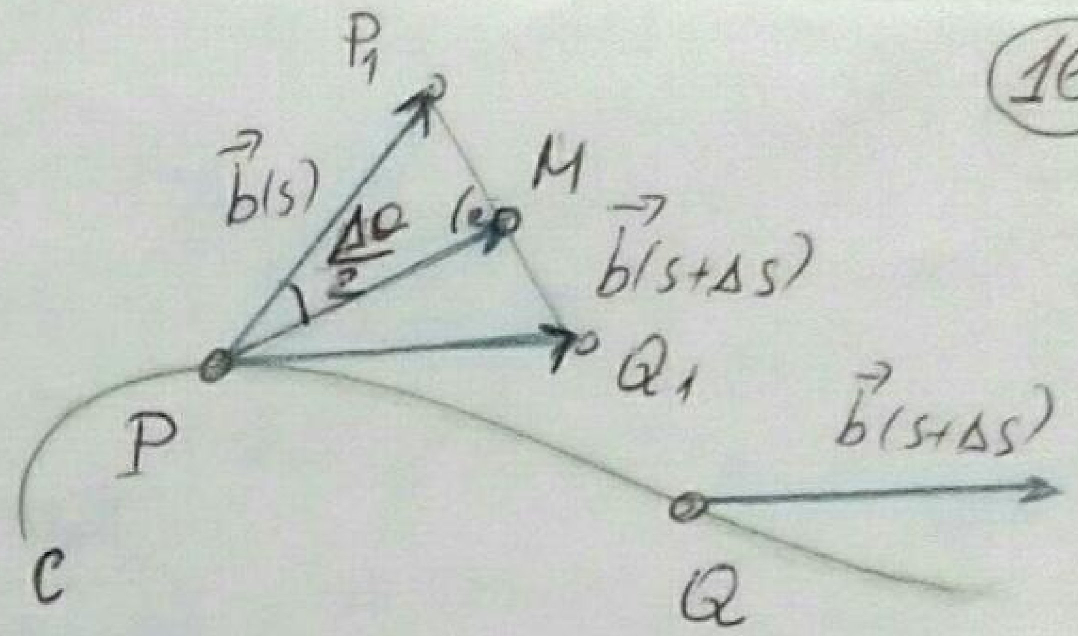
Торзия на правилна крива



Нека c е правилна крива, P и $Q \in c$,
α_P и α_Q – оскулачните равнини на c съответно в т-те P и Q. Означаваме с $\Delta s = |\overset{\frown}{PQ}|$ и $\Delta\theta = \measuredangle(\alpha_P, \alpha_Q)$.

Деф. Ако $\exists \lim\limits_{Q \to P} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$, то тази граница се нар. абсолютна торзия на c в т-та P и се бележи с $|\tau|$ ≥ 0.

Т1. Нека c е 3-кратно гладка правилна крива. Тогава c има определена във всяка своя т-ка абсолютна торзия $|\tau|$. Ако c е отнесена спрямо естествения си параметър, то
$$|\tau(s)| = \frac{|\vec{r}'(s)\,\vec{r}''(s)\,\vec{r}'''(s)|}{\vec{r}''(s)^2} = \frac{|\vec{r}'\,\vec{r}''\,\vec{r}'''|}{\varkappa^2(s)}$$

Да се попълни именно тр-е – числова ф-ция

Док. Аналог. на ... $\varkappa$. $\measuredangle(\alpha_P, \alpha_Q) = \measuredangle(\vec{b}(P), \vec{b}(Q))$. Нека $P = \vec{r}(s)$, т.е. $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(s)$.
$\Rightarrow \overrightarrow{OQ} = \vec{r}(s+\Delta s)$, $\vec{b}(s) \begin{cases} \ni P \\ \perp \alpha_P \end{cases}$, $\vec{b}(s+\Delta s) \begin{cases} \ni Q \\ \perp \alpha_Q \end{cases} \Rightarrow \Delta\theta = \measuredangle(\vec{b}(s), \vec{b}(s+\Delta s))$

Нека $P_1 \in b_P : \overrightarrow{PP_1} = \vec{b}(s)$, $Q_1 : \overrightarrow{PQ_1} = \vec{b}(s+\Delta s) \Rightarrow |PP_1| = |QQ_1| = 1 \Rightarrow$
ΔPP_1Q_1 – равнобедрен $\Rightarrow PM \perp P_1Q_1 \Rightarrow M_*$ – средата на (P_1Q_1), $\measuredangle P_1PM = \frac{\Delta\theta}{2}$

