Пр. (група) $\mathbb{N}$; $+, \cdot$ не е група
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$; $+$ – група
$(\{1, -1\}, \cdot)$ – група
$\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \mathbb{R}\setminus\{0\}, \mathbb{C}\setminus\{0\}$ – група отн. $\cdot$

Пр. X – множ. ; $S(X) = \{ f : X \to X \mid f \text{ – биекция} \}$

$f, g \in S(X) \Rightarrow f \circ g \in S(X)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

$z \in X$
f – сюр. $\to \exists y \in X : f(y) = z$
g – сюр. $\to \exists x \in X : g(x) = y$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(y) = z$
$\Rightarrow f \circ g$ – сюр.

Зab. f – инекц. $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)) \Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$
(~~[illegible]~~).

Оп: $f: X \to Y$

1) $f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \} \subseteq Y$ множ. от образите на ел. на X

2) $y = f(x)$ y - образ на x

3) $y \in Y$ $f^{-1}(y) = \{ x \in X \mid f(x) = y \}$ - праобраз на y

4) $Z \subseteq Y$ $f^{-1}(Z) = \{ x \in X \mid f(x) \in Z \} \subseteq X$ праобраз на Z

$\left(f^{-1}(Z) = \bigcup_{y \in Z} f^{-1}(y) \right)$

$f \circ g$ - инект.: Нека $x_1, x_2 \in X$: $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$

$\Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \xRightarrow{f\text{-инект.}} g(x_1) = g(x_2) \xRightarrow{g\text{-инект.}} x_1 = x_2$

$\Rightarrow f \circ g$ - инект.

<u>Зад.</u> $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to T$

$\Rightarrow (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

$\Rightarrow \circ$ в $S(X)$ е асоц.

$id_X: X \to X$; $\forall x \in X$ $id_X(x) = x$ – единичен ел.

f - биекция $\Rightarrow f$ - обратимо $\Rightarrow \exists f^{-1}: X \to X:$ $\begin{cases} f \circ f^{-1} = id_X \\ f^{-1} \circ f = id_X \end{cases}$

$\to f^{-1}$ е обратимо $((f^{-1})^{-1} = f) \Rightarrow f^{-1}$ - биекция $(\in S(X))$

$\Rightarrow (S(X), \circ)$ - група

не е абелева

$X = \{1, 2, 3\}$

$f \backslash X$	1	2	3
id	1	2	3
f	1	3	2
	2	1	3
g	2	3	1
	3	1	2
	3	2	1

пермутациите на $\{1, 2, 3\}$

$(f \circ g)(1) = 3$

$(g \circ f)(1) = 2$ H

$|S(X)| = 6 = 3!$

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ $\quad S_n := S(X)$ - група от пермутациите на $1, 2, \dots, n$

Пр (Примери) $\mathbb{N}$ - не; $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ - да

<u>Опр.</u> $(R, +, \cdot)$ – пръстен

1) R – комутативен, ако $\forall a, b \in R \quad ab = ba$

2) R – пръстен с 1, ако $\exists e \in R : \forall a \in R \quad a \cdot e = e \cdot a = a$

3) $a \neq 0, a \in R$ – ляв/десен делител на 0-та, ако $\exists b \in R, b \neq 0 :$
$ab = 0 \;/\; ba = 0$

4) R – област на цялост, ако R е комутативен пръстен с 1 без делители на 0
(от $ab = 0 \rightarrow a = 0$ или $b = 0$)

5) R – пр. с 1; $a \in R$ – обратим, ако $\exists b \in R : ab = ba = 1$

6) R – тяло, ако R е пр. с 1 и всеки ненулев ел. е обратим

7) R е поле, ако е комутативно тяло (комутативен пръстен с 1, в който всеки ненулев ел. е обратим)

Пр. $\mathbb{Z}$ - област; $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ - полета

Пр. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ - поле

Опр. F - поле $(F, +, \cdot)$. Казваме, че K е подполе на F $(K \leq F)$, ако $K \subseteq F$ и K е поле относно операциите на F ($(K, +, \cdot)$ е поле).
F се нарича разширение на K

Опр. $(G, *)$ - група. Казваме, че H е подгрупа на G, ако $(H, *)$ е група и $H \subseteq G$

$\underline{\text{Tl.}}$ $H \leq G \iff \left| \begin{array}{l} H \subseteq G \\ h_1 h_2, e, h^{-1} \in H \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} H \subseteq G \\ h_1 h_2, h^{-1} \in H \end{array} \right.$

