空间几何变换相关内容整理

一 矢量表示法

空间中的点、直线等元素可以用矢量表示。例如在二维空间$\boldsymbol{IR}^2$中，可以用矢量$(x,\ y)^T$来表示空间中的一点，用矢量$(a,\ b,\ c)^T$表示直线$ax+by+c=0$等。

二 齐次坐标

为方便以矩阵运算的形式表示旋转、平移、缩放等坐标变换，并以有限坐标表示无穷远点，一般在空间几何变换中使用齐次坐标表示法来描述矢量（包括点、直线、二次曲线等）。
所谓齐次坐标实际上就是在原本的坐标的基础上增加一个全局缩放因子，这样整个坐标矢量在同时乘或除以一个非零常数的时候表示的内容不变，例如

$$(x, y, 1)^T = (2x, 2y, 2)^T$$

三维空间$\boldsymbol{IR}^3$点的齐次坐标表示为$(x, y, z, w)^T$，其坐标变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}_{3D} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{41} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

二维空间$\boldsymbol{IR}^2$点的齐次坐标表示为$(x\ , y,\ w)^T$，其坐标变换矩阵为

$$\boldsymbol{T}_{2D} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

二维直线$ax+by+c=0$与$kax+kby+kc=0$表示的是同一条直线，因此直线的矢量表示$(a,\ b,\ c)^T$本身就是齐次坐标，点$\boldsymbol{x}$在直线$\boldsymbol{I}$上可以表示为$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{I}=0$。
对于二维平面上的二次曲线$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$，对其进行齐次化

$$x = \frac{x_1}{x_3}$$

$$y = \frac{x_2}{x_3}$$

可以得到多项式$ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2+dx_1x_3+ex_2x_3+fx_3^2=0$，进而用矩阵形式表示

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = 0$$

其中$\boldsymbol{x}$为点的齐次坐标，$\boldsymbol{C}$为二次曲线系数矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

易知对称矩阵$\boldsymbol{C}$在乘或除以一个非 0 标量后不影响曲线表示，即二次曲线系数矩阵$\boldsymbol{C}$同样是齐次坐标。
可以用$w=0$的点来表示无穷远点，又称理想点，射影空间$\boldsymbol{IP}^2$中所有理想点的集合可写为$(x\ , y,\ 0)^T$，该集合位于一条直线上，称之为无穷远线，$\boldsymbol{I}_\infty=(0,0,1)^T$。

三 射影平面模型

射影空间$\boldsymbol{IP}^2$的一种很直观的模型是将其作为$\boldsymbol{IR}^3$中一种射线的集合，该集合的所有矢量$k(x,y,1)^T$在改变k的值的时候形成过原点的射线。

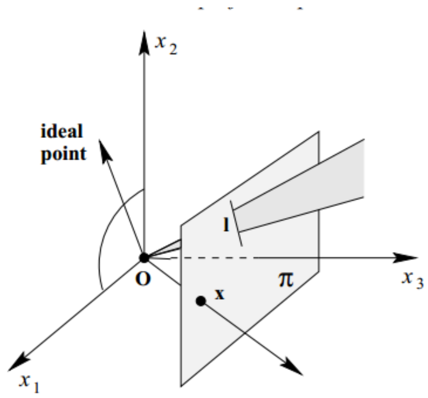

图 1 射影平面模型

四 射影变换

射影变换（Projective Transformation），别名射影映射、保线变换（由于变换前后点的共线关系不变）、单应（Homography，因此变换矩阵可称单应性矩阵）等。
二维射影变换可表示为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

其中单应矩阵$\boldsymbol{H}$为 3*3 非奇异矩阵，乘以任意一个非零比例因子不会使射影变换改变，因此二维射影变换有 8 个自由度。二维空间$\boldsymbol{IR}^2$点的射影变换为$\boldsymbol{x'}^T = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}^T$，称之为逆变；直线的射影变换为$\boldsymbol{l'}^T = \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{l}^T$，称之为协变。二次曲线的射影变换为$\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{H}^{-T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{H}^{-1}$。

