ЗАДАЧИ ОТ ИЗПИТИ

1 зад. Спрямо координатна система в E_2^* са дадени точките:
$A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $O(0, 0, 1)$, $E(1, 1, 1)$ и точките $O'(-2, 2, 1)$, $E'(-3, 1, 1)$.
Нека $\boldsymbol{\varphi}$ е линейната трансформация на E_2^*, която изобразява точките A, B, O и E съответно в B, A, O' и E'.
a) Да се намери аналитично представяне на $\boldsymbol{\varphi}$;
b) Да се определят неподвижните точки и неподвижните прави на $\boldsymbol{\varphi}$.

2 зад. Спрямо дадена координатна система в разширената евклидова равнина E_2^* да се намери аналитично представяне на линейната трансформация φ, която изобразява точките $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $O(0, 0, 1)$, $E(1, 1, 1)$ съответно в точките:
$A'(-3, 4, 0)$, $B'(4, 3, 0)$, $O'(8, -4, 5)$, $E'(9, 3, 5)$. Да се определят неподвижните точки и неподвижните прави под действие на φ. Да се докаже, че φ е афинна трансформация.

3 зад. Спрямо дадена координатна система в разширената евклидова равнина E_2^* да се намери аналитично представяне на линейната трансформация φ, която изобразява точките $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $O(0, 0, 1)$, $E(1, 1, 1)$ съответно в точките:
$A'(3, 4, 0)$, $B'(4, -3, 0)$, $O'(-4, 8, 5)$, $E'(3, 9, 5)$. Да се определят неподвижните точки и неподвижните прави под действие на φ. Да се докаже, че φ е афинна трансформация.

4 зад. Спрямо координатна система в E_2^* са дадени точките:
$A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $O(0, 0, 1)$, $E(1, 1, 1)$ и точките $O'(3, -3, 1)$, $E'(4, -2, 1)$.
Нека $\boldsymbol{\varphi}$ е линейната трансформация на E_2^*, която изобразява точките A, B, O и E съответно в A', B', O' и E'.
a) Да се намери аналитично представяне на $\boldsymbol{\varphi}$;
b) Да се определят неподвижните точки и неподвижните прави на $\boldsymbol{\varphi}$.

5 зад. Спрямо дадена координатна система в разширената евклидова равнина E_2^* да се намери аналитично представяне на линейната трансформация φ, която изобразява точките $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $O(0, 0, 1)$, $E(1, 1, 1)$ съответно в точките:
A, B, $O'(4, 4, 1)$, $E'(3, 3, 1)$. Да се определят неподвижните точки и неподвижните прави под действие на φ.

6 зад. Спрямо дадена координатна система в разширената евклидова равнина E_2^* да се намери аналитично представяне на линейната трансформация φ, която изобразява точките $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $O(0, 0, 1)$, $E(1, 1, 1)$ съответно в точките:
A, B, $O'(2, -4, 1)$, $E'(1, -5, 1)$. Да се определят неподвижните точки и неподвижните прави под действие на φ.

7 зад. Спрямо дадена координатна система в разширената евклидова равнина E_2^* са дадени точките: $A(1,0,0), B(0,1,0), O(0,0,1), E(1,1,1)$ и точките
$A'(2,1,0), B'(1,2,0), E'(3,3,1)$.
Да се намери аналитично представяне на линейната трансформация $\boldsymbol{\phi}$ на E_2^* под действие, на която точките A, B, E и O се изобразяват съответно A', B', O, E'.
Да се определят неподвижните точки и прави на $\boldsymbol{\phi}$.

8 зад. Спрямо дадена координатна система в разширената евклидова равнина E_2^* са дадени точките: $A(1,0,0), B(0,1,0), O(0,0,1), E(1,1,1)$ и точките $A'(3,2,0), B'(2,3,0), E'(5,5,1)$.
Да се намери аналитично представяне на линейната трансформация $\boldsymbol{\phi}$ на E_2^* под действие, на която точките A, B, E и O се изобразяват съответно A', B', O, E'.
Да се определят неподвижните точки и прави на $\boldsymbol{\phi}$.

