

## 三维空间刚体旋转运动描述

对于刚体在三维空间中的欧氏变换，可以用一个 4 维变换矩阵表示（变换前后点的坐标采用齐次坐标表示）

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

写成分块形式则为

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

三维欧氏变换有 6DoF，分别是 3DOF 的旋转和 3DoF 的位移。其中  $\mathbf{t}$  用以表示 3 维空间的位移， $\mathbf{R}$  用以表示 3 维空间中的旋转。连续的两个三维欧氏变换  $\mathbf{T}_1$ 、 $\mathbf{T}_2$ ，可以表示为  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ 。全体变换矩阵构成特殊欧氏群（special Euclidean group），即  $SE(3)$ 。表示三维空间中的旋转的方式不止一种，除变换矩阵中所提及的旋转矩阵外，尚有旋转向量、欧拉角、四元数等表示方式。

### 一 旋转矩阵

在变换矩阵中所包含的  $\mathbf{R}$  即为旋转矩阵，使用 9 个变量描述一个 3DoF 的旋转运动。 $\mathbf{R}$  本身是一个正交矩阵，即  $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{E}$ 。连续的两个旋转  $\mathbf{R}_1$ 、 $\mathbf{R}_2$ ，可以表示为  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1$ 。全体旋转矩阵构成特殊正交群（special orthogonal group），即  $SO(3)$ 。

若以摄像机坐标系的  $xyz$  轴为坐标轴，即摄像机光心至正右方为  $x$  轴，至正下方为  $y$  轴，至正前方为  $z$  轴，形成一个笛卡尔右手坐标系。那么摄像机绕  $x$  轴旋转的旋转矩阵为

$$\mathbf{R}_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix}$$

其中  $\theta_x$  为 pitch 角，即俯仰角。以  $x$  轴为转轴，在  $yz$  平面逆时针转动。

绕  $y$  轴旋转的旋转矩阵为

$$\mathbf{R}_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix}$$

其中  $\theta_y$  为 yaw 角，即航向角。以  $y$  轴为转轴，在  $xz$  平面逆时针转动。

$$\mathbf{R}_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中  $\theta_z$  为 roll 角，即横滚角。以  $z$  轴为转轴，在  $xy$  平面逆时针转动。

### 二 旋转向量

除旋转矩阵外，三维空间旋转还可以用刚体绕空间中某个轴旋转过某个角度来表示，即 Axis-Angle（轴-角）表示方法。旋转轴可以用一个三维向量  $(x, y, z)$  表示，这个向量的方向与旋转轴方向重合。而向量的模长则可以用来表示旋转的角度  $\theta$ 。

$$\theta \mathbf{a} = \boldsymbol{\Phi}$$

其中  $\theta$  为旋转角度， $\mathbf{a}$  为旋转轴方向所在的单位向量， $\boldsymbol{\Phi}$  为旋转向量。

旋转向量可以通过罗德里格旋转公式转换为旋转矩阵

$$\mathbf{R} = \cos \theta \mathbf{I} + (1 - \cos \theta) \mathbf{a} \mathbf{a}^T + \sin \theta \mathbf{a}^\wedge$$

其中 $\mathbf{a}^\wedge$ 为单位向量 $\mathbf{a}$ 生成的反对称矩阵，推导过程见《罗德里格旋转公式推导总结》。

反之，旋转矩阵也可转换为旋转向量。旋转角度为

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}) &= \cos \theta \text{tr}(\mathbf{I}) + (1 - \cos \theta) \text{tr}(\mathbf{a} \mathbf{a}^T) + \sin \theta \text{tr}(\mathbf{a}^\wedge) \\ &= 3 \cos \theta + (1 - \cos \theta) \\ &= 1 + 2 \cos \theta \end{aligned}$$

即

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\text{tr}(\mathbf{R}) - 1}{2}$$

而旋转轴方向所在向量在这一旋转变换前后方向不变，由此进行推导

$$\mathbf{R} \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

即旋转向量的方向 $\mathbf{a}$ 是旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 的特征值 1 对应的特征向量。