透视映射（中心投影映射）是一种特殊的射影变换，沿着通过一个共同点（投影中心）的射线进行投影，将一个平面映射为另一个平面。如果在每个平面中定义一个坐标系，以齐次坐标来表示平面中的点，则中心投影映射可以表示为$\boldsymbol{x'}^T = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}^T$。相比一般的二维射影变换，它有更多的约束，因此只有 6 个自由度。

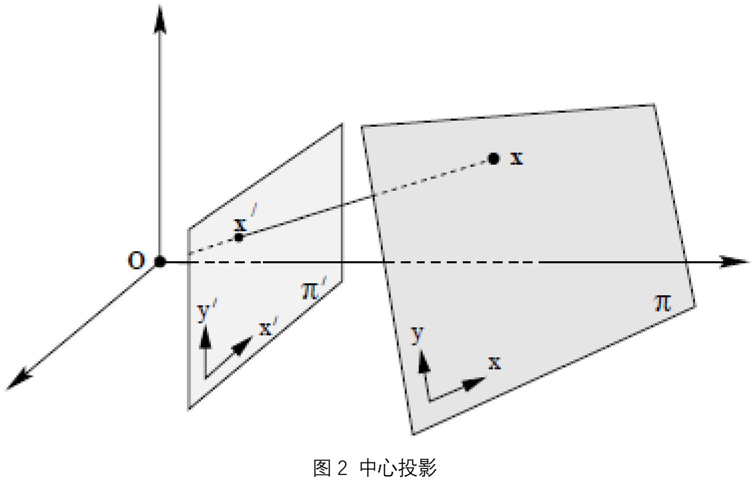

图 2 中心投影

在平面透视图像失真的校正（2D-2D）中，由两平面上任意三点不共线的 4 组点对可以解出两平面间的射影变换矩阵$\boldsymbol{H}$。

五 空间几何变换的层次

简单来说，群是一种集合加上一种运算的代数结构，对一种运算封闭，并服从结合律，具备幺元和逆运算（复杂一些的概念就不懂了，翻过几页流形和群论相关的书，基本没看懂，捂脸）。射影变换可以组成一个群，称之为射影线性群，很多特殊情况下的几何变换都是它的子群。

$\mathrm{n} \times \mathrm{n}$可逆实矩阵组成的群记为$GL(n)$。

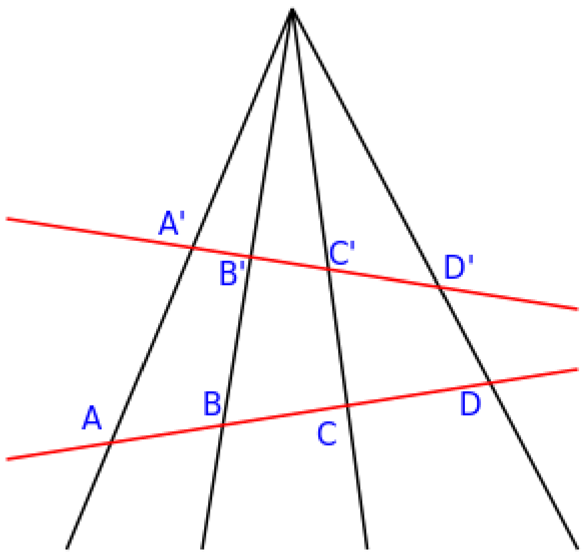

图 3 简比和交比

如图，设直线上依次有四点 A、B、C、D，若以 A、B 为基础点，C 为分点，由分点和基础点所确定的两个有向线段之比称之为**简比**（simple ratio），记作

$$\mathrm{SR}(A, B;\ C) = AC/BC$$

而两个简比的比值则称为**交比**（cross ratio），记作

$$\mathrm{CR}(A, B;\ C, D) = \frac{\mathrm{SR}(A, B;\ C)}{\mathrm{SR}(A, B;\ D)} = \frac{AC/BC}{AD/BD}$$