9 зад. В разширеното евклидово пространство E_3^* са дадени точката $\boldsymbol{M}(2,-1,0,1)$ и правата $\boldsymbol{a}$ с уравнения:

$$\boldsymbol{a}:\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = \lambda + 3\mu \\ t = 3\lambda + 2\mu \end{cases}.$$

a) Да се намерят координатни параметрични уравнения на правата $\boldsymbol{b}$, която е успоредна на правата $\boldsymbol{a}$ и минава през точката $\boldsymbol{M}$;
b) Да се намери общо уравнение на равнината $\boldsymbol{\beta}$, определена от правите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;
c) Да се намери аналитично представяне на централното проектиране ψ на $E_3^*\backslash S$ върху равнината $\boldsymbol{\beta}$, ако центъра $S(3,2,1,0)$.

10 зад. В разширеното евклидово пространство E_3^* са дадени точката $\boldsymbol{M}(1,0,2,1)$ и правата $\boldsymbol{a}$ с уравнения:

$$\boldsymbol{a}:\begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu \\ y = \lambda - 2\mu \\ z = -\lambda - \mu \\ t = 3\lambda + \mu \end{cases}.$$

a) Да се намерят координатни параметрични уравнения на правата $\boldsymbol{b}$, която е успоредна на правата $\boldsymbol{a}$ и минава през точката $\boldsymbol{M}$;
b) Да се намери общо уравнение на равнината $\boldsymbol{\beta}$, определена от правите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;
c) Да се намери аналитично представяне на централното проектиране ψ на $E_3^*\backslash S$ върху равнината $\boldsymbol{\beta}$, ако центъра $S(1,2,3,0)$.

11 зад. В разширеното евклидово пространство E_3^*, в хомогенни координати са дадени точките: $A(2,1,1,1), B(3,0,-1,2), M(1,-1,-1,1), N(2,-1,0,0), P(1,-1,-1,0)$.

a) Да се намерят координатите на U_{AB} – безкрайната точка на правата AB;
b) Да се намери уравнение на равнината $\boldsymbol{\alpha}$, която минава през точките $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{P}$;
c) Да се намери аналитично представяне на централното проектиране $\boldsymbol{\psi}$ на E_3^* върху равнината $\boldsymbol{\alpha}$, с център точката $\boldsymbol{U_{AB}}$.

12 зад. В разширеното евклидово пространство E_3^*, в хомогенни координати са дадени точките: $M(2,3,1,1), N(2,4,4,1), P(2,0,2,-1), Q(0,1,1,-1)$.
a) Да се намери общо уравнение на равнината $\boldsymbol{\gamma}$, която съдържа правата PQ и е успоредна на правата MN;
b) Да се намери аналитично представяне на **ортогоналното** проектиране $\boldsymbol{\psi}$ на E_3^* върху равнината $\boldsymbol{\gamma}$.

13 зад. В разширеното евклидово пространство E_3^*, в хомогенни координати са дадени точката $M(1,1,3,1)$ и правата $a:\begin{cases} x - z = 0 \\ x - y - t = 0 \end{cases}$.

a) Да се намерят уравнения на правата **b**, която минава през точката $\boldsymbol{M}$ и е успоредна на правата $\boldsymbol{a}$;
b) Да се намери уравнение на равнината $\boldsymbol{\beta}$, която минава през успоредните прави $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;
c) Да се намери аналитично представяне на **ортогонално** проектиране $\boldsymbol{\psi}$ на E_3^* върху равнината $\boldsymbol{\beta}$.

