3. Афинни координати. Афинни координатни системи.

Нека V е векторно пространство и $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}$ са такива линейно независими вектори, че всеки вектор от V се представя като тяхна линейна комбинация. Тогава нареденото множество от вектори $K = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ се нарича база на V.
От това, че $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ са линейно независими следва, че всеки вектор се представя по единствен начин като тяхна линейна комбинация.

Нека $\vec{a} \in V$ и $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + \dots + a_n\vec{e_n}$. Числата от наредената n-орка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ се наричат координати на $\vec{a}$ спрямо наредената база K. Записваме $\vec{a}(a_1, a_2, \dots, a_n)$
Обратно, всяка наредена n-орка числа $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ придава координати на точно един вектор спрямо K.

Пример: Тъй като $\vec{e_1} = 1.\vec{e_1} + 0.\vec{e_2} + \dots + 0.\vec{e_n}$, то координатите на $\vec{e_1}$ спрямо K са $\vec{e_1}(1, 0, 0, \dots, 0)$. На $\vec{e_2}(0, 1, 0, \dots, 0), \dots \vec{e_n}(0, 0, \dots, 0, 1)$

В сила е следната теорема

<u>Теорема.</u> Нека вектор е линейна комбинация на краен брой вектори. Тогава координатите на вектора са същите линейни комбинации от съответните координати на векторите.

Доказателство. Ще извършим доказателството спрямо наредена база $K = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$, т.е. за 2-мерно пространство. В n-мерния случай доказателството е аналогично.

Нека $c = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, като $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$ и $\vec{c}(c_1, c_2)$ спрямо $K \Rightarrow \vec{c} = c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2} = \lambda(a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}) + \mu(b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2})$

$\Rightarrow c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2} = (\lambda a_1 + \mu b_1)\vec{e_1} + (\lambda a_2 + \mu b_2)\vec{e_2}$

Тъй като $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ са линейно независими, то $c_1 = \lambda a_1 + \mu b_1$ и $c_2 = \lambda a_2 + \mu b_2$ (Лема 2).

Например за координатите на сбор, разлика на вектори и т.н имаме $\vec{a} + \vec{b}(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, $\vec{a} - \vec{b}(a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

$\frac{1}{2}\vec{a}\left(\frac{1}{2}a_1, \frac{1}{2}b_1\right)$ ...

Scanned by TapScanner

1. <u>Координати във V_1</u>.

За база във V_1 избираме кой да е ненулев вектор $\vec{e}$. За всеки вектор $\vec{a} \in V_1$ $\exists!$ $\lambda \in \mathbb{R}$: $\vec{a} = \lambda \vec{e}$, λ - координата на $\vec{a}$ спрямо базата $K = \{\vec{e}\}$; $\vec{a}(\lambda)$.

2. <u>Координати във V_2</u>. Нека векторите $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ са неколинеарни и $K = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ е наредена база. Вектор $\vec{a} \in V_2 \Leftrightarrow \vec{a}$ е компланарен с коя да е равнина, компланарна с $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ $\Rightarrow$ $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$. Записваме $\vec{a}(a_1, a_2)$ спрямо K.
Да отбележим, че нулевият вектор $\vec{o}$ има координати $(0,0)$ спрямо всяка база.

3. <u>Координати във V_3</u>. Нека $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ са некомпланарни и $K = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ е наредена база. Тогава за всеки вектор $\vec{a} \in V_3$ $\exists!$ наредена тройка реални числа (a_1, a_2, a_3) : $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$ - $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ - координати на $\vec{a}$ спрямо K.
Ясно е, че спрямо K $\vec{e_1}(1,0,0)$ - имаме $\vec{e_1} = 1.\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + 0\vec{e_3}$.
$\vec{e_2}(0,1,0)$ и $\vec{e_3}(0,0,1)$.

Координатни условия за колинеарност и компланарност на геометрични вектори.

В равнината. Нека спрямо $K = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ векторите $\vec{a}, \vec{b}$ имат координати $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$. Тогава $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \exists (\lambda, \mu) \neq (0,0)$: $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0} \iff$ е изпълнено

$$(1) \left| \begin{array}{l} \lambda a_1 + \mu b_1 = 0 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 = 0 \end{array} \right.$$

(1) е линейна хомогенна система с две уравнения и две неизвестни. Има ненулево решение (λ, μ) точно тогава, когато детерминантата и $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ е нула. Пресмята се

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Пример. 1. Нека $\vec{a}(1,3)$, а $\vec{b}(-2,-6)$. Тогава $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 1.(-6) - (-2.3)$ $= -6 + 6 = 0 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

2. $\vec{a}(1,3)$ и $\vec{c}(2,3)$ – $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 2.3 = -3 \neq 0 \Rightarrow \vec{a} \nparallel \vec{c}$.