$(\forall h_1, h_2, h \in H)$

$\Rightarrow$ Jasne

$\Leftarrow$ $h \in H \to h^{-1} \in H$

$\to \underline{h}\,\underline{h}^{-1} = e \in H$

$\iff \left| \begin{array}{l} H \subseteq G \\ \forall h_1, h_2 \in H \quad h_1^{-1} h_2 \in H \end{array} \right.$

$(h_1 h_2^{-1} \in H)$

$(\Rightarrow)$ $h_2 \in H \Rightarrow h_2^{-1} \in H \Rightarrow h_1 h_2^{-1} \in H$

$(\Leftarrow)$ $h_1 = h_2 \Rightarrow e \in H$

$h_1 = h,\ h_2 = e \to h^{-1} \in H$

$h_1 = h_1,\ h_2 = h_2^{-1} \to h_1 (h_2^{-1})^{-1} = h_1 h_2 \in H$

Забел. $(G, +)$

$$H \le G \iff \left|\begin{array}{l} H \subseteq G \\ h_1 + h_2,\ 0,\ -h \in H \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} H \subseteq G \\ h_1 + h_2,\ -h \in H \end{array}\right.$$

$$\iff \left|\begin{array}{l} H \subseteq G \\ h_1 - h_2 \in H \end{array}\right.$$

$$h_1 - h_2 = h_1 + (-h_2) \leftrightarrow h_1 h_2^{-1}$$

Тв $K \le F$ (подполе) $\iff \left|\begin{array}{l} K \subseteq F \\ k_1 - k_2,\ k_1 k_2,\ 1,\ k^{-1}\ (k \neq 0) \in K \end{array}\right.$

$$\iff \left|\begin{array}{l} K \subseteq F \\ k_1 - k_2,\ k_1 k_2,\ k^{-1}\ (k \neq 0) \in K \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} K \subseteq F \\ k_1 - k_2,\ k_1 k_2^{-1} \in K \ (k_2 \neq 0) \end{array}\right.$$

Забел. F - поле; $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ - група

Пр. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ - поле

- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ - поле)

- $A = a + b\sqrt{2}$, $B = c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
  $(a, b, c, d \in \mathbb{Q})$

  $A - B = (a - c) + (b - d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
  $(\ldots)$ $a - c, b - d \in \mathbb{Q}$

- $AB = \underline{ac + 2bd} + (\underline{ad + bc})\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

- $A \neq 0 \iff (a, b) \neq (0, 0)$
  $\Big(a + b\sqrt{2} = 0 \longrightarrow \sqrt{2} = -\frac{a}{b} \notin$ (за $b \neq 0$)
  $\longrightarrow b = 0 \longrightarrow a = 0 \Big)$

$$A^{-1} = \frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{1}{a+b\sqrt{2}} \cdot \underset{(!!!\exists)}{\frac{a-b\sqrt{2}}{a-b\sqrt{2}}} = \frac{a}{\underbrace{a^2-2b^2}_{\neq 0}} + \frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

$\in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \underset{(\text{подполе})}{\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \leq \mathbb{R}} \quad \Rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}) - \text{поле}$$

Пр $K = \{\overset{0}{a}, \overset{1}{b}\}$

$+$	a	b
a	a	b
b	b	a

$\cdot$	a	b
a	a	a
b	a	b

$\Big\}$ поле

$\mathbb{C}$:

- поле
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
- $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$

  $(i : x^2 = -1)$

} минимално с тези свойства

$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}, +, \cdot$$

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$

$$(a+ib)(c+id) = ac + (ad+bc)i + bd\underbrace{i^2}_{=-1} =$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Това трябва да бъдат „естествените" операции в $\mathbb{C}$

Проверява се, че е поле

$a+ib=0 \iff a=b=0$

$(a,b)\neq(0,0)$ $\quad (a+ib)^{-1} = \dfrac{1}{a+ib}\cdot\dfrac{a-ib}{a-ib} =$

$(\exists)$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\, i$$

$\dfrac{A}{B} = A\cdot B^{-1} \quad (B\neq 0)$

$0,\ 1,\ -(a+ib) = (-a)+i(-b)$

$z = a+ib$ – алгебричен вид на компл. число

$\bar{z} = a-ib$ – комплексно спрегнато на z

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ – модул (дължина) $\left(z\cdot\bar{z} = |z|^2\right)$

