相机成像模型及相机标定原理整理

要明确一点的位置，首先要明确所用的坐标系。在视觉 SLAM 中常用的坐标系有世界坐标系、相机坐标系，图像坐标系等。点在不同坐标系下的坐标都以**齐次坐标**的形式出现，相互间通过相机的内、外参进行转换。相机标定的目的就是确定相机的**内参矩阵**，得到特征点的平面像素坐标与 3D 相机坐标的转换关系，进而解算载体位姿、构建场景地图。标定时最常用的方法为**张氏标定法**，主要步骤为根据对应点坐标求取单应性矩阵、根据约束求取内参矩阵，极大似然估计减小误差，再根据畸变模型，将畸变参数加入到似然函数中进行完整极大似然估计，得到标定参数。

一、 针孔成像模型及坐标变换

1.1 常用坐标系

世界系为场景中固定的坐标系，为全局坐标系（依场景实际情况选定），以真实世界中的长度为单位。点在世界坐标系下的齐次坐标为$(X_w \quad Y_w \quad Z_w \quad 1)^T$。

相机坐标系以摄像机光心为原点O_c，光心所在与光轴垂直平面为$X_cO_cY_c$平面，沿光心水平向右为x轴，垂直向下为y轴，沿光轴向前为z轴，以真实世界中的长度为单位。点在相机坐标系下的齐次坐标为$(X_c \quad Y_c \quad Z_c \quad 1)^T$。

为方便参数推导，建立成像平面坐标系，以成像平面与光轴的交点为原点，水平向右为x轴，垂直向下为y轴，以真实世界的长度为单位。点在该坐标系下的齐次坐标为$(x \quad y \quad 1)^T$。

图像坐标系以图像左上角为原点，水平向右为u轴，垂直向下为v轴，以像素个数为单位。点在图像坐标系下的齐次坐标为$(u \quad v \quad 1)^T$。

此三者关系如图 1 所示。

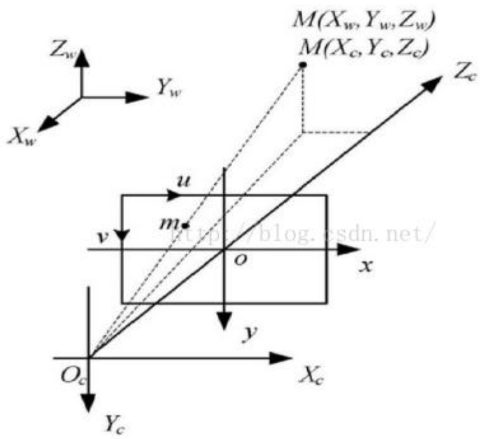

图 1 几个坐标系间的关系

1.2 单目相机成像模型

单目相机下，以针孔成像模型将相机坐标系下的点投影到成像平面，并转换到图像坐标。如图 2，三维现实世界中的物体通过一个针孔投影在成像平面上。

成像平面与光心的距离即为摄像机的焦距f，空间一点$\widetilde{M}(X_c \quad Y_c \quad Z_c \quad 1)^T$与成像平面的投影$(x \quad y \quad 1)^T$满足相似关系，如图 2。

