本文作者为北航自动化学院在读博士邱笑晨，如有疑问和建议请发邮件至：ares43490@126.com

〇、一些预备知识的科普

这部分内容根据在泡泡机器人的四期推送中正文前的絮叨以及与小伙伴们的互动整理而来。

IMU 预积分技术最早由 T Lupton 于 12 年提出[1]，C Forster 于 15 年[2][3][4]将其进一步拓展到李代数上，形成了一套优雅的理论体系。Forster 将 IMU 预积分在开源因子图优化库 GTSAM 中进行了实现，并完成了和其另一大作 SVO 的组合。这套理论目前已经被广泛的应用在基于 Bundle Adjustment 优化框架的 Visual Inertial Odometry 中。其中包括 VI-ORBSLAM，港科大 VINS，百度/浙大 ICE-BA 等。

本报告对 Foster 的 paper[3][4]中的公式进行了详尽的推导，试图将这套优雅的理论详细地展现在读者面前，使读者对 IMU 预积分理论有更加完备的认识。

为了更好的理解本系列报告，推荐另外三本参考书目[5][6][7]。其中[6]可作为本文惯性导航部分知识的详细参考。

下面先简单阐述一下传统捷联惯性导航的基本思想。

惯性导航的核心原理基于牛顿第二定律，即位置的导数等于速度，速度的导数等于加速度。如果我们假设参考坐标系下载体的初始速度和初始位置已知，利用载体运动过程中参考系下的加速度信息，就可以不断地进行积分运算，更新实时的速度和位置。这基本上是中学的知识了，是不是很简单？

当然了，这是理想的理论情况，实际的情况是，加速度是由与载体固连的加速度计测量得到的（会跟随载体转动），每一时刻的加速度都是在当前的载体系下得到的，进行速度和位置的积分，前提是把这些加速度都统一到同一个坐标系下。更新姿态的作用就在于此——通过实时更新姿态，我们可以求得当前载体系相对于参考系的姿态，从而将载体系下的加速度测量投影到参考系下。

一个更麻烦的情况是，由于加速度计的测量原理，它敏感到的“加速度”实际上不是纯加速度，而是包含了反向重力加速度的比力。举两个例子帮助大家理解：假如一个三轴加速度计放在水平面上，那么它的输出将是铅垂线反向的 9.8m/s^2；如果一个加速度计做自由落体运动，那么它的输出会是 0。总而言之，加速度计无法敏感到重力（所以静止时才会有反向重力加速度输出）。因为这个麻烦的情况，捷联惯导中的姿态一般需要相对于水平地理系来表示（也就是说将水平地理系选作参考系），这样才好补偿重力加速度（因为我们都知道水平地理系下的正向重力加速度就是[0,0,-9.8]，以东北天系为例）。

最后，传感器总是存在噪声的，惯性导航这种积分运算，必然使得 IMU 器件中的测量噪声不断的累积，从而造成定位和姿态误差。

好了，如果掌握了前面的内容，对于理解 IMU 预积分理论所需的惯导知识就已经足够了。至于捷联导航的更多复杂内容，比如对地球自转的处理，以及地速与绝对速度等概念就不做展开了，如果感兴趣可以去找本捷联惯导的书看看（比如[6]）。

下面介绍传统捷联导航算法与预积分算法的联系。

传统捷联惯性导航的递推算法，以初始状态为基础，利用 IMU 测量得到的比力和角速度信息进行积分运算，实时更新载体的位姿及速度等状态（详见第二部分运动模型），根据这种思路，如果知道上一帧图像采样时刻载体的位姿和速度，则可以根据两帧之间的 IMU 测量（角速度和比力）递推得到当前帧的位姿和速度。需要注意的是，传统的惯导解算中非常重要的一个问题是处理重力，由于加计的测量特性，其测量值为包含反向重力的比力，而不是纯加速度。这使得一旦姿态不准确，重力投影误差将对速度和位置积分产生严重影响。

在基于 BA 的视觉惯性融合算法中，各个节点的载体状态都是有待优化的量。IMU 预积分的初衷，是希望借鉴纯视觉 SLAM 中图优化的思想，将帧与帧之间 IMU 相对测量信息转换为约束节点（载体位姿）的边参与到优化框架中。IMU 预积分理论最大的贡献是对这些 IMU 相对测量进行处理，使得它与绝对位姿解耦（或者只需要线性运算就可以进行校正），从而大大提高优化速度。另外，这种优化架构还使得加计测量中不受待见的重力变成一个有利条件——重力的存在将使整个系统对绝对姿态（指相对水平地理坐标系的俯仰角和横滚角，不包括真航向）可观。要知道纯视觉 VO 或者 SLAM 是完全无法得到绝对姿态的。

此外，由于传感器测量误差的存在，无论是纯惯导还是纯 VO 解算，单纯依靠递推运算不可避免的将带来累积误差（低精度 IMU 会极快发散）。将两种传感器融合可以利用冗余测量（例如两种方式都可以求取相对位姿）来抑制累积误差。同时，IMU 和视觉这两种不同源的测量，也使得 IMU 的 bias 可观，从而可以在优化中被有效估计。另外老生常谈的纯单目视觉缺乏绝对尺度的问题，也可以由惯性信息的引入而得以解决。

接下来将进入推导部分，相比在泡泡机器人的推送，更正了 SO(3)的右 Jacobian 的逆的表达式（括号中的“+”更正为“-”）；补充了“Adjoint 性质”的证明部分；更正了残差 Jacobian 的表述，由“关于状态增量的 Jacobian”更正为“关于状态的 Jacobian”，注意在 IMU 预积分原文中采用的就是错误的表述，本文的初版没有意识到这个问题，但在此版本中对这一问题进行更正，详情请参见第六部分。

一、关于李群流形的一些基本概念和性质

由于预积分中的概念就是在李群流形上推导的，有必要对相关知识进行介绍。这部分介绍一些预积分的描述和公式推导时会用到的，关于李群流形的基本概念和性质。

•李群要满足的基本性质等可参见高博的《视觉 SLAM 十四讲》，更进阶的知识可参考《State Estimation for Robotics》。

• 特殊正交群 SO(3)是李群的一种，其元素为旋转矩阵（方向余弦阵，3×3 正交阵），其对应的李代数为 $\mathfrak{so}(3)$，其元素为 3×3 的反对称阵（注意并不是 3 维实向量，不过每个 3 维实向量和一个 3×3 反对称阵一一对应，后面会看到有时也用 3 维实向量来指代 $\mathfrak{so}(3)$的元素）。

• hat 运算符 ^ 把 3 维实向量映射为 3×3 反对称阵；vee 运算符 $^\vee$ 把 3×3 反对称映射为 3 维实向量；这对运算符构成了 3×3 反对称阵和 3 维实向量间的双射，如下式：

$$\boldsymbol{\omega}^\wedge = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{W}$$

$$\mathbf{W}^\vee = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}^\vee = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega}$$

• 关于 hat 运算符的一个性质（ R^3 为所有 3 维实向量的集合）：

$$\mathbf{a}^\wedge \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{b}^\wedge \cdot \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^3$$

• 指数映射 $\exp(\bullet)$ 将 $\mathfrak{so}(3)$中的元素映射到 SO(3)上：

$$\exp\left(\vec{\phi}^\wedge\right) = \mathbf{I} + \frac{\sin\left(\left\|\vec{\phi}\right\|\right)}{\left\|\vec{\phi}\right\|}\vec{\phi}^\wedge + \frac{1-\cos\left(\left\|\vec{\phi}\right\|\right)}{\left\|\vec{\phi}\right\|^2}\left(\vec{\phi}^\wedge\right)^2$$

当 $\vec{\phi}$ 是小量时，有一阶近似如下：

$$\exp\left(\vec{\phi}^\wedge\right) \approx \mathbf{I} + \vec{\phi}^\wedge$$

• 对数映射 $\log(\bullet)$ 将 SO(3)中的元素映射到 $\mathfrak{so}(3)$上：

$$\log(\mathbf{R}) = \frac{\varphi \cdot \left(\mathbf{R} - \mathbf{R}^T\right)}{2\sin(\varphi)}$$

其中 $\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{tr(R)-1}{2}\right)$。有 $\log(\mathbf{R})^\vee = \varphi \cdot \mathbf{a}$ ，φ 为旋转角，$\mathbf{a}$ 为旋转轴单位矢量，有

$\mathbf{a}=\left(\dfrac{\mathbf{R}-\mathbf{R}^{T}}{2\sin(\varphi)}\right)^{\vee}$。

• 当$\left\|\vec{\phi}\right\|<\pi$（或$\left\|\vec{\phi}\right\|$被限制在其它任意一个连续的$2\pi$范围内）时，指数映射和对数映射构成 SO(3)和 $\mathfrak{so}$(3)间的双射。

• $\exp(\bullet)$和$\log(\bullet)$是 SO(3)（3×3 正交阵）与 $\mathfrak{so}$(3)（3×3 反对称阵）之间的映射，为了后续行文的符号简明，下面用 3 维实向量来指代 $\mathfrak{so}$(3)的元素（依据 3 维实向量和 3×3 反对称一一对应），定义新的指数映射和对数映射：

$$\mathrm{Exp}:R^{3}\ni\vec{\phi}\rightarrow\exp\left(\vec{\phi}^{\wedge}\right)\in SO(3)$$

$$\mathrm{Log}:\mathrm{SO}(3)\ni\mathbf{R}\rightarrow\log(\mathbf{R})^{\vee}\in R^{3}$$

注意$\exp(\bullet)\Rightarrow\mathrm{Exp}(\bullet)$，$\log(\bullet)\Rightarrow\mathrm{Log}(\bullet)$，首字母大写表示 SO(3)和$R^{3}$之间的映射。

• 对于 3 维实向量$\vec{\phi}$和一个小量$\delta\vec{\phi}$，有下述近似性质：

$$\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}+\delta\vec{\phi}\right)\approx\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\mathrm{Exp}\left(\mathbf{J}_{r}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\delta\vec{\phi}\right)$$

$$\mathrm{Log}\left(\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}\right)\right)=\vec{\phi}+\mathbf{J}_{r}^{-1}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\delta\vec{\phi}$$

式 1 可以这样理解：R^{3}中的向量$\vec{\phi}$加上一个小量$\delta\vec{\phi}$，对应到 SO(3)中则是$\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)$右乘一个$\mathrm{Exp}\left(\mathbf{J}_{r}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\delta\vec{\phi}\right)$；

式 2 则可这样理解：SO(3)中$\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)$右乘一个$\mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}\right)$，对应到$R^{3}$中则是$\vec{\phi}$加上一项$\mathbf{J}_{r}^{-1}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\delta\vec{\phi}$。

$\mathbf{J}_{r}\left(\vec{\phi}\right)$是 SO(3)的右 Jacobian，将切空间的“加性项”和 SO(3)中的右“乘性项”联系在一起。$\mathbf{J}_{r}\left(\vec{\phi}\right)$及其逆$\mathbf{J}_{r}^{-1}\left(\vec{\phi}\right)$的表达式如下：

$$\mathbf{J}_{r}\left(\vec{\phi}\right)=\mathbf{I}-\frac{1-\cos\left(\left\|\vec{\phi}\right\|\right)}{\left\|\vec{\phi}\right\|^{2}}\vec{\phi}^{\wedge}+\frac{\left\|\vec{\phi}\right\|-\sin\left(\left\|\vec{\phi}\right\|\right)}{\left\|\vec{\phi}\right\|^{3}}\left(\vec{\phi}^{\wedge}\right)^{2}$$

$$\mathbf{J}_{r}^{-1}\left(\vec{\phi}\right)=\mathbf{I}+\frac{1}{2}\vec{\phi}^{\wedge}+\left(\frac{1}{\left\|\vec{\phi}\right\|^{2}}-\frac{1+\cos\left(\left\|\vec{\phi}\right\|\right)}{2\cdot\left\|\vec{\phi}\right\|\cdot\sin\left(\left\|\vec{\phi}\right\|\right)}\right)\left(\vec{\phi}^{\wedge}\right)^{2}$$

• 指数映射的 Adjoint 性质：

$$\mathbf{R}\cdot\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\mathbf{R}^{T}=\exp\left(\mathbf{R}\vec{\phi}^{\wedge}\mathbf{R}^{T}\right)=\mathrm{Exp}\left(\mathbf{R}\vec{\phi}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\mathbf{R}=\mathbf{R}\cdot\mathrm{Exp}\left(\mathbf{R}^{T}\vec{\phi}\right)$$

下面证明第一行等式。首先，对于任意旋转矩阵$\mathbf{R}$和三维矢量$\vec{\phi}$，有如下等式成立：

$$\left(\mathbf{R}\vec{\phi}\right)^{\wedge}=\mathbf{R}\vec{\phi}^{\wedge}\mathbf{R}^{T}$$

该等式在《State Esitimation for Robotics》第 P227 页被引用。它的一个简单证明可参照郑帆大佬的博客（https://fzheng.me/2017/12/10/Rvhat/）。