### 三 欧拉角

前文之中已经提及，对于连续的两个旋转 $\mathbf{R}_1$ 和 $\mathbf{R}_2$ 所形成的复合变换，可以由 $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1$ 表示。18 世纪的瑞士数学家莱昂哈德·欧拉（Leonhard Euler）已证实，三维空间中任何一个旋转都可以表示为依次以三个旋转角度分别绕着三个旋转轴进行旋转的复合变换，这种旋转的表示方式被称为欧拉角。

欧拉角旋转所绕的坐标轴可以选择世界坐标系中的坐标轴，由于其三个坐标轴固定不变，又称为静态欧拉角；也可以选择旋转的刚体的坐标系（视觉 SLAM 中为相机坐标系），由于其坐标轴方向随旋转而变，又称动态欧拉角。欧拉角对所选坐标轴的唯一限制就是连续的旋转不能绕同一坐标轴，这样可以有绕两个不同坐标轴旋转的经典欧拉角（Proper Euler angle，如 $xzx$ 顺规，共有 $A_3^2 = 6$ 种），也可以有绕三个不同坐标轴旋转的泰特布莱恩角（Tait-Bryan angle，如 $xyz$ 顺规，共有 $A_3^3 = 6$ 种）。再结合动态、静态欧拉角之分，可知欧拉角一共有 24 种顺规。

在目前并没有一个对欧拉角的统一标准，因此在使用欧拉角的时候要首先确定所用的是哪一种顺规。接下来以经典欧拉角的 $zxz$ 顺规和泰特布莱恩角的 $xyz$ 顺规为例，说明欧拉角到旋转矩阵的转换过程。

$zxz$ 顺规欧拉角的旋转顺序为绕 $z$ 轴旋转 $\alpha$ ，之后绕 $x$ 轴旋转 $\beta$ ，最后绕 $z$ 轴旋转 $\gamma$ 。其生成的旋转矩阵为

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\gamma) \mathbf{R}_x(\beta) \mathbf{R}_z(\alpha)$$

此处的旋转变换为**世界坐标系到相机坐标系**的变换过程（以顺时针为正角度），可得出每次旋转的旋转矩阵为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可计算得出

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \sin \gamma \\ -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma & \sin \beta \cos \gamma \\ \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

而 $xyz$ 顺规的旋转顺序则为绕 $x$ 轴旋转 $\alpha$ ，之后绕 $y$ 轴旋转 $\beta$ ，最后绕 $z$ 轴旋转 $\gamma$ 。其生成的**世界坐标系到相机坐标系**的旋转矩阵为

$$= \mathbf{R}_z(\gamma) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_x(\alpha)$$

展开为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

计算得出

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

也可以由旋转矩阵中各元素的值通过反三角函数计算出旋转角度 $\alpha$ 、 $\beta$ 和 $\gamma$ 的值，公式略。欧拉角存在的一个很大的缺陷是著名的“万向锁”问题，即旋转导致刚体的两个旋转轴指向同一方向时，会丢失一个旋转的自由度。以上文的xyz顺规欧拉角为例，当 $\beta$ 为 $90^\circ$ 时，旋转矩阵变为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

计算后得出

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\alpha + \gamma) & -\cos(\alpha + \gamma) \\ 0 & \cos(\alpha + \gamma) & \sin(\alpha + \gamma) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时改变式中的 $\alpha$ 或 $\gamma$ 得到的结果相同，即旋转丢失了一个维度。

而在接近万向锁的角度， $\beta$ 的微小变化都会引起 $\alpha$ 和 $\gamma$ 的巨大变化，造成姿态曲线的抖动，这也导致欧拉角一般难以进行插值计算。

## 四 四元数

由于欧拉角所具有的难以插值、万向锁等缺陷，在很多实际应用中人们使用四元数来表示旋转。四元数是由爱尔兰数学家哈密顿（William Rowan Hamilton）在 1843 年提出的一种扩展的复数，相比于旋转向量和欧拉角，它使用四个量描述三维空间中的旋转，没有欧拉角中大量的三角函数运算从而减小了计算量，同时没有万向锁等奇异性问题，而且有着可以进行平滑插值的优势。四元数有两种定义，分别为 Hamilton 定义的 Hamilton 四元数和 NASA Jet Propulsion Laboratory (JPL，即喷气推进实验室)定义的 JPL 四元数，其中 Hamilton 四元数采用右手系而 JPL 四元数采用左手系，二者为共轭关系。由于在 SLAM 的相关资料中多采用右手系以及 Hamilton 四元数，因此接下来以 Hamilton 四元数为例，对四元数及其运算方式、对运动的描述等进行阐述（如无特殊声明，下文中所提及的四元数皆为 Hamilton 四元数）。