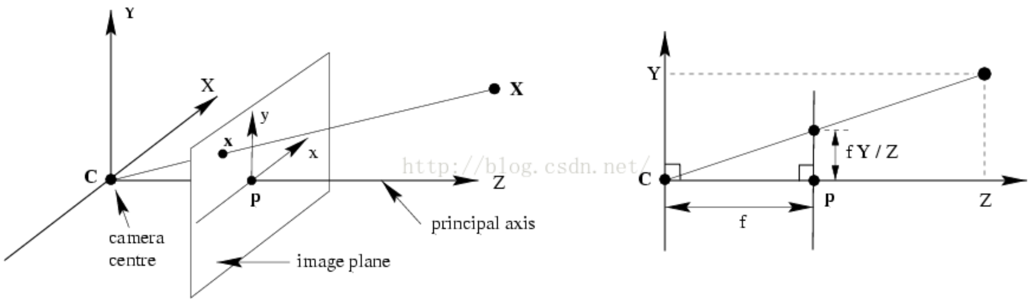

图 2 针孔成像

即

$$x = \frac{fX_c}{Z_c}$$

$$y = \frac{fY_c}{Z_c}$$

转化为矩阵形式

$$Z_c\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}fX_c\\fY_c\\Z_c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f & 0 & 0\\0 & f & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_c\\Y_c\\Z_c\end{bmatrix}$$

实际上一般摄像头都会将 CMOS/CCD 传感器放置于成像平面，若 CMOS/CCD 传感器单个像素物理尺寸为$dx \quad dy$，成像平面坐标系原点O在图像坐标系下的坐标为$(u_0 \quad v_0 \quad 1)^T$，那么可以得出

$$u = \frac{x}{dx} + u_0$$

$$v = \frac{y}{dy} + v_0$$

转化为矩阵形式

$$\begin{bmatrix}u\\v\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{dx} & 0 & u_0\\0 & \frac{1}{dy} & v_0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$$

综上，有

$$Z_c\begin{bmatrix}u\\v\\1\end{bmatrix} = Z_c\begin{bmatrix}\frac{1}{dx} & 0 & u_0\\0 & \frac{1}{dy} & v_0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{dx} & 0 & u_0\\0 & \frac{1}{dy} & v_0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f & 0 & 0\\0 & f & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_c\\Y_c\\Z_c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{f}{dx} & 0 & u_0\\0 & \frac{f}{dy} & v_0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_c\\Y_c\\Z_c\end{bmatrix}$$

令

$$\alpha = \frac{f}{dx}$$

$$\beta = \frac{f}{dy}$$

另一方面取γ为图像两坐标轴歪斜程度，则有

$$Z_c\begin{bmatrix}u\\v\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & \gamma & u_0\\0 & \beta & v_0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_c\\Y_c\\Z_c\end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\alpha & \gamma & u_0\\ 0 & \beta & v_0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$为内参矩阵。

1.3 相机位姿变换

从世界坐标系（**定系**）到相机坐标系（**动系**）的旋转、平移为欧氏变换。该变换所具有的旋转和平移即为相机当前位姿。(见《三维空间刚体旋转运动描述》)

$$\boldsymbol{H}_E=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{3\times 3} & \boldsymbol{t}_{3\times 1}\\ \boldsymbol{0}^T & 1\end{bmatrix}$$

3 维欧氏变换为 4*4 矩阵，但是为了便于后续计算，裁剪掉矩阵最后一行，该矩阵即为相机外参矩阵。

$$\begin{bmatrix}X_c\\ Y_c\\ Z_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1\\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2\\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_w\\ Y_w\\ Z_w\\ 1\end{bmatrix}=[\boldsymbol{R}_{3\times 3}\quad \boldsymbol{t}_{3\times 1}]_{3\times 4}\begin{bmatrix}X_w\\ Y_w\\ Z_w\\ 1\end{bmatrix}$$

其中$\boldsymbol{R}$为旋转矩阵，为正交阵；$\boldsymbol{t}$为平移向量。故可得出外参矩阵为

$$[\boldsymbol{R}_{3\times 3}\quad \boldsymbol{t}_{3\times 1}]_{3\times 4}$$

二、　求取单应性矩阵

在标定相机内参矩阵时，最常用的方法为**张氏标定法**。前文已得出摄像机内参矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\alpha & \gamma & u_0\\ 0 & \beta & v_0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