$\operatorname{Re} z = a$ – реална част; $\operatorname{Im} z = b$ – имагинерна част

Зад. Грешно $\quad \mathrm{Im}(1+i) = i$ — не ; $\mathrm{Im}(1+1i) = 1$

$|1+i| = 1+i^2 = 0$ — не ; $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Зад. $\mathbb{C}$ — строго $\quad \mathbb{C} = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$$(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd,\ ad + bc)$$

$$i := (0,1) \ ; \quad i^2 = (-1,0) \ ; \quad (0,b) = (b,0)\cdot(0,1)$$

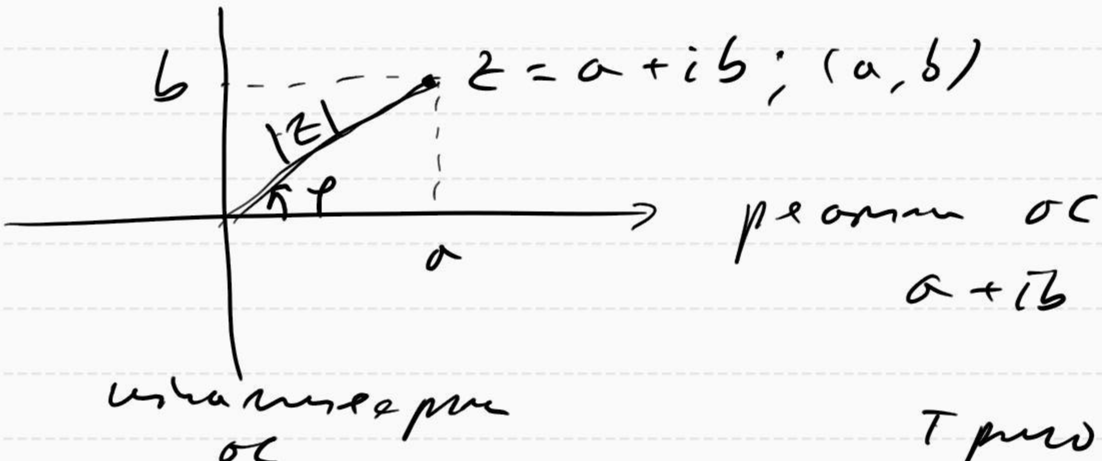
$$\mathbb{R}_0 = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\} \xleftrightarrow{\text{биекция}} \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} (a',0) \longleftrightarrow a' \\ (a'',0) \longleftrightarrow a'' \end{array}\right\} \rightleftarrows \left\{\begin{array}{l} (a',0)+(a'',0) \leftrightarrow a'+a'' \\ (a',0)\cdot(a'',0) \leftrightarrow a'a'' \end{array}\right.$$

Проверете!

„Отъждествяване" $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_0$ $\quad (a = (a,0))$

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + bi$$



$$\begin{cases} a = |z| \cos \varphi \\ b = |z| \sin \varphi \end{cases}$$

$$a + ib = \underbrace{|z|}_{\mathbb{R}, \geq 0}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Тригонометричен вид

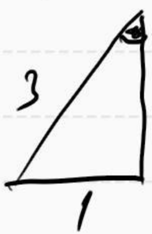
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad ; \quad \varphi : \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin \varphi = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

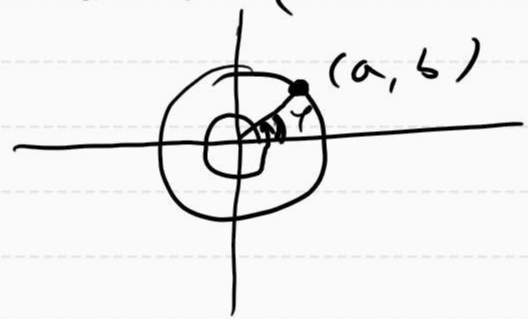
Факт $\left|\begin{array}{l}\cos\varphi = \cos\theta \\ \sin\varphi = \sin\theta\end{array}\right. \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = \varphi + 2k\pi$

$\left|\begin{array}{l}\cos\varphi = a \\ \sin\varphi = b\end{array}\right.$ — НУ е $a^2+b^2=1$

— Ако $a^2+b^2=1$ $(-1 \le a, b \le 1)$

Контр. $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$





$\cos\varphi = a$
$\sin\varphi = b$

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ φ — аргумент (определен с точност 2π)