Пак $|\overrightarrow{P_1Q_1}| = |\vec{b}(s+\Delta s) - \vec{b}(s)|$, $\sin\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{|MP_1|}{|PP_1|} = \frac{1}{2}\,|\vec{b}(s+\Delta s) - \vec{b}(s)| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}|\vec{b}(s+\Delta s)-\vec{b}(s)|}{\Delta s} \equiv \frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta s} = \frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta}\cdot\underbrace{\frac{\Delta\theta}{\Delta s}}_{=1} \Rightarrow$$ при $Q\to P$, $\Delta s\to 0$, $\Delta\theta \to 0$ $\Rightarrow$

$$\underbrace{\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\vec{b}(s+\Delta s)-\vec{b}(s)|}{\Delta s}}_{=\vec{b}'(s)} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\cdot\lim_{Q\to P}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} \Rightarrow$$

$$\boxed{|\vec{b}'(s)| = \lim_{\substack{\Delta\theta\to 0\\ \Delta s\to 0}}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = |\tau(s)|}$$

За ф-лата $|\vec{b}'| = ?$

1. $\vec{b}'$ е лин. комбинация на $\vec{t}, \vec{n}$ и $\vec{b}$

от $\vec{b}^2 = 1 \Rightarrow 2\vec{b}\vec{b}' = 0 \Rightarrow \vec{b}' \perp \vec{b}$

От $\vec{b} = \vec{t}\times\vec{n} \Rightarrow \vec{b}' = \vec{t}'\times\vec{n} + \vec{t}\times\vec{n}'$, $\vec{t} = \vec{r}'$, $\vec{n} = \frac{\vec{r}''}{\sqrt{\vec{r}''^2}} \Rightarrow$

$\vec{t}'\times\vec{n} = \frac{\vec{r}''\times\vec{r}''}{\sqrt{\vec{r}''^2}} = \vec{o} \Rightarrow \boxed{\vec{b}' = \vec{t}\times\vec{n}'} \Rightarrow \vec{b}'\perp\vec{t}$. От $\left.\begin{matrix}\vec{b}'\perp\vec{t}\\ \vec{b}'\perp\vec{b}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{b}' \parallel \vec{n}$

$\Rightarrow \vec{b}'(s) = \lambda(s)\vec{n}(s) \Rightarrow \vec{b}'\vec{n} = \lambda(s)\underbrace{\vec{n}^2}_{=\vec{o}} = \lambda(s). \Rightarrow |\vec{b}'| = |\lambda(s)| = |\vec{b}'\vec{n}|$ $\quad (\vec{b}'\vec{n} = |\vec{b}'||\vec{n}|\cos\ldots)$

Имаме $\vec{b} = \frac{\vec{r}'\times\vec{r}''}{\sqrt{\vec{r}''^2}} \Rightarrow \vec{b}' = \frac{\vec{r}''\times\vec{r}''+\vec{r}'\times\vec{r}'''}{\sqrt{\vec{r}''^2}} + (r'\times r'').\left(\frac{1}{\sqrt{\vec{r}''^2}}\right)'$ $\xrightarrow{\text{стр.}}$

$\Rightarrow \vec{b}' = \frac{\vec{r}'\times\vec{r}'''}{\sqrt{\vec{r}''^2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{\vec{r}''^2}}\right)'(\vec{r}'\times\vec{r}'')$ $\Big|$ скаларно по $\vec{n} = \frac{\vec{r}''}{\sqrt{\vec{r}''^2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{b}'\vec{n} = \frac{(\vec{r}'\times\vec{r}''')\vec{r}''}{\vec{r}''^2} + \left(\frac{1}{r}\right)'\underbrace{(\vec{r}'\times\vec{r}'')\vec{r}''}_{=0} = -\frac{\vec{r}'\vec{r}''\vec{r}'''}{\vec{r}''^2} =$$

$$\Rightarrow |\tau| = \left|\frac{\vec{r}'\vec{r}''\vec{r}'''}{\vec{r}''^2}\right| = \frac{|\vec{r}'\vec{r}''\vec{r}'''|}{\varkappa^2}$$

! Може само с $b' = t\times n' \Rightarrow b'n = (t\times n')n$

$b'n = tn'n$, $t = r'$, $n = \frac{r''}{r}$, $n' = r''\dots$

$= -tnn'$

Def. Торзия $-\ \dfrac{r'r''r'''}{\vec{r}''^2}$ – смесено произведение в този ред.