令$\vec{\phi}=\theta\mathbf{a}$，其中$\theta$为模值，$\mathbf{a}$为单位矢量。参照《视觉 SLAM 十四讲》第 P70 页式(4.22)有（即罗德里格斯公式）

$$\begin{aligned}&\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)=\exp\left(\vec{\phi}^{\wedge}\right)=\exp\left(\theta\mathbf{a}^{\wedge}\right)\\&=\cos\theta\cdot\mathbf{I}+\left(1-\cos\theta\right)\mathbf{a}\mathbf{a}^{T}+\sin\theta\cdot\mathbf{a}^{\wedge}\end{aligned}$$

则 Adjoint 性质的左边可以开始变形：

$$\begin{aligned}&\mathbf{R}\cdot\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\mathbf{R}^{T}\\&=\mathbf{R}\cdot\left[\cos\theta\cdot\mathbf{I}+\left(1-\cos\theta\right)\mathbf{a}\mathbf{a}^{T}+\sin\theta\cdot\mathbf{a}^{\wedge}\right]\cdot\mathbf{R}^{T}\\&=\cos\theta\cdot\mathbf{R}\mathbf{R}^{T}+\left(1-\cos\theta\right)\cdot\mathbf{R}\mathbf{a}\mathbf{a}^{T}\mathbf{R}^{T}+\sin\theta\cdot\mathbf{R}\mathbf{a}^{\wedge}\mathbf{R}^{T}\\&=\cos\theta\cdot\mathbf{I}+\left(1-\cos\theta\right)\cdot\left(\mathbf{R}\mathbf{a}\right)\cdot\left(\mathbf{R}\mathbf{a}\right)^{T}+\sin\theta\cdot\left(\mathbf{R}\mathbf{a}\right)^{\wedge}\\&=\exp\left(\theta\left(\mathbf{R}\mathbf{a}\right)^{\wedge}\right)=\exp\left(\left(\mathbf{R}\vec{\phi}\right)^{\wedge}\right)\end{aligned}$$

此时，考虑 $\left(\mathbf{R}\vec{\phi}\right)^{\wedge}=\mathbf{R}\vec{\phi}^{\wedge}\mathbf{R}^{T}$，则有 $\exp\left(\left(\mathbf{R}\vec{\phi}\right)^{\wedge}\right)=\exp\left(\mathbf{R}\vec{\phi}^{\wedge}\mathbf{R}^{T}\right)$；考虑 $\mathrm{Exp}:R^{3}\ni\vec{\phi}\to\exp\left(\vec{\phi}^{\wedge}\right)\in SO(3)$，则有 $\exp\left(\left(\mathbf{R}\vec{\phi}\right)^{\wedge}\right)=\mathrm{Exp}\left(\mathbf{R}\vec{\phi}\right)$。

证毕。

二、IMU 器件测量模型（Sensor Model）和运动学模型（Kinetic Model）

• 陀螺测量模型：

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{wb}^{b}\left(t\right)=\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}\left(t\right)+\mathbf{b}_{g}\left(t\right)+\boldsymbol{\eta}_{g}\left(t\right)$$

其中 $\mathbf{b}_g$ 是随时间缓慢变化的 bias，$\boldsymbol{\eta}_g$ 是白噪声。该模型利用了 Static World Assumption，后文会介绍。

• 加计测量模型：

$$\mathbf{f}^{b}\left(t\right)=\mathbf{R}_{b}^{wT}\left(\mathbf{a}^{w}-\mathbf{g}^{w}\right)+\mathbf{b}_{a}\left(t\right)+\boldsymbol{\eta}_{a}\left(t\right)$$

其中 $\mathbf{b}_a$ 是随时间缓慢变化的 bias，$\boldsymbol{\eta}_a$ 是白噪声。

•可以看到，这里对加计和陀螺的测量模型建模都比较简单，没有过细的考虑马尔科夫过程等其他误差项的建模，这与 SLAM 中一般使用精度较低的 mems 器件有关。

• Static World Assumption：由于 SLAM 的运行场景一般比较小（重力变化不大），运行时间也不会太长，且使用的 IMU 器件一般为 mems 器件（精度低，陀螺仪静置时无法敏感地球自转）。因此不会像传统的捷联 INS 解算中，考虑地球自转、根据位置更新重力矢量等，常常忽略地球自转（认为地球是个 static world），并假设运行区域水平面是个平面，重力矢量 $\mathbf{g}^w$ 的指向固定且模值恒定。在此假设下的 VISLAM 或 VIO 中，世界坐标系 w 被认为是一个惯性系，且一般会选择初始时刻水平地理系，前面的陀螺仪测量模型中即利用了 w 系是惯性系的假设。下面的运动模型，都是基于这个 assumption 来进行推导的。

• 运动模型的微分方程形式如下：

$$\dot{\mathbf{R}}_{b}^{w}=\mathbf{R}_{b}^{w}\left(\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}\right)^{\wedge}\quad\text{（来源可参考秦永元《惯性导航》第一版P238）}$$

$$\dot{\mathbf{v}}^{w}=\mathbf{a}^{w}$$

$$\dot{\mathbf{p}}^{w}=\mathbf{v}^{w}$$

使用欧拉积分（Euler Integration，三角形积分）可得到运动方程的离散形式如下：

$$\mathbf{R}_{b(t+\Delta t)}^{w} = \mathbf{R}_{b(t)}^{w}\mathrm{Exp}\left(\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}(t)\cdot\Delta t\right)$$
$$\mathbf{v}^{w}(t+\Delta t) = \mathbf{v}^{w}(t)+\mathbf{a}^{w}(t)\cdot\Delta t$$
$$\mathbf{p}^{w}(t+\Delta t) = \mathbf{p}^{w}(t)+\mathbf{v}^{w}(t)\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\mathbf{a}^{w}(t)\cdot\Delta t^{2}$$

★【其中，对 Rotation 更新方程做详细解释如下（参考秦永元《惯性导航》第 1 版 P292。9.2.2 节）：

$\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}(t)$ 表示 t 时刻“角速度矢量”在 b 系下的坐标⇒

$\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}(t)\cdot\Delta t$ 表示“旋转矢量”在 b 系下的坐标，又有 $\mathrm{Exp}(\bullet)$ 相当于罗德里格斯公式（Rodrigues' Rotation Formula）⇒

$\mathrm{Exp}\left(\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}(t)\cdot\Delta t\right)=\mathbf{R}_{b(t+\Delta t)}^{b(t)}$ ⇒

$\mathbf{R}_{b(t)}^{w}\mathrm{Exp}\left(\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}(t)\cdot\Delta t\right)=\mathbf{R}_{b(t)}^{w}\mathbf{R}_{b(t+\Delta t)}^{b(t)}=\mathbf{R}_{b(t+\Delta t)}^{w}$】★

注意到，IMU 预积分的理论是建立在欧拉积分的基础上的，并不是捷联惯导中传统的 LK4 等积分方式。

• 为了符号简明，下面省略一些上下标记号：

$\mathbf{R}(t)\doteq\mathbf{R}_{b(t)}^{w}$；$\boldsymbol{\omega}(t)\doteq\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}(t)$；$\mathbf{f}(t)=\mathbf{f}^{b}(t)$；$\mathbf{v}(t)\doteq\mathbf{v}^{w}(t)$；$\mathbf{p}(t)\doteq\mathbf{p}^{w}(t)$；$\mathbf{g}\doteq\mathbf{g}^{w}$

• 将测量模型代入离散运动方程

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t+\Delta t)&=\mathbf{R}(t)\cdot\mathrm{Exp}\left(\boldsymbol{\omega}(t)\cdot\Delta t\right)\\&=\mathbf{R}(t)\cdot\mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)-\mathbf{b}_{g}(t)-\boldsymbol{\eta}_{gd}(t)\right)\cdot\Delta t\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t+\Delta t)&=\mathbf{v}(t)+\mathbf{a}^{w}(t)\cdot\Delta t\\&=\mathbf{v}(t)+\mathbf{R}(t)\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}(t)-\mathbf{b}_{a}(t)-\boldsymbol{\eta}_{ad}(t)\right)\cdot\Delta t+\mathbf{g}\cdot\Delta t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t+\Delta t)&=\mathbf{p}(t)+\mathbf{v}(t)\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\mathbf{a}^{w}(t)\cdot\Delta t^{2}\\&=\mathbf{p}(t)+\mathbf{v}(t)\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\left[\mathbf{R}(t)\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}(t)-\mathbf{b}_{a}(t)-\boldsymbol{\eta}_{ad}(t)\right)+\mathbf{g}\right]\cdot\Delta t^{2}\\&=\mathbf{p}(t)+\mathbf{v}(t)\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t^{2}+\frac{1}{2}\mathbf{R}(t)\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}(t)-\mathbf{b}_{a}(t)-\boldsymbol{\eta}_{ad}(t)\right)\cdot\Delta t^{2}\end{aligned}$$

• 上述公式中，注意到噪声项采用 $\boldsymbol{\eta}_{gd}$ 和 $\boldsymbol{\eta}_{ad}$（d 表示 discrete），它们与连续噪声项 $\boldsymbol{\eta}_{g}$ 和 $\boldsymbol{\eta}_{a}$ 是不同的，离散噪声和连续噪声的协方差有如下关系：

$$\mathrm{Cov}\left(\boldsymbol{\eta}_{gd}(t)\right)=\frac{1}{\Delta t}\mathrm{Cov}\left(\boldsymbol{\eta}_{g}(t)\right)$$
$$\mathrm{Cov}\left(\boldsymbol{\eta}_{ad}(t)\right)=\frac{1}{\Delta t}\mathrm{Cov}\left(\boldsymbol{\eta}_{a}(t)\right)$$

预积分 paper 中给出该关系的参考文献为《Sigme-point Kalman filtering for integration GPS and inertial navigation》。

• 进一步假设 Δt 恒定（即采样频率不变），每个离散时刻由 $k=0,1,2,\ldots$ 表示，前述三个离散运动方程可进一步简化（符号简化）为：

$$\mathbf{R}_{k+1}=\mathbf{R}_k\cdot\mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k-\mathbf{b}_k^g-\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\right)\cdot\Delta t\right)$$

$$\mathbf{v}_{k+1}=\mathbf{v}_k+\mathbf{R}_k\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_k^a-\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\cdot\Delta t+\mathbf{g}\cdot\Delta t$$

$$\mathbf{p}_{k+1}=\mathbf{p}_k+\mathbf{v}_k\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t^2+\frac{1}{2}\mathbf{R}_k\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_k^a-\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\cdot\Delta t^2$$

三、基于前述性质、假设以及模型的 IMU 预积分（IMU Preintegration）

•根据欧拉积分，可以利用$k=i$时刻到$k=j-1$时刻的所有 IMU 测量，来由$k=i$时刻的$\mathbf{R}_i$、$\mathbf{v}_i$和$\mathbf{p}_i$直接更新得到$k=j$时刻的$\mathbf{R}_j$、$\mathbf{v}_j$和$\mathbf{p}_j$：

$$\mathbf{R}_j=\mathbf{R}_i\cdot\prod_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k-\mathbf{b}_k^g-\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\right)\cdot\Delta t\right)$$

$$\mathbf{v}_j=\mathbf{v}_i+\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}+\sum_{k=i}^{j-1}\mathbf{R}_k\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_k^a-\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\cdot\Delta t$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_j&=\mathbf{p}_i+\sum_{k=i}^{j-1}\mathbf{v}_k\cdot\Delta t+\frac{j-i}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t^2+\frac{1}{2}\sum_{k=i}^{j-1}\mathbf{R}_k\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_k^a-\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\cdot\Delta t^2\\&=\mathbf{p}_i+\sum_{k=i}^{j-1}\left[\mathbf{v}_k\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t^2+\frac{1}{2}\mathbf{R}_k\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_k^a-\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\cdot\Delta t^2\right]\end{aligned}$$

其中$\Delta t_{ij}=\sum_{k=i}^{j-1}\Delta t=\left(j-i\right)\Delta t$

• 于是，为了避免每次更新初始的$\mathbf{R}_i$、$\mathbf{v}_i$和$\mathbf{p}_i$都需要重头积分求解$\mathbf{R}_j$、$\mathbf{v}_j$和$\mathbf{p}_j$，引出预积分项（理想值）如下：

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{R}_{ij}&\triangleq\mathbf{R}_i^T\mathbf{R}_j\\&=\prod_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k-\mathbf{b}_k^g-\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\right)\cdot\Delta t\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{v}_{ij}&\triangleq\mathbf{R}_i^T\left(\mathbf{v}_j-\mathbf{v}_i-\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right)\\&=\sum_{k=i}^{j-1}\Delta\mathbf{R}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_k^a-\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\cdot\Delta t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{p}_{ij}&\triangleq\mathbf{R}_i^T\left(\mathbf{p}_j-\mathbf{p}_i-\mathbf{v}_i\cdot\Delta t_{ij}-\frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right)\\&=\sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\mathbf{v}_{ik}\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\Delta\mathbf{R}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_k^a-\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\cdot\Delta t^2\right]\end{aligned}$$

