Функции. 4.

Съдържание: частични и тотални функции, инекция, сюрекция, биекция, обратна функция, рестрикция на функция, деф. крайно м-во, мощност, безкрайни м-ва, теорема за биекция м-у някои безкрайни м-ва, теорема за съществуването на неизброимо м-во, принцип на Дирихле, т. за мин и макс ел. в частична наредба, Т. за линейно разширение на частична наредба.

Деф: Частична ф-я: нека X и Y са м-ва. Частична ф-я с дефиниционно м-во (домейн) X и м-во от функционални стойности (кодомейн) Y е всяка релация от вида $f \subseteq X \times Y$, такава че $\forall x \in X$ съществува не повече от едно $y \in Y$, така че $(x,y) \in f$.

Деф: Тотална ф-я: нека X и Y са м-ва. Тотална ф-я с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, т.че $\forall x \in X$, $\exists! y \in Y : (x,y) \in f$.

Заб. Дефинирахме функциите като вид релация.

Заб. Когато казваме "функция" разбираме "тотална ф-я".
Ползваме стандартния функционален запис $f: X \to Y$, $f(x) = y$
(вместо $f \subseteq X \times Y$, $(x,y) \in f$).

Деф: нека $f: X \to Y$. (това се чете нека f е ф-я от X в Y).

1. f е инекция, ако $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$.
2. f е сюрекция, ако $\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$
3. f е биекция, ако е едновременно инекция и сюрекция.

Заб. При инекцията различни x отиват в различни y.
При ~~инекцията~~ сюрекцията, кодомейнът е "покрит".

Деф: Обратна ф-я: нека $f: X \to Y$ е биекция. Обратната ф-я на f е $f^{-1}: Y \to X$, $\forall y \in Y: f^{-1}(y) = x$, където x е уникалният елемент от X, т.че $f(x) = y$.

Деф: Рестрикция на ф-я: нека $f: X \to Y$, $X' \subseteq X$. Рестрикцията на f върху X' е $f': X' \to Y$, където $f'(x) = f(x)$.

f' бележим с $f|_{X'}$.

Мощност на м-ва

Деф: М-вото A е крайно, ако:

- $A = \emptyset$, тогава мощността на A е 0
- съществува $n \in \mathbb{N}^+$, такова че $\exists f: A \to \{1..n\}$.

  Тогава ~~мощността~~ на A е ~~...~~ n.

Мощността е броят на елементите на м-во. Бележим с $|A|$ (синоним на мощност е кардиналност).

Две м-ва са равномощни, ако между тях съществува биекция.

Деф: М-во е безкрайно, ако не е крайно.

Деф: М-во A е изброимо безкрайно, ако има биекция $f: A \to \mathbb{N}$.

Деф: М-во е неизброимо, ако не е изброимо.

Заб. Ако A е безкрайно, то $|A| = \infty$.

Т.1 Съществува биекция $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. д-во стр. 3

Т.2 Теорема за съществуването на неизброимо м-во:
не съществува биекция $f: 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$. д-во стр. 5

Т.3 ~~...~~: $\forall A$ - м-во не съществува биекция $g: A \to 2^A$.
д-во стр. 6

Принцип на Дирихле

Няколко различни формулировки, които приемаме без д-во (не че е много трудно д-вото):

- Ако X и Y са крайни м-ва и $|X| > |Y|$, то не съществува инекция $f: X \to Y$.
- Ако има m ябълки в n чекмеджета и $m > n$, то в поне едно чекмедже има повече от една ябълка.
- Обобщен принцип на Дирихле: ако има $k.n+1$ ябълки в n чекмеджета, то в поне едно чекмедже има повече от k ябълки.

Заб. $m, n \in \mathbb{N}^+$, $k \in \mathbb{N}$.

Макс. и мин. ел. в частична наредба:

Т.4 Нека A е крайно и нека $R \subseteq A^2$ е частична наредба. Тогава R има поне един минимален и поне един макс. елемент. д-во стр. 6

Т.5 Нека A е крайно, $|A| = n$ и $R \subseteq A^2$ е частична наредба. Тогава съществува поне едно линейно разширение на R. д-во стр. 7

Доказателства

Т.1 Д-во: Ще докажа, че $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(a,b) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b$ е биекция.

Заб. Всъщност тази функция формално изброява диагоналите:

	0	1	2	...
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	
1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	
2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	
⋮				

Инекция: Нека $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$.

Нека $m_1 = a_1 + b_1$, $m_2 = a_2 + b_2$.

1сл. $m_1 \neq m_2$. БОО нека $m_1 < m_2$. Тогава $\frac{m_1(m_1+1)}{2}$ и $\frac{m_2(m_2+1)}{2}$ са различни триъгълни числа и $\frac{m_1(m_1+1)}{2} < \frac{m_2(m_2+1)}{2}$. Но понеже $0 \leq b_1 \leq m_1$, то

$$\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 < \frac{m_2(m_2+1)}{2} \leq \frac{m_2(m_2+1)}{2} + b_2$$

$\Rightarrow f$ е инекция ✓

(Заб. $\frac{m_1(m_1+1)}{2} = 1 + 2 + \dots + m_1$; $\frac{m_2(m_2+1)}{2} = 1 + \dots + m_1 + \dots + m_2$)

2сл. $m_1 = m_2$. Тогава $b_1 \neq b_2$ иначе ~~ако~~ $a_1 = a_2$ и от това следва $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$.