摄像机外参矩阵（描述摄像机位姿，用于**世界坐标系**到**相机坐标系**的旋转、平移）为

$$[\boldsymbol{R}_{3\times 3}\quad \boldsymbol{t}_{3\times 1}]_{3\times 4}$$

点的像素坐标$\widetilde{m}$与世界坐标$\widetilde{M}$的对应关系为

$$s\widetilde{m}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{R}\quad \boldsymbol{t}]\widetilde{M}$$

展开则为

$$s\begin{bmatrix}u\\ v\\ 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{r}_1\quad \boldsymbol{r}_2\quad \boldsymbol{r}_3\quad \boldsymbol{t}]\begin{bmatrix}X_w\\ Y_w\\ Z_w\\ 1\end{bmatrix}$$

若假定该点位于$Z=0$平面上，则由于矩阵相乘时$\boldsymbol{r}_3$与Z相乘，故可将$\boldsymbol{r}_3$略去，即

$$s\begin{bmatrix}u\\ v\\ 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{r}_1\quad \boldsymbol{r}_2\quad \boldsymbol{t}]\begin{bmatrix}X\\ Y\\ 1\end{bmatrix}$$

这样在二者之间就建立起了单应性关系，即

$$s\widetilde{m}=\boldsymbol{H}\widetilde{M}$$

其中$\boldsymbol{H}$为单应矩阵(Homography)。由于单应性矩阵乘以一个非零的比例因子后不影响结果，因此可令$\boldsymbol{H}$自带一非零比例因子，即

$$\boldsymbol{H}=\lambda\boldsymbol{A}[\boldsymbol{r}_1\quad \boldsymbol{r}_2\quad \boldsymbol{t}]$$

其中λ为一非零比例因子。

单应矩阵$\boldsymbol{H}$乘非零比例因子不影响结果，因而具有 8 自由度，取$\boldsymbol{H}$中$h_{33}=1$，还有 8 个参数未确定。在$\boldsymbol{H}$中包含 6 个外参（即 3 自由度旋转和 3 自由度平移）。

点的像素坐标$\widetilde{m}$与世界坐标$\widetilde{M}$的对应关系用单应矩阵$\boldsymbol{H}$表示为

$$s\begin{bmatrix}u\\v\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_{11}&h_{12}&h_{13}\\h_{21}&h_{22}&h_{23}\\h_{31}&h_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\\1\end{bmatrix}$$

展开为

$$\begin{cases}su=h_{11}X+h_{12}Y+h_{13}\\sv=h_{21}X+h_{22}Y+h_{23}\\s=h_{31}X+h_{32}Y+1\end{cases}$$

化简，消去s，以$\boldsymbol{H}$中元素为未知数建立方程

$$Xh_{11}+Yh_{12}+h_{13}-Xuh_{31}-Yuh_{32}=u$$
$$Xh_{21}+Yh_{22}+h_{23}-Xvh_{31}-Yvh_{32}=v$$

又令$\boldsymbol{h}'=[h_{11}\quad h_{12}\quad h_{13}\quad h_{21}\quad h_{22}\quad h_{23}\quad h_{31}\quad h_{32}]^T$，则有

$$\begin{bmatrix}X&Y&1&0&0&0&-Xu&-Yu\\0&0&0&X&Y&1&-Xv&-Yv\end{bmatrix}\boldsymbol{h}'=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$$

综上，1 对对应点能够提供 **2 个约束条件**，所以需要 **4 对对应点**即可计算出单应性矩阵 。而实际情况中一般对应点的数目都不止于 4 对，可以求其最小二乘解的方式来得出单应矩阵$\boldsymbol{H}$。多个方程叠加可记为

$$\boldsymbol{Sh}'=\boldsymbol{d}$$

其最小二乘解为

$$\boldsymbol{h}'=(\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S})^{-1}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{d}$$

三、 参数求解

2.1 内参约束条件

将$\boldsymbol{H}$按列拆分为

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{h}_1\quad\boldsymbol{h}_2\quad\boldsymbol{h}_3]$$