тя и по-ясно...

$$\Rightarrow \tau = \pm|\tau| \qquad \tau(s) = \frac{r'(s)r''(s)r'''(s)}{\vec{r}''^2(s)}.$$

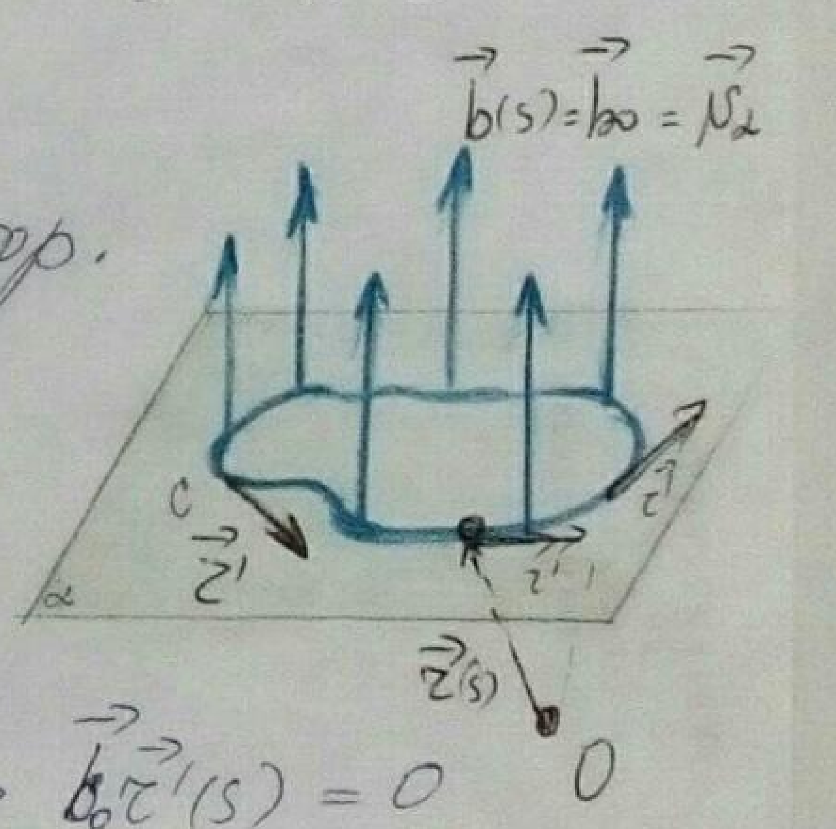
примери – елипса, хипербола, парабола...

Def. Кривата c нар. равнинна, ако $\exists$ равнина, която я съдържа.

Т. Нека c е 3-кратно гладка правилна крива. Тогава $\tau = 0 \iff$ $\forall s\in S$ c е равнинна.

и тя е оскулачната

Док. 1. Нека $\tau = 0 \Rightarrow \vec{b}'(s) = \vec{0} \Rightarrow \vec{b}(s) = \vec{b}_0$ – константен вектор.



$$\Rightarrow \vec{b}(s) = \frac{\vec{r}'(s)\times\vec{r}''(s)}{\underbrace{\sqrt{\vec{r}''^2(s)}}_{=\varkappa(s)}} = \vec{b}_0 \quad , \varkappa(s) = \sqrt{\vec{r}''^2(s)} = \dots \neq 0$$

$\Rightarrow \vec{r}'(s)\times\vec{r}''(s) = \varkappa(s)\vec{b}_0$ | умнож. скаларно с $\vec{r}'(s)$ $\Rightarrow$

$$0 = r'r'r'' = \varkappa(s)\vec{b}_0\vec{r}' \Rightarrow \varkappa(s).\vec{b}_0\vec{r}'(s) = 0\ ,\ \varkappa(s)\neq 0 \Rightarrow \vec{b}_0\vec{r}'(s) = 0$$

$\Rightarrow$ от $\vec{b}_0 \vec{r}'(s) = 0 \Rightarrow \int \vec{b}_0 \vec{r}'(s) ds = p_0 \Rightarrow \vec{b}_0 \vec{r}(s) + \ldots$ (19)

$\Rightarrow \boxed{\vec{b}_0 \vec{r}(s) + p^* = 0}$ – у-ние на постоянна равнина с нормален в-р $\vec{b} = \vec{b}_0$

(т.е.) кривата лежи в оскулачната си равнина.