$(\varphi \in [0, 2\pi)$; $\varphi \in [-\pi, \pi))$

Означение $e^{i\boxed{\varphi}} = \cos\boxed{\varphi} + i\sin\boxed{\varphi}$

<u>Св-ва</u> (проверяват се)

- $e^{i\varphi} \cdot e^{i\theta} = e^{i(\varphi+\theta)}$
- $(e^{i\varphi})^{-1} = e^{i(-\varphi)}$
- $\forall n \in \mathbb{Z} \quad (e^{i\varphi})^{n} = e^{i(n\varphi)}$
- $(r_1 e^{i\varphi})(r_2 e^{i\theta}) = (r_1 r_2)\, e^{i(\varphi+\theta)}$
- $\dfrac{r_1 e^{i\varphi}}{r_2 e^{i\theta}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi-\theta)}$
- $(re^{i\varphi})^{n} = r^{n} e^{i(n\varphi)} \quad (n \in \mathbb{Z})$ формула на Моавър за степенуване

- $|e^{i\varphi}| = 1$

- $|z| = 1 \Leftrightarrow \exists \varphi : e^{i\varphi} = z$

- $? x : x^n = r e^{i\varphi}$

Ищем $\underline{\underline{x}}$ в виде $x = \rho e^{i\theta}$

$$x^n = \rho^n e^{i(n\theta)}$$

Зам $\rho_1 e^{i\varphi_1} = \rho_2 e^{i\varphi_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \exists k \in \mathbb{Z} : \varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi \end{cases}$

$$\begin{cases} \rho^n = r \to \rho = \sqrt[n]{r} \quad (\rho, r \geq 0) \\ \exists k \in \mathbb{Z} : n\theta = \varphi + 2k\pi \to \theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

$\theta_k := \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$; $x_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\theta_k}$, $k \in \mathbb{Z}$

$(x_k^n = z)$

$$\theta_{k+sn} = \frac{\varphi + 2(k+sn)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + 2s\pi = \theta_k + 2s\pi \qquad s \in \mathbb{Z}$$

$$x_{k+sn} = x_k$$

Можем да разгл. само x_k за $k = 0, \to n-1$

Ако $0 \le k, l \le n-1$, то $x_k \neq x_l$

(Ако $x_k = x_l \Rightarrow \exists s \in \mathbb{Z}$ $\theta_k = \theta_l + 2s\pi$

$\Rightarrow \dfrac{\cancel{\varphi}+2k\pi}{n} = \dfrac{\cancel{\varphi}+2l\pi}{n} + 2s\pi \Rightarrow k = l + sn$

$\Rightarrow n$ дели $k-l$. Но $|k-l| < n \Rightarrow k-l = 0 \Rightarrow k = l$)

<u>Опр.</u> $x_0, \dots, x_{n-1}$ — n-ти-те корени на z

$$\left(z = re^{i\varphi};\ \theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},\ x_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\theta_k}\right)$$

Ако $z = 1 = 1 . e^{i0}$, то $\theta_k = \frac{2k\pi}{n}$, $x_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

за $k = 0, \dots, n-1$ — n-ти корени на 1.

Означаваме ги с ω_k

<u>Заб.</u> $z = re^{i\varphi}$, $\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$, $x_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\theta_k}$

$$x_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = \underbrace{\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{n}}} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{n}} = x_0 \omega_k$$

$\underline{\omega_k = \omega_1^k}$; $x_k = x_0 \omega_1^k$

<u>Заб.</u> Всички n-ти корени на 1 са $\omega_1^0 = 1, \omega_1, \omega_1^2, \dots, \omega_1^{n-1}$

Опр. ξ — примитивен $n^{\text{ти}}$ корен на 1, ако

ξ е $n^{\text{ти}}$ корен на 1 ($\xi^n = 1$) и

$\xi^0 = 1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}$ са $\forall$ $n^{\text{ти}}$ корени на 1

Пр. $n = 4$ примитивни са $\pm i$

$n = 6$ — — — $k = 1, 5$

Опр. $F \leq \mathbb{C}$ (подполе) — числово поле

Зад. $F \leq \mathbb{C} \iff \begin{cases} \forall a, b \in F & a - b \in F \\ \forall a, b \in F & ab \in F \\ \forall a \in F, a \neq 0 & a^{-1} \in F \end{cases}$