3.5.

Аналогично във V_3. Нека спрямо $K=\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са с координати съответно $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ и $\vec{c}(c_1,c_2,c_3)$. Тогава $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни $\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu,\nu)\neq(0,0,0)$:

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=0 \Rightarrow (2)\left|\begin{array}{l}\lambda a_1+\mu b_1+\nu c_1=0\\ \lambda a_2+\mu b_2+\nu c_2=0\\ \lambda a_3+\mu b_3+\nu c_3=0\end{array}\right.$$

(2) е линейна хомогенна система с три уравнения и три неизвестни и има ненулево решение $\Leftrightarrow$ детерминантата ѝ $\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$ е нула.

Пресмятане 1. $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$

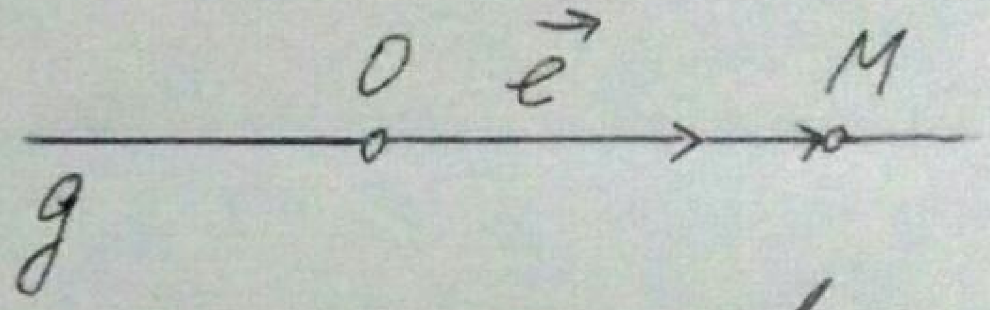
Пример. За $\vec{a}(1,0,1)$, $\vec{b}(0,2,0)$ и $\vec{c}(2,4,2)$ имаме $\begin{vmatrix}1&0&2\\0&2&4\\1&0&2\end{vmatrix}=1.2.2+0.1.4+0.0.2-2.2.1-0.0.2-1.0.4=4-4=0$

$\Rightarrow \vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни.

Scanned by TapScanner

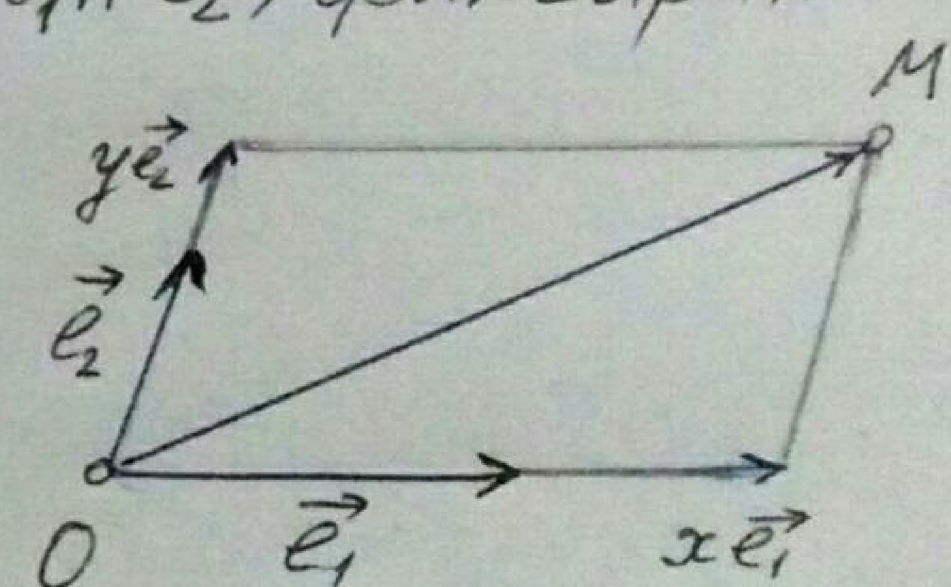
Афинни координатни системи

1. **В права.** Нека g е права, O - точка върху g и $\vec{e}$ е ненулев вектор, колинеарен с g