• 上述三个预积分公式中，前两个式子的推导是显而易见的，现对$\Delta\mathbf{p}_{ij}$的公式进行证明，且为节省篇幅，令$\boldsymbol{\xi}_k=\tilde{\mathbf{f}}_k-\mathbf{b}_k^a-\boldsymbol{\eta}_k^{ad}$：

$$\begin{aligned}
&\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2 \\
&= \sum_{k=i}^{j-1}\left(\mathbf{v}_k \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{g} \cdot \Delta t^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_k \boldsymbol{\xi}_k \cdot \Delta t^2\right) - \sum_{k=i}^{j-1}\mathbf{v}_i \cdot \Delta t - \frac{(j-i)^2}{2}\mathbf{g} \cdot \Delta t^2 \\
&= \sum_{k=i}^{j-1}(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i)\Delta t + \left[\frac{j-i}{2} - \frac{(j-i)^2}{2}\right]\mathbf{g} \cdot \Delta t^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{j-1}\mathbf{R}_k \boldsymbol{\xi}_k \cdot \Delta t^2 \\
&= \sum_{k=i}^{j-1}(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i)\Delta t - \sum_{k=i}^{j-1}(k-i)\mathbf{g} \cdot \Delta t^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{j-1}\mathbf{R}_k \boldsymbol{\xi}_k \cdot \Delta t^2 \\
&= \sum_{k=i}^{j-1}\left\{\left[\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i - (k-i)\mathbf{g} \cdot \Delta t\right]\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{R}_k \boldsymbol{\xi}_k \cdot \Delta t^2\right\} \\
&= \sum_{k=i}^{j-1}\left[(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \cdot \Delta t_{ik})\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{R}_k \boldsymbol{\xi}_k \cdot \Delta t^2\right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-1}\left[\mathbf{R}_i \cdot \Delta \mathbf{v}_{ik} \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{R}_k \boldsymbol{\xi}_k \cdot \Delta t^2\right]
\end{aligned}$$

其中利用了 $\frac{j-i}{2} - \frac{(j-i)^2}{2} = -\frac{(j-i)\left[j-(i+1)\right]}{2} = -\sum_{k=i}^{j-1}(k-i)$（等差数列求和）。

前面等式左右两边同时左乘 $\mathbf{R}_i^T$，有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}_i^T\left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g} \cdot \Delta t_{ij}^2\right) \\
&= \sum_{k=i}^{j-1}\left[\mathbf{R}_i^T\mathbf{R}_i \cdot \Delta \mathbf{v}_{ik} \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{R}_i^T\mathbf{R}_k \boldsymbol{\xi}_k \cdot \Delta t^2\right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta \mathbf{v}_{ik} \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\Delta \mathbf{R}_{ik} \boldsymbol{\xi}_k \cdot \Delta t^2\right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta \mathbf{v}_{ik} \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\Delta \mathbf{R}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_k^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right) \cdot \Delta t^2\right]
\end{aligned}$$

证毕。

四、预积分测量值及测量噪声

• 下面尝试将噪声项（$\boldsymbol{\eta}_k^{gd}$ 和 $\boldsymbol{\eta}_k^{ad}$）从预积分理想值中分离出来，使得预积分测量值（由 IMU 测量数据计算得到）具有理想值“加”（之所以打引号是因为旋转量 $\Delta \mathbf{R}_{ij}$ 不具有加性形式，它是乘性的）白噪声的形式。

这里做一个假设，认为预积分计算区间内（和视觉融合时，通常是两帧间）的 bias 相等，即 $\mathbf{b}_i^g = \mathbf{b}_{i+1}^g = \cdots = \mathbf{b}_j^g$ 以及 $\mathbf{b}_i^a = \mathbf{b}_{i+1}^a = \cdots = \mathbf{b}_j^a$。

（1）$\Delta \mathbf{R}_{ij}$ 项：

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathbf{R}_{ij} &= \prod_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t - \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t\right) \\
&\overset{①}{\approx} \prod_{k=i}^{j-1} \left\{ \mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right) \cdot \mathrm{Exp}\left(-\mathbf{J}_r\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right) \cdot \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t\right) \right\} \\
&\overset{②}{=} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \prod_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp}\left(-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \cdot \mathbf{J}_r^k \cdot \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t\right)
\end{aligned}
$$

推导中的一些细节：

①处：

利用性质“当 $\delta\vec{\phi}$ 是小量时有 $\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}+\delta\vec{\phi}\right) \approx \mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\cdot \mathrm{Exp}\left(\mathbf{J}_r\left(\vec{\phi}\right)\cdot\delta\vec{\phi}\right)$”。

②处：

利用 Adjoint 性质“ $\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\mathbf{R} = \mathbf{R}\cdot\mathrm{Exp}\left(\mathbf{R}^T\vec{\phi}\right)$”；

令 $\mathbf{J}_r^k = \mathbf{J}_r\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)$。

再令

$$
\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij} = \prod_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)
$$

$$
\mathrm{Exp}\left(-\delta\vec{\phi}_{ij}\right) = \prod_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp}\left(-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T \cdot \mathbf{J}_r^k \cdot \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t\right)
$$

注意到其中有 $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{jj} = \mathbf{I}$。则可得：

$$
\Delta\mathbf{R}_{ij} \triangleq \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \mathrm{Exp}\left(-\delta\vec{\phi}_{ij}\right)
$$

$\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}$ 即旋转量预积分测量值，它由陀螺仪测量值和对陀螺 bias 的估计或猜测计算得到。认为 $\delta\vec{\phi}_{ij}$（或 $\mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_{ij}\right)$）即其测量噪声。

（2）$\Delta\mathbf{v}_{ij}$ 项：

将上式，即 $\Delta\mathbf{R}_{ij} \triangleq \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \mathrm{Exp}\left(-\delta\vec{\phi}_{ij}\right)$ 代入 $\Delta\mathbf{v}_{ij}$ 的公式中，有：

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathbf{v}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta\mathbf{R}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\cdot\Delta t \\
&\approx \sum_{k=i}^{j-1} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \mathrm{Exp}\left(-\delta\vec{\phi}_{ik}\right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\cdot\Delta t \\
&\overset{①}{\approx} \sum_{k=i}^{j-1} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\mathbf{I} - \delta\vec{\phi}_{ik}^{\wedge}\right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)\cdot\Delta t \\
&\overset{②}{\approx} \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\mathbf{I} - \delta\vec{\phi}_{ik}^{\wedge}\right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a\right)\cdot\Delta t - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t \right] \\
&\overset{③}{=} \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a\right)\cdot\Delta t + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge} \cdot \delta\vec{\phi}_{ik} \cdot \Delta t - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t \right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a\right)\cdot\Delta t \right] + \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge} \cdot \delta\vec{\phi}_{ik} \cdot \Delta t - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t \right]
\end{aligned}
$$

推导中的一些细节：

①处：

利用性质“当$\vec{\phi}$是小量时，有一阶近似如下：$\exp\left(\vec{\phi}^\wedge\right) \approx \mathbf{I} + \vec{\phi}^\wedge$，或$\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right) \approx \mathbf{I} + \vec{\phi}^\wedge$”；

②处：

忽略高阶小项（$\delta\vec{\phi}_{ik}^\wedge \boldsymbol{\eta}_k^{ad}$项）；

③处：

利用性质“$\mathbf{a}^\wedge \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{b}^\wedge \cdot \mathbf{a}$”。

再令

$$\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right) \cdot \Delta t \right]$$

$$\delta\mathbf{v}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \cdot \delta\vec{\phi}_{ik} \cdot \Delta t \right]$$

可得：

$$\Delta\mathbf{v}_{ij} \triangleq \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} - \delta\mathbf{v}_{ij}$$

$\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}$即速度增量预积分测量值，它由 IMU 测量值和对 bias 的估计或猜测计算得到。$\delta\mathbf{v}_{ij}$即其测量噪声。

（3）$\Delta\mathbf{p}_{ij}$项

将$\Delta\mathbf{R}_{ij} \triangleq \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \mathrm{Exp}\left(-\delta\vec{\phi}_{ij}\right)$以及$\Delta\mathbf{v}_{ij} \triangleq \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} - \delta\mathbf{v}_{ij}$代入$\Delta\mathbf{p}_{ij}$的公式中，有：

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{p}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\mathbf{v}_{ik} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{R}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \right) \cdot \Delta t^2 \right] \\
&\approx \sum_{k=i}^{j-1} \left[\left(\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik} - \delta\mathbf{v}_{ik} \right) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \mathrm{Exp}\left(-\delta\vec{\phi}_{ik}\right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \right) \cdot \Delta t^2 \right] \\
&\overset{①}{\approx} \sum_{k=i}^{j-1} \left[\left(\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik} - \delta\mathbf{v}_{ik} \right) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\mathbf{I} - \delta\vec{\phi}_{ik}^\wedge \right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a - \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \right) \cdot \Delta t^2 \right] \\
&\overset{②}{\approx} \sum_{k=i}^{j-1} \left[\left(\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik} - \delta\mathbf{v}_{ik} \right) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\mathbf{I} - \delta\vec{\phi}_{ik}^\wedge \right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right) \cdot \Delta t^2 - \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2 \right] \\
&\overset{③}{=} \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right) \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \delta\vec{\phi}_{ik} \Delta t^2 - \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2 - \delta\mathbf{v}_{ik} \Delta t \right]
\end{aligned}$$

推导中的一些细节：

①处：

利用性质“当$\vec{\phi}$是小量时，有一阶近似如下：$\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right) \approx \mathbf{I} + \vec{\phi}^\wedge$”。

②处：

忽略高阶小项（$\delta\vec{\phi}_{ik}^\wedge \boldsymbol{\eta}_k^{ad}$项）；

③处：

利用了性质“$\mathbf{a}^\wedge \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{b}^\wedge \cdot \mathbf{a}$”。

再令

$$\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right) \Delta t^2 \right]$$

$$\delta\mathbf{p}_{ij} \triangleq \sum_{k=i}^{j-1} \left[\delta\mathbf{v}_{ik} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \delta\vec{\phi}_{ik} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2 \right]$$

可得：

$$\Delta\mathbf{p}_{ij} \triangleq \Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij} - \delta\mathbf{p}_{ij}$$

$\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}$ 即位置增量预积分测量值，它由 IMU 测量值和对 bias 的估计或猜测计算得到。$\delta\mathbf{p}_{ij}$ 即其测量噪声。

• 上面得到的预积分理想值和测量值的关系如下：

$$\Delta\mathbf{R}_{ij} \triangleq \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}\cdot \mathrm{Exp}\left(-\delta\vec{\phi}_{ij}\right),\quad \Delta\mathbf{v}_{ij} \triangleq \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} - \delta\mathbf{v}_{ij},\quad \Delta\mathbf{p}_{ij} \triangleq \Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij} - \delta\mathbf{p}_{ij}$$

代入预积分理想值的表达式

$$\Delta\mathbf{R}_{ij} \triangleq \mathbf{R}_i^T\mathbf{R}_j,\quad \Delta\mathbf{v}_{ij} \triangleq \mathbf{R}_i^T\left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right),\quad \Delta\mathbf{p}_{ij} \triangleq \mathbf{R}_i^T\left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i\cdot\Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right)$$

则有：

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij} &\approx \Delta\mathbf{R}_{ij}\mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_{ij}\right) = \mathbf{R}_i^T\mathbf{R}_j\mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_{ij}\right)\\
\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} &\approx \Delta\mathbf{v}_{ij} + \delta\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{R}_i^T\left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right) + \delta\mathbf{v}_{ij}\\
\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij} &\approx \Delta\mathbf{p}_{ij} + \delta\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{R}_i^T\left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i\cdot\Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right) + \delta\mathbf{p}_{ij}
\end{aligned}$$

上述表达式为预积分测量值（含 IMU 测量值及 bias 估计值）与理想值之间的关系，即形如“测量值=理想值'+'噪声”的形式（旋转量为乘性）。

• 下面对预积分测量噪声进行分析（目的是给出其协方差的计算表达式），令预积分测量噪声为：

$$\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta} \triangleq \begin{bmatrix}\delta\vec{\phi}_{ij}^T & \delta\mathbf{v}_{ij}^T & \delta\mathbf{p}_{ij}^T\end{bmatrix}^T$$

我们希望其满足高斯分布，即 $\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta} \sim N\left(\mathbf{0}_{9\times1}, \boldsymbol{\Sigma}_{ij}\right)$。由于 $\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta}$ 是 $\delta\vec{\phi}_{ij}$、$\delta\mathbf{v}_{ij}$ 和 $\delta\mathbf{p}_{ij}$ 的线性组合，下面分别分析这三个噪声项的分布形式。

（1）$\delta\vec{\phi}_{ij}$ 的分布形式

由前可知：

$$\mathrm{Exp}\left(-\delta\vec{\phi}_{ij}\right) = \prod_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}\left(-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T\cdot\mathbf{J}_r^k\cdot\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t\right)$$

其中 $\mathbf{J}_r^k = \mathbf{J}_r\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)$。对上式两边取对数有：

$$\delta\vec{\phi}_{ij} = -\mathrm{Log}\left(\prod_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}\left(-\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T\cdot\mathbf{J}_r^k\cdot\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t\right)\right)$$

