Идеали. Факторпръстени. Теорема за ХММ

Опр. R - пр.; $I \triangleleft R$ - идеал, ако:

1) $\forall i_1, i_2 \in I \Rightarrow i_1 - i_2 \in I$

2) $\forall i \in I$ и $\forall r \in R \Rightarrow \underbrace{\underset{\text{десен}}{ir \in I} \text{ и } \underset{\text{лев}}{ri \in I}}_{\text{двустранен}}$

Заб. 1/ Под идеал ще разбираме двустранен идеал

2/ R - ком. пр. $\Rightarrow$ лев $\equiv$ десен $\equiv$ двустр.

3/ 1) $\Rightarrow (I,+) \triangleleft (R,+)$

4) I е подпръстен на R

Опр. $I \triangleleft R$ е главен (R – ком. пр. с 1), ако $\exists a \in R$:

$$I = \{ar \mid r \in R\} = (a) = \bigcap_{a \in J \triangleleft R} J$$

Заб. В $\mathbb{Z}$ всеки идеал е главен

$I \triangleleft R$; $(R,+)/(I,+)$ – факторгрупа

Опр. $I \triangleleft R$; R/I – факторпръстен е

- $R/I = \{r + I \mid r \in R\}$
- $(r_1 + I) + (r_2 + I) := (r_1 + r_2) + I$
- $(r_1 + I)(r_2 + I) := r_1 r_2 + I$

Заб. $r_1 + I = r_2 + I \iff r_1 - r_2 \in I$

Тв R/I е пръстен

Д-во Знаем от групи, че $+^{а}$ е коректно дефинирано и относно събирането R/I е абелева група

- коректност на $\cdot$: Ако $i_1+I=j_1+I$ и $i_2+I=j_2+I$, то

$$(i_1\cdot i_2)+I=(j_1\cdot j_2)+I$$

$$i_1+I=j_1+I \Rightarrow i_1-j_1\in I \Rightarrow \exists k_1\in I : i_1-j_1=k_1$$

Аналог. $\exists k_2\in I : i_2-j_2=k_2$

$$i_1i_2-j_1j_2=(j_1+k_1)(j_2+k_2)-j_1j_2=$$

$$=j_1\underline{k_2}+\underline{k_1}j_2+\underline{k_1}\,\underline{k_2}\in I \Rightarrow i_1j_1+I=i_2j_2+I$$

— асоциативност на $\cdot$

$$[(i+I)(j+I)](k+I) = (ij+I)(k+I) = [(ij)k]+I$$

$$(i+I)[(j+I)(k+I)] = (i+I)(jk+I) = [i(jk)]+I$$

— дистрибутивност — аналог.

Заб. 1) нулевият ел. е $0+I=I$

2) противоположен: $-(i+I) = (-i)+I$

3) Ако R е пр. с 1, то R/I има единичен ел. $1+I$

4) R - пр. с 1 и $a \in R$ е обратим, то $a+I \in R/I$ също е обратим и $(a+I)^{-1} = a^{-1}+I$

Пр. $(n) = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\} \triangleleft \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n)$

$[a] = \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\} = a + (n)$

$[a] = [b] \iff a \equiv b \pmod{n}$

Опр. $\varphi : R_1 \to R_2$ е ХМФ (на пръстени), ако

- $\forall a, b \in R_1$ $\quad \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
- $\forall a, b \in R_1$ $\quad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

Ако φ е и биекция, то φ е изоморфизъм

Зад. 1) $\varphi(0_{R_1}) = 0_{R_2}$

2) $\varphi(-a) = -\varphi(a)$

3) Ако R_1 и R_2 са пр. с 1 и искаме и $\varphi(1_{R_1}) = 1_{R_2}$

Тогава, ако $a \in R_1$ е обратим, то $(\varphi(a))^{-1} = \varphi(a^{-1})$

<u>Опр.</u> $\varphi : R_1 \to R_2$ – ХМН

$\operatorname{Ker} \varphi = \{ r \in R_1 \mid \varphi(r) = 0_{R_2} \}$

$\operatorname{Im} \varphi = \{ \varphi(r) \mid r \in R_1 \} = \varphi(R_1) = \{ b \in R_2 \mid \exists a \in R_1 : \varphi(a) = b \}$