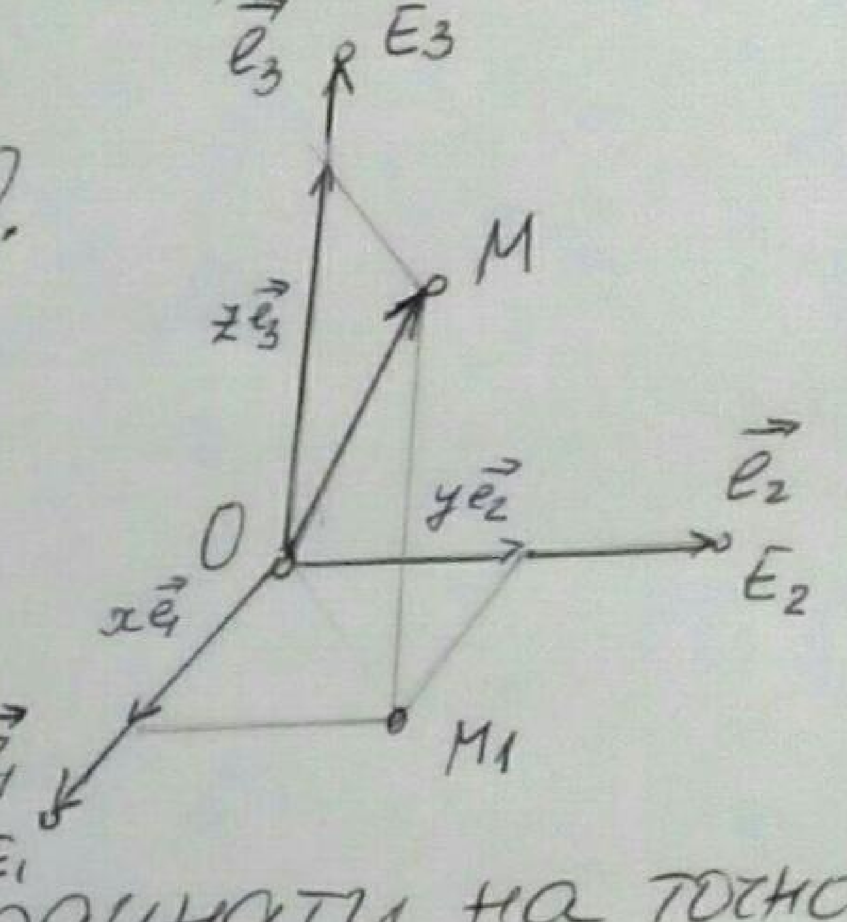
Съвкупността $K=\{O,\vec{e}\}$ се нарича афинна координатна система в g.
За всяка точка M, $M\in g$ $\exists!$ число x, такова че $\overrightarrow{OM}=x\vec{e}$. Това число се нарича координата на M спрямо координатната система K.

2. **В равнина.** Нека α е равнина, $O\in\alpha$ - фиксирана точка в α, а $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ са произволно избрани неколинеарни ($\vec{e_1}\nparallel\vec{e_2}$) фиксирани вектори, компланарни с α.



Съвкупността $K=\{O,\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ се нарича афинна координатна система в α с център O.
За всяка точка $M\in\alpha$ имаме $\overrightarrow{OM}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$.
Наредената двойка числа (x,y) се нарича координати на M спрямо K. Обратно, всяка наредена двойка (x,y) придава координати на точно една точка от α. Векторът $\overrightarrow{OM}$ се нарича радиус вектор на M спрямо K.

3. <u>В пространството</u>. Нека са фиксирани точка O и три произволно избрани ненулеви некомпланарни вектора $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$.



Съвкупността $K = \{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ се нарича афинна координатна система в пространството с център O.

За всяка точка M имаме
$\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$.

Наредената тройка (x, y, z) наричаме координати на M спрямо афинната координатна система K и всяка наредена тройка числа (x, y, z) придава координати на точно една точка в пространството.

Ясно е, че координатите на O са $(0, 0, 0)$.

Векторът $\overrightarrow{OM}$ наричаме радиус вектор на M.

Нека точките E_1, E_2 и E_3 са такива, че $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e_1}$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e_2}$, $\overrightarrow{OE_3} = \vec{e_3}$.

Тогава спрямо K те имат съответно координати

$E_1(1, 0, 0)$, $E_2(0, 1, 0)$ и $E_3(0, 0, 1)$.