令 $\boldsymbol{\xi}_k = \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1j}^T\cdot\mathbf{J}_r^k\cdot\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t$。$\boldsymbol{\eta}_k^{gd}$ 是小量，可知 $\boldsymbol{\xi}_k$ 是小量，于是 $\mathbf{J}_r\left(\boldsymbol{\xi}_k\right)\approx\mathbf{I}$，则有 $\mathbf{J}_r^{-1}\left(\boldsymbol{\xi}_k\right)\approx\mathbf{I}$。$\delta\vec{\phi}_{ij}$ 是小量，可知任意 $\mathrm{Log}\left(\prod_{k\in A}\mathrm{Exp}\left(-\boldsymbol{\xi}_k\right)\right)$（$A\subset\left\{i, i+1, \cdots, j-1\right\}$）都是小量。利用性质“当 $\delta\vec{\phi}$ 是小量时有 $\mathrm{Log}\left(\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}\right)\right) = \vec{\phi} + \mathbf{J}_r^{-1}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\delta\vec{\phi}$”，可对上式进行如下推导：

$$
\begin{aligned}
\delta\vec{\phi}_{ij} &= -\mathrm{Log}\left(\prod_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}\left(-\boldsymbol{\xi}_k\right)\right) \\
&= -\mathrm{Log}\left(\mathrm{Exp}\left(-\boldsymbol{\xi}_i\right)\prod_{k=i+1}^{j-1}\mathrm{Exp}\left(-\boldsymbol{\xi}_k\right)\right) \\
&\approx -\left(-\boldsymbol{\xi}_i + \mathbf{I}\cdot\mathrm{Log}\left(\prod_{k=i+1}^{j-1}\mathrm{Exp}\left(-\boldsymbol{\xi}_k\right)\right)\right) = \boldsymbol{\xi}_i - \mathrm{Log}\left(\prod_{k=i+1}^{j-1}\mathrm{Exp}\left(-\boldsymbol{\xi}_k\right)\right) \\
&= \boldsymbol{\xi}_i - \mathrm{Log}\left(\mathrm{Exp}\left(-\boldsymbol{\xi}_{i+1}\right)\prod_{k=i+2}^{j-1}\mathrm{Exp}\left(-\boldsymbol{\xi}_k\right)\right) \\
&\approx \boldsymbol{\xi}_i + \boldsymbol{\xi}_{i+1} - \mathrm{Log}\left(\prod_{k=i+2}^{j-1}\mathrm{Exp}\left(-\boldsymbol{\xi}_k\right)\right) \\
&\approx \cdots \\
&\approx \sum_{k=i}^{j-1}\boldsymbol{\xi}_k
\end{aligned}
$$

即

$$
\delta\vec{\phi}_{ij} \approx \sum_{k=i}^{j-1}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1\,j}^{T}\mathbf{J}_r^k\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\Delta t
$$

由于$\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1\,j}^{T}$、$\mathbf{J}_r^k$和$\Delta t$都是已知量，而$\boldsymbol{\eta}_k^{gd}$是零均值高斯噪声，因此$\delta\vec{\phi}_{ij}$（的一阶近似）也为零均值高斯噪声。

（2）$\delta\mathbf{v}_{ij}$的分布形式

由于$\delta\vec{\phi}_{ij}$近似拥有了高斯噪声的形式，且$\boldsymbol{\eta}_k^{ad}$也是零均值高斯噪声，根据$\delta\mathbf{v}_{ij}$的表达式：

$$
\delta\mathbf{v}_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\cdot\delta\vec{\phi}_{ik}\cdot\Delta t\right]
$$

可知其也将拥有高斯分布的形式。

（3）$\delta\mathbf{p}_{ij}$的分布形式

类似$\delta\mathbf{v}_{ij}$，$\delta\mathbf{p}_{ij}$也近似拥有高斯分布的形式，其表达式为：

$$
\delta\mathbf{p}_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1}\left[\delta\mathbf{v}_{ik}\Delta t - \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\delta\vec{\phi}_{ik}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\Delta t^2\right]
$$

• 下面推导预积分测量噪声的递推形式，即$\boldsymbol{\eta}_{ij-1}^{\Delta}\to\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta}$，及其协方差$\boldsymbol{\Sigma}_{ij}$的递推形式，即$\boldsymbol{\Sigma}_{ij-1}\to\boldsymbol{\Sigma}_{ij}$。先推导$\delta\vec{\phi}_{ij-1}\to\delta\vec{\phi}_{ij}$、$\delta\mathbf{v}_{ij-1}\to\delta\mathbf{v}_{ij}$和$\delta\mathbf{p}_{ij-1}\to\delta\mathbf{p}_{ij}$。

（1）$\delta\vec{\phi}_{ij-1}\to\delta\vec{\phi}_{ij}$

$$
\begin{aligned}
\delta\vec{\phi}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1\,j}^{T} \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \Delta t \\
&= \sum_{k=i}^{j-2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1\,j}^{T} \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \Delta t + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{jj}^{T} \mathbf{J}_r^{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd} \Delta t \\
&\overset{①}{=} \sum_{k=i}^{j-2} \left(\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1\,j-1} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{j-1\,j} \right)^T \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \Delta t + \mathbf{J}_r^{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd} \Delta t \\
&= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{j\,j-1} \sum_{k=i}^{j-2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{k+1\,j-1}^{T} \mathbf{J}_r^k \boldsymbol{\eta}_k^{gd} \Delta t + \mathbf{J}_r^{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd} \Delta t \\
&= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{j\,j-1} \delta\vec{\phi}_{ij-1} + \mathbf{J}_r^{j-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{gd} \Delta t
\end{aligned}
$$

①处利用了 $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{jj}^T = \mathbf{I}$ 以及 $\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{lm}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{mn} = \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ln}$。整个推导过程中相当于进行了一些变形。

（2）$\delta\mathbf{v}_{ij-1} \to \delta\mathbf{v}_{ij}$

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{v}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \cdot \delta\vec{\phi}_{ik} \cdot \Delta t \right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-2} \left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \cdot \delta\vec{\phi}_{ik} \cdot \Delta t \right] \dots \\
&\quad + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{ad} \Delta t - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \cdot \delta\vec{\phi}_{ij-1} \cdot \Delta t \\
&= \delta\mathbf{v}_{ij-1} + \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{ad} \Delta t - \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \cdot \delta\vec{\phi}_{ij-1} \cdot \Delta t
\end{aligned}
$$

直接进行加项拆分即可完成推导。

（3）$\delta\mathbf{p}_{ij-1} \to \delta\mathbf{p}_{ij}$

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{p}_{ij} &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\delta\mathbf{v}_{ik} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \delta\vec{\phi}_{ik} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2 \right] \\
&= \delta\mathbf{p}_{ij-1} + \delta\mathbf{v}_{ij-1} \Delta t - \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \delta\vec{\phi}_{ij-1} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{ad} \Delta t^2
\end{aligned}
$$

同样直接进行加项拆分即可完成推导。

综上可得 $\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta}$ 的递推形式如下（令 $\boldsymbol{\eta}_k^d = \begin{bmatrix} \left(\boldsymbol{\eta}_k^{gd}\right)^T & \left(\boldsymbol{\eta}_k^{ad}\right)^T \end{bmatrix}^T$）：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta} &= \begin{bmatrix} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{j\,j-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \Delta t & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_{j-1} - \mathbf{b}_i^a \right)^\wedge \Delta t^2 & \Delta t\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{ij-1}^{\Delta} \dots \\
&\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_r^{j-1} \Delta t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \Delta t \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1} \Delta t^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{j-1}^{d}
\end{aligned}
$$

令

$$\mathbf{A}_{j-1}=\begin{bmatrix} \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{j\,j-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_{j-1}-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\Delta t & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_{j-1}-\mathbf{b}_i^a\right)^{\wedge}\Delta t^2 & \Delta t\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{j-1}=\begin{bmatrix} \mathbf{J}_r^{j-1}\Delta t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1}\Delta t \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij-1}\Delta t^2 \end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{\eta}_{ij}^{\Delta}=\mathbf{A}_{j-1}\boldsymbol{\eta}_{ij-1}^{\Delta}+\mathbf{B}_{j-1}\boldsymbol{\eta}_{j-1}^{d}$$

现在 $\boldsymbol{\Sigma}_{ij}$ （预积分测量噪声的协方差矩阵）有了如下递推计算形式：

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ij}=\mathbf{A}_{j-1}\boldsymbol{\Sigma}_{ij-1}\mathbf{A}_{j-1}^{T}+\mathbf{B}_{j-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{B}_{j-1}^{T}$$

五、bias 更新时的预积分测量值更新

・再次强调，前面的预积分计算，都是在假设积分区间内陀螺和加计的 bias 恒定的基础上推导的。

・当 bias 发生变化时，若仍按照前述公式，预积分测量值需要整个重新计算一遍，这将非常的 computational expensive。为了解决这个问题，提出了利用线性化来进行 bias 变化时预积分项的一阶近似更新方法。下面先给出各更新公式，首先做几个符号说明。

令 $\bar{\mathbf{b}}_i^g$ 和 $\bar{\mathbf{b}}_i^a$ 为旧的 bias，新的 bias（$\hat{\mathbf{b}}_i^g$ 和 $\hat{\mathbf{b}}_i^a$）由旧 bias 与更新量（$\delta\mathbf{b}_i^g$ 和 $\delta\mathbf{b}_i^a$）相加得到，即 $\hat{\mathbf{b}}_i^g\leftarrow\bar{\mathbf{b}}_i^g+\delta\mathbf{b}_i^g$ 、 $\hat{\mathbf{b}}_i^a\leftarrow\bar{\mathbf{b}}_i^a+\delta\mathbf{b}_i^a$ 。

于是有预积分关于 bias 估计值变化的一阶近似更新公式如下：

$$\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}\left(\hat{\mathbf{b}}_i^g\right)\approx\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}\left(\bar{\mathbf{b}}_i^g\right)\cdot\mathrm{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}\left(\hat{\mathbf{b}}_i^g,\hat{\mathbf{b}}_i^a\right)\approx\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}\left(\bar{\mathbf{b}}_i^g,\bar{\mathbf{b}}_i^a\right)+\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\delta\mathbf{b}_i^g+\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^a}\delta\mathbf{b}_i^a$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}\left(\hat{\mathbf{b}}_i^g,\hat{\mathbf{b}}_i^a\right)\approx\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}\left(\bar{\mathbf{b}}_i^g,\bar{\mathbf{b}}_i^a\right)+\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\delta\mathbf{b}_i^g+\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^a}\delta\mathbf{b}_i^a$$

做符号简化如下（上式中的一些符号也可由此理解）：

$$\Delta\hat{\mathbf{R}}_{ij}\doteq\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}\left(\hat{\mathbf{b}}_i^g\right),\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}\doteq\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}\left(\bar{\mathbf{b}}_i^g\right)$$

$$\Delta\hat{\mathbf{v}}_{ij}\doteq\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}\left(\hat{\mathbf{b}}_i^g,\hat{\mathbf{b}}_i^a\right),\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}\doteq\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}\left(\bar{\mathbf{b}}_i^g,\bar{\mathbf{b}}_i^a\right)$$

$$\Delta\hat{\mathbf{p}}_{ij}\doteq\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}\left(\hat{\mathbf{b}}_i^g,\hat{\mathbf{b}}_i^a\right),\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}\doteq\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}\left(\bar{\mathbf{b}}_i^g,\bar{\mathbf{b}}_i^a\right)$$

于是前面的更新公式可简化为：

$$\Delta\hat{\mathbf{R}}_{ij} \approx \Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \mathrm{Exp}\left(\frac{\partial \Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^{g}} \delta\mathbf{b}_i^g\right)$$

$$\Delta\hat{\mathbf{v}}_{ij} \approx \Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij} + \frac{\partial \Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^{g}} \delta\mathbf{b}_i^g + \frac{\partial \Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^{a}} \delta\mathbf{b}_i^a$$

$$\Delta\hat{\mathbf{p}}_{ij} \approx \Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij} + \frac{\partial \Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^{g}} \delta\mathbf{b}_i^g + \frac{\partial \Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^{a}} \delta\mathbf{b}_i^a$$

接下来将推导各式中的偏导项。

• $\Delta\hat{\mathbf{R}}_{ij} \approx \Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij} \cdot \mathrm{Exp}\left(\frac{\partial \Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^{g}} \delta\mathbf{b}_i^g\right)$中的偏导项$\frac{\partial \Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^{g}}$：

$$\begin{aligned}
\Delta\hat{\mathbf{R}}_{ij} &= \Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}\left(\hat{\mathbf{b}}_i^g\right) \\
&= \prod_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \hat{\mathbf{b}}_i^g\right)\Delta t\right) \\
&= \prod_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \left(\bar{\mathbf{b}}_i^g + \delta\mathbf{b}_i^g\right)\right)\Delta t\right) \\
&= \prod_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^g\right)\Delta t - \delta\mathbf{b}_i^g \Delta t\right) \\
&\overset{①}{\approx} \prod_{k=i}^{j-1} \left(\mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^g\right)\Delta t\right) \cdot \mathrm{Exp}\left(-\mathbf{J}_r^k \delta\mathbf{b}_i^g \Delta t\right)\right)
\end{aligned}$$

①处利用了性质“当$\delta\vec{\phi}$是小量时有$\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}+\delta\vec{\phi}\right) \approx \mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\cdot \mathrm{Exp}\left(\mathbf{J}_r\left(\vec{\phi}\right)\cdot\delta\vec{\phi}\right)$”；

