Системи линейни уравнения.

Разглеждаме произволна система линейни уравнения:

$$(1)\left|\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \dots & + & \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & \dots & + & \alpha_{2n}x_n & = & \beta_2, \\ & \dots & & & & & & & \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \alpha_{m2}x_2 & + & \dots & + & \alpha_{mn}x_n & = & \beta_m, \end{array}\right.$$

където $m, n \in \mathbb{N}, \alpha_{ij}, \beta_j \in F$.

Казваме, че системата (1) е съвместима (несъвместима), ако тя има (няма) решение.

Матрицата, съответсваща на системата и състояща се от коефициентите пред неизвестните е

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

а разширената матрица, състояща се от коефициентите и от дясната част на системата е

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right).$$

Тъй като $\overline{A}$ се получава от A с добавяне на допълнителен стълб, е ясно, че винаги

$$\operatorname{rank} \overline{A} = \operatorname{rank} A \text{ или } \operatorname{rank} \overline{A} = \operatorname{rank} A + 1.$$

Теорема на Руше. *Системата (1) има решение* $\Leftrightarrow \operatorname{rank} \overline{A} = \operatorname{rank} A$.

Доказателство. Означаваме вектор-стълбовете на A с

$$b_1 = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{m1}), \dots, b_n = (\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{mn}) \in F^m,$$

а $b = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in F^m$ е векторът на дясната част. $\ell(b_1, \dots, b_n) \subseteq \ell(b_1, \dots, b_n, b)$ и $\ell(b_1, \dots, b_n) = \ell(b_1, \dots, b_n, b)$ точно когато $b \in \ell(b_1, \dots, b_n)$. Знаем, че (1) е съвместима тогава и само тогава, когато съществува n-торка числа $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, такива че

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} \alpha_{11}\lambda_1 & + & \alpha_{12}\lambda_2 & + & \dots & + & \alpha_{1n}\lambda_n & = & \beta_1, \\ \alpha_{21}\lambda_1 & + & \alpha_{22}\lambda_2 & + & \dots & + & \alpha_{2n}\lambda_n & = & \beta_2, \\ & \dots & & & & & & & \\ \alpha_{m1}\lambda_1 & + & \alpha_{m2}\lambda_2 & + & \dots & + & \alpha_{mn}\lambda_n & = & \beta_m, \end{array} \right.$$

което е еквивалентно на $b = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n \Leftrightarrow b \in \ell(b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow \ell(b_1, \dots, b_n) = \ell(b_1, \dots, b_n, b) \Leftrightarrow \dim \ell(b_1, \dots, b_n) = \dim \ell(b_1, \dots, b_n, b) \Leftrightarrow \operatorname{rank}(b_1, \dots, b_n) = \operatorname{rank}(b_1, \dots, b_n, b) \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$. $\square$

Да изследваме броя на решенията на системата (1). Ако $\operatorname{rank} \overline{A} \neq \operatorname{rank} A$, то според теоремата на Руше системата е несъвместима и решенията са 0 на брой. Нека $\operatorname{rank} \overline{A} = \operatorname{rank} A = r (r \leq m, n)$. Ако $r = 0$, то това означава, че всички коефициенти са нули и векторът на дясната част е o. В такъв случай системата ще бъде изпълнена за произволни стойности на неизвестните $x_1, \dots, x_n$, т.е. тя ще има безбройно много решения. Нека сега $r \geq 1$. Без ограничение на общността може да считаме, че (след евентуално разместване на уравненията и преномериране на индексите на неизвестните $x_1, \dots, x_n$) в A различен от 0 е минорът

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rr} \end{vmatrix}.$$

При това положение r+1-то,...,n-тото уравнения са линейна комбинация на първите r уравнения на системата (т.е. са следствия от тях). Тогава (1) е равносилна на системата

$$(2) \left| \begin{array}{ccccccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \dots & + & \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & \dots & + & \alpha_{2n}x_n & = & \beta_2, \\ & \dots & & & & & & & \\ \alpha_{r1}x_1 & + & \alpha_{r2}x_2 & + & \dots & + & \alpha_{rn}x_n & = & \beta_r, \end{array} \right.$$

състояща се само от първите r на брой уравнения. Ако $r = n$ то получаваме система от n уравнения с n неизвестни с $\det A \neq 0$ (т.к. $\operatorname{rank} A \geq 1$) и от формулите на Крамер знаем, че тя има единствено решение. Нека $r < n$. Записваме (2) във вида

$$(2')\quad \left| \begin{array}{lllllllll} \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \dots & + & \alpha_{1r}x_r & = & \beta_1 - \alpha_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - \alpha_{1n}x_n, \\ \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & \dots & + & \alpha_{2r}x_r & = & \beta_2 - \alpha_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - \alpha_{2n}x_n, \\ & \dots & & & & & & & \\ \alpha_{r1}x_1 & + & \alpha_{r2}x_2 & + & \dots & + & \alpha_{rr}x_r & = & \beta_r - \alpha_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - \alpha_{rn}x_n \end{array} \right.$$

и я решаваме по формулите на Крамер относно неизвестните $x_1, \dots, x_r$. За $k = 1, 2, \dots, r$ имаме, че $x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$, където Δ_k е детерминантата от ред r, получена от Δ като k-тия стълб се замени със стълба от свободните членове. След развиване на Δ_k по k-тия стълб получаваме, че

$$x_k = \lambda_{k1}x_{r+1} + \lambda_{k2}x_{r+2} + \dots + \lambda_{k,n-r}x_n + \mu_k$$

за числа $\lambda_{kj}, \mu_k \in F, j = 1, \dots, n-r$. Така се получават всички решения на (1). Неизвестните $x_{r+1}, \dots, x_n$ приемат различни стойности от F (наричат се свободни неизвестни), а останалите $x_1, \dots, x_r$ се изразяват еднозначано чрез тях. Поради проиволния брой стойности, които пробягват $x_{r+1}, \dots, x_n$, отново имаме безброй много решения.

