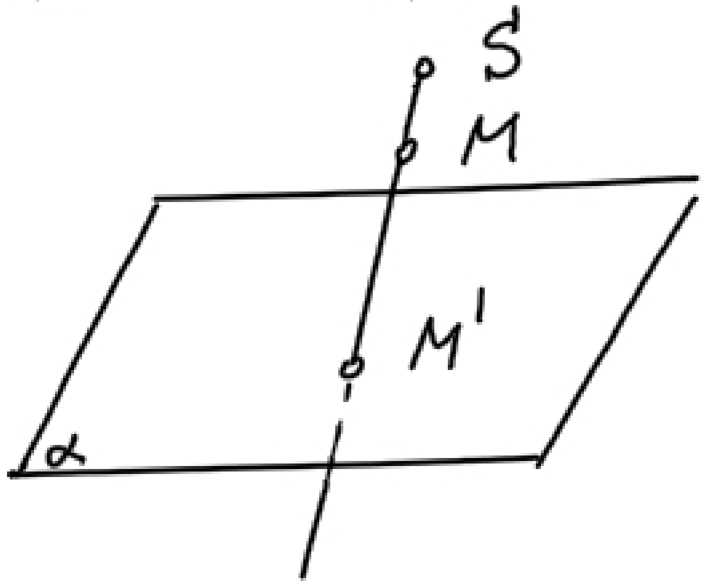
4. Централно проектиране.

Нека в E_3^* са фиксирани неинцидентни точка S и равнина α − $S \notin \alpha$

За точките $M \neq S$ дефинираме изображение φ_α^S по следния начин



$$\varphi_\alpha^S : \begin{cases} M \longrightarrow M' \\ M \neq S \qquad M' = SM \cap \alpha . \end{cases}$$

Изображението φ_α^S наричаме <u>централно проектиране на E_3^* в равнината α от точката S.</u>, S наричаме <u>център</u>, а α − проекционна равнина.

Имаме следната

<u>Теорема 1.</u> Централното проектиране φ_α^S е линейна трансформация на E_3^* с ранг 3.

Доказателство. Нека в $E_3 = E_3^* \setminus \{\Omega\}$ е фиксирана координатна система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, и спрямо K неинцидентните точка S и равнина α са съответно с координати $S(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ и $\alpha[u_1^0, u_2^0, u_3^0, u_4^0]$.

От $S \notin \alpha$ следва, че $\sum_{i=1}^{4} u_i^0 x_i^0 \neq 0$.

Нека $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ е произволна точка, $M \neq S$ и $\varphi_\alpha^S(M) = M'(x_1', x_2', x_3', x_4')$

Тогава, от $M' \in SM$ имаме

1. $M' \in SM$: $\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 + \mu x_1^0 \\ x_2' = \lambda x_2 + \mu x_2^0 \\ x_3' = \lambda x_3 + \mu x_3^0 \\ x_4' = \lambda x_4 + \mu x_4^0 \end{cases}$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$

$(M' = \lambda M + \mu S)$. и от $M' \in \alpha$

имаме

$u_1^0 x_1' + u_2^0 x_2' + u_3^0 x_3' + u_4^0 x_4' = 0$.

Заместване от 1, x_1', x_2', x_3' и x_4' и групиране пред λ и μ $\Rightarrow$

$(u_1^0 x_1 + u_2^0 x_2 + u_3^0 x_3 + u_4^0 x_4)\lambda +$

$+\underbrace{(u_1^0 x_1^0 + u_2^0 x_2^0 + u_3^0 x_3^0 + u_4^0 x_4^0)}_{\neq 0}\mu = 0$.

това е линейно уравнение с две неизвестни – λ и μ. Едно от числата избираме произволно, стига да е различно от нула. Удобно е да изберем

$$\lambda = \sum_{i=1}^{4} u_i^0 x_i^0 \Longrightarrow \mu = -\sum_{i=1}^{4} u_i^0 x_i$$

Заместваме λ и μ в уравнението на SM, откъдето получаваме

$$x_1' = (u_2^0 x_2^0 + u_3^0 x_3^0 + u_4^0 x_4^0).x_1 - (u_2^0 x_1^0).x_2 - (u_3^0 x_1^0).x_3 - (u_4^0 x_1^0).x_4$$

$$x_2' = -(u_1^0 x_2^0).x_1 + (u_1^0 x_1^0 + u_3^0 x_3^0 + u_4^0 x_4^0).x_2 - (u_3^0 x_2^0).x_3 - (u_4^0 x_2^0)x_4$$

$$x_3' = -(u_1^0 x_3^0).x_1 - (u_2^0 x_3^0).x_2 + (u_1^0 x_1^0 + u_2^0 x_2^0 + u_4^0 x_4^0).x_3 - (u_4^0 x_3^0)x_4$$

$$x_4' = -(u_1^0 x_4^0).x_1 - (u_2^0 x_4^0).x_2 - (u_3^0 x_4^0)x_3 + (u_1^0 x_1^0 + u_2^0 x_2^0 + u_3^0 x_3^0)x_4$$

