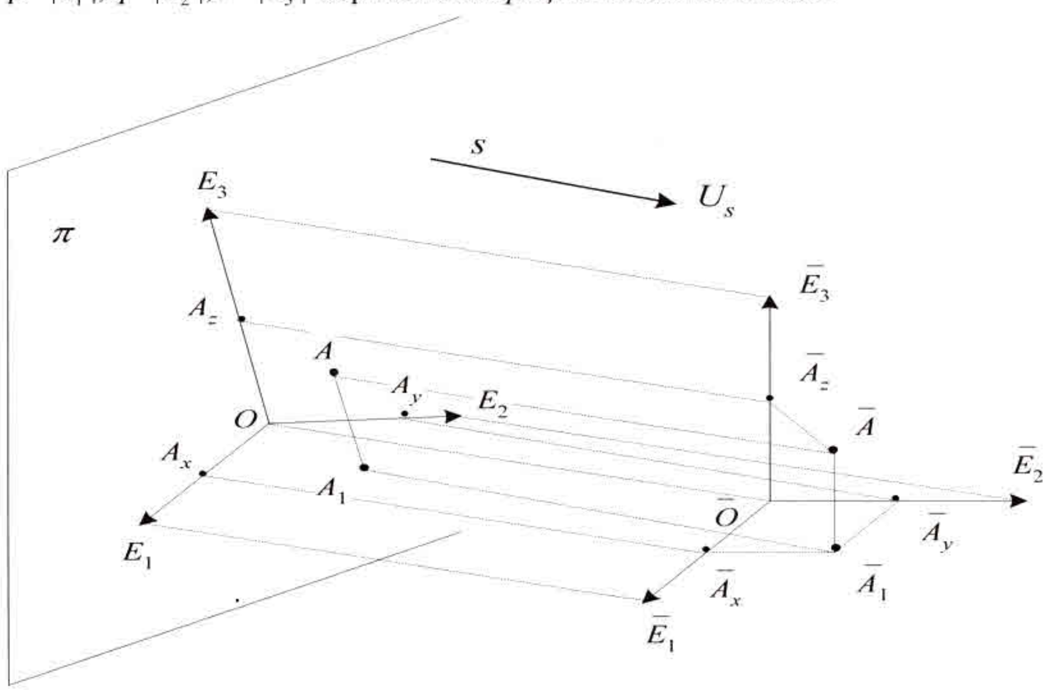
15. Аксонометрия

Проекционният апарат на метода аксонометрия се състои от:

1. Проекционна равнина π;
2. Ортонормирана координатна ситема $\overline{K} = \{\overline{O}, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$;
3. Проекционен център – безкрайна точка U_s, нележаща в π и в никоя от координатните равнини на $\overline{K} = \{\overline{O}, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$.

Означаваме с $\psi_\pi^{U_s}$ успоредното проектиране от U_s в π. Нека $\overline{O} \xrightarrow{\psi_\pi^{U_s}} O$, $\overrightarrow{\overline{O}\overline{E}_i} = \overline{e}_i$, ($O = \overline{O}U_S \cap \pi$), $E_i = \overline{E}_i U_S \cap \pi$, $i = 1,2,3$.

Множеството $K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, където $\vec{e}_i = \overrightarrow{OE_i}$, $i = 1,2,3$, наричаме аксонометрична координатна система. Никои два от векторите $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ не са колинеарни, тьй като никои два от векторите $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ не са колинеарни. Осите $O\vec{e}_1, O\vec{e}_2, O\vec{e}_3$ наричаме *аксонометрични оси*, а дължините на векторите върху аксонометричните оси $p = |\vec{e}_1|, q = |\vec{e}_2|, r = |\vec{e}_3|$ наричаме *коефициенти на изменение*.



1. Изобразяване на точки.

Нека $\overline{A}$ е точка, а $\overline{A}_1$ е ортогоналната ~~Ł~~ и проекция в равнината $(O, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$; ($\overline{A}\overline{A}_1 \perp (\overline{O}, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$, $\overline{A}_1 \in (\overline{O}, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$).

Точката $A = \overline{A}U_s \cap \pi$, т.е. $A = \psi_\pi^{U_s}(\overline{A})$ се нарича *аксонометрична проекция* на точката $\overline{A}$.

Точката $A_1 = \overline{A}_1 U_s \cap \pi$, т.е. $A_1 = \psi_\pi^{U_s}(\overline{A}_1)$ се нарича *първа вторична проекция* на точката $\overline{A}$.

Да отбележим, че $A\overline{A} \parallel s$ и $A_1\overline{A}_1 \parallel s$.