(всъщност в-рната ф-ция $\vec{r}'$ е компланарна с постоянна равнина $\Leftrightarrow \vec{r}'\vec{r}''\vec{r}''' = 0$)

2.) Ако c е равнинна $\Rightarrow \ldots \vec{r}'$ компл. с пост. р-на $\Rightarrow r' r'' r''' = 0$.

Формули на Френе за правилна крива

Нека $c : \vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in S$ $(\vec{r}'^2(s) = 1)$ е 3-кратно гладка правилна крива с $P\vec{t}\vec{n}\vec{b}$ – придруж. триедър на Френе. $(c \in C^{(3)})$

$\Rightarrow \vec{t}'(s), \vec{n}'(s)$ и $\vec{b}'(s)$ са лин. комбинации на $\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)$

① $\vec{t}' = \vec{r}' \Rightarrow \vec{t}' = \vec{r}''$, имаме $\vec{n} = \frac{\vec{r}''}{\sqrt{\vec{r}''^2}}$, $\sqrt{\vec{r}''^2(s)} = \varkappa(s) \Rightarrow \vec{t}' = \varkappa \vec{n}$

② Също така $\vec{b}' = \lambda(s)\vec{n} \Rightarrow \vec{b}'\vec{n} = \lambda(s)$, като $\vec{b}'\vec{n} = -\frac{\vec{r}'\vec{r}''\vec{r}'''}{\vec{r}''^2} = -\tau(s)$

$\Rightarrow \vec{b}' = -\tau\vec{n}$ и

③ $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} \Rightarrow \vec{n}' = \vec{b}' \times \vec{t} + \vec{b} \times \vec{t}' = -\tau\vec{n} \times \vec{t} + \vec{b} \times \varkappa\vec{n} \Rightarrow$

$\vec{n}' = -\varkappa\vec{t} + \tau\vec{b}$ $\Rightarrow$
$$\vec{t}' = \varkappa\vec{n}$$
$$\vec{n}' = -\varkappa\vec{t} + \tau\vec{b}$$
$$\vec{b}' = -\tau\vec{n}$$

// заб. → анти-симетрична ... $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ – с пост. д-на ... //

Основна теорема в диференциалната геометрия.

$\left(19\frac{1}{2}\right)$

Нека са дадени функциите $\varphi(s) \in C^{1}$, $\psi(s) \in C^{(1)}$ с общ дефиниционен интервал S_0, $\varphi(s) > 0$. Ако в т. $\vec{r}_0$ е дадена положително ориентирана ортонормирана тройка вектори $\vec{t}_0, \vec{n}_0, \vec{b}_0$, то $\exists!$ крива $c \in C^{(3)}$, $c: \vec{r} = \vec{r}(s)$, която има в тази точка за триедър на Френе – $\vec{r}_0\vec{t}_0\vec{n}_0\vec{b}_0$ с кривина $\varphi(s)$ и торзия $\psi(s)$ в т. $\vec{r}(s)$, $s \in S$

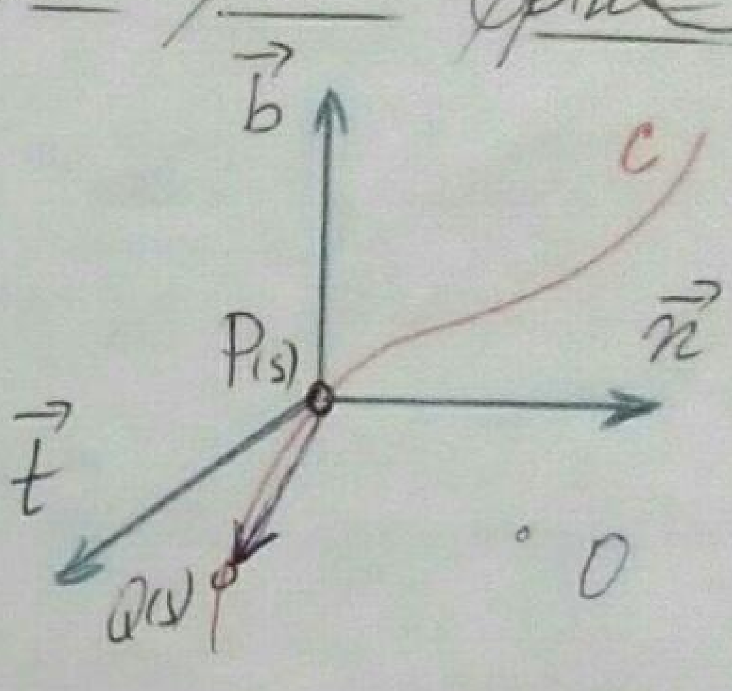
$\varkappa(s), \tau(s)$ – естествени уравнения на c