同时令$\mathbf{J}_r^k = \mathbf{J}_r\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)$。

做符号代换$\mathbf{M}_k = \mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^g\right)\Delta t\right)$和$\mathrm{Exp}\left(\mathbf{d}_k\right) = \mathrm{Exp}\left(-\mathbf{J}_r^k \delta\mathbf{b}_i^g \Delta t\right)$，将上式展开有如下形式：

$$\mathbf{M}_i \cdot \mathrm{Exp}\left(\mathbf{d}_i\right)\cdot \mathbf{M}_{i+1} \cdot \mathrm{Exp}\left(\mathbf{d}_{i+1}\right)\cdot \ldots \cdot \mathbf{M}_{j-2} \cdot \mathrm{Exp}\left(\mathbf{d}_{j-2}\right)\cdot \mathbf{M}_{j-1} \cdot \mathrm{Exp}\left(\mathbf{d}_{j-1}\right)$$

利用 Adjoint 性质“$\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\mathbf{R} = \mathbf{R}\cdot\mathrm{Exp}\left(\mathbf{R}^T\vec{\phi}\right)$”，上式有如下变形：

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}_i \cdot \mathrm{Exp}\left(\mathbf{d}_i\right)\cdot \mathbf{M}_{i+1} \cdot \mathrm{Exp}\left(\mathbf{d}_{i+1}\right)\cdot \ldots \cdot \mathbf{M}_{j-2} \cdot \mathrm{Exp}\left(\mathbf{d}_{j-2}\right)\cdot \mathbf{M}_{j-1} \cdot \mathrm{Exp}\left(\mathbf{d}_{j-1}\right) \\
&= \mathbf{M}_i \cdot \left(\mathrm{Exp}\left(\mathbf{d}_i\right)\cdot \mathbf{M}_{i+1}\right) \cdot \mathrm{Exp}\left(\mathbf{d}_{i+1}\right)\cdot \ldots \cdot \mathbf{M}_{j-2} \cdot \left(\mathrm{Exp}\left(\mathbf{d}_{j-2}\right)\cdot \mathbf{M}_{j-1}\right) \cdot \mathrm{Exp}\left(\mathbf{d}_{j-1}\right) \\
&= \mathbf{M}_i \cdot \left(\mathbf{M}_{i+1}\mathrm{Exp}\left(\mathbf{M}_{i+1}^T\mathbf{d}_i\right)\right) \cdot \mathrm{Exp}\left(\mathbf{d}_{i+1}\right)\cdot \ldots \cdot \mathbf{M}_{j-2} \cdot \left(\mathrm{Exp}\left(\mathbf{d}_{j-2}\right)\cdot \mathbf{M}_{j-1}\right) \cdot \mathrm{Exp}\left(\mathbf{d}_{j-1}\right) \\
&= \mathbf{M}_i\mathbf{M}_{i+1}\mathbf{M}_{i+2}\mathrm{Exp}\left(\mathbf{M}_{i+2}^T\mathbf{M}_{i+1}^T\mathbf{d}_i\right)\mathrm{Exp}\left(\mathbf{M}_{i+2}^T\mathbf{d}_{i+1}\right)\cdot\ldots \\
&= \cdots \\
&= \left(\prod_{k=i}^{j-1}\mathbf{M}_k\right)\cdot\left(\mathrm{Exp}\left(\left(\prod_{k=i+1}^{j-1}\mathbf{M}_k\right)^T\mathbf{d}_i\right)\right)\cdot\left(\mathrm{Exp}\left(\left(\prod_{k=i+2}^{j-1}\mathbf{M}_k\right)^T\mathbf{d}_{i+1}\right)\right)\cdot\ldots\cdot\left(\mathrm{Exp}\left(\left(\prod_{k=j-1}^{j-1}\mathbf{M}_k\right)^T\mathbf{d}_{j-2}\right)\right)\cdot\left(\mathrm{Exp}\left(\mathbf{d}_{j-1}\right)\right)
\end{aligned}$$

又有$\prod_{k=m}^{j-1}\mathbf{M}_k = \prod_{k=m}^{j-1}\mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^g\right)\Delta t\right) = \Delta\bar{\mathbf{R}}_{mj}$，则上式为：

$$\begin{aligned}
&\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}\mathrm{Exp}\left(\Delta\bar{\mathbf{R}}_{i+1j}^T\mathbf{d}_i\right)\mathrm{Exp}\left(\Delta\bar{\mathbf{R}}_{i+2j}^T\mathbf{d}_{i+1}\right)\cdot\ldots\cdot\mathrm{Exp}\left(\Delta\bar{\mathbf{R}}_{j-1j}^T\mathbf{d}_{j-2}\right)\mathrm{Exp}\left(\Delta\bar{\mathbf{R}}_{jj}^T\mathbf{d}_{j-1}\right) \\
&= \Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}\prod_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}\left(\Delta\bar{\mathbf{R}}_{k+1j}^T\mathbf{d}_k\right)
\end{aligned}$$

即

$$\Delta\hat{\mathbf{R}}_{ij} = \Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}\prod_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}\left(-\Delta\bar{\mathbf{R}}_{k+1j}^{T}\mathbf{J}_r^k\delta\mathbf{b}_i^g\Delta t\right)$$

令 $\mathbf{c}_k = -\Delta\bar{\mathbf{R}}_{k+1j}^{T}\mathbf{J}_r^k\delta\mathbf{b}_i^g\Delta t$，因为$\delta\mathbf{b}_i^g$很小，所以$\mathbf{c}_k$（$k=i,i+1,\ldots,\mathrm{j}-1$）很小。

对于 $\mathrm{Exp}(\mathbf{c}_k)\mathrm{Exp}(\mathbf{c}_{k+1})$：因为 $\mathbf{c}_{k+1}$ 很小，所以可以利用性质"$\mathrm{Exp}(\vec{\phi}+\delta\vec{\phi}) \approx \mathrm{Exp}(\vec{\phi})\cdot\mathrm{Exp}\left(\mathbf{J}_r(\vec{\phi})\cdot\delta\vec{\phi}\right)$"；因为$\mathbf{c}_k$很小，所以$\mathbf{J}_r(\mathbf{c}_k)\approx\mathbf{I}$。于是有：

$$\mathrm{Exp}(\mathbf{c}_k)\mathrm{Exp}(\mathbf{c}_{k+1}) \approx \mathrm{Exp}(\mathbf{c}_k+\mathbf{c}_{k+1})$$

对于$\prod_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}(\mathbf{c}_k)$，有：

$$\begin{aligned}\prod_{k=i}^{j-1}\mathrm{Exp}(\mathbf{c}_k) &= \mathrm{Exp}(\mathbf{c}_i)\mathrm{Exp}(\mathbf{c}_{i+1})\prod_{k=i+2}^{j-1}\mathrm{Exp}(\mathbf{c}_k)\\ &\approx \mathrm{Exp}(\mathbf{c}_i+\mathbf{c}_{i+1})\mathrm{Exp}(\mathbf{c}_{i+2})\prod_{k=i+3}^{j-1}\mathrm{Exp}(\mathbf{c}_k)\\ &\approx \mathrm{Exp}(\mathbf{c}_i+\mathbf{c}_{i+1}+\mathbf{c}_{i+2})\mathrm{Exp}(\mathbf{c}_{i+3})\prod_{k=i+4}^{j-1}\mathrm{Exp}(\mathbf{c}_k)\\ &\approx \cdots \approx \mathrm{Exp}(\mathbf{c}_i+\mathbf{c}_{i+1}+\mathbf{c}_{i+2}+\cdots\mathbf{c}_{j-1})\\ &= \mathrm{Exp}\left(\sum_{k=i}^{j-1}\mathbf{c}_k\right)\end{aligned}$$

于是有

$$\Delta\hat{\mathbf{R}}_{ij} = \Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}\mathrm{Exp}\left(\sum_{k=i}^{j-1}\left(-\Delta\bar{\mathbf{R}}_{k+1j}^{T}\mathbf{J}_r^k\delta\mathbf{b}_i^g\Delta t\right)\right)$$

所以有

$$\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g} = \sum_{k=i}^{j-1}\left(-\Delta\bar{\mathbf{R}}_{k+1j}^{T}\mathbf{J}_r^k\Delta t\right)$$

其中$\mathbf{J}_r^k = \mathbf{J}_r\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k-\mathbf{b}_i^g\right)\Delta t\right)$。

- $\Delta\hat{\mathbf{v}}_{ij} \approx \Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}+\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\delta\mathbf{b}_i^g+\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^a}\delta\mathbf{b}_i^a$中的偏导项$\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}$和$\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^a}$：

$$\begin{aligned}\Delta\hat{\mathbf{v}}_{ij} &= \Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}\left(\hat{\mathbf{b}}_i^g,\hat{\mathbf{b}}_i^a\right)\\ &= \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ik}\left(\hat{\mathbf{b}}_i^g\right)\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\hat{\mathbf{b}}_i^a\right)\Delta t\right]\\ &\approx \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\mathrm{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\bar{\mathbf{b}}_i^a-\delta\mathbf{b}_i^a\right)\Delta t\right]\\ &\overset{①}{\approx} \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\mathbf{I}+\left(\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)^\wedge\right)\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\bar{\mathbf{b}}_i^a-\delta\mathbf{b}_i^a\right)\Delta t\right]\\ &= \sum_{k=i}^{j-1}\left[\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\bar{\mathbf{b}}_i^a\right)\Delta t-\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}\delta\mathbf{b}_i^a\Delta t+\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)^\wedge\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\bar{\mathbf{b}}_i^a\right)\Delta t-\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)^\wedge\delta\mathbf{b}_i^a\Delta t\right]\\ &\overset{②}{\approx} \Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}+\sum_{k=i}^{j-1}\left\{-\left[\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}\Delta t\right]\delta\mathbf{b}_i^a-\left[\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\bar{\mathbf{b}}_i^a\right)^\wedge\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\Delta t\right]\delta\mathbf{b}_i^g\right\}\end{aligned}$$

①处利用了性质“当$\vec{\phi}$是小量时，有一阶近似如下：$\operatorname{Exp}\left(\vec{\phi}\right) \approx \mathbf{I} + \vec{\phi}^\wedge$”。

②处忽略了高阶小项$\left(\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \delta \mathbf{b}_i^g\right)^\wedge \delta \mathbf{b}_i^a$；利用了性质“$\mathbf{a}^\wedge \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{b}^\wedge \cdot \mathbf{a}$”；利用$\Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a\right) \Delta t\right]$。

所以有：

$$\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} = -\sum_{k=i}^{j-1} \left(\Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a\right)^\wedge \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \Delta t\right)$$

$$\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^a} = -\sum_{k=i}^{j-1} \left(\Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \Delta t\right)$$

- $\Delta \hat{\mathbf{p}}_{ij} \approx \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij} + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \delta \mathbf{b}_i^g + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^a} \delta \mathbf{b}_i^a$中的偏导项$\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g}$和$\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^a}$：

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{\mathbf{p}}_{ij} &= \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij}\left(\hat{\mathbf{b}}_i^g, \hat{\mathbf{b}}_i^a\right) \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}\left(\hat{\mathbf{b}}_i^g, \hat{\mathbf{b}}_i^a\right) \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik}\left(\hat{\mathbf{b}}_i^g\right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \hat{\mathbf{b}}_i^a\right) \Delta t^2\right] \\
&= \underbrace{\sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij}\left(\hat{\mathbf{b}}_i^g, \hat{\mathbf{b}}_i^a\right) \Delta t\right]}_{①} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik}\left(\hat{\mathbf{b}}_i^g\right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \hat{\mathbf{b}}_i^a\right) \Delta t^2\right]}_{②}
\end{aligned}$$

下面分别推导①和②两部分：

$$\begin{aligned}
① &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\left(\Delta \bar{\mathbf{v}}_{ik} + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \delta \mathbf{b}_i^g + \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^a} \delta \mathbf{b}_i^a\right) \Delta t\right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \bar{\mathbf{v}}_{ik} \Delta t + \left(\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \Delta t\right) \delta \mathbf{b}_i^g + \left(\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^a} \Delta t\right) \delta \mathbf{b}_i^a\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
② &\approx \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathbf{R}}_{ik}\left(\hat{\mathbf{b}}_i^g\right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \hat{\mathbf{b}}_i^a\right)\right] \\
&= \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \operatorname{Exp}\left(\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \delta \mathbf{b}_i^g\right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a - \delta \mathbf{b}_i^a\right)\right] \\
&\approx \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\mathbf{I} + \left(\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \delta \mathbf{b}_i^g\right)^\wedge\right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a - \delta \mathbf{b}_i^a\right)\right] \\
&\approx \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a\right) - \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \delta \mathbf{b}_i^a - \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik} \cdot \left(\tilde{\mathbf{f}}_k - \bar{\mathbf{b}}_i^a\right)^\wedge \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \delta \mathbf{b}_i^g\right]
\end{aligned}$$

其中②的推导利用了 “当$\vec{\phi}$是小量时，有一阶近似如下：$\operatorname{Exp}\left(\vec{\phi}\right) \approx \mathbf{I} + \vec{\phi}^\wedge$” 以及忽略了高阶小项$\left(\frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial \bar{\mathbf{b}}^g} \delta \mathbf{b}_i^g\right)^\wedge \delta \mathbf{b}_i^a$。

