Задачи за ЕК

Задача 1. (03.03) Функцията f, дефинирана върху списъци, удовлетворява равенствата:

$$f(x, y, [\,]) = [\,]$$
$$f(x, [\,], [a]) = [x@[a]]$$
$$f(x, y, [a|z]) = f(x@[a], [\,], y@z)@f(x, y@[a], z), \text{ ако } y \neq [\,] \ \vee \ z \neq [\,].$$

(Тук @ е операцията конкатенация.) Докажете, че f е тотална функция.

Задача 2. (03.03) В множеството $\mathbb{N}^*$ на всички крайни редици от естествени числа дефинираме релацията $\prec$ по следния начин. За всеки две редици α и β полагаме

$$\alpha \prec \beta$$

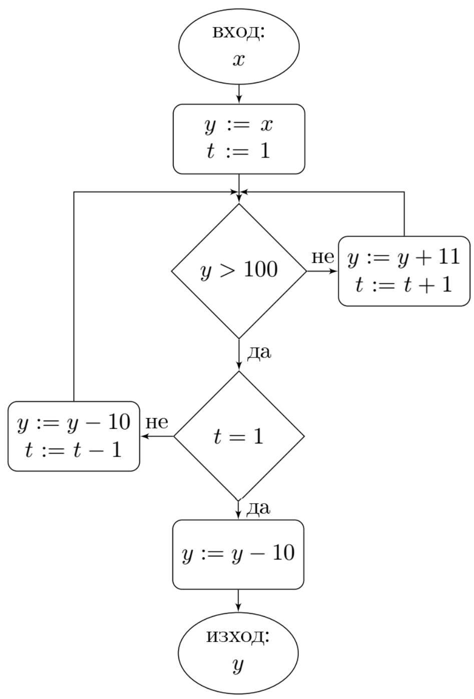
точно когато α може да се получи от β след замяната на число n от β с редица от числа $(m_1, \ldots, m_k)$, такива че $m_i < n$ за всяко $i = 1, \ldots, k$.
Нека $\prec^*$ е рефлексивното и транзитивно затваряне на релацията $\prec$. Докажете, че $(\mathbb{N}^*, \prec^*)$ е фундирано множество.

Задача 3. (18.03) Опишете всички преднеподвижни точки на оператора Γ, дефиниран като:

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ f(x+1), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Задача 4. (26.03) Докажете, че програмата вдясно пресмята 91-функцията на Маккарти $f\colon\ \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, която се дефинираше рекурсивно по следния начин:

$$f(x) \ \simeq \ \begin{cases} x - 10, & \text{ако } x > 100 \\ f(f(x+11)), & \text{ако } x \leq 100. \end{cases}$$



Задача 5. (15.04) Докажете, че най-малката неподвижна точка на оператора

$$\Gamma(f)(x) \simeq \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ако } x \text{ е четно} \\ f(f(3x+1)), & \text{иначе} \end{cases}$$

е тотална функция.

Задача 6. (18.04) Да фиксираме произволна функция $h \in \mathcal{F}_2$ и да означим с $\Gamma\colon \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ следния оператор:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } h(x,y) \simeq 0 \\ f(x,y+1)+1, & \text{ако } h(x,y) > 0 \\ \neg !, & \text{ако } \neg ! h(x,y). \end{cases}$$

Докажете, че Γ има единствена неподвижна точка и намерете явния ѝ вид.