$$\left|\begin{aligned} \vec{t}\,' &= \varphi\,\vec{n} \\ \vec{n}\,' &= -\varphi\,\vec{t} + \psi\,\vec{b} \\ \vec{b}\,' &= -\psi\,\vec{n} \end{aligned}\right.$$

– система диференциални уравнения с начални у-вия

Координатно параметрични у-ния на c спрямо триедъра на Френе (20)

Нека $c = c(s) : \vec{r} = \vec{r}(s)$, $P \in c$, $P = P(s)$



$\vec{OP} = \vec{r}(s)$, $Q \in c$ $\vec{OQ} = \vec{r}(s+h)$, $s+h \in S$ $\Rightarrow$ пак.

$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \vec{r}(s+h) - \vec{r}(s) =$

$= \vec{r}(s) + h r'(s) + \frac{h^2}{2}\vec{r}''(s) + \frac{h^3}{6}\vec{r}'''(s) + \dots - \vec{r}(s) + \vec{\varepsilon}(h,s)$

$\Rightarrow \vec{PQ} = h\underbrace{\vec{r}'}_{=\vec{t}} + \frac{h^2}{2}\underbrace{\vec{r}''}_{\vec{r}'' = \varkappa\vec{n}} + \frac{h^3}{6}\vec{r}''' + \dots$, $\vec{r}''' = \varkappa'\vec{n} + \varkappa\vec{n}' = \varkappa'\vec{n} + \varkappa(-\varkappa\vec{t} + \tau\vec{b})$

$\Rightarrow \vec{r}''' = -\varkappa^2\vec{t} + \varkappa'\vec{n} + \varkappa\tau\vec{b} \Rightarrow$

$$\vec{PQ} = \left(h - \frac{h^3}{6}\varkappa^2 + \dots\right)\vec{t} + \left(\frac{h^2}{2}\varkappa + \frac{h^3}{6}\varkappa' + \dots\right)\vec{n} + \left(\frac{h^3}{6}\varkappa\tau + \dots\right)\vec{b}$$

Нека спрямо $P\vec{t}\vec{n}\vec{b}$ т. $Q(\xi, \eta, \zeta)$, т.е. $\vec{PQ} = \xi\vec{t} + \eta\vec{n} + \zeta\vec{b}$.

или

$$c : \begin{cases} \xi = h - \frac{h^3}{6}\varkappa^2 + \dots \\ \eta = \frac{h^2}{2}\varkappa + \frac{h^3}{6}\varkappa' + \dots \\ \zeta = \frac{h^3}{6}\varkappa\tau + \dots \end{cases}$$

– са координатните у-ния на c спрямо триедъра на Френе.

III Проекции на c върху равнините от триедъра на Френе (21)

