Harris 角点检测算法整理

在计算机视觉中，图像特征（Feature）一般分为关键点（Key point）和描述子（descriptor）两部分。关键点一般是具有一定特征的图像点，有很多检测算法用来检测、定位关键点；描述子则是用来对已检测到的关键点进行描述、刻画的一种数据类型，一般以向量的形式表示。角点检测(Corner Detection) 则是一类用来获得关键点的方法。

对于角点，目前尚无严格的数学定义，一般（并不十分严谨）可将角点定义为图像中不同轮廓线的交点。相比于很多特征检测算法（SIFT 等），角点检测能够用更小的计算量得到图像中的关键点，因此在视觉 SLAM 这种对实时性要求很高的领域，其应用十分广泛。

一. 基本思想

在 Harris 角点检测中，将两个方向上灰度变化（即灰度梯度）较大的点视为角点，一个方向上灰度变化较大的点视为边缘，而两个方向上变化均较小的点则视为平坦区域。具体的方法为通过一个小窗口观察图像，在窗口沿不同方向移动时比较窗口内区域图像灰度的变化。如图 1，左图为窗口处于平坦区域，中图为窗口在处于边缘，右图为窗口在角点区域。从图中可以看出，在窗口在不同类型的区域移动时，其灰度变化是不同的。

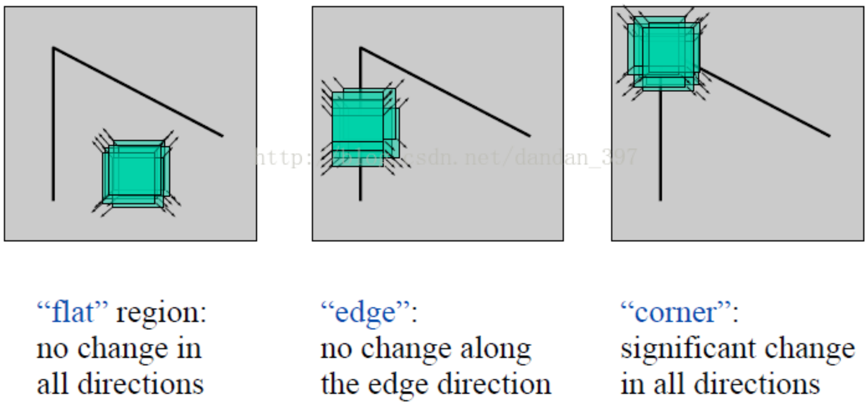

图 1 观测窗口在图像不同区域移动

二. 数学推导

图像中，窗口移动$[u,v]$所产生灰度变化的自相关函数为

$$E(u,v)=\sum_{x,y}w(x,y)[I(x+u,y+v)-I(x,y)]^2$$

其中，(u,v)为窗口位移量，$w(x,y)$为窗函数，即窗口在不同(x,y)处的权值，$I(x,y)$为图像在(x,y)处的灰度值。

窗函数$w(x,y)$可以有很多种形式，如图 2 所示，常见的有平均分布和高斯分布（二维正态分布）。

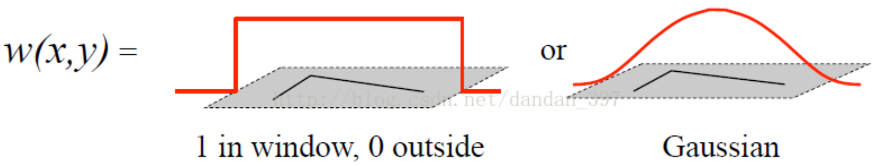

图 2 常见的 2 种窗函数

将函数进行一阶 Taylor 展开，即

$$f(x+u,y+v)=f(x,y)+u\cdot f_x(x,y)+v\cdot f_y(x,y)+O(x,y)$$

那么对于自相关函数$E(u,v)$，其中$I(x,y)$相对于x和y的偏导数I_x、I_y为两方向上梯度，则有

$$\begin{aligned}E(u,v)&=\sum_{x,y}w(x,y)[I(x+u,y+v)-I(x,y)]^2\\&=\sum_{x,y}w(x,y)\left[I(x,y)+uI_x+vI_y-I(x,y)\right]^2\\&=\sum_{x,y}w(x,y)\left(uI_x+vI_y\right)^2\\&=\sum_{x,y}w(x,y)\left(u^2I_x^2+v^2I_y^2+2uvI_xI_y\right)\\&=[u\quad v]\left(\sum_{x,y}w(x,y)\begin{bmatrix}I_x^2 & I_xI_y\\ I_xI_y & I_y^2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\end{aligned}$$

定义括号中的部分为结构张量（structure tensor），用M表示，即

$$M=\sum_{x,y}w(x,y)\begin{bmatrix}I_x^2 & I_xI_y\\ I_xI_y & I_y^2\end{bmatrix}$$

则有

$$E(u,v)=[u\quad v]M\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}$$

就 Harris 检测而言，主要目的在于寻求两个方向上的梯度，反映到自相关函数上，即为(u,v)不同取值下$E(u,v)$的值。而公式中的结构张量M可视为一个二次型，这种情况下，可将M化为特征值组成的对角阵，即相应的标准型；另一方面，其标准型中也包含了该点在两个不同方向上的梯度信息。即，通过分析特征值的方式来进行角点检测。