Щом $m_1 = m_2 = m$ и $b_1 \neq b_2$, то:

$$\frac{m(m+1)}{2} + b_1 \neq \frac{m(m+1)}{2} + b_2 \Rightarrow f \text{ е инекция ✓}$$

Сюрекция: Нека $m \in \mathbb{N}$ е такова, че $1 + \dots + m \leq n$ и $1 + \dots + m + (m+1) > n$.

1сл. $1 + \dots + m = n$. Тогава за $a = m$, $b = 0$ имаме:

$$n = 1 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2} = \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b$$

Значи n има прообраз.

2сл. $1 + \dots + m < n$. Тогава $1 + \dots + m + m \geq n$.

Нека $1 \leq b \leq m$ е, такова че $1 + \dots + m + b = n$ и нека $a = m - b$. Тогава:

$$n = 1 + \dots + m + b = \frac{m(m+1)}{2} + b = \frac{(m-b+b)(m-b+b+1)}{2} + b =$$

$$= \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b$$ значи n има прообраз $\Rightarrow f$ е биекция $\square$.

4

Т.2 Д-во: Допускам, че съществува биекция $f: 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$.

Характеристична редица е безкрайна булева редица $(a_0, a_1, \dots)$, която еднозначно определя $X \subseteq \mathbb{N}$ по следния начин:

- ако $a_i = 1$, то $i \in X$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
- ако $a_i = 0$, то $i \notin X$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Очевидно съществува биекция м-у м-вото от характеристичните редици B и $2^{\mathbb{N}}$. Тогава твърдението: "съществува биекция $f: 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$", е екв. на: "Съществува биекция $f: B \to \mathbb{N}$."

Допускам, че B е изброимо. Нека тогава вземем някое изброяване:

$$A_0 = (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, \dots)$$

$$A_1 = (a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, \dots)$$

$$A_2 = (a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2}, \dots)$$

($A_i \in B$, $\forall i \in \mathbb{N}$; всяка булева редица се среща в изброяването).

Образуваме нова редица като правим побитова инверсия на главния диагонал: $\overline{X} = (\overline{a_{0,0}}, \overline{a_{1,1}}, \dots)$.

Допуснахме, че всяка редица от B се среща в изброяването, но $\overline{X}$ не се среща. Наистина $\overline{X} \neq A_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, защото $a_{i,i} \neq \overline{a_{i,i}}$. Противоречие с допускането, че има биекция $f: B \to \mathbb{N} \Rightarrow$ няма биекция $f: 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \Rightarrow$ Т2 $\square$

<u>Т.3</u> <u>Д-во</u>: Допускаме противното. Тогава $\exists A : \exists g : A \to 2^A$, g - сюрекция. Разглеждаме м-вото:

(1) $S = \{ a \in A \mid a \notin g(a) \}$

Но $S \in 2^A$ и g е сюрекция $\Rightarrow \exists x \in A : g(x) = S$.

Дали $x \in S$?

- ако $x \in S$, то $x \notin S$ съгласно (1)
- ако $x \notin S$, то $x \in S$ съгласно (1) ↯

$\Rightarrow \forall A$ не съществува сюрекция $g: A \to 2^A$ □

<u>Т.4</u> <u>Д-во</u>: БОО доказваме само, че съществува минимален елемент. Допускаме противното. Тогава $\exists A$ - крайно м-во и $\exists R \subseteq A^2$ - частична наредба, т.че R няма минимален елемент.

Избираме произволно $a \in A$. По допускане a не е минимален и значи $\exists b \in A, b \neq a : bRa$. По допускане b също не е мин. и значи $\exists c \in A, c \neq b : cRa$. И т.н. Можем да изходим, колкото искаме дълга верига завършваща на a.

$p = z, \ldots, c, b, a$.

Правим p с повече елементи от $|A|$. Съгласно принципа на Дирихле, p съдържа поне един повтарящ се ел. x.

В общия случай p изглежда така:

$p = z, \ldots, x, \ldots, x, \ldots, c, b, a$

Знаем, че появите на x не са съседни (деф. на верига не го позволява; виж лек. 3, стр. 7). Но тогава p има контур:

$p = z \ldots \underbrace{x \ldots x}_{\text{контур}} \ldots c, b, a$

Частичните наредби нямат контури (виж лек. 3, стр. 7, Т.2) ↯

$\Rightarrow$ □

DCTP

Т.5 Д-во: Ще напишем алгоритъм, известен като "топологическо сортиране" (Topological sorting). Няма да строим самото линейно разширение, а масив $B[1 \ldots n]$ с елементите на A, който еднозначно задава линейна наредба.

Алгоритъм:

Вход: A - крайно м-во, $|A| = n$, $R \subseteq A^2$ - частична нар.

Изход: Масив B, дефиниращ линейно разширение на R.

1. $i \leftarrow 1$
2. Избиране произволен $a \in A$, който е минимален за R. (от Т.4 такъв $\exists$).
3. ~~Изтри~~ $B[i] \leftarrow a$. Изтриване a от A и от R. Правим $++i$.
4. Ако $i = n+1$, връщане B. В противен случай, връщане се на 2.

Алгоритъмът е коректен, защото при първото достигане на ред 2. R има минимален ел. от Т.4, и тъй като изтриването на елемент от релацията не може да образува цикъл тя остава частична наредба за всяко следващо достигане на ред 2. $\square$