f в ред на Фурие се дава от коефициентите $\frac{a_0}{2}, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$, т.е. -4-

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$ - съпоставяне на f реда и на Фурие.

В крайномерно Евклидово пространство е изпълнена теоремата на Питагор: Ако $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е ортогонален базис, то: $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_n e_n$ за координатите $v_1, v_2, \ldots, v_n$ на v.

Тогава $\langle v, v \rangle = \langle v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_n e_n, v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n \rangle =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i v_j \langle e_i, e_j \rangle$$

В последната сума $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ за $i \neq j$ от ортогоналност.
Остават само събираемите при $i = j$:

$$\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \langle e_i, e_i \rangle$$

Сега към реда на Фурие $f(x) \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$.
Равенството горе се запазва.

$$\langle f, f \rangle = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \cdot \underbrace{\langle 1, 1 \rangle}_{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 \underbrace{\langle \cos kx, \cos kx \rangle}_{1} + b_k^2 \underbrace{\langle \sin kx, \sin kx \rangle}_{1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$ - аналог на Питагоровата теорема.

Последното равенство носи името на Парсевал.

За конкретно x_0, редът на Фурие $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0)$ може да е разходящ, или сходящ към число различно от $f(x_0)$.
Ако $f(x)$ е непрекъсната в x_0, то редът ѝ на Фурие в x_0 е сходящ и сумата му е точно $f(x_0)$.

Иначе казано: Непрекъсната функция е равна на реда си на Фурие

Да отбележим, че от периодичност на $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \ldots$ (всички са периодични с период 2π), то и ред на Фурие е също 2π-периодичен.
Така, ако $f\in C[-\pi;\pi]$ продължаваме по периодичност извън този интервал.

В задачи ще търсим коефициентите от развитието в ред на Фурие. Заместване с конкретни стойности ни дава интересни тъждества. Интересно тъждество се получава и от равенството на Парсевал.

Зад. Развийте в ред на Фурие функциите, дефинирани в $[-\pi;\pi]$, и напишете равенството на Парсевал:

а) $f(x)=|x|$, б) $f(x)=x\cdot|x|$, в) $f(x)=|\sin 2x|$, г) $f(x)=\begin{cases}0, & x<\\ x, & x\geq\end{cases}$

Реш. а) $b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cdot\sin kx\,dx=0$

поради нечетност на подинтегралната функция.

Обикновено a_0 и a_k ($k\geq 1$) се пресмятат отделно:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{2\pi}=\pi.$$

За пресмятане на a_k, за $k\geq 1$, интегриране по части (полином по тригонометрична функция).

Scanned with CamScanner

$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos kx\,dx$. Първо поради четността на $|x|\cos kx$, ще разглеждаме само половината интеграл. Така се отърваваме от модула.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cdot\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dkx = \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} x\,d\sin kx = \frac{2}{k\pi}\Big(\underbrace{x\sin kx\Big|_0^{\pi}}_{0} - \int_0^{\pi}\sin kx\,dx\Big)$$

$$= -\frac{2}{k^2\pi}\int_0^{\pi}\sin kx\,dkx = -\frac{2}{k^2\pi}(-\cos kx)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{k^2\pi}\cdot\cos kx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{k^2\pi}(\cos k\pi - 1).$$

Да забележим, че $\cos k\pi = (-1)^k$ за цяло k.

$\Rightarrow$ При k-четно, $a_k = \frac{2}{k^2\pi}(1-1) = 0$

При k-нечетно, $a_k = \frac{2}{k^2\pi}(-1-1) = -\frac{4}{k^2\pi}$.

