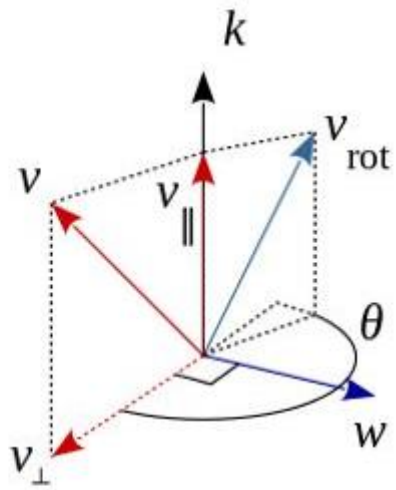
罗德里格斯旋转公式推导

在三维旋转理论体系中，罗德里格斯旋转公式（Rodrigues' Rotation Formula，根据欧林·罗德里格命名）是在给定转轴和旋转角度后，旋转一个向量的有效算法。我们知道，任何旋转都可以由一个旋转轴和一个旋转角度来描述。如果使用一个向量，其方向为旋转轴所在方向，其长度为旋转角度，这样使用一个向量（称为旋转向量）即可描述所需的旋转过程。而罗德里格旋转公式则被用于描述任一向量$\boldsymbol{v}$绕单位向量$\boldsymbol{k}$旋转角度 θ 后得到旋转后向量$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rot}}$的过程；也可用于描述旋转向量$\theta\boldsymbol{k}$转换为旋转矩阵的转换过程。

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rot}} = \boldsymbol{v}\cos\theta + (\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v})\sin\theta + \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{v})(1-\cos\theta)$$
$$\boldsymbol{R} = \cos\theta\,\boldsymbol{I} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}} + \sin\theta\,\boldsymbol{k}^{\wedge}$$

P. S.　符号$^{\wedge}$为向量到反对称矩阵的转换符，将向量外积的计算转换为矩阵和向量相乘的形式



如图，旋转轴方向向量$\boldsymbol{k}$为单位向量，$\|\boldsymbol{k}\| = 1$，且：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{II}} + \boldsymbol{v}_{\perp} \quad \text{（分解为水平分量和垂直分量）}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{II}} = (\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}_{\perp} = -\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{II}}$$

旋转后的水平分量和垂直分量分别为：

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{II\,rot}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{II}}$$

$$\boldsymbol{v}_{\perp\mathrm{rot}} = \cos\theta\,\boldsymbol{v}_{\perp} + \sin\theta\,\boldsymbol{w} = \cos\theta\,\boldsymbol{v}_{\perp} + \sin\theta\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}$$

P. S.　$\boldsymbol{w}$和$\boldsymbol{v}_{\perp}$长度相等且正交，可将其视为一组基来计算$\boldsymbol{v}_{\perp\mathrm{rot}}$

将前面所求式子代入可得：

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rot}} = \cos\theta\,\boldsymbol{v}_{\perp} + \sin\theta\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{II}}$$

$$= \cos\theta\,(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{II}}) + \sin\theta\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{II}}$$

$$= \cos\theta\,\boldsymbol{v} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{v}_{\mathrm{II}} + \sin\theta\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}$$

即：

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rot}} = \boldsymbol{v}\cos\theta + (\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v})\sin\theta + \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{v})(1-\cos\theta)$$

矩阵形式下，可以将向量叉乘转换为反对称矩阵与向量相乘的形式，记作∧。设$\boldsymbol{a} = (a_1 \quad a_2 \quad a_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b} = (b_1 \quad b_2 \quad b_3)^{\mathrm{T}}$，则有：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{b} \triangleq \boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{b}$$

因此，我们可以将叉乘转化为：

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k}^{\wedge}\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{K}^2\boldsymbol{v}$$

所以，公式可化为：

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rot}} = \cos\theta\,\boldsymbol{v} + \sin\theta\,\boldsymbol{K}\boldsymbol{v} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{K}^2\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rot}} = \cos\theta\,\boldsymbol{v} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{v}_{\mathrm{II}} + \sin\theta\,\boldsymbol{K}\boldsymbol{v} = \cos\theta\,\boldsymbol{v} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{v}_{\mathrm{II}} + \sin\theta\,\boldsymbol{k}^{\wedge}\boldsymbol{v}$$

令$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rot}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{v}$，其中$\boldsymbol{v}_{\mathrm{II}}$为$\boldsymbol{v}$在$\boldsymbol{k}$上的投影，投影矩阵$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}}$，且由于$\boldsymbol{k}$为单位向量，故$\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k} = 1$，$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}$。

因此：

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{v} = \cos\theta\,\boldsymbol{v} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} + \sin\theta\,\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}$$

可得旋转矩阵公式：

$$\boldsymbol{R} = \cos\theta\,\boldsymbol{I} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}} + \sin\theta\,\boldsymbol{K}$$

即：

$$\boldsymbol{R} = \cos\theta\,\boldsymbol{I} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}} + \sin\theta\,\boldsymbol{k}^{\wedge}$$