<u>Тв.</u> $\operatorname{Ker} \varphi \trianglelefteq R_1$, $\operatorname{Im} \varphi < R_2$ (подпръстен)

<u>Д-во</u> <u>Ker</u>

- $a, b \in \operatorname{Ker} \varphi \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \Rightarrow \varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b) = 0$

  $\Rightarrow a - b \in \operatorname{Ker} \varphi$
- $a \in \operatorname{Ker} \varphi, r \in R \Rightarrow \varphi(ar) = \overset{0}{\varphi(a)} \varphi(r) = 0$

Аналог. $\varphi(r0)=0 \Rightarrow 0r, r0 \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi \triangleleft R_1$

<u>Im</u> $a, b \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \exists c, d \in R_1 : \begin{cases} \varphi(c)=a \\ \varphi(d)=b \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(c-d)=\varphi(c)-\varphi(d)=a-b \in \operatorname{Im}\varphi \\ \varphi(cd)=\varphi(c)\varphi(d)=ab \in \operatorname{Im}\varphi \end{array}\right\} \operatorname{Im}\varphi < R_2$$

Теорема за ХММ (на пръстени)

$\varphi : R_1 \longrightarrow R_2$ е ХММ. Тогава $\operatorname{Ker}\varphi \triangleleft R_1$ и

$$\operatorname{Im}\varphi \cong R_1/\operatorname{Ker}\varphi$$

<u>Д-во</u> От д-во на Т за ХММ за групи

$\theta : R_1 / \operatorname{Ker} \varphi \longrightarrow \operatorname{Im} \varphi$

$\forall r \in R_1 \quad \bar{r} = r + \operatorname{Ker} \varphi \longmapsto \varphi(r)$

От пр. знаем, че

- θ е коректно
- θ е биекция
- $\forall r_1, r_2 \in R_1 \quad \theta(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = \theta(\bar{r}_1) + (\bar{r}_2)$

Остава да док, че $\forall r_1, r_2 \in R_1 \quad \theta(\bar{r}_1 \bar{r}_2) = \theta(\bar{r}_1)\theta(\bar{r}_2)$

$$\theta(\bar{r}_1 \bar{r}_2) = \theta(\overline{r_1 r_2}) = \varphi(r_1 r_2) = \varphi(r_1)\varphi(r_2) = \theta(\bar{r}_1)\,\theta(\bar{r}_2)$$

<u>Зад.</u> R – пр. с 1

1) $(1) = R$

2) $r \in R^* \Rightarrow (r) = R$

3) $(r) = R \Rightarrow r \in R^*$ (за R – комут. пр. с 1)

4) R – поле и $I \triangleleft R \Leftrightarrow I = (0)$ или $I = R$ ($\Leftarrow$ R – комут. пр. с 1)

<u>Д-во</u> 1) $r \in R$ $\quad r = r.1 \in I \Rightarrow R \subseteq (1) \Rightarrow R = (1)$

2) $\exists r^{-1} : \underline{r} r^{-1} = 1 \in (r) \Rightarrow \underset{R=}{(1)} \subseteq (r) \Rightarrow R = (r)$

3) $1 \in (r) \Rightarrow \exists r' : rr' = r'r = 1 \Rightarrow r' = r^{-1}$, т.е. $r \in R^*$

4) $(\Rightarrow)$ ясно ; $(\Leftarrow)$ $\forall r \neq 0$ $\quad (r) \neq (0) \Rightarrow (r) = R \Rightarrow r \in R^*$

Китайска теорема за остатъците

R - ком. пр. с 1

<u>Зад.</u> $I, J \lhd R \Rightarrow I\cap J,\ I+J,\ IJ = (\{\underset{\in I\cap J}{ij} \mid i\in I, j\in J\})$

<u>Зад:</u> $R=\mathbb{Z}$; $I=(m)$, $J=(n)$

$I\cap J = ([m,n])$, $I+J=((m,n))$, $IJ=(mn)$

<u>Зад.</u> $I\cap J \subseteq I, J$; $IJ \subseteq I\cap J \subseteq I, J \subseteq I+J$

<u>Опр.</u> I и J са взаимно прости, ако $I+J=R$

<u>Тв.</u> Ако $I+J=R$, то $IJ = I\cap J$

<u>Д-во</u> $a\in I\cap J$; $I+J=R \Rightarrow \exists\, i\in I$ и $j\in J$: $i+j=1$