则有

$$[\boldsymbol{h}_1\quad\boldsymbol{h}_2\quad\boldsymbol{h}_3]=\lambda\boldsymbol{A}[\boldsymbol{r}_1\quad\boldsymbol{r}_2\quad\boldsymbol{t}]$$

拆开为

$$\boldsymbol{h}_1=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_1$$
$$\boldsymbol{h}_2=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_2$$

由于旋转矩阵$\boldsymbol{R}$为正交矩阵，有

$${\boldsymbol{r}_1}^T\boldsymbol{r}_2=0$$
$${\boldsymbol{r}_1}^T\boldsymbol{r}_1={\boldsymbol{r}_2}^T\boldsymbol{r}_2$$

因此可得到约束条件

$$\boldsymbol{h}_1^T\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{h}_2=0$$
$$\boldsymbol{h}_1^T\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{h}_1=\boldsymbol{h}_2^T\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{h}_2$$

2.2 求取内参矩阵

在得出单应矩阵$\boldsymbol{H}$之后，就是按照之前推导出的 2 个约束条件求取内参矩阵$\boldsymbol{A}$。设有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{A}^{-1}$$

易知$\boldsymbol{B}$为对称矩阵

$$\boldsymbol{B}^T=(\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{A}^{-1})^T=\boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$$

因此，设$\boldsymbol{B}$中的元素为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&B_{13}\\B_{12}&B_{22}&B_{23}\\B_{13}&B_{23}&B_{33}\end{bmatrix}$$

将$\boldsymbol{B}$中元素展开为未知数向量

$$\boldsymbol{b} = [B_{11} \quad B_{12} \quad B_{22} \quad B_{13} \quad B_{23} \quad B_{33}]^T$$

单应矩阵$\boldsymbol{H}$的列$\boldsymbol{h}_i$为

$$\boldsymbol{h}_i = [h_{i1} \quad h_{i2} \quad h_{i3}]^T$$

那么约束条件中元素

$$\boldsymbol{h}_i^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{h}_j = \boldsymbol{v}_{ij}^T \boldsymbol{b}$$

其中

$$\boldsymbol{v}_{ij} = [h_{i1}h_{j1} \quad h_{i1}h_{j2} + h_{i2}h_{j1} \quad h_{i2}h_{j2} \quad h_{i3}h_{j1} + h_{i1}h_{j3} \quad h_{i3}h_{j2} + h_{i2}h_{j3} \quad h_{i3}h_{j3}]^T$$

则两个约束条件可列出方程

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_{12}^T \\ (\boldsymbol{v}_{11}^T - \boldsymbol{v}_{22}^T)^T \end{bmatrix} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

由拍摄标定板得到的数幅图像所得的大量角点组成的 n 组对应点对，可将等式堆叠得到方程组

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

其中$\boldsymbol{V}$为$2\mathrm{n} \times 6$矩阵。若$\mathrm{n} \geq 3$，可在相差一个尺度因子的情况下唯一确定矩阵$\boldsymbol{B}$；

若$\mathrm{n} = 2$，则可以利用无歪斜约束，令$\gamma = 0$，使得$B_{12} = 0$，进而方程组的最小二乘解即为矩阵$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V}$最小特征值所对应特征向量；

若$\mathrm{n} = 1$，仅可解出 2 个内参的值，在$\gamma = 0$且u_0、v_0已知的前提下，可解出方程的解，得出矩阵$\boldsymbol{B}$的参数。

由于

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-T}\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & -\frac{\gamma}{\alpha^2\beta} & \frac{v_0\gamma - u_0\beta}{\alpha^2\beta} \\ -\frac{\gamma}{\alpha^2\beta} & \frac{\gamma^2}{\alpha^2\beta^2} + \frac{1}{\beta^2} & -\frac{\gamma(v_0\gamma - u_0\beta)}{\alpha^2\beta^2} - \frac{v_0}{\beta^2} \\ \frac{v_0\gamma - u_0\beta}{\alpha^2\beta} & -\frac{\gamma(v_0\gamma - u_0\beta)}{\alpha^2\beta^2} - \frac{v_0}{\beta^2} & \frac{(v_0\gamma - u_0\beta)^2}{\alpha^2\beta^2} + \frac{v_0^2}{\beta^2} + 1 \end{bmatrix}$$

