2. Множества

Съдържание: Множество деф., аксиома за обема, аксиома за отделянето, аксиома за степенното м-во, подм-во деф., максималност и минималност по включване, операции върху м-ва, свойства на операциите, доказване на равенства на м-ва, наредена двойка, декартово произведение, фамилия, покриване и разбиване, схема на д-ване по индукция, празно множество.

Не-деф: Множеството е първично понятие и не се дефинира.

Заб. Все някое понятие трябва да е в основата на аксиоматиката и засега се оказва, че най-добре това да е м-вото.

Заб. Неформално, интуитивно множество е съвкупност от неподредени различни обекти.

- бележим с главни латински букви: $A, B, C, U, V, W \ldots$

  Във фигурни скоби можем да изредим елементите:

  $\{a,b,c\}$, $\{1,5,8\}$, $\{0,1,2,\ldots\} = \mathbb{N}$.

- с "$\in$" и "$\notin$" означаваме съответно принадлежност и непринадлежност към множество: $a \in \{a,b,c\}$, $a \notin \{6,3\}$.

- многократната поява и редът на елементите нямат значение: $\{a,b\} = \{b,a\} = \{b,a,b\}$.

Стандартната аксиоматика за м-вата е на Цермело-Френкел (ZF).

В този курс разглеждаме само някои от аксиомите:

Аксиома 1: Аксиома за обема

Две м-ва са равни т.с.т.к. съдържат едни и същи елементи.

$$\forall X \forall Y (\forall z (z \in X \leftrightarrow z \in Y) \to X = Y)$$

Заб. От аксиома 1 веднага следва, че няма значение дали има повтарящи се елементи и дали елементите са в един и същи ред.

Аксиома 2: Аксиома за отделянето

Ако X е м-во и P е предикат с деф. м-во X, то елементите $z \in X$, за които $P(z)$ е истина, образуват множество.

$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \iff P(z))$

Бележим така: $Y = \{z \in X \mid P(z)\}$

Пр: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Деф: Празното множество е множеството без елементи.

Бележим $\emptyset$ или $\{\}$.

Деф: Подмножество: нека A е множество, P е предикат над A и $B = \{a \in A \mid P(a)\}$. Казваме, че B е подмножество на A.

Бележим: $B \subseteq A$.

- очевидно $\emptyset \subseteq A$ и $A \subseteq A$ за всяко м-во A.
- когато $B \subseteq A$ и $B \neq A$, казваме, че B е същинско подм-во на A. Пишем $B \subset A$.

Аксиома 3: Аксиома за степенното м-во

За всяко м-во X съществува м-во от всички негови подмножества, което наричаме степенното м-во на X.

$\forall X \exists Y \forall z (z \subseteq X \iff z \in Y)$

- на английски се казва "power set".
- бележим с 2^X, $pow(X)$ или $\mathcal{P}(X)$

Заб. Броят на елементите на степенното м-во на n-елементно м-во ($n \in \mathbb{N}$) е точно 2^n (от тук идва и нотацията 2^X).

Деф: Максималност по включване:

Нека P е предикат дефиниран върху 2^A, където A е м-во.

За всяко $B \subseteq A$, казваме, че B е максимално по включване по отношение на P, ако:

1. $P(B)$ е истина
2. $\forall C (B \subset C \subseteq A \to \neg P(C))$ (т.е. за всяко същинско надм-во на B не е вярно; не могат да се включат повече елементи към B).

Пр: Нека $A = \mathbb{N}$, P е предикатът "Всичките му елементи са едноцифрени числа" и $B = \{0, 1, \dots, 9\}$. Тогава B е максимално по включване по отношение на P (ако добавим някое друго число към B, например 128, то $C = \{0, \dots, 9, 128\}$ няма да удовлетворява предиката).

$B' = \{2, 3\}$ не е максимално по включване, защото е вярно $B' \subset B \subseteq A \to P(B)$.

Деф: Минималност по включване: Нека A е м-во и P е пред. върху 2^A.

За всяко $B \subseteq A$ казваме, че B е минимално по включване по отношение на P, ако:

1. $P(B)$ е истина
2. $\forall C (C \subset B \to \neg P(C))$

Деф: Операции върху множества: Нека A и B са м-ва.

1. Обединението на A и B е м-вото: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

   Пр: $\{a, b, c\} \cup \{c, 1, 2\} = \{a, b, c, 1, 2\}$

2. Сечението на A и B е м-вото: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

   Пр: $\{a, b, c\} \cap \{c, 1, 2\} = \{c\}$

встр

3. Разликата А без В е м-вото: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Пр: $\{a,b,c\} \setminus \{c,1,2\} = \{a,b\}$

4. Симетрична разлика на А и В е м-вото: $A \Delta B = \{x \mid x \in A \oplus x \in B\}$.

Пр: $\{a,b,c\} \Delta \{c,1,2\} = \{a,b,1,2\}$

5. Нека е зададено универсално м-во наречено универсум U.

Допълнението на А до U е м-вото: $\overline{A}^{U} = \{x \mid x \notin A \wedge x \in U\}$

Пр: $U = \{a,b,c,1,2\}$

$\overline{\{a,b,c\}}^{U} = \{1,2\}$

Свойства на операциите върху м-ва

(аналогични са на с-вата на логическите съюзи)

1. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$
2. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$, $A \Delta B = B \Delta A$ (комутативност).
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (асоциативност)

   $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
4. Дистрибутивност на ∩ и ∪:

   $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

   Обобщено: $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$

   $(A_1 \cap \dots \cap A_n) \cup B = (A_1 \cup B) \cap \dots \cap (A_n \cup B)$
5. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup U = U$, $A \cap U = A$

   Заб. $\emptyset$ съответства на F, а U на T.
6. $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{A} \cup A = U$, $\overline{A} \cap A = \emptyset$

7. Аналог на законите на Де Морган:

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \cdots \cup \bar{A}_n$$

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n$$

Доказване на равенства на м-ва (аналогично на ~~логическите~~ съждения).

