Зад. $[v_i \mid i \in I]$ са (едни) МЛНП ; $|I| =$ ранга

$$\ell(v_1, \dots, v_k) = \ell(v'_1, \dots, v'_k) = \ell(v'_i \mid i \in I) = \ell(v_i \mid i \in I)$$

$\forall i \notin I \ v'_i = \theta$

не сме разместили редове и ЕП са обратими

$[v'_i \mid i \in I]$ са ЛН

$(I = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}, \ J = \{j_1, \dots, j_s\})$

$$\sum_{t=1}^{s} \lambda_t v'_{i_t} = \theta \longrightarrow \sum_{t=1}^{s} \lambda_t \lambda'_{i_t j} = 0 \quad \forall j$$

$$j = j_1 \longrightarrow \forall i \neq i_1 \quad \lambda'_{i j_1} = 0 \longrightarrow \lambda_1 \cdot \underbrace{\lambda'_{i_1 j_1}}_{\neq 0} = 0$$

$$\longrightarrow \lambda_1 = 0$$

и т.н. $\forall \lambda_t = 0$

$$\begin{pmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \\ & \lambda_{i_1} d_1 & \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix} \sim \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \begin{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 & \\ & \vdots & & \vdots & \\ & 0 & & \lambda_{i_2} d_2 & \\ & \lambda_{i_1} d_1 & \cdots & \bullet & \\ & 0 & & 0 & \\ & \vdots & & \vdots & \\ & 0 & & 0 & \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow [v_i' \mid i \in I]$ са базис на $\ell(v_1, \dots, v_k)$

$\Rightarrow [v_i \mid i \in I]$ също са базис — МАКП

Ранг на матрица

Опр. $A \in F_{m\times n}$

$i = 1, \dots, m \qquad a_i := (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in F^n$

$j = 1, \dots, n \qquad b_j := (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{mj}) \in F^m$

$rr(A) := r(a_1, \dots, a_m)$ – ранг на редовете на A

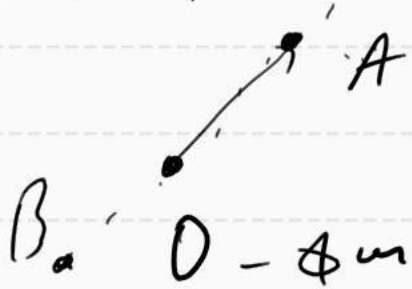
$rc(A) := r(b_1, \dots, b_n)$ – ранг на стълбовете на A

Зад. По-късно ще видим, че $rr(A) = rc(A)$

Заб. 1/ $V_i \leq V$ за $i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} V_i \leq V$

2/ $V_1 \leq V,\ V_2 \leq V \not\Rightarrow V_1 \cup V_2 \leq V$

Заб. „Геометрична интуиция"



O – фикс.

$$A \leftrightarrow \vec{OA} \leftrightarrow [\vec{OA}]$$

$$\lambda . [\vec{OA}] = [\underbrace{\lambda \vec{OA}}_{\substack{\parallel \\ \vec{OB}}}] = [\vec{OB}]$$

$\mathbb{R} \ni \lambda \leftrightarrow B \in OA$ (права

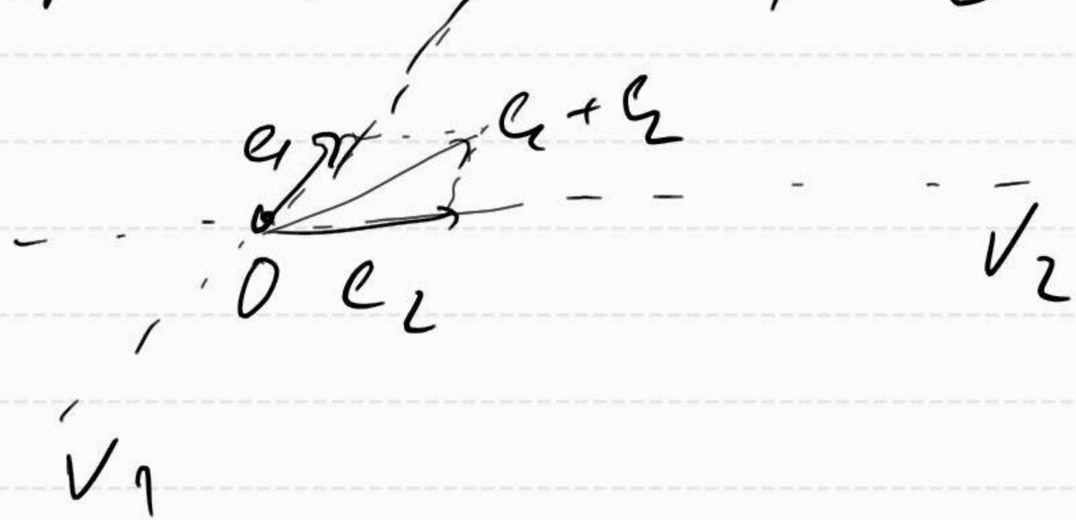
$\ell([\vec{OA}]) \leftrightarrow$ правата OA

1-мерно простр. $\leftrightarrow$ Прави през $\underline{\underline{O}}$

Аналог. 2-мерного $\Longleftrightarrow$ разбиение через т. O и т.п.