Окончателно, $$|x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) =$$
$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{k=1\\ k\text{-нечетно}}}^{\infty}\left(-\frac{4}{k^2\pi}\right)\cdot\cos kx.$$

$|x|$ като непрекъсната функция е равна на реда си на Фурие

В частност, за $x=0$: $0 = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cdot(-1)\sum_{k\text{-нечетно}}\frac{1}{k^2}$

Оттук $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k\text{-нечетно}}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$

За Парсевал, $\langle |x|, |x|\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$

Тогава ~~$\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2 \frac{1}{2}$~~:

$$\frac{2\pi^2}{3} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k\text{-нечетно}} \left(-\frac{4}{k^2\pi}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \cdot \sum_{k\text{-нечето}} \frac{1}{k^4}.$$

Оттук, $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^2}{16}\left(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^4}{96}$.

б) $f(x) = x \cdot |x|$ е нечетна $\Rightarrow$ Развива се само по нечетните функции, т.е. $a_k = 0$ за всяко k. b_k намиране с интегриране по части.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x|x| \sin kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x|x| \cdot \sin kx\, dx = \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin kx\, d(kx)$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} x^2\, d\cos kx = -\frac{2}{k\pi} \cdot x^2 \cos kx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} \cos kx\, dx^2 =$$

$$= -\frac{2}{k\pi} \cdot \pi^2 \cdot (-1)^k + \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} 2x \cos kx\, dx =$$

$\boxed{\text{Тук } k \geq 1, \text{ делението на } k \text{ е легално}}$

$$= \frac{2\pi}{k} \cdot (-1) \cdot (-1)^k + \frac{4}{k^2\pi}\int_0^{\pi} x \cos kx\, dkx =$$

$$= \frac{2\pi(-1)^{k-1}}{k} + \frac{4}{k^2\pi}\int_0^{\pi} x\, d\sin kx = \frac{2\pi(-1)^{k-1}}{k} + \underbrace{\frac{4}{k^2\pi} \cdot x \sin kx\Big|_0^{\pi}}_{0} -$$

$$- \frac{4}{k^2\pi}\int_0^{\pi} \sin kx\, dx = (-1)^{k-1} \cdot \frac{2\pi}{k} - \frac{4}{k^3\pi}\int_0^{\pi} \sin kx\, d(kx) =$$

$$= (-1)^{k-1}\frac{2\pi}{k} + \frac{4}{k^3\pi}\cos kx\Big|_0^{\pi} = (-1)^{k-1}\frac{2\pi}{k} + \frac{4}{k^3\pi}\left((-1)^k - 1\right)$$

При k-четно, $b_k = -\frac{2\pi}{k}$

При k-нечетна, $b_k = \frac{2\pi}{k} + \frac{4}{k^3\pi}(-2) = \frac{2k^2\pi^2 - 8}{k^3\pi}$.

За Парсевал $\langle f, f \rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x|x|)^2 dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^4}{5}$.

$$\Rightarrow \frac{2\pi^4}{5} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \sum_{k\text{-четно}} \frac{4\pi^2}{k^2} + \sum_{k\text{-нечетно}} \left(\frac{2k^2\pi^2-8}{k^3\pi}\right)^2 .$$

$$= 4\pi^2 \sum_{k\text{-четно}} \frac{1}{k^2} + \sum_{k\text{-нечетно}} \frac{4k^4\pi^4 - 32k^2\pi^2 + 64}{k^6\pi^2} =$$

$$= 4\pi^2 \sum_{k\text{-четно}} \frac{1}{k^2} + 4\pi^2 \sum_{k\text{-нечетно}} \frac{1}{k^2} - 32 \sum_{k\text{-нез.}} \frac{1}{k^4} + \frac{64}{\pi^2} \sum_{k\text{-нез.}} \frac{1}{k^6}$$

Първите се допълват до $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, което е $\pi^2/6$.

$\sum_{k\text{-нез.}} \frac{1}{k^4}$ пресметнахме в а), че е $\pi^4/96$.

$$\cancel{\Rightarrow \frac{2\pi^4}{5} = 4\pi^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} - 32\frac{\pi^4}{96} + \frac{64}{\pi^2} \sum_{k\text{-нез.}} \frac{1}{k^6}}$$

$$\cancel{\Rightarrow \sum_{k\text{-нез.}} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{2\pi^4}{5} = \frac{\pi^6}{160}}$$

$$\frac{2\pi^4}{5} = 4\pi^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} - 32 \cdot \frac{\pi^4}{96} + \frac{64}{\pi^2} \sum_{k\text{-нез.}} \frac{1}{k^6} .$$

$$\Rightarrow \sum_{k\text{-нез.}} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^2}{64}\left(\frac{2\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{3} + \frac{\pi^4}{3}\right) = \frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^6}{960} .$$

Последното може да се ползва да се намери $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}$.