1. С таблица: пр: док, че $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

- нулата означава, че елемент не принадлежи на даденото м-во; единицата – принадлежи
- ако нулите и единиците в съответните колони съвпадат, то м-вата са равни.

A	B	C	$A\cap B$	$(A\cap B)\cap C$	$B\cap C$	$A\cap(B\cap C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Колони 5 и 7 съвпадат => $\square$

2. С еквивалентни преобразувания (ползване свойствата).

Пр: Док, че $\overline{((A\cap B)\cup\phi)\cap\bar{A}} = U$.

$$\overline{\underbrace{((A\cap B)\cup\phi)}_{=A\cap B}\cap\bar{A}} = \overline{(A\cap B)\cap\bar{A}} = \overline{(B\cap A)\cap\bar{A}} = \overline{B\cap\underbrace{(A\cap\bar{A})}_{=\phi}} =$$

$$= \overline{B\cap\phi} = \bar{\phi} = U \ \square.$$

Не-деф: Мултимножество – подобно на м-во (съвкупност от елементи), но многократните появи на елемента са от значение. Бележим с долен индекс М: $\{\ldots\}_M$

Пр: $\{1,2,1\}_M = \{1,1,2\}_M \neq \{1,2\}_M$

– за мултимножества дефинираме само $\cup$:

$$\{a,b,c\}_м \cup \{a,b,b\}_м = \{a,a,b,b,b,c\}_м$$

Заб. Може да се мине и без това понятие, но го дефинираме, защото ще ползваме мултимножества при рекурентните уравнения.

Деф. наредена двойка: Всяко м-во от вида $\{a,\{a,b\}\}$ наричаме наредена двойка с първи елемент a и втори b. Бележим (a,b).

Обобщава се и за наредени n-орки: $(a_1, \dots, a_n)$.

Деф: Декартово произведение

Нека $A_1, \dots A_n$ са м-ва. Декартовото произведение на м-вата $A_1, \dots A_n$ е м-вото: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$

Фамилия. Покриване. Разбиване

В аксиоматиката ZF всичко е м-во. Ние обаче ще приемем, че има праелементи, които не са м-ва, и ще ги бележим с малки латински букви. Множества ще изграждаме от праелементи и други множества.

Деф: Фамилия: множество от множества наричаме фамилия.

Пр. $X = \{\{a\}, \mathbb{N}, \emptyset\}$ е фамилия

Деф. Покриване

Нека $A \neq \emptyset$ е м-во. Покриване на A е всяка фамилия $X = \{X_1, \dots, X_n\}$, $n \geq 1$, т.че:

1. $X_i \subseteq A$, $\forall i \in \{1..n\}$
2. $X_i \neq \emptyset$, $\forall i \in \{1..n\}$
3. $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = A$

Деф: Разбиване: ако $X = \{X_1, \dots X_n\}$ е покриване на A и също е вярно $\forall i \forall j (1 \le i < j \le n \rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset)$, то казваме, че X е разбиване на A.

Индуктивно дефинирани м-ва и доказателство по индукция

Заб. Аксиома 4 не е от аксиоматиката ZF, но тук е въведена като аксиома.

Аксиома 4: Аксиома за индукцията

Нека е дадено крайно, непразно м-во M_0 (което наричаме базово множество), и крайно, непразно м-во от операции F, приложими в тази конструкция. Имаме следната процедура:

1. Включване елементите на M_0 в M.
2. Прилагане неограничено много пъти следното:
   - нека M' е м-вото от елементите, които се получават при всевъзможните прилагания на операциите от F върху текущото M
   - добавяме M към M'.

Така полученото M е множество. Пишем $M = (M_0, F)$

Пр: $\mathbb{N}$ е индуктивно дефинирано м-во: $M_0 = \{0\}$, $F = \{successor(x)\}$; $successor(0) = 1$, $successor(1) = 2 \dots$

$\Rightarrow \mathbb{N} = (M_0, F)$.

Доказателство по индукция:

Обикновена индукция

Даден е предикатът $P(n)$ дефиниран върху $\mathbb{N}$ и трябва да докажем, че е вярно $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$. Схемата на д-вото по индукция върху естествените числа е следната:

1. База: доказване $P(0)$ (т.е просто проверяване истинността на $P(0)$).

2. Индукционно предположение: допускаме, че $P(n)$ е вярно за произволно $n \in \mathbb{N}$

3. ~~Вод~~ Стъпка: Въз основа на ИП доказваме, че $P(n+1)$ е вярно.

Ако $P(0)$ е вярно и от истинността на $P(n)$ следва истинността на $P(n+1)$, то заключаваме, че всички твърдения $P(0), P(1) \ldots$ в редицата са верни.

Силна индукция:

Абсолютно същата като обикновената, но в индукционното предположение допускаме, че са верни $P(0) \ldots P(n)$, а не само $P(n)$.

Заб. Всяко твърдение, което може да се докаже ~~със~~ с обикновена индукция, може да се док. и със силна и обратното.