Пр. $V_1 = \ell(e_1)$, $V_2 = \ell(e_2)$

e_1, e_2 - ЛН $\Rightarrow e_1 + e_2 \notin V_1 \cup V_2$



Сума на подпространства

<u>Опр.</u> Нека за $i=1,\dots,n$ $V_i \subseteq V$

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = V_1 + V_2 + \dots + V_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} v_i = v_1 + v_2 + \dots + v_n \;\middle|\; \forall i=1,\dots,n \;\; v_i \in V_i \right\}$$

Сума на подпространствата $V_1,\dots,V_n$

<u>Тв.</u> $\sum_{i=1}^{n} V_i = \ell(V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n)$. В частност,

$$\sum_{i=1}^{n} V_i \leq V$$

<u>Заб.</u> $\sum V_i$ – min подпростр., което съдържа $\forall V_i$

Д-во $(\subseteq)$ $v \in \sum_{i=1}^{n} V_i \Rightarrow \forall i = 1 \ldots n \ \exists v_i \in V_i : v = \sum_{i=1}^{n} v_i$

$\Rightarrow v = \sum v_i, \ \forall i = 1 \ldots n \ v_i \in \bigcup_{i=1}^{n} V_i \Rightarrow v \in \ell\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right)$

$(\supseteq)$ $v \in \ell\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right) \Rightarrow \exists \lambda_{ij} \in F$ и $\exists v_{ij} \in V_i$:

$$v = \sum_{i,j} \lambda_{ij} v_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_j \lambda_{ij} v_{ij}\right)}_{\in V_i} \in \sum_{i=1}^{n} V_i$$

Сл. Ако $V_i = \ell(X_i)$ за $i = 1, \dots, n$, то

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \ell\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Опр. Казваме, че $\sum_{i=1}^{n} V_i$ е директна сума на $V_i \leq V$ (за $i = 1, \dots, n$), ако $\forall v \in \sum_{i=1}^{n} V_i$ съществуват единствени $v_i \in V_i$ (за $i = 1, \dots, n$): $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$. Пишем $\bigoplus_{i=1}^{n} V_i = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$

Заб. 1/ $\exists V_i$ значим от сума, което е единствено

2/ Само казваме, че $\forall v$ се представя по единствен начин, като сума на вектори от V_0

<u>Забл.</u> Говорим за $\sum\limits_{i\in I} V_i$, $\bigoplus\limits_{i\in I} V_i$

$$\sum_{i\in I} V_i = \Big\{ \sum_{i\in I} v_i \;\Big|\; v_i \in V_i \text{ и само краен брой } v_i \text{ са } \neq 0 \Big\}$$

<u>Тв.</u> $\sum\limits_{i=1}^{n} V_i$ е директна $\iff$ θ се представя по единствен начин като сума на вектори от V_i $(i=1,\dots,n)$, т.е. от $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = \theta$ за $v_i \in V_i$ $(i=1,\dots,n)$ следва, че $\forall i$ $v_i = \theta$

Д-во (⇒) ясно

(⇐) Нека $v = \sum_{i=1}^{n} v_i' = \sum_{i=1}^{n} v_i''$ $\quad (v_i', v_i'' \in V_i)$

$(v \in \sum_{i=1}^{n} V_i)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (v_i' - v_i'') = \theta \Rightarrow \forall i \quad v_i' - v_i'' = \theta$, т.е. $v_i' = v_i''$

Зад 1/ Ако $V = \ell(e_1, \dots, e_n)$, то

- $V = \ell(e_1) + \ell(e_2) + \dots + \ell(e_n)$
- $V = \ell(e_1, \dots, e_k) + \ell(e_{k+1}, \dots, e_n)$

2) Ако $e_1, \dots, e_n$ - базис на V

- $V = \ell(e_1) \oplus \ell(e_2) \oplus \dots \oplus \ell(e_n)$
- $V = \ell(e_1, \dots, e_k) \oplus \ell(e_{k+1}, \dots, e_n)$

<u>Тв.</u> Нека $V_i \subseteq V$ за $i = 1, \dots, n$

$\sum_{i=1}^{n} V_i$ е директна сума $\Leftrightarrow$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad V_i \cap \Big(\sum_{j \neq i} V_j\Big) = \{0\}$$

<u>Д-во</u> ($\Rightarrow$) Доп. противното:

$$\exists i = 1, \dots, n : \ V_i \cap \Big(\sum_{j \neq i} V_j\Big) \neq \{0\}$$

$$\Rightarrow \exists \underline{v \neq \theta} : v \in \underline{V_i} \cap \underbrace{\sum_{j \neq i} V_j}$$

$$\Rightarrow \exists v_j \in V_j \text{ (за } j \neq i) : v = \sum_{j \neq i} v_j$$

$$v_i := -v \in V_i \quad \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} v_j = \theta \quad \Rightarrow \forall j = \overline{1, n} \;\; v_j = \theta$$

$$\overset{j=i}{\Rightarrow} \quad v_i = -v = \theta \quad \Rightarrow v = \theta \;\; \uparrow\downarrow$$