再将①②两式合并有：

①+②

$$=\sum_{k=i}^{j-1}\left\{\left[\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ik}\Delta t+\frac{1}{2}\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\bar{\mathbf{b}}_i^a\right)\Delta t^2\right]+\left[\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\bar{\mathbf{b}}_i^a\right)^\wedge\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\Delta t^2\right]\delta\mathbf{b}_i^g+\left[\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^a}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}\Delta t^2\right]\delta\mathbf{b}_i^a\right\}$$

$$=\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}+\left\{\sum_{k=i}^{j-1}\left[\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\bar{\mathbf{b}}_i^a\right)^\wedge\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\Delta t^2\right]\right\}\delta\mathbf{b}_i^g+\left\{\sum_{k=i}^{j-1}\left[\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^a}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}\Delta t^2\right]\right\}\delta\mathbf{b}_i^a$$

所以有：

$$\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}=\sum_{k=i}^{j-1}\left[\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}\cdot\left(\tilde{\mathbf{f}}_k-\bar{\mathbf{b}}_i^a\right)^\wedge\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\Delta t^2\right]$$

$$\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^a}=\sum_{k=i}^{j-1}\left[\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ik}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^a}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ik}\Delta t^2\right]$$

六、残差及其 Jacobian

•残差指的是预积分计算值（由非 IMU 的其他方式猜测/估计的预积分值）与测量值的差别。

•例如在 VIORBSLAM 或 VINS-MONO 中，会利用纯视觉已经较好恢复的 SfM 信息来进行 VI 初始化。此时将由纯视觉 SfM 信息及对部分状态（如姿态和重力）的猜测/估计/先验，来计算得到部分导航状态，并由这些导航状态来求取两帧间预积分的计算值。同时，一些导航状态会影响预积分测量值的计算（例如 bias 增量）。

在进行 optimization 时，将对所有待优化的导航状态进行 lifting（可以理解为“更新”，后面将介绍这个概念），从而影响预积分计算值和预积分测量值，进而改变残差值，optimization 的最终目的是要使残差（的加权范数）最小化。

•根据各预积分项的定义，可得 $\Delta\mathbf{R}_{ij}$、$\Delta\mathbf{v}_{ij}$ 和 $\Delta\mathbf{p}_{ij}$ 的理想值表达式如下：

$$\Delta\mathbf{R}_{ij}=\mathbf{R}_i^T\mathbf{R}_j$$

$$\Delta\mathbf{v}_{ij}=\mathbf{R}_i^T\left(\mathbf{v}_j-\mathbf{v}_i-\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right)$$

$$\Delta\mathbf{p}_{ij}=\mathbf{R}_i^T\left(\mathbf{p}_j-\mathbf{p}_i-\mathbf{v}_i\cdot\Delta t_{ij}-\frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right)$$

则有三项残差的定义如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}&\triangleq\mathrm{Log}\left\{\left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}\left(\bar{\mathbf{b}}_i^g\right)\cdot\mathrm{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)\right]^T\cdot\mathbf{R}_i^T\mathbf{R}_j\right\}\\&\triangleq\mathrm{Log}\left[\left(\Delta\hat{\mathbf{R}}_{ij}\right)^T\Delta\mathbf{R}_{ij}\right]\\\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}&\triangleq\mathbf{R}_i^T\left(\mathbf{v}_j-\mathbf{v}_i-\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right)-\left[\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij}\left(\bar{\mathbf{b}}_i^g,\bar{\mathbf{b}}_i^a\right)+\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\delta\mathbf{b}_i^g+\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^a}\delta\mathbf{b}_i^a\right]\\&\triangleq\Delta\mathbf{v}_{ij}-\Delta\hat{\mathbf{v}}_{ij}\\\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}&\triangleq\mathbf{R}_i^T\left(\mathbf{p}_j-\mathbf{p}_i-\mathbf{v}_i\cdot\Delta t_{ij}-\frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right)-\left[\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij}\left(\bar{\mathbf{b}}_i^g,\bar{\mathbf{b}}_i^a\right)+\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\delta\mathbf{b}_i^g+\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^a}\delta\mathbf{b}_i^a\right]\\&\triangleq\Delta\mathbf{p}_{ij}-\Delta\hat{\mathbf{p}}_{ij}\end{aligned}$$

•注意到，前面推导的预积分测量值关于 bias 变化的修正在残差中进行了应用，这种近似的修正方式免去了积分的重新运算，是预积分技术降低计算量的关键。

•在估计中，通常以 $\mathbf{R}_i,\mathbf{p}_i,\mathbf{v}_i,\mathbf{R}_j,\mathbf{p}_j,\mathbf{v}_j$ 等为导航求解的目标，同时由于 bias 的作用在以 mems 器件为基础的应用中不可忽视，因此 bias 也常常被当做状态量进行估计。但由残差的表达式可以看到，关于 bias 采取的是估计 bias 偏差的方式（由预积分测量值的修正方式决

定），即估计 $\delta\mathbf{b}_i^g$ 和 $\delta\mathbf{b}_i^a$。所以在 IMU 预积分中，全部的导航状态是 $\mathbf{R}_i,\mathbf{p}_i,\mathbf{v}_i,\mathbf{R}_j,\mathbf{p}_j,\mathbf{v}_j,\delta\mathbf{b}_i^g,\delta\mathbf{b}_i^a$。

• 非线性最小二乘计算过程中，需要通过“增量”来更新状态，最终计算指标（一般即残差 $\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}$、$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}$ 和 $\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}$），这个过程叫做“lifting”（这是目前的理解，参见高博书中的非线性优化部分 P109-6.2 节）。对于上述导航状态，则需要进行如下的“lifting”操作：

$$\mathbf{R}_i \leftarrow \mathbf{R}_i\cdot\mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_i\right);\ \mathbf{p}_i \leftarrow \mathbf{p}_i+\mathbf{R}_i\cdot\delta\mathbf{p}_i;\ \mathbf{v}_i \leftarrow \mathbf{v}_i+\delta\mathbf{v}_i;$$

$$\mathbf{R}_j \leftarrow \mathbf{R}_j\cdot\mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_j\right);\ \mathbf{p}_j \leftarrow \mathbf{p}_j+\mathbf{R}_j\cdot\delta\mathbf{p}_j;\ \mathbf{v}_j \leftarrow \mathbf{v}_j+\delta\mathbf{v}_j;$$

$$\delta\mathbf{b}_i^g \leftarrow \delta\mathbf{b}_i^g+\widetilde{\delta\mathbf{b}_i^g};\ \delta\mathbf{b}_i^a \leftarrow \delta\mathbf{b}_i^a+\widetilde{\delta\mathbf{b}_i^a}$$

在利用各类方法进行非线性最小二乘计算时，需要提供残差关于这些状态的 Jacobian。

• 关于“$\mathbf{p}_i$ 和 $\mathbf{p}_j$ 为什么不采用类似 $\mathbf{v}_i \leftarrow \mathbf{v}_i+\delta\mathbf{v}_i$ 的直接加增量 lifiting 的形式”的分析。

i 时刻的位姿可以由下述矩阵表示：

$$\mathbf{T}_i=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_i & \mathbf{p}_i\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{R}_i=\mathbf{R}_{b_i}^w$ 表示 i 时刻载体系到世界系的方向余弦阵，$\mathbf{p}_i=\mathbf{p}_{\overline{wb_i}}^w$ 表示 i 时刻载体位置在世界系中的坐标。

给该位姿一个右乘摄动如下：

$$\delta\mathbf{T}_i=\begin{bmatrix}\delta\mathbf{R}_i & \delta\mathbf{p}_i\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

对 $\mathbf{T}_i$ 右乘 $\delta\mathbf{T}_i$ 有：

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_i'=\mathbf{T}_i\cdot\delta\mathbf{T}_i&=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_i & \mathbf{p}_i\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\mathbf{R}_i & \delta\mathbf{p}_i\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_i\cdot\delta\mathbf{R}_i & \mathbf{p}_i+\mathbf{R}_i\cdot\delta\mathbf{p}_i\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_i' & \mathbf{p}_i'\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

可以看到，当采用这种右乘方式对位姿进行摄动时，得到的旋转和平移部分就是前面给出的“lifting”的形式。因此这种右乘摄动的方式就是 $\mathbf{p}_i$ 和 $\mathbf{p}_j$ 的 lifting 采取特定形式的原因。

那么这样的右乘摄动方式是否合理呢？下面我们来分析一下这个摄动项中 $\delta\mathbf{R}_i$ 和 $\delta\mathbf{p}_i$ 代表的含义，看看它们的物理意义是否合理：

类似对 $\mathbf{T}_i$ 的分析，$\mathbf{R}_i'=\mathbf{R}_i\cdot\delta\mathbf{R}_i$ 应当表示 i 时刻摄动载体系（b_i' 系）到世界系的方向余弦阵，于是

$$\mathbf{R}_{b_i'}^w=\mathbf{R}_{b_i}^w\cdot\delta\mathbf{R}_i\Rightarrow\delta\mathbf{R}_i=\mathbf{R}_w^{b_i}\mathbf{R}_{b_i'}^w=\mathbf{R}_{b_i'}^{b_i}$$

即 $\delta\mathbf{R}_i$ 表示 i 时刻摄动载体系到载体系的方向余弦阵（这个不重要）。

$\mathbf{p}_i'=\mathbf{p}_i+\mathbf{R}_i\cdot\delta\mathbf{p}_i$ 应当表示 i 时刻摄动载体位置在世界系中的坐标，于是

$$\mathbf{p}_{\overline{wb_i'}}^w=\mathbf{p}_{\overline{wb_i}}^w+\mathbf{R}_{b_i}^w\cdot\delta\mathbf{p}_i\Rightarrow\delta\mathbf{p}_i=\mathbf{R}_w^{b_i}\cdot\left(\mathbf{p}_{\overline{wb_i'}}^w-\mathbf{p}_{\overline{wb_i}}^w\right)=\mathbf{R}_w^{b_i}\cdot\mathbf{p}_{\overline{b_ib_i'}}^w=\mathbf{p}_{\overline{b_ib_i'}}^{b_i}$$

即 $\delta\mathbf{p}_i$ 表示 i 时刻载体系原点到摄动载体系原点的矢量在载体系下的坐标。

于是 $\delta\mathbf{T}_i$ 可写作：

$$\delta\mathbf{T}_i=\begin{bmatrix}\delta\mathbf{R}_i & \delta\mathbf{p}_i\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_{b_i'}^{b_i} & \mathbf{p}_{\overline{b_ib_i'}}^{b_i}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

可以看出，这个摄动矩阵体现了“摄动载体系在载体系下的位姿”，具有明确的物理意义。以上分析，表明当前 $\mathbf{p}_i$ 和 $\mathbf{p}_j$ 的 lifting 形式，是在给位姿矩阵 $\mathbf{T}_i$ 提供一个有明确物理意义的右乘摄动 $\delta\mathbf{T}_i$ 造成的结果。

其实，我们也可以采用 $\mathbf{p}_i \leftarrow \mathbf{p}_i + \delta\mathbf{p}_i$ 这样的 lifting 形式，但这时的 $\delta\mathbf{p}_i$ 将表示“载体系原点到摄动载体系原点的矢量在世界系下的坐标”，这样的物理意义虽然正确但有点别扭，反推出的位姿右乘摄动矩阵也会比较别扭：

$$\delta\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{R}_i & \mathbf{R}_i^T\delta\mathbf{p}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• 当预积分参与到 BA 优化中时，最终是希望使得这些残差项的加权平方和最小。之所以要加权是因为各状态量的单位不统一，需要对其进行归一化。由于残差项即预积分理想值与预积分测量值之“差”（广义的差，注意到对于 $\Delta\mathbf{R}$ 来说是逆），因此权重就是前面给出的预积分噪声协方差的逆。

此外，熟悉非线性最小二乘方法的读者应该知道，在利用高斯牛顿或者 LM 方法进行优化求解时，每次迭代需要通过求解一个增量方程来求取状态的增量，这个增量方程的系数矩阵由残差关于待优化状态的 Jacobian 和权重来共同计算。因此我们还需要将 Jacobian 的表达式求出。

需要再次强调和格外注意的一点是，残差中待优化的状态为 $\mathbf{R}_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{R}_j, \mathbf{p}_j, \mathbf{v}_j, \delta\mathbf{b}_i^g, \delta\mathbf{b}_i^a$（由残差项中预积分测量值的修正方式决定），在迭代中求解增量方程得到的增量是 $\delta\vec{\phi}_i, \delta\mathbf{p}_i, \delta\mathbf{v}_i, \delta\vec{\phi}_j, \delta\mathbf{p}_j, \delta\mathbf{v}_j, \widetilde{\delta\mathbf{b}_i^g}, \widetilde{\delta\mathbf{b}_i^a}$。其中 $\delta\vec{\phi}_i$ 和 $\delta\vec{\phi}_j$ 是姿态在切空间上的增量，而 $\widetilde{\delta\mathbf{b}_i^g}$ 和 $\widetilde{\delta\mathbf{b}_i^a}$ 是 bias 的***增量的增量***。这部分概念需要读者好好思考理解，不要被 bias 弄晕了。

