Писмен изпит по Аналитична геометрия
I курс, Информатика
24.01.2022 г.

Вариант 1

1 зад. Даден е тетраедър $OABC$. Нека точката A_1е медицентър на ΔOBC, точката B_1 е медицентър на ΔOAC, точката C_1 е медицентър на ΔOAB и точката O_1 е медицентър на ΔABC. Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

a) (4 т.) Да се изразят векторите $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ чрез векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;
b) (6 т.) Да се докаже, че правите AA_1 и BB_1 се пресичат в една точка M и $AM: MA_1 = BM: MB_1$=3:1
c) (2 т.) Да се докаже, че точките O, M, O_1 са колинеарни.

2 зад Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, за които $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.
Нека $\overrightarrow{OA} = \vec{a} + \vec{b},\ \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{a} \times \vec{b}$.

a) (6 т.) Да се докаже, че съществува тетраедър *OABC;*
b) (2 т.) Да се намери обема на тетраедъра *OABC*.

3 зад. Спрямо ОКС *К* = *Oxyz* в пространството са дадени правите

$$a: \begin{cases} 2x + y + 2z - 10 = 0 \\ 4x - y + z - 11 = 0 \end{cases} \text{ и } b: \begin{cases} x = -5 + 3q \\ y = 5 - 2q \\ z = 3 - 2q \end{cases}, q \in \mathbb{R}$$

a) (6 т.) Да се намери разстоянието между правите a и b;
b) (4 т.) Нека P е пресечната точка на правата a и равнината $\gamma: x + 2y - 2z - 23 = 0$, а Q е пресечната точка на правата b с равнината $\pi: 3x - 2y - 2z + 14 = 0$. Ако точката $R(2,4,-1)$, да се намери лицето на ΔPQR.

4 зад. (10 т.) В разширена евклидова равнина E_2^* е дадена кривата от втора степен

$$k: -x^2 + 4xy - 2y^2 - 6xt + 10t^2 = 0$$

и точката $P(6, 5, 2)$, която е външна за нея. Да се намерят общи уравнения на допирателните към кривата k, които минават през точката P.