Език на предикатното смятане от първи ред

(*) <u>Азбука</u> – съвкупност от няколко непресичащи се азбуки.

I. Логическа част:
- $Var = \{x_0, x_1, \dots\}$ – изброимо множество на индивидни променливи;
- $\{\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ – азбука на съжд. връзки;
- $\{\forall, \exists\}$ – азбука на кванторите;
- $\{(,), ,\}$ – азбука на помощните символи;

II. Нелогическа част:
- $Const_{\mathcal{L}}$ – азбука на константите (бележим с $\mathcal{C}$)
- $Func_{\mathcal{L}}$ – азбука на функционалните символи (бележим с $\mathcal{F}$)
- $Pred_{\mathcal{L}}$ – азбука на предикатните символи ($\mathcal{P}$)
- функция на арността $I : \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \to \mathbb{N}$
- [$\{\doteq\}$ – формално равенство] – опционално

def] Език на предикатното смятане от първи ред наричаме $\mathcal{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, I)$, когато е избрана (или не) опцията за формално равенство.

def] Терм в езика $\mathcal{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, I)$ дефинираме индуктивно:
- променливите са термове от $\mathcal{L}$;
- константите са термове от $\mathcal{L}$;
- ако $f \in \mathcal{F}$, $I(f) = n$ и $\tau_1, \dots, \tau_n$ са термове, то думата $f(\tau_1, \dots, \tau_n)$ е терм от $\mathcal{L}$;

def Предикатна формула в $\mathcal{L}$ дефинираме индуктивно

- ако $p \in \mathcal{P}$ и $I(p) = n$ и $\tau_1, \dots, \tau_n$ са термове, то $p(\tau_1, \dots, \tau_n)$ е предикатна формула от $\mathcal{L}$. (наричат се атомарни формули)
- ако f_1 и f_2 са формули, то $(f_1 \Rightarrow f_2)$, $(f_1 \& f_2)$, $(f_1 \vee f_2)$, $(f_1 \Leftrightarrow f_2)$ и $\neg f_1$ са предикатни формули.
- ако f е предикатна формула и x е индивидна променлива, то $\forall x f$ и $\exists x f$ са предикатни формули. (квантифицирани формули)

|| Дотук понятията са свързани само с конструкцията на формален език. Все още няма никаква семантика.

def Структура за езика $\mathcal{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, I)$ наричаме $S = (U, P, F, K)$, където

- U - универсум (мн-во от обекти, с които работим)
- P - мн-во от предикати
- F - мн-во от функции
- K - мн-во от константи

def Оценка на индивидна променлива в структура $S = (U, P, F, K)$ е изображение:

$$v : Var \to U$$

|| В следващите деф. използвам символа $\equiv$ за означаване на графическо равенство на думи.

Интерпретация на термове в език $\mathcal{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathcal{I})$ със структура $S = (U, P, F, K)$:

- ако $\tau \equiv x$, за $x \in Var$, то $\tau^S \leftrightharpoons v(x)$
- ако $\tau \equiv c$, за $c \in Const_{\mathcal{L}}$, то $\tau^S \leftrightharpoons c^S$
- ако $\tau \equiv f(\tau_1, \dots, \tau_n)$, то

$$[f(\tau_1, \dots, \tau_n)]^S \leftrightharpoons f^S(\tau_1^S, \dots, \tau_n^S)$$

Интерпретация на формули в език $\mathcal{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathcal{I})$ със структура $S = (U, P, F, K)$

- ако $p \in \mathcal{P}$ и $\tau_1, \dots, \tau_n$ са термове с интерпретации $\tau_1^S, \dots, \tau_n^S$. Тогава

$$[p(\tau_1, \dots, \tau_n)]^S \overset{def}{\Longleftrightarrow} p^S(\tau_1^S, \dots, \tau_n^S)$$