$\Rightarrow a = a.1 = \underset{J}{a}i + \underset{I}{a}j \in IJ$

Зад. R_1, R_2 – пр. $\Rightarrow R_1 \times R_2 = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in R_1, r_2 \in R_2\}$

с $(r_1', r_2') + (r_1'', r_2'') = (r_1' + r_1'', r_2' + r_2'')$ и

$(r_1', r_2')(r_1'', r_2'') = (r_1' r_1'', r_2' r_2'')$ е пръстен

Зад. Има делители на 0 – $(a,0)(0,b) = (0,0)$

Тв (КТО) R – ком. пр. с 1; $I, J \triangleleft R$ взаимно прости.

Тогава $R/IJ \cong (R/I) \times (R/J)$

Сл. $(m,n) = 1 \Rightarrow \mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$

Зад. $(R_1 \times R_2)^* = R_1^* \times R_2^*$

Сл. $\mathbb{Z}_{mn}^* \cong \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_n^*$. В частност $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$

за $(m,n) = 1$

Д-во $\quad \varphi : R \to (R/I) \times (R/J)$

$$r \mapsto (r+I,\ r+J)$$

$I+J=R$

— φ е ХММ

— $\operatorname{Ker}\varphi = \{ r \in R \mid (r+I,\ r+J) = (I,\ J) \} = I \cap J = IJ$

— $\operatorname{Im}\varphi = (R/I) \times (R/J)$?

$\Leftrightarrow \forall r_1, r_2 \in R \ \exists r \in R : \left| \begin{array}{l} r_1 + I = r + I \\ r_2 + J = r + J \end{array} \right.$

$\left((r_1', \underbrace{r_2'}_{0}) \to r' \ ; \ (\underbrace{r_1''}_{0}, r_2'') \to r'' \Rightarrow (r_1' + r_1'',\ r_2' + r_2'') \to r' + r'' \right)$

$\exists\, i \in I$ и $j \in J : i + j = 1 \quad (\Leftarrow I + J = R)$

$? \; r' :$ $\left| \begin{array}{l} r_1 + I = r' + I \to r' - r_1 \in I \\ 0 + J = r' + J \to r' \in J \end{array} \right.$

$\underbrace{r_1 i}_{\in I} + \underbrace{r_1 j}_{\in J} = r_1 \quad \to \quad r' = r_1 j \quad$ OK

$? \; r'' :$ $\left| \begin{array}{l} 0 + I = r'' + I \to r'' \in I \\ r_2 + J = r'' + J \to r_2 - r'' \in J \end{array} \right.$

$\underbrace{r_2 i}_{\in I} + \underbrace{r_2 j}_{\in J} = r_2 \qquad r'' = r_2 i$

$r = \underbrace{r_1 j}_{\in J} + \underbrace{r_2 i}_{\in I} \qquad \left(\begin{array}{l} r - r_1 = r_1 (\overset{-i}{j - 1}) + r_2 i = i(r_2 - r_1) \in I \\ r - r_2 = r_1 j + r_2 (i-1) = j(r_1 - r_2) \in J \end{array} \right)$

$\Rightarrow r_1 + I = r + J \;\wedge\; r_2 + J = r + J \Rightarrow$

$\varphi(r) = (r_1 + I, r_2 + J) \qquad (\forall r_1, r_2)$

Сл. (кит.) $\forall\, k < l \quad I_k + I_l = R$

$$\Rightarrow R/I_1 \dots I_n \cong R/I_1 \times R/I_2 \times \dots \times R/I_n$$

Опр. 1) $I \lhd R$ – прост, ако от $ab \in I \Rightarrow a \in I$ или $b \in I$

2) $I \lhd R$ – максимален, ако от $I \subsetneq J \lhd R \Rightarrow J = R$

Тв. R – ком. пр. с 1

1) $I \lhd R$ – прост $\Leftrightarrow$ R/I е област

2) $I \lhd R$ – мах $\Leftrightarrow$ R/I е поле

Сл. Всеки мах идеал е и прост (в ком. пр. с 1)