① c_1 – проекцията на c в/у оскулачната равнина $\alpha: \zeta = 0$

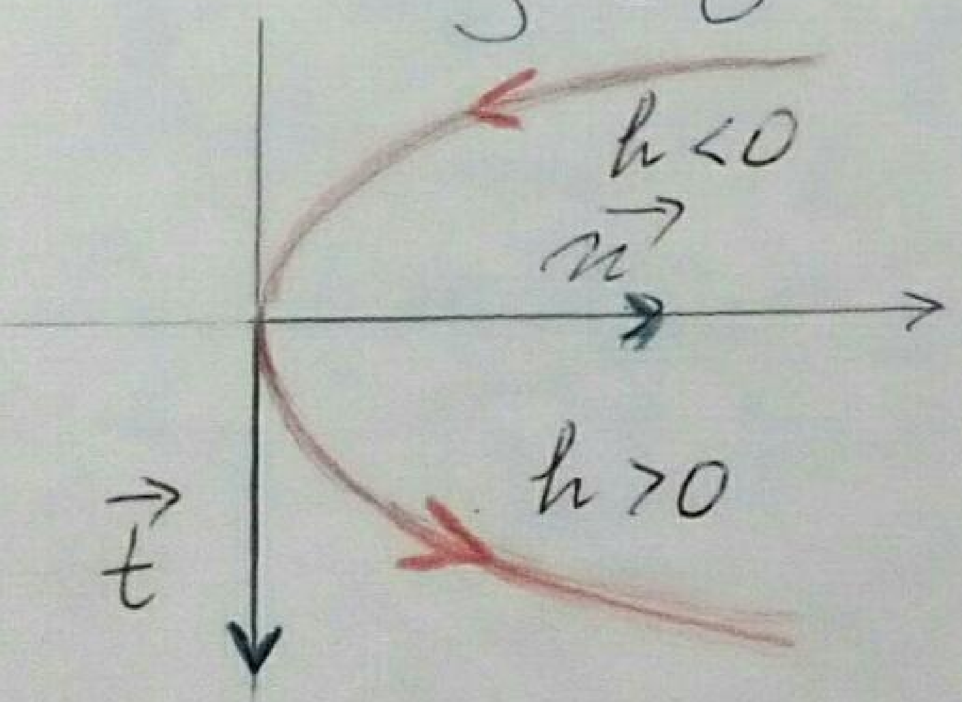
ч.р. $\Rightarrow h \to 0$ ... пренебрегваме високите степени h^3, h^4 ... $\alpha = P\vec{t}\vec{n}$ $\Rightarrow$

$$c_1: \begin{cases} \xi = h \\ \eta = \dfrac{h^2}{2}\varkappa \\ \zeta = 0 \end{cases}$$

$\to$ При $Q \to P$ по c, можем да ги пренебрегнем.

$\Rightarrow \eta = \dfrac{\xi^2}{2}\varkappa$ т.е. $c_1: \xi^2 = \dfrac{2}{\varkappa}\eta$ – парабола

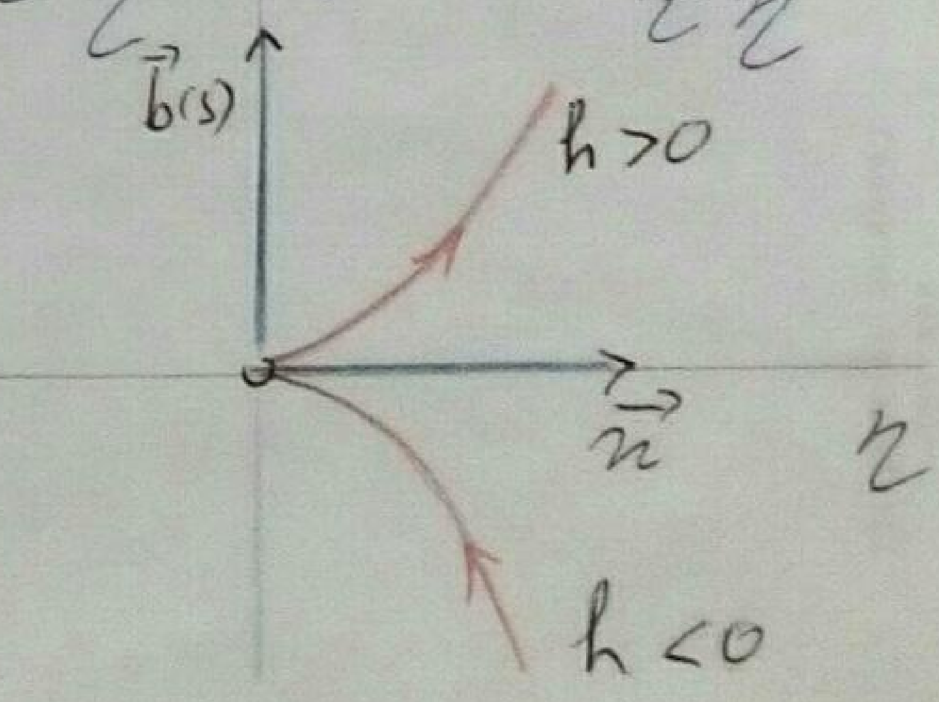
$\varkappa > 0$ $\eta > 0$



② c_2 – проекцията в/у нормалната р-на ν:

$$\nu: \xi = 0 \Rightarrow c_2: \begin{cases} \xi = 0 \\ \eta = \dfrac{h^2}{2}\varkappa \\ \zeta = \dfrac{h^3}{6}\varkappa\tau = \dfrac{h}{3}\tau\cdot\eta \end{cases} \Rightarrow h^2 = \frac{2}{\varkappa}\eta$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{h}{6}h^2\varkappa\tau = \frac{h}{\cancel{6}_3}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{\varkappa}}\cancel{\varkappa}\tau\eta \Rightarrow h = \frac{3\zeta}{\tau\eta}$$