5.1 射影变换

若将$GL(n)$中相差非零常量因子的矩阵视为等同，即可得到射影线性群$PL(n)$，为$GL(n)$的商群。射影变换可将无穷远点（又称理想点）映射到有限平面上。3 维射影变换可表示为4×4矩阵，有 15DoF；2 维射影变换可表示为3×3矩阵，有 8DoF。

图像在射影变换前后，多边形凹凸性不变，图像中各点的交比不变。

5.2 仿射变换

仿射群可视作将射影群$PL(n)$变换矩阵$\boldsymbol{H}$中最后一行设定为$(\mathbf{0}^T \quad 1)$的矩阵所组成的子群。相同维数下，仿射变换矩阵与射影变换矩阵的阶数相同。3 维仿射变换有 12DoF，而 2 维仿射变换有 6DoF。

以 2 维平面仿射变换为例，其变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

也可以写为分块形式

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{H}_A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

其中矩阵$\boldsymbol{A}$为非奇异矩阵，这样仿射变换可视为一个非奇异线性变换和一个平移变换组成的复合变换。可将矩阵$\boldsymbol{A}$作 SVD 分解，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{UDV}^T$，矩阵$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$均为酉矩阵，$\boldsymbol{D}$为矩阵$\boldsymbol{A}$奇异值组成的对角阵。

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

可将酉矩阵$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$视为旋转矩阵，从而有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{UDV}^T = (\boldsymbol{UV}^T)(\boldsymbol{VDV}^T) = \boldsymbol{R}(\theta)(\boldsymbol{R}(-\phi)\boldsymbol{DR}(\phi))$$

这样，仿射矩阵$\boldsymbol{A}$可看作由旋转(ϕ)、在旋转后的x和y方向按λ_1和λ_2比例进行缩放、回转$(-\phi)$以及最后一个旋转(θ)组成的复合变换。因此，仿射变换可视作旋转、非均匀缩放、平移的复合。

根据$\det \boldsymbol{A}$的值的正负，可将变换分为保向变换和逆向变换，同样，后文的相似变换和等距变换也有保向和逆向之分。而$\det \boldsymbol{A} = \lambda_1\lambda_2$，即逆向变换时有一个方向的缩放比例为负，或者说在缩放的基础上加一个镜像。保向变换可形成一个群，而逆向变换则不是群。

图像在仿射变换前后，线的平行关系不变，各点的简比不变，各图像块的面积比不变。

5.3 比例/相似变换

在仿射变换中保持图像直线间的夹角不变，即可得到相似变换。保向相似变换可视作平移、旋转、和均匀缩放的复合，而逆向的变换则在此基础上多了一个镜像。3 维相似变换有 7DoF，2 维相似变换有 4DoF。

以 2 维保向相似变换为例，变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & t_x \\ s\sin\theta & s\cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

也可写作分块形式

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{H}_S\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} s\boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

其中标量s表示均匀缩放。

图像在相似变换前后，直线间夹角、线段长度间的比例、各图像块的面积比不变。

5.4 等距变换

将相似变换中的缩放比例s置 1，即去掉变换中的缩放部分，即为等距变换，变换前后保持欧式距离不变。保向等距变换可视作旋转和平移的复合，又称为欧氏变换；逆向等距变换则多了一个镜像。3 维等距变换有 6DoF，2 维等距变换有 3DoF。

以 2 维等距变换为例，变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon\cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \varepsilon\sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中$\varepsilon = \pm 1$，若$\varepsilon = 1$则为欧氏变换，$\varepsilon = -1$则为逆向等距变换。

欧氏变换的分块形式为

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{H}_E\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

其中$\det \boldsymbol{R} = 1$，且为正交矩阵。

图像在等距变换前后，线段长度、两点间欧式距离、直线夹角、图像块面积不变。

参考文献

[1] 张广军. 机器视觉[M]. 北京:科学出版社, 2005.
[2] Hartley R, Zisserman A. 计算机视觉中的多视图几何[M].韦穗, 杨尚骏等, 译. 合肥:安徽大学出版社, 2002.