### 4.1 四元数定义

一个四元数由一个实部和三个虚部组成。

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

其中虚部 $i$ 、 $j$ 、 $k$ 之间的关系为

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = -ji = k$$

$$jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j$$

同时也可以用一个四维向量或者一组标量和矢量来表示四元数

$$\mathbf{q} = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$$

$$\mathbf{q} = [q_0 \quad \mathbf{q}_v]$$

实部为 0 的四元数称之为纯四元数，即

$$\mathbf{q}_{pure} = [0 \quad \mathbf{q}_v]$$

在对三维空间的旋转运动进行描述时一般使用单位四元数，即

$$\mathbf{q} = \left[ \cos \frac{\theta}{2} \quad n_x \sin \frac{\theta}{2} \quad n_y \sin \frac{\theta}{2} \quad n_z \sin \frac{\theta}{2} \right]^T$$

其中  $\mathbf{n} = [n_x \quad n_y \quad n_z]^T$  为旋转轴所在单位向量， $\theta$  为旋转角度，即

$$\mathbf{q} = \left[ \cos \frac{\theta}{2} \quad \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} \right]^T$$

故而

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} + |\mathbf{n}| \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 1$$

为单位四元数。

同时也可由已知的单位四元数求得旋转轴所在向量和旋转角度

$$\theta = 2 \cos^{-1} q_0$$

$$\mathbf{n} = \frac{[q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

由计算公式易知，对于互为相反数的两个四元数  $\mathbf{q}$  和  $-\mathbf{q}$ ，所描述的是同一旋转变换。

#### 4.2 四元数的基本运算

与一般的复数类似，四元数也能够进行一系列的运算，例如加减、相乘、数乘、求逆、共轭等。现以  $\mathbf{q}_a$ 、 $\mathbf{q}_b$  为例，对四元数的基本运算进行阐述。

$$\mathbf{q}_a = [q_{a0} \quad q_{a1} \quad q_{a2} \quad q_{a3}]^T$$

$$\mathbf{q}_b = [q_{b0} \quad q_{b1} \quad q_{b2} \quad q_{b3}]^T$$

四元数的**加减**法运算为

$$\mathbf{q}_a \pm \mathbf{q}_b = [q_{a0} \pm q_{b0} \quad q_{a1} \pm q_{b1} \quad q_{a2} \pm q_{b2} \quad q_{a3} \pm q_{b3}]^T$$

四元数之间的**乘法**运算与复数的乘法运算类似， $\mathbf{q}_a$  的每一项与  $\mathbf{q}_b$  的每一项相乘之后按照  $i$ 、 $j$ 、 $k$  之间的运算规则进行计算，最后再相加得出各项的和。为区别于数乘计算和向量叉乘计算（叉乘使用符号  $\times$ ），使用符号  $\otimes$  来表示四元数之间的乘法运算。

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b &= q_{a0}q_{b0} - q_{a1}q_{b1} - q_{a2}q_{b2} - q_{a3}q_{b3} \\ &\quad + (q_{a0}q_{b1} + q_{a1}q_{b0} + q_{a2}q_{b3} - q_{a3}q_{b2})i \\ &\quad + (q_{a0}q_{b2} - q_{a1}q_{b3} + q_{a2}q_{b0} + q_{a3}q_{b1})j \\ &\quad + (q_{a0}q_{b3} + q_{a1}q_{b2} - q_{a2}q_{b1} + q_{a3}q_{b0})k \end{aligned}$$

其向量形式为

$$\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b = [q_{a0}q_{b0} - \mathbf{q}_{av}^T \mathbf{q}_{bv} \quad q_{a0}\mathbf{q}_{bv} + q_{b0}\mathbf{q}_{av} + \mathbf{q}_{av} \times \mathbf{q}_{bv}]$$

由于最后一项的叉积计算，可知四元数相乘一般情况下不可交换。

除乘积外，四元数还有点乘运算

$$\mathbf{q}_a \cdot \mathbf{q}_b = q_{a0}q_{b0} + q_{a1}q_{b1} + q_{a2}q_{b2} + q_{a3}q_{b3}$$