在解出$\boldsymbol{B}$之后解出内参矩阵$\boldsymbol{A}$中各元素的值

$$v_0 = (B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23})/(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)$$
$$\lambda = B_{33} - [B_{13}^2 + v_0(B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23})]/B_{11}$$
$$\alpha = \sqrt{\lambda/B_{11}}$$
$$\beta = \sqrt{\lambda B_{11}/(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)}$$
$$\gamma = -B_{12}\alpha^2\beta/\lambda$$
$$u_0 = \gamma v_0/\beta - B_{13}\alpha^2/\lambda$$

2.3 求解外参矩阵

解出内参矩阵后，即可解出不同角度拍摄图像分别所对应的外参矩阵

$$\boldsymbol{r}_1 = \lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{h}_1$$
$$\boldsymbol{r}_2 = \lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{h}_2$$
$$\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$$
$$\boldsymbol{t} = \lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{h}_3$$

其中尺度因子$\lambda = 1/\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{h}_1\| = 1/\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{h}_2\|$。另一方面，由于所拍摄图像必然带有噪声，因此这样解得的外参矩阵中的$\boldsymbol{R}$并不能完全满足旋转矩阵的正交性质，所以要从计算出的矩阵求解一个最佳的旋转矩阵。张正友论文中附件 C 部分讲解了由给定 3*3 矩阵$\boldsymbol{Q}$（即通过计算得出的矩阵）近似得出旋转矩阵$\boldsymbol{R}$的方法。

具体为采用 SVD 分解（奇异值分解）的方式，将$\boldsymbol{Q}$分解为

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{T}$$

因为旋转矩阵为正交阵，理论上应$\boldsymbol{D}$为单位矩阵$\boldsymbol{I}_3$。而事实上由于噪声的存在，$\boldsymbol{D}$通常并不是单位阵。因此在实际计算中，一般通过将$\boldsymbol{D}$直接设置为单位阵的方式，即

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{I}_3\boldsymbol{V}^{T}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{T}$$

进而近似得出一个满足正交性质的旋转矩阵$\boldsymbol{R}$。

四、 极大似然估计（优化内、外参）

上述的推导结果是基于理想情况下的解，从理论上得出了张氏标定法的推导过程。但在实际标定过程中，误差一定存在。为得出具有实际意义的参数，可以使用极大似然估计进行优化，减小参数误差。

有拍摄标定板得到 n 幅图像，标定板上可供检测的有 m 个角点。假定图像中的点所含噪声为独立同分布的，那么可以得到极大似然估计的似然函数

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left\|m_{ij}-\widehat{\mathbf{m}}\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{R}_i,\boldsymbol{t}_i,M_j\right)\right\|^2$$

其中m_{ij}是第i幅图像中的第j个角点，$\boldsymbol{R}_i$是第i幅图像下相机坐标系相对世界系的旋转矩阵，$\boldsymbol{t}_i$是第i幅图像下相机坐标系相对世界系的平移向量，M_j是标定板第j个角点的空间坐标，$\widehat{\mathbf{m}}\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{R}_i,\boldsymbol{t}_i,M_j\right)$为计算出的角点在图像坐标系下的投影。

$\boldsymbol{R}$作为旋转矩阵，由 3 个旋转参数（欧拉角）决定，该旋转也可由 3 个参数组成的旋转向量$\boldsymbol{r}$表示。$\boldsymbol{R}$和$\boldsymbol{r}$可由罗德里格旋转公式相互转化。（见《罗德里格旋转公式推导总结》）