Ясно е, че този ред е сходящ и нека $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}$.

Делим почленно с 2^6:

$$\frac{S}{64} = \frac{S}{2^6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} \cdot \frac{1}{2^6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^6} = \sum_{k\text{-четно}} \frac{1}{k^6} .$$

Но $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \sum_{k\text{-четно}} \frac{1}{k^6} + \sum_{k\text{-нечетно}} \frac{1}{k^6} = \frac{S}{64} + \sum_{k\text{-нез.}} \frac{1}{k^6}$

Намерихме последното, че е $\pi^6/960$. Решаваме линейно уравнение за S

$$\frac{63}{64} S = \frac{\pi^6}{960} \Rightarrow S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{64}{63} \cdot \frac{\pi^6}{960} = \boxed{\frac{\pi^6}{945}}$$

б) $f(x) = |\sin 2x|$ е четна $\Rightarrow b_k = 0$ за всяко $k \in \mathbb{N}$.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin 2x| \cdot \cos kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin 2x| \cdot \cos kx\, dx$$ от четност.

По нататък $\sin 2x \geq 0$ за $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ и $\sin 2x < 0$ за $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$.

$$\Rightarrow a_k = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos kx\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\sin 2x) \cos kx\, dx\right).$$

Преобразуване произведение към сума:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(\sin(2+k)x + \sin(2-k)x)\, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2}(\sin(2+k)x + \sin(2-k)x)\, dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} (\sin(k+2)x - \sin(k-2)x)\, dx + \int_{\pi}^{\pi/2} (\sin(k+2)x - \sin(k-2)x)\, dx\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \sin(k+2)x\, dx + \int_{\pi}^{\pi/2} \sin(k+2)x\, dx - \int_0^{\pi/2} \sin(k-2)x\, dx - \int_{\pi}^{\pi/2} \sin(k-2)x\, dx\right]$$

За $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ имаме: (при $m = 0$, $I_0 = 0$).

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin(mx)\, dx + \int_{\pi}^{\pi/2} \sin(mx)\, dx = \frac{1}{m}\left(\int_0^{\pi/2} \sin(mx)\, dmx + \int_{\pi}^{\pi/2} \sin(mx)\, dmx\right)$$

$$= \frac{1}{m}\left(-\cos(mx)\Big|_0^{\pi/2} - \cos(mx)\Big|_{\pi}^{\pi/2}\right) =$$

$$= \frac{1}{m}\left(-\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) + \cos 0 - \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) + \cos(m\pi)\right) =$$

$$= \frac{1}{m}\left(1 + (-1)^m - 2\cos\frac{m\pi}{2}\right).$$

За m - нечетно, $\cos\frac{m\pi}{2} = 0$ и $1 + (-1)^m = 0$ т.е. цялата сума е 0.

За $m = 2l$, $\cos\frac{m\pi}{2} = \cos(l\pi) = (-1)^l$.

$$\Rightarrow \frac{1}{m}\left(1 + (-1)^m - 2\cos\frac{m\pi}{2}\right) = \frac{1}{m}\left(2 - 2(-1)^l\right)$$

За l - четно, последното е 0

За l - нечетно, последното е $\frac{4}{m}$.

Окончателно $I_m = \begin{cases} \frac{4}{m}, & m \text{ се дели на } 2, \text{ но не и на } 4 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ (това важи и за $m = 0$).

$a_k = \frac{1}{\pi}(I_{k+2} - I_{k-2})$

Ако k - нечетно, то $k+2$, $k-2$ - нечетни и $I_{k+2} = I_{k-2} = a_k = 0$.