<u>Зад.</u> Док.-ва противното е изпълнимо (опитайте и без него)

$(\Leftarrow)$ Нека $0 = \sum_{i=1}^{n} v_i$, $v_i \in V_i$ за $i = 1, \dots, n$

$\forall i \quad \sum_{j \neq i} v_j = -v_i \in V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$

$\Rightarrow \forall i \quad v_i = 0 \Rightarrow$ Представянето на 0 е еднозначно

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} V_i = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$

<u>Сл.</u> $(n=2)$ $\quad V = V_1 \oplus V_2 \iff \begin{cases} V = V_1 + V_2 \\ V_1 \cap V_2 = \{0\} \end{cases}$

Упр. Защо (дайте контрапример) от
$V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = \{0\}$ не следва, че
$V_1 + V_2 + V_3 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ $(V_1, V_2, V_3 \leq V)$

Упр. Вярно ли е, че

$$(V_1 + V_2) \cap V_3 = (V_1 \cap V_3) + (V_2 \cap V_3)$$

$(V_1, V_2, V_3 \leq V)$

Тв $\forall U \leq V \ \exists W \leq V : \ V = U \oplus W$

Д-во $e_1, \dots, e_k$ - базис на U. Допълваме до $e_1, \dots, e_n$ $(k \leq n)$ - базис на V.

$W := \ell(e_{k+1}, \dots, e_n) \Rightarrow V = U \oplus W$

$(U = \ell(e_1, \dots, e_k); \ V = \ell(e_1, \dots, e_n))$

Заб. $e_1, \dots, e_k$ - базис на V_1
$f_1, \dots, f_s$ - базис на V_2. Тогава

$V = V_1 \oplus V_2 \iff e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_s$ - базис на V

Теорема за размерностите на сума и сечение на подпространства

Нека V е ЛП и $V_1, V_2 \le V$ са КМЛПП. Тогава

$$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

<u>Д-во</u>: $V_1 \cap V_2 \le V_1;\ V_2;\ V_1+V_2$

Нека $e_1, \dots, e_k$ базис на $V_1 \cap V_2$ $(\dim(V_1 \cap V_2) = k)$

Допълваме с $f_1, \dots, f_s$ и $g_1, \dots, g_t$ до базиси

на V_1 и V_2, съответно

$e_1, \ldots, e_k; f_1, \ldots, f_s$ — базис на V_1 ($\dim V_1 = k+s$)

$e_1, \ldots, e_k, g_1, \ldots, g_n$ — базис на V_2 ($\dim V_2 = k+n$)

Тогава трябва да докажем, че

$\dim V_1 + V_2 = k+s+n$ $\left(=(k+s)+(k+n)-k\right)$

Ще покажем, че $\underbrace{e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_n}_{k+s+n}$ са

базис на $V_1 + V_2$, т.е.

че са пораждаща система и са ЛН

① порождающие мн-ва.

$V_1 + V_2 = \ell(e_1 \dots e_k; f_1 \dots f_s) + \ell(e_1 \dots e_k; g_1 \dots g_n)$

$= \ell(\{e_1 \dots e_k, f_1 \dots f_s\} \cup \{e_1 \dots e_k; g_1 \dots g_n\}) =$

$= \ell(e_1 \dots e_k; f_1 \dots f_s; g_1 \dots g_n)$

② ЛН. ; пусть $\exists \lambda_i, \mu_i, \nu_i$:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{s} \mu_i f_i + \sum_{i=1}^{n} \nu_i g_i = 0$$

$$v := \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{s} \mu_i f_i}_{\in V_1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (-\nu_i) g_i}_{\in V_2} \in V_1 \cap V_2$$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon_i :\quad v = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i e_i$ ($e_1 \ldots e_k$ - базис на $V_1 \cap V_2$)

$$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (-\nu_i) g_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i e_i + \sum_{i=1}^{n} (\nu_i) g_i = \vartheta$$

$$\xrightarrow[\text{базис } V_2 \to \text{ЛН}]{e_1 \ldots e_k, g_1 \ldots g_n} \forall i = 1, \ldots, k \;\; \varepsilon_i = 0 \;\text{ и }\; \boxed{\forall i = 1 \ldots n \;\; \nu_i = 0}$$

$$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i e_i = \vartheta \;\Rightarrow\; \vartheta = v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{s} \mu_i f_i$$

$$\xrightarrow[\text{базис } V_1 \Rightarrow \text{ЛН}]{e_1 \ldots e_k, f_1 \ldots f_s} \boxed{\forall i = 1 \ldots k \;\; \lambda_i = 0} \;\text{ и }\; \boxed{\forall i = 1 \ldots s \;\; \mu_i = 0}$$

$\Rightarrow$) $e_1 \dots e_k;\ f_1 \dots f_s;\ g_1 \dots g_m$ — ЛН

$\square$

Сл. 1) $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

2) $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2 \iff \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

Зам. $\dim\{0\} = 0$; $\dim(V_1 \cap V_2) = 0 \iff V_1 \cap V_2 = \{0\}$

Зам. $\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2)$$