• **★★★注意，IMU 预积分原文中，残差的 Jacobian 表述成“关于状态增量的 Jacobian”是不正确的！在优化中，我们是将残差项关于状态进行泰勒展开从而引出增量方程的，也就是说泰勒展开得到的 Jacobian 是关于状态的 Jacobian。尽管 IMU 预积分中推导的公式最终是正确的，但在本文中，我们对这个错误的表述进行修正。**

• 下面开始求各残差项（$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}$、$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}$ 和 $\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}$）关于各状态的 Jacobian。

这些 Jacobian 分成三类：

第一类是“0 类”（即残差中不包括某些状态时，对应的 Jacobian 自然为 0）；

第二类是“线性类”（残差关于某些状态是线性的，因此对应的 Jacobian 可直接由线性系数得到）；

第三类为“复杂类”（这种情况下的状态在残差表达式中的耦合关系比较复杂，需要对残差使用 lifting，并进行相应变形来求取 Jacobian）。

• $\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}$ 的 Jacobian：

（1）“0 类”

$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}$ 中不含 $\mathbf{p}_i$、$\mathbf{p}_j$、$\mathbf{v}_i$、$\mathbf{v}_j$ 以及 $\delta\mathbf{b}_i^a$，因此 $\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}$ 关于这些状态的 Jacobian 都为 0（零矩阵）：

$$\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}}{\partial\mathbf{p}_i} = \mathbf{0},\quad \frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}}{\partial\mathbf{p}_j} = \mathbf{0},\quad \frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}}{\partial\mathbf{v}_i} = \mathbf{0},\quad \frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}}{\partial\mathbf{v}_j} = \mathbf{0},\quad \frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}}{\partial\mathbf{b}_i^a} = \mathbf{0}$$

（2）“线性类”

无。

（3）“复杂类”

下面求关于 $\vec{\phi}_i$（$\mathbf{R}_i$ 对应的李代数）、$\vec{\phi}_j$（$\mathbf{R}_j$ 对应的李代数）和 $\delta\mathbf{b}_i^g$ 的 Jacobian。

关于 $\vec{\phi}_i$ 的 Jacobian：

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\left(\mathbf{R}_i\mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_i\right)\right) &= \mathrm{Log}\left[\left(\Delta\hat{\mathbf{R}}_{ij}\right)^T\left(\mathbf{R}_i\mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_i\right)\right)^T\mathbf{R}_j\right] \\
&\overset{①}{=} \mathrm{Log}\left[\left(\Delta\hat{\mathbf{R}}_{ij}\right)^T\mathrm{Exp}\left(-\delta\vec{\phi}_i\right)\mathbf{R}_i^T\mathbf{R}_j\right] \\
&\overset{②}{=} \mathrm{Log}\left[\left(\Delta\hat{\mathbf{R}}_{ij}\right)^T\mathbf{R}_i^T\mathbf{R}_j\mathrm{Exp}\left(-\mathbf{R}_j^T\mathbf{R}_i\delta\vec{\phi}_i\right)\right] \\
&= \mathrm{Log}\left\{\mathrm{Exp}\left[\mathrm{Log}\left(\left(\Delta\hat{\mathbf{R}}_{ij}\right)^T\mathbf{R}_i^T\mathbf{R}_j\right)\right]\cdot\mathrm{Exp}\left(-\mathbf{R}_j^T\mathbf{R}_i\delta\vec{\phi}_i\right)\right\} \\
&= \mathrm{Log}\left[\mathrm{Exp}\left(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\left(\mathbf{R}_i\right)\right)\cdot\mathrm{Exp}\left(-\mathbf{R}_j^T\mathbf{R}_i\delta\vec{\phi}_i\right)\right] \\
&\overset{③}{\approx} \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\left(\mathbf{R}_i\right)-\mathbf{J}_r^{-1}\left(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\left(\mathbf{R}_i\right)\right)\mathbf{R}_j^T\mathbf{R}_i\delta\vec{\phi}_i \\
&\overset{④}{=} \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}-\mathbf{J}_r^{-1}\left(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\right)\mathbf{R}_j^T\mathbf{R}_i\delta\vec{\phi}_i
\end{aligned}$$

推导中的细节：

①处：

利用性质“$\left(\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\right)^T=\mathrm{Exp}\left(-\vec{\phi}\right)$”。

②处：

利用 Adjoint 性质“$\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\mathbf{R}=\mathbf{R}\cdot\mathrm{Exp}\left(\mathbf{R}^T\vec{\phi}\right)$”。

③处：

利用性质“当$\delta\vec{\phi}$是小量时有$\mathrm{Log}\left(\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}\right)\right)=\vec{\phi}+\mathbf{J}_r^{-1}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\delta\vec{\phi}$”。

④处：

根据$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}=\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\left(\mathbf{R}_i\right)$，即未进行 lifting 的残差即原残差。

根据上式有$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}$关于$\vec{\phi}_i$的 Jacobian：

$$\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}}{\partial\vec{\phi}_i}=-\mathbf{J}_r^{-1}\left(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\right)\mathbf{R}_j^T\mathbf{R}_i$$

关于$\vec{\phi}_j$的 Jacobian：

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\left(\mathbf{R}_j\mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_j\right)\right) &= \mathrm{Log}\left[\left(\Delta\hat{\mathbf{R}}_{ij}\right)^T\mathbf{R}_i^T\mathbf{R}_j\mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_j\right)\right] \\
&= \mathrm{Log}\left\{\mathrm{Exp}\left[\mathrm{Log}\left(\left(\Delta\hat{\mathbf{R}}_{ij}\right)^T\mathbf{R}_i^T\mathbf{R}_j\right)\right]\cdot\mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_j\right)\right\} \\
&= \mathrm{Log}\left\{\mathrm{Exp}\left(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\left(\mathbf{R}_j\right)\right)\cdot\mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_j\right)\right\} \\
&\overset{①}{\approx} \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\left(\mathbf{R}_j\right)+\mathbf{J}_r^{-1}\left(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\left(\mathbf{R}_j\right)\right)\delta\vec{\phi}_j \\
&\overset{②}{=} \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}+\mathbf{J}_r^{-1}\left(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\right)\delta\vec{\phi}_j
\end{aligned}$$

推导中的细节：

①处：

利用性质“当$\delta\vec{\phi}$是小量时有$\mathrm{Log}\left(\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}\right)\right)=\vec{\phi}+\mathbf{J}_r^{-1}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\delta\vec{\phi}$”。

②处：

根据$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}=\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\left(\mathbf{R}_j\right)$，即未进行 lifting 的残差即原残差。

根据上式有$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}$关于$\vec{\phi}_j$的 Jacobian：

$$\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}}{\partial\vec{\phi}_j}=\mathbf{J}_r^{-1}\left(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\right)$$

关于$\delta\mathbf{b}_i^g$的 Jacobian：

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\left(\delta\mathbf{b}_i^g+\widetilde{\delta\mathbf{b}_i^g}\right)&=\mathrm{Log}\left\{\left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}\left(\bar{\mathbf{b}}_i^g\right)\mathrm{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\left(\delta\mathbf{b}_i^g+\widetilde{\delta\mathbf{b}_i^g}\right)\right)\right]^T\mathbf{R}_i^T\mathbf{R}_j\right\}\\
&\overset{①}{\approx}\mathrm{Log}\left\{\left[\Delta\tilde{\mathbf{R}}_{ij}\left(\bar{\mathbf{b}}_i^g\right)\mathrm{Exp}\left(\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)\mathrm{Exp}\left(\mathbf{J}_r\left(\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\widetilde{\delta\mathbf{b}_i^g}\right)\right]^T\Delta\mathbf{R}_{ij}\right\}\\
&\overset{②}{=}\mathrm{Log}\left\{\left[\Delta\hat{\mathbf{R}}_{ij}\cdot\mathrm{Exp}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\widetilde{\delta\mathbf{b}_i^g}\right)\right]^T\Delta\mathbf{R}_{ij}\right\}\\
&\overset{③}{=}\mathrm{Log}\left[\mathrm{Exp}\left(-\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\widetilde{\delta\mathbf{b}_i^g}\right)\Delta\hat{\mathbf{R}}_{ij}^T\Delta\mathbf{R}_{ij}\right]\\
&=\mathrm{Log}\left[\mathrm{Exp}\left(-\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\widetilde{\delta\mathbf{b}_i^g}\right)\mathrm{Exp}\left(\mathrm{Log}\left(\Delta\hat{\mathbf{R}}_{ij}^T\Delta\mathbf{R}_{ij}\right)\right)\right]\\
&=\mathrm{Log}\left[\mathrm{Exp}\left(-\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\widetilde{\delta\mathbf{b}_i^g}\right)\mathrm{Exp}\left(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\left(\delta\mathbf{b}_i^g\right)\right)\right]\\
&\overset{④}{=}\mathrm{Log}\left\{\mathrm{Exp}\left(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\left(\delta\mathbf{b}_i^g\right)\right)\mathrm{Exp}\left[-\mathrm{Exp}\left(-\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\left(\delta\mathbf{b}_i^g\right)\right)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\widetilde{\delta\mathbf{b}_i^g}\right]\right\}\\
&\overset{⑤}{\approx}\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\left(\delta\mathbf{b}_i^g\right)-\mathbf{J}_r^{-1}\left(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\left(\delta\mathbf{b}_i^g\right)\right)\cdot\mathrm{Exp}\left(-\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\left(\delta\mathbf{b}_i^g\right)\right)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\widetilde{\delta\mathbf{b}_i^g}\\
&\overset{⑥}{=}\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}-\mathbf{J}_r^{-1}\left(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\right)\cdot\mathrm{Exp}\left(-\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\right)\cdot\mathbf{J}_r\left(\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)\cdot\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\cdot\widetilde{\delta\mathbf{b}_i^g}
\end{aligned}$$

推导中的细节：

①处：

利用性质“当$\delta\vec{\phi}$是小量时有$\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}+\delta\vec{\phi}\right)\approx\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\mathrm{Exp}\left(\mathbf{J}_r\left(\vec{\phi}\right)\cdot\delta\vec{\phi}\right)$”。

②处：

为节约篇幅令$\boldsymbol{\varepsilon}\doteq\mathbf{J}_r\left(\frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\bar{\mathbf{b}}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)$。

③处：

利用性质“$\left(\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\right)^T=\mathrm{Exp}\left(-\vec{\phi}\right)$”。

④处：

利用 Adjoint 性质“$\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\mathbf{R}=\mathbf{R}\cdot\mathrm{Exp}\left(\mathbf{R}^T\vec{\phi}\right)$”。

⑤处：

利用性质“当$\delta\vec{\phi}$是小量时有$\mathrm{Log}\left(\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}\right)\right)=\vec{\phi}+\mathbf{J}_r^{-1}\left(\vec{\phi}\right)\cdot\delta\vec{\phi}$”。

⑥处：

根据 $\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}} = \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\left(\delta\mathbf{b}_i^g\right)$，即未进行 lifting 的残差即原残差；同时代入 $\boldsymbol{\varepsilon} \doteq \mathbf{J}_r\left(\frac{\partial\Delta\overline{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\overline{\mathbf{b}}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)$。

根据上式有 $\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}$ 关于 $\delta\mathbf{b}_i^g$ 的 Jacobian：

$$\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}}{\partial\delta\mathbf{b}_i^g} = -\mathbf{J}_r^{-1}\left(\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\right)\cdot\mathrm{Exp}\left(-\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{R}_{ij}}\right)\cdot\mathbf{J}_r\left(\frac{\partial\Delta\overline{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\overline{\mathbf{b}}^g}\delta\mathbf{b}_i^g\right)\cdot\frac{\partial\Delta\overline{\mathbf{R}}_{ij}}{\partial\overline{\mathbf{b}}^g}$$

• $\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}$ 的 Jacobian：

（1）“0 类”

$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}$ 中不含 $\mathbf{R}_j$、 $\mathbf{p}_i$、 $\mathbf{p}_j$，因此 $\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}$ 关于这些状态（对于姿态来说是关于它的李代数）的 Jacobian 都为 0（零矩阵）：

$$\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}}{\partial\vec{\phi}_j} = \mathbf{0},\quad \frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}}{\partial\mathbf{p}_i} = \mathbf{0},\quad \frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}}{\partial\mathbf{p}_j} = \mathbf{0}$$

（2）“线性类”

$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}$ 关于 $\delta\mathbf{b}_i^g$ 和 $\delta\mathbf{b}_i^a$ 是线性的，因此 $\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}$ 关于 $\delta\mathbf{b}_i^g$ 和 $\delta\mathbf{b}_i^a$ 的 Jacobian 可直接由线性系数求得：

$$\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}}{\partial\delta\mathbf{b}_i^g} = -\frac{\partial\Delta\overline{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^g},\quad \frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}}{\partial\delta\mathbf{b}_i^a} = -\frac{\partial\Delta\overline{\mathbf{v}}_{ij}}{\partial\mathbf{b}^a}$$

（3）“复杂类”