四元数的**共轭**为将三个虚部各取相反数

$$\mathbf{q}^* = [q_0 \quad -q_1 \quad -q_2 \quad -q_3]^T$$

四元数的**模长**为

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

易知四元数乘积的模等于模的乘积

$$\|\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b\| = \|\mathbf{q}_a\| \|\mathbf{q}_b\|$$

四元数的**逆**为

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|}$$

易知 $\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^{-1} = 1$ ，为实四元数。在表示旋转时，由于 $\|\mathbf{q}\| = 1$ ，故 $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*$ 。  
四元数的数乘为

$$a\mathbf{q} = aq_0 + aq_1i + aq_2j + aq_3k$$

#### 4.3 四元数乘法的性质及幂运算

四元数的乘法不满足交换律，但是满足结合律、分配律

$$(\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b) \otimes \mathbf{q}_c = \mathbf{q}_a \otimes (\mathbf{q}_b \otimes \mathbf{q}_c)$$

$$\mathbf{q}_a \otimes (\mathbf{q}_b + \mathbf{q}_c) = \mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b + \mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_c$$

四元数的乘积的共轭可以化为

$$(\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b)^* = \mathbf{q}_b^* \otimes \mathbf{q}_a^*$$

四元数乘法可用左矩阵或右矩阵表示

$$\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b = [\mathbf{q}_a]_L \mathbf{q}_b$$

$$\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b = [\mathbf{q}_b]_R \mathbf{q}_a$$

其中左/右矩阵为

$$[\mathbf{q}]_L = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}_v^T \\ \mathbf{q}_v & q_0 E + [\mathbf{q}_v]_{\times} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{q}]_R = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}_v^T \\ \mathbf{q}_v & q_0 E - [\mathbf{q}_v]_{\times} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{q}_v]_{\times}$ 为向量 $\mathbf{q}_v$ 的反对称矩阵

$$[\mathbf{q}_v]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}$$

由四元数乘法结合律可知

$$\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_c \otimes \mathbf{q}_b = [\mathbf{q}_b]_R [\mathbf{q}_a]_L \mathbf{q}_c$$

$$\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_c \otimes \mathbf{q}_b = [\mathbf{q}_a]_L [\mathbf{q}_b]_R \mathbf{q}_c$$

由此可以得出

$$[\mathbf{q}_a]_L [\mathbf{q}_b]_R = [\mathbf{q}_b]_R [\mathbf{q}_a]_L$$

四元数的幂运算的一般化公式为

$$\mathbf{q}^t = \exp(t \cdot \log \mathbf{q})$$

纯四元数以自然对数 e 为底的指数公式为

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{q}} &= e^{\begin{bmatrix} 0 & \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \end{bmatrix}} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

四元数的对数公式为

$$\begin{aligned} \log \mathbf{q} &= \log \left( \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

#### 4.4 用四元数表示旋转

在参与四元数的计算时，三维空间中的向量 $\mathbf{p}$ 可表示为实部为零的四元数，即

$$\mathbf{p} = 0 + xi + yj + zk$$

固定坐标系下，向量 $\mathbf{p}$ 经旋转后变换为向量 $\mathbf{p}'$ ，用单位四元数 $\mathbf{q}$ 表示其变换关系为

$$\mathbf{p}' = \mathbf{q} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{q}^{-1}$$

由于单位四元数的逆与共轭相等，上式也可写为

$$\mathbf{p}' = \mathbf{q} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{q}^*$$

对于两个连续的旋转变换 $\mathbf{q}_1$ 和 $\mathbf{q}_2$  ( $\mathbf{q}_1$ 在先,  $\mathbf{q}_2$ 在后), 定系下变换后的向量 $\mathbf{p}'$ 为

$$\mathbf{p}' = \mathbf{q}_2 \otimes \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{q}_1^* \otimes \mathbf{q}_2^*$$