14 зад. В разширеното евклидово пространство E_3^* са дадени точките:
$A(1,0,1,1), B(0,1,1,1), M(-1,3,0,1)$ и $N(-4,7,-2,3)$.

a) Да се намерят координатите на безкрайната точка U_{MN} на правата MN;
b) Да се намери общо уравнение на равнината $\boldsymbol{\alpha}$, която съдържа правата AB и е успоредна на правата MN;
c) Да се намери аналитично представяне на централното проектиране $\boldsymbol{\psi}$ на E_3^* върху равнината $\boldsymbol{\alpha}$ с център точката $S(2,0,2,1)$.

15 зад. В разширеното евклидово пространство E_3^* са дадени точките: $A(2,0,1,-1), B(1,-2,0,2), M(2,-1,2,1)$ и $N(1,-2,2,2)$.

a) Да се намерят координатите на безкрайната точка $\mathrm{U_{MN}}$ на правата MN;
b) Да се намери общо уравнение на равнината $\boldsymbol{\alpha}$, която съдържа правата AB и е успоредна на правата MN;
c) Да се намери аналитично представяне на централното проектиране $\boldsymbol{\psi}$ на E_3^* върху равнината $\boldsymbol{\alpha}$ с център точката $S(2,2,0,1)$.

16 зад. В разширеното евклидово пространство E_3^* , в хомогенни координати са дадени точката: $M(0,1,1,-1)$ и правата a: $\begin{cases} z - x = 0 \\ z - y - t = 0 \end{cases}$.

a) Да се намерят уравнения на правата **b**, която минава през точката $\boldsymbol{M}$ и е успоредна на правата $\boldsymbol{a}$;
b) Да се намери уравнение на равнината $\boldsymbol{\beta}$, която минава през успоредните прави $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;
c) Да се намери аналитично представяне на **ортогонално** проектиране $\boldsymbol{\psi}$ на E_3^* върху равнината $\boldsymbol{\beta}$.

17 зад. В разширеното евклидово пространство E_3^*, в хомогенни координати са дадени точките: $M(2,3,1,1), N(3,3,2,1), P(1,3,1,1), Q(0,2,1,0)$.

a) Да се намери общо уравнение на равнината $\boldsymbol{\gamma}$, която съдържа правата PQ и е успоредна на правата MN;
b) Да се намери аналитично представяне на **ортогоналното** проектиране $\boldsymbol{\psi}$ на E_3^* върху равнината $\boldsymbol{\gamma}$.

18 зад. В разширеното евклидово пространство E_3^* , в хомогенни координати са дадени точките:
$A(2,1,1,1), B(3,0,-1,2), M(1,-1,-1,1), N(1,0,1,0), P(0,1,2,0)$.

a) Да се намерят координатите на U_{AB} – безкрайната точка на правата AB;
b) Да се намери уравнение на равнината $\boldsymbol{\alpha}$, която минава през точките $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{P}$;
c) Да се намери аналитично представяне на централното проектиране $\boldsymbol{\psi}$ на E_3^* върху равнината $\boldsymbol{\alpha}$, с център точката $\boldsymbol{U_{AB}}$.

19 зад. В разширеното евклидово пространство E_3^* , в хомогенни координати са дадени равнина $\gamma: x + 2y - z - 7t = 0$ и точките $A(2,1,1,1), B(3,0,-1,2), M(1,-1,-1,1)$.

a) Да се намерят координатите на U_{AB} – безкрайната точка на правата AB;

b) Да се намери уравнение на равнината $\boldsymbol{\beta}$, която минава през т.$\boldsymbol{M}$ и през безкрайната права на равнината γ;

c) Да се намери аналитично представяне на централното проектиране $\boldsymbol{\psi}$ на E_3^* върху равнината $\boldsymbol{\beta}$, с център точката $\boldsymbol{U_{AB}}$.