在得出似然函数后，由 L-M 算法进行非线性优化，通过最小化似然函数的方式优化参数。并首先由前文提及的计算方法为非线性优化提供$\boldsymbol{A}$、$\{\boldsymbol{R}_i,\boldsymbol{t}_i|i=1,\cdots,n\}$等参数的初值。

五、 图像畸变

桌面端的相机一般都有镜头畸变。畸变函数几乎完全由径向分量主导，而径向畸变又几乎由第一个参数主导。由于过于复杂的模型不仅起到的作用十分有限，而且还极易引起数值不稳定，因此张正友的论文中只提及了径向畸变模型的前两项参数。但是在 OpenCV 的实际标定中，标定函数输出的畸变参数向量是 5 维向量，排列顺序为径向畸变的前三项参数，和切向畸变的前两项参数。

径向畸变由透镜自身形状对光线传播的影响产生，光线在远离透镜中心的地方与靠近中心的地方的弯曲程度不同，因而产生了径向畸变。径向畸变主要分为两大类，桶形畸变和枕形畸变。如图 3，左为枕形畸变，右为桶形畸变。

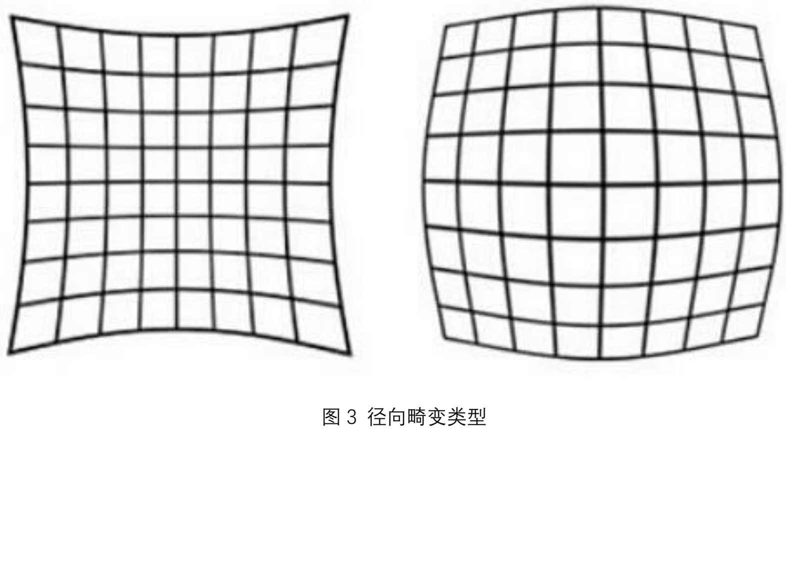

图 3 径向畸变类型

切向畸变由相机组装的过程中的安装偏差产生，具体表现为透镜与成像平面不平行。

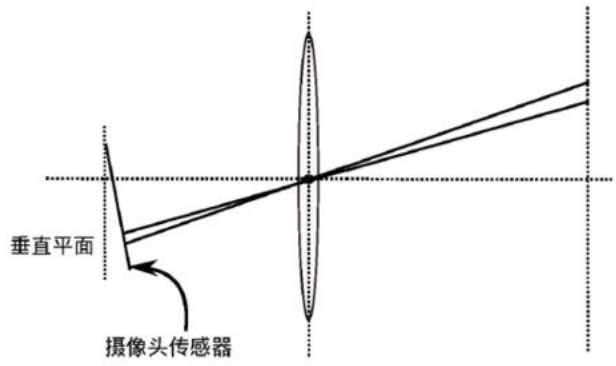

图 4 切向畸变

以$(u,\ v)$和$(x,\ y)$分别表示角点在图像坐标系和成像平面坐标系下理想（无畸变）的坐标值，以$(u_{distorted},\ v_{distorted})$和$(x_{distorted},\ y_{distorted})$分别表示畸变后的坐标值，则径向畸变的 3 参数模型为

$$x_{distorted} = x + x[k_1(x^2+y^2) + k_2(x^2+y^2)^2 + k_3(x^2+y^2)^3]$$
$$y_{distorted} = y + y[k_1(x^2+y^2) + k_2(x^2+y^2)^2 + k_3(x^2+y^2)^3]$$