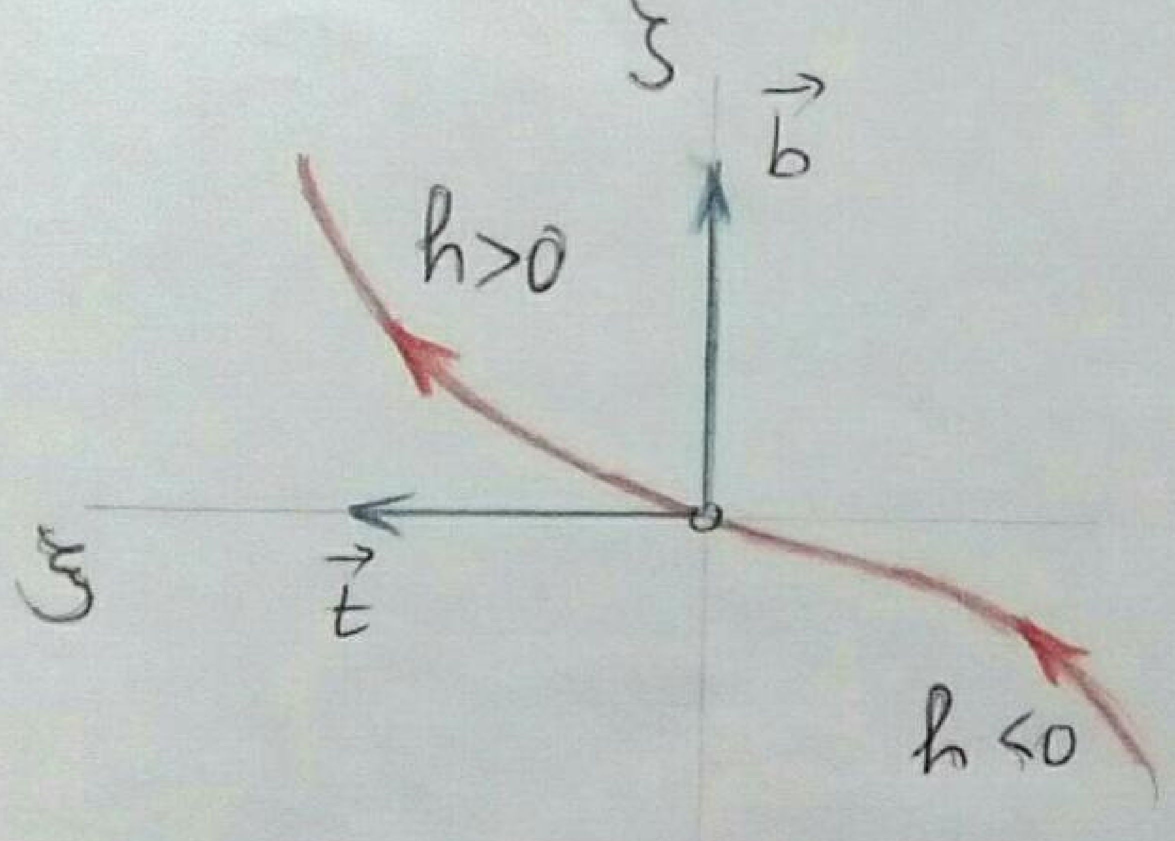
$$\Rightarrow \frac{2\eta}{\varkappa} = \frac{9\zeta^2}{\tau^2\eta^2} \Rightarrow \eta = \frac{9\zeta^2}{2\eta^2\cdot\tau^2}\varkappa \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_2: 2\tau^2\eta^3 - 9\varkappa\zeta^2 = 0$$

семикубична парабола.

③ c_3 - проекцията върху ректифициращата равнина. (22)

$-: \beta : \eta = 0 \quad \beta : P\vec{t}\vec{b} \quad \Rightarrow \quad c_3 : \begin{cases} \xi = h \\ \eta = 0 \\ \zeta = \dfrac{h^3}{6}\varkappa\tau \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_3 : \zeta = \dfrac{\varkappa\tau}{6}\xi^3$



- семикубична парабола