20 зад. В разширеното евклидово пространство E_3^* , в хомогенни координати са дадени равнина $\gamma: x + 2y - z + 3t = 0$ и точките $A(-1, 1, 2, -1), B(4, 5, 7, 1), M(2, -1, 0, 1)$.

a) Да се намерят координатите на U_{AB} – безкрайната точка на правата AB;

b) Да се намери уравнение на равнината $\boldsymbol{\beta}$, която минава през т.$\boldsymbol{M}$ и през безкрайната права на равнината γ;

c) Да се намери аналитично представяне на централното проектиране $\boldsymbol{\psi}$ на E_3^* върху равнината $\boldsymbol{\beta}$, с център точката $\boldsymbol{U_{AB}}$.

21 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ в равнината са дадени правите:

$g_1: x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ и $g_2: \sqrt{3}x - y = 0$

Да се определи вида на ортогоналната трансформация $\varphi = \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2}$.

22 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ в равнината са дадени правите:

$g_1: \sqrt{3}x - y - 2 = 0$ и $g_2: x - \sqrt{3}y = 0$.

Да се определи вида на ортогоналната трансформация $\varphi = \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2}$.

23 зад. Спрямо ОКС $K = Oxy$ в E_2 е дадена еднаквостта $\psi = \tau_{\vec{p}} \circ \sigma_g$. Намерете аналитично представяне на еднаквостта ψ спрямо дадената ОКС, ако $g: 4x - 3y + 1 = 0$, $\vec{p}\left(\frac{4}{25}, \frac{-3}{25}\right)$. Определете вида на еднаквостта ψ.

24 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ в равнината е дадена ортогоналната трансформация:

$\varphi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$. Да се определи вида на φ и да се намери образа на правата $a: x - y + 4 = 0$ под действие на φ.

25 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ в равнината е дадена ортогоналната трансформация:

$\varphi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$. Да се определи вида на φ и да се намери образа на правата $a: x + y - 4 = 0$ под действие на φ.

26 зад. Спрямо ОКС $K = Oxy$ в E_2 е дадена еднаквостта $\psi = \tau_{\vec{p}} \circ \sigma_g$. Намерете аналитично представяне на еднаквостта ψ спрямо дадената ОКС, ако $g: 3x + 4y + 1 = 0$, $\vec{p}\left(\frac{3}{25}, \frac{4}{25}\right)$. Определете вида на еднаквостта ψ.

27 зад. Спрямо ОКС $K=Oxy$ в равнината е дадена ортогоналната трансформация:

$\varphi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} . \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{5} . \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$. Да се определи вида на φ и да се намери образа на правата $a: 3x + y + 4 = 0$ под действие на φ.

28 зад. Спрямо ОКС *К*=*Оxy* в равнината е дадена ортогоналната трансформация:

φ: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$. Да се определи вида на φ и да се намери образа на правата $a: x - y - 2 = 0$ под действие на φ.

29 зад. Спрямо ОКС *К*=*Оxy* в равнината е дадена ортогоналната трансформация:

φ: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} . \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5} . \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$. Да се определи вида на φ и да се намери образа на правата Ox под действие на φ.

30 зад. Спрямо ОКС $K = Oxy$ в E_2 е дадена еднаквостта $\psi = \tau_{\vec{p}} \circ \sigma_g$. Намерете аналитично представяне на ψ, ако $g: x + y - 5 = 0$, $\vec{p}(3,\ 3)$. Определете вида на еднаквостта ψ. Вярно ли е, че $\tau_{\vec{p}} \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \tau_{\vec{p}}$? Намерете образа на правата $m: 3x - 3y + 6 = 0$ под действие на ψ.

31 зад. Спрямо ОКС *К*=*Оxy* в равнината са дадени правите $g_1: x + y - 5 = 0$ и $g_2: x + y = 0$. Определете вида на еднаквостите $\varphi_1 = \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2}$ и $\varphi_2 = \sigma_{g_2} \circ \sigma_{g_1}$. Намерете образа на правата $m: -x + y + 5 = 0$ под действие на φ_1.