Следователно φ_2^S е линейната трансформация φ_A,

$\varphi_A : \rho x' = Ax$, където матрицата A е

$$
\begin{array}{r}
\times u_1^0 \\ \times u_2^0 \\ \\ \times u_4^0
\end{array}
\quad
A = \begin{pmatrix}
u_2^0x_2^0+u_3^0x_3^0+u_4^0x_4^0 & -u_2^0x_1^0 & -u_3^0x_1^0 & -u_4^0x_1^0 \\
-u_1^0x_2^0 & u_1^0x_1^0+u_3^0x_3^0+u_4^0x_4^0 & -u_3^0x_2^0 & -u_4^0x_2^0 \\
-u_1^0x_3^0 & -u_2^0x_3^0 & u_1^0x_1^0+u_2^0x_2^0+u_4^0x_4^0 & -u_4^0x_3^0 \\
-u_1^0x_4^0 & -u_2^0x_4^0 & -u_3^0x_4^0 & u_1^0x_1^0+u_2^0x_2^0+u_3^0x_3^0
\end{pmatrix}
$$

Ще покажем, че $\operatorname{rank} A = 3$. За това е достатъчно да докажем първо, че $\det A = 0$ и второ, че има минор от ред 3, различен от нула.

Извършваме следните еквивалентни преобразувания на A

1. Умножаваме първия ред с u_1^0, а втори, трети и четвърти редове съответно с u_2^0, u_3^0 и u_4^0 и ги прибавяме към първия. По този начин получаваме матрица A', $A \sim A'$, чийто първи ред е нулев

$$
A' = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
-u_1^0x_2^0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-u_1^0x_4^0 & \cdots & \cdots & \cdots
\end{pmatrix}
$$

стр. $\longrightarrow$

$$A' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} * -u_1^0 & \times u_1^0 & \times u_1^0 & \times u_1^0 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1^0 x_2^0 & u_1^0 x_1^0 + u_3^0 x_3^0 + u_4^0 x_4^0 & -u_3^0 x_2^0 & -u_4^0 x_2^0 \\ -u_1^0 x_3^0 & -u_2^0 x_3^0 & u_1^0 x_1^0 + u_2^0 x_2^0 + u_4^0 x_4^0 & -u_4^0 x_2^0 \\ -u_1^0 x_4^0 & -u_2^0 x_4^0 & -u_3^0 x_4^0 & u_1^0 x_1^0 + u_2^0 x_2^0 + u_3^0 x_3^0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A' \leq 3.$

2. за $i = 2,3,4$ умножаваме първия стълб с $-u_i$ и прибавяме към i-тия стълб, предварително умножен с u_1^0, $u_1^0 \neq 0$ – Б.О.О. от $[u_1^0, u_2^0, u_3^0, u_4^0] \neq [0,0,0,0]$ считаме, че $u_1^0 \neq 0$. $\Rightarrow$

$$A' \sim A'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1^0 x_2^0 & u_1^0 \sum_{i=1}^{4} u_i x_i^0 & 0 & 0 \\ -u_1^0 x_3^0 & 0 & u_1^0 \sum_{i=1}^{4} u_i x_i & 0 \\ -u_1^0 x_4^0 & 0 & 0 & u_1^0 \sum_{i=1}^{4} u_i x_i^0 \end{pmatrix}$$

Тъй като $\det \begin{pmatrix} u_1^0 \sum_{i=1}^{4} u_i x_i & 0 & 0 \\ 0 & u_1^0 \sum_{i=1}^{4} u_i x_i & 0 \\ 0 & 0 & u_1^0 \sum_{i=1}^{4} u_i x_i^0 \end{pmatrix} = \left(u_1^0 \sum_{i=1}^{4} u_i x_i^0 \right) \neq 0,$

то $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A'' = 3$.

Следователно всяко централно проектиране φ_α^S на разширеното евклидово пространство се описва аналитично с изродена линейна трансформация φ_A с $\operatorname{rank} A = 3$. При тази линейна трансформация центърът на проектиране S няма образ, т.е. $\varphi_A(S) = (0,0,0,0)$ и всички точки от E_3^*, различни от S се изобразяват в равнината α.

Естествено е да поставим следният въпрос:

„Дали всяка линейна трансформация φ_A на E_3^* с ранг 3 задава централно проектиране φ_α^S?"

Отговорът е отрицателен – „Не всяка линейна трансформация на E_3^* задава централно проектиране".