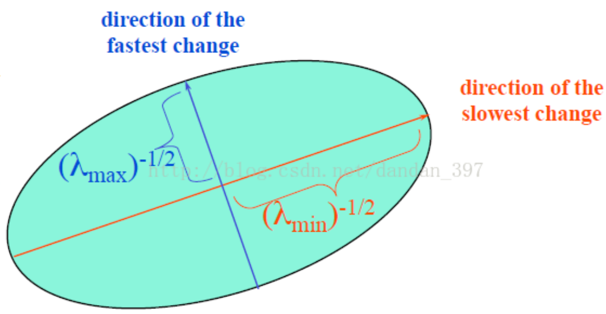

图 3 特征值与梯度

如图 3，特征值越大，说明所在方向的梯度就越大，因此，根据角点、平面及不同方向的直线的梯度分布模式，可以得出结论：

两个特征值都比较大时，窗口中含有角点；特征值一个较大，一个较小，窗口中含有边缘；两个特征值都比较小，窗口处在平坦区域。

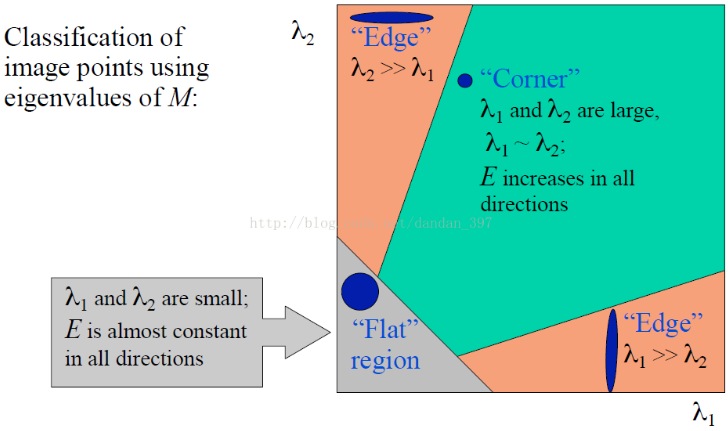

图 4 特征值与角点分布

三. 角点响应函数

在实际应用中，通过判断两个变量（二维矩阵的 2 个特征值）的方式来判断角点/边缘并不方便。因此通常使用角点响应函数R对角点进行度量，判定所在位置是否为角点。

$$R = \det M - k(\operatorname{trace} M)^2$$

其中k为经验常数，通常取值 0.04-0.06。矩阵M的行列式和迹可以通过特征值计算。

$$\det M = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\operatorname{trace} M = \lambda_1 + \lambda_2$$

进而可以通过R的值判断角点/边缘，如图 5。

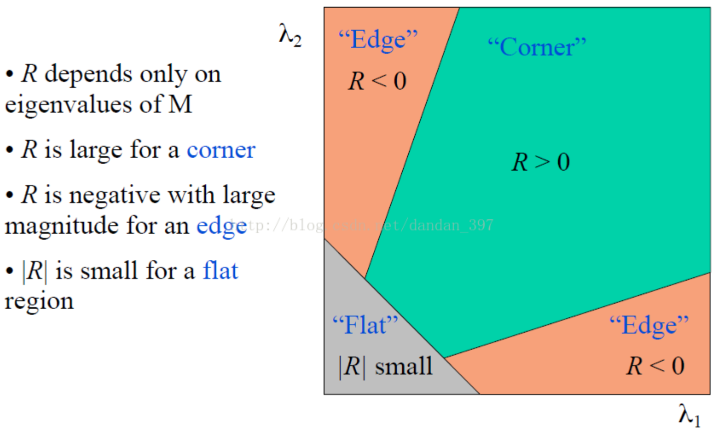

图 5 R值与角点分布

取$\lambda_1 = \lambda$，$\lambda_2 = a\lambda$，其中$0 < a < 1$。则有

$$\begin{aligned} R &= \det M - k(\operatorname{trace} M)^2 \\ &= \lambda_1 \lambda_2 - k(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \\ &= \lambda^2[a - k(1+a)^2] \end{aligned}$$

在a的值较小时，可将之化简为

$$R \approx \lambda^2(a - k)$$

由于角点检测是取R较大的值，因此很容易看出，增大k的值，将减小角点响应值R，降低角点检测的灵性，减少被检测角点的数量；减小k值，将增大角点响应值R，增加角点检测的灵敏性，增加被检测角点的数量。

四.　推论

就 Harris 角点检测而言，由于其结构张量是对图像进行微分运算，而微分运算对图像密度的拉升或收缩和对亮度的抬高或下降不敏感；因此，对亮度和对比度的仿射变换并不改变其响应函数的极值点出现的位置，即，Harris 角点**对亮度和对比度的变化不敏感**。

另一方面，由于 Harris 角点使用的是角点附近的区域灰度二阶矩矩阵的特征值，而在图像转动导致特征椭圆转动时，特征值并不发生变化；因此，角点响应值R也不发生变化，Harris 角点具有**旋转不变性**。

而在检测窗口尺寸不变的前提下，在窗口内所包含图像的内容是完全不同的。放大后的角点可能被检测为边缘或曲线，而缩小的边缘/曲线则可能被检测为一个角点，因此 Harris 角点**不具有尺度不变性**。

参考

https://www.cnblogs.com/ronny/p/4009425.html

https://blog.csdn.net/linqianbi/article/details/78930239