32 зад. Спрямо ОКС *К*=*Оxy* в равнината са дадени правите $g_1: x + y - 5 = 0$ и $g_2: x = 0$. Определете вида на еднаквостите $\varphi_1 = \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2}$ и $\varphi_2 = \sigma_{g_2} \circ \sigma_{g_1}$.

33 зад. Спрямо ОКС $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ да се намери аналитично представяне на въртящо отражение $\boldsymbol{\psi}$ с ос на ротация $\boldsymbol{g}$, определена от точките
$A(0, 1, 0)$ и $B(3, 1, -4)$, ъгъл на ротация $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ и равнина на симетрия $\boldsymbol{\alpha}$, минаваща през точката $M(4, 5, 3)$.

34 зад. Спрямо ОКС $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ да се намери аналитично представяне на въртящо отражение $\boldsymbol{\psi}$ с ос на ротация $\boldsymbol{g}$, определена от точките
$A(4, 3, 1)$ и $B(0, 0, 1)$, ъгъл на ротация $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ и равнина на симетрия $\boldsymbol{\alpha}$, минаваща през точката $M(3, -4, 5)$.

36 зад. Спрямо ОКС $K=Oxyz$ в пространството са дадени точките:
$A(2, 1, 3)$ и $B(2, 2, 2)$. Да се намери аналитично представяне на винтово движение $\boldsymbol{\psi}$ с ос на ротация правата AB, ъгъл на ротация $\frac{\pi}{2}$ и вектор на транслация $\vec{p} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BA}$, $|\vec{p}| = \sqrt{2}$.

37 зад. Спрямо ОКС $K=Oxyz$ в пространството са дадени точките:
$M(3, 3, 3)$ и $N(4, 3, 2)$. Да се намери аналитично представяне на винтово движение $\boldsymbol{\psi}$ с ос на ротация правата MN, ъгъл на ротация $\frac{\pi}{2}$ и вектор на транслация $\vec{p} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MN}$, $|\vec{p}| = \sqrt{2}$.

38 зад. Спрямо ОКС $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ да се намери аналитично представяне на осева симетрия относно правата: $g\colon \begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = 0 + 4s,\ s \in \mathbb{R}. \\ z = 1 \end{cases}$

39 зад. Спрямо ОКС $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ да се намери аналитично представяне на осева симетрия относно правата: $g\colon \begin{cases} x = 0 - 4s \\ y = 1 + 3s,\ s \in \mathbb{R}. \\ z = 1 \end{cases}$

40 зад. Спрямо ОКС $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ да се намери аналитично представяне на плъзгащо отражение с равнина на симетрия $\beta\colon 2x - y + 2z - 1 = 0$ под действие, на което т. $P(1, 1, 0)$ се изобразява в т. $P'(0, 3, 2)$.

41 зад. Дадена е линейна трансформация с матрица $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
Докажете, че C е матрица на централно проектиране.
Намерете координатите на проекционния център S и на проекционната равнина γ.

42 зад. Дадена е линейна трансформация с матрица $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 6 \\ -1 & 4 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Докажете, че C е матрица на централно проектиране.
Намерете координатите на проекционния център S и на проекционната равнина γ.

43 зад. Дадена е линейна трансформация с матрица $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & -6 \\ 3 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Докажете, че C е матрица на централно проектиране.
Намерете координатите на проекционния център S и на проекционната равнина γ.

44 зад. Дадена е линейна трансформация с матрица $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Докажете, че C е матрица на централно проектиране.
Намерете координатите на проекционния център S и на проекционната равнина γ.

45 зад. Дадена е линейна трансформация с матрица $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Докажете, че C е матрица на централно проектиране.
Намерете координатите на проекционния център S и на проекционната равнина γ.

46 зад. Дадена е линейна трансформация с матрица $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 3 & 2 & -6 & -6 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Докажете, че C е матрица на централно проектиране.
Намерете координатите на проекционния център S и на проекционната равнина γ.