

ДОМАШНО №2 по ДИЗАЙН И АНАЛИЗ НА АЛГОРИТМИ НА СПЕЦИАЛНОСТИ
ИНФОРМАТИКА И КОМПЮТЪРНИ НАУКИ, 2 ПОТОК,
ЛЕТЕН СЕМЕСТЪР 2022/2023 Г.

Краен срок за предаване: 09 април 2023 г., 23ч 59м.

Предаването е само в електронен вид в мюлдъл.

Всички отговори трябва да бъдат обосновани формално, подробно и прецизно.

Име: Ф№: Група: ..

Задача	1	2	3	Макс.
получени точки				
от максимално	30	30	40	100

Задача 1: Намерете асимптотичната сложност на всеки от следните три фрагмента от програми като функция на n .

```
int f(int n) {  
    int i, s=2, m=n*n;  
    for(i=0; i<m*n; i++)  
        s += s;  
    return s; }
```

```
int g(int n) {  
    if(n < 10) return 1;  
    int j=6, s=0;  
    while(j > 8) {  
        s += g(n-2);  
        j --;}  
    while(n-j > 1) {  
        j = n;  
        s += g(n-1) + g(n-2);}  
    while(j >= n) {  
        j = 2;  
        s += g(n-j);}  
    return s;}
```

```
int h(int n) {  
    int i, t=0;  
    if(n < 2) return 2;  
    t += h(n/3);  
    for(i = 2; i < n; i *= 2)  
        t ++;  
    t *= h(n/3);  
    return t; }
```

Задача 2: Нека $a_1 a_2 \dots a_n$ е пермутация на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$. *Инверсия* в тази пермутация се нарича всяка наредена двойка (i, j) , такава че $1 \leq i < j \leq n$ и $a_i > a_j$. *Инверсния вектор* на пермутацията $a_1 a_2 \dots a_n$ е векторът (b_1, b_2, \dots, b_n) , където $\forall i, 1 \leq i \leq n$, b_i е броят на елементите в $a_1 a_2 \dots a_n$, които са вляво от i и са по-големи от i .

- 5 т. а) Напишете инверсния вектор на пермутацията 4 2 3 7 1 8 5 9 6.
- 25 т. б) Предложете колкото може по-ефикасен алгоритъм, който по зададен инверсен вектор извежда оригиналната пермутация. Допуснете, че входът (b_1, b_2, \dots, b_n) на алгоритъма е коректен инверсен вектор на някоя пермутация на числата $\{1, 2, \dots, n\}$.

Дайте кратка обосновка на коректността на Вашия алгоритъм (не се иска строго доказателство по индукция или с инвариант) и изследвайте сложността му по време.

Задача 3: Нека $M[1..n, 1..m]$ е масив от естествени числа. За целите на тази задача ще казваме, че M е *интересен*, ако е изпълнено

$$M[p, q] + M[s, t] \leq M[p, t] + M[s, q]$$

за $1 \leq p < s \leq n$ и $1 \leq q < t \leq m$. Ето пример за масив 7×5 , който е интересен:

15	19	8	4	25
16	18	5	1	20
50	35	22	10	24
91	64	21	9	5
90	60	16	4	0
100	70	20	4	0
120	75	22	5	1

- 15 т. 1. Предложете алгоритъм с **линейна** сложност по време, чийто вход е масив $M[1..n, 1..m]$ и чийто изход е или 1, ако M е интересен, или 0, ако M не е интересен. Докажете коректността и сложността по време на този алгоритъм.

Забележка: сложността по време е функция от големината на входа.

- 5 т. 2. За $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, нека $\phi(i)$ е номерът на колоната, съдържаща най-левия минимален елемент в ред i на интересен масив $M[1..n, 1..m]$. Докажете, че

$$\phi(1) \leq \phi(2) \leq \dots \leq \phi(n)$$

- 5 т. 3. Нека

$$n_e = \{x \in \{1, 2, \dots, n\} \mid x \text{ е четно}\}$$

$$n_o = \{x \in \{1, 2, \dots, n\} \mid x \text{ е нечетно}\}$$

Допуснете, че са дадени $\phi(i)$ за всички $i \in n_e$. Обяснете как да намерим $\phi(i)$ за всички $i \in n_o$ във време $O(n + m)$.

- 15 т. 4. Предложете алгоритъм със сложност по време $O(n + m \lg n)$, изграден по схемата **Разделяй-и-Владей**, който има вход интересен масив $M[1..n, 1..m]$ и който изчислява $\phi(i)$ за $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Не е необходимо да пишете псевдокод, но трябва да обясните ясно и недвусмислено какво имате предвид. Накратко обосновете коректността и асимптотичната горна граница за сложността по време на Вашия алгоритъм.

Упътване: Вашето решение на 3) е добра отправна точка за конструиране на такъв алгоритъм.