В това ни убеждават следните два примера:

Пример 1. $\varphi_A : \rho x' = Ax$, където $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ясно е, че $\det A = 0$, $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$.

Следователно $\operatorname{rank} A = 3$. Тогава да допуснем, че φ_A задава централно проектиране. Тогава центърът ще е точката (x_1, x_2, x_3, x_4), която няма образ при φ_A, т.е.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow x_2 = 0$ и $x_3 = 0 \Rightarrow$ $x_4 \neq 0 \Rightarrow$ точката, която няма образ при φ_A е $O(0,0,0,1)$.

Равнината α, в която се изобразяват точките, различни от O е с координати $\alpha[u_1 u_2 u_3 u_4]$, за която

$$[u_1 u_2 u_3 u_4] \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [0,0,0,0] \Rightarrow \begin{array}{ll} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0 & \\ u_1 + 2u_2 + u_3 = 0 & \Rightarrow u_3 = u_1 \\ u_1 + u_2 = 0 & u_2 = -u_1 \\ 0.u_1 + 0.u_2 + 0.u_3 + 0.u_4 = 0 & \end{array}$$

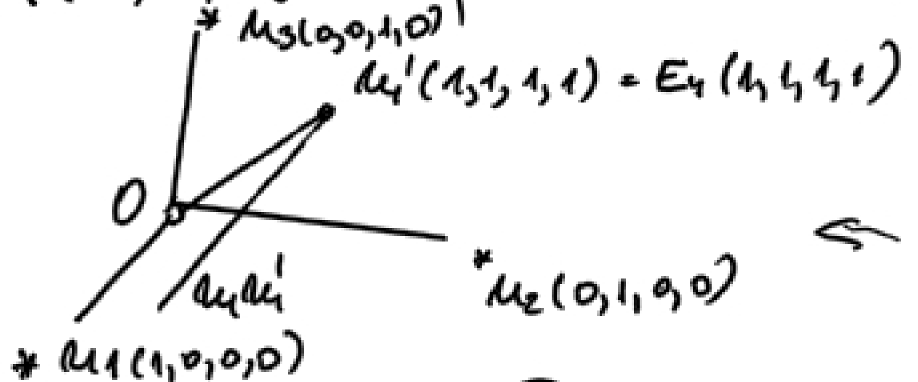
$\Rightarrow \alpha[1, -1, 1, -1]$.

Следователно, ако A задава централно проектиране в φ_{α}^{S}, то $S \equiv O(0,0,0,1)$, а $\alpha[1,-1,1,-1]$

Проверя ако $S \in \alpha$? $1.0+(-1).0+1.(0)-1.1=-1\neq 0$.

Но, образ на точката $M_1(1,0,0,0)$ при φ_A е M_1'

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$



Правата M_1M_1' не е инцидентна с O.

Аналитично имаме

$$M_1M_1': \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \mu \\ z = \mu \\ t = \mu \end{cases} \quad (\lambda,\mu)\neq 0$$

Ако допуснем $O \in M_1M_1'$, то $\Rightarrow$
$\lambda+\mu=0 \Rightarrow \mu=-\lambda \Rightarrow (0,-\lambda,-\lambda,-\lambda) \Rightarrow$
$\lambda=0$ и $\lambda\neq 0$ ↯.

Следователно двойката съответни при φ_A точки M_1 и M_1' не лежат на права през O. Това е ясно и от...

Следователно матрицата A не задава централно проектиране.

Пример 2. $\varphi_A : \rho x' = Ax$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$,

ясно е, че $\det A = 0 \Rightarrow$

$\operatorname{rank} A \leq 3$ (първи и четвърти ред на A са идентични).

От $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+1-1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rank} A = 3$.

Точката, която няма образ при φ_A е $S(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_4 \\ \Rightarrow x_3 = -2x_1 \\ \\ \Rightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow \end{array}$$

$S(1, 1, -2, 1)$

За координатите на равнината α, където се изобразяват точките от E_3^* при φ_A, различни от S имаме:

$$(u_1 u_2 u_3 u_4)\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&0\end{pmatrix} = (0\ 0\ 0\ 0) \Rightarrow \left|\begin{array}{l} u_1+u_3+u_4=0\\ u_1+u_2+u_4=0\\ u_1+u_2+u_3+u_4=0\\ u_2+u_3=0\end{array}\right.$$

$\Rightarrow u_1+u_4=0 \Rightarrow u_2=0 \Rightarrow u_3=0 \Rightarrow \alpha[1,0,0,-1]$.

Следователно φ_A ще задава централно проектиране.

— Имаме $S \in \alpha$; $\alpha: x_1 - x_4 = 0$, а $(S(1,1,-2,1))$.

по дефиниция на $\underbrace{\text{централно проектиране}}_{(\varphi=\varphi_\alpha^S)}$ точката S и равнината α са неинцидентни.