- ако f_1 и f_2 са предикатни формули с интерпретации f_1^S и f_2^S, то

1) $[\neg f_1]^S$ е истина $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f_1^S е лъжа;
2) $[f_1 \& f_2]^S$ е истина $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f_1^S е истина и f_2^S е истина;
3) $[f_1 \vee f_2]^S$ е истина $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f_1^S е истина или f_2^S е истина или и двете едновременно са истина.
4) $[f_1 \Rightarrow f_2]^S$ е истина $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f_1^S е лъжа или f_1^S и f_2^S са истина.
5) $[f_1 \Leftrightarrow f_2]^S$ е истина $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f_1^S и f_2^S са едновременно истина или лъжа.
6) $[\forall x f]^S$ е истина $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ за произволно $a \in U$ $f^S(a)$ е истина.
7) $[\exists x f]^S$ е истина $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ има $a \in U$, за което $f^S(a)$ е истина.

Пример:

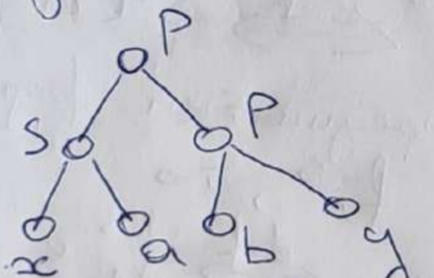
Нека $\mathcal{L} = (\{eq, greater\}, \{p, s\}, \{a, b\}, I)$, където $I(eq) = I(greater) = I(p) = I(s) = 2$.

$$S = (\mathbb{R}, \{eq^S, greater^S\}, \{p^S, s^S\}, \{a^S, b^S\})$$

където

$$p^S(x, y) = z \overset{def}{\iff} x * y = z$$
$$s^S(x, y) = z \overset{def}{\iff} x + y = z$$
$$eq^S(x, y) \overset{def}{\iff} x = y$$
$$greater^S(x, y) \overset{def}{\iff} x > y$$
$$a^S \leftrightharpoons 3 \text{ и } b^S \leftrightharpoons 7.$$

Терм в този език $p(s(x, a), p(b, y))$:



// Листата са пром. и константи, а по останалите върхове имаме функционални символи

$$[p(s(x, a), p(b, y))]^S = p^S(s^S(x^S, a^S), p^S(b^S, y^S)) =$$
$$= p^S(s^S(v(x), 3), p^S(7, v(y))) =$$
$$= (v(x) + 3) * (7 * v(y)) \underset{\substack{v(x) = 1 \\ v(y) = 4}}{=\!=}$$
$$= (1 + 3) * (7 * 4) =$$
$$= 4 * 28 = 112$$

Формула в този език $\forall x(greater(s(x, a), x))$

$[\forall x(greater(s(x, a), x))]^S$ е истина тогава и само тогава, когато за вс. $x \in \mathbb{R}$ е вярно, че $x + 3 > x$, което е очевидно вярно.

def-11 Нека $\mathcal{L}=(\mathcal{P},\mathcal{F},\mathcal{C},\mathcal{I})$ и $\mathcal{S}=(U,P,F,K)$ е структура за $\mathcal{L}$. Нека $M\subseteq U^n$, $n\in\mathbb{N}$. Казваме, че M е определимо множество в $\mathcal{S}$, ако съществува формула f от $\mathcal{L}$ такава, че $I(f)=n$ и

$$M=\{(a_1,\dots,a_n)\mid (a_1,\dots,a_n)\in U^n \text{ и } f^S(a_1,\dots,a_n)\}$$

Задача

Нека $\mathcal{L}=(\{eq\},\{p,s\},\emptyset,I)$ и нека

$\mathcal{S}=(\mathbb{R},\{eq^S\},\{p^S,s^S\},\emptyset)$, където

$eq^S(x,y)\overset{def}{\Longleftrightarrow} x=y$

$p^S(x,y)=z\overset{def}{\Longleftrightarrow} x*y=z$

$s^S(x,y)=z\overset{def}{\Longleftrightarrow} x+y=z$

Определими ли са множествата:

1) $\{1\}$, $\{0\}$, $\{-1\}$;
2) за вс $n\in\mathbb{N}$, $\{n\}$;
3) $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$;
4) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\geq y\}$;
5) за вс. $q\in\mathbb{Q}$, $\{q\}$;
6) за вс. $r\in\mathbb{R}$, $\{r\}$;