因此有

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_2 \otimes \mathbf{q}_1$$

而旋转坐标系下, 向量 $\mathbf{p}$ 不动, 动系以 $\mathbf{q}$ 进行旋转时, 向量 $\mathbf{p}$ 经变换后的坐标 $\mathbf{p}'$ 为

$$\mathbf{p}' = \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{q}$$

对于两个连续的旋转变换 $\mathbf{q}_1$ 和 $\mathbf{q}_2$  ( $\mathbf{q}_1$ 在先,  $\mathbf{q}_2$ 在后), 动系下变换后的向量 $\mathbf{p}'$ 为

$$\mathbf{p}' = \mathbf{q}_2^* \otimes \mathbf{q}_1^* \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2$$

因此有

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2$$

四元数 $\mathbf{q}$ 可与旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 相互转化, 由四元数 $\mathbf{q}$ 到旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 的转换公式为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

反之, 由旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 到四元数 $\mathbf{q}$ 的转换公式为

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{R}) + 1}}{2} \\ q_1 &= \frac{r_{23} - r_{32}}{4q_0} \\ q_2 &= \frac{r_{31} - r_{13}}{4q_0} \\ q_3 &= \frac{r_{12} - r_{21}}{4q_0} \end{aligned}$$

#### 4.5 四元数的微分方程

刚体在绕瞬时转轴 $\boldsymbol{\omega}_v$ 旋转时, 其载体坐标系 $O_c$  (这里视作与相机坐标系等同) 相对世界坐标系 $O_w$ 在 $\Delta t$ 内转过 $\Delta\theta$ 角度, 旋转角速度为 $\boldsymbol{\omega}$

$$\Delta\theta = \|\boldsymbol{\omega}\|\Delta t$$

$$\boldsymbol{\omega}^w = \|\boldsymbol{\omega}\| \cdot \boldsymbol{\omega}_v^w$$

$\boldsymbol{\omega}_v^w$ 为瞬时旋转轴 $\boldsymbol{\omega}_v$ 在定系 (世界坐标系) 下的投影, 计算出的旋转角速度 $\boldsymbol{\omega}^w$ 可视作实部为0的四元数。

那么在 $\Delta t$ 时间内, 载体旋转的四元数为

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{q} &= \cos\frac{\Delta\theta}{2} + \boldsymbol{\omega}_v^w \sin\frac{\Delta\theta}{2} \\ &= \cos\frac{\|\boldsymbol{\omega}\|\Delta t}{2} + \boldsymbol{\omega}_v^w \sin\frac{\|\boldsymbol{\omega}\|\Delta t}{2} \end{aligned}$$

设载体坐标系的基向量相对定系的旋转四元数相对于时间的函数为 $\mathbf{q}(t)$ , 则旋转相对于时间的导数为

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}(t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\|\omega\|\Delta t}{2} \cdot \mathbf{q}(t) + \sin \frac{\|\omega\|\Delta t}{2} \cdot [0 \quad \omega_v^w]^T \otimes \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(\cos \frac{\|\omega\|\Delta t}{2} - 1\right) \cdot \mathbf{q}(t) + \sin \frac{\|\omega\|\Delta t}{2} \cdot [0 \quad \omega_v^w]^T \otimes \mathbf{q}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-2 \left(\sin^2 \frac{\|\omega\|\Delta t}{4}\right) \cdot \mathbf{q}(t) + \sin \frac{\|\omega\|\Delta t}{2} \cdot [0 \quad \omega_v^w]^T \otimes \mathbf{q}(t)}{\Delta t}
\end{aligned}$$

由于  $\sin^2 \frac{\|\omega\|\Delta t}{4}$  为高阶无穷小项，故计算时可忽略。

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\|\omega\|\Delta t}{2} \cdot [0 \quad \omega_v^w]^T \otimes \mathbf{q}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\|\omega\|\Delta t}{2} \cdot [0 \quad \omega_v^w]^T \otimes \mathbf{q}(t)}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{2} \|\omega\| \cdot [0 \quad \omega_v^w]^T \otimes \mathbf{q}(t) \\
&= \frac{1}{2} \omega^w \otimes \mathbf{q}(t)
\end{aligned}$$