Записваме решенията във вида

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_r; \underbrace{x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n}_{\text{„опашка“ на решенията}}) \in F^n.$$

Ако $y = (y_1, y_2, \dots, y_r; y_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_n) \in F^n$ също е решение и имаме, че $y_{r+1} = x_{r+1}, \dots, y_n = x_n$, то следва и че $y_1 = x_1, \dots, y_r = x_r$, т.е. $y = x$.

Система от вида

$$(3)\quad \left| \begin{array}{lllllllll} \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \dots & + & \alpha_{1n}x_n & = & 0, \\ \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & \dots & + & \alpha_{2n}x_n & = & 0, \\ & \dots & & & & & & & \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \alpha_{m2}x_2 & + & \dots & + & \alpha_{mn}x_n & = & 0, \end{array} \right.$$

се нарича *хомогенна*.

Свойства:

(i) Системата (3) винаги е съвместима, т.к. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ винаги

е решение.
(ii) Ако $n > m$, то (3) има и ненулево решение. Наистина, нека $A = (\alpha_{ij})_{m\times n}, \operatorname{rank} A = r, r \le m$. От $m < n \Rightarrow r < n$ и тогава (3) има безбройно много решения. Следователно ще има и ненулево решение.
(iii) Нека $m = n$. (3) има ненулево решение $\Leftrightarrow \det A = 0$. Необходимост: ако допуснем, че $\det A \ne 0$, то по формулите на Крамер системата има единствено решение и то задължително е нулевото т.к. $x = o$ винаги е решение. Достатъчност: $\det A = 0 \Rightarrow r = \operatorname{rank} A < n$. Тогава (3) има безбройно много решения, а оттам има и ненулево.
(iv) Нека U е множеството от всички решения на (3). $U \subseteq F^n$ и U е подпространство на F. Наистина, ако $x \in U$ и $y \in U$, то за произволни $\lambda, \mu \in F$ имаме

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay = \lambda o + \mu o = o$$

и следователно $\lambda x + \mu y \in U$.
(v) $\dim U = n - r$: Всяко решение има вида $x = (x_1, \dots, x_r; x_{r+1}, \dots, x_n)$, където $x_{r+1}, \dots, x_n$ са произволни, а $x_k = \lambda_{k1}x_{r+1} + \dots + \lambda_{k,n-r}x_n$ за $k = 1, \dots, r$, (λ_{ki} са някакви числа). Нека $x_{r+1} = 1, x_{r+2} = \dots = x_n = 0$. Така получаваме решение

$$c_1 = (\lambda_{11}, \lambda_{21}, \dots, \lambda_{r1}; 1, 0, \dots, 0).$$

Нека сега $x_{r+2} = 1, x_{r+1} = x_{r+3} = \dots = x_n = 0$. Тогава получаваме решението

$$c_2 = (\lambda_{12}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{r2}; 0, 1, \dots, 0).$$

Продължаваме по същия начин нататък до случая $x_n = 1, x_{r+1} = \dots = x_{n-1} = 0$. Получаваме решение

$$c_{n-r}(\lambda_{1,n-r}, \lambda_{2,n-r}, \dots, \lambda_{r,n-r}; 0, 0, \dots, 1).$$

Ще докажем, че векторите $c_1, \dots, c_{n-r}$ са базис на U, откъдето ще следва, че $\dim U = n - r$. Наистина, нека разгледаме матрицата $C_{(n-r)\times n}$, състояща се от векторите $c_1, \dots, c_{n-r}$, които са нейни вектор-редове.

$$C = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \dots & \lambda_{r1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{r2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \lambda_{1,n-r} & \lambda_{2,n-r} & \dots & \lambda_{r,n-r} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

Очевидно минорът

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}_{(n-r)\times(n-r)} = 1$$

е ненулев и следователно $\operatorname{rank} C = n - r$. Но това означава, че $\operatorname{rank}(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) = n-r \Rightarrow$ векторите $c_1, \dots, c_{n-r}$ са линейно независими. Нека вземем произволно решение $x \in U : x = (x_1, \dots, x_r; x_{r+1}, \dots, x_n)$. Нека $x' = x_{r+1}c_1 + x_{r+2}c_2 + \dots + x_n c_{n-r}$. Понеже $U \leq V$, $x' \in U$. Освен това очевидно $x' = (*, *, \dots, *; x_{r+1}, \dots, x_n)$. По този начин x и x' имат еднакви „опашки“ и следовтелно $x = x'$, т.е. $x = x_{r+1}c_1 + x_{r+2}c_2 + \dots + x_n c_{n-r}$. Така $U = \ell(x_{r+1}, \dots, x_n) \Rightarrow c_1, \dots, c_{n-r}$ са базис на U и $\dim U = n - r$. Всеки базис на U се нарича *фундаментална система решения* на (3). Системата от вектори $c_1, \dots, c_{n-r}$ е една такава система.

(vi) Чрез директна проверка се установява, че всяко решение на системата (1) има вида

$$x = x_0 + \nu_1 c_1 + \dots + \nu_{n-r} c_{n-r},$$

където x_0 е решение на (1), а $c_1, \dots, c_{n-r}$ е фундаментална система решения на (3), ν_i са някакви числа от полето на скаларите.