В аксонометрия точка $\overline{A}$ се задава от наредената двойка точки (A, A_1). Бележим $\overline{A}(A, A_1)$.

Тъй като при успоредно проектиране успоредни прави се изобразяват в успоредни прави, то: $AA_1 \parallel OE_3$, защото $\overline{A}\overline{A}_1 \parallel \overline{O}\overline{E}_3$. Точката $\overline{A}$ определя еднозначно двойката (A, A_1) и обратно наредената двойка (A, A_1), $AA_1 \parallel OE_3$, определя еднозначно $\overline{A}$, тъй като $A_1U_S \cap (\overline{O}\overline{e}_1\overline{e}_2) = \overline{A}_1$ и ако a е правата през $\overline{A}_1$, $a \perp (\overline{O}\overline{e}_1\overline{e}_2)$, то $a \cap AU_S = \overline{A}$. Аксонометрична проекция на една фигура намираме като намерим аксонометричните проекции на всички нейни точки.

Нека спрямо $\overline{K}$ точката $\overline{A}$ има координати $\overline{A}(x_{\overline{A}}, y_{\overline{A}}, z_{\overline{A}})$. Ако $\overline{A}_x \in \overline{O}\overline{e}_1$, $\overrightarrow{\overline{O}\overline{A}_x} = x_{\overline{A}}\overline{e}_1$, $\overline{A}_y \in \overline{O}\overline{e}_2$, $\overrightarrow{\overline{O}\overline{A}_y} = y_{\overline{A}}\overline{e}_2$ и $\overrightarrow{\overline{A}_1\overline{A}} = z_{\overline{A}}\overline{e}_3$, то $\overline{A}_1\overline{A}_x \parallel \overline{O}\overline{E}_2$ и $\overline{A}_1\overline{A}_y \parallel \overline{O}\overline{E}_1$. Нека $\overline{A}_x \xrightarrow{\psi_\pi^{U_S}} A_x$ и $\overline{A}_y \xrightarrow{\psi_\pi^{U_S}} A_y$. От свойствата на успоредното проектиране имаме: $A_x \in O\vec{e}_1$, $A_y \in O\vec{e}_2$, $A_1A_x \parallel OE_2$, $A_1A_y \parallel OE_1$.

От теоремата на Талес следва, че при успоредно проектиране, отношението на колинеарни вектори се запазва, от където имаме: $\overrightarrow{OA_x} = x_{\overline{A}}\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OA_y} = y_{\overline{A}}\vec{e}_2$, $\overrightarrow{A_1A} = z_{\overline{A}}\vec{e}_3$.

Тогава, ако в π е зададена аксонометрична координатна система $K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и знаем координатите $(x_{\overline{A}}, y_{\overline{A}}, z_{\overline{A}})$ на $\overline{A}$ спрямо $\overline{K}$, можем да намерим (A, A_1).

Естествено възниква въпросът: До колко произволно можем да изберем в π началото O и координатните вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ на аксонометричната координатна система?

Според теоремата на Полке-Шварц за равнинния четириъгълник $OE_1E_2E_3$ от равнината π и за тетраедъра $\overline{O}\overline{E}_1\overline{E}_2\overline{E}_3$ съществуват равнина π' и безкрайна точка U_S, така че проекцията на $\overline{O}\overline{E}_1\overline{E}_2\overline{E}_3$ от U_S в π' е четириъгълник $O'E_1'E_2'E_3'$, подобен на $OE_1E_2E_3$.

Тъй като подобните фигури дават една и съща представа за изобразявания обект, то можем да считаме $OE_1E_2E_3$ за успоредна проекция на координатната система $\overline{O}\overline{E}_1\overline{E}_2\overline{E}_3$. Този резултат формулираме като:

Основна теорема на аксонометрията: Началото O и координатните вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ на аксонометричната координатна система $K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ могат да бъдат избрани произволно при условието никои два от векторите $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ да не са колинеарни.

Видове аксонометрични проекции.

I. Според направлението на проектиране, аксонометричните проекции биват два вида:

1) правоъгълна аксонометрия $U_S \perp \pi$ $(s \perp \pi)$;

2) наведена аксонометрия $U_S \not\perp \pi$ $(s \not\perp \pi)$.

Тук U_S е проекционният център, а π е проекционната равнина.

II. Според коефициентите на изменение различаваме:

Ако $K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ е аксонометричната координатна система и $p = |\vec{e}_1|$, $q = |\vec{e}_2|$, $r = |\vec{e}_3|$

1) изометрия $p = q = r$;
2) диметрия $p = q \neq r$;
3) триметрия $p \neq q \neq r \neq p$.