在实际应用时，一般直接获得的不是相对于**定系**的旋转角速度，而是相对于载体所在的**动系**的旋转角速度，例如固连在载体上的 IMU 等，因此在推导时需要将式中  $\omega^w$  转换为  $\omega^c$ 。其中  $\omega^w$  到  $\omega^c$  的变换为**动系**下固定向量的旋转变换，即

$$\omega^c = \mathbf{q}^*(t) \otimes \omega^w \otimes \mathbf{q}(t)$$

移项可得

$$\omega^w = \mathbf{q}(t) \otimes \omega^c \otimes \mathbf{q}^*(t)$$

代入四元数的微分方程得

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}'(t) &= \frac{1}{2} \mathbf{q}(t) \otimes \omega^c \otimes \mathbf{q}^*(t) \otimes \mathbf{q}(t) \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{q}(t) \otimes \omega^c
\end{aligned}$$

化为矩阵形式

$$\mathbf{q}'(t) = \frac{1}{2} [\omega^c]_R \mathbf{q}(t)$$

即

$$\begin{bmatrix} q'_0 \\ q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

#### 4.6 四元数的插值

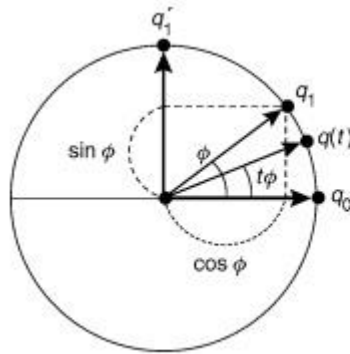
四元数的一大优势就是它非常便于进行插值计算。SLERP (Spherical Linear Interpolation, 球面线性插值) 相对于普通的线性插值，能够令每次插值之后得到的旋转都是均匀变化的，精度更高，适用于更多场景。

给定两个用四元数表示的姿态 $\mathbf{q}(0)$ 和 $\mathbf{q}(1)$ ，对 $t \in [0, 1]$ 范围内的 $\mathbf{q}(t)$ 进行线性插值运算。已知有

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$$

$$\mathbf{q}(1) = \mathbf{q}_1$$

在推导其球面线性插值结果 $\mathbf{q}(t)$ 的过程中，主要进行了一个施密特正交，利用 $\mathbf{q}_0$ 和 $\mathbf{q}_1$ 解算出两个正交的四元数，然后通过加权算出最终的 $\mathbf{q}(t)$ ，具体见下图。



$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \mathbf{q}_0 \cos t\phi + \mathbf{q}'_1 \sin t\phi \\ &= \mathbf{q}_0 \cos t\phi + (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0 \cos \phi) \frac{\sin t\phi}{\sin \phi} \\ &= \mathbf{q}_0 \frac{\cos t\phi \sin \phi - \sin t\phi \cos \phi}{\sin \phi} + \mathbf{q}_1 \frac{\sin t\phi}{\sin \phi} \\ &= \mathbf{q}_0 \frac{\sin(1-t)\phi}{\sin \phi} + \mathbf{q}_1 \frac{\sin t\phi}{\sin \phi} \end{aligned}$$

相较于两个四元数相加形式的球面线性插值公式，实际上还有一种利用四元数乘法表示球面线性插值的公式

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(0) \otimes [\mathbf{q}_0^* \otimes \mathbf{q}_1]^t$$

事实上这两个公式的意义相同，在此不作证明。

## 参考

- [1] 维基百科. 欧拉角[EB/OL]. [2018-12-26]. [https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6 %AC%A7%E6%8B%89%E8%A7%92](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AC%A7%E6%8B%89%E8%A7%92).
- [2] bnrmaster. 欧拉角(Euler angles)[EB/OL]. [2018-12-28]. <https://blog.csdn.net/bnrmaster/article/details/47125821>.
- [3] csxiaoshui. 旋转变换（二）欧拉角[EB/OL]. [2018-12-28]. <https://blog.csdn.net/csxiaoshui/article/details/65437633>.
- [4] 高翔, 张涛, 刘毅, 等. 视觉SLAM十四讲[M]. 2017年3月第1版. 电子工业出版社, 2017.
- [5] 黄德鸣, 程禄. 惯性导航系统[M]. 1986年4月第1版. 国防工业出版社, 1986.
- [6] 陈哲. 捷联惯导系统原理[M]. 北京: 宇航出版社, 1986
- [7] Laboratory M A R S. Indirect Kalman Filter for 3D Attitude Estimation[M]. TR-2005-002. 2005.
- [8] Joan Sol`a. Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter[M]. 2017.