D-во R/I е ком. пр. с 1

1) ($\Rightarrow$) Нека $(a+I)(b+I) = 0+I$ за $a \notin I$ и $b \notin I$

$ \overset{\shortparallel}{ab+I}$

$\Rightarrow ab \in I \Rightarrow a \in I$ или $b \in I$ $\lightning$

($\Leftarrow$) $ab \in I \Rightarrow \bar{0} = I = 0 + I = ab + I = (a+I)(b+I)$

$\Rightarrow a + I = I$ или $b + I = I \Rightarrow a \in I$ или $b \in I$

2) ($\Rightarrow$) $a \in I$, $a + I \neq I = \bar{0}$

$\cancel{(a) \supset I}$; $\varphi : R \to R/I$; $I = \operatorname{Ker} \varphi = \varphi^{-1}(\overset{\bar{0}}{\overset{\shortparallel}{I}})$

$0 \longmapsto I$

$a \longmapsto a + I$

$r \in I \Leftrightarrow \varphi(r) = \bar{0}$

$I \subsetneq I + (a) \Rightarrow I + (a) = R \Rightarrow \exists i \in I,\ r \in R$

$i + ar = 1 \Rightarrow 1 - ar \in I \Rightarrow 1 + I = ar + I = (a+I)(r+I)$

i.e. $(a+I)^{-1} = r + I$

$(\Leftarrow)$ Nehme $I \subsetneq J \lhd R$; $j \in J \setminus I$

$j + I \in (R/I)^* \Rightarrow \exists a \in R : (j+I)(a+I) = 1 + I$

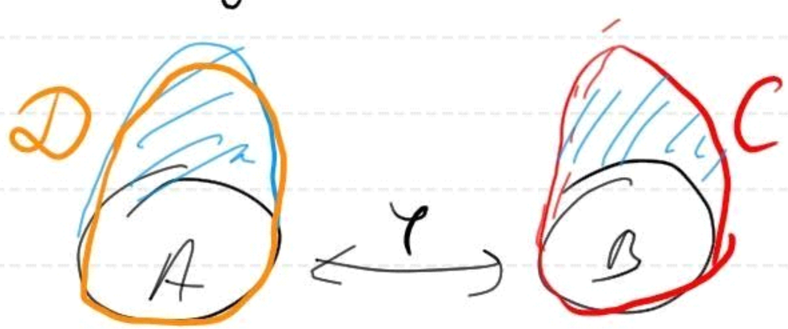
$\Rightarrow ja - 1 \in I \Rightarrow \exists i \in I : \underbrace{ja}_{\in J} - \underset{I \subset J}{\underset{\Uparrow}{i}} = 1 \in J \Rightarrow \underline{\underline{J = R}}$

Влагане на област на цялост в поле от частни

Зб. $A \subseteq B$; $\varphi: A \hookrightarrow B$ влагане на A в B
$a \longmapsto a$

Зб. б.о.о. $A \subseteq B \subseteq C$ ще казваме, че A се влага в C

(отъждествяване A и B)



в C има $+$
деф. в D

$d_1, d_2 \in C \setminus B = D \setminus A \rightarrow d_1 + d_2 = \begin{cases} \varphi^{-1}(d_1+d_2) & \in B \\ d_1 + d_2 & \notin B \end{cases}$

$d_1, d_2 \in A$

$d_1 + d_2 = \varphi^{-1}(\varphi(d_1) + \varphi(d_2))$

$d_1 \in D \setminus A$, $d_2 \in A$

$d_1 + d_2 = \begin{cases} d_1 + \varphi(d_2) & d_1 + \varphi(d_2) \in C \setminus B \\ \varphi^{-1}(d_1 + \varphi(d_2)) & d_1 + \varphi(d_2) \in B \end{cases}$

$\mathbb{Z}$ - обл. цел.

$R = \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, z_2 \neq 0\} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

$\sim$ в R: $(a,b) \sim (c,d) \overset{def}{\iff} ad - bc = 0$

<u>Тв.</u> $\sim$ е РЕ

$\overline{\mathbb{Q} = R/\sim} = \{[(z_1, z_2)] \mid (z_1, z_2) \in R\}$

$[(a,b)] + [(c,d)] = [(ad+bc, bd)]$

$[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(ac, bd)]$

- коректност ... $\mathbb{Q}$ е поле