对于通常的相机而言，k_1和k_2两个参数足以描述相机的畸变；而如果所用相机为鱼眼镜头等畸变很大的相机，则使用第三个参数k_3。

切向畸变的 2 参数模型为

$$x_{distorted} = x + [2p_1xy + p_2(3x^2+y^2)]$$
$$y_{distorted} = y + [p_1(x^2+3y^2) + 2p_2xy]$$

则相机的畸变模型为

$$x_{distorted} = x + x[k_1(x^2+y^2) + k_2(x^2+y^2)^2 + k_3(x^2+y^2)^3] + [2p_1xy + p_2(3x^2+y^2)]$$
$$y_{distorted} = y + y[k_1(x^2+y^2) + k_2(x^2+y^2)^2 + k_3(x^2+y^2)^3] + [p_1(x^2+3y^2) + 2p_2xy]$$

进而投影到图像坐标系（由已求得的内参矩阵）

$$u_{distorted} = \alpha x_{distorted} + u_0$$
$$v_{distorted} = \beta y_{distorted} + v_0$$

其中$(x,\ y)$可以由$(X_w \quad Y_w \quad Z_w \quad 1)^T$和已初步得出的$\boldsymbol{A}$、$\{\boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{t}_i | i=1,\cdots,n\}$等参数计算得出，这样可以得到一组关于 5 个畸变参数的方程组，每组对应点提供 2 个等式。使用 n 幅图像上共计 mn 组对应点，联立得到 2mn 个等式组成的方程组，求其线性最小二乘解即可解出畸变参数。

六、 完整极大似然估计（内、外参连同畸变参数）

由于之前计算$\boldsymbol{A}$、$\{\boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{t}_i | i=1,\cdots,n\}$等参数时没有考虑到图像的畸变，因此解出的参数的值必然存在误差。一个高效的减小误差的方法是对$\boldsymbol{A}$、$\{\boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{t}_i | i=1,\cdots,n\}$及$k_1$、$k_2$、$k_3$、$p_1$、$p_2$所有参数统一进行极大似然估计，建立完整的似然函数

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left\| m_{ij} - \breve{\mathbf{m}}\left(\boldsymbol{A}, k_1, k_2, k_3, p_1, p_2, \boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{t}_i, M_j\right)\right\|^2$$

把之前得出的$\boldsymbol{A}$、$\{\boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{t}_i | i=1,\cdots,n\}$及$k_1$、$k_2$、$k_3$、$p_1$、$p_2$作为各自的初值，通过 L-M 法进行非线性优化，求出似然函数的最小值，得到相机参数的最优解。

参考

[1] woaitingting1985. 单目相机标定-原理及实现[EB/OL]. [2019-01-13]. https://blog.csdn.net/woaitingting1985/article/details/56297624
[2] u013517182. 针孔模型以及投影矩阵[EB/OL]. [2019-01-13]. https://blog.csdn.net/u013517182/article/details/52151960
[3] Hartley R, Zisserman A. 计算机视觉中的多视图几何[M]. 韦穗, 杨尚骏等, 译. 合肥:安徽大学出版社, 2002.
[4] 高翔, 张涛, 刘毅, 等. 视觉SLAM十四讲[M]. 2017年3月第1版. 电子工业出版社, 2017.
[5] Zhang Z.A flexible new technique for camera calibration[J].IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,2000,22(11):1330~1334.
[6] Kaehler A, Bradski G. 学习 OpenCV3[M]. 阿丘科技团队, 译. 北京:清华大学出版社, 2018.