Ако k не се дели на 4 и k - четно, то $k \equiv 2 (4)$

и $k+2$ и $k-2$ се делят на 4 $\Rightarrow I_{k+2} = I_{k-2} = a_k = 0$.

Накрая за k, кратно на 4,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{k+2} - \frac{4}{k-2}\right) = \frac{4(k-2) - 4(k+2)}{\pi(k+2)(k-2)} = \frac{-16}{\pi(k^2-4)} = \frac{16}{\pi(4-k^2)}.$$

В частност, $a_0 = \frac{16}{4\pi} = \frac{4}{\pi}$.

Тогава редът на Фурие е:

$$|\sin 2x| = \frac{2}{\pi} + \sum_{\substack{4/k \\ k \in N}} \frac{16}{\pi(4-k^2)} \cos(kx)$$

Парсевал: $\langle |\sin 2x|, |\sin 2x| \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2x \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 2x \, dx =$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4}\cdot\int_0^{\pi} \cos 4x \, d4x$$

$$= 1 - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\cdot \sin 4x \Big|_0^{\pi}}_{0} = 1.$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \sum_{\substack{4/k \\ k \in N}} \left(\frac{16}{\pi(4-k^2)}\right)^2 = \frac{2}{\pi^2} + \frac{256}{\pi^2} \cdot \sum_{4/k} \frac{1}{(k^2-4)^2}.$$

Заменяме в последната сума $k = 4n$, $4/k \Leftrightarrow n \in N$.

$$1 = \frac{2}{\pi^2} + \frac{256}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((4n)^2-4)^2} = \frac{2}{\pi^2} + \frac{\overset{16}{\cancel{256}}}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cancel{16}(4n^2-1)^2}.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \left(-\frac{2}{\pi^2}\right)\cdot\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{8} = \frac{\pi^2 - 2}{16}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \ldots = \frac{\pi^2 - 2}{16}}$$

г) $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx.$

при $k=0$, $a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$

при $k>0$, по части:

$$a_k = \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dkx = \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi} x\,d\sin kx = \underbrace{\frac{1}{k\pi}\cdot x\cdot\sin kx\Big|_0^{\pi}}_{0} - \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx$$

$$= -\frac{1}{k^2\pi}\int_0^{\pi}\sin kx\,dkx = \frac{1}{k^2\pi}\cdot\cos kx\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{k^2\pi}\left((-1)^k-1\right) = \begin{cases}0, & k\text{-четно}\\ \frac{2}{k^2\pi}, & k\text{-неч.}\end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx = -\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi} x\,d\cos kx =$$

$$-\frac{1}{k\pi}\cdot x\cdot\cos kx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\left(\pi(-1)^k\right) + \frac{1}{k^2\pi}\int_0^{\pi}\cos kx\,dkx =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \underbrace{\frac{1}{k^2\pi}\cdot\sin kx\Big|_0^{\pi}}_{0} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

$$f(x) = \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{a_0/2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2\pi}\left((-1)^k-1\right)\cos kx + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin kx\right).$$

Парсевал: $\langle f, f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}.$

$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \sum_{k\text{-неч.}}\left(\frac{2}{k^2\pi}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)^2$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k\text{-неч}}\frac{1}{k^4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^4}{96} + \frac{\pi^2}{6} = \pi^2\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi^2(3+1+4)}{24} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Това не ни дава ново тъждество.

Развитието на $f(x)$ може да се намери и по друг начин.

Да забележим, че $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$.

Тогава f е линейна комбинация на $|x|$ и x.

$|x|$ развихме в а),

x се развива по синуси като нечетна функция,

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin kx\,dx$$ – точно този интеграл сметнахме и по другия начин.

Да отбележим за пълнота, че

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{k} \sin kx$$

Тъждеството на Парсевал тук ни дава

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^{k-1}}{k}\right)^2 = 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{4\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(което ползвахме наготово по-рано).