下面求关于 $\mathbf{v}_i$、 $\mathbf{v}_j$ 和 $\vec{\phi}_i$ 的 Jacobian。

关于 $\mathbf{v}_i$ 的 Jacobian：

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}\left(\mathbf{v}_i+\delta\mathbf{v}_i\right) &= \mathbf{R}_i^T\cdot\left(\mathbf{v}_j-\mathbf{v}_i-\delta\mathbf{v}_i-\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right)-\Delta\hat{\mathbf{v}}_{ij}\\
&= \mathbf{R}_i^T\cdot\left(\mathbf{v}_j-\mathbf{v}_i-\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right)-\Delta\hat{\mathbf{v}}_{ij}-\mathbf{R}_i^T\delta\mathbf{v}_i\\
&= \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}\left(\mathbf{v}_i\right)-\mathbf{R}_i^T\delta\mathbf{v}_i\\
&\overset{①}{=} \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}-\mathbf{R}_i^T\delta\mathbf{v}_i
\end{aligned}$$

①处根据根据 $\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}} = \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}\left(\mathbf{v}_i\right)$，即未进行 lifting 的残差即原残差。

根据上式有 $\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}$ 关于 $\mathbf{v}_i$ 的 Jacobian：

$$\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}}{\partial\mathbf{v}_i} = -\mathbf{R}_i^T$$

关于 $\mathbf{v}_j$ 的 Jacobian：

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}\left(\mathbf{v}_j+\delta\mathbf{v}_j\right) &= \mathbf{R}_i^T\cdot\left(\mathbf{v}_j+\delta\mathbf{v}_j-\mathbf{v}_i-\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right)-\Delta\hat{\mathbf{v}}_{ij}\\
&= \mathbf{R}_i^T\cdot\left(\mathbf{v}_j-\mathbf{v}_i-\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right)-\Delta\hat{\mathbf{v}}_{ij}+\mathbf{R}_i^T\delta\mathbf{v}_j\\
&= \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}\left(\mathbf{v}_j\right)+\mathbf{R}_i^T\delta\mathbf{v}_j\\
&\overset{①}{=} \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}+\mathbf{R}_i^T\delta\mathbf{v}_j
\end{aligned}$$

①处根据根据 $\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}} = \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}\left(\mathbf{v}_j\right)$，即未进行 lifting 的残差即原残差。

根据上式有 $\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{v}_{ij}}$ 关于 $\mathbf{v}_j$ 的 Jacobian：

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \mathbf{v}_j} = \mathbf{R}_i^T$$

关于$\vec{\phi}_i$的 Jacobian：

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}\left(\mathbf{R}_i \operatorname{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_i\right)\right) &= \left(\mathbf{R}_i \operatorname{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_i\right)\right)^T \left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right) - \Delta\hat{\mathbf{v}}_{ij} \\
&\overset{①}{=} \operatorname{Exp}\left(-\delta\vec{\phi}_i\right)\cdot\mathbf{R}_i^T\cdot\left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right) - \Delta\hat{\mathbf{v}}_{ij} \\
&\overset{②}{\approx} \left(\mathbf{I} - \left(\delta\vec{\phi}_i\right)^\wedge\right)\cdot\mathbf{R}_i^T\cdot\left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right) - \Delta\hat{\mathbf{v}}_{ij} \\
&= \mathbf{R}_i^T\cdot\left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right) - \Delta\hat{\mathbf{v}}_{ij} - \left(\delta\vec{\phi}_i\right)^\wedge\cdot\mathbf{R}_i^T\cdot\left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right) \\
&\overset{③}{=} \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}\left(\mathbf{R}_i\right) + \left[\mathbf{R}_i^T\cdot\left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right)\right]^\wedge\cdot\delta\vec{\phi}_i \\
&\overset{④}{=} \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}} + \left[\mathbf{R}_i^T\cdot\left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right)\right]^\wedge\cdot\delta\vec{\phi}_i
\end{aligned}$$

推导中的细节：

①处：

利用性质“$\left(\operatorname{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\right)^T = \operatorname{Exp}\left(-\vec{\phi}\right)$”。

②处：

利用性质“当$\vec{\phi}$是小量时，有一阶近似如下：$\operatorname{Exp}\left(\vec{\phi}\right) \approx \mathbf{I} + \vec{\phi}^\wedge$”。

③处：

利用性质“$\mathbf{a}^\wedge\cdot\mathbf{b} = -\mathbf{b}^\wedge\cdot\mathbf{a}$”。

④处：

根据$\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}} = \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}\left(\mathbf{R}_i\right)$，即未进行 lifting 的残差即原残差。

根据上式有$\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}$关于$\vec{\phi}_i$的 Jacobian：

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{v}_{ij}}}{\partial \vec{\phi}_i} = \left[\mathbf{R}_i^T\cdot\left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}\right)\right]^\wedge$$

· $\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}$的 Jacobian：

（1）“0 类”

$\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}$中不含$\mathbf{R}_j$和$\mathbf{v}_j$，因此$\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}$关于这些状态（对于姿态来说是关于它的李代数）的 Jacobian 都为 0（零矩阵）：

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \vec{\phi}_j} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \mathbf{v}_j} = \mathbf{0}$$

（2）“线性类”

$\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}$关于$\delta\mathbf{b}_i^g$和$\delta\mathbf{b}_i^a$是线性的，因此$\mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}$关于$\delta\mathbf{b}_i^g$和$\delta\mathbf{b}_i^a$的 Jacobian 可直接由线性系数求得：

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta\mathbf{b}_i^g} = -\frac{\partial \Delta\overline{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^g}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta \mathbf{p}_{ij}}}{\partial \delta\mathbf{b}_i^a} = -\frac{\partial \Delta\overline{\mathbf{p}}_{ij}}{\partial \mathbf{b}^a}$$

（3）“复杂类”

下面求关于$\mathbf{p}_i$、$\mathbf{p}_j$、$\mathbf{v}_i$和$\vec{\phi}_i$的 Jacobian。

关于$\mathbf{p}_i$的 Jacobian：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}\left(\mathbf{p}_i+\mathbf{R}_i\cdot\delta\mathbf{p}_i\right) &= \mathbf{R}_i^T\left(\mathbf{p}_j-\mathbf{p}_i-\mathbf{R}_i\cdot\delta\mathbf{p}_i-\mathbf{v}_i\cdot\Delta t_{ij}-\frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right)-\Delta\hat{\mathbf{p}}_{ij} \\
&= \mathbf{R}_i^T\left(\mathbf{p}_j-\mathbf{p}_i-\mathbf{v}_i\cdot\Delta t_{ij}-\frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right)-\Delta\hat{\mathbf{p}}_{ij}-\mathbf{I}\cdot\delta\mathbf{p}_i \\
&= \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}\left(\mathbf{p}_i\right)-\mathbf{I}\cdot\delta\mathbf{p}_i \\
&\overset{①}{=} \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}-\mathbf{I}\cdot\delta\mathbf{p}_i
\end{aligned}
$$

①处根据根据$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}=\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}\left(\mathbf{p}_i\right)$，即未进行 lifting 的残差即原残差。

根据上式有$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}$关于$\mathbf{p}_i$的 Jacobian：

$$
\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}}{\partial\mathbf{p}_i}=-\mathbf{I}
$$

关于$\mathbf{p}_j$的 Jacobian：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}\left(\mathbf{p}_j+\mathbf{R}_j\cdot\delta\mathbf{p}_j\right) &= \mathbf{R}_i^T\left(\mathbf{p}_j+\mathbf{R}_j\cdot\delta\mathbf{p}_j-\mathbf{p}_i-\mathbf{v}_i\cdot\Delta t_{ij}-\frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right)-\Delta\hat{\mathbf{p}}_{ij} \\
&= \mathbf{R}_i^T\left(\mathbf{p}_j-\mathbf{p}_i-\mathbf{v}_i\cdot\Delta t_{ij}-\frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right)-\Delta\hat{\mathbf{p}}_{ij}+\mathbf{R}_i^T\mathbf{R}_j\cdot\delta\mathbf{p}_j \\
&= \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}\left(\mathbf{p}_j\right)+\mathbf{R}_i^T\mathbf{R}_j\cdot\delta\mathbf{p}_j \\
&\overset{①}{=} \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}+\mathbf{R}_i^T\mathbf{R}_j\cdot\delta\mathbf{p}_j
\end{aligned}
$$

①处根据根据$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}=\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}\left(\mathbf{p}_j\right)$，即未进行 lifting 的残差即原残差。

根据上式有$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}$关于$\mathbf{p}_j$的 Jacobian：

$$
\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}}{\partial\mathbf{p}_j}=\mathbf{R}_i^T\mathbf{R}_j
$$

关于$\mathbf{v}_i$的 Jacobian：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}\left(\mathbf{v}_i+\delta\mathbf{v}_i\right) &= \mathbf{R}_i^T\left(\mathbf{p}_j-\mathbf{p}_i-\mathbf{v}_i\cdot\Delta t_{ij}-\delta\mathbf{v}_i\cdot\Delta t_{ij}-\frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right)-\Delta\hat{\mathbf{p}}_{ij} \\
&= \mathbf{R}_i^T\left(\mathbf{p}_j-\mathbf{p}_i-\mathbf{v}_i\cdot\Delta t_{ij}-\frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right)-\Delta\hat{\mathbf{p}}_{ij}-\mathbf{R}_i^T\Delta t_{ij}\cdot\delta\mathbf{v}_i \\
&= \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}\left(\mathbf{v}_i\right)-\mathbf{R}_i^T\Delta t_{ij}\cdot\delta\mathbf{v}_i \\
&\overset{①}{=} \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}-\mathbf{R}_i^T\Delta t_{ij}\cdot\delta\mathbf{v}_i
\end{aligned}
$$

①处根据根据$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}=\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}\left(\mathbf{v}_i\right)$，即未进行 lifting 的残差即原残差。

根据上式有$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}$关于$\mathbf{v}_i$的 Jacobian：

$$
\frac{\partial\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}}{\partial\mathbf{v}_i}=-\mathbf{R}_i^T\Delta t_{ij}
$$

关于$\vec{\phi}_i$的 Jacobian：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}\left(\mathbf{R}_i \mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_i\right)\right) &= \left(\mathbf{R}_i \mathrm{Exp}\left(\delta\vec{\phi}_i\right)\right)^T \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right) - \Delta\hat{\mathbf{p}}_{ij} \\
&\overset{①}{=} \mathrm{Exp}\left(-\delta\vec{\phi}_i\right)\cdot \mathbf{R}_i^T \cdot \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right) - \Delta\hat{\mathbf{p}}_{ij} \\
&\overset{②}{\approx} \left(\mathbf{I} - \left(\delta\vec{\phi}_i\right)^\wedge\right)\cdot \mathbf{R}_i^T \cdot \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right) - \Delta\hat{\mathbf{p}}_{ij} \\
&= \mathbf{R}_i^T \cdot \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right) - \Delta\hat{\mathbf{p}}_{ij} - \left(\delta\vec{\phi}_i\right)^\wedge \mathbf{R}_i^T \cdot \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right) \\
&\overset{③}{=} \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}\left(\mathbf{R}_i\right) + \left[\mathbf{R}_i^T \cdot \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right)\right]^\wedge \cdot \delta\vec{\phi}_i \\
&\overset{④}{=} \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}} + \left[\mathbf{R}_i^T \cdot \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right)\right]^\wedge \cdot \delta\vec{\phi}_i
\end{aligned}
$$

推导中的细节：

①处：

利用性质“$\left(\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right)\right)^T = \mathrm{Exp}\left(-\vec{\phi}\right)$”。

②处：

利用性质“当$\vec{\phi}$是小量时，有一阶近似如下：$\mathrm{Exp}\left(\vec{\phi}\right) \approx \mathbf{I} + \vec{\phi}^\wedge$”。

③处：

利用性质“$\mathbf{a}^\wedge \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{b}^\wedge \cdot \mathbf{a}$”。

④处：

根据$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}} = \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}\left(\mathbf{R}_i\right)$，即未进行 lifting 的残差即原残差。

根据上式有$\mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}$关于$\vec{\phi}_i$的 Jacobian：

$$
\frac{\partial \mathbf{r}_{\Delta\mathbf{p}_{ij}}}{\partial \vec{\phi}_i} = \left[\mathbf{R}_i^T \cdot \left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \cdot \Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\cdot\Delta t_{ij}^2\right)\right]^\wedge
$$

六、简短的总结

全文将 Foster 的 IMU 预积分理论中的公式进行了详细推导，由于笔者水平有限，疏漏在所难免，望读者批评指正。

本文没有对 IMU 预积分的具体应用进行分析和说明，相关内容可在文首第〇部分提到的若干 VIO 方案中寻找答案。

六、参考文献

[1] Visual-Inertial-Aided Navigation for High-Dynamic Motion in Built Environments Without Initial Conditions

[2] On-Manifold Preintegration Theory for Fast and Accurate Visual-Inertial Navigation

[3] IMU Preintegration on Manifold for Efficient Visual-Inertial Maximum-a-Posteriori Estimation

[4] Supplementary material to: IMU preintegration on manifold for efficient visual-inertial maximum-a-posteriori estimation

[5] 《视觉 SLAM 十四讲》 高翔

[6] 《惯性导航》第一版 秦永